

Кириакиди С.К. Сатин В.А.

# Надежность летательных аппаратов

Воронеж, 2009

УДК 629.07.017.

Надежность летательных аппаратов: Учеб. пособие/ С.К. Кириакиди. В.А. Сатин и др. Воронеж: Изд-во ВГТУ, 2009. 107 с.

Учебное пособие включает в себя все необходимые теоретические разделы по курсу «Надежность летательных аппаратов». Представлены необходимые сведения по основам ресурсного проектирования машин. Изложены вопросы обеспечения усталостной прочности и долговечности элементов конструкции. Рассмотрены вопросы обеспечения живучести самолета. Изложена методика определения оптимального комплекта запасных частей.

, Табл.7. Ил. 24.

Рецензенты: НИИ автоматизированных средств проектирования и контроля;  
д-р техн. наук В.В. Шитов.

Издается по решению редакционно-издательского совета Воронежского государственного технического университета

с Кириакиди С.К. Сатин В.А. 2009.

с Оформление. Издательство Воронежского  
Государственного Технического Университета, 2009.

## ВВЕДЕНИЕ

При создании любых сооружений человек заботится об их долговечности и надёжности.

В начале нашего столетия человек, вооружившись знаниями аэродинамики начал освоение воздушного пространства. И сразу выяснилось: от надёжности летательного аппарата зависит жизнь его создателя. На начальном этапе развития авиации конструкторы, как правило, сами облётывали свои конструкции. Ценой огромных усилий, неутомимой изобретательности и многочисленных жертв конструкторам самолётов удалось преодолеть барьер их ненадёжности. Самолётостроение превратилось в воздушную отрасль промышленности многих стран. Строителям дирижаблей в прошлом этого так и не удалось достичь.

Повышение эффективности боевых и пассажирских самолётов обеспечивается значительным усложнением основных систем. Если у многоместных пассажирских самолётов за счёт дополнительного резервирования важнейших систем удаётся обеспечить высокую безопасность и регулярность полётов, то в отношении боевых машин возникают значительные трудности из-за жёстких ограничений, в частности, по взлётной массе.

По данным зарубежной печати следствием усложнения основных компонентов и систем явилось снижение эксплуатационных характеристик новых боевых авиационных комплексов (БАК) и в первую очередь их надёжности. Так несмотря на использование теории надёжности и проведения совместных приёмочных испытаний при предельных эксплуатационных нагрузках, после начала серийного производства и эксплуатации в строю выявились сложнейшие проблемы, связанные с низким уровнем безотказности, эксплуатационной технологичности, безопасности и живучести новых боевых самолетов США. Боеготовность некоторых эскадрилий самолётов F-111, F-14, F-15 в первые годы составляла около 35%. Налет на неисправность ряда самолетов составлял 0,2-0,3 часа. Относительная трудоемкость технического обслуживания у самолета F-14 оказалось равной 49 чел.часа / час налета вместо 29 по технико-техническим

требованиям (ТТТ). Актуальность проблемы надежности наглядно демонстрируется на примерах выполнения космических программ США.

Таким образом, показатели надежности, безопасности и живучести имеют такое же важное значение, как и летные характеристики.

Учет надежности должен проводиться с самого начала этапа проектирования, с этапа формирования облика будущего самолета. Так в зависимости от требуемой безопасности определяется количеством двигателей, число членов экипажа, степень резервирования основных систем. Эти решения оказывают существенное влияние на облик будущего самолета.

Требования эксплуатационной технологичности так же должны быть учтены на этапе формирования облика самолета. Более удобные подходы к менее надежному оборудованию обеспечиваются такими особенностями компоновки, которые влияют на облик самолета. Требования минимального времени замены двигателя, заправки и снаряжения самолета для повторного вылета так же требуют специальных компоновочных решений.

На этапе эскизного проектирования самолета синтез оптимальной структуры основных систем производится с учетом безотказности элементов, которую обеспечивает современный уровень развития промышленности. Безотказность элементов основных систем самолетов определяется путем сбора и обработки статистических данных по отказам и неисправностям в процессе длительной эксплуатации. Расчетные оценки безотказности вариантов структур основных систем лежат в основе метода прогнозирования надежности проектируемого самолета.

На этапе эскизного проекта схемно-конструктивные и компоновочные решения выбираются в рамках принятого облика самолета, исходя из необходимости обеспечения значений следующих показателей надежности: налета на отказ, вероятности вылета по расписанию (для пассажирских самолетов), Ц удельной трудоемкости технического обслуживания, времени подготовки к повторному вылету и полного ресурса.

На этапе технического проекта принятые решения уточняются после выполнения более полных расчетов показателей надежности.

Если расчетное время подготовки самолета к повторному вылету может быть экспериментально подтверждено уже на этапе летных испытаний опытных образцов, то расчетные оценки других показателей надежности проверяются опытными данными после достаточно большого суммарного налета экземпляров нового самолета.

Поэтому разработка и совершенствование расчетных методов оценки надежности, безопасности и живучести разрабатываемых самолетов приобретает великое значение, так как позволяет сократить сроки конструктивно-технологической доводки нового самолета и значительно уменьшить объем дорогостоящих испытаний. Использование ЭВМ для хранения и выдачи информации по статистике летных происшествий, отказов и неисправностей позволяет наиболее полно учесть опыт промышленности. Имитационное моделирование с использованием как достаточно сложных, но зато и точных математических моделей, так и натурных функционирующих стендов, открывает новые перспективы для выявления недостатков конструкции нового самолета и более раннего их устранения.

Особое место в проектировании занимает комплекс работ по обеспечению заданной долговечности агрегатов и узлов планера самолета и его шасси. Несмотря на большой разброс экспериментальных данных о фактической долговечности авиационных конструкций, расчетные методы ее оценки в процессе конструирования остаются важнейшим инструментом создания оптимальных решений.

Новое направление в подходе к проблеме обеспечения максимальной долговечности пассажирских самолетов связано с разработкой безопасно разрушающихся конструкций панелей, стенок, стыковых узлов, кронштейнов навески поверхностей укрепления и других ответственных деталей. С возрастанием стоимости создания новых авиационных комплексов исключительную

актуальность приобретает технологически и экономически обоснованные определения оптимального полного ресурса самолета, особенно пассажирского.

Повышение качества конструирования самолетов на современном этапе развития авиационной техники связано с развитием экспериментальных исследований.

Чем больше конструктивных недостатков будет выявлено на стадии экспериментальных исследований материалов, деталей, технологий, тем меньше изменений придется вносить в чертежи на серийном заводе и меньше доработок готовых самолетов производить в эксплуатирующих организациях.

Итак, надежность изделия закладывается при разработке, обеспечивается при изготовлении и поддерживается при эксплуатации. Строгое выполнение этого правила необходимо, поскольку недоработки предыдущего этапа практически невозможно ликвидировать на последующем. Когда конструктор в конце этапа разработки подтверждает расчетным путем, экспериментами и летными испытаниями опытных машин, что показатели надежности нового самолета соответствуют значениям, требуемым заказчиком, то он ориентируется на определенный уровень качества серийного производства и на определенный уровень качества технического обслуживания самолетов в эксплуатации.

Обеспечение надежности, безопасности и живучести современного самолета является важнейшей народно-хозяйственной задачей, в решении которой принимают участие специалисты не только авиационной промышленности, но и многих других отраслей народного хозяйства.

## **ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ, БЕЗОПАСНОСТИ И ЖИВУЧЕСТИ САМОЛЕТА.**

Определения и термины.

В числе важнейших эксплуатационно-технических характеристик (ЭТХ), определяющих эффективность самолета, особое место занимают показатели надежности, безопасности и живучести. В ТТТ на проектируемые самолеты значения показателей надежности, безопасности и живучести задаются так же, как и летно-технические характеристики (ЛТХ): грузоподъемность, крейсерская скорость, длина ВПП, максимальная дальность, точность навигации и др.

В соответствии с ГОСТ 27.002 - 83 «Надежность в технике. Термины и определения».

Дадим определения следующим понятиям:

Надежность - свойство самолета сохранять во времени в установленных пределах значения всех параметров, характеризующих способность выполнять полетные задания в расчетных режимах и условиях эксплуатации, технического обслуживания, ремонтов, хранения и транспортирования. Таким образом, надежность является сложным свойством самолета и состоит из сочетаний свойств: безотказности, ремонтпригодности, долговечности и сохраняемости.

Безотказность - свойство самолета непрерывно сохранять работоспособное состояние в течение времени выполнения полетного задания.

Ремонтпригодность - свойство самолета, заключающееся в приспособленности к предупреждению и обнаружению причин возникновения отказов, повреждений и поддержанию и восстановлению работоспособного состояния путем проведения технического обслуживания и ремонтов. Ремонтпригодность входит в более общее свойство самолета эксплуатационную технологичность. Эксплуатационная технологичность характеризует приспособленность самолета к выполнению всех видов работ по техническому

обслуживанию и ремонтам, включая заправку, снаряжение, погрузку и выгрузку, т. е. оперативное обслуживание, не связанное с отказами и повреждениями.

Долговечность - свойство самолета сохранять работоспособное состояние до наступления предельного состояния при установленной системе технического обслуживания и ремонта. Долговечность характеризует экономическую целесообразность эксплуатации самолета до предельного налета календарного срока

Сохраняемость - свойство самолета сохранять значения показателей безотказности, долговечности и ремонтпригодности в течение и после хранения и транспортировки.

Надежность самолета является одним из свойств совокупности, определяющей его качества (эффективность). В эту совокупность свойств входят также безопасность и живучесть.

Безопасность - свойство самолета непрерывно в течение времени полета сохранять работоспособность состояние тех систем и агрегатов, которые обеспечивают завершение полета без летного происшествия. Под безопасностью самолетов понимается свойство комплекса: экипаж - самолет *ИЦ* наземное обеспечение и управление воздушным движением выполнять полеты без летных происшествий.

Живучесть - свойство самолета сохранять работоспособное состояние при воздействии поражающих средств и нерасчетных нагрузок, а также при наличии накопившихся повреждений.

Перечисленные свойства самолета проявляются в процессе эксплуатации при определенном воздействии внешней среды, зависящем от режимов полета, климатических условий, интенсивности воздействия нерасчетных условий и при конкретных способах технического обслуживания. Поэтому они называются эксплуатационными и определяют значения эксплуатационных характеристик (ЭТХ) самолета. Точные оценки ЭТХ можно получить только после длительной эксплуатации большого числа самолетов данного типа.

Взаимосвязь эксплуатационных свойств самолета с его реальной эффективностью представлено на схеме.

Свойство самолета выполнять полетные задания без учета эксплуатационных свойств назовем исходной эффективностью. Она определяет пригодность самолета для использования по назначению в зависимости от его летне-технических характеристик (ЛТХ).

В процессе длительной эксплуатации самолет, его системы и агрегаты могут переходить из одного состояния в другое. ГОСТ 27.002 - 83 предусматривает пять возможных состояний объекта:

1. Исправное состояние, при котором он соответствует всем требованиям нормативно-технической и конструкторской документации;

2. Неисправное состояние, при котором он не соответствует хотя бы одному из требований нормативно-технической и конструкторской документации;

3. Работоспособное состояние, при котором значения всех параметров, характеризующих способность выполнять полетные задания, соответствуют требованиям нормативно-технической и конструкторской документации;

4. Неработоспособное состояние, при котором значение хотя бы одного параметра, характеризующего способность выполнять полетные задания, не соответствуют требованиям нормативно-технической или конструкторской документации;

5. Предельное состояние, при котором его дальнейшее применение по назначению не допустимо или нецелесообразно, либо восстановление его исправного или работоспособного состояния не возможно или нецелесообразно.

Переход самолета и его соответственных частей из одного состояния в другое происходит вследствие событий, различающихся по их последствиям.

Повреждение или неисправность - событие, заключающееся в нарушении исправного состояния системы самолета при сохранении работоспособного состояния.

Отказ - событие заключающееся в нарушении работоспособного состояния системы самолета.

Авиационное происшествие - событие, связанное с эксплуатацией самолета и произошедшее в период нахождения на его борту экипажа или пассажиров с целью выполнения полета, при котором произошло полное разрушение или повреждение самолета, которое невозможно устранить в эксплуатационной организации, с гибелью или без гибели кого-либо из указанных лиц. Авиационные происшествия делятся налетные и наземные.

