ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757 (online)

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научный журнал

Выпуск № 3 (50)

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж – 2026

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г. Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения – Российская Федерация.

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В. С., д-р техн. наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет
Зам. главного редактора: Козлов В. А., д-р физ.-мат. наук, доцент, советник РААСН,
Воронежский государственный технический университет
Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Антонов В. М., канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;
Беляева С. Ю., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;
Буренин А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;
Гриднев С. Ю., д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;
Зверев В. В., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Липецкий государственный технический университет;
Ефрюшин С. В., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;
Кирсанов М. Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;
Колчунов В. И., д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;
Коробко А. В., д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;
Михайлов В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;
Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;
Нугужинов Ж. С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;
Овчинников И. Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;
Пшеничкина В. А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;
Свентиков А. А., д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;
Трещев А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;
Турищев Л. С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;
Шимановский А. О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;
Шитикова М. В., д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Московский государственный строительный университет

Дизайн обложки – А. Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,
https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030

Подписной индекс в электронном каталоге Почты России – ПД038

Дата выхода в свет 30.10.2026. Усл. печ. л. 12,9. Формат 60×84/8. Тираж 29 экз. Заказ № 147.
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Регистрационный номер ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
(строительный факультет, кафедра строительной механики),
тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru
ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»
394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

12+

ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2026

ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757 (online)

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific Journal

Issue № 3 (50)

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh – 2026

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010 Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.
Territory of distribution — Russian Federation.
The journal «Structural mechanics and structures» is included into the List of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University
The deputy chief editor: Kozlov V. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Associate Prof., adviser of RAACS,
Voronezh State Technical University
Executive secretary: Gabrielyan G. E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

Antonov V. M., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;
Belyaeva S. Yu., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;
Burenin A. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;
Gridnev S. Yu., Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;
Zverev V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Lipetsk State Technical University;
Efryushin S. V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;
Kirsanov M. N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;
Kolchunov V. I., Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;
Korobko A. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenev;
Mikhailov V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;
Nguen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;
Nuguxhinov Zh. S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;
Ovchinnikov I. G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;
Pshenichkina V. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;
Sventikov A. A., Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;
Trechshev A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;
Turichshev L. S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;
Shimanovsky A. O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;
Shitikova M. V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Moscow State University of Civil Engineering

Cover design by A. R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,
https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030

Subscription index in the electronic catalog of the Russian Post – ПД038

Publication date 30.10.2026. Conventional printed sheets 12.9. Format 60×84/8. Numbers of copies 29. Order № 147.
Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,
Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)
Registration certificate PI № FS 77 – 72895 dated 22.05.2018

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics),
tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru
PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University
84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ 7

Кирсанов М. Н., Астахов С. В.
Расчет плоской регулярной фермы, допускающей кинематическое изменение 7

Мищенко А. В., Вешкин М. С., Бабенко О. Е.
Определение оптимального продольного профиля
слоисто-неоднородной балки при заданной схеме нагружения 16

Черняев А. А.
Моделирование геометрии конструкций
в виде параллелограммных пластин и развитие теории
вычислительных методов расчёта на устойчивость 28

Кирсанов М. Н., Габриелян Г. Е.
Формулы для прогибов плоской фермы со сложной решеткой 41

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ 50

Кравчук В. А., Кравчук Е. В.
Устойчивость предварительно напряженных сплошностенчатых стержней 50

Решетников Д. Е., Кожевников А. Н., Панова Н. В.
Исследование влияния направления приложения нагрузки
на напряженно-деформированное состояние узла крепления 62

Глазков Д. С., Козлов В. А.
Определение натяжения вант в составе висячей оболочки по их равновесной форме 71

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ 83

Душко О. В., Долганов А. П., Бочков М. И., Завьялов И. С., Тараканов А. И.
Измерение динамических характеристик многоэтажных зданий 83

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ
ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ 94

Мкртычев О. В., Айтян С. А.
Определение амплитудно-частотной характеристики
грунтового массива прямым динамическим методом 94

НАУЧНЫЕ ДИСКУССИИ 102

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ 111

CONTENTS

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS 7

Kirsanov M. N., Astakhov S. V.
Calculation of a Flat Regular Truss Allowing Kinematic Change 7

Mishchenko A. V., Veshkin M. S., Babenko O. E.
Determining of the Optimal Longitudinal Contour
of a Layered Inhomogeneous Beam for a Given Loading Scheme 16

Chernyaev A. A.
Modeling the Geometry of Structures
in the Form of Parallelogram Plates and the Development
of the Theory of Computational Methods for Stability Calculation 28

Kirsanov M. N., Gabrielyan G. E.
Formulas for the Deflections of a Planar Truss with a Complex Lattice 41

CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES 50

Kravchuk V. A., Kravchuk E. V.
Stability of Prestressed Solid-walled Rods 50

Reshetnikov D. E., Kozhevnikov A. N., Panova N. V.
Investigation of the Effect of Load Application Direction
on the Stress-strain state of a Mounting Joint 62

Glazkov D. S., Kozlov V. A.
Determination of Cable Tension in a Suspended Shell from the Equilibrium Shape of the Cables 71

CALCULATION AND DESIGN
OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES 83

Dushko O. V., Dolganov A. P., Bochkov M. I., Zavyalov I. S., Tarakanov A. I.
Measurement of Dynamic Characteristics of Multi-story Buildings 83

CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS
OF BUILDINGS AND STRUCTURES 94

Mkrtichev O. V., Aityan S. A.
Determination of the Frequency-response Characteristics
of a Soil Mass Using the Direct Dynamic Method 94

SCIENTIFIC DISCUSSIONS 102

RULES OF PREPARATION OF ARTICLES 111

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04:531.391.3
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.001

РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ФЕРМЫ, ДОПУСКАЮЩЕЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИЗМЕНЕНИЕ

М. Н. Кирсанов [1], С. В. Астахов [2]

Национальный исследовательский университет «МЭИ» [1, 2]
Россия, г. Москва

[1] Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: (495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru
[2] Канд. техн. наук, доц. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: (495)362-77-00, e-mail: nccl@mail.ru

Находится условие, при котором плоская регулярная статически определимая решетчатая балочная ферма допускает кинематическую изменяемость. Приводится соответствующая схема возможных скоростей узлов конструкции. Выводится формула для критического числа панелей, при котором возможна изменяемость фермы. Для неизменяемых схем находятся формулы зависимости прогиба середины пролета и горизонтального сдвига подвижной опоры от числа панелей. Предполагается, что жесткость всех стержней одинаковая. Рассматриваются распределенные узловые нагрузки на нижний и верхний пояса, а также сосредоточенная нагрузка на узел в середине пролета. Для решения задачи используется система символьной математики «Maple» и метод индукции для обобщения ряда решений для ферм с различным допустимым числом панелей на произвольный случай.

Ключевые слова: возможные скорости узлов фермы, мгновенно изменяемая ферма, плоская ферма, прогиб, сдвиг опоры, аналитическое решение, «Maple», метод индукции, формула Максвелла – Мора.

Введение. Обладая высокой прочностью и жесткостью, фермы широко используются в строительстве, транспорте и машиностроении. Расчет усилий и перемещений ферм под действием нагрузок производится, как правило, приближенными методами на основе метода конечных элементов. На основе алгоритма дифференциальной эволюции в [1] систематически оценивается влияние определения компонентов алгоритма на повышение надежности оптимизации ферм. Найден оператор мутации, который давал наилучшие результаты для больших ферм и хорошие результаты для меньших конструкций. В [2] разработана цифровая методика оценки усталости на основе расширенного метода конечных элементов для оценки характеристик в ускорении роста усталостных трещин крестообразного сварного соединения ферм с учетом комбинированного воздействия собственного веса, нагрузки от транспортного средства и остаточных напряжений сварки. В качестве примера рассматривается реальный стальной ферменный балочный подвесной мост с двумя пролетами. Новый композитный узел для железобетонных балок, соединенных стальной фермой, разработанный специально для железнодорожных вантовых мостов большого пролета, предлагается в [3]. Было проведено экспериментальное и численное исследование для выяснения сложного механизма передачи усилий и характеристик распределения напряжений в этом узле. В [4] применяются символические

© Кирсанов М. Н., Астахов С. В., 2026

вычисления для матричного структурного анализа плоских ферм. Используется программа «MATLAB» и «Symbolic Math Toolbox» для вывода аналитических выражений в замкнутой форме для перемещений, опорных реакций и осевых сил. Структура программы обладает высокой масштабируемостью, способной генерировать символические решения для крупномасштабных ферменных конструкций.

