МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Воронежский государственный архитектурно-строительный университет

УТВЕРЖДАЮ
Директор строительно-технологического института
___________/Власов В.В./
«__12__» ____05____________2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА
дисциплины

«Методы вычислений»

Направление подготовки бакалавра: 04.03.02 «Химия физика и механика материалов»

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Нормативный срок обучения: 4 года

Форма обучения: очная

Автор программы: ________________ к.ф.-м.н., ст. преп. Михин Е.А.

Программа обсуждена на заседании кафедры инноватики и строительной физики

«23» 04 2015 года Протокол № 8

Зав. кафедрой_________________________ /Суровцев И.С./

Воронеж 2015

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

1. **1.1. Цели дисциплины.** Целью курса является усвоение студентами общих понятий и идей, относящихся к преобразованию математических моделей различных прикладных задач, возникающих в сфере профессиональной деятельности, к виду, удобному для нахождения их численных решений; формирование у студентов в систематизированной форме понятие о численных методах решения прикладных задач, источниках ошибок, методах оценки точности результатов, методах программной реализации вычислительных алгоритмов; формирование навыков углубления знаний вычислительны методов и умений их практических применений.

.

1.2. Задачи освоения дисциплины. Основной задачей дисциплины является овладение студентами навыками и умениями постановки вычислительных задач на базе содержательных моделей и выбора метода вычислительной математики, адекватного решаемой задаче. В задачи курса входит изучение интерполяции и аппроксимации, овладение прямыми и итерационными методами решения систем линейных алгебраических уравнений, нахождение численного решения нелинейных уравнений, изучение методов численного интегрирования, а также разностных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Прикладная задача дисциплины заключается в усвоении тех основных понятий и методов, которые позволят адаптироваться к изменяющимся условиям профессиональной деятельности.

---

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП

Дисциплина «Методы вычислений» относится к вариативной части Математического и естественнонаучного цикла учебного плана.

Изучение дисциплины «Методы вычислений» требует основных знаний, умений и компетенций студента в объеме учебных программ технического университета по курсам: математики, информатики, физики, химии.

Дисциплина «Методы вычислений» является предшествующей для дисциплин

- Сертификационные испытания материалов.
- Моделирование химико-технологических процессов.
- Комплексная оценка состава, структуры и свойств материалов.
- Научно-исследовательская работа.
- Методология научного и технического творчества.

- Мезомеханика и гидромеханика.
- Физика конденсированного состояния.
- Современная физическая химия.
- Современная аналитическая химия.
- Структурная химия и кристаллохимия.
- Химия твердого тела.
- Физика и химия поверхности.

2. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Процесс изучения дисциплины «Методы вычислений» направлен на формирование следующих компетенций:

- общекультурные (ОК): ОК-1, ОК-2, ОК-6, ОК-10, ОК-12, ОК-13, ОК-17, ОК-18;
- профессиональные (ПК): ПК-3, ПК-6, ПК-8, ПК-13, ПК-14, ПК-15, ПК-16, ПК-18, ПК-20, ПК-21.

Процесс изучения дисциплины «Методы вычислений» направлен на формирование следующих компетенций:

- Навыками формулирования математических моделей на базе содержательных.
- Навыками выбора метода вычислительной математики, адекватного решаемой задаче и имеющимся в распоряжении средствам.
- Знаниями источников и видов погрешностей решения конечномерных задач и методов из минимизации.
- Владения принципами построения численных методов решения задач в сфере профессиональной деятельности.
- Овладение методами реализации вычислительных алгоритмов и использования программных пакетов.
- Формирование теоретической основы углубления знаний и умений решения прикладных задач и для использования численных методов в научных исследованиях и практической деятельности в профессиональной сфере.

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать:

- источники и виды погрешностей решения конечномерных задач;
- принципы выбора численных методов решения задач в области профессиональной деятельности;
- методы решения задач алгебры и математического анализа, их достоинства и недостатки;

- численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- численные методы Фурье-анализа;
- численные методы решения уравнений в частных производных;
- знать содержание основных программных пакетов.

Уметь:

- выбирать те или иные численные методы в зависимости от сложности поставленных задач и наличия вычислительных возможностей;
- учитывать и минимизировать влияние различных погрешностей на точность получаемого решения конкретной задачи;
- самостоятельно преобразовать математические модели различных прикладных задач в сфере профессиональной деятельности к виду, удобному для программной реализации
- использовать один из программных пакетов в сфере профессиональной деятельности.

Владеть:

- навыками формулирования и реализации алгоритмов решения задач в сфере профессиональной деятельности;
- методами численной экстраполяции и интерполяции;
- методами численного дифференцирования и интегрирования;
- методами решения задачи Коши обыкновенных дифференциальных уравнений;
- методами решения дифференциальных уравнений в частных производных;
- методами выделения периодических и экспоненциальных составляющих в экспериментальных результатах;
- методами выделения сигнала и шума в экспериментальных результатах;

4. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ И ВИДЫ УЧЕБНОЙ РАБОТЫ

Общая трудоемкость дисциплины «Методы вычислений» составляет 3 зачетных единицы.

Вид учебной работы		Всего часов	Семестр
			4
Аудиторные занятия (всего)		54/-	54/-
В том числе:			
Лекции		18/-	18/-
Практические занятия (ПЗ)		36/-	36/-
Лабораторные работы (ЛР)		-/-	-/-
Самостоятельная работа (всего)		54/-	54/-
В том числе:			
Курсовой проект		-/-	
Контрольная работа		-/-	
Вид промежуточной аттестации (зачет, экзамен)		зачет/-	
Общая трудоемкость	час	108	108
	зач. ед.	3	3

Примечание: здесь и далее числитель – очная/знаменатель – заочная формы обучения.

5. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

5.1. Содержание разделов дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела
1	Классификация погрешностей и методы их оценки и минимизации.	Предмет и метод вычислительной математики. Методы построения вычислительных схем. Основные источники и классификация погрешностей. Абсолютная и относительная погрешности. Значащие и верные цифры. Неустранимая погрешность. Вычислительная погрешность.
2	Вычислительные методы алгебры	Решение систем линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса. Метод простой итерации и достаточные условия его сходимости. Решение нелинейных уравнений и систем. Метод простой итерации решения уравнения с одним неизвестным и достаточные условия его сходимости. Методы хорд и касательных как частные случаи метода простой итерации.

3	Методы численного анализа	Интерполирование и приближение функций. Общая задача интерполирования ортогональными многочленами. Сходимость интерполяционного процесса. Численное дифференцирование и интегрирование. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы средних прямоугольников, трапеций, Симпсона. Узлы и веса квадратурных формул. Оценка погрешности формул. Квадратурные формулы Гаусса.
4	Численные методы решения дифференциальных уравнений.	Численные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Классификация методов. Метод Рунге-Кутта. Оценка погрешности и сходимость одношаговых методов. Численные методы решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Построение простейшей разностной схемы для уравнения второго порядка в частных производных.
5	Методы обработки экспериментальных и статистических данных.	Оптимальный выбор точек наблюдения. Метод наименьших квадратов. Методы конечных разностей. Дискретное преобразование Фурье. Выделение периодических и экспоненциальных зависимостей. Выделение шума и сигнала.

5.2 Разделы дисциплины и междисциплинарные связи с обеспечиваемыми (последующими) дисциплинами

№ п/п	Наименование обеспечиваемых (последующих) дисциплин	№ № разделов данной дисциплины, необходимых для изучения обеспечиваемых (последующих) дисциплин				
		1	2	3	4	5
1.	Сертификационные испытания материалов.	+	+	-	-	+
2	Моделирование химико-технологических процессов.	+	+	-	-	+
3	Комплексная оценка состава, структуры и свойств материалов.	+	-	+	-	+
4	Научно-исследовательская работа.	+	+	+	+	+
5	Методология научного и технического творчества.	+	-	-	-	+
6	Мезомеханика и гидромеханика.	+	-	+	+	-

7	Физика конденсированного состояния.	+	-	-	+	-
8	Современная физическая химия.	+	+	-	-	+
9	Современная аналитическая химия.	+	-	-	-	+
10	Структурная химия и кристаллохимия.	+	+	-	-	+
11	Химия твердого тела.	+	-	-	-	+
12	Физика и химия поверхности.	+	-	+	-	+

5.3. Разделы дисциплин и виды занятий

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Лекц.	Практ. зан.	Лаб. зан.	СРС	Все-го час.
1.	Классификация погрешностей и методы их оценки и минимизации.	2	2	–	6	10
2.	Вычислительные методы алгебры	4	8	–	10	22
3	Методы численного анализа	4	10	–	10	24
4	Численные методы решения дифференциальных уравнений.	2	4	–	12	18
5	Методы обработки эксперимен-тальных и статистических данных.	6	12	–	16	34

6. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

№ п/п	№ раздела дисциплины	Наименование лабораторных работ	Трудо-емкость (час)
1.			

7. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

№ п/п	№ раздела дисциплины	Тематика практических занятий	Трудо-емкость (час)
1.	1	Оценка погрешности представления данных и расчетных схем.	2
2	2	Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса..	2
3	2	Решение системы нелинейных уравнений.	2

4	2	Реализация метода хорд и касательных.	2
5	2	Реализация метода деления отрезка пополам.	2
6	3	Интерполирование и приближение функций полиномами Чебышева.	2
7	3	Численное дифференцирование.	2
8	3	Численное и интегрирование методом Гаусса.	2
9	3	Численное и интегрирование методом прямоугольников, трапеций, Симпсона.	2
10	3	Численное и интегрирование быстро осциллирующих функций.	2
11	4	Реализация метода Рунге-Кутта.	2
12	4	Численные решение краевой задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.	2
13	5	Оптимальный выбор точек наблюдения методом Гаусса.	2
14	5	Реализация метода наименьших квадратов.	2
15	5	Численное дифференцирование методом конечных разностей.	2
16	5	Реализация дискретного преобразования Фурье.	2
17	5	Выделение периодических и экспоненциальных зависимостей из набора данных.	2
18	5	Выделение шума и сигнала из результатов наблюдений.	2

8. ПРИМЕРНАЯ ТЕМАТИКА КУРСОВЫХ ПРОЕКТОВ И КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

9. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

9.1 Вопросы для подготовки к зачету

1. Источники погрешностей, классификация погрешностей.
2. Погрешности основных арифметических операций. Погрешности элементарных функций.
3. Прямая задача теории погрешностей и способы ее решения.
4. Обратная задача теории погрешностей и ее решение.

5. Задачи линейной алгебры. Вычисление определителей. Вычисление элементов обратной матрицы. Вычисление собственных значений матрицы
6. Трансцендентные уравнения. Метод дихотомии.
7. Трансцендентные уравнения. Метод хорд.
8. Трансцендентные уравнения. Метод Ньютона (метод касательных).
9. Трансцендентные уравнения. Метод простых итераций.
10. Интерполяция ортогональным полиномом.
11. Интерполяция полиномом Чебышева.
12. Метод наименьших квадратов.
13. Численное интегрирование. Метод прямоугольников.
14. Численное интегрирование. Метод трапеций.
15. Численное интегрирование. Метод Симпсона.
16. Узлы и веса квадратурных формул. Метод Гаусса.
17. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).
18. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Методы Рунге-Кутты решения систем ОДУ.
19. Оптимальный выбор точек наблюдения.
20. Методы конечных разностей.
21. Дискретное преобразование Фурье.
22. Выделение периодических и экспоненциальных зависимостей.
23. Выделение шума и сигнала по результатам наблюдений.

9.2 Вопросы для подготовки к экзамену

9.3 Тесты контроля качества усвоения дисциплины

Примерные варианты тестовых заданий для проведения текущего контроля.

Вариант 1.

1. ***Опишите метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений.***

а) В основе данного метода лежит идея последовательного исключения неизвестных. Решение системы распадается на два этапа: 1) прямой ход, когда исходная система приводится к треугольному виду; 2) полученные коэффициенты при неизвестных и правые части уравнений хранятся в памяти

ЭВМ и используются при осуществлении обратного хода, который заключается в нахождении неизвестных из системы треугольного вида.

б) Заданная система линейных уравнений каким-либо образом приводится к эквивалентному виду. Исходя из произвольного начального вектора, строится итерационный процесс. При выполнении достаточных условий сходимости, получается последовательность векторов, неорганично приближающихся к точному решению.

в) Если матрица коэффициентов А невырожденная (определитель этой матрицы не равен нулю), то исходная система имеет единственное решение. Значения неизвестных могут быть получены по формулам x_i= det A_i / det A, det A_i и det A - определители матриц A_i и А соответственно. Матрица A_i образуется из матрицы А путем замены ее i-го столбца столбцом свободных членов.

2. В чем достоинство и недостаток метода Ньютона нахождения корней нелинейного уравнения?

а) Метод Ньютона в ряду итерационных методов нахождения корней нелинейного уравнения наиболее прост в организации вычислительного процесса. Основной недостаток метода – достаточно медленная скорость сходимости.

б) Метод Ньютона относится к числу итерационных методов второго порядка и имеет наибольшую точность нахождения корней нелинейного уравнения. Основной недостаток метода – медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени при решении сложных нелинейных уравнений.

в) Метод Ньютона весьма быстро сходится, точность каждого приближения в этом методе пропорциональна квадрату точности предыдущего. Основной недостаток метода – необходимость достаточно точного начального приближения.

3. Сформулируйте постановку задачи интерполирования функции.

а) Требуется вычислить производные от функций, заданных в табличном виде.

б) Требуется найти значение функции f(x), $x \neq x_i$ (i = 0, 1,…, n), если известны узлы

интерполирования x_i (i = 0, 1,…,n) и значения функции f(x) в этих узлах.

в) Требуется определить допустимую погрешность аргументов по допустимой погрешности функции.

4. Назовите области применения формул численного дифференцирования.

а) К численному дифференцированию чаще всего прибегают, когда приходится вычислять производные от функций, заданных таблично, или когда непосредственное дифференцирование функции затруднительно.

б) К численному дифференцированию чаще всего прибегают, когда приходится вычислять значения функции в промежуточных точках, при этом данная функция задана в табличном виде и аналитическое выражение функции неизвестно.

в) К численному дифференцированию чаще всего прибегают, когда требуется определить допустимую погрешность аргументов по допустимой погрешности функции.

5. Численное решение методом Эйлера задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.

а) В методе Эйлера решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ получается как предел последовательности функций $y_n(x)$, которые находятся по реккурентной формуле.

б) Строится система равноотстоящих точек $x_i = x_0 + i \cdot h$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$. Вычисления значений $y(x_i)$, являющихся решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, проводятся в два этапа. На первом этапе находится промежуточное значение y_i с шагом α h, на втором этапе – $y_{i+1.}$

в) Строится система равноотстоящих точек $x_i = x_0 + i \cdot h$ $(i = 0, 1, 2, \dots)$ при достаточно малом шаге h. Приближенные значения $y(x_i)$, являющиеся решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, вычисляются последовательно по формулам $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$.

Вариант 2.

1. Для решения систем линейных алгебраических уравнений какого вида разработан метод прогонки?

а) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженной (лишь малая доля элементов матрицы отлична от нуля) матрицей коэффициентов.

б) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей коэффициентов.

в) Метод прогонки разработан для решения систем линейных алгебраических уравнений с апериодической матрицей коэффициентов.

2. Решение нелинейного уравнения методом простой итерации.