К летным относятся происшествия, происходящие в полете, а к наземным происшествия до и после полета.

В зависимости от тяжести происшествий летные происшествия подразделяются на три вида: поломки, аварии и катастрофы (ГОСТ 18340 - 73).

Поломка - это не приводящее к гибели членов экипажа или пассажиров летное происшествие, после которого восстановление самолета производится ремонтным предприятием и он может быть допущен к эксплуатации.

Авария - это не приводящее к гибели членов экипажа или пассажиров летное происшествие, после которого самолет не подлежит восстановлению.

Катастрофа - это летное происшествие, которое приводит к гибели хотя бы одного лица из состава экипажа или пассажиров при полном или частичном разрушении самолета.

Летное происшествие классифицируется как катастрофа, если смерть людей от ранений, полученных в полете, наступает в течение 10 суток после него. К катастрофам также относятся случаи пропажи самолетов без вести во время полета.

Чрезвычайное происшествие - событие, связанное с эксплуатацией самолета, но не относящееся к авиационным происшествиям, при котором наступает одно из следующих последствий: разрушение или повреждение с нарушением прочности или изменением летно-технических характеристик; ранение или гибель людей; гибель находившихся на борту людей после вынужденной посадки самолета от голода, жажды, холода и других причин.

К летным происшествиям относят вынужденную посадку самолета на такой площадке, откуда он не может быть эвакуирован, независимо от степени его повреждения.

Пропажа самолета без вести также классифицируется как летное происшествие.

## **КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ, БЕЗОПАСНОСТИ И ЖИВУЧЕСТИ САМОЛЕТА.**

Безотказность самолета наиболее просто может быть количественно оценена таким показателем как налет на отказ системы, вызвавшей невыполнение полетного задания  $T_n$  [час], который определяется по формуле

$$T_n = t_n / n_n$$

где  $t_n$  - суммарный налет парка самолетов данного типа за рассматриваемый календарный период эксплуатации (например, год);

$n_n$  - суммарное количество отказов систем этих самолетов за тот же календарный период эксплуатации, вызвавших невыполнение полетного задания.

При расчетах безопасности систем и самолета в целом широко пользуются таким [показателем, как параметр потока отказов  $w_n$  [1/час], который является величиной, обратной  $T_n$ . Он представляет количество отказов, приходящихся на час налета самолетов.

В качестве показателя безотказности применяется также вероятность безотказной работы за время выполнения задания -  $P(J)$  и вероятность отказа системы самолета за время выполнения полетного задания -  $Q(J)$ , вызвавшего его срыв.

Ремонтопригодность самолета может быть количественно оценена таким комплексным показателем, как вероятность готовности к выполнению полетного задания. Для установившегося режима эксплуатации этот показатель называют коэффициентом готовности

$$K_r = t / r$$

Где  $t/r$  - относительное время пребывания самолетов в состоянии готовности к полету и в полете.

На значение коэффициента готовности самолетов данного типа большое влияние оказывает организация снабжения запасными деталями, использование технического состава на вспомогательных работах, а также другие факторы, не связанные непосредственно вместе с особенностями конструкции данного самолета.

Поэтому на этапе проектирования и в процессе начальной эксплуатации большое распространение получил показатель эксплуатационной технологичности удельная суммарная трудоемкость технического обслуживания самолета -  $K_t$ , выражаемая в чел.час/ час налета и определяемая как трудоемкость всех видов технического обслуживания и ремонта в пределах ресурса до первого ремонта, приходящаяся на час налета.

Показателями долговечности самолета являются значения ресурсов и сроков служб. Различают три вида назначенных ресурсов:

полный ресурс - это наработка, при достижении которой самолет не подлежит дальнейшей эксплуатации и ремонту;

ресурс до первого ремонта - это наработка, при достижении которой самолет подлежит направлению в первый ремонт;

межремонтный ресурс - это наработка на период эксплуатации самолета между двумя последовательными ремонтами.

При обслуживании самолетов по техническому состоянию используются только два показателя достигаемой фактической долговечности - полный ресурс и полный срок службы каждого экземпляра самолета. Вместо ресурса до первого ремонта устанавливается назначенный ремонтный цикл - предельная наработка, до которой совершаются все необходимые для каждого экземпляра самолета ремонтные работы по частям.

Ресурсы агрегатов и самолета выражаются в часах налета, количеством полетов или посадок и обозначаются соответственно  $t_n$ ,  $t_j$ ,  $t_{np}$ . Наряду с ресурсами

долговечность самолета измеряется соответствующими сроками службы - календарной продолжительностью эксплуатации в годах. Например, срок службы до первого ремонта - это календарная продолжительность эксплуатации самолета, при достижении которой он подлежит направлению в первый ремонт. Обозначаются сроки службы, соответственно,  $T_n$ ,  $T_j$ ,  $T_{пр}$ .

Самолет направляется в первый ремонт или в результате выработки ресурса до первого ремонта ил и по прошествии срока службы до первого ремонта.

Показателем сохраняемости самолета служит срок сохраняемости -  $T_{сох}$  в годах. При количественной оценке безопасности следует различать безопасность полетов самолета и безопасность самолета. Безопасность самолета зависит только от особенностей его конструкций. Безопасность полетов зависит как от безопасности самолета, так и от профессиональной подготовки экипажа и руководителей полетами, а также от технического оснащения и организационной структуры системы управления воздушным движением. При оценке безопасности полетов самолета данного типа учитывается общее число летных происшествий по всем причинам за определенный календарный период эксплуатации.

При оценке безопасности самолета учитывается число только тех летных происшествий, которые произошли из-за конструктивно-производственного недостатка (КПН).

В качестве показателя безопасности самолета наибольшее распространение получил налет на летные происшествия –  $T_{лп}$ , который определяется как

$$T_{лп} = t_s / n_{лп} ,$$

$n_{лп}$  - суммарное число летных происшествий по КПН на всем парке самолетов данного типа за рассматриваемый календарный период эксплуатации.

Как уже отмечалось, летные происшествия делятся на катастрофы, аварии и поломки.

Показателем безопасности самолета, учитывающим наиболее тяжелые летные происшествия, является налет на катастрофу -  $T_{кат}$  [час].

$$T_{\text{кат}} = t_s / n_{\text{кат}}$$

$n_{\text{кат}}$  - суммарное число катастроф по КПН на всем парке самолетов данного типа за рассматриваемый календарный период эксплуатации.

В практике ИКАО используются обратные значения указанных выше показателей безопасности:  $K_{\text{лп}}$  - число летных происшествий на 100 тысяч часов налета или на 100 тысяч посадок.

Для пассажирских самолетов самостоятельное значение приобрел показатель безопасности, учитывающий вместимость самолета и тяжесть катастроф.

Таким показателем является объем пассажирских перевозок, приходящийся на одного погибшего пассажира  $A_{\text{п}}$  [пасс.км].

$$A_{\text{п}} = \frac{\sum_{i=1}^N n_{i\text{inacc}} \mathbf{1}_{i\text{рейс}}}{n_n}$$

где  $n_{i\text{inacc}}$  - число пассажиров в  $i$ -том рейсе;

$\mathbf{1}_{i\text{рейс}}$  - налет в километрах в  $i$ -том рейсе;

$n_n$  - суммарное число погибших пассажиров за рассматриваемый период в результате катастроф самолетов данного типа по КПН.

$N$  - число рейсов всех самолетов данного типа за рассматриваемый период эксплуатации;

Количественные показатели живучести отражают различную степень уязвимости самолета:

вероятность сохранения работоспособности после воздействия поражающих средств -  $R_{\text{жив}}$  характеризует способность самолета выполнить полетное задание и нормально возвратиться на аэродром;

вероятность воздействия на свою территорию после воздействия поражающих средств -  $R_{\text{воз}}$  оценивает возможность возвращения самолета даже с аварийными повреждениями и вынужденной посадкой;

вероятность выживания экипажа и пассажиров после воздействия поражающих средств -  $R_{\text{вбжк}}$  оценивает эффективность средств защиты и аварийного

покидания. Оценка показателей живучести проектируемого самолета может быть выполнена на основе моделирования условий поражения и особенностей конструкции самолета.

## **ВЗАИМОСВЯЗЬ ЭФФЕКТИВНОСТИ, НАДЕЖНОСТИ И ЖИВУЧЕСТИ САМОЛЕТА.**

Самым общим свойством, отражающим техническое совершенство самолета, является эффективность. Одним из показателей реальной эффективности самолета, учитывающим разнохарактерные его свойства, является вероятность выполнения типового полетного задания -  $P_{эф.р.}$ ; Эту вероятность удобно представлять как произведение трех вероятностей.\* выполнения полетного задания при абсолютной надежности и живучести, которую называют показателем исходной эффективности -  $P_{эф.и.}$ ; надежной работы самолета, как показателя его надежности -  $P_{над.}$ ; сохранение живучести самолета, как показателя его живучести -  $P_{жив.}$

$$P_{эф.р.} = P_{эф.и.} \times P_{над.} \times P_{жив.}$$

Значение показателя исходной эффективности определяется, в основном, летно-техническими характеристиками (ЛТХ), такими, как максимальная скорость, минимальная высота полета, маневренность, точность систем навигации и наведения, грузоподъемность и др.

Показатель надежности самолета, в свою очередь, можно представить как произведение вероятности готовности самолета к выполнению полетного задания -  $K_{г.}$  на вероятность безотказной работы самолета за время выполнения полетного задания -  $P(J)$

$$P_{над.} = K_{г.} \times P(J)$$

Действительно, если перехватчик многократно выполняет полетное задание по перехвату воздушной цели, то в ряде случаев полетное задание не выполняется и

при полной надежности и живучести самолета. Это может быть при удачных маневрах цели с использованием рельефа местности, так что система наведения теряет цель.

Подобные случаи являются следствием конкретных значений ЛТХ самолета и учитываются показатели исходной эффективности. Значения  $R_{эф}$ , всегда меньше единицы.

Но полетное задание может быть не выполнено и по причине ненадежной работы материальной части самолета. В одних случаях на момент получения задания самолет оказывается неготовым к вылету по ряду причин. Или на нем проводятся регламентные работы, или доработка конструкции по техническому бюллетеню, или устраняются возникшие неисправности. Эти случаи отражают такое свойство самолета, как ремонтпригодность, входящее в более общее свойство - надежность. Они учитываются таким показателем ремонтпригодности, как установившееся значение вероятности готовности самолета к вылету - коэффициентом готовности  $K_r$ .

В других случаях невыполнения полетного задания происходит из-за отказа самолета в воздухе. Эти случаи характеризуют такое свойство самолета, как безотказность, и количественно учитываются таким показателем безотказности, как вероятность безотказной работы за время выполнения полетного задания. Значение  $P(J)$  как и любой вероятности всегда меньше единицы.

Наконец, полетное задание может быть не выполнено в ряде случаев из-за утраты самолетом работоспособности вследствие воздействия на него поражающих средств или по попаданию его в не расчетные условия эксплуатации. В этих случаях проявляется такое свойство самолета, как живучесть. Количественно эти случаи учитываются вероятностью сохранения живучести самолета -  $P_{жив}$ .

Применительно к транспортным самолетам, для обобщенной оценки их экономической эффективности, используется показатель производительности самолета на единицу затрат. И в него в качестве множителей входят вероятности надежной работы и сохранения живучести самолета.

$$A = (mln / tc) \times P_{\text{над.}} \times P_{\text{жив.}}$$

где  $A$  - это производительность самолета на единицу затрат;

$m$  - масса перевозимого груза;

$l$  - дальность перевозок;

$t$  - время транспортной операции;

$n$  - число планируемых самолето-вылетов за время транспортной операции;

$c$  - затраты, списываемые за время операции, руб.;

$P_{\text{над.}}$  - вероятность надежной работы самолета;

$P_{\text{жив.}}$  - вероятность сохранения живучести самолета.

Таким образом, реальная эффективность охватывает все основные свойства самолета, определяющие его техническое совершенство.