Справочник [5] содержит формулы для расчета статических прогибов и усилий в критических стержнях для различных схем плоских периодических ферм, загруженных сосредоточенными узловыми силами. Расчет первой частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы с произвольным числом панелей в аналитической форме предложен в [6].

В работах Д. Голоскокова и А. Матросова для расчета строительных конструкций используются методы символьной математики [7]. Приближенный аналитический расчет тонкой пластины [8] выполнен этими же авторами в системе «Maple». Решение задачи об изгибе полубесконечной прямоугольной пластины в рядах найдено в [9]. Здесь авторы использовали метод Л. В. Канторовича с базисными функциями в виде ортогональных полиномов Якоби, удовлетворяющими граничным условиям на параллельных кромках полубесконечной пластины. Такие функции обладают также свойством квазиортогональности первых и вторых производных, что упрощает решение. Формулы для приближенного решения задачи о нахождении собственных частот собственных колебаний пространственной консольной фермы в форме полиномов по числу панелей с использованием метода индукции и системы компьютерной математики «Maple» вывели O. Sviridenko и E. Komerzan в [10]. Анализ резонансно безопасной области частот собственных колебаний плоской фермы рассмотрел К. К. Селезнев в [11–12]. При выводе зависимости основной частоты колебаний плоской фермы симметричной арки от числа панелей C. L. Luong [13] использовал упрощенный аналитический метод на основе замены суммы Данкерлея её приближенным значением. Простая аналитическая оценка прогиба пространственной регулярной стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия методом индукции выведена в [14]. Упрощенный вариант метода Данкерлея (Dunkerley's method) для оценки первой собственной частоты колебаний плоской фермы использован в [15]. Формулы для прогиба фермы с усиленной решеткой методом индукции получены в [16]. Различные схемы статически определимых ферм, допускающих кинематическую изменчивость при определенном числе панелей, приведены в обзоре [17].

Аналогичный скрытый дефект статически определимой регулярной фермы, обладающей свойством подобия, описан и в настоящей работе. Однако, несмотря на возможное кинематическое вырождение схемы при определенном числе панелей, для подобных ферм при допустимом числе панелей удается получить аналитические решения для прогиба в зависимости от порядка конструкции.

Рассматривается плоская схема статически определимой решетчатой фермы на двух опорах и выводятся формулы для прогиба и горизонтального сдвига подвижной опоры в зависимости от числа панелей для различных узловых нагрузок.

Конструкция фермы. Плоская ферма имеет сложную двойную крестообразную решетку и закреплена на подвижной и неподвижной шарнирных опорах (рис. 1). Раскосы имеют длины $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ и $2c$. Жесткость стержней фермы *EF* одинаковая. Ферма состоит из $2n$ панелей, $4n + 4$ внутренних шарнирных узлов и $\nu = 8n + 8$ стержней, включая три жестких стержня, моделирующих опоры. Пролет фермы $L_0 = AB = 2an$. Материал стержней линейно упругий.

Тестовые расчеты усилий в стержнях фермы от действия нагрузки показали, что для четного числа панелей в половине пролета определитель системы уравнений равновесия вырождается. Кинематический анализ конструкции выявил одно из возможных распределений скоростей узлов (рис. 2). Соотношение скоростей следующее: *u/a=v/h*.

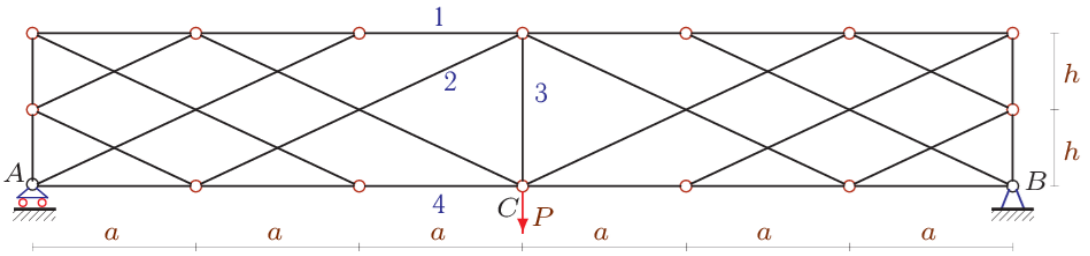


Рис. 1. Схема фермы, *n* = 3. Нагрузка в середине пролета

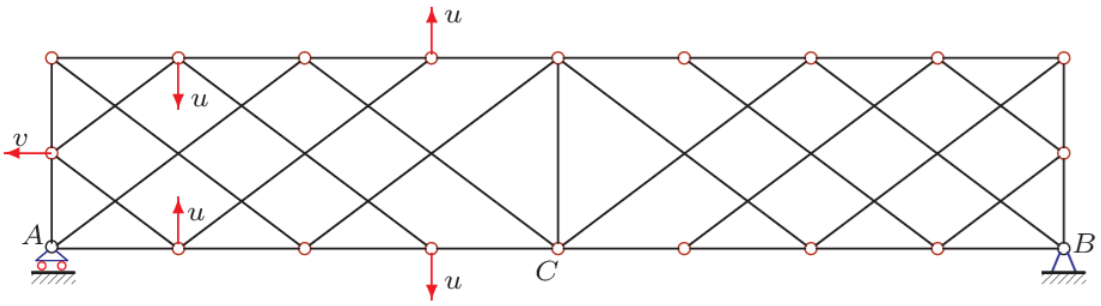


Рис. 2. Схема распределения возможных скоростей изменяемой фермы, *n* = 4

Расчет усилий в стержнях. Прогиб конструкции определяется по формуле Максвелла – Мора. Усилия в стержнях находятся в символьной форме из аналитического решения системы уравнений равновесия всех узлов конструкции. Матрица этой системы состоит из направляющих косинусов внутренних усилий и векторов приложенных нагрузок и зависит от порядка соединения стержней в узлы и координат узлов. Шарниры фермы и стержни нумеруются (рис. 3).

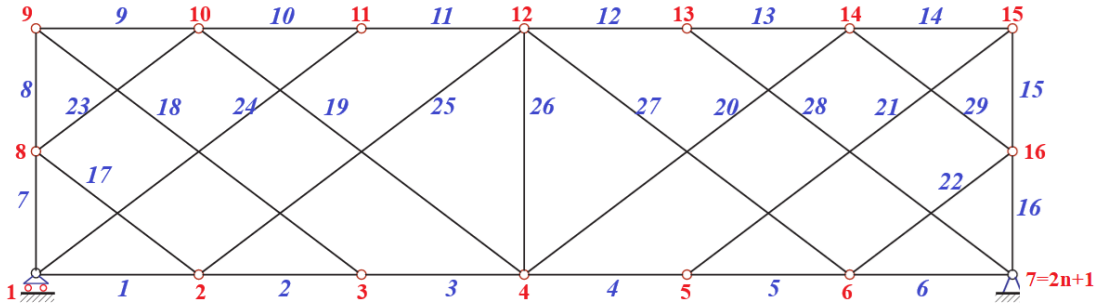


Рис. 3. Нумерация узлов и стержней, *n* = 3

Длина пролета конструкции $L_0 = 2an$. Координаты узлов имеют вид:

$$x_i = x_{i+2n+2} = a(i-1),\ y_i = 0,\ y_{i+2n+2} = 2h,\ i = 1,..,2n+1.$$
$$x_{2n+2} = 0, y_{2n+2} = h,\ x_{4n+4} = L_0, y_{4n+4} = h.$$

Усилия в стержнях определяются из системы уравнений в системе «Maple». В матричной форме система уравнений имеет вид: $\mathbf{GS} = \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – вектор правой части, в этот вектор записываются векторы узловых нагрузок; $\mathbf{G}$ – симметричная матрица размером $\nu \times \nu$. Элементы этой матрицы состоят из направляющих косинусов всех стержней фермы, $\mathbf{S}$ – искомый вектор усилий в стержнях. Длина этого вектора ν. В него входят и три вектора опорных реакции (две компоненты реакции неподвижной опоры, одна – вертикальная реакция опоры *A*). Матрица $\mathbf{G}$ рассчитывается по данным о координатах концов стержней фермы и структуре соединения стержней в узлы.