а) Нелинейное уравнение f(x) = 0 на интервале [a, b] заменяется эквивалентным уравнением x = φ(x). Итерации образуются по правилу x_{k+1} = φ(x_k), (k = 0, 1, …), причем задается начальное приближение x_0. Если последовательность чисел x_k имеет предел при k → 0 , то этот предел является корнем уравнения x = φ(x).

б) Для нахождения корня нелинейного уравнения f(x) = 0 методом простой итерации требуется, чтобы на концах интервала [a, b] функция f(x) принимала ненулевые значения противоположного знака. Итерационная процедура состоит в переходе от такого интервала к новому интервалу, совпадающему с одной из половин предыдущего и обладающему тем же свойством. Процесс заканчивается, когда длина вновь полученного интервала станет меньше заданной точности ε, и в качестве корня уравнения приближенно принимается середина этого интервала.

в) Для нахождения корня нелинейного уравнения f(x) = 0 методом простой итерации требуется, чтобы функция f(x) имела на интервале [a, b] непрерывные производные 1-го и 2-го порядков, сохраняющие на [a, b] постоянный знак. Для начала вычислений необходимо задание одного начального приближения x_0. Последующие приближения определяется по формуле $x_{k+1} = x_k - f(x_k) f'(x_k)$, (k = 0, 1, …).

3. Какую функцию называют аппроксимирующей?

а) Пусть для конечного множества значений аргумента x_0, x_1, …, x_n известны табличные значения функций f(x_0), f(x_1), …, f(x_n). Аппроксимирующей (приближающей) называют функцию φ(x), расчеты по которой либо совпадают, либо в определенном смысле приближаются к данным значениям функций.

б) Пусть для конечного множества значений аргумента x_0, x_1, …, x_n известны табличные значения функций f(x_0), f(x_1), …, f(x_n). Аппроксимирующей (приближающей) называют функцию φ(x), производные от которой равны производным функции f(x).

в) Пусть для конечного множества значений аргумента x_0, x_1, …, x_n известны табличные значения функций $f(x_0)$, $f(x_1)$, …, $f(x_n)$. Аппроксимирующей (приближающей) называют функцию $\varphi(x)$, значения которой отличаются от данных значений функций на постоянную величину.

4. Вычисление определенного интеграла по формулам прямоугольников.

а) Отрезок интегрирования [a, b] разбивается на n равных интервалов. В пределах каждого интервала $[x_i, x_{i+1}]$ подынтегральная функция f(x) заменяется интерполяционным многочленом Лагранжа первой степени с узлами x_i и x_{i+1}, что соответствует замене кривой на секущую. Интеграл по [a, b] вычисляется как сумма интегралов по всем частичным отрезкам.

б) В квадратурных формулах коэффициенты подбираются так, чтобы формулы были точны для многочленов наивысшей возможной степени N. При n узлах точно интегрируются все многочлены степени $N \leq 2n - 1$. Коэффициенты находятся из системы (2n-1) нелинейных уравнений.

в) Отрезок интегрирования [a, b] разбивают на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ равной длины. На каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ подынтегральная функция f(x) заменяется на постоянную величину $f(x_{i+1/2})$ (либо $f(x_i)$, либо $f(x_{i+1})$) и интеграл по [a, b] вычисляется как сумма интегралов по всем частичным отрезкам.

5. Назовите достоинства и недостатки интерполяционных формул Лагранжа.

а) Достоинство – метод наиболее прост в понимании и организации вычислительного процесса. Основной недостаток метода – при увеличении числа узлов и соответственно степени интерполяционный многочлен Лагранжа требуется строить заново.

б) Достоинство – метод относится к числу итерационных методов и имеет наибольшую точность интерполяции. Основной недостаток метода – медленная скорость сходимости, что приводит к значительным затратам машинного времени.

в) Достоинство – использование многочленов невысокого порядка и вследствие этого малым накоплением погрешностей в процессе вычислений. Основной недостаток метода – из числа методов интерполяции наиболее сложен в и организации вычислительного процесса.

Вариант 3.

1. В чем преимущество метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений перед методом простой итерации?

а) Дает большой выигрыш в точности, так как, во-первых, метод Зейделя существенно уменьшает число умножений и делений, во-вторых, позволяет накапливать сумму произведений без записи промежуточных результатов.

б) Метод Зейделя являются абсолютно сходящимся, т.е. для него нет необходимости вводить достаточные условия сходимости в отличие от метода простой итерации.

в) Обычно данный метод дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации. Кроме того, метод Зейделя может оказаться более удобным при программировании, так как при вычислении $x_i^{(k+1)}$ нет необходимости хранить значения $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$, …, $x_{i-1}^{(k)}$.

2. Назовите основные этапы процесса нахождения корня нелинейного уравнения.

а) На первом этапе левая часть нелинейного уравнения $f(x) = 0$ аппроксимируется на интервале [a, b] интерполяционным многочленом Ньютона. На втором этапе, используя заданное начальное приближение, строится итерационный процесс, позволяющий уточнить значение отыскиваемого корня.

б) На первом этапе проверяется выполнение достаточных условий сходимости. На втором этапе нелинейное уравнение заменяется на интервале [a, b] эквивалентным уравнением. На третьем этапе строится итерационный процесс, позволяющий определить значение корня нелинейного уравнения.

в) На первом этапе изучается расположение корней и проводится их разделение, т.е. находится какой-либо интервал [a, b] оси Ox, внутри которого находится один корень, и нет других решений нелинейного уравнения. На втором этапе, используя заданное начальное приближение, строится

итерационный процесс, позволяющий уточнить значение корня нелинейного уравнения.

3. В чем состоит сущность метода наименьших квадратов?

а) Метод состоит в следующем. Весь отрезок интерполирования разбивают на частичные отрезки и на каждом из частичных отрезков приближенно заменяют интерполируемую функцию f(x) многочленом невысокой степени. Для того чтобы не возникало разрывов производной в местах сочленения, на каждом частичном отрезке степень полинома берется «с запасом», а возникающую свободу в выборе коэффициентов полиномов используется для сопряжения производных на границах участков.

б) Метод состоит в том, что строится полином, сумма квадратов отклонений которого от табличных значений интерполируемой функции $y_i = f(x_i)$ минимальна.

в) Метод состоит в том, что строится полином, принимающий в точках x_i, называемых узлами, значения интерполируемой функции $f(x_i)$.

4. В чем состоит суть методов численного интегрирования функций?

а) Суть состоит в замене подынтегральной функции f(x) вспомогательной, интеграл от которой легко вычисляется в элементарных функциях.

б) Суть состоит в следующем: при заданном числе интервалов разбиения следует расположить их концы так, чтобы получить наивысшую точность интегрирования.

в) Суть состоит в том, что из подынтегральной функции f(x) выделяют некоторую функцию g(x), имеющую те же особенности, что функция f(x), элементарно интегрируемую на данном промежутке и такую, чтобы разность f(x)–g(x) имела нужное число производных.

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

10.1 Основная литература:

1 Математические методы в строительной механике с основами теории обобщенных функций/ Золотов А.Б.; -М.: АСВ, 2008-336 с.

2 Копченова, Наталья Васильевна. Вычислительная математика в примерах и задачах [Текст] : учеб. пособие : рек. УМО / Копченова, Наталья Васильевна, Марон, Исаак Абрамович. - 3-е изд., стер. - СПб. ; М. ; Краснодар : Лань, 2009

3 Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие : в 2 ч. Ч. 2 / Данко, Павел Ефимович [и др.]. - 7-е изд., испр. - М. : Оникс : Мир и образование, 2009

4 Высшая математика в упражнениях и задачах [Текст] : учеб. пособие : в 2 ч. Ч. 2 / Данко, Павел Ефимович [и др.]. - 7-е изд., испр. - М. : Оникс : Мир и образование, 2008

10.2 Дополнительная литература:

1. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков и инженеров (2013, Ализняк В.Е., Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований) .-ЭБС IPRbooks
2. Прикладная механика (2012, Иосилевич Г.Б., Лебедев П.А., Стреляев В.С., Машиностроение) .-ЭБС IPRbooks
3. Механика (2013, Зоммерфельд А., пер. Тамм Т.Е., ред. Сивухин Д.В., Регулярная и хаотическая динамика) .-ЭБС IPRbooks

10.3 Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

- Программный пакет «Математика»;
- Программная реализация набора типовых задач;
- Программная реализация набор тестов.
- Интернет реализация набор тестов.

11. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

- Компьютерный класс кафедры физики и химии с установленным программным пакетом «Математика».

12. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (образовательные технологии)

Методические рекомендации для преподавателей.

Особенности методики преподавания дисциплины «Методы вычислений» в подготовке бакалавра, специализирующегося в области прикладных знаний, определяется необходимостью с одной стороны сформировать у студентов понимание общих принципов вычислительной математики и с другой стороны конкретных навыков постановки и решения практических вычислительных задач, оптимизации вычислительных алгоритмов и процедур, анализа результатов вычислений. Поэтому как фундаментальные понятия, так и прикладные вопросы должны изучаться на лекциях.

Кроме того, темы, изучаемые на практических занятиях и при самостоятельной работе студентов должны быть непосредственным продолжением тем лекционного курса. Поэтому изложение всех методов вычисления должно сопровождаться тщательно подобранными числовыми примерами, описывающими практическую задачу и иллюстрирующими все этапы вычисления. При этом реализация вычислительной схемы не должна требовать использования компьютера. Общее описание схемы и реализацию начальных этапов итерационного процесса необходимо осуществлять в ходе лекционного занятия. Дальнейшую реализацию вычислительной схемы целесообразно продолжить под руководством преподавателя в ходе практических занятий.

Завершение вычислений студент осуществляет в ходе самостоятельной работы. При этом время, необходимое для завершения расчетов не должно превышать половины времени, предусмотренного для самостоятельной работы по данной теме. Студенты должны иметь возможность самостоятельной проверки правильности вычислений. Кроме проверки реализации вычислительных схем усвоение студентами учебного материала рекомендуется проверять в течение семестра с помощью кратких опросов теоретического материала в ходе лекционных и практических занятий.

Часть алгоритмов (рекомендуется – не менее двух) должна быть реализована также и на компьютере в прикладном пакете «Математика». Результаты ручного расчета должны служить проверочным и отладочным материалом для машинной реализации.

Для облегчения организации самостоятельной работы студентов преподаватель должен в начале каждого раздела объяснить, как пользоваться основной и дополнительной рекомендованной литературой для более глубокого изучения вопросов раздела.

Методические рекомендации для студентов

Для более глубокого освоения материала по данному курсу студентам предлагается использовать рекомендуемую основную и дополнительную литературу. Важным является также решение достаточно большого количества задач в аудитории и самостоятельно в качестве домашних заданий. Студентам рекомендуется регулярно изучать лекционный материал, готовясь к текущим опросам. В рамках самостоятельной работы рекомендуется компьютерная реализация не только тех алгоритмов, для которых она является обязательной.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО с учетом рекомендаций и ПрОПОП ВО по направлению подготовки 04.03.02 Химия, физика и механика материалов.

Руководитель основной
образовательной программы

Доцент кафедры химии, к.х.н., доцент ___________ О.В.Артамонова
(занимаемая должность, ученая степень и звание) (подпись) (инициалы, фамилия)

Рабочая программа одобрена учебно-методической комиссией строительно-технологического факультета ____

« _» ________201 г., протокол № .

Председатель д.т.н., проф. __________________ Г.С. Славчева
учёная степень и звание подпись инициалы, фамилия

Эксперт

_____________ __________________ _________________________
(место работы) (занимаемая должность) (подпись) (инициалы, фамилия)

МП
организации

КОНСПЕКТ (ТЕЗИСЫ) ЛЕКЦИЙ
МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Автор: к. ф.-м. н. Михин Евгений Александрович

Кафедра «Инноватики и строительной физики»

ЛЕКЦИЯ №1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ КУРСА. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ЭВМ

1. Отделение корней.

Пусть $f(x)=0$- некоторое уравнение. Число c называют корнем или решением данного уравнения, если оно, будучи подставленным в это уравнение, обращает его в верное числовое равенство, то есть $f(c)=0$. Также число c называют нулём функции $y=f(x)$.

При решении некоторых нелинейных уравнений невозможно найти корни с помощью традиционных методов, применявшихся ранее. Заметим, что, как правило, эти методы решения относятся к каким-либо конкретным классам уравнений: алгебраических, тригонометрических, показательных и так далее. Но, например, даже такое, внешне несложное уравнение, как $x-\cos x+1=0$, невозможно решить привычными способами. Для алгебраических уравнений доказано, что не существует общих формул вычисления корней для уравнений степени выше четвёртой. Поэтому во многих случаях приходится прибегать к численным методам решения уравнений, которые позволяют найти действительные корни уравнения $f(x)=0$ с любой заранее заданной точностью.

Процесс нахождения действительных корней с определённой точностью можно разделить на два этапа:

1) отделение корней, то есть установление числовых промежутков, в каждом из которых содержится один корень уравнения;

2) вычисление корня, принадлежащего данному промежутку, с заданной точностью.

Известно, что если функция $f(x)$ непрерывна и принимает на концах отрезка $[a;b]$ значения разных знаков, то внутри этого промежутка найдётся хотя бы один нуль функции. Условие, согласно которому функция принимает на концах отрезка значения разных знаков, можно сформулировать в виде: $f(a)f(b)<0$.

Отделение корней уравнения $f(x)=0$ для непрерывной в области определения функции можно осуществить различными способами.

1) Составляют таблицу значений функции $y=f(x)$ на определённом промежутке изменения переменной *x,* и если окажется, что для соседних

значений аргумента значения функции имеют разные знаки, то нуль функции (и корень уравнения) находится между ними.

2) Уравнение $f(x)=0$ заменяют равносильным ему $\varphi(x)=\psi(x)$. Строят графики функций $y=\varphi(x)$ и $y=\psi(x)$; искомые корни являются абсциссами точек пересечения этих графиков.

3) Строят график функции $y=f(x)$ на промежутке изменения *x*; тогда абсциссы точек пересечения графика с осью OX – нули функции (и корни данного уравнения).

Заметим, что перечисленные способы не только позволяют отделить корни, но и определить их количество.

<u>Пример 1.</u> Выяснить, сколько корней имеет уравнение $4-e^x-2x^2=0$, и найти промежутки, в которых эти корни находятся.

Решение.

Рассмотрим три функции:

$$f(x)=4-e^x-2x^2,\ \varphi(x)=4-2x^2,\ \psi(x)=e^x.$$

Уравнение $4-e^x-2x^2=0$ эквивалентно уравнению $4-2x^2=e^x$. Отделим его корни первым из перечисленных способов. Из таблицы значений функции $f(x)$ на промежутке $[-3;1]$ с шагом изменения *x*, равным 1, видно, что существуют корни уравнения на отрезках $[-2;-1]$ и $[0;1]$, так как значения функции имеют на концах этих отрезков разные знаки.

x	-3	-2	-1	0	1
f(x)	-14,05	-4,14	1,63	3,00	-0,72
φ(x)	-14,00	-4,00	2,00	4,00	2,00
ψ(x)	0,05	0,14	0,37	1,00	2,72

Заметим, что аналогичный результат получится, если использовать второй способ, построив графики указанных функций (необходимые данные содержатся в таблице).