Целью создания новой конструкции самолета является получение более высокого значения показателя реальной эффективности по сравнению с конкурирующими проектами самолетов.

Исходную эффективность можно увеличить только за счет усложнения основных систем самолета и его конструкции, однако усложнение конструкции обычно ведет к снижению значений показателей надежности и живучести.

Рассмотрим пример.

Условный самолет  $A$ , находящийся в эксплуатации характеризуется следующими значениями:  $P_{\text{эф.и.}}^A = 0,75$ ;  $P_{\text{над.}}^A = 0,95$ ;  $P_{\text{жив.}}^A = 0,9$ ;  $P_{\text{эф.р.}}^A = 0,64$ .

Более сложный проектируемый самолет  $B$  -  $P_{\text{эф.и.}}^B = 0,80$ ;  $P_{\text{над.}}^B = 0,85$ ;  $P_{\text{жив.}}^B = 0,8$ ;  $P_{\text{эф.р.}}^B = 0,54$ , т.е. увеличение исходной эффективности за счет усложнения не привело к увеличению реальной эффективности, так как уменьшились  $P_{\text{над.}}$  и  $P_{\text{жив.}}$ .

Другой проектируемый самолет  $B$  -  $P_{\text{эф.и.}}^B = 0,74$ ;  $P_{\text{над.}}^B = 0,99$ ;  $P_{\text{жив.}}^B = 0,95$ ;  $P_{\text{эф.р.}}^B = 0,70$ . Упрощение основных систем самолета  $B$  в сочетании с конструктивными мероприятиями по улучшению эксплуатационной технологичности и повышению живучести хотя и вызвало некоторое снижение

значения исходной эффективности, но привело к существенному увеличению значений показателя надежности и живучести. В итоге самолет В обладает самым большим значением показателя реальной эффективности.

Таким образом, надежность и живучесть самолета самым непосредственным образом влияют на его эффективность.

## **ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ**

*Показателями надежности* называют количественные характеристики одного или нескольких свойств, составляющих надежность объекта. В первом случае показатели называют единичными, во втором комплексными. Показатели надежности относятся к числу важнейших понятий теории надежности.

Как уже указывалось ранее, область применения теории надежности к уникальным и малосерийным объектам ограничена. Например, эта теория применима для единичных восстанавливаемых (ремонтируемых) объектов, если для них в соответствии с нормативно-технической документацией допустимы многократные отказы, последовательность которых может быть представлена, в виде потока случайных событий. Теория применима также к уникальным и малосерийным объектам, которые в свою очередь состоят из объектов массового производства. В этом случае расчет показателей надежности объекта в целом проводят на основе вероятностных моделей по известным показателям надежности компонентов. С другой стороны, методы теории надежности позволяют установить требования к надежности компонентов и элементов на основании требований к надежности объекта в целом.

Более общий подход к расчетной оценке надежности технических объектов основан на трактовке отказа как результата взаимодействия объекта как физической системы с другими объектами и окружающей средой. Однако большинство показателей надежности сохраняют смысл и при этом подходе. Вместе с тем нельзя смешивать показатели надежности с количественными характеристиками, не

имеющими четкого вероятностно-статистического смысла, например с коэффициентами запаса прочности. На стадии проектирования и конструирования показатели надежности трактуют как характеристики вероятностных или полувероятностных математических моделей создаваемых объектов. Соответствующие значения показателей называют *расчетными*. На стадиях экспериментальной обработки испытаний роль показателей надежности выполняют статистические (точечные или интервальные) оценки вероятностных характеристик. Соответствующие значения показателей называют *экспериментальными*.

Аналогичные оценки по данным эксплуатации называют *эксплуатационными*. Наконец, если точечная или интервальная оценка показателя надежности определена на основании результатов расчетов, испытаний и (или) эксплуатационных данных путем экстраполяции на другую продолжительность эксплуатации (и другие условия эксплуатации), то говорят об *экстраполированных* значениях показателей надежности. Подобная классификация принята в настоящее время в основных международных документах по надежности технических объектов. Введение такой классификации преследует цель предупредить путаницу, которая часто имеет место на практике при обсуждении численных данных, полученных разными способами и на разных стадиях жизненного цикла объекта.

В нашей стране номенклатуру показателей надежности регламентирует стандарт. Хотя с учетом специфики отрасли допускается использование показателей, не включенных в этот стандарт, эти показатели не должны противоречить понятиям, лежащим в основе стандарта. Нарушение этого правила может привести к грубым ошибкам и нарушению целостной системы обеспечения требуемой надежности. В целях единообразия все показатели надежности, перечисленные в стандарте, определены как вероятностные характеристики. Их точечные или интервальные оценки получают, обрабатывая экспериментальные данные при помощи методов математической статистики.

## ПОКАЗАТЕЛИ БЕЗОТКАЗНОСТИ

Основной показатель безотказности - *вероятность безотказной работы*, т.е. вероятность того, что в пределах заданной наработки не возникнет ни одного отказа. Этот показатель определяют в предположении, что в начальный момент времени (момент начала исчисления наработки) объект находится в работоспособном состоянии.

Обозначим через  $t$  время или суммарную наработку объекта. В дальнейшем для краткости называем  $t$  просто *наработкой*. Возникновение первого отказа - случайное событие, а наработка  $t$  от начального момента до возникновения этого события - случайная величина. Вероятность безотказной работы на отрезке  $[0, t]$  определяют как

$$P(t) = P\{\tau > t\}$$

Здесь  $P\{\}$  - вероятность события, заключенного в скобках. Вероятность безотказной работы  $P(t)$  является функцией наработки  $t$ .

Обычно эту функцию предполагают непрерывной и дифференцируемой. Если способность объекта выполнять заданные функции характеризуется параметром  $v$ , то имеем формулу:

$$P(t) = P\{v^*(\tau) < v(\tau) < v^{**}(\tau); \tau \in [0, t]\},$$

где  $v^*$  и  $v^{**}$ - предельные по условиям работоспособности значения параметров (эти значения, вообще, могут изменяться во времени) Аналогично вводят вероятность безотказной работы в более общем случае, когда состояние объекта характеризуется набором параметров с допустимой по условиям работоспособности областью значений этих параметров

Определение вероятности безотказной работы согласно формулам и относится к объектам, которые должны функционировать в течение некоторого конечного отрезка времени. Для объектов одноразового (дискретного) применения вероятность безотказной работы определяют как вероятность того, что при срабатывании объекта отказа не возникает. Аналогично вводят вероятность

безотказного включения (например включения в рабочий режим из режима ожидания).

Вероятность безотказной работы  $P(t)$  связана с функцией распределения  $F(t)$  и плотностью распределения  $f(t)$  наработки до отказа:

$$F(t) = 1 - P(t),$$
$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dP(t)}{dt}$$

Наряду с понятием «вероятность безотказной работы» часто используют «вероятность отказа», которое определяют следующим образом:

это вероятность того, что объект откажет хотя бы один раз в течение заданной наработки, будучи работоспособным в начальный момент времени. Вероятность наступления хотя бы одного отказа на отрезке  $[0, t]$  определяют по формуле

$$Q(t) = 1 - P(t) = F(t)$$

Для высоконадежных объектов вероятность безотказной работы по отношению к критическим (тем более - катастрофическим) отказам должна быть весьма близка к единице. Вероятность наступления хотя бы одного критического отказа на заданном отрезке времени обычно называют показателем риска или просто риском. Например, нормы летной годности нормируют значения риска на один час полета или на один стандартный полет, нормы безопасности атомных электростанций - на один реактор-год и т.д. Типичные значения риска составляют  $Q=10^6$  и меньше, что отвечает вероятности безотказной работы  $P = 0,999999$ . Очевидно, что в таких случаях удобнее работать с показателями типа, чем с вероятностью безотказной работы.

К показателям безотказной работы относят также квантили безотказной наработки, те значения наработки, отвечающие заданной вероятности безотказной работы. *Гамма-процентную наработку до отказа*  $t_\gamma$  определяют из уравнения

$$P(t_\gamma) = \gamma/100$$

где  $P(t)$  - вероятность безотказной работы.

Другим показателем служит *средняя наработка до отказа*  $T_1$ . Она равна математическому ожиданию соответствующей случайной величины наработки объекта до отказа. Имеем формулу:

$$T_1 = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - F(f)] d(t)$$

Величина  $T_1$  может быть выражена также через вероятность безотказной работы:

$$T_1 = \int_0^{\infty} P(t) dt$$

Еще один широко используемый показатель - *интенсивность отказов*. Это плотность вероятности возникновения отказа, определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не возник. Интенсивность отказов  $\lambda(t)$  выражают через функции  $P(t)$ ,  $F(t)$  и  $f(t)$  следующим образом:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = - \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt}$$

Для высоконадежных систем  $P(t) \approx 1$ , так что интенсивность отказов приближенно равна плотности распределения  $f(t)$  наработки до отказа. Связь между показателями безотказности представлена в таблице.

Перечисленные показатели введены применительно к невосстанавливаемым объектам, а также к таким отказам восстанавливаемых объектов, возникновение которых по возможности должно быть исключено. Применительно к восстанавливаемым объектам при эксплуатации, которых допускаются многократно повторяющиеся отказы, вместо средней наработки до отказа

используют другой показатель - *среднюю наработку на отказ*. Очевидно, что это должны быть несущественные отказы, не приводящие к серьезным последствиям и не требующие значительных затрат на восстановление работоспособного состояния.

Связь между показателями безопасности

Эксплуатация восстанавливаемых объектов может быть описана следующим образом: в начальный момент времени объект начинает работать и продолжает работать до первого отказа; после отказа происходит восстановление работоспособности, и объект вновь работает до отказа и т.д. На оси времени  $t$  моменты отказов образуют поток отказов, а моменты восстановлений - поток восстановлений. На оси суммарной наработки (когда продолжительность восстановления не учитывают) моменты отказов образуют поток отказов. Полное и строгое математическое описание эксплуатации объекта по этой схеме построено на основе теории восстановления.

Средняя наработка на отказ определяется по формуле

$$T = \frac{t}{M\{r(t)\}}$$

Здесь  $t$  - суммарная наработка,  $r(t)$  - число отказов, наступивших в течение той наработки,  $M\{-\}$  - математическое ожидание случайной величины, стоящей в скобках. В общем случае средняя наработка на отказ - функция  $t$ . Для стационарных потоков отказов средняя наработка на отказ от  $t$  не зависит.

Для восстанавливаемых объектов используют еще один показатель - *параметр потоков отказов*, равный отношению математического ожидания числа отказов за достаточно малую наработку объекта к значению этой наработки:

$$\mu(t) = \lim \frac{M\{r(t + \Delta t) - r(t)\}}{\Delta t}$$

Здесь  $\Delta t$  - малый отрезок времени,  $r(t)$  - число отказов, наступивших от начального момента до достижения наработки  $t$ . Разность  $r(t+\Delta t)-r(t)$  равна числу отказов на отрезке  $[t, t+\Delta t]$ . Наряду с параметром потока отказов в расчетах и обработке экспериментальных данных часто используют усредненный параметр потока отказов

$$\mu(t) = \frac{M\{r(t_2) - r(t_1)\}}{t_2 - t_1}$$

По сравнению с формулой здесь рассматривают число отказов за конечный отрезок  $[t_1, t_2]$ .

В международной практике понятию "параметр потока отказов" отвечает термин *failure intensity*, в то время как понятию "интенсивность отказов" отвечает термин *failure rate*. Это необходимо учитывать при использовании англоязычных источников, а также переводной литературы.

## ПОКАЗАТЕЛИ ДОЛГОВЕЧНОСТИ И СОХРАНЯЕМОСТИ

Большинство показателей долговечности аналогично показателям безотказности невосстанавливаемых объектов, если в определениях момент наступления первого отказа заменить на момент достижения предельного состояния. Например, *гамма-процентный ресурс* определяют как суммарную наработку, в течение которой в заданных режимах и условиях применения объект

не достигает предельного состояния с вероятностью  $u$ , выраженной в процентах. Аналогично вводят *гамма-процентный срок службы* календарную продолжительность эксплуатации, в течение которой объект не достигает предельного состояния с выраженной в процентах вероятностью  $u$ . Применительно к крупносерийным объектам и массовым комплектующим изделиям обычно используют понятия *среднего ресурса* и *среднего срока службы*. В терминах вероятностных моделей эти показатели равны математическим ожиданиям суммарной наработки и календарной продолжительности до достижения предельного состояния. При применении показателей долговечности указывают начало отсчета и вид действий после наступления предельного состояния (например, *гамма-процентный ресурс от второго капитального ремонта до списания*). Показатели долговечности, отсчитываемые от ввода объекта в эксплуатацию до окончательного снятия с эксплуатации, называют *гамма-проектным полным ресурсом*, *средним полным ресурсом* и т.п.