Распределение усилий по стержням фермы в случае равномерной нагрузки $P = 1$, приложенной к узлам нижнего пояса, представлено на рис. 4. Красным цветом отмечены растянутые стержни (положительные усилия), синим – сжатые. Условно принято, что толщина линий пропорциональна модулям усилий в соответствующих стержнях. Для указанных размеров при $n = 5$ наиболее сжатыми оказались два стержня в середине верхнего пояса.

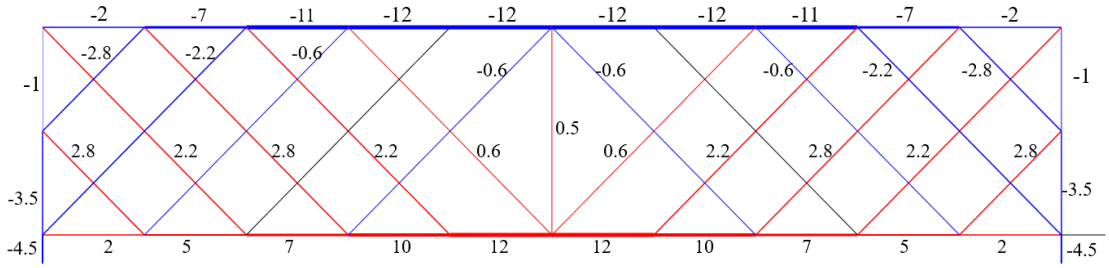


Рис. 4. Нагрузка на нижний пояс. Распределение усилий в стержнях, n = 5, a =2 м h = 1 м

С использованием метода индукции можно вывести формулы зависимости усилий в стержнях 1–4 (рис. 1) середины пролета от числа панелей в ферме. Последовательно рассчитывая это усилие из решения системы уравнений равновесия в случае сосредоточенной нагрузки на середину пролета (рис. 1), получаем последовательность:

$$S_1 = 0, -aP/(2h), -aP/h, -3aP/(2h), -2aP/h, -5aP/(2h), \ldots$$

Общий член этой последовательности находится из решения однородного рекуррентного уравнения $S_{1,k} = 2S_{1,k-1} - S_{1,k-2}$ и имеет вид: $S_I = -Pa(k-1)/(2h)$. Аналогично находятся и другие усилия из середины пролета, отмеченные на рис. 1:

$$S_2 = -Pc/(4h),\ S_3 = P/2,\ S_4 = Pa(k-1)/(2h).$$

Усилия в этих стержнях для нагрузки по узлам верхнего пояса (рис. 5) зависят от четности числа панелей k:

$$S_1 = -Pa(4k^2 - 4k - 1 - (-1)^k)/(4h),\ S_2 = -Pc(2 + (-1)^k)/(4h),$$
$$S_3 = P(-1)^k/2,\ S_4 = Pa(4k^2 - 4k + (-1)^k + 1)/(4h).$$

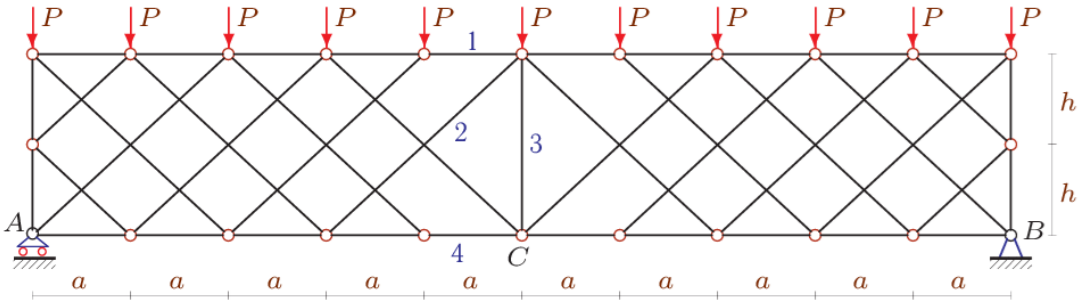


Рис. 5. Нагрузка по верхнему поясу, n = 5, k = 3

Усилия в стержнях от нагрузки по нижнему поясу (рис. 6):

$$S_1 = -Pa(4k^2 - 4k + (-1)^k + 1)/(4h),\ S_2 = Pc(-1)^k/(4h),$$
$$S_3 = P/2,\ S_4 = Pa(4k^2 - 4k - 1 - (-1)^k)/(4h).$$

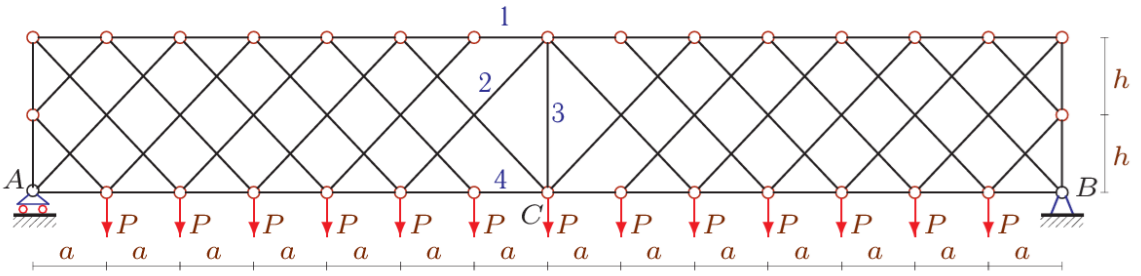


Рис. 6. Нагрузка на узлы нижнего пояса, $n = 7$, $k = 4$

Таким же образом с помощью метода индукции находятся реакции опор конструкции для произвольного числа. Для распределенной нагрузки по узлам верхнего пояса вертикальные реакции опор имеют вид: $Y_A = Y_B = P(4k-1)/2$. Аналогично, для нагрузки по нижнему поясу: $Y_B = Y_D = P\ (4k-3)\ /2$.

Прогиб. Расчет прогиба узла C фермы от действия нагрузки выполняется по интегральной формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_\alpha^1 S_\alpha^P l_\alpha / (EF), \tag{1}$$

где S_α^P – усилие от узловой внешней нагрузки в стержне с номером $\alpha = 1, \ldots, \nu-3$; S_α^1 – усилие в этом же стержне от действия единичной вертикальной силы на узел C; l_α – длина стержня. Значения усилий в трех жестких стержнях, моделирующих опоры, в формулу не входят. В случае нагрузки на *верхний* пояс (рис. 4) расчет прогиба для последовательности ферм с различным числом панелей дает следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= P(c^3 + 4h^3)/(4EFh^2),\\
\Delta_2 &= P(28a^3 + 5c^3 + 12h^3)/(4EFh^2),\\
\Delta_3 &= P(244a^3 + 13c^3 + 16h^3)/(4EFh^2),\\
\Delta_4 &= P(968a^3 + 25c^3 + 24h^3)/(4EFh^2),\ldots\\
\Delta_5 &= P(2680a^3 + 41c^3 + 28h^3)/(4EFh^2),\ldots
\end{aligned}$$

Оператор `rgf_findrecur` системы «Maple» находит коэффициенты общего члена этой последовательности:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)/(EFh^2), \tag{2}$$

где

$$C_1 = k\ (k-1)\ (10k^2 - 10k + 1)\ /6,\ C_2 = (2k^2 - 2k + 1)\ /4, C_3 = \left(6k + (-1)^k - 1\right)/4. \tag{3}$$

Если загружен *нижний* пояс фермы (рис. 5), то решение (2) отличается только одним коэффициентом C_3: $C_3 = \left(6k + (-1)^k - 3\right)/4$. При загружении фермы одной сосредоточенной силой в середине пролета решение (2) имеет более простые коэффициенты:

$$C_1 = k\ (2k-1)\ (k-1)\ /3,\ C_2 = (2k-1)\ /4,\ C_3 = 1.$$

График зависимости относительного прогиба от нагрузки, приложенной к нижнему поясу от числа панелей при $a = 2$ м, представлен кривыми на рис. 7. Относительный прогиб рассчитывается по формуле: $\Delta'_n = EF\Delta_n / (P_{sum}L_0)$, где $P_{sum} = P(2n-1)$. При $k = 2$ и h = 1,6 м кривая прогиба имеет локальный минимум.