2. Метод половинного деления для уравнения *f(x)=0.*

Пусть дано уравнение

$f(x)=0 \quad (*)$,

причём функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)f(b)<0$. Для вычисления корня уравнения (*), принадлежащего указанному промежутку, найдём середину этого отрезка: $x_1=\frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1)\neq 0$, то для продолжения вычисления выберем ту из частей данного отрезка $[a;x_1]$ или $[x_1;b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. Концы нового отрезка обозначим $[a_1; b_1]$.

Новый суженный промежуток снова делим пополам и проводим вычисления по указанной схеме и так далее. В результате получаем либо точный корень на одном из этапов, либо последовательность вложенных отрезков $[a; b], [a_1; b_1], ..., [a_n; b_n], ...,$ таких, что

$$f(a_i)f(b_i) < 0, \quad i = 1, 2, ..., \quad (2)$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b - a). \quad (3)$$

Число c – общий предел последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ - является корнем уравнения (*). Оценку ε погрешности решения на n-м шаге вычислений можно получить из соотношения (3) в виде

$$0 \le c - a_n \le \frac{1}{2^n}(b - a) = b_n - a_n. \quad (4)$$

Здесь $a_n \approx c$ с точностью ε, не превышающей $\frac{1}{2^n}(b - a)$.

Пример 2. Методом половинного деления найти корень уравнения $4 - e^x - 2x^2 = 0$ с точностью ε=0,01.

Решение.

В предыдущем примере было при отделении корней уравнения установлено, что один из искомых корней принадлежит отрезку $[0; 1]$. На каждом шаге вычислений значение корня принимаем равным $x_n = \frac{a_n - b_n}{2}$ с погрешностью $d_n = a_n - b_n$. Будем производить вычисления и выбирать последовательность вложенных отрезков $[a_n; b_n]$, используя условие (2). Имеем

$$[a; b] = [0; 1], \quad x_1 = \frac{a + b}{2} = 0{,}5.$$

Так как $f(a) = 3, f(x_1) = 1{,}8513, f(b) = -0{,}72$ и $f(x_1)f(b) < 0$, то принимаем: $a_1 = x_1 = 0{,}5,\ b_1 = b = 1;\ d_1 = b_1 - a_1 = 0{,}5.$

Тогда $[a_1; b_1] = [0{,}5; 1], x_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0{,}75.$

Здесь $f(a_1) = 1{,}8513, f(x_2) = 0{,}758, f(b_1) = 0{,}72, f(x_2)f(b_1) < 0.$

Следовательно, $a_2 = x_2 = 0{,}75, b_2 = b_1 = 1; d_2 = b_2 - a_2 = 0{,}25.$

Тогда $[a_2; b_2] = [0{,}75; 1], x_3 = \frac{a_2 + b_2}{2} = 0{,}875; d_3 = 0{,}125.$

Производя вычисления далее (рекомендуется воспользоваться специальной компьютерной программой), можно убедиться, что требуемая точность достигается на 7-м шаге: $x_7 = 0{,}8828125$ с погрешностью $d_7 = 0{,}00785 < \varepsilon = 0{,}01.$

Задание.

Методом половинного деления найти корни уравнений (предварительно отделив их):

1. $x^3 - 4x + 2 = 0;$ с точностью до 0,001;
2. $x^3 - 2x - 5 = 0;$ с точностью до 0,01.
3. $x^4 + 5x - 7 = 0;$
4. $x^4 + 2x^2 - 6x + 2 = 0;$
5. $x^5 - x - 2 = 0;$
6. $e^x - x - 2 = 0$.

ЛЕКЦИЯ № 2. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Понятие метода итераций.

Рассмотренный в предыдущей лекции метод половинного деления обладает очевидными недостатками. Несмотря на математическую простоту этого метода, он позволяет вычислить более или менее точное приближённое значение корня уравнения только лишь после нескольких последовательных его применений. В рассмотренном примере 2 относительно невысокая точность (до 0,01) была достигнута только на 7-м шаге. Поэтому на практике часто используют иные методы, позволяющие быстрее достигнуть приемлемой точности приближённых вычислений.

Пусть требуется решить уравнение, представленное в виде:

$x = g(x), \quad (1).$

Правая часть уравнения – непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $g(x)$. Суть метода итераций (последовательных приближений) состоит в следующем. Начиная с произвольной точки x_0, принадлежащей данному отрезку, последовательно получаем:

$x_1 = g(x_0)$ - первое приближение,

$x_2 = g(x_1)$ - второе приближение,

…

$x_{k+1} = g(x_k)$ - k+1-е приближение,

…

Последовательность

$x_0, x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ... \quad (2)$

называется последовательностью итераций для уравнения (1) с начальной точкой x_0. Если все точки (2) принадлежат отрезку $[a;b]$, и существует предел $c = \lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k)$, то, перейдя к пределу в равенстве

$x_{k+1} = g(x_k), \quad k = 1, 2, 3, ... \quad (3)$

получим $\lim\limits_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim\limits_{k\to\infty} g(x_k)$, то есть $c = g(c)$.

Следовательно, если существует предел последовательности итераций (2), то он является корнем уравнения (1). Достаточные условия сходимости последовательности итераций содержатся в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $g(x)$ имеет на отрезке $[a;b]$ непрерывную производную и выполнены два условия:

1) $|g'(x)| \le q < 1$ при $x \in [a;b]$;

2) значения функции $y = g(x)$ принадлежат отрезку $[a;b]$ для любого x из этого отрезка.

Тогда при любом выборе начального приближения $x_0 \in [a;b]$ процесс итераций сходится к единственному корню c уравнения (1) на отрезке $[a;b]$.

Оценка погрешности *k*-го приближения x_k к корню *c* такова:

$$|c - x_k| \le \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|,$$

где $q = \max\limits_{a \le x \le b}|g'(x)|$.

Заметим, что чем меньше *q*, тем быстрее, очевидно, сходится процесс итераций.

Укажем теперь один из способов преобразования уравнения

$$f(x) = 0 \quad (4)$$

к виду (1), допускающему применение метода итераций, сходящихся к корню *c* уравнения (4).

Для любого числа $\lambda \ne 0$ уравнение (4) равносильно уравнению (1), где $g(x) = x + \lambda f(x)$. Предположим, что производная $f'(x)$ положительна и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Пусть $M = \max\limits_{[a;b]}|f'(x)|$, $m = \min\limits_{[a;b]}|f'(x)|$. Положим $\lambda = -\frac{1}{M}, q = 1 - \frac{m}{M}$ и рассмотрим функцию

$$g(x) = x - \frac{1}{m}f(x) \quad (5).$$

Для этой функции выполняется достаточное условие сходимости метода итераций, сформулированное выше в теореме. Далее, используя формулу (5), можно находить корень уравнения (4) с любой заданной точностью.

Замечание 1. Если окажется, что производная отрицательна на отрезке $[a;b]$, то уравнение (4) можно заменить равносильным уравнение $-f(x) = 0$ и применить указанное преобразование.

Замечание 2. Если вычисление точного значения *M* затруднительно, то можно заменить его произвольным числом $M_1 > M$. Однако при большом значении M_1 число $q = 1 - \frac{m}{M_1}$ ближе к единице и процесс итераций сходится медленнее.

Замечание 3. При нахождении корня уравнения (1) с заданной точностью $\varepsilon > 0$ или при оценке погрешности *k*-го приближения можно, не вычисляя точного значения числа $q = \max\limits_{[a;b]}|g(x)|$, ограничиться следующей рекомендацией.

$$|c - x_k| \le \begin{cases} |x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon,\ 0 < q \le \dfrac{1}{2}; \\ 10|x_k - x_{k-1}| \le \varepsilon,\ \dfrac{1}{2} < q < 1 \end{cases} \quad (6).$$

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $2x - \cos x = 0$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$.

Решение. Для отделения корней представим данное уравнение в виде $x = \frac{1}{2}\cos x$. Построив графики функций $y = x$ и $y = \frac{1}{2}\cos x$, увидим, что корень уравнения содержится внутри отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Здесь

$$f(x) = 2x - \cos x;\ f'(x) = 2 + \sin x > 0;\ M = \max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}(2 + \sin x) = 3;\ \lambda = -\frac{1}{M} = -\frac{1}{3};$$

$$g(x) = x + \lambda f(x) = x - \frac{1}{3}(2x - \cos x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos x.$$

Положим $x_0 = 0{,}5$. Последовательные приближения найдём по формулам $x_{k+1} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\cos x_k,\quad k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0{,}4389128; \\ x_2 &= 0{,}45263292; \\ x_3 &= 0{,}44964938; \\ x_4 &= 0{,}450299978 \end{aligned}.$$

Для оценки погрешности четвёртого приближения воспользуемся неравенством (6). Так как $q = \max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}|g'(x)| = \frac{1}{2}\max_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\sin x = \frac{1}{2}$, то $|c - x_4| \le |x_4 - x_3| = 0{,}0006504 < \varepsilon = 10^{-3}$. Следовательно, $c \approx x_4 \approx 0{,}450$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$. Заметим, что мы получили приближённое значение корня с точностью более высокой, чем задано в условии.

2. <u>Метод касательных (Ньютона).</u>

Существуют различные математические интерпретации метода итераций. Одной из наиболее эффективных и, в то же время, простых разновидностей этого метода является так называемый метод касательных (метод Ньютона). Не вдаваясь глубоко в теоретическое обоснование этого метода, сформулируем условия, в которых он применим, а также запишем соответствующую итерационную формулу.

Пусть снова дано уравнение $f(x) = 0$, и известно, что существует его корень $c \in [a; b]$, причём на отрезке $[a; b]$ первая производная функции $y = f(x)$ не меняет знака. Предположим ещё, что и вторая производная не меняет знака на указанном отрезке (при необходимости этого можно добиться, уменьшая длину интервала, содержащего корень). Последнее условие, очевидно, означает, что кривая $y=f(x)$ либо выпукла, либо вогнута на всём данном интервале. Тогда для решения уравнения $f(x)=0$ используется следующая итерационная формула:

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

В качестве начальной точки итераций следует брать тот из концов отрезка $[a;b]$, в котором совпадают знаки функции и второй производной. Заметим, что если отрезок $[a;b]$ содержит внутри себя точку перегиба, то данный метод может дать значение корня, не принадлежащую отрезку. Однако, как было сказано выше, можно решить эту проблему, сузив отрезок, содержащий корень.

Оценку погрешности при использовании метода касательных следует проводить так, как было описано в пункте 1 настоящей лекции. Вообще, обычно данный метод уже при первой итерации даёт достаточно точное значение корня и поэтому весьма эффективен.

Пример 2. Один из корней уравнения $x^3-6x+2=0$ заключён в отрезке $[0;1]$. Найти приближённое значение этого корня методом касательных с помощью двух итераций и оценить погрешность вычисления.

Решение. Здесь $f(x)=x^3-6x+2;\ f'(x)=3x^2-6;\ f''(x)=6x$. Заметим, что на отрезке $[0;1]$ сохраняют знак и первая и вторая производные: $f'(x)<0;\ f''(x)>0$. Таким образом, выполняются условия применения метода касательных. В качестве x_0 можно взять, например, $x=0$, так как $f(0)=2>0$ и $f''(0)=0\ge 0$. Тогда имеем $x_1=0-\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{1}{3}=0{,}3333$. Оценим погрешность вычисления. Найдём значения необходимых параметров: $m=\min\limits_{[0;1]}|f'(x)|=\min\limits_{[0;1]}|(3x^2-6)|=3;\ M=\max\limits_{[0;1]}|(3x^2-6)|=6;\ q=1-\frac{m}{M}=1-\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Тогда $|c-x_1|\le|x_1-x_0|=\frac{1}{3}<\varepsilon$.

Вторая итерация: $x_2=\frac{1}{3}-\dfrac{f(\frac{1}{3})}{f'(\frac{1}{3})}=\frac{1}{3}-\dfrac{\frac{1}{27}}{-\frac{16}{3}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{144}=\frac{147}{432}=\frac{29}{144}$.

Оценим погрешность вычисления: $|c-x_2|\le|x_2-x_1|=\frac{1}{144}\approx 0{,}007<\varepsilon$.

Таким образом, мы уже на второй итерации получили приближённое значение корня такой же точности, как в примере из предыдущей лекции лишь на седьмом шаге.

Задание.

1. Методом итераций решить уравнения:

$x + \ln x = 0;$

$x + e^x = 0;$ с точностью до 0,001.

2. Методом касательных решить уравнения:

$x^4 - 3x - 20 = 0;$

$x^3 + 3x + 5 = 0;$

$x^2 + \ln x = 0;$ с точностью до 0,01.

ЛЕКЦИЯ № 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Интегральное среднеквадратичное приближение функций ортогональными многочленами.

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана функция $f(x)$ и определена система функций $(g_k(x)),\ k = 1,2,3,\ldots$

Обобщённым полиномом (многочленом) порядка (степени) *n* называют функцию вида

$Q_n(x) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + \ldots + C_n g_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i g_i(x)$, где $C_0, C_1, \ldots, C_n$ - некоторые постоянные.

Обобщённый многочлен $Q_n(x)$ называют многочленом наилучшего среднеквадратического приближения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если расстояние от многочлена до данной функции по среднеквадратичной норме (среднеквадратичное отклонение) является наименьшим. Иначе говоря, выполняется условие:

$d(f, Q_n) = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x) - Q_n(x))^2\, dx}$ (1) - наименьшее.

Задачу о нахождении такого многочлена $Q_n(x)$ называют задачей об интегральном среднеквадратичном приближении (аппроксимации) функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ обобщённым многочленом. Эта задача сводится к нахождению коэффициентов $C_0, C_1, \ldots, C_n$ из условия (1).

Если функция $f(x)$ и система функций $(g_k(x)),\ k = 1,2,3,\ldots$ определены на множестве точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, то приближение функции $f(x)$ многочленом $Q_n(x)$ называют точечным среднеквадратичным приближением на множестве точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. При этом для обобщённого многочлена наилучшего приближения $Q_n(x)$ среднеквадратичное отклонение $d(f, Q_n) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (f(x_i) - Q_n(x_i))^2}$ на системе точек $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Задача нахождения многочлена наилучшего приближения $Q_n(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ упрощается, если система функций $(g_k(x)), k=1,2,3,...$ обладает свойством ортогональности на данном отрезке.

Введём сначала ряд определений.

Определение 1. Скалярным произведением функций $g_i(x)$ и $g_j(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется определённый интеграл от их произведения на этом отрезке. Обозначим скалярное произведение, как $(g_i(x), g_j(x))$ и запишем:

$$(g_i, g_j) = \int_a^b g_i(x) g_j(x) x .$$

Определение 2. Нормой функции $g_i(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется число $\|g_i\| = \sqrt{(g_i, g_i)} = \sqrt{\int_a^b g_i^2(x)dx}$. Функция $f(x)$, для которой существует интеграл $\int_a^b f^2(x)dx$, называется интегрируемой с квадратом на отрезке $[a;b]$.

Определение 3. Функции $g_i(x)$ и $g_j(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a;b]$, если их скалярное произведение на этом отрезке равно нулю, то есть

$$(g_i, g_j) = \int_a^b g_i(x) g_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j) .$$

Определение 4. Система функций $(g_k(x)), k=1,2,3,...$ называется ортогональной на отрезке $[a;b]$, если все функции этой системы попарно ортогональны на этом отрезке.