Аналогично вводят показатели сохраняемости. Так, *гамма-процентный срок сохраняемости* определяют как срок хранения, в течение которого параметры объекта, характеризующие способность объекта выполнять требуемые функции, будут оставаться в пределах, задаваемых из условий сохраняемости, с выраженной в процентах вероятностью  $u$ .

Необходимо различать показатели долговечности и сохраняемое от внешне сходных с ним "назначенных" сроков службы, хранения и т.п. Цель установления "назначенного" срока службы и "назначенного" ресурса - обеспечить принудительное и заблаговременное прекращение применения объекта из требований безопасности или технико-экономических соображений. Для объектов, подлежащих длительному хранению, вводят *назначенный срок хранения*, по истечении которого дальнейшее хранение недопустимо, например, из требований безопасности. При достижении объектом назначенного ресурса (назначенного срока службы, назначенного срока хранения) в зависимости от назначения объекта, особенности его эксплуатации, технического состояния и других факторов может быть списан, направлен в средний или капитальный ремонт, передан для

применения не по назначению, переконсервирован (при хранении). При определенных условиях после обследования может быть принято решение о продолжении эксплуатации.

Назначенный срок службы, назначенный ресурс и назначенный срок хранения являются технико-эксплуатационными характеристиками. Однако при установлении их численных значений следует принимать во внимание прогнозируемый или достигнутый уровень надежности. В частности, если поставлено требование безопасности, то назначенный срок службы (ресурс) должен отвечать значениям вероятности безотказной работы по отношению к критическим отказам, весьма близким к единице. Из соображений безопасности может быть также введен коэффициент запаса по времени.

## **ПОКАЗАТЕЛИ РЕМОНТОПРИГОДНОСТИ**

Различают две группы показателей ремонтпригодности. Первая группа аналогична показателям безотказности. К ним относятся *«вероятность восстановления»* т.е. вероятность того, что продолжительность восстановления работоспособного состояния объекта не превысит заданное значение. Квантиль этой вероятности - продолжительность времени, в течение которого восстановление работоспособности будет осуществлено с вероятностью  $u$ , выраженной в процентах, - называют гамма-процентным временем восстановления. Аналогично вводят среднее время восстановления, интенсивность восстановления и параметр потока восстановления. Другая группа показателей ремонтпригодности характеризует затраты по поддержанию работоспособного состояния объекта. К ним относят среднюю трудоемкость восстановления, которую обычно измеряют в человеко-часах. Большинство показателей этого типа и численные характеристики трудоемкости технического обслуживания, ремонта, диагностирования и т.п., строго говоря, не относятся к показателям надежности.

## КОМПЛЕКСНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ

Комплексные показатели надежности характеризуют два или большее число свойств, входящих в определение надежности, например безотказность и ремонтпригодность. К ним относятся те, которые являются количественной характеристикой готовности объекта к выполнению требуемых функций. *Коэффициент готовности* \* это вероятность того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени, кроме планируемых периодов, в течение которых применение объекта по назначению не предусматривается. Родственное понятие - *коэффициент оперативной готовности* характеризует готовность объекта выполнять требуемые функции в течение заданного отрезка времени. Этот коэффициент равен вероятности того, что объект окажется в работоспособном состоянии в произвольный момент времени (кроме планируемых периодов, в пределах которых применение объекта по назначению не предусматривается), при условии, что начиная с этого момента, будет работать безотказно в течение заданного отрезка времени. Очевидно, что коэффициент готовности по математической структуре аналогичен вероятности безотказной работы. Различают стационарный и нестационарный коэффициенты готовности, а также средний коэффициент готовности. Подробные сведения можно найти в справочнике.

Вторая группа комплексных показателей надежности включает величины типа математического ожидания. К этой группе принадлежит, например, *коэффициент технического использования*. Он равен отношению математического ожидания суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии за некоторый период к математическому ожиданию суммарного времени пребывания объекта в работоспособном состоянии и продолжительности простоев, обусловленных техническим обслуживанием и ремонтом за тот же период. В стационарных условиях коэффициент технического использования к также может быть выражен через отношение математических ожиданий:

$$K = \frac{T}{(T + T_d)}$$

Здесь  $T$  средняя наработка на отказ,  $T_d$  - среднее время восстановления.

Коэффициент технического использования характеризует долю времени нахождения объекта в работоспособном состоянии относительно общей продолжительности эксплуатации. Коэффициент сохранения эффективности характеризует степень влияния отказов объекта на эффективность его применения по назначению.

Некоторые комплексные показатели надежности относятся к пограничной области, объединяющей факторы надежности, технологической и экономической эффективности. Так, коэффициент сохранения эффективности равен отношению значения показателя эффективности использования объекта по назначению за определенную продолжительность эксплуатации к номинальному значению этого показателя, вычисленному при условии, что отказы объекта в течение того же периода не возникают.

В последнее время начинают использовать комплексные показатели, включающие чисто экономические факторы. Например, в некоторых программах повышения надежности наряду со стандартными показателями надежности введен показатель - "суммарная стоимость жизненного цикла". Этот технико-экономический показатель включает в себя расходы на обеспечение и поддержание надежности объекта на всех этапах жизненного цикла, начиная с проектирования и кончая демонтажем или ликвидацией.

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ НАДЕЖНОСТИ САМОЛЕТА.**

Общая стоимость создания и функционирования самолетного комплекса в течение запланированного числа лет может быть определена по формуле

$$C_k = C_p + C_{и} + C_{э} + C_{п},$$

где  $C_p$  - стоимость разработки и испытаний опытных самолетов и наземного оборудования;

$C_{и}$ ,  $C_{э}$  - стоимости, соответственно, изготовления и эксплуатации требуемого количества комплексов самолетов и оборудования в течение запланированного количества лет;

$C_{п}$  - стоимость потерянных самолетов при авариях и катастрофах в течение запланированного количества лет.

Надежность современных самолетов еще находится на уровне ниже оптимального, так что затраты на повышение надежности приводит к снижению общих затрат.

## **ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ НАДЕЖНОСТИ.**

### Понятие отказа как случайного события.

Хотя и редко, но в какой-то момент может произойти нарушение работоспособности систем самолета. Отказ одной из систем, следствием которого является невыполнение полетного задания.

Почему ряде агрегат, деталь или система самолета, которые разрабатывались по научно разработанным методикам, изготавливались с соблюдением всех требований технологии и эксплуатировались, в строгом соответствии с проверенными практикой инструкциями все же иногда откалывают в случайные моменты времени.

Объективные причины того, что отказ или неисправность являются случайными событиями, и мы не можем заранее точно определить - в какой момент они произойдут, делятся на две группы, К первой группе относятся причины, вызванные различием в изготовлении всех экземпляров самолетов данного типа:

- разброс физических и прочностных характеристик исходных материалов;
- случайное сочетание геометрических параметров подвижных и неподвижных соединений в пределах предусмотренного чертежом поля допусков;

- нестабильность технологических процессов.

Ко второй группе относятся причины, вызванные не идентичностью режимов полета и условий эксплуатации самолетов данного типа:

- случайный характер сочетаний внешних воздействий и нагрузок;

- отклонение ожидаемых условий эксплуатации самолетов от фактических в различных климатических зонах;

- отличие внешних условий работы в полете и при стендовой отработке систем, где не воспроизводятся положительные и отрицательные нагрузки, углы атаки, турбулентность атмосферы, реальные уровни вибрации, грозовые разряды и др.

Отказы систем самолета невозможно полностью исключить, но их количество по времени можно прогнозировать на основе методов расчета безотказности, а главное предупредить их опасные последствия.

Случайные события и случайные процессы изучаются в теории вероятностей, технической статике, теории массового обслуживания и теории восстановления. Все это вместе образует основу математических методов теории надежности.

#### Виды отказов и неисправностей.

Правильная классификация отказов и неисправностей позволяет исключить возможные ошибки при применении формул теории надежности в процессе расчетов безотказности и оценке значений показателей безотказности по результатам испытаний и эксплуатации изделий авиационной техники. Отказы как случайные события по характеру проявления могут быть:

- зависимыми и независимыми;

- совместными и несовместными;

- постепенными и внезапными.

Независимыми называются отказы, вероятности появления которых не зависят друг от друга. Если же отказ одного устройства вызван отказом других устройств самолета, то такой отказ будет событием зависимым.

Совместными называют отказы отдельных элементов системы, которые одновременно происходят в процессе ее работы.

Несовместными называются такие отказы, из которых никакие два не могут произойти одновременно.

Постепенные отказы возникают в результате изменения во времени тех параметров, которые определяют момент отказа в результате старения, изнашиваемости, усталостной повреждаемости и коррозии. Изменение таких параметров конструкции в процессе эксплуатации можно фиксировать, *прогнозировать момент* вероятного нарушения работоспособности и предотвращать отказ своевременной профилактической замены деталей или ремонтом.

Внезапными называются такие отказы, на вероятность возникновения *которых* не влияют налет и *календарная* продолжительность эксплуатации самолетов.

Для анализа причин возникновения отказов и неисправности изделий авиационной техники с целью разработки эффективных мероприятий по повышению отказобезопасности и безотказности важное значение имеет классификация отказов по следующим факторам.

#### 1. По моменту фиксации!

- на земле (при обслуживании);
- в воздухе;
- во время выполнения полетного задания (рейса):
  - при заводских испытаниях самолета (приработочные отказы и неисправности).

#### 2. По последствиям:

- без последствий;
- вызвавшие возвращение со старта;
- приведение к невыполнению полетного задания (рейса);
- вызвавшие особую ситуацию в полете или предпосылку к летному происшествию.
  - приведение в числе других причин к летному происшествию.

#### 3. По причинам

- конструктивно-производственные недостатки;
- ошибки наземного технического состава.
- ошибки латного состава;
- внешние или случайные причины.

4. По способу устранения:

- при оперативном техническом обслуживании;
- при периодическом техническом обслуживании;
- при профилактическом ремонте.

## **КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.**

### Случайные события и их вероятности

Теория вероятности - это математическая наука, изучающая закономерности массовых случайных явлений.

Событием называется все то, что может появиться или не появиться результате опыта или испытания.

Под опытом или испытанием понимается осуществление какого-либо комплекса условий для наблюдения некоторого явления. Предполагает этот комплекс условий, т. е. Опыт или испытание воспроизводит неограниченное количество раз.

Различают три основных вида событий:

- 1 Если в результате определенного опыта некоторое событие появляется всегда, то оно называется достоверный и обозначается буквой Ш
- 2 Если в результате определенного опыта некоторое событие никогда не появляется, то оно называется невозможным событием и обозначается буквой О.
- 3 Если в результате некоторого опыта некоторое событие появляется, иногда нет, то оно называется случайным событием.

Случайные события обозначаются заглавными буквами А, В, С, D...  
Например, если опыт — произвольное бросание игральной кости, то

- достоверное событие Ш \* выпадение не более 6 очков.
- невозможное событие О - выпадение 7 очков.
- случайное событие А, В, С, D, Е, F - выпадение соответственно 1,2,3,4,5,6 очков или выпадение нечетного числа очков или четного числа очков.

Пусть некоторый опыт воспроизведен  $n$  раз. Пусть при этом некоторое событие  $A$  появилось  $m$  раз, тогда относительной частотой  $W(A)$  события  $A$  в данной серии из  $n$  опытов называется отношение:

$$W(A) = m/n, \text{ причем } 0 < W(A) < 1$$

Очевидно, что относительная частота есть величина случайная, однако природа случайных событий такова, что на практике наблюдается определенная устойчивость относительных частот. Суть этой устойчивости состоит в том, что по мере увеличения числа опытов  $n$  относительная частота имеет тенденцию становиться все менее и менее случайной и при большом  $n$  практически перестает быть случайной.