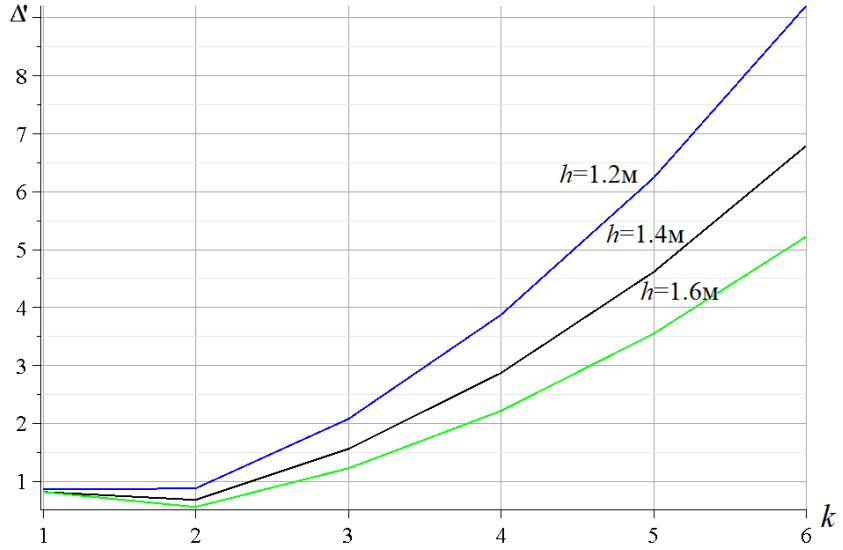


Рис. 7. Зависимость прогиба от числа панелей

Кривые прогиба имеют квадратичную асимптотику: $\lim_{k\to\infty} \Delta'_k / k^2 = 5a^2 / (48h^2)$. Такая же асимптотика и у прогиба в случае нагрузки на нижний пояс, при загружении фермы сосредоточенной силой в узле *C* асимптотика имеет вид: $\lim_{k\to\infty} \Delta'_k / k^2 = a^2 / (6h^2)$.

Смещение опоры. При загружении фермы левая подвижная опора смещается на величину, которая также рассчитывается по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_A = \sum_{\alpha=1}^{\nu-3} S_\alpha^1 S_\alpha^P l_\alpha / (EF),$$

где S_α^P – усилие внешней нагрузки, а усилие S_α^1 рассчитывается от единичной горизонтальной силы, приложенной к опоре *A*. Такая нагрузка создает усилия только в нижнем поясе, что несколько упрощает решение. В итоге смещение опоры от нагрузки по *верхнему* поясу:

$$\delta_A = Pa^2(8k^3 - 12k^2 + 10k + 3(-1)^k - 3) / (3hEF).$$

Для равномерной нагрузки фермы по узлам *нижнего* пояса смещение имеет вид:

$$\delta_A = Pa^2(8k^3 - 12k^2 - 2k - 3(-1)^k + 3) / (3hEF).$$

Заключение. В схеме плоской статически определенной фермы обнаружены случаи кинематической изменяемости конструкции. Для допустимого числа панелей найдены аналитические зависимости прогиба и смещения подвижной опоры под действием трех видов вертикальных узловых нагрузок. Методами компьютерной математики выведены формулы для реакций опор и усилий в нескольких характерных стержнях конструкции в зависимости от числа панелей. Показано, что решение имеет вид полиномов по числу панелей с коэффициентами, знаки которых зависят от числа панелей. Выполнен асимптотический анализ решений задачи о прогибе.

Библиографический список

1. Contreras-Bejarano O., Villalba-Morales J. D. On the use of the differential evolution algorithm for truss-type structures optimization // Applied Soft Computing. 2024. Vol. 161. P. 111372. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111372.

2. Ding S. L., Liu H. J., Wang C. S. Fatigue crack propagation evaluation of cruciform welded joints in steel truss girder suspension bridge using digital fatigue technique // Structures. 2026. Vol. 91. P. 112478. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.112478.

3. Chen X. [et al.]. Experimental study and numerical analysis of a novel concrete slab-steel truss composite joint for large-span railway cable-stayed bridges // Structures. 2026. Vol. 88. P. 111957. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.111957.

4. Plevris V., Ahmad A. Deriving analytical solutions using symbolic matrix structural analysis: P. 2. Plane trusses // Heliyon. 2025. Vol. 11. No. 4. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2025.e42372.

5. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019.

6. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 4 (39). С. 27–34.

7. Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Изгиб секторальной пластины: использование систем компьютерной алгебры // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2023. Т. 20. № 2. С. 376–384. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-2-376-384.

8. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // AIP Conference Proceedings. 2018. 1959. DOI: 10.1063/1.5034687.

9. Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Изгиб полубесконечной прямоугольной пластины: полиномиальное решение // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2026. Т. 23. № 1. С. 154–162. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-1-154-162.

10. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 101. Article No. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.

11. Селезнев К. К. Формулы прогиба и первой частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2026. № 2 (49). С. 71–79. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.49.2.006.

12. Селезнев К. К. Формула первой частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2025. № 3 (46). С. 33–40. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.46.3.004.

13. Luong C. L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. Vol. 113. Article No .11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4.

14. Астахов С. В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // Строительная механика и конструкции. 2024. № 4 (43). С. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003.

15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 108. Article No. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

16. Гавриленко А. Б., Кирсанов М. Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. № 2 (76). С. 11–17.

17. Kirsanov M. Diagrams of Statically Determinable Trusses Allowing Kinematic Variability // Stability Problems in Mechanics of Continua. Advanced Structured Materials. 2026. No. 260. https://doi.org/10.1007/978-3-032-31032-3_18.

References

1. Contreras-Bejarano O., Villalba-Morales J. D. On the use of the differential evolution algorithm for truss-type structures optimization // Applied Soft Computing. 2024. Vol. 161. P. 111372. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111372.

2. Ding S. L., Liu H. J., Wang C. S. Fatigue crack propagation evaluation of cruciform welded joints in steel truss girder suspension bridge using digital fatigue technique // Structures. 2026. Vol. 91. P. 112478. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.112478.

3. Chen X. [et al.]. Experimental study and numerical analysis of a novel concrete slab-steel truss composite joint for large-span railway cable-stayed bridges // Structures. 2026. Vol. 88. P. 111957. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.111957.

4. Plevris V., Ahmad A. Deriving analytical solutions using symbolic matrix structural analysis: P. 2. Plane trusses // Heliyon. 2025. Vol. 11. No. 4. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2025.e42372.

5. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019.

6. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural vibrations of a flat model of a composite truss // Structural Mechanics and Structures. 2023. No. 4 (39). Pp. 27–34 (in Russian).

7. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Bending of a sectoral plate: use of computer algebra systems // Bulletin of the St. Petersburg University of Railway Engineering. 2023. Vol. 20. No. 2. Pp. 376–384. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-2-376-384 (in Russian).

8. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // AIP Conference Proceedings. 2018. 1959. DOI: 10.1063/1.5034687.

9. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Bending of a semi-infinite rectangular plate: A polynomial solution // Bulletin of the St. Petersburg State University of Railway Engineering. 2026. Vol. 23. No. 1. Pp. 154–162. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-1-154-162 (in Russian).

10. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. No. 101. Article No. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.

11. Seleznev K. K. Formulas for the deflection and first frequency of natural oscillations of a flat truss with an arbitrary number of panels // Structural Mechanics and Structures. 2026. No. 2 (49). Pp. 71–79. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.49.2.006 (in Russian).

12. Seleznev K. K. Formula for the first frequency of natural oscillations of a flat truss with an arbitrary number of panels. Structural Mechanics and Structures. 2025. No. 3 (46). Pp. 33–40. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.46.3.004 (in Russian).

13. Luong C. L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2024. Vol. 113. Article No .11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4 (in Russian).

14. Astakhov S. V. Analytical assessment of the deflection of a rod model of a hipped roof frame // Structural Mechanics and Structures. 2024. No. 4 (43). Pp. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003 (in Russian).

15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 108. Article No. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

16. Gavrilenko A. B., Kirsanov M. N. Analytical assessment of the rigidity of a truss // Construction and reconstruction. 2018. No. 2 (76). Pp. 11–17 (in Russian).

17. Kirsanov, M. Diagrams of Statically Determinable Trusses Allowing Kinematic Variability // Stability Problems in Mechanics of Continua. Advanced Structured Materials. 2026. No. 260. https://doi.org/10.1007/978-3-032-31032-3_18.

CALCULATION OF A FLAT REGULAR TRUSS ALLOWING KINEMATIC CHANGE

M. N. Kirsanov [1], S. V. Astakhov [2]

National Research University "MPEI" [1, 2]
Moscow, Russia

[1] Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: (495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru
[2] PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: (495)362-77-00, e-mail: nccl@mail.ru

A condition is found under which a plane, regular, statically determinate lattice girder truss permits kinematic variability. A corresponding diagram of possible velocities of the structural nodes is presented. A formula is derived for the critical number of panels at which truss variability is possible. For unvariable diagrams, formulas are found for the dependence of the midspan deflection and the horizontal shear of the sliding support on the number of panels. It is assumed that all members have the same stiffness. Distributed nodal loads on the lower and upper chords, as well as a concentrated load on the node at midspan, are considered. To solve the problem, the Maple symbolic mathematics system and the induction method are used to generalize a series of solutions for trusses with different permissible numbers of panels to any case.

Keywords: possible velocities of truss nodes, instantly variable truss, plane truss, deflection, support shear, analytical solution, Maple, induction method, Maxwell – Mohr formula.

УДК 624.045.04
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.002

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОДОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ ПРИ ЗАДАННОЙ СХЕМЕ НАГРУЖЕНИЯ

А. В. Мищенко [1], М. С. Вешкин [2], О. Е. Бабенко [3]

Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище [1]
Россия, г. Новосибирск
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин) [1, 2, 3]
Россия, г. Новосибирск

[1] Д-р техн. наук, зав. кафедрой общепрофессиональных дисциплин, e-mail: mishchenko.av59@yandex.ru; проф. кафедры строительной механики, тел.: +7(383)266-33-80, e-mail: a.michshenko@sibstrin.ru
[2] Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(913)892-75-22, e-mail: m.veshkin@sibstrin.ru
[3] Студентка Института строительства, тел.: +7(950)117-09-01, e-mail: o.babenko11@sibstrin.ru

Рассматривается задача оптимизации продольного профиля слоев неоднородной балки, выполненных из различных квазиоднородных материалов. Геометрический размер (ширина или высота) слоя задан кусочно-линейной функцией формы с искомыми параметрами – значениями на границах расчетных участков. В качестве критерия оптимальности принято условие минимума потенциальной энергии упругой деформации слоистой системы при постоянстве суммарной стоимости материалов.

Рассмотрен численный пример определения оптимального профиля высоты внутреннего слоя в трехслойной балке. Кусочно-линейная функция формы определялась пятью варьируемыми параметрами – узловыми высотами на границах расчетных участков. С учетом симметрии балки число их было сокращено до трех. Получены пространственные графики интегральной функции энергии деформации в зависимости от двух варьируемых параметров – отношений узловых высот. Искомый проект балки отвечает точке глобального минимума энергетической функции. Оптимизация формы профиля высоты слоя позволила обосновать увеличение расчетной нагрузки в 1,5–2 раза при сохранении суммарной стоимости материалов слоистой системы.

Ключевые слова: слоистая балка, оптимальное проектирование, профилированный стержень, критерий минимума потенциальной энергии деформации, критерий равнонапряженности.

Введение. Одним из приоритетных направлений развития строительной отрасли является применение теории оптимального проектирования неоднородных профилированных элементов несущих конструкций [1–5]. В особенности это относится к нетиповым конструкциям уникальных зданий и сооружений, выполненных с использованием эксклюзивных расчетных схем [6–9]. Возможность изготовления и применения таких конструкций, имеющих нетривиальную геометрическую конфигурацию и неоднородную внутреннюю структуру, в настоящее время подкрепляется необходимым уровнем развития технологий изготовления новых строительных конструктивных материалов, слоистых составных структур, включая 3D-печать, наличием способов раскроя и механической (физической) обработки составных структурных элементов системы.

Вопросам расчета и оптимизации неоднородных конструктивных элементов посвящены работы [4, 10, 11]. Наибольшие эффекты в повышении несущей способности, жесткости, устойчивости и ряда других показателей достигаются рациональной компоновкой поперечных сечений, подбором параметров слоистой структуры, продольным и поперечным профилированием геометрических размеров наружных и внутренних слоев [3, 10]. Номенклатура материалов, используемых в структурно неоднородных конструкциях, достаточно широка и может включать металлы и сплавы, бетоны, конструкционные пластмассы, древесину и древесные композиты, искусственные композиты и т. п. [5]. Определение рационального местоположе-

© Мищенко А. В., Вешкин М. С., Бабенко О. Е., 2026

ния материалов в слоистой структуре позволяет достичь главной цели оптимизации – эффективное использование физических свойств материалов и снижение материалоемкости конструкции в целом.

В данной статье рассматривается оптимизация слоисто-неоднородного стрежня с применением продольного кусочно-линейного профилирования слоев. Выбор данного способа профилирования продиктован стремлением выполнить оптимизацию геометрической конфигурации с помощью форм, обладающих наименьшей трудоемкостью при изготовлении. Более сложные непрерывно-нелинейные формы в силу усложнения технологии изготовления могут привести к утрате существенной доли полученной экономии ресурсов.

На рис. 1 показаны различные варианты продольного профиля неоднородных стержней с переменными геометрическими характеристиками.