Коэффициенты $C_0, C_1, ..., C_n$ обобщённого многочлена $Q_n(x) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + ... + C_n g_n(x)$ (2)
называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно ортогональной системы функций, если они определяются по формулам

$$C_k = \frac{(f, g_k)}{\|g_k\|} = \frac{\int_a^b f(x) g_k(x) dx}{\int_a^b g^2(x) dx} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n) \qquad (3)$$

Теорема. Для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на отрезке $[a;b]$, обобщённый многочлен n-го порядка $Q_n(x)$ с коэффициентами Фурье функции $f(x)$ относительно ортогональной на отрезке $[a;b]$ системы функций $(g_k(x)), k=1,2,3,...$ является многочленом наилучшего среднеквадратичного отклонения этой функции, причём квадрат наименьшего среднеквадратичного отклонения определяется соотношением

$d^2(f, Q_n) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} C_k^2 \|g_k\|^2$, где C_k - коэффициенты Фурье, определяемые по формулам (3).

2. Метод наименьших квадратов. Эмпирические формулы.

Пусть данные некоторого эксперимента представлены в виде таблицы значений переменных x и y.

x_i	x_1	x_2	...	x_m
y_i	y_1	y_2	...	y_m

Можно поставить задачу об отыскании аналитической зависимости между переменными, то есть некоторой формулы $y = f(x)$, явным образом выражающей зависимость y от x. Естественно требовать, чтобы график искомой функции $y = f(x)$ изменялся плавно и не слишком уклонялся от экспериментальных точек (x_i, y_i). Поиск такой функциональной зависимости называют "сглаживанием" экспериментальных данных.

Задачу о сглаживании экспериментальных данных можно решать методом наименьших квадратов. Согласно методу наименьших квадратов, указывается формула

$$y = Q(x, a_0, a_1, ..., a_n) \qquad (4),$$

где $a_0, a_1, ..., a_n$ - числовые параметры.

Наилучшими значениями параметров $a_0, a_1, ..., a_n$ (которые обозначим $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$) считаются те, для которых сумма квадратов уклонений функции $Q(x, a_0, a_1, ..., a_n)$ от экспериментальных точек (x_i, y_i) является минимальной, то есть функция

$$S(a_0, a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{m} (Q(x_i, a_0, a_1, ..., a_n) - y_i)^2 \qquad (5)$$

в точке $(\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n)$ достигает минимума. Отсюда, используя необходимые условия экстремума функции нескольких переменных, получаем систему уравнений для определения параметров $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, ..., \frac{\partial S}{\partial a_n} = 0. \qquad (6).$$

Если система (6) имеет единственное решение $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n$, то оно является искомым и аналитическая зависимость между экспериментальными данными определяется формулой $y = f(x) = Q(x, \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_n)$. Заметим, что в общем случае эта система нелинейна.

Рассмотрим подробнее аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами: $y = Q(x, \alpha, \beta)$. Используя соотношения (6) и опуская несложные выкладки, получим систему двух уравнений с двумя неизвестными α и β:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (Q(x_i, \alpha, \beta) - y_i) \dfrac{\partial Q(x_i, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \\ \sum_{i=1}^{m} (Q(x_i, \alpha, \beta) - y_i) \dfrac{\partial Q(x_i, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0 \end{cases} \quad (7).$$

В частном случае аппроксимации экспериментальных данных с помощью линейной функции имеем:

$$y = Q(k, x, b) = kx + b, \ \frac{\partial Q}{\partial k} = x, \ \frac{\partial Q}{\partial b} = 1.$$

Система (7) для этого случая является линейной относительно неизвестных k и b:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} (kx_i + b) - y_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{m} (kx_i + b) - y_i)x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bn + k\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{i=1}^{m} y_i, \\ b\sum_{i=1}^{m} x_i + k\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \end{cases} \quad (8).$$

Если для переменных x и y соответствующие значения экспериментальных данных (x_i, y_i) не располагаются вблизи прямой, то выбирают новые переменные

$$X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y) \quad (9)$$

так, чтобы преобразованные экспериментальные данные $X_i = \varphi(x_i, y_i), Y_i = \psi(x_i, y_i)$ в новой системе координат (X, Y) давали бы точки (X_i, Y_i) менее уклоняющиеся от прямой. Для аппроксимирующей прямой $Y = kX + B$ коэффициенты можно определить из уравнений (8), где вместо x_i и y_i подставляют соответствующие значения X_i и Y_i. Нахождение зависимостей (9) называют, выравниваем экспериментальных данных. Функциональная зависимость $y = f(x)$ определена неявно уравнением $\psi(x; y) = k\varphi(x; y) + b$ разрешимым относительно y в частных случаях.

Пример 1. Установить вид эмпирической формулы $y = f(x)$, используя аппроксимирующие зависимости с двумя параметрами α и β, и определить наилучшие значения параметров, если опытные данные представлены таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161

Решение.

Легко заметить, что экспериментальные точки (x_i, y_i) лежат приблизительно на одной прямой. Положим $X = \ln x; Y = \ln y$ и составим таблицу для экспериментальных данных в новых переменных:

X_i	0,000	0,693	1,099	1,386	1,609
Y_i	1,960	3,325	4,129	4,700	5,081

Точки (X_i, Y_i) лежат приблизительно на одной прямой, в чём легко убедиться, построив их в системе координат (X, Y). Наилучшие значения параметров k и b находятся из системы уравнений (8):

$$\begin{cases} bn + k\sum_{i=1}^{m} X_i = \sum_{i=1}^{m} Y_i, \\ b\sum_{i=1}^{m} X_i + k\sum_{i=1}^{m} X_i^2 = \sum_{i=1}^{m} X_i Y_i; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5b + 4{,}787k = 19{,}166, \\ 4{,}787b + 6{,}200k = 21{,}535 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим: $b = 1{,}97; k = 1{,}95$. Неявное уравнение, выражающее связь между переменными x и y имеет вид $\ln y = 1{,}95 \ln x + 1{,}97$. Отсюда легко получить прямую зависимость между переменными в виде степенной функции:

$y = e^{1{,}97} x^{1{,}95}$.

Для сравнения можно привести таблицу экспериментальных данных, и данных, полученных с помощью найденной формулы:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,1	27,8	62,1	110	161
$y = e^{1{,}97} x^{1{,}95}$.	7,16	27,703	61,081	107,04	165,39

Формула, полученная в результате решения приведённого примера, является частным случаем аппроксимирующей зависимости с двумя параметрами, имеющей вид $Q(x, \alpha, \beta) = \alpha x^{\beta}$. Параметры этой зависимости можно было бы найти из системы нелинейных уравнений (7) непосредственно, однако применение способа выравнивания существенно упрощает вычисление параметров. В данном случае $\alpha = e^{b}, \beta = k$.

Рекомендации по переведению экспериментальных данных в аппроксимирующие зависимости с двумя переменными приведены в следующей таблице.

№	Выравнивание данных (преобразование переменных)	Эмпирическая формула
1	$X = x; Y = xy$	$y = \alpha x + \frac{\beta}{\alpha}, \alpha = k, \beta = b$
2	$X = x; Y = \frac{1}{y}$	$y = \frac{1}{\alpha x + \beta}, \alpha = k, \beta = b$

3	$X = x; Y = \dfrac{x}{y}$	$y = \dfrac{x}{\alpha x + \beta}, \alpha = k, \beta = b$
4	$X = x; Y = \ln y$	$y = \alpha \beta^x, \alpha = e^b, \beta = e^k$
5	$X = \ln x; Y = y$	$y = \alpha \ln x + \beta, \alpha = k, \beta = b$
6	$X = \ln x; Y = \ln y$	$y = \alpha x^{\beta}, \alpha = e^b, \beta = k$

Одну из шести предложенных формул преобразования следует выбирать одновременно с проверкой линейной зависимости к исходным данным. Условием выбора наилучшей эмпирической формулы является наименьшее уклонение исходных или преобразованных экспериментальных данных от прямой. Его можно определить по формуле:

$$d = \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} (Y_i - kX_i - b)^2}{\sum_{i=1}^{m} Y_i^2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Для наилучшей эмпирической формулы значение d будет наименьшим.

Задание.

Экспериментальные данные содержатся в таблицах. Для каждой из них выполнить следующие операции:

1. Нанести экспериментальные точки $(x_i; y_i)$ на координатную сетку $(x; y)$.
2. Выбрать одну из шести предложенных формул преобразования к новым переменным $(X; Y)$ так, чтобы преобразованные экспериментальные данные $(X_i; Y_i)$ наименее уклонялись от прямой.
3. Методом наименьших квадратов найти наилучшие значения параметров k
 и b в уравнении прямой $Y = kX + b$.
4. Найти явный вид эмпирической формулы $y = Q(x, \alpha, \beta)$ и построить график эмпирической функции.

а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,1	1,4	1,6	1,7	1,9

б)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,05	1,55	1,7	1,75	1,8

в)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	7,5	6,2	5,5	3,5	3,0

г)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,4	0,55	0,13	0,09	0,07

ЛЕКЦИЯ № 4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Интерполирование функций.

Пусть при изучении некоторого явления установлено, что существует функциональная зависимость между величинами x и y, описывающая количественную сторону данного явления; при этом функция $y = f(x)$ остаётся нам неизвестной. Однако на основании эксперимента установлены значения этой функции $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$, при некоторых значениях аргумента $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, принадлежащих отрезку $[a; b]$.

Задача заключается в том, чтобы найти функцию, по возможности более простую с точки зрения вычисления её значений (например, многочлен), которая бы представляла неизвестную функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ точно или приближённо. В более общей форме эту задачу можно представить так: на отрезке $[a; b]$ заданы значения неизвестной функции $y = f(x)$ в $n+1$ различных точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$.

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n).$$

Требуется найти многочлен $P(x)$ степени $\le n$, приближённо выражающий функцию $y = f(x)$.

В качестве такого многочлена естественно взять многочлен, значения которого в точках $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ *совпадают* с соответствующими значениями $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ функции $y = f(x)$ (рисунок). Тогда поставленная задача, называемая “задачей *интерполирования* функции”, формулируется так: для данной функции найти многочлен $P(x)$ степени $\le n$, который при заданных значениях $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ принимал бы значения $y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2), ..., y_n = f(x_n)$.

В качестве искомого многочлена возьмём многочлен n-й степени вида

$$P(x) = C_0(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) + C_1(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) + ... + C_n(x-x_0)(x-x_{n-1}) \qquad (1)$$

Доказано, что многочлен (1) является единственным, удовлетворяющим сформулированным условиям. Построение этого многочлена можно осуществлять различными способами, разница между которыми состоит лишь в методах вычисления коэффициентов C_k $(k = 0, 1, ..., n)$.

2. Интерполяционная формула Лагранжа.

Одним из наиболее распространённых и удобных практически способов построения многочлена, интерполирующего неизвестную функцию $y = f(x)$, является применение интерполяционной формулы Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ определена таблицей

x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Значения аргументов x_i $(i = 0, 1, ..., n)$ будем называть узлами интерполяции. Поставим задачу построить многочлен $L(x)$, значения которого в узлах интерполяции равны соответствующим значениям данной функции, то есть $L(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, ..., n)$.

Для многочлена (1) из пункта 1-го определим значения коэффициентов C_k $(k = 0, 1, ..., n)$ следующим образом. Должно выполняться условие:

$$L(x_0) = y_0, L(x_1) = y_1, ..., L(x_n) = y_n \qquad (2).$$

Положив в формуле (1) $x = x_0$, тогда, учитывая равенства (2), получим:

$y_0 = C_0(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)$, откуда $C_0 = \dfrac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)}$.

Аналогично, положив $x = x_1$, получим

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)},$$

...

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}.$$

Подставив полученные выражения для коэффициентов в формулу (1), получим многочлен

$$L(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)...(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)...(x_1 - x_n)} y_1 + ...$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})} y_n \qquad (3)$$

Многочлен $L(x)$ называется многочленом (полиномом) Лагранжа, а формула (3) – интерполяционной формулой Лагранжа.

Если известно аналитическое выражение, задающее функцию, то погрешность интерполяционной формулы (3) (в случае непрерывности на отрезке $[x_0; x_n]$ самой функции $y = f(x)$ и её производной до $n+1$ - го порядка включительно) оценивается неравенством:

$$|f(x) - L(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)| \qquad (4),$$

где $M_{n+1} = \max\limits_{[x_0;x_n]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$, $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

<u>Пример 1.</u> Представить приближённо функцию $y = f(x)$ многочленом 2-й степени, если из эксперимента получены следующие её значения:

x_i	1	2	-4
y_i	3	-5	4

Решение.

По формуле (3) при $n = 2$ имеем:

$$L(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)} \cdot (-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)} \cdot 4 = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

<u>Пример 2.</u> Построить многочлен Лагранжа второй степени, интерполирующий функцию $y = \sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, если заданы значения функции в трёх узлах интерполяции.

x	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}5235988$	$\frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853982$
$\sin x$	0	0,5	0,7071068

С помощью интерполяционной формулы вычислить приближённое значение $\sin\frac{\pi}{12}$ и оценить погрешность результата вычислений.

Решение.

Многочлен Лагранжа для трёх узлов интерполяции запишется так:

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

или

$$L(x) = \frac{x\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot 0{,}5 + \frac{x\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} \cdot 0{,}707 = -2{,}064 \cdot \frac{x^2}{\pi^2} + 3{,}344\frac{x}{\pi}.$$

При $x = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}2617994$ получим $L\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0{,}264298$.

С помощью неравенства (4) находим оценку погрешности. Имеем

$$\left| \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - L\left(\frac{\pi}{12}\right) \right| \le \frac{M_3}{3!} \left| \Pi_3\left(\frac{\pi}{12}\right) \right|,$$

где

$$\Pi_3(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = x\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\Pi_3\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\pi}{12}\right)^3$$

Так как $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x$, то $M_3 = \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} |f'''(x)| = \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{4}\right]} |-\cos x| = 1$,

и, следовательно, $\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) - L\left(\frac{\pi}{12}\right)\right| \le \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{12}\right)^3 \approx 0{,}006$. Итак, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}264 \pm 0{,}006$.

Заметим, что значение $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ с шестью верными цифрами есть 0,258819.

Задание.

1. Построить многочлен Лагранжа второй степени для функции, заданной таблицей:

x_i	0	1	2
y_i	4	6	10

2. На основании эксперимента получены значения функции $y = f(x)$ в виде таблицы:

x_i	1	2	3	4
y_i	2	1	-1	5

Построить многочлен четвёртой степени, приближённо представляющий данную функцию.

3. Функция $y = \cos x$ аппроксимируется интерполяционным многочленом Лагранжа второй степени для системы трёх равномерно расположенных на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ узлов. Найти приближённое значение функции в точке $\frac{\pi}{12}$ и оценить погрешность вычисления.

ЛЕКЦИЯ № 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ВЕКТОРОВ

Пусть отрезок $[a; b]$ разбит на n частей точками $\{x_i\}$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$

Сплином (иначе – сплайном) k–й степени называется функция, представляющая собой многочлен степени не выше k на каждом из последовательно примыкающих друг к другу интервалов $(x_{i-1}; x_i),\ i = 1, 2, \ ..., n$, причём во всех точках стыка двух интервалов $x_i,\ i = 1, 2, ..., n-1$ функция непрерывна вместе со своими производными до порядка не выше k.

Например, непрерывная кусочно-линейная функция (графиком которой является ломаная) является сплином первой степени с производной, терпящей разрыв в точках излома.

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция $y = f(x)$, значения которой в точках x_i равны $y_i = f(x_i)$.