На практике это осуществляется так, что при больших  $n$  относительные частоты  $W(A) = m/n$  группируются около некоторого, отрицательного, уже не случайного, т. е. устойчивого числа  $P(A)$ , характерного для данного события  $A$  в рассматриваемом опыте. Эта устойчивая частота и есть вероятность события  $A$  в опыте  $S$ .

Например: опыт 1 бросание монеты событие  $A$  - выпадение герба

$$P(A) \approx 0,5$$

$$W(A) = 12048 / 24096 = 0,5000 \quad \text{Бюффон}$$

$$W(A) = 6019 / 12000 = 0,5016 \quad \text{К. Пирсон}$$

$$W(A) = 12012 / 24000 = 0,5005 \quad \text{К. Пирсон}$$

Вероятность  $P(A)$ , как устойчивая частота, имеет простую интерпретацию, а именно, она показывает как часто в среднем, будет появляться событие  $A$  при большом числе опытов.

Из сказанного следует, что вероятность  $P(A)$  можно вычислить непосредственно из опыта по формуле.

$$P(A) \approx m / n,$$

Причем, что равенство тем точнее, чем больше число опытов  $n$ .

В связи с этим при большом числе опытов  $n$  относительную частоту  $W(A)=m/n$  называют статистической вероятностью.

В противоположность этому, вероятность  $P(A)$  иногда называют математической вероятностью.

Так как более часто появляющееся событие более возможно, то допустима еще другая, не статистическая интерпретация  $P(A)$ . А именно вероятность  $P(A)$  есть численная мера объективной возможности появления события  $A$  в данном опыте.

Таким образом, степень объективной возможности случайного события можно измерять числом. Это число называется вероятностью случайного события. Именно около этого числа группируются относительные частоты данного случайного события.

Только в простейших случаях вероятность события может быть подсчитана непосредственно.

Рассмотрим такой случай.

## **КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.**

Случайные события называются несовместимыми, если они **не** могут появиться одновременно.

Случайные события образуют полную группу попарно несовместимы; событий, если в каждом опыте (испытании) должно появиться одно и только одно из них, т.е. если каждые два из них несовместимы, и хотя бы одно из них обязательно должно произойти.

Рассмотрим опытно с равновозможными исходами. Например: выпадение 1,2,3,4,5,6 очков при бросании игральной кости.

Более точно будем считать, что исходы опыта можно представить в виде полной группы попарно несовместимых и равновозможных случайных событий.

Исходы такого опыта называются случаями. О самом опыте говорят, что он сводится к «схеме случаев». Всякая азартная игра сводится к «схеме случаев».

Азартная игра - это игра, в которой вероятность от мастерства.

Так как множество всех исходов любого опыта событие достоверное, то суммарная вероятность всех исходов равна единице.

Так как исходы равновозможные и общее их количество равно  $N$ , то вероятность одного исхода, очевидно, равна:

$$P(E_N) = 1/N$$

Рассмотрим теперь сложное событие  $A$ , заключающееся в появл какого- либо из  $M$  фиксированных случаев.

Например, событие  $A$  — выпадение четного числа очков при бросании игральной кости. Событие  $A$  включает три исхода выпадения очков из 6 возможных, а именно, 2 очка, 4 очка и 6 очков. Очевидно, что вероятность выпадения четного числа очков равна  $3/6$ .

В общем случае вероятность события  $A$ :

$$P(A) = M/N$$

Эта формула выражает так называемое классическое определение вероятности: если результаты опыта можно представить в виде полной группы  $N$  равновозможных попарно независимых случаев и если случайное событие  $A$  появляется только в  $M$  случаях, то вероятность события  $A$  равна  $M/N$  т. е. равна отношению числа случаев, «благоприятствующих событию», к общему числу всех случаев. Итак задачи, к которым применимо

классическое определение вероятности, укладываются в следующую простую схему - схему случайной выборки: из совокупности  $N$  элементов (предметов, явлений и т. д.) выбирается наудачу один элемент, причем каждому элементу обеспечивается одинаковая возможность быть выбранным; событие  $A$  заключается в выборе элемента, обладающего определенным признаком, причем этим признаком обладают точно  $M$  из  $N$  элементов рассматриваемой совокупности.

Осуществление этой схемы можно представить на следующем примере:

В урне находится  $N$  одинаковых на ощупь шаров, из  $M$  шаров белых и  $N-M$  не белых; опыт заключается в вынимании шара из урны, случайное событие в вынимании белого шара. При этих условиях вероятность вынуть белый шар равна  $M/N$ .

### **ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ.**

Классическое определение вероятности применимо лишь для тех опытов, у которых:

- 1) число исходов конечно;
- 2) все исхода равновозможные.

Эти требования сильно ограничивают область применения классического определения вероятности.

Если не выполняется первое требование, то можно ввести понятие геометрической вероятности.

Рассмотрим опыт - стрельбу по квадрату наугад. Попадание в квадрат - достоверное событие.

Если за исход опыта (элементарное событие) считать попадание а заданную точку этого квадрата, то число исходов этого опыта бесконечно.

Если событие  $A$  - попадание а заштрихованную область, то геометрическая вероятность события  $A$  определяется так:

$$P(A) = \frac{\text{пл}(A)}{\text{пл}(\Omega)}$$

Пример, задача о встрече:

Два лица  $A$  и  $B$  решили встретиться в определенном месте между 10 и 11 часами. Пришедший первым ждет другого в течение двадцати минут, а затем уходит. Чему равна вероятность встречи (событие  $C$ ) лиц  $A$  и  $B$ , если каждый из них в течение указанного часа приходит на удачу и моменты их прихода независимы.

Решение.

Пусть  $x$  - момент прихода лица  $A$ ,

$y$  - момент прихода лица  $B$ ,

Тогда необходимым и достаточным условием их встречи будет:

$$|x-y| < 20$$

откуда следует:

$$-20 < x-y < +20, \text{ т. е.}$$

уравнения границ имеют вид:

$$1. x-y+20=0$$

$$2. x-y-20=0$$

Итак, встреча (область  $C$ ) произойдет, если точка  $x, y$  попадет в заштрихованную область квадрата. По определению геометрической вероятности имеем:

$$P(C) = \frac{\text{пл}(C)}{\text{пл}(\Omega)} = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9}$$

С понятием геометрической вероятности непосредственно связано понятие метода статистических испытаний (метода Монте - Карло).

Действительно, если обратить формулу геометрической вероятности:

$$P(A) \ll \text{пл}(A) / \text{пл}(\Omega)$$

Учитывая, что  $P(A) = m/n$ , где  $m/n$  - относительная частота попадания точки в пл.  $A$  и считая  $\text{пл}(\Omega) = 1$ , то получим:

$$\text{Пл}(A) \text{ [т. е. определенный интеграл от границы площади]} \approx m/n$$

Отсюда и следует, что интеграл можно выполнить с помощью методов статистических испытаний.

## СЛОЖЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятности случайных событий подчиняются правил вероятностей:

- если событие  $C$  состоит в осуществлении одж несовместимых событий  $A$  или  $B$  (безразлично, какого именно), то вероятность события  $C$  равна сумме вероятностей событий  $A$  и  $B$ . Это правило записывается так:  $P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$  (при несовместимости  $A$  и  $B$ ). Это правило для схемы случайной выборки можно доказать следующим образом.

Пусть в урне находится  $N$  шаров, из них  $K$  красных,  $L$  синих, остальные белые; опыт заключается в вынимании из урны одного шара; событие  $A$  состоит в появлении красного шара, событие  $B$  в появлении синего шара. Тогда событие  $A$  или  $B$  состоит в появлении цветного шара. По определению:

$$P(A) = K/N; P(B) = L/N;$$

$$P(A \text{ или } B) = K/N + L/N = P(A) + P(B)$$

Особый интерес представляет частный случай, когда полная группа состоит из двух несовместимых событий. При этом наступление одного из них равносильно не наступлению другого. Такие случайные события называются взаимно противоположными.

Например, если опыт - стрельба по цели, то попадание и промах - это взаимно противоположные события, т. к. они образуют полную группу из двух несовместимых событий.

- если одно из пары взаимно противоположных событий обозначено через  $A$ , то другое обозначают  $\bar{A}$  (читают не  $A$ ). Вероятности двух взаимно противоположных событий в сумме дают единицу

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

так как сумма  $A$  и  $\bar{A}$  событие достоверное

Откуда:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

## **СОВМЕЩЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ. НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ.**

Под совмещением случайных событий  $A$  и  $B$  понимают случайное событие, заключающееся в том, что в результате опыта произойдет и событие  $A$  и событие  $B$ . совмещение случайных событий будем обозначать через  $(A \text{ и } B)$ .

Например, из первой сотни чисел наугад выбирается число, событие  $A$  - число делится на 3, событие  $B$  - число делится на 4, событие  $(A \text{ и } B)$  - число делится и на 3 и на 4 (т. е. на 12).

Наиболее простое соотношение между вероятностями случайных событий  $A$  и  $B$  и вероятностью их совмещения  $(A \text{ и } B)$  имеет место тогда, когда случайные события  $A$  и  $B$  независимы.

Рассмотрим понятие независимости на схеме случайной выборки.

Пусть из двух урн с шарами вынимается наудачу по одному шару. Событие  $A$  заключается в том, что шар, вынутый из первой урны окажется белым, событие  $B$  в том, что шар, вынутый из второй урны, окажется белым. Эти случайные события независимы по существу в том смысле, что цвет шара вынутого из одной урны, не может влиять на цвет шара, вынутого из другой урны.

Подсчитаем вероятность совмещения событий  $A$  и  $B$ . пусть количество шаров в урнах  $N_1$  и  $N_2$  из них белых  $M_1$  и  $M_2$ , так что:

$$P(A) = M_1/N_1;$$

$$P(B) = M_2/N_2;$$

Так как каждый из  $N_1$  исходов вынимания шара из первой урны может комбинироваться с каждым из  $N_2$  исходов вынимания шара из второй урны, то число всех исходов равно  $N_1$  и  $N_2$ ; из них только в  $M_1 M_2$  случаях вынимаются два белых шара.

Следовательно, искомая вероятность совмещения равна:

$$P(A \text{ и } B) = \frac{M_1 M_2}{N_1 N_2} = \frac{M_1}{N_1} \frac{M_2}{N_2} = P(A)P(B)$$

Полученная формула выражает правило умножения вероятностей для независимых случайных событий.

В общем случае само понятие независимости случайных событий определяется с помощью полученной формулы.

Пример. Некоторое количество  $n$  стрелков независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели (например, летящий самолет). Вероятность попадания каждого стрелка равна  $p$ . Определить количество стрелков, которое требуется, чтобы поразить цель с вероятностью не меньшей, чем  $P$ .

Вероятность промаха стрелком равна  $1-p$ . Промахи - случайные независимые события. Поэтому вероятность совмещения промахов, т. е. вероятность, что ни один из  $n$  стрелков не попадет в цель определяется по правилу умножения вероятностей, т. е. равна  $(1-p)^n$ .

События «ни один стрелок не попадет в цель» и «хотя бы один попадет в цель» (т. е. цель будет поражена) взаимно противоположны, так что вероятность поражения цели равна:

$$1 - (1 - P)^n$$

по условию эта вероятность должна быть не меньше числа  $P < 1$ , т. е.:

откуда:

$$n = \lg(1-P) / \lg(1-p)$$

Например, если при стрельбе по самолету вероятность попадания равна  $p=0,004$ , то для обеспечения поражения самолета с вероятностью на меньшей  $P=0,98$  требуется:  $n \geq \lg 0,02 \setminus \lg 0,996$  или  $n \geq 976$  стрелков.

Целью данного раздела является обобщение правила умножения вероятностей на зависимые случайные события. Рассмотрим схему случайной выборки: пусть опыт заключается в вынимании наугад одного шара из урны, содержащей  $N$  шаров, одинаковых на ощупь, но различающихся по двум признакам: по цвету и рисунку.