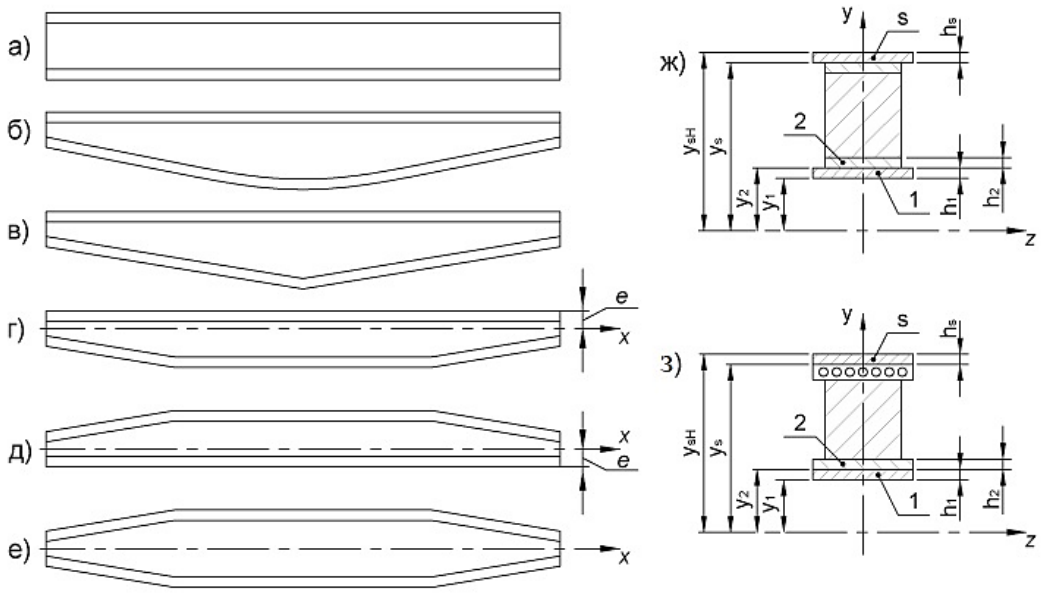


Рис. 1. Схемы профилирования стержней (а–е). Варианты поперечных сечений (ж, з)

Постановка задачи. Объектом исследования является неоднородный стержень, содержащий s слоев. В системе координат $x\ y\ z$ ось x является продольной отсчетной осью, а плоскость $x\ y$ – плоскостью симметрии стержня. Структурные элементы стержня (слои, фазы) выполнены из различных квазиоднородных линейно-упругих материалов со значениями физических характеристик одинаковых порядков, что позволяет применить для стержня модель Тимошенко. Более сложные модели, основанные на различного рода нелинейных аппроксимациях полей деформации [12–14], предназначены для случаев: а) относительно коротких стержней; б) выявления напряженно-деформированного состояния в зонах локализации внешних воздействий, узловых соединений и т. п.; в) использования составных неоднородных структур с отличиями в физико-механических характеристиках на два и более порядков. Принятая в данной статье модель обладает достаточной инженерной точностью для выявления напряженного состояния в основной части конструктивного элемента.

Будем считать, что в стержне обеспечены условия идеального без проскальзывания межслойного контакта [10]. На рис. 1 показаны некоторые варианты боковых проекций стержней и типов поперечных сечений. k-й слой ($k \in [1, s]$) имеет прямоугольную форму поперечного сечения шириной b_k, высотой h_k, границами y_k, y_{k+1}, площадью A_k, статическим моментом S_k и моментом инерции I_k относительно оси z. Материал k-го слоя характеризуется модулями упругости E_k, G_k. На стержень действует статическая нагрузка в плоскости $y\ x$.

Уравнения, связывающие интегральные силовые факторы N, M, Q с обобщёнными деформациями, записываются в виде [10]:

$$\begin{cases} D_A\varepsilon_0 - D_S\kappa = N, \\ -D_S\varepsilon_0 + D_I\kappa = M, \\ D_Q\gamma_0 = Q, \end{cases} \tag{1}$$

где ε_0, κ, γ_0 – соответственно продольная деформация, кривизна, осредненный сдвиг;

$$\left[D_A, D_S, D_I\right](x) = \sum_{k=1}^{s} E_k \iint_{A_k} [1, y, y^2]\, dA - \tag{2}$$

жесткостные характеристики сечения, обусловленные продольными деформациями; D_Q – жесткость сечения при сдвиге.

На основе физических зависимостей (1) из условий равновесия в работах [15, 18] получены формулы для нормальных σ_x и касательных напряжений τ_{yx} в *k*-м слое:

$$\sigma_k^{(M)} = -M\,\frac{E_k(yD_A - D_S)}{D}, \quad \sigma_k^{(N)} = N\,\frac{E_k(D_I - yD_S)}{D}, \tag{3}$$

$$\tau_k^{(Q)} = \frac{Q}{b_k}\,\frac{D_A D_S^{sec} - D_S D_A^{sec}}{D}. \tag{4}$$

Здесь $D = D_I D_A - D_S^2$ – обобщенная жесткость сечения, а

$$\begin{aligned} D_A^{sec}(x,y) &= E_k \int_{y}^{y_{k+1}(x)} b_k(x,y)\,dy + \sum_{j=k+1}^{s} E_j A(x)_j, \\ D_S^{sec}(x,y) &= E_k \int_{y}^{y_{k+1}(x)} b_k(x,y)\,y\,dy + \sum_{j=k+1}^{s} E_j S_j(x) - \end{aligned} \tag{5}$$

жесткостные характеристики верхней сдвигаемой части поперечного сечения. В случае если сечение является симметричным относительно оси *z*, имеем $D_S = 0$.

Отметим ряд важных положений и зависимостей для жесткостных характеристик и напряжений в слоистых стержнях при изменении отсчетной системы координат. Для этого выберем вспомогательную систему координат $x_1\ y_1\ z_1$, полученную параллельным переносом исходной системы на расстояние Δ_y в направлении оси *y*. Преобразовав координату $y_1 = y - \Delta_y$, запишем на основе (2) жесткостные характеристики в осях $x_1\ y_1\ z_1$:

$$D_{A_1} = D_A, \quad D_{S_1} = D_S - \Delta_y D_A, \quad D_{I_1} = D_I - 2\Delta_y D_S + \Delta_y^2 D_A. \tag{6}$$

Отсюда после преобразований получим обобщенную жесткость:

$$D(\Delta_y) = D_{I_1} D_{A_1} - D_{S_1}^2 = D_I D_A - D_S^2 = const, \tag{7}$$

инвариантную к величине параллельного переноса Δ_y. Можно показать, что наибольшего значения она достигает в главных осях жесткости, для которых $D_{S_1} = 0$. Положение главных осей определяется смещением исходных осей на величину:

$$\Delta_y = \frac{D_S}{D_A}. \tag{8}$$

Система (1), записанная в главных осях, распадается на независимые уравнения, описывающие отдельно изгиб, растяжение и сдвиг. Понятие главных осей жесткости обобщает понятие *главных осей инерции* на неоднородные сечения.

При отсутствии продольных сил нормальные напряжения при поперечном изгибе $\sigma_k^{(M)}$, записанные на основе (1) в новых осях с учетом (6), также будут инвариантными к параллельному переносу:

$$\sigma_k^{(M)}(\Delta_y) = \sigma_k^{(M)}(0) = const. \tag{9}$$

Данное обстоятельство позволяет считать эквивалентными в расчетном плане балки, имеющие одинаковые поперечные размеры слоев, независимо от величины (в том числе переменной $\Delta_y(x)$) привязки центра жесткости (8) к отсчетной оси *x* (рис. 1г, д, е). Отсюда следует, что для различных форм профилирования (г), (д), (е) целесообразно использовать расчетную схему, обладающую наименьшей вычислительной трудоемкостью. В рассматриваемом случае это симметричная схема (е). Описанию данных расчетных схем ниже будет уделено дополнительное внимание.

Для задания узлов аппроксимации профиля слоя в стержне длиной *L* выделим *m* расчетных участков с длинами l_j $(j = 1, 2, ..., m)$ при соблюдении $\sum l_j = L$. Координаты границ участков определяются формулой $x_j = x_{j-1} + l_j$ при $x_0 = 0$. Кусочно-линейное изменение поперечного размера *k*-го слоя ($g_k \in [b, h]_k$) на *j*-м расчетном участке представим в виде:

$$g_k(x) = g_{k,j-1}\left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right) + g_{k,j}\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad x \in \left[x_{j-1}, x_j\right], \tag{10}$$

где $g_{k,j}$ – значение геометрического параметра профиля *k*-го слоя в *j*-м узле аппроксимации. Согласно (10) имеем $g_k(x_{j-1}) = g_{k,j-1}$, $g_k(x_j) = g_{k,j}$.

В стержнях с преимущественным изгибом наиболее эффективным является профилирование ширины наружных слоев и (или) высоты внутреннего слоя.