Задача интерполяции функции $y = f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$ *кубическим сплином (сплайном третьей степени)* состоит в нахождении функции $S(x)$, равной многочлену третьей степени $S_i(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ ..., n$, то есть

$S(x) = S_i(x) = a_{i0}x^3 + a_{i1}x^2 + a_{i2}x + a_{i3}$ (1),

причём значения сплина в узлах интерполяции x_i равны соответствующим значениям заданной функции y_i и сплин-функция непрерывна в узлах интерполяции вместе со своими производными первого и второго порядков:

$S(x_i) = S_{i+1}(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; $S(x_n) = S_n(x_n) = y_n$ (2);

$S(x_i) = S_{i+1}(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; (3);

$S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; (4);

$S_i''(x_i) = S_{i+1}''(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n-1$; (5).

Условия (2) – (5) дают $4n-2$ линейных алгебраических уравнений для определения $4n$ неизвестных коэффициентов a_{ip}, $p = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, ..., n$ при соответствующих степенях x в многочленах $S_i(x)$.

Можно показать, что интерполяционный кубический сплин для функции $y = f(x)$ существует и является единственным, если вместе с уравнениями (2) – (5) удовлетворяется пара дополнительных (краевых) условий следующего типа:

I. $S'(a) = f'(a), S'(b) = f'(b);$

II. $S''(a) = f''(a), S''(b) = f''(b);$

III. $S'(a) = S'(b), S''(a) = S''(b)$.

Рассмотрим случай разбиения отрезка $[a; b]$ на n равных частей с шагом h, для которого $x_0 = a, x_1 = x_0 + h, ..., x_{i+1} = x_i + h, ..., x_n = b; h = (b-a)/n$. Разберём подробно построение интерполяционного кубического сплина для условия типа I.

При построении сплина, удовлетворяющего краевым условиям типа I, введём величины $m_i = S'(x_i)$, называемые иногда наклонами сплайна в узлах интерполяции.

Можно показать, что интерполяционный кубический сплин вида

$$S(x) = S_i(x) = \frac{(x-x_i)^2(2(x-x_{i-1})+h)}{h^3}y_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^2(2(x_i-x)+h)}{h^3}y_i + \frac{(x-x_i)^2(x-x_i)}{h^2}m_{i-1} +$$

$$+\frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{h^2}m_i; \ x \in [x_{i-1}; x_i], \ i = 1, 2, ..., n-1. \qquad (6)$$

удовлетворяет условиям (2), (3), (4) для любых m_i. Из условия (5) и краевых условий I можно определить $n+1$ параметр m_i.

Действительно, легко проверить, что $S(x_i) = S_{i+1}(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n-1$. Кроме того, вычисления показывают, что $S'(x_i) = S_i'(x_i) = m_i,\ i = 1, 2, ..., n$ и $S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i) = m_i$.

Если учесть, что

$$S_i''(x_i) = \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6\frac{y_i - y_{i-1}}{h^2},\ i = 1, 2, ..., n-1,$$

и $S_{i+1}''(x_i) = -\dfrac{4m_i}{h} - \dfrac{2m_{i+1}}{h} + 6\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h^2},\ i = 1, 2, ..., n-1,$

а также краевые условия типа I и условие (5), то получим систему из $n+1$ линейных уравнений относительно неизвестных m_i:

$$\begin{cases} m_0 = b_0 = f'(a), \\ m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = b_i = \dfrac{3(y_{i+1} - y_{i-1})}{h},\ i = 1, 2, ..., n-1, \\ m_n = b_n = f'(b). \end{cases} \qquad (7)$$

Решение этой системы позволяет найти значения неизвестных m_i и определить интерполяционный сплин с помощью формулы (6).

Пример 1. На отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ построить кубический сплин, интерполирующий функцию $y = \sin x$ с шагом $h = \dfrac{\pi}{2}$, удовлетворяющий на концах отрезка краевым условиям типа I. С помощью интерполяционной формулы вычислить приближённое значение $\sin\dfrac{\pi}{6}$ и сравнить его с точным значением.

Решение.

Будем искать уравнение кубической параболы $y = S(x)$, удовлетворяющее следующим условиям на концах отрезка $x_0 = 0$ и $x_1 = h = \dfrac{\pi}{2}$:

$$y_0 = S(x_0) = \sin x_0 = 0,\ y_1 = S(h) = \sin h = 1,$$
$$m_0 = S'(x_0) = \sin' x_0 = \cos x_0 = 1,\ m_1 = S'(h) = \cos h = 0.$$

Подставив полученные значения y_0, y_1, m_0, m_1 и h в формулу (6) и получим сплин вида

$$S(x) = S_1(x) = \frac{x^2(2(h-x)+h)}{h^3} + \frac{(x-h)^2 x}{h^2},\ x \in [0; h],$$

откуда $S(x) = x - \dfrac{4(\pi-3)^2}{\pi^2}x^2 - \dfrac{4(4-\pi)}{\pi^3}x^3 = x - 0{,}057385x^2 - 0{,}11074x^3$.

Тогда $\sin\dfrac{\pi}{6} \approx S\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 0{,}49196983$. Точное значение, как известно, равно 0,5. Здесь $\varepsilon = 0{,}008 < 0{,}01$. Как видим, в данном (достаточно простом) примере сплин-метод обеспечивает достаточно высокую точность приближённых вычислений.

Пример 2. На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ построить кубический сплин с шагом $h = \frac{\pi}{4}$, интерполирующий функцию $y = \sin x$, если заданы значения функции в трёх узлах интерполяции:

x	$x_0 = 0$	$x_1 = \pi / 4 = 0{,}7853982$	$x_2 = \pi / 2 = 1{,}570596$
$y = \sin x$	$y_0 = 0$	$y_1 = 0{,}7071068$	$y_2 = 1$

С помощью интерполяционной формулы вычислить приближённое значение $\sin \frac{\pi}{6}$ и сравнить с точным значением.

Решение.

Представим сплин в виде (6):

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x),\ x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right], \\ S_2(x), \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

При таком представлении должны удовлетворяться уравнения системы (7):

$$\begin{cases} m_0 = \sin' x_0 = \cos x_0 = 1, \\ m_0 + 4m_1 + m_2 = \frac{3(y_2 - y_0)}{h} = \frac{3}{h}, \text{где}\, h = \frac{\pi}{4}. \\ m_2 = \sin' x_2 = \cos x_2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $x_2 = \frac{\pi}{4} = 2h$. Тогда имеем:

$$S_1(x) = \frac{x^2(2(h-x)+h)}{h^3} y_1 + \frac{(x-h)^2 x}{h^2} + \frac{x^2(x-h)}{h^2} m_1, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right],$$

$$S_2(x) = \frac{(x-2h)^2(2(x-h)+h)}{h^3} y_1 + \frac{(x-h)^2(2(2h-x)+h)}{h^3} + \frac{(x-2h)^2(x-h)}{h^2} m_1,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Учитывая, что $1 + 4m_1 = \frac{12}{\pi} \Leftrightarrow m_1 = \frac{12-\pi}{4\pi} = 0{,}70493$, получим после преобразований:

$$S_1(x) = x - 0{,}0050683975x^2 - 0{,}15514782x^3,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right];$$

$$S_2(x) = 0{,}166023415x + 0{,}02897055x^2 - 0{,}10224607x^3,\ x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Тогда $\sin\frac{\pi}{6} \approx S_1\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0{,}499938$. Здесь $\varepsilon = 0{,}000062 < 0{,}0001$ - весьма высокая точность. Из данных примеров видно, что чем больше количество узлов интерполяции, тем выше точность приближённых вычислений.

Задание.

Построить для указанных функций $y = f(x)$ кубический сплин, интерполирующий их на данном отрезке $[a; b]$ с заданным шагом h.

1) $y = \cos x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ h = \frac{\pi}{2}$. В данном задании найти приближённое значение $\cos\frac{\pi}{3}$ и сравнить с точным значением.

2) $y = \cos x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],\ h = \frac{\pi}{4}$.

3) $y = e^x,\ x \in [0; 1],\ h = 1$. В данном задании найти приближённое значение $\frac{e}{4}$ и сравнить с точным значением.

4) $y = \ln x,\ x \in [1; 2],\ h = 1$.

ЛЕКЦИЯ № 6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИ

1. Вычисление производной по её определению.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную в этой точке, то есть существует предел отношения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю.

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (1)$$

Значение производной в точке x_0 можно получить, переходя к пределу в (1) по последовательности целых чисел n и полагая, например, $\Delta x = (\Delta x)_n = \frac{(\Delta x)_0}{\alpha^n}$. Здесь $(\Delta x)_0$ - некоторое начальное приращение аргумента, α - некоторое число, большее единицы, $n = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Тогда значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 запишется так:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n},\ (\Delta y)_n = f(x_0 + (\Delta x)_n) - f(x_0).$$

Отсюда получаем приближённое равенство

$$y'(x_0) \approx \frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n} \qquad (2).$$

Для функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную производную до второго порядка включительно в окрестности точки x_0, точность приближения можно установить, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$\left|y'(x_0)-\frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}\right| \le \frac{L}{2}(\Delta x)_0\alpha^{-n},\; L=\max_{c\in[x_0;x]}\left|f''(c)\right|.$$

Для достижения заданной точности ε приближения производной можно при определённом (конечном) числе вычислений использовать неравенство:

$$\left|\frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}-\frac{(\Delta y)_{n-1}}{(\Delta x)_{n-1}}\right| < \varepsilon \qquad (3).$$

Пример 1. Вычислить производную функции $y=\sin x$ в точке $x_0=\pi/3$ с точностью $\varepsilon=10^{-3}$ $(\pi/3)\approx 1{,}047198$.

Решение. Положим $(\Delta x)_0=0{,}1;\ \alpha=10;\ (\Delta x)_n=0{,}1\cdot 10^{-n}$, откуда: $(\Delta y)_n=\sin\left(\frac{\pi}{3}+0{,}1\cdot 10^{-n}\right)-\sin\frac{\pi}{3}$.

Определим приближённое значение производной:

$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right)\approx\frac{(\Delta y)_n}{(\Delta x)_n}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+0{,}1\cdot 10^{-n}\right)-\sin\frac{\pi}{3}}{0{,}1\cdot 10^{-n}},\quad n=0,1,2,...$$

Найдём отношения, аппроксимирующие производную:

$$\frac{(\Delta y)_0}{(\Delta x)_0}=0{,}45590189,\ \frac{(\Delta y)_1}{(\Delta x)_1}=0{,}49566158,\ \frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}=0{,}49956690,\ \frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3}=0{,}49995670.$$

Заметим, что $\left|\frac{(\Delta y)_3}{(\Delta x)_3}-\frac{(\Delta y)_2}{(\Delta x)_2}\right|=0{,}00038979390<\varepsilon$. Таким образом, начиная с третьего приближения, в соответствии с оценкой (3), получаем искомое приближение производной данной функции с точностью не меньшей заданной. Точное значение $y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=0{,}5$.

2. Конечно-разностные аппроксимации.

Пусть отрезок $[a;b]$ разбит на n равных частей точками $\{x_i\}: a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

Разность расстояний между соседними значениями аргумента постоянна, то есть шаг $h=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2,...,n)$. Далее, пусть на отрезке $[a;b]$ определена функция $y=f(x)$, значения которой в точках x_i равны $y_i=f(x_i)$.

Запишем выражения для первой производной данной функции в точке x_i с помощью отношения конечных разностей следующих типов:

а) аппроксимация с помощью *разностей вперёд* (правых разностей)

$$y'(x_i)\approx\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},\ \Delta x_i=x_{i+1}-x_i=h,\ \Delta y_i=y_{i+1}-y_i,\ y'(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-y_i}{h}\ (i=0,1,,...,n-1) \quad (4);$$

б) аппроксимация с помощью *разностей назад* (левых разностей)

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},\ \Delta x_i = x_{i-1} - x_i = -h,\ \Delta y_i = y_{i-1} - y_i\ ,\ y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}\ (i = 1, 2, ..., n) \quad (5);$$

в) аппроксимация с помощью *центральных разностей* (точка x_i является центром системы точек x_{i-1}, x_i, x_{i+1}):

$$y'(x_i) \approx \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i},\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_{i-1} = 2h,\ \Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1}\ ,\ y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\ (i = 1, 2, ..., n-1) \quad (6).$$

Очевидно, что аппроксимация производной с помощью центральных разностей представляет собой среднее арифметическое отношений (4) и (5) в точках $\{x_i\}, i = 1, 2, ..., n-1$. Отметим, что соотношения (4) и (6) не позволяют вычислить значение производной в правом конце отрезка *a*, а соотношения (5) и (6) – в левом конце отрезка b.

Можно показать, что для функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную производную до второго порядка включительно, погрешность аппроксимации производных разностями вперёд и назад имеет один и тот же порядок $\theta(h)$, а погрешность аппроксимации центральными разностями для функции, имеющей непрерывную производную до третьего порядка включительно, имеет порядок $\theta(h^2)$.

Приближённое значение производной второго порядка в точке x_i выразим через значения функции y_{i-1}, y_i, y_{i+1}. Для этого представим вторую производную с помощью правой разности:

$$y''(x_i) \approx \frac{\Delta y'_i}{\Delta x_i},\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h,\ \Delta y'_i = y'_{i+1} - y'_i,$$

а производные первого порядка y'_{i+1} и y'_i - с помощью левых разностей:

$$y'_{i+1} = y'(x_{i+1}) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h},\ y'_i = y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

и окончательно получим:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \qquad (i = 1, 2, ..., n-1) \quad (7).$$

Погрешность последней аппроксимации имеет порядок $\theta(h^2)$ для функции $y = f(x)$, имеющей непрерывную производную до четвёртого порядка включительно на отрезке $[a; b]$. Естественно, представление (7) позволяет вычислять значения производной с помощью конечных разностей только во внутренних точках отрезка.

ЛЕКЦИЯ № 7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Предварительные соображения.

Из курса математического анализа известно, что существуют неопределённые интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях – так называемые неберущиеся интегралы. Таким, например, является интеграл $\int \sqrt{x}\cos x dx$. Поэтому, очевидно, в некоторых случаях невозможно вычисление определённого интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, так как нельзя найти первообразную подынтегральной функции $f(x)$. В то же время существование такого интеграла обусловлено непрерывностью функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. В таких случаях прибегают к численным методам интегрирования.

Разумеется, вычислить определённый интеграл можно, непосредственно пользуясь его определением, как предел интегральных сумм: $\int_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, где n- число отрезков разбиения (частичных отрезков), c_i- некоторые точки, произвольно выбранные на каждом из отрезков, Δx_i - длина одного частичного отрезка. Однако такой способ, во-первых, достаточно громоздок, во вторых, обычно даёт результаты приемлемой точности только при больших значениях n.

Чаще всего формулы приближённого вычисления определённого интеграла вытекают из его геометрического смысла. Следовательно, задача о приближённом вычислении определённого интеграла заменяется другой, равносильной ей – задачей о вычислении площади криволинейной трапеции. При этом кривая $f(x)$ заменяется другой линией, достаточно близкой к ней. В качестве этой новой линии выбирается такая кривая, для которой площадь криволинейной трапеции подсчитывается просто, то есть для которой можно легко найти первообразную. В зависимости от выбора этой кривой и различаются формулы численного интегрирования.