Введем обозначения:

$K$  - количество цветных шаров ( $N-K$  - белых)

$L$  - количество шаров с рисунком ( $N-L$  - без рисунка)

$M$  - количество цветных шаров с рисунком.

Пусть событие  $A$  заключается в появлении цветного шара, событие  $B$  в появлении шара с рисунком. Совмещение событий  $A$  и  $B$  означает появление цветного шара с рисунком.

Вероятности этих случайных событий соответственно равны:

$$P(A) = K / N;$$

$$P(B) = L / N; P(A \text{ и } B) = M / N.$$

Отношение  $M/N$  представим в виде:

$$\frac{M}{N} = \frac{K M}{N K}$$

Отношение  $M/K$ , т. е. отношение количества цветных шаров с рисунком к количеству всех цветных шаров также имеет характер вероятности, а именно, оно дает вероятность выбрать шар с рисунком при условии, что выбор производится только из числа цветных шаров. Такую вероятность называют условной вероятностью события  $B$  при условии осуществления события  $A$  и обозначают  $P(B/A)$ . Так что в нашем примере:

$$P(B/A) = M/K$$

Теперь полученное соотношение можно записать в виде:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P(B/A)$$

Это соотношение выражает общее правило умножения вероятностей: - вероятность совмещения двух случайных событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого. Введение понятия условной вероятности позволяет дать новое толкование независимости случайных событий.

Если случайные события А и В независимы, то из полученного соотношения следует, что:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(B) \times P(A)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(A \setminus B) = \frac{P(B) \times P(A)}{P(B)} = P(A)$$

Т.е. следует равенство условных и безусловных вероятностей этих событий.

#### Формула полной вероятности.

Пусть имеем попарно несовместных событий  $H_1, H_2, H_n$ , в сумме составляющих достоверное событие.

Пусть некоторое событие А может появиться вместе только с каким-нибудь из этих событий, тогда имеет место так называемая формула полной вероятности:

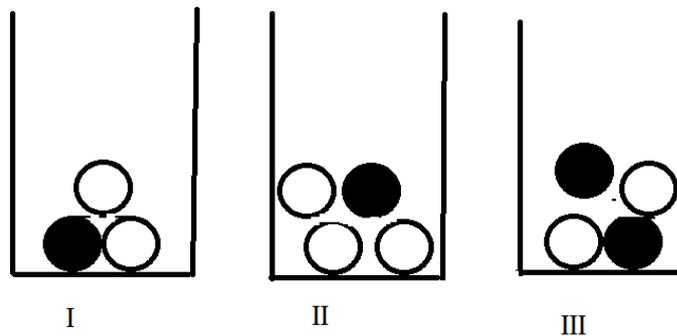
$$P(A) = \sum_{I=1}^N P(H_I) P(A/H_I)$$

При этом события  $H_1, H_2, \dots$  называются гипотезами. Действительно событие  $A$  равносильно совмещению событий:  $(H_1 \text{ или } H_2 \text{ или } \dots \text{ или } H_n)$  и  $A$ . Но это совмещение происходит, если происходит одно из совмещений  $(H_1 \text{ и } A)$  или  $(H_2 \text{ и } A)$  или  $\dots$  или  $(H_n \text{ и } A)$ . Применяя правило сложения вероятностей, получим:

$$P(A) = P((H_1 \text{ или } H_2, \text{ или } \dots \text{ или } H_n) \text{ и } A) = P(H_1 \text{ и } A) + \dots + P(H_n \text{ и } A)$$

Учитывая, что  $P(H_1 \text{ и } A) = P(H_1)P(A|H_1)$ ...и получим приведенную формулу.

Пример. Имеем три одинаковые на вид урны:



Наугад выбираем одну из них (это гипотезы), и из нее выбирают наугад шар. Найти вероятность того, что он окажется белым. Рассмотрим три гипотезы:

$H_1$  выбор первой урны;

$H_2$  - выбор второй урны;

$H_3$  - выбор третьей урны;

Из условия следует, что  $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = 1/3$ .

Далее имеем:  $P(A|H_1) = 2/3$ ,  $P(A|H_2) = 3/4$ ,  $P(A|H_3) = 2/4$

Откуда по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{23}{36}$$

## СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ.

Количество исходов любого опыта может быть конечным, счетным и несчетным. В первых двух случаях говорят, что выборочное пространство опыта дискретно. В последнем случае оно называется непрерывным. С каждым опытом можно связать понятие случайной величины.

Случайной величиной для данного опыта называется такая величина, которая в каждой реализации этого опыта обязательно принимает то или иное свое значение, но неизвестно заранее (до реализации опыта) какое именно значение она примет.

Таким образом, случайность этой величины состоит в том, что в каждой реализации опыта оно принимает то или иное свое значение случайно.

Случайные величины обозначают большими буквами латинского алфавита  $X, Y, Z$ , а их возможные конкретные значения – соответствующими малыми буквами  $x, y, z$ .

Совокупность всех возможных различных значений случайной величины называется ее спектром. Спектр называется дискретным, если все его значения образуют конечную или бесконечную последовательность чисел, и непрерывным, если все его значения полностью заполняют некоторый интервал. Например, если опыт - бросание наугад двух монет, то число выпавших гербов есть случайная величина  $X$  с дискретным спектром  $0, 1, 2$ , а расстояние между упавшими монетами есть случайная величина  $Y$  с непрерывным спектром  $y > 0$ .

Для математического задания случайной величины надо указать все ее возможные значения (спектр) и как часто она принимает то или иное значение, *т. е.* задать ее вероятностную характеристику. Вероятностной характеристикой пригодной для различных случайных величин является *функция* распределения случайной величины.

Пусть  $X$  - случайная величина, а  $x$  - число, тогда: ФУНКЦИЕЙ распределения  $F(x)$  случайной величины  $X$  называется вероятность события

$$(X < x), \text{ т. е. } F(x) = P(X < x)$$

Из этого определения следуют свойства  $F(x)$ .

1.  $F(x)$  определена для всех действительных  $x$ ;
2.  $0 \leq F(x) \leq 1$ , так как  $F(x)$  вероятность;
3.  $F(-\infty) = 0$ , т.к.  $(x < -\infty)$  - невозможное событие;
4.  $F(+\infty) = 1$ , т.к.  $(x < +\infty)$  - достоверное событие;
5.  $F(x)$  - неубывающая функция т.е. из  $x_2 \geq x_1$ ;  $F(x_2) \geq F(x_1)$

но событие  $(X < x_2)$  равно сумме двух событий  $(X < x_1)$  теореме сложения вероятностей

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \leq X < x_2)$$

для несовместных событий.

Таким образом, функция распределения  $F(x)$  дает полную вероятностную характеристику случайной величины  $X$ . Но вероятностную характеристику случайной величины  $X$  можно задать и в иной, часто более простой, форме, отличной от  $F(x)$ . Всякая вероятностная характеристика случайной величины  $X$  называется ее законом распределения, если по определенным правилам можно получить», функцию распределения  $F(x)$ , Простейшими точками случайных величин являются дискретные и непрерывные.

### **ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.**

Случайная величина  $X$  называется дискретной, если все ее возможные значения образуют конечную или бесконечную последовательность чисел, т.е., если ее спектр дискретный.

Простейшей формой закона распределения дискретной случайной величины  $X$  является таблица, в которой в верхней строке указаны все возможные значения  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  дискретной  $X$ , а нижней их вероятности  $p_1, p_2, \dots, P_n$ . При этом

$$p_1 + p_2 + \dots + P_n = 1$$

Так как события  $X=x_1, X=x_2, X=x_3$  составляют полную группу из несовместных.

Например, опыт-бросание монеты наугад. I •выпадение герое, и выпадение решки имеем таблицу:

1	2
$1/2$	$1/2$

Опыт - бросание двух монет наугад\*, исходы:

- 0 - выпадение двух решек;
- 1 - выпадение одного герба;
- 2 - выпадение двух гербов.

Возможные исходы опыта

00 -т. е. имеем четыре равновозможных исхода, вероятность каждого  $1/4$

01 - отсюда вероятность выпадения гербов

X	0	1	2
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

Еще пример, охотник, имеющий три патрона, стреляет в цель до первую попадания (или пока не израсходует все три патрона). Число израсходованных патронов будет случайной величиной с тремя возможными значениями 1,2,3. Найдем распределение вероятностей случайной величины при условии, что вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

Событие  $x=1$  означает попадание о первого выстрела, его вероятность:

$$P(1)=0,8$$

Событие  $x=2$  означает совмещение промаха при первом *выстреле* и попадания при втором, его вероятность:

$$P(2)=(1-0,8)\times 0,8=0,16$$

Событие  $x=3$  означает совмещение промахов **при первых двух** выстрелах, его вероятность:

$$P(3)=(1-0,8)(1-0,8)=0,04$$

Таблица распределения вероятностей имеет вид:

1	2	3
0,8	0,16	0,04

Рассмотрим некий опыт в котором событие  $A$  может появиться или не появиться. Реализации опыта независимы, то есть вероятность появления события  $A$  при повторениях опыта не меняется и равна одному и тому же числу  $p$ , т. е.

$$P(A)=p; P(\bar{A})=1-p=q$$

Опыт повторяется  $n$  раз. Требуется найти вероятность  $p_n(m)$  того, что при этом событие  $A$  появится ровно  $m$  раз ( $m < n$ ).

Обозначим через  $A_i$  - событие, состоящее в том, что событие  $A$  появляется в  $i$ -том опыте, а через  $B_n^m$  - событие, состоящее в том, что в  $n$  опытах событие  $A$  появляется ровно  $m$  раз. Очевидно, что  $B_n^m$  может реализоваться различными способами, а именно:

$$B_n^m = A_1 A_2 \dots A_m A_{m+1} \dots A_n + \dots + A_1 A_2 \dots A_{m-n} A_n$$

$A$  входит в каждое произведение  $m$  раз. Число таких произведений равно  $C_n^m$ , где

$$C_n^m = A_n^m / P_{m=n}! / m!(n-m)!$$

## СОЕДИНЕНИЯ

Размещениями из  $n$  элементов по  $m$  называются такие их соединения, которые различаются друг от друга самими элементами или их порядком.

Перестановками из  $n$  элементов называются их соединения, отличающиеся друг от друга только порядком входящих в них элементов:

$$P_n = n! = A_n^n$$

Сочетаниями из элементов  $m$  называются соединения, различающиеся друг от друга только самими элементами:

$$C_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1) / 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \gg A_n^m / P_n = n! / m!(n-m)!$$

Основное свойство сочетаний:

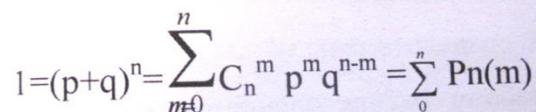
$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

Число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ . Так как сомножители в каждом произведении независимы (из условия), то согласно правилу умножения вероятностей, вероятность каждого такого произведения равна  $p^m q^{n-m}$ , т. к. слагаемые попарно несовместны, то по правилу сложения вероятностей получим:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} (*)$$

Итак, если опыт проводится  $n$  раз и каждый раз событие  $A$  появляется с вероятностью  $P$ , то вероятность того, что при этом событие  $A$  появится ровно  $m$  раз выражается формулой (\*).

Такое распределение называется биномиальным, ибо:

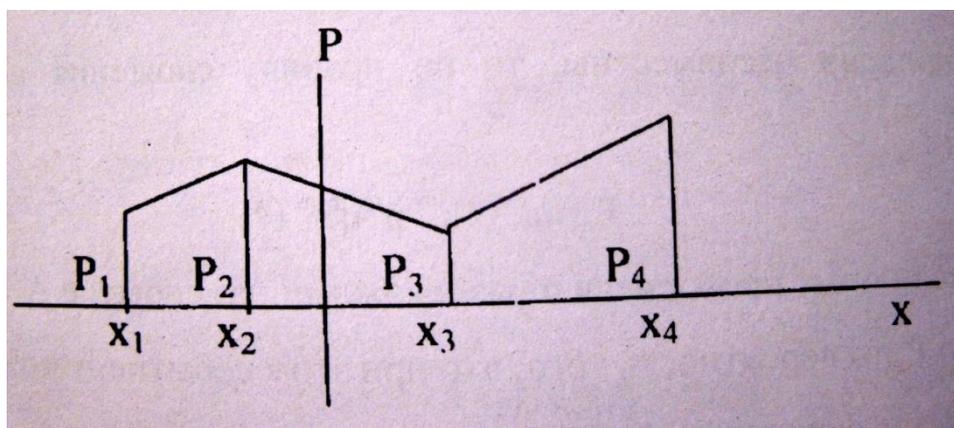

$$1 = (p+q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_0^n P_n(m)$$

Например, найти вероятность неисправности 0,1,2 или 3 двигателей трехдвигательного самолета, при послеполетной подготовке, если значение вероятности неисправности двигателя равно  $q=0,1$ .