Границы слоев в направлении оси *y* (рис. 1ж) определим согласно последовательности:

$$y_{k+1} = y_k + h_k, \quad k = 1, ..., s, \tag{11}$$

с заданием какой-либо одной из них, что обеспечивает привязку слоистого пакета к системе координат. Для стержня с плоской нижней гранью (рис. 1д) следует задать $y_0 = -e$, а для плоской верхней (рис. 1в, г) – $y_{s+1} = e$, где *e* – некоторый заданный геометрический параметр (привязка). Для структуры, показанной на рис. 1е, требуется обеспечить условие симметрии $y_k = -y_{s+2-k}$ $(k = 1, ..., s_0)$. При четном числе слоев *s* принять $s_0 = s/2$, $y_{s_0+1} = 0$ на отсчетной оси, а при нечетном – $s_0 = (s+1)/2$.

В качестве критерия оптимальности конфигурации неоднородного стержня используем условие минимума энергии деформации [10, 11, 16]:

$$W(P) = \frac{1}{2}\sum_j \int_{l_j} \left[M_j \kappa_j + Q_j \gamma_{0j} + N_j \varepsilon_{0j}\right] dx \to \min, \tag{12}$$

где P – набор геометрических параметров g в узлах аппроксимации профиля; $M_{j,}\, Q_j, N_j$ – усилия на j-м расчетном участке; $\kappa_j, \gamma_{0j}, \varepsilon_{0j}$ – соответствующие им обобщенные деформации, согласно (1) определяемые по выражениям:

$$\varepsilon_{0j} = \frac{N \cdot D_I + M \cdot D_S}{D}, \quad \kappa_j = \frac{M \cdot D_A + N \cdot D_S}{D}, \quad \gamma_0 = \frac{Q}{D_Q}. \tag{13}$$

Принимая симметричную относительно продольной оси схему неоднородного стержня (рис. 1е), при $N \equiv 0$ получим критерий (12) в виде:

$$W(P) = \frac{1}{2}\sum_j \int_{l_j} \left(\frac{M_j^2}{D_I} + \frac{k_\tau Q_j^2}{D_Q} \right) dx \to \min. \tag{14}$$

Для замыкания постановки оптимизационной задачи сформулируем ограничение на постоянство стоимости материалов неоднородного стержня. Данное условие должно отражать факт равенства стоимостей стержней с различными формами профилирования. Используем в качестве них стоимость исходной формы неоднородного s-слойного стержня постоянного по длине сечения (рис. 1а):

$$C_0 = L\sum_{k=1}^{s} c_k b_k H_k^0, \tag{15}$$

и стоимость неоднородного стержня с кусочно-линейным изменением высоты внутреннего слоя с номером k_0 согласно аппроксимации (10):

$$C = L\sum_{k=1}^{k_0-1} c_k b_k H_k^0 + c_{k_0} b_{k_0} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \left(H_{k_0,j-1} + H_{k_0,j} \right) l_j + L \sum_{k=k_0+1}^{s} c_k b_k H_k^0, \tag{16}$$

где m – число расчетных участков в балке; c_k – удельная стоимость материала k-го слоя.

Приравнивая стоимости (15) и (16), получим условие связи узловых высот $H_{k_0,j}$ ($j = 0,..,m$) k_0-го слоя:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{H_{k_0,j-1}}{H_{k_0}^0} + \frac{H_{k_0,j}}{H_{k_0}^0} \right) \frac{l_j}{L} = 1. \tag{17}$$

Аналогичное условие получится для балки с профилируемой шириной слоя. Сформулированная задача (14), (17) условной энергетической оптимизации позволяет определить рациональный кусочно-линейный профиль (10), обеспечивающий минимальные энергетические затраты деформируемой системы.

Численное исследование. Рассмотрим 3-слойную балку с двумя консолями, загруженную равномерно распределённой нагрузкой (рис. 2а). Исходный неоптимизированный проект имеет слои призматической формы одинаковой ширины $b_1 = b_2 = b_3 = b_0$ с высотами $H_1^0 = H_3^0 = 0{,}125 H_2^0$ (рис. 2г). Модули упругости материалов заданы в виде $E_1 = E_2 = 1{,}25 E_0$, $E_2 = E_0$.

Поставим задачу нахождения оптимальной кусочно-линейной формы профилирования высоты внутреннего слоя $H_2(x)$ при сохранении всех других геометрических параметров, характеристик материалов и нагрузки, принятых в исходном проекте. В качестве критерия оптимальности примем энергетический критерий (14) при условии (17).

Учитывая расчетную эквивалентность форм профилирования (г), (д), (е) на рис. 1 при заданных исходных данных, используем симметричную расчетную схему (е). Искомый закон профилирования высоты слоя запишем в виде (10):

$$h_{j,2}(x) = h_{2,j-1}\left(1 - \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}\right) + h_{2,j}\frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}}, \quad x \in \left[x_{j-1}, x_j\right]. \tag{18}$$

Границы слоёв по поперечной координате *y* находим с учетом симметрии:

$$y_{j,2} = -0,5h_{j,2}, \quad y_{j,3} = 0,5h_{j,2}, \quad y_{j,1} = y_{j,2} - h_{j,1}, \quad y_{j,4} = y_{j,3} + h_{j,3}. \tag{19}$$

Для модулей упругости материала E_k и наибольшего нормального напряжения $\sigma_{x,k}$ в *k*-м слое введем относительные величины:

$$e_k = \frac{E_k}{E_0}, \quad s_k(x) = \frac{1}{\sigma_{k,adm}}\max_y\left|\sigma_{x,k}(x,y)\right|, \tag{20}$$

где $\sigma_{k,\mathrm{adm}}$ – величина предельного напряжения для материала *k*-го слоя.

С учетом симметрии назначим на левой половине балки три расчетных участка. Запишем их длины и координаты в виде:

$$l_j = [0,15;\ 0,175;\ 0,175]L, \quad x_j = [0;\ 0,15;\ 0,325;\ 0,5]L. \tag{21}$$