Предположим сначала для определённости, что $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a;b]$. Разобьём отрезок $[a;b]$ на n равных частей точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Длина каждого отрезка равна $h = \frac{b-a}{n}$. Через точки деления проведём вертикальные прямые, которые пересекут линию $f(x)$ в точках $A_0, A_1, ..., A_{i-1}, A_i, ..., A_{n-1}, A_n$.

2. Формулы прямоугольников.

Заменим кривую $y = f(x)$ ломаной, расположенной выше её (рисунок). Тогда определённый интеграл будет приблизительно равен площади ступенчатой фигуры, состоящей из n прямоугольников:

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_1 h + y_2 h + ... + y_n h = h\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (1).$$

Здесь $y_i = f(x_i)$ - значения подынтегральной функции в правых концах отрезков разбиения.

Если же кривую $y = f(x)$ заменить ломаной, расположенной ниже её, то получится формула:

$$\int_a^b f(x)dx \approx y_0 h + y_1 h + ... + y_{n-1} h = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (2).$$

Здесь $y_i = f(x_i)$ - значения подынтегральной функции в левых концах отрезков разбиения. Формулы (1) и (2) называют *формулами прямоугольников*.

Оценка погрешности данного метода приближённого вычисления определённого интеграла находится по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{2} M_1 h \qquad (3),$$

где $M_1 = \max\limits_{[a;b]} f'(x)$ - наибольшее значение первой производной подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Пример 1. Вычислить по одной (на выбор) из формул прямоугольников интеграл $\int_0^1 e^x dx$, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Оценить ошибку вычислений и сравнить полученное значение с точным значением, вычисленным с помощью микрокалькулятора (1,718281).

Решение.

Вычислим значения подынтегральной функции e^x в точках деления и соответствующие значения занесём в таблицу:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	1,0	1,10517	1,2214	1,34986	1,49282	1,64872	1,82212	2,01375	2,22554	2,45

Воспользуемся формулой (1):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{10}\sum_{i=0}^{9} y_i = 0{,}1 \cdot 16{,}12534 = 1{,}612534.$$

Оценим ошибку вычисления. Имеем: $(e^x)' = e^x;\ \max\limits_{[0;1]} e^x = e^1 \approx 2{,}71828$.

Подставляя в формулу (3), получаем $\varepsilon \le \frac{1-0}{2} \cdot 2{,}71828 \cdot 0{,}1 = 0{,}135914$.

Действительно, сравнивая полученное значение с точным значением, получаем $d = |1{,}718281 - 1{,}612534| = 0{,}105747 \le \varepsilon$. Это весьма значительная ошибка.

Замечание. Во многих случаях формулы (1) и (2) дают приближённые значения определённого интеграла одна – с избытком, а вторая – с недостатком. Поэтому более точное значение можно получить, найдя среднее арифметическое результатов применения обеих формул.

3. Формула трапеций.

Соединив отрезками каждые две соседние точки $A_{i-1}, A_i, (i = 0, 1, ..., n)$, полученные способом, указанном в конце предыдущего пункта, заменим кривую $y = f(x)$ ломаной $A_0 A_1 ... A_{i-1} A_i ... A_{n-1} A_n$. Она сверху ограничивает фигуру, составленную из прямоугольных трапеций, каждая из которых опирается на один из частичных отрезков разбиения. Площадь элементарной криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1}; x_i]$ заменим площадью прямоугольной трапеции, ограниченной сверху отрезком $A_{i-1}A_i$. Тогда искомая площадь криволинейной трапеции, ограниченной линией $y = f(x)$, будет приближённо равна сумме площадей данных прямоугольных трапеций. Площадь каждой такой трапеции легко подсчитать, используя хорошо известную из школьного курса геометрии формулу: $S_i = \dfrac{y_{i-1} + y_i}{2} h, i = 1, 2, ..., n$.

Сумма таких площадей равна:

$$S_n = \frac{y_0 + y_1}{2} h + \frac{y_1 + y_2}{2} h + ... + \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h + ... + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} h + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} h.$$

После очевидных преобразований получим: $S_n = h\left(\dfrac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$. Таким образом, имеем следующую приближённую формулу вычисления определённого интеграла:

$$\int_b^a f(x)dx \approx S_n = h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \qquad (4).$$

Формула (4) носит название *формулы трапеций*. Ошибку для метода трапеций можно оценить по формуле:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{12} M_2 h^2 \qquad (5),$$

где $M_2 = \max\limits_{[a;b]} f''(x)$ - наибольшее значение второй производной подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Пример 2. В условиях примера 1 использовать формулу трапеций. Оценить ошибку вычисления; сравнить полученное приближённое значение $\int_0^1 e^x dx$ с точным.

Решение.

Воспользуемся таблицей значений, которую мы применяли в предыдущем примере.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	1,0	1,10517	1,2214	1,34986	1,49282	1,64872	1,82212	2,01375	2,22554	2,45

Сразу по формуле (4) получаем:

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{10}\left(\frac{1{,}0+2{,}71828}{2}+15{,}33798\right)=\frac{1}{10}\cdot 17{,}19712=1{,}71971.$$

Оценим ошибку вычисления. Имеем $\left(e^x\right)''=e^x$; $\max\limits_{[0;1]} e^x = e \approx 2{,}71828$. Подставляя в формулу (5), получаем: $\varepsilon \le \frac{1-0}{10}\cdot 2{,}71828\cdot 0{,}01=0{,}00271$. Действительно, сравнивая полученное значение с точным, получаем $d=\left|1{,}71828-1{,}71971\right|=0{,}00143\le\varepsilon$.

Заметим, что данный способ дал нам гораздо более точное приближение, чем используемый в предыдущем примере.

4. Формула Симпсона.

Для случаев, когда количество точек разбиения x_i чётно, то есть $n=2m, m\in N$, удобно использовать так называемую *формулу Симпсона* (параболических трапеций).

Примем её без вывода:

$$\int_a f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+y_{2m}+2\sum_{i=1}^{m-1}y_{2i}+4\sum_{i=1}^{m}y_{2i-1}\right) \qquad (6).$$

Напомним, что здесь $m=\frac{n}{2}$.

Оценка ошибки при вычислении определённого интеграла методом Симпсона:

$$\varepsilon \le \frac{b-a}{180}M_4 h^4 \qquad (7),$$

где $M_4=\max\limits_{[a;b]} f^{(4)}(x)$ - наибольшее значение производной четвёртого порядка подынтегральной функции на отрезке интегрирования.

Пример 3. В условиях примеров 1 и 2 найти приближённое значение $\int_0^1 e^x dx$ методом Симпсона. Оценить ошибку; сравнить полученное значение с точным.

Решение.

Воспользуемся таблицей значений, которую мы применяли в предыдущих примерах.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
y	1,0	1,10517	1,2214	1,34986	1,49282	1,64872	1,82212	2,01375	2,22554	2,45

Подставим соответствующие значения в формулу (7):

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{1-0}{6\cdot 5}(1{,}0+2{,}71828+2\cdot(1{,}22140+1{,}49182+1{,}82212+2{,}22554+4\cdot(1{,}10517+1{,}34986+$$

$$+1{,}64872+2{,}01375+2{,}45960)=\frac{1}{30}(3{,}71828+13{,}52176+34{,}30840)=\frac{51{,}54844}{30}=1{,}71828.$$

(здесь $m=n/2=5$)

При расчёте по данной формуле получили все 5 верных цифр после запятой. Таким образом, в одинаковых начальных условиях метод Симпсона даёт наибольшую точность приближённых вычислений определённого интеграла.

Задание.

Найти приближённые значения следующих определённых интегралов. Оценить ошибку вычисления и сравнить с точным значением. Вычисления вести с пятью знаками после запятой.

1) $\int_0^1 \cos x dx$; использовать метод прямоугольников; применить обе формулы (1) и (2), найти среднее арифметическое полученных результатов.

2) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ - методом трапеций.

3) $\int_0^1 \sin x dx$ - методом Симпсона.

4) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - методом трапеций и методом Симпсона.

ЛЕКЦИЯ № 8. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Унимодальные функции.

Из курса математического экстремума нам известны понятия локального и глобального экстремума функции одной переменной.

Пусть дана функция $y=f(x)$, непрерывная на некотором множестве X, являющемся подмножеством множества действительных чисел R $(X\subset R)$. *Задачей безусловной оптимизации* для функции $y=f(x)$ называется задача отыскания всех её локальных минимумов (максимумов) в случае, если множество X совпадает с множеством R $(X=R)$. Функция $y=f(x)$ называется при этом *целевой функцией*.

Аналогично данная задача формулируется для функции двух и более переменных, для множества R^n.

Мы рассмотрим численные методы решения данной задачи для нахождения минимума функции одной переменной. Задачу отыскания локального минимума целевой функции $y=f(x)$ символически записывают так: $f(x)\to\min, x\in R$.

Определение. Непрерывная функция $y = f(x)$ называется *унимодальной* на отрезке $[a;b]$, если:

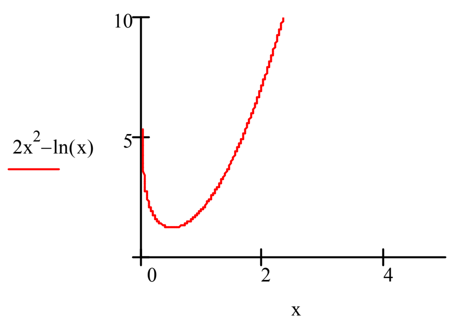
1) точка x_0 локального минимума функции принадлежит отрезку $[a;b]$;
2) для любых двух точек отрезка x_1, x_2 взятых по одну сторону от точки минимума, точке, более близкой к точке минимума соответствует меньшее значение функции; то есть из условий $x_2 < x_1 < x_0$ или $x_0 < x_1 < x_2$ следует условие $f(x_1) < f(x_2)$.

Достаточное условие унимодальности функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ содержится в следующей теореме.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f''(x) > 0$ в любой точке этого отрезка, то данная функция является унимодальной на отрезке $[a;b]$.

Заметим, что условие $f''(x) > 0$ определяет выпуклость вниз (вогнутость) функции на указанном отрезке.

<u>Пример 1.</u> Для функции $f(x) = 2x^2 - \ln x$ найти:
1) промежуток *X*, на котором функция является унимодальной;
2) решение задачи $f(x) \to \min, x \in X, X \subset R$.



<u>Решение.</u>
Функция $f(x)$ определена при $x > 0$; найдём её производные: $f'(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{4x^2 + 1}{x^2}$. Заметим, что $f''(x) > 0$ при $x \in (0; \infty)$. Следовательно, функция $f(x)$ унимодальна на интервале $(0; \infty)$. Далее, $f'(x) = 0$ при $x_0 = 0{,}5$. Знаки производной меняются в окрестностях точки 0,5 с “- “ на “+”, поэтому, согласно достаточном условию экстремума, данная точка является точкой локального минимума.

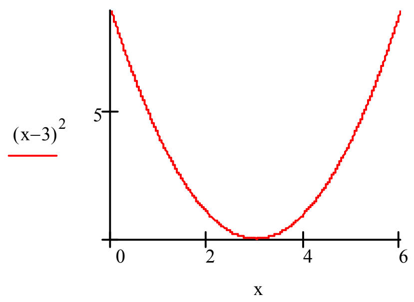
2. Схема сужения промежутка унимодальности функции.

Пусть требуется решить задачу

$$f(x) \to \min, x \in X, X \subset R \qquad (1)$$

Применение численных методов для отыскания точек x_0 локального минимума предполагает:

1) определение промежутков унимодальности функции, то есть нахождение отрезков, каждому из которых принадлежит одна точка локального минимума;
2) вычисление значения x_0, принадлежащего выбранному промежутку, с заданной точностью.



Для непрерывной функции $f(x)$ строят её график на некотором отрезке $[a;b]$ и, если окажется, что на этом отрезке график функции имеет вид, изображённый на рисунке, то $[a;b]$ - отрезок унимодальности функции. Отрезок $[a;b]$ берётся, по возможности, малым.

При вычислении точки минимума точность достигается последовательным уменьшением отрезка $[a;b]$, содержащего точку x_0, до размеров, не превышающих заданную точность $\varepsilon\ (b-a\le\varepsilon)$.

Замечание. Если функция $f(x)$ имеет производную во всей области определения, то для отыскания её стационарных точек нужно решить уравнение $f'(x)=0$. Для решения этого уравнения, как правило, необходимо использовать численные методы, описанные в лекциях 1 и 2. Однако, для решения задачи (1) проще применять прямые численные методы поиска минимума функции $f(x)$.

Рассмотрим один из приёмов, позволяющих сузить отрезок унимодальности функции. Пусть функция $f(x)$ унимодальна на отрезке $[a;b]$. Возьмём две произвольные точки x_1 и x_2, принадлежащие этому отрезку и такие, что $x_1<x_2$. Возможны, очевидно, следующие три случая, в каждом из которых можно указать отрезок меньших размеров $[a_1;b_1]$, содержащий точку минимума x_0 и принадлежащий первоначальному отрезку.

I. Если $y_1=f(x_1)<y_2=f(x_2)$, то положим $a_1=a, b_1=x_2$ и получим меньший отрезок унимодальности $[a_1;b_1]$.

II. Если $y_1=f(x_1)>y_2=f(x_2)$, то положим $a_1=x_1, b_1=b$.

III. Если $y_1=f(x_1)=y_2=f(x_2)$, то, очевидно, $a_1=x_1, b_1=x_2$.

Пример 2. Для функции $f(x)=2x^2-\ln x$, выбрав отрезок унимодальности $[a;b]=[0{,}25;1]$ и две произвольные точки $x_1, x_2\in[a;b]$, найти меньший отрезок унимодальности $[a_1;b_1]$.

Решение.

В примере 1 было установлено, что данная функция имеет точку минимума $x_0 = 0{,}5$ и является унимодальной на любом отрезке, содержащем эту точку и лежащем в области её определения $(0;\infty)$. Возьмём $x_1 = 0{,}375,\ x_2 = 0{,}625$; тогда: $y_1 = f(x_1) = 1{,}2620793,\ y_2 = f(x_2) = 1{,}2512536,\ f(x_1) > f(x_2)$.
Здесь естественно положить $a_1 = x_1 = 0{,}375$ и $b_1 = b = 1$ (случай II). Получили новый, меньший отрезок унимодальности $[0{,}375;1]$.

Методы, с помощью которых вычисляют значения точки минимума функции одной переменной, отличаются алгоритмами выбора точек x_1 и x_2 для локализации точки x_0 с заданной точностью.

3. Метод половинного деления.

Пусть при решении задачи (1) определён отрезок $[a;b]$, которому принадлежит точка локального минимума x_0, и функция $f(x)$ унимодальна на этом отрезке.

Далее для сужения отрезка унимодальности используем точки x_1 и x_2, расположенные симметрично относительно середины данного отрезка:

$$x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \mp k\frac{b-a}{2}.$$

Будем считать, что число k гораздо меньше единицы $(k \ll 1)$. Тогда точки x_1 и x_2 принадлежат отрезку $[a;b]$ и, следуя рассмотренной в предыдущем пункте схеме, получим новый суженный отрезок $[a_1;b_1]$ и оценим его длину в каждом из трёх возможных случаев:

I. $y_1 < y_2,\ a_1 = a,\ b_1 = x_2 = \dfrac{a+b}{2} + k\dfrac{b-a}{2};\ b_1 - a_1 = \dfrac{1+k}{2}(b-a);$

II. $y_1 > y_2,\ a_1 = x_1 = \dfrac{a+b}{2} - k\dfrac{b-a}{2},\ b_1 = b;\ b_1 - a_1 = \dfrac{1+k}{2}(b-a);$

III. $y_1 = y_2,\ a_1 = x_1,\ b_1 = x_2;\ b_1 - a_1 = k(b-a).$

Таким образом, после первого шага преобразований найден новый отрезок унимодальности $[a_1;b_1]$, длина которого уменьшилась.