Нужно вычислить:  $P_3(0), P_3(1), P_3(2), P_3(3)$  и получим таблицу распределения вероятностей:

m	0	1	2	3
$P_n(m)$	0,729	0,243	0,027	0,001

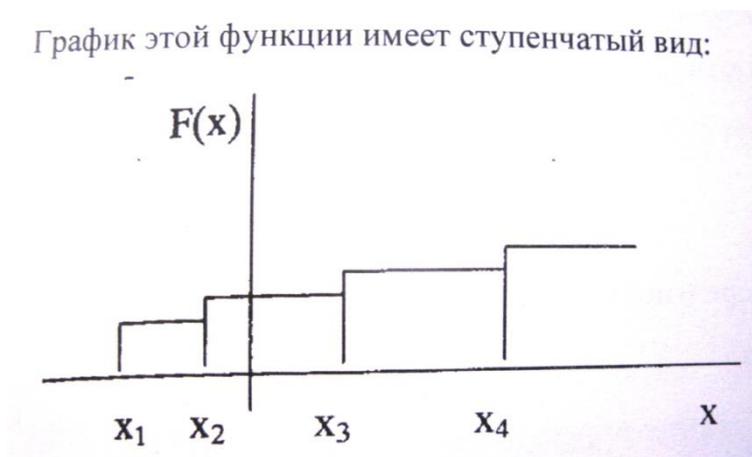
Иногда для наглядности пользуются многоугольником распределения, т. е. строят график.



Все сказанное позволяет дать механическую интерпретацию распределения. Единица массы распределения по оси  $x$  так, что в отдельных ее точках  $x$ , сосредоточены массы  $p_i$ .

Из таблиц распределения следует, что для дискретных случайных величин функция распределения  $F(x)$  имеет вид:

График этой функции имеет ступенчатый вид:



Примем скачки в точках разрыва равным вероятностям соответствующих значений  $x$ .

## НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Случайная величина  $X$  называется непрерывной, если все ее возможные значения целиком заполняют некоторые и ее функция распределения  $F(x)$  есть дифференцируемая функция, за исключением быть может конечного числа точек разрыва.

Пусть  $F(x)=P(X<x)$  - функция распределения, тогда функция  $f(x)=F'(x)$  называется плотностью распределения вероятности непрерывной случайной величины  $X$ .

Плотностью распределения  $f(x)$  есть одна из форм закона распределения случайной величины. Но в противоположность функции распределения  $F(x)$  плотность распределения применима только к непрерывным случайным величинам.

Выясним как выражается  $P(\alpha < X < \beta)$  через  $f(x)$ . Используя определение  $f(x)=F'(x)$  найдем:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

Выясним вероятностный смысл плотности распределения  $f(x)$ .

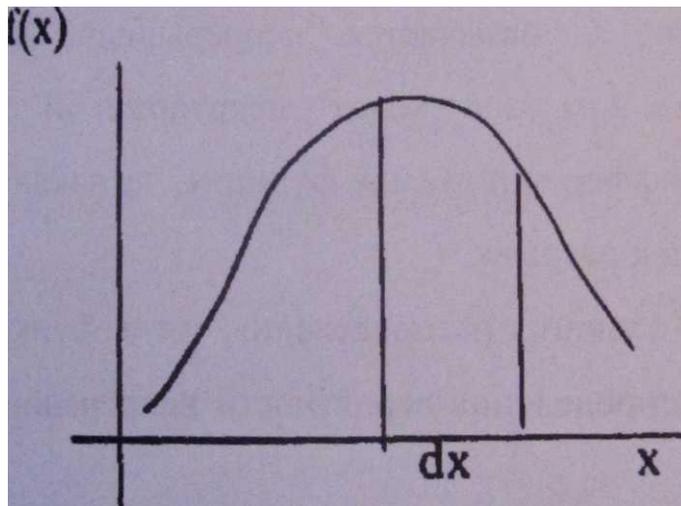
Имеем:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(x) dx = f(x_1) \Delta x$$

Согласно теореме о среднем, где

$$x \leq X_1 \leq x + \Delta x$$

Таким образом,  $f(x)dx$  равна вероятности  $P(x < X < x+dx)$  попадания случайной величины  $X$  на бесконечно малый отрезок  $[x, x+dx]$ .



Произведение  $f(x)dx$  называется элементом вероятности. В механической интерпретации плотность распределения  $f(x)$  буквально совпадает с плотностью распределения единичной массы вдоль оси  $x$ .

С введением 5 функции понятие плотности распределения можно обобщить на случай дискретных случайных величин.

В теории вероятностей исследован ряд практически важных законов распределения.

## НЕКОТОРЫЕ ПРАКТИЧЕСКИ ВАЖНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.

$$P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Как было показано, что распределение описывает вероятность появления некоторого события равно  $m$  раз в  $n$  опытах.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА.

Дискретная случайная величина  $X=m=1, 2, 3..$  подчиняется распределению Пуассона, если:

$$P_m = a^m e^{-a} / m!$$

где  $a$  – параметр

Доказано, что любая случайная величина  $X$  подчиняется распределению Пуассона, если для нее:

1. Вероятность попадания того или иного тела точек на отрезок  $\Delta x$  зависит только от длины этого отрезка, но не зависит от его положения на оси  $x$  с одинаковой средней плотностью.
2. Точки попадания распределены по оси  $x$  независимо друг от друга.
3. Вероятность попадания двух и более точек на малых отрезок  $\Delta x$  пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одной точки на  $\Delta x$  (условие ординарности).

Пример: АТС за час принимает в среднем  $a$  вызовов. Найти вероятность того, что в данный час поступит ровно  $m$  вызовов.

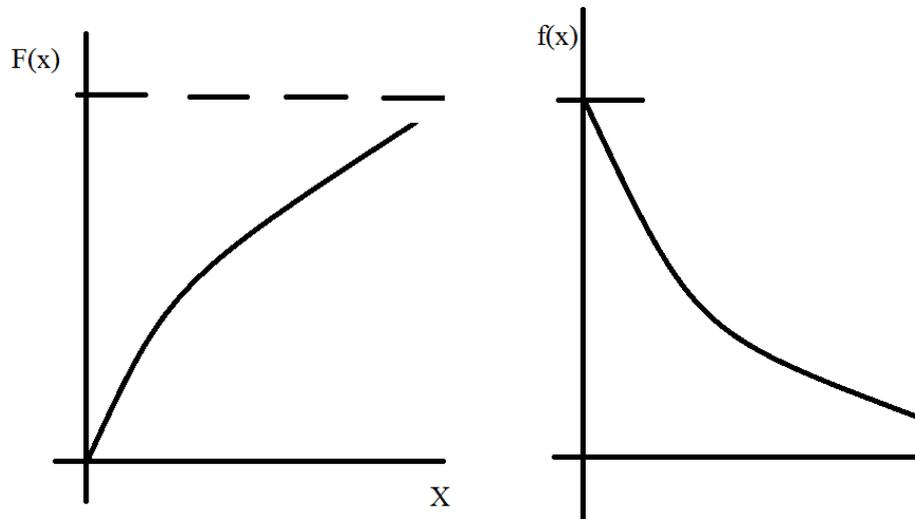
Очевидно, что все три приведенные условия выполняются:

$$P_m = a^m e^{-a} / m!$$

Можно показать, что распределение Пуассона является предельным случаем номинального распределения, когда  $n > 0$ ,  $p > 0$ ,  $np = a = \text{const}$ .

Это значит, что если число опытов очень велико, а вероятность появления события в каждом предельном опыте очень мала, то вместо сложного биномиального закона распределения можно пользоваться более простым распределением Пуассона.

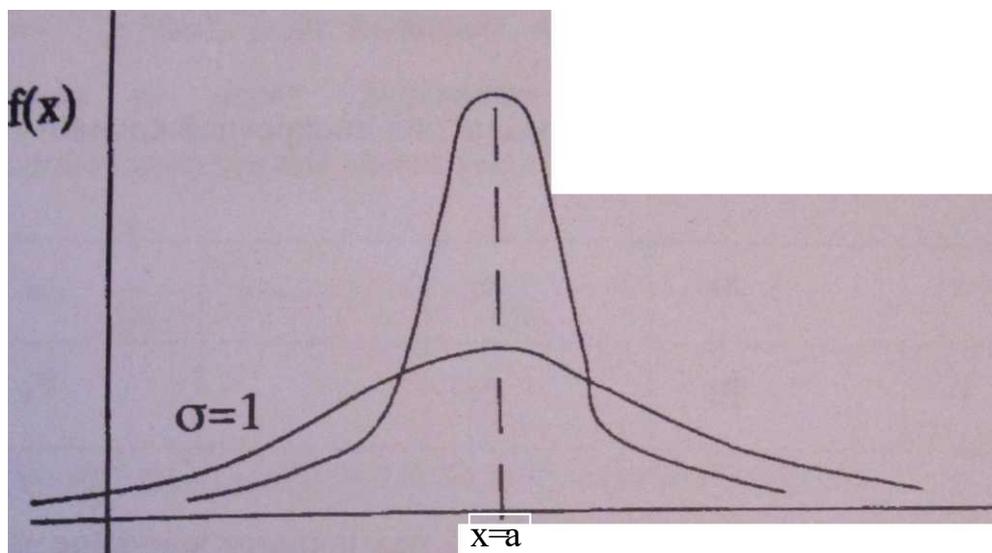
## ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ.



Функция распределения  $F(x) = 1 - e^{-ax}$  Плотность распределения  $f(x) = \lambda e^{-ax}$   
Где  $X = \text{const}$  параметр  $x = 0$ .

С одной стороны формулы этого распределения просты. С другой стороны, обработка статистического материала по отказам сложных систем приводит к функциям распределения близким к экспоненциальным. Эти два обстоятельства сделали экспоненциальное распределение наиболее употребимым при оценке безотказности самолетных систем.

## НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА)



Нормальное распределение занимает особое положение, так как в некотором смысле оно является предельным. Ибо согласно так называемой центральной предельной теореме Ляпунова нормальному распределению подчиняется любая случайная величина  $X$ , которая представляет собой сумму достаточно большого числа независимых (или слабо зависимых) элементарных слагаемых, каждое из которых в отдельности сравнительно слабо влияет на сумму.

В силу этого нормальное распределение применяется в теории стрельбы, в теории ошибок, в теории измерений, теории отказов.

### ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ.

Во многих вопросах практики нет необходимости случайную величину  $X$  характеризовать полностью законом распределения.

Часто достаточно знать лишь некоторые ее числовые характеристики, определяющие ее в среднем.

Рассмотрим основные из них.

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ (МО)

Пусть имеется закон распределения дискретной случайной величины;

X	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	...	X
p	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	...	P <sub>n</sub>

Пусть опыт воспроизводится N раз и пусть значение X<sub>1</sub> появилось m<sub>1</sub> раз, X<sub>2</sub> - m<sub>2</sub> раз и т.д. Очевидно, что среднее значение полученных наблюдений Mx[x] равно.

$$Mx[x] = X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_n m_n / N = \sum_{i=1}^n x_i (m_i / N)$$

Число M[x] есть среднее значение дискретной случайной величины X и называется ее математическим ожиданием.

Пример: если при бросании кости выпадает грань в 6 очков, то выигрыш 5 рублей, если выпадает другая грань, то проигрыш 1 рубль. Справедлива ли игра? Определим математическое ожидание. Закон распределения выигрышей имеет вид:

X	-1	5
p	5/6	1/6

### ОСНОВЫ РЕСУРСНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАШИН

При создании современных машин обеспечение их ресурсов является весьма сложной и многогранной проблемой. Значительные успехи в решении этой проблемы достигнуты за последние 50 лет в области самолетостроения.