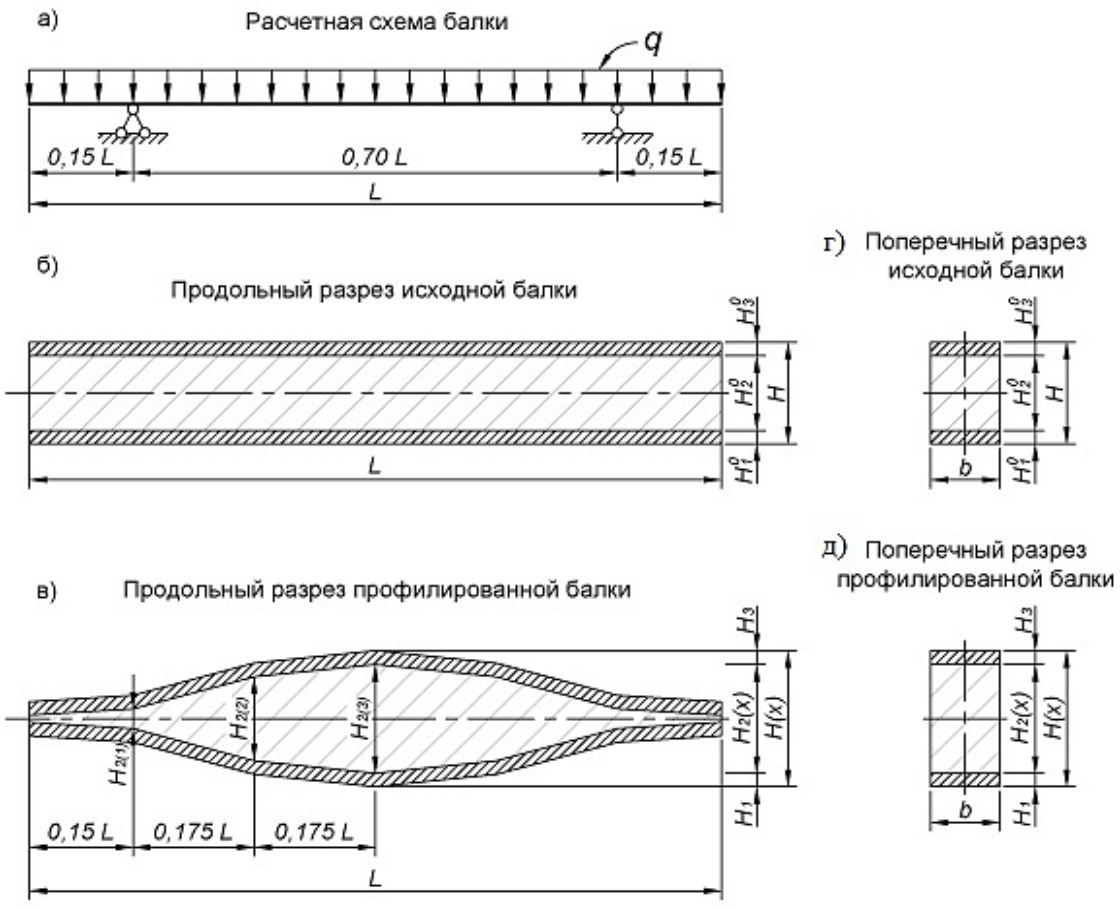


Рис. 2. Расчетная схема (а), продольные профили (б, в),
поперечные сечения исходной (г) и профилированной (д) балок

Приняв высоту слоя в начальном узле $H_{2(0)}$ равной нулю, искомыми будем считать высоты в узлах $j=1,2,3$. В качестве безразмерных *варьируемых параметров* примем отношения расчетных узловых высот к исходной высоте призматического профиля:

$$p_1=\frac{H_{2(1)}}{H_2^0},\ p_2=\frac{H_{2(2)}}{H_2^0},\ p_3=\frac{H_{2(3)}}{H_2^0}. \tag{22}$$

Условие связи узловых высот (12) с учетом (13) примет вид:

$$p_1\left(\overline{l}_1+\overline{l}_2\right)+p_2\left(\overline{l}_2+\overline{l}_3\right)+p_3\overline{l}_3=1, \tag{23}$$

где $\overline{l}_j=l_j/L$ – относительная длина *j*-го расчетного участка.

Подставив в (23) длины расчетных участков (21), получим условие связи варьируемых параметров:

$$0{,}325p_1+0{,}35p_2+0{,}175p_3=1. \tag{24}$$

Для большинства типов балок потенциальная энергия (14), накапливаемая в балке, в основном определяется изгибающими моментами. Доля энергии, зависящей от поперечной силы, составляет 3–5 %, поэтому в данном исследовании представим критерий (14) без ее учета в виде:

$$W(\mathbf{P})=\frac{1}{2}\sum_j\int_{l_j}\frac{M_j^2(x)}{D_I(\mathbf{P},x)}dx\to\min. \tag{25}$$

Вектор независимых варьируемых параметров состоит из двух элементов $\mathbf{P}=[p_1,p_2]$, а третий параметр p_3, отвечающий за изменение узловой высоты $H_{2(3)}$, определяется по условию (24):

$$p_3=5{,}714-1{,}857p_1-2p_2. \tag{26}$$

Записав для расчетных участков ($j=1,2,3$) выражения изгибающих моментов:

$$\begin{aligned}&M_1(x)=-\frac{qL^2}{2}\overline{x}^2,\quad x\in\left[x_0,x_1\right],\\&M_2(x)=M_3(x)=\frac{qL^2}{2}\overline{x}^2\left[(\overline{x}-0{,}15)-\overline{x}^2\right],\quad x\in\left[x_1,x_3\right],\end{aligned} \tag{27}$$

и изгибную жесткость $D_{I,j}(p_1,p_2,x)$ (2) с учетом (18), (19), получим:

$$D_{I,j}(p_1,p_2,x)=\sum_{k=1}^{3}E_kb_k\left.\frac{y^3}{3}\right|_{y_{j,k}(p_1,p_2,x)}^{y_{j,k+1}(p_1,p_2,x)}. \tag{28}$$

Дальнейшие расчёты, включающие преобразование функций жесткостных характеристик, нахождение интегралов (25), зависящих от параметров, и визуализацию результатов, выполним в системе символьных математических вычислений «Maple 2015».

На рис. 3 показан пространственный график энергетической функции, имеющей точку минимума, согласно критерию (25), соответствующей оптимальному проекту. Учитывая распределение усилий в балке, оптимальные значения варьируемых параметров должны удовлетворять условиям $p_1<p_2<p_3$. В областях плоскости p_1-p_2 с нарушением данного условия,

например, при $p_1 \to 0{,}8$, $p_2 \to 2{,}0$ и получении, согласно (26), $p_3 \to 0{,}229$, наблюдается значительный рост энергии деформации W, что говорит о неоптимальности таких решений.

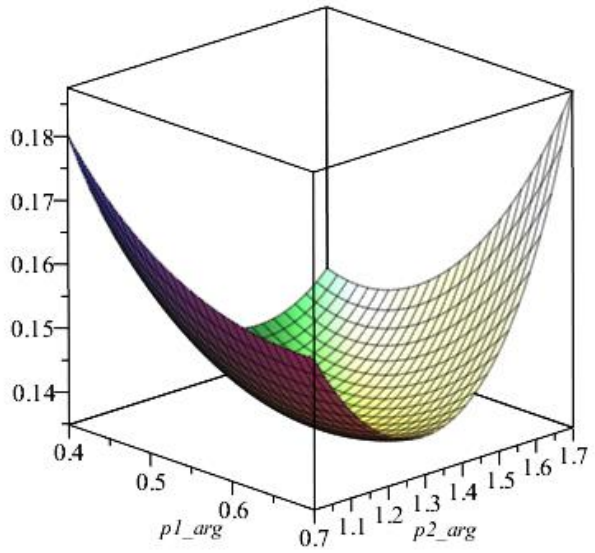


Рис. 3. Поверхность потенциальной энергии деформации балки, $W \cdot 10^2$ в диапазонах варьируемых параметров $0{,}4 \le p_1 \le 0{,}7$ и $1{,}0 \le p_2 \le 1{,}7$

Записав условия минимума функции (25)

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial p_2} = 0, \tag{29}$$

имеем искомое оптимальное решение $p_1^* = 0{,}535$, $p_2^* = 1{,}411$, $p_3^* = 1{,}900$.

На рис. 4 показан график $h_2(x, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ оптимального профилирования высоты внутреннего слоя (линия 1). Следует отметить, что согласно условиям (17) и (24) расход материалов (стоимости) на балку сохранен на уровне исходного проекта (линия 0).

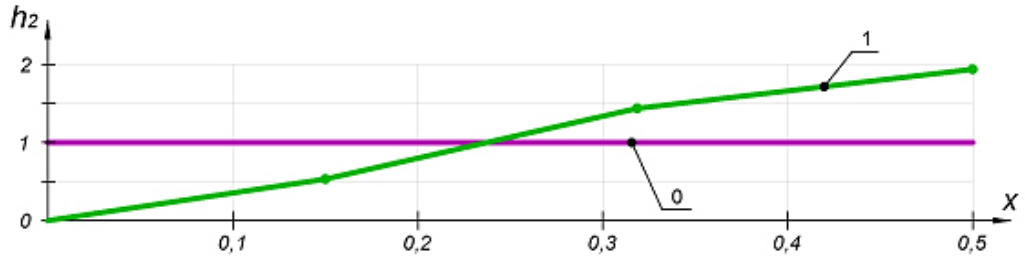


Рис. 4. Оптимальный профиль $h_2(x)$ высоты внутреннего слоя (линия 1), исходный профиль $h_2(x) = const$ (линия 0)

Для определения прочностных показателей оптимальной балки вычислим функцию нормального напряжения (25) на границе $y = y_s(x)$ профилируемого слоя