Названия метода (*метод половинного деления*) мотивировано тем, что если величина k очень мала, то длина отрезка унимодальности уменьшается почти вдвое (в случаях I и II).

Теперь в новом суженном промежутке $[a_1;b_1]$ выберем точки x_{11} и x_{21}, симметричные относительно его середины:

$$x_{11,21} = \frac{a_1+b_1}{2} \mp k\frac{b_1-a_1}{2}.$$

Произведя вычисления, аналогичные проделанным ранее, получаем отрезок $[a_2;b_2]$, длина которого не больше, чем

$$b_2 - a_2 = (1+k)^2\frac{b-a}{2},$$

и так далее.

В результате приходим к последовательности таких вложенных отрезков $[a;b],[a_1;b_1],[a_n;b_n]$, что точка локального минимума x_0 функции $f(x)$ принадлежит каждому из них и является общим пределом последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

Отсюда получаются приближённые равенства: $x_0 \approx a_n \approx b_n$, оценить точность которых на n-м шаге вычислений можно с помощью неравенства:

$$0 \le x_0 - a_n \le b_n - a_n \le \frac{(1+k)^n}{2^n}(b-a) < \varepsilon \qquad (2).$$

<u>Пример 3.</u> Найти точку x_0 локального минимума функции $f(x) = 2x^2 - \ln x$ на отрезке $[0{,}25; 1]$ методом половинного деления с точностью $\varepsilon = 0{,}1$. Провести вычисления, полагая $k = 0{,}1$ и предварительно оценив минимальное число шагов, необходимое для достижения указанной точности.

<u>Решение.</u>

В примере 1 было установлено, что функция унимодальна на отрезке $[0{,}25; 1]$; точка x_0 принадлежит этому отрезку. Воспользуемся неравенством (2) и определим число шагов n:

$$\frac{(1+k)^n}{2^n}(b-a) < \varepsilon;\ n > \frac{\ln\dfrac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\dfrac{1+k}{2}} = \frac{\ln\dfrac{0{,}1}{0{,}75}}{\ln\dfrac{1{,}1}{2}} \approx 3{,}37;\ n_{\min} = 4.$$

Введём обозначения:

$$x_{1i,2i} = \frac{a_i + b_i}{2} \mp k\frac{b_i - a_i}{2};\ y_{1i} = f(x_{1i}),\ y_{2i} = f(x_{2i})\ (i = 0, 1, 2, ..., n) \qquad (3).$$

Здесь $a_0 = a = 0{,}25, b_0 = b = 1$, a_i и b_i - координаты начала и конца отрезка, полученного на $i-$м шаге вычислений, точки x_{1i}, x_{2i} принадлежат отрезку $[a_i;b_i]$.

Проведём последовательные вычисления.

1) Отрезок $[a;b] = [0{,}25; 1]$:

$x_1 = 0{,}5875,\ x_2 = 0{,}6625,\ y_1 = 1{,}2221 < y_2 = 1{,}2895$.

2) Отрезок $[a_1;b_1] = [a;x_2] = [0{,}25; 0{,}6625]$:

$x_{11} = 0{,}4356,\ x_{21} = 0{,}4769,\ y_{11} = 1{,}2105 > y_{21} = 1{,}1953$.

3) Отрезок $[a_2;b_2] = [x_{11};x_2] = [0{,}4356; 0{,}6625]$:

$x_{12} = 0{,}5377,\ x_{22} = 0{,}5604,\ y_{12} = 1{,}1987 < y_{22} = 1{,}2072$.

4) Отрезок $[a_3;b_3] = [x_{11};x_{22}] = [0{,}4356; 0{,}5604]$:

$x_{13} = 0{,}4918,\ x_{23} = 0{,}5043,\ y_{13} = 1{,}1934 > y_{23} = 1{,}1932$.

5) Отрезок $[a_4;b_4] = [x_{13};x_{22}] = [0{,}4918; 0{,}5604]$.

Разность $d = b_4 - a_4 = 0{,}0686 < \varepsilon = 0{,}1$. Следовательно, точкой локального минимума, найденной с заданной точностью, является $x_0 \approx a_4 = 0{,}4918$.

Задание.

Для заданной целевой функции $y = f(x)$ найти промежуток $X \subset R$, на котором она унимодальна. Найти точное решение задачи минимизации $f(x) \to \min, x \in X, X \subset R$. Найти приближённое решение этой задачи с точностью $\varepsilon = 0{,}01$ методом половинного деления.

1. $y = \dfrac{x^3}{3} + x^2$;
2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;
3. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$;
4. $y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$.

ЛЕКЦИЯ № 9. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

1. Понятие о численном решении задачи Коши.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной, имеет вид:

$y' = f(x, y)$ (1).

Решением дифференциального уравнения (1) называется функция $\varphi(x)$, подстановка которой в уравнение обращает его в тождество: $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. График решения $y = \varphi(x)$ называется *интегральной кривой*. Например, решением уравнения $y' = y$ является функция $\varphi(x) = Ce^x$ при любом значении постоянной C.

Задача Коши для дифференциального уравнения (1) состоит в том, чтобы найти его решение, удовлетворяющее условию

$y\big|_{x=x_0} = y_0$ (2).

Пару чисел (x_0, y_0) называют начальными данными (условиями). Решение задачи Коши называется *частным решением* уравнения (1) при начальном условии (2). Например, частным решением задачи Коши

$y' = y, \ y\big|_{x=0} = 1$

является функция $\varphi(x) = e^x$.

Частному решению соответствует одна из интегральных кривых, проходящая через точку (x_0, y_0). Условия существования и единственности решения задачи Коши содержатся в следующей теореме.

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ - правая часть дифференциального уравнения (1) – непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$ в некоторой области D на плоскости. Тогда при любых начальных данных (x_0, y_0) из этой области задача Коши имеет единственное решение $y = \varphi(x)$.

При выполнении условий теоремы через точку (x_0, y_0) на плоскости проходит единственная интегральная кривая.

Будем считать, что условия теоремы выполняются. Численное решение задачи Коши состоит в том, чтобы получить искомое решение $y = \varphi(x)$ в виде таблицы его приближённых значений для заданных значений аргумента на некотором отрезке $[a, b]$:

$x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b \qquad (3).$

Точки (3) называют *узловыми точками*, а множество этих точек называют *сеткой* на отрезке $[a, b]$. Будем использовать *равномерную сетку* с шагом *h*:

$h = \dfrac{b-a}{n}; x_i = x_{i-1} + h; x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, ..., n$.

Приближённые значения численного решения задачи Коши в узловых точках x_i обозначим через y_i, таким образом $y_i \approx \varphi(x_i), i = 1, 2, ..., n$. Для любого численного метода решения задачи Коши начальное условие (2) выполняется точно, то есть, имеем $y_0 = \varphi(x_0)$. Величина погрешности численного метода решения задачи Коши на сетке отрезка $[a, b]$ оценивается величиной $d = \max\limits_{1 \le i \le n}\{|y_i - \varphi(x_i)|\}$.

Говорят, что численный метод имеет *p*-й *порядок точности* по шагу *h* на сетке, если расстояние *d* можно представить в виде степенной функции от *h*: $d = Ch^p, p > 0$, где *C* – некоторая постоянная, зависящая от правой части уравнения (1) и от рассматриваемого метода. Очевидно, что когда шаг *h* стремится к нулю, погрешность *d* также стремится к нулю.

2. Метод Эйлера.

Простейшим численным методом решения задачи Коши в виде (1)-(2) является *метод Эйлера*, иногда называемый также *методом ломаных Эйлера*.

Угловой коэффициент касательной к интегральной кривой в точке $P_0(x_0, y_0)$ есть $y_0' = f(x_0, y_0)$. Найдём ординату y_1 касательной, соответствующей абсциссе $x_1 = x_0 + h$. Так как уравнение касательной к кривой в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, то $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Угловой коэффициент в точке $P_1(x_1, y_1)$ также находится из данного дифференциального уравнения $y_1' = f(x_1, y_1)$. На следующем шаге получаем новую точку $P_2(x_2, y_2)$, причём $x_2 = x_1 + h, y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$.

Продолжая вычисления в соответствии с намеченной схемой, получим *формулы Эйлера* для *n* приближённых значений решения задачи Коши с начальными данными (x_0, y_0) на сетке отрезка $[a, b]$ с шагом *h*:

$$x_i = x_{i-1} + h,\ y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1}),\quad i = 1, 2, ..., n \qquad (4).$$

Графической иллюстрацией приближённого решения является ломаная, соединяющая последовательно точки $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$, которую называют *ломаной Эйлера* (см. рисунок).

Оценим погрешность данного метода на одном шаге. Примем без вывода следующее утверждение: погрешность на одном шаге имеет порядок h^2 и после *n* шагов погрешность вычисления значения y_n возрастает не более чем в *n* раз. Погрешность метода Эйлера можно оценить неравенством

$$d \le \frac{1}{2}\max_{[a,b]}|\varphi''(x)| \cdot h^2 n = \frac{1}{2}\max_{[a,b]}|\varphi''(x)| \cdot (b-a)h$$

или представить в виде $d = Ch$, где $C \in \left[0; \frac{1}{2}\max_{[a,b]}|\varphi''(x)| \cdot (b-a)\right]$.

Это означает, что метод Эйлера имеет первый порядок точности. В частности, при уменьшении шага *h* в 10 раз, погрешность тоже уменьшится примерно в 10 раз.

Практическую оценку погрешности решения, найденного на сетке отрезка $[a, b]$ с шагом $\frac{h}{2}$, в точке $x_i \in [a, b]$ производят с помощью приближённого равенства – *правила Рунге*:

$$\left|\varphi(x_i) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right| \approx \frac{\left|y_i(h) - y_i\left(\frac{h}{2}\right)\right|}{2^p},$$ где *p* – порядок точности численного метода. (5)

Таким образом, оценка полученного результата по формуле (5) вынуждает проводить вычисления дважды: один раз с шагом *h*, другой – с шагом *h*/2.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$y' = x + y,\ y|_{x=0} = 1$$

методом Эйлера на отрезке $[0; 0{,}4]$. Найти решение на равномерной сетке с шагом $h = 0{,}1$ в четырёх узловых точках. Вычислить погрешность вычисления, сравнив его результат с точным значением (аналитическое решение задачи имеет вид $\varphi(x) = 2e^x - x - 1$).

Решение.

Здесь $f(x, y) = x + y;\ n = 4;\ a = 0,\ b = 0{,}4;\ h = (b-a)/n = 0{,}1$. На основе этих данных имеем, используя формулы (4), получаем рекуррентные формулы

$$x_0 = 0,\ y_0 = 1,\ x_i = x_{i-1} + 0{,}1,\ y_i = y_{i-1} + 0{,}1(x_{i-1} + y_{i-1}),\quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Последовательно находим

при $i = 1$: $x_1 = 0{,}1,\ y_1 = 1 + 0{,}1(0 + 1) = 1{,}1$;

при $i = 2$: $x_2 = 0{,}2,\ y_2 = 1{,}1 + 0{,}1(0{,}1 + 1{,}1) = 1{,}22$;

при $i = 3$: $x_3 = 0{,}3,\ y_3 = 1{,}22 + 0{,}1(0{,}4 + 1{,}22) = 1{,}362$;

при $i = 4$: $x_4 = 0{,}4,\ y_4 = 1{,}362 + 0{,}1(0{,}3 + 1{,}362) = 1{,}5282$.

Составим следующую таблицу:

i	x_i	$y_i(h)$	$\varphi(x_i)$	d_i
1	0,1	1,1	1,110342	0,01342
2	0,2	1,22	1,242805	0,022805
3	0,3	1,362	1,399718	0,037718
4	0,4	1,5282	1,583649	0,055449

Таким образом, погрешность для приближённых вычислений с шагом 0,1 составляет $d = |y_4(h) - \varphi(x_4)| \approx 0{,}06$.

Заметим, что если бы мы использовали формулы (5) (это целесообразно делать с применением специальных компьютерных программ), то величина d_i достигает значения $d \approx 0{,}03$ - ошибка метода Эйлера при вычислении с шагом при вычислении с шагом 0,05.

Задание.

Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка на равномерной сетке отрезка $[a; b]$ с шагом 0,2 методом Эйлера. Сравнить численное решение с точным значением. Результаты представить в виде таблиц, аналогичных приведённой в примере.

1) $y' = \dfrac{1 + xy}{x^2},\ y\Big|_{x=1} = 0,\ x \in [1,\ 2],\ \varphi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$;

2) $y' = y - \dfrac{2x}{y},\ y\big|_{x=0} = 1,\ x \in [0,\ 1],\ \varphi(x) = \sqrt{2x - 1}$;

3) $y' = xy,\ y\Big|_{x=0} = 1,\ x \in [0;\ 1],\ \varphi(x) = e^{x^2/2}$.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Воронежский государственный архитектурно-строительный университет»

ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ
(ГЛОССАРИЙ)

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Автор: Михин Евгений Александрович

Кафедра «Инноватики и строительной физики»

Абсолютная сходимость – числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется: абсолютно сходящимся, если сходится числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$.

Асимптоты функции – прямая называется асимптотой кривой, если расстояние d от переменной точки M кривой до этой прямой при удалении точки M в бесконечность стремится к нулю.

Базис пространства R^n – система векторов этого пространства, обладающая двумя свойствами: 1) эта система линейно независима, 2) любой вектор пространства R^n может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы.

Базис системы векторов – *базисом системы* векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ называется подсистема этой системы векторов, обладающая двумя свойствами: эта подсистема линейно независима, любой вектор системы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой подсистемы.

Вектор – величина, характеризуемая не только числовым значением; но и направлением; прямолинейный отрезок, которому придано направление, имеющий начальную точку, из которой он выходит, и концом точку, в которую он приходит.

Вектор n-мерный – упорядоченный набор $\overline{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из n вещественных чисел называется *n-мерным вектором* $\overline{a}$, а сами числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – *компонентами*, или *координатами вектора* $\overline{a}$.

Векторное пространство R^n – множество всевозможных n-мерных векторов, для которых определены указанным образом операции сложения и умножения на число, называется *n-мерным векторным пространством* и обозначается R^n.

Второй дифференциал функции двух переменных – $d^2f(P_0)=Q(dx; dy)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)dx^2+$ $+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)\,dxdy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)\,dy^2$ называется вторым дифференциалом функции $z=f(P)$ в тсочке P_0.

Гармонический ряд – числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ называемый обобщенным гармоническим рядом (при $\alpha=1$ – гармоническим рядом), сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

Геометрическая прогрессия – числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ называемый геометрической прогрессией, абсолютно сходится при $|q|<1$ (в этом случае ряд называется бесконечно убывающей геометрической прогрессией) и расходится при $|q| \ge 1 \quad (a \ne 0)$.

Градиент функции двух переменных – вектор $\nabla f(P_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(P_0); \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\right)$ называется градиентом функции $z=f(P)$ в точке P_0.