Требования обеспечения ресурса планера начали учитываться при проектировании в 50-е годы после известных катастроф английских самолетов "Комета-1". В связи с необходимостью существенного увеличения ресурса самолетов, уменьшения затрат на их эксплуатацию и повышения безопасности полетов, авиационные фирмы и конструкторские бюро осуществили важные программы обеспечения ресурса самолетов при их проектировании.

Были созданы методы экспериментального исследования сопротивления усталости элементов и натуральных конструкций, разработана система обеспечения безопасности конструкций по условиям усталости (включая и нормативные требования), создана и внедрена методика, включающая расчет усталостной долговечности и проектирования конструкций на заданный ресурс.

Появление усталостных трещин в силовых элементах при длительной эксплуатации самолетов из-за усталостных, коррозионных и случайных повреждений, а также возможность существования начальных дефектов потребовали дополнения задач проектирования требованием создания конструкций, обладающих свойствами живучести. Для решения этих задач потребовалось изучение новых характеристик материалов, позволяющих на основе подходов линейной механики разрушения определять кинетику развития усталостных трещин и сопротивление материала с трещиной статическому разрушению. Эти характеристики в ряде случаев вступают в противоречие с традиционными механическими характеристиками. Так, например, высокопрочные материалы, которые выгодны по условиям статической прочности и минимума веса, как правило, оказывались более чувствительными к образованию и развитию трещин, чем материалы средней и малой прочности.

Для обеспечения эксплуатации по условиям живучести должны быть удовлетворены требования к длительности роста усталостной трещины и к остаточной прочности поврежденной конструкции. Решение проблемы

живучести включает также разработку средств для обнаружения дефектов (трещин) в процессе эксплуатации, введение обоснованного регламента осмотров, обеспечивающего своевременное обнаружение дефектов и необходимую степень безопасности конструкции по условиям прочности.

В данной главе излагаются выполненные в ЦАГИ решения отмеченных задач ресурсного проектирования конструкций самолетов на основе работ.

Изложенный опыт обеспечения ресурса самолетных конструкций может быть распространен и на другие отрасли машиностроения.

## **ПРИНЦИПЫ РЕСУРСНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

Ресурс конструкции - продолжительность функционирования конструкции, выраженная в летных часах или в числе полетов до наступления предельного состояния, при котором дальнейшая эксплуатация самолета прекращается по требованиям безопасности или эффективности эксплуатации в связи с возможным недопустимым снижением прочности.

Следует различать ресурс по условиям усталостной прочности и срок службы конструкции. Срок службы конструкции выраженный в годах - календарная продолжительность до наступления предельного состояния (с учетом продолжительности хранения, нахождения на стоянках и в ангарах) конструкции. При установлении срока службы учитываются такие факторы как старение, коррозия и т.п. Срок службы влияет на ресурс по условиям усталостной прочности.

Ресурс конструкции самолета на этапах проектирования и эксплуатации назначается следующим образом: определяются нагрузки, действующие на конструкцию; определяются характеристики сопротивления усталости (долговечность до образования трещин) и трещиностойкости (скорость роста трещин и остаточная прочность) конструкции при нагружении ее нерегулярными нагрузками; назначаются коэффициенты

надежности, определяются начало и периодичность осмотров конструкции в эксплуатации; назначается ресурс конструкции.

Определение совокупности переменных нагрузок, действующих на конструкцию, проводится применительно к нагрузкам функционирования, обусловленных массой самолета, топлива, полезного груза, скоростью и высотой полета, и к дополнительным нагрузкам, вызываемым маневрированием, атмосферной турбулентностью, неровностями поверхности аэродромов и др. При проектировании переменные нагрузки определяются расчетом с использованием статистических данных. На этапе эксплуатации проводят прямые измерения переменных нагрузок.

Характеристики сопротивления усталости и трещиностойкости определяют расчетом и экспериментально. Для этого на этапе проектирования испытывают образцы материалов и соединений, опытные панели и узлы. В результате испытаний выбирают материалы, полуфабрикаты, конструктивные формы и технологические процессы, обеспечивающие высокий уровень характеристик сопротивления усталости и трещиностойкости. До начала эксплуатации и назначения ресурса самолета проводят прямые испытания натурной конструкции планера самолета на ресурс.

Ресурс самолета в целом определяется по ресурсу отдельных элементов, разрушение которых или появление повреждений в них может непосредственно привести к катастрофе. Если необходимо, ресурс увеличивается после ремонта или замены элементов.

Безопасность конструкций самолета по условиям сопротивления усталости подтверждается при эксплуатации на основе накопления и обобщения данных об условиях нагружения и технического состояния конструкции. В России это реализуется путем поэтапного установления значений назначенных ресурсов. Под назначенным ресурсом понимается часть полного (заявленного) ресурса, которую официально допускается

отработать с учетом всех обосновывающих материалов, имеющихся в данное время. Увеличение назначенного ресурса проводится на основе:

- уточнения характера и условий эксплуатации парка самолетов;
- уточнения нагруженности конструкции, в частности, по результатам  $Y$  испытаний;
- анализа результатов дополнительных лабораторных испытаний на выносливость и живучесть, в том числе конструкций с наработкой в эксплуатации;
- анализа технического состояния конструкции в процессе эксплуатации и ремонтов.

Величина ресурса самолета  $T_p$  определяется делением значение средней долговечности  $T_{cp}$ , на суммарный коэффициент надежности  $n$ :

$$T_p = \frac{T_{cp}}{n}$$

Коэффициент надежности  $n$ . учитывает рассеяние долговечности и уровня нагрузок, а также возможности различного рода неточностей и незнания при оценке долговечности. Величина этого коэффициента существенно зависит от способа обеспечения безопасности по условиям усталостной прочности - безопасный ресурс или эксплуатационная живучесть.

Безопасный ресурс применяется тогда, когда появление трещин» можно обнаружить только после окончательного разрушения конструкций. В этом случае невозможно надежно обнаружить наступление предкритического состояния, поэтому эксплуатация прекращается, как только наработка достигает величины безопасного ресурса, назначенного независимо от состояния конструкции. Величина коэффициента выбираете! таким образом, чтобы в пределах безопасного ресурса разрушения конструкции было бы практически невероятным.

При применении эксплуатационной живучести конструкция должна задать достаточной прочностью, обеспечивающей безопасность при

появлении повреждений (трещин), которые могут быть обнаружены специальных осмотрах. При этом весь парк самолетов эксплуатироваться до наработки, при которой появляются трещины конструкциях с наименьшей усталостной долговечностью. Принцип эксплуатационной живучести обеспечивает повышение надежное!\* летательных аппаратов за счет осмотров конструкции и дает возможность увеличить их ресурс по сравнению с принципом безопасного ресурса. Проектирование самолетных конструкций осуществляется поэтапно. На этапе технического задания и технического предложения разработчиком производителя выбор типа конструкции и конструкционных материалов для обеспечения прочности при принятой по статистическим данным весе конструкций.

На этапе аванпроекта разработчик определяет расчетные условия прочности предварительно оценивает нагрузки в соответствии с требованиями Норм летной годности самолетов. На этом же этапе продолжается выбор основных конструкционных материалов и вариантов силовой компоновки конструкции, с предварительной расчетной оценкой допустимых напряжений исходя из требований статической прочности, усталостной прочности и живучести. Производится предварительная оценка веса конструкции.

На стадии эскизного проекта разработчик производит проектные расчеты нагрузок, окончательный выбор конструкционных материалов и силовой схемы конструкции, а также уточняет оценку ее веса.

На этапе рабочего проекта разработчик производит уточнение внешних нагрузок напряженно-деформированного состояния конструкции. На этом этапе используются результаты испытаний конструктивных элементов и агрегатов конструкции с подробной тензометрией. На стадии рабочего проектирования Должна быть в основном закончена отработка силовых

элементов конструкции по условиям статической прочности, усталостной прочности и живучести, а также по Условиям обеспечения безопасности с учетом явления аэроупругости. В конце этого выделяется первый экземпляр опытного самолета для проведения статических испытаний, кроме того, до начала серийного производства проводятся летные испытания опытного образца самолета с целью определения напряженно-деформированного состояния и критических скоростей непосредственно по результатам прямых измерений.

На этапе начала серийного производства выполняется незначительная доработка силовой конструкции для устранения отдельных недостатков, выявленных в результате летных и окончательных проверочных расчетов.

Разработчик и завод-изготовитель совместно с научно-исследовательскими институтами проводят следующие работы: статические испытания головного серийного самолета, копровые испытания серий стоек шасси, частотные испытания головного серийного самолета, лабораторные испытания серийного самолета на усталость в объеме сертификационного минимума, сбор статических данных по повторяем перегрузок и нагрузок в летных условиях.

В настоящее время для основной силовой конструкции самолета принято считать достаточным критерием надежности по условиям усталостной прочности значение  $10^{-9} - 10^{-10}$  для так называемой нормы разрушения, т.е. средней вероятности разрушения одного экземпляра конструкции за 1 ч полета или вероятности разрушения каждого экземпляра конструкции (в течение установленного срока службы) порядка  $10^{-5}$ .

Поскольку обеспечение усталостной прочности конструкции современных самолетов при возросших ресурсах невозможно без определенного обязательного технического обслуживания в эксплуатации (в виде осмотров и ремонтов), то эти требования имеют прямое отношение к рассматриваемой проблеме.

Трудоемкость технического обслуживания составляет порядка 8-10 человека

Ряд катастроф пассажирских и транспортных самолетов вследствие усталости конструкции, а также большое число трещин, выявленных в процессе эксплуатации и повлекших за собой необходимость дорогостоящих ремонтов и Умственных доработок, выдвинули проблему обеспечения ресурса в ряд задач, решаемых не при доводке уже созданной конструкции, а в самом начале ее проектирования.

Для современных конструкций из алюминиевых сплавов с применяемыми способами соединения деталей (заклепочные и болтовые) существует некоторый предел напряжений, зависящий от долговечности, выше которого нельзя обеспечить требуемую усталостную прочность при существующей технологии. Этот предел в первом приближении можно охарактеризовать допускаемыми напряжениями  $\sigma_{доп}$  при расчете на статическую прочность. Зависимость  $\sigma_{доп}$ , от требуемого ресурса, построенная для нижней обшивки крыла из материала типа Д16Т при коэффициенте надежности, равном  $\eta=3$  (отношение средней долговечности к требуемому ресурсу), приведена на рисунке.

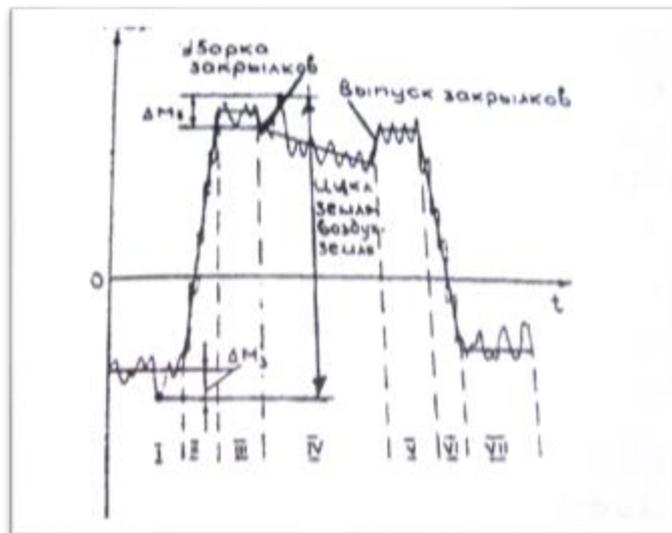


Рисунок. Типовое нагружение крыла пассажирского самолета

Учебное издание

Кириакиди Сергей Константинович

Сатин Валерий Александрович

## НАДЕЖНОСТЬ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

№ 066815 ОТ 25 08 99. Подписано к изданию 04.12.2000. Уч.-изд.л

Издательство Воронежский Государственный Технический

Университет

394026 Воронеж, Московский проспект, 14

2009