Дифференциал функции – произведение $f'(x)\cdot\Delta x$ называют дифференциалом функции и обозначают dy или $df(x)$. При этом дифференциал независимой переменной dx совпадает с ее приращением Δx. Тогда $dy=f'(x)\cdot dx$.

Дифференциальное уравнение – уравнение, содержащее независимую переменную x, неизвестную функцию $y=y(x)$ и ее производные $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$,..., $y^{(n)}=y^{(n)}(x)$: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, где F – заданная функция своих аргументов.

Дополнения алгебраические – *алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$, где Δ_{ij} – определитель матрицы $(n-1)$-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}

Задача Коши – из всех решений дифференциального уравнения $y'=f(x, y)$ найти то решение $y=y(x)$, $x\in(a, b)$, которое при заданном значении независимой переменной x_0 принимает заданное значение y_0, т.е. $y(x_0)=y_0$, где заданные вещественные числа x_0, y_0 называются начальными значениями, а условие $y(x_0)=y_0$ называется начальным условием или условием Коши.

Интегральная сумма Римана – пусть на отрезке $[a\,,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ задана функция $y=f(x)$. Точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ разделим отрезок $[a\,,b]$ на n отрезков $[x_0\,,x_1], [x_1\,,x_2], \dots, [x_{n-1}\,,x_n]$. На каждом из этих отрезков возьмем по одной произвольной точке: $c_1 \in [x_0, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2], \dots,$ $c_n \in [x_{n-1}, x_n]$. Для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ (k=1,2,…,n) составим произведение $f(c_k)\Delta_k$ значения функции $f(x)$ в выбранной точке c_k на длину $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ этого отрезка. Сумма всех этих произведений $S_n = f(c_1)\Delta_1 + f(c_2)\Delta_2 + \dots + f(c_n)\Delta_n$ называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$.

Интегральная кривая – каждой точке (x, y) области определения уравнения $y'=f(x, y)$ это уравнение ставит в соответствие определенное значение производной y'. Пусть $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$ есть решение уравнения. Тогда кривая, определяемая уравнением $y=\varphi(x)$, $x\in(a,b)$, называется интегральной кривой дифференциального уравнения.

Интегральный признак – пусть положительный числовой ряд имеет вид: $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$, где $f(n)$ есть значение при $x=n$ некоторой функции $f(x)$, определенной при $x\in[n_0,\infty)$. Если функция $f(x)$ непрерывна, положительна и монотонно убывает при $x\in[n_0,\infty)$, то тогда: если сходится несобственный интеграл $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_{n_0}^{A} f(x)$, то сходится и числовой ряд; если расходится несобственный интеграл, то расходится и числовой ряд.

Интегрирование –операция, обратная дифференцированию.

Коллинеарные векторы – векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

Координата вектора – величина проекции вектора на ось координат.

Координаты вектора в базисе – стр.101.

Крамера правило – пусть система $A\,\overline{x}=\overline{b}$ линейных уравнений имеет квадратную матрицу A, определитель Δ которой отличен от нуля. Тогда система $A\,\overline{x}=\overline{b}$ имеет единственное решение $\overline{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$, которое может быть найдено по формулам Крамера $x_1^* = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2^* = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, …, $x_n^* = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$. Здесь Δ_j (j=1, …, n) – определители матриц, которые получаются из матрицы A заменой в ней j-го столбца на столбец свободных членов.

Кратность корня – если часть корней $x_1, x_2, \dots, x_n$ многочлена $P_n(x)$ совпадает, то многочлен можно представить в виде $P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_l)^{k_l}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$, где k_1 – число одинаковых корней x_1; k_2 – число одинаковых корней x_2; и т.д. Число k_1 называется кратностью корня x_1 число k_2 – кратностью корня x_2, и т.д.

Кронекера-Капелли теорема – для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A этой системы равнялся рангу ее расширенной матрицы $\overline{A}$.

Линейная комбинация векторов – вектор $\overline{b}$ называется *линейной комбинацией* векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$, если существуют такие вещественные числа λ_1, λ_2, …, λ_k, что $\overline{b} = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \dots + \lambda_k\overline{a}_k$.
Числа λ_1, λ_2, …, λ_k называются *коэффициентами* этой линейной комбинации.

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка – уравнение вида: $a(x)y'+b(x)y=f(x)$, где $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции, причем $a(x)$ не равна тождественно нулю.

Локальный минимум (максимум) функции двух переменных – точка $P_0=P_0(x_0, y_0)\in M$ называется точкой локального минимума (максимума) функции $z=f(P)$, если существует такое $\delta>0$, что из условия $P=P(x, y)\in M$, $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ следует, что $f(P_0)\le f(P)$ (соответственно $f(P_0)\ge f(P)$).

Матрица – числовой *матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Матрица единичная – квадратная матрица E вида $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ называется *единичной* матрицей. Она обладает свойством единицы, то есть для любой квадратной матрицы A одинакового с E порядка справедливо $AE=EA=A$.

Матрица квадратная – если матрица имеет одинаковое число строк и столбцов ($m=n$), то она называется *квадратной матрицей порядка n*.

Матрица обратная – пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Матрица B называется *обратной* к матрице A, если $AB=BA=E$.

Матрица расширенная – матрица $\overline{A}$, полученная из матрицы A системы линейных уравнений добавлением к ней столбца $\overline{b}$ свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы

Матрица транспонированная – если в матрице A поменять местами строки и столбцы, то получится матрица A^T, которая называется *транспонированной* к матрице A.

Матрица вторых производных функции двух переменных – $B = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) \end{pmatrix}$

Метод Бернулли – процесс отыскания общего решения уравнения $a(x)y'+b(x)y=f(x)$, где $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Множество – это совокупность элементов, объединенных общим (характеристическим) свойством.

Модуль вектора – расстояние между началом вектора и его концом.

Направляющий вектор – ненулевой вектор, лежащий на прямой или параллельный ей.

Необходимое условие экстремума функции двух переменных – если точка P_0 является точкой локального экстремума функции $z=f(P)$ и в ней существуют частные производные первого порядка, то они равны нулю: $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)=0$.

Неопределенный интеграл – совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют неопределенным интегралом, а операцию интегрирования обозначают в виде $\int f(x)dx$.

Необходимый признак сходимости – если числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится, то тогда $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Непрерывность функции двух переменных – функция $z=f(P)$ называется непрерывной в точке P_0, если выполнены следующие три условия: функция $f(P)$ определена в точке P_0; существует $\lim_{P\to P_0} f(P)$; $\lim_{P\to P_0} f(P)=(P_0)$.Функция $z=f(P)$ называется непрерывной в области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Непрерывность функции – функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если она в этой точке и в окрестности точки определена и $\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Нормаль – ненулевой вектор, перпендикулярный прямой на плоскости Oxy или плоскости в пространстве Oxyz.

Область определения функции – множество значений аргумента x, для которых существуют значения функции y, называется областью определения функции (или областью существования функции).

Однородное линейное дифференциальное уравнение – уравнение вида: $y''+py'+qy=0$, где p, q – заданные вещественные числа.

Определенный интеграл – если при стремлении наибольшей из длин Δ_k ($k=1, 2, \dots, n$) к нулю (а значит числа n отрезков Δ_i – к бесконечности) существует конечный предел последовательности интегральных сумм Римана функции $f(x)$, который не зависит от выбора точек $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, c_1, c_2, \dots, c_n$, то этот предел называется *определенным интегралом функции* $f(x)$ *от a до b и обозначается* $\int_a^b f(x)dx$. При этом функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

Ортогональные векторы – векторы, угол между которыми равен 90^O.

Первый дифференциал функции двух переменных – линейная часть $df(P_0)$ приращения $f(P)–f(P_0)$ называется первым дифференциалом функции $z=f(P)$ в точке P_0. Таким образом, формула первого дифференциала имеет вид: $df(P_0)=L(dx;dy)=\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(P_0)dy$.

Перегиб графика функции – пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если $f''(a)=0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x=a$ из области определения функции производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $x=a$ есть точка перегиба.

Подынтегральная функция – если под $F(x)$ понимать неопределенный интеграл (т.е. совокупность всех первообразных), то $F(x)\equiv\int f(x)dx=\Phi(x)+C$, где $f(x)$ – называют *подынтегральной функцией*, а x – *переменной интегрирования*.

Порядок уравнения – наивысший порядок производной, входящей в уравнение $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0$, называется порядком дифференциального уравнения.

Последовательность числовая – если каждому натуральному числу $n\in N$ поставлено в соответствие некоторое действительное число, то совокупность чисел $\{a_n\}$, $n=1;2;\ldots$ называется числовой последовательностью.

Предел функции – пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором множестве X, для точек которого определено понятие $x\to a$. Функция $y=f(x)$ имеет конечный *предел* b ($y\to b$), если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta_\varepsilon>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. Если b есть *предел функции* $f(x)$ при $x\to a$, то пишут $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$.

Предел функции двух переменных – число A называется пределом функции $z=f(x, y)$ при стремлении точки $P(x, y)$ к точке $P_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что из условия $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ вытекает неравенство $|f(x, y)–A<\varepsilon$. При этом пишут $A=\lim\limits_{P\to P_0}f(P)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$.

Предел числовой последовательности – число A называется пределом числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такой номер n_ε, что для всех номеров $n>n_\varepsilon$ выполняется условие $|a_n-A|<\varepsilon$. При этом записывают $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$

Признак Даламбера – пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел: $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$, тогда если $\lambda<1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ сходится; если $\lambda>1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ расходится. Пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел: $\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$,тогда если $\lambda<1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ сходится; если $\lambda>1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ расходится.

Признак Коши – пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ – положительный числовой ряд. И пусть существует предел $k=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$. Тогда: если $k<1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ сходится; если $k>1$, то ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}u_n$ расходится.

Признак Лейбница – пусть $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}(-1)^n a_n$ – знакочередующийся числовой ряд. Если выполнены условия: $|a_{n+1}|\le|a_n|$ для всех $n\ge n_0$ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то тогда ряд сходится. Причем сумма ряда имеет знак первого члена ряда (т.е. знак члена a_0) и справедливо неравенство $\left|\sum\limits^{\infty}(-1)^n a_n\right|\le|a_{n_0}|$.

Производная функции – производной данной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее произвольным образом стремится к нулю.
Прямоугольная декартова система координат – совокупность двух (на плоскости Oxy) или трех (в пространстве $Oxyz$) взаимно перпендикулярных осей с общим началом и общей единицей масштаба.
Равные векторы – коллинеарные векторы, имеющие одинаковую длину и одинаковое направление.
Разделяющиеся переменные – уравнение вида: $y'=f(x)g(y)$, где $f(x)$, $g(y)$ – заданные функции своих аргументов.
Ранг матрицы – *рангом матрицы по строкам* называется ранг системы ее векторов-строк, то есть максимальное количество ее линейно независимых строк. *Рангом матрицы по столбцам* называется ранг системы ее векторов-столбцов, то есть максимальное количество ее линейно независимых столбцов.
Ранг системы векторов –количество векторов в каком-либо базисе этой системы векторов.

Ряд Маклорена – степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ называется *рядом Маклорена* для функции $f(x)$.

Система векторов линейно зависимая – система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ называется *линейно зависимой*, если существует линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, в которой хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

Система векторов линейно независимая – система векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ называется *линейно независимой*, если нулевую линейную комбинацию этих векторов можно получить *только* при нулевых значениях *всех* коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$.

Система линейных уравнений – система уравнений вида $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$ называется *системой линейных уравнений*. Здесь $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные, $a_{11}, \ldots, a_{mn}$ – заданные коэффициенты при неизвестных, $b_1, \ldots, b_m$ – заданные свободные члены.
Система уравнений неоднородная – если в столбце свободных членов есть хотя бы один ненулевой элемент, система называется *неоднородной.*
Система уравнений несовместная – если система уравнений не имеет ни одного решения, она называется *несовместной.*
Система уравнений однородная – система уравнений называется *однородной*, если в столбце свободных членов все элементы нулевые.
Система уравнений совместная – система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение.
Скалярное произведение – произведение модулей векторов на косинус угла между ними.

Степенной ряд – *степенным рядом* называется ряд вида $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$, где $\{a_n\}_{n\ge n_0}$ – последовательность вещественных чисел, а x – независимая вещественная переменная.
Схема исследования функции – при исследовании функции рекомендуется придерживаться следующего плана:

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование поведения функции на концах области определения. Вертикальные асимптоты. Наклонные асимптоты.
3. Четность функции.
4. Периодичность функции.
5. Исследование функции на монотонность и экстремум.
6. Исследование функции на выпуклость и вогнутость, точки перегиба.
7. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.
8. Поиск дополнительных точек графика.
9. Построение графика.

Сходимость – пусть $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ – числовой ряд. Если существует конечный предел $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ частичных сумм, то числовой ряд называется *сходящимся*, а число S – его *суммой.* В противном случае говориться, что ряд *расходится.*

$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

Угол между векторами – наименьший угол между векторами, равными данным, если их начала совмещены.

Условная сходимость – числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется :*условно сходящимся*, если числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ сходится, а числовой ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Формула интегрирования по частям – пусть u и v – какие-то заданные функции x, а du и dv – их дифференциалы. Существует следующее соотношение: $\int u dv = uv - \int v du$. Соотношение называют *формулой интегрирования по частям*.

Формула Ньютона-Лейбница – пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(c, d) \supset [a, b]$ (т.е. $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in (c, d)$), тогда

$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b$ Формула называется *формулой Ньютона-Лейбница.*

Функция – если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторому множеству вещественных чисел, соответствует единственное вещественное значение другой переменной y, то y есть *функция* от x или, в символической записи, $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ и т.п.

Функция двух переменных – пусть D – произвольное множество точек плоскости $R^2 = \{(x, y): x \in R, y \in R\}$. Если каждой точке $P=P(x, y) \in D$ поставить в соответствие некоторое вполне определенное вещественное число $z=f(P)=f(x, y)$, то говорят, что на множестве D задана числовая функция f двух вещественных переменных x и y. Множество D при этом называется областью определения, а множество $E=\{z \in R: z=f(P), P=P(x, y) \in D\}$ – областью значений функции $z=f(P)$.

Частная производная функции двух переменных – частной производной функции $z=f(P)=f(x, y)$ по переменной x в точке $P_0=P_0(x_0, y_0) \in M$ называется предел

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$, а частной производной этой функции по переменной y в точке $P_0(x_0, y_0)$ называется предел $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$, если указанные пределы существуют.

Числовой ряд – ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$ называется числовым рядом, если $\{u_n\}_{n \geq n_0}$ – последовательность вещественных чисел.

Экстремум функции – функция $f(x)$ имеет *максимум* в точке $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx, достаточно малых по абсолютной величине. Функция $f(x)$ имеет *минимум* в точке $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) > f(x_1)$ при любых Δx, достаточно малых по абсолютной величине. Точки x_1 называются *точками локального максимума* и *минимума* соответственно. Общее название – *точки экстремума функции.*

Экстремум функции двух переменных – точки локального минимума и локального максимума функции $z=f(P)$ принято называть точками локального экстремума или, проще, точками экстремума.

Элементарные преобразования системы уравнений – *элементарными преобразованиями* системы уравнений называются следующие преобразования: перестановка уравнений; изменение порядка следования переменных одинаково во всех уравнениях системы; умножение какого-либо уравнения на отличное от нуля число; замена какого-либо уравнения системы на его сумму с другим уравнением, предварительно умноженным на произвольное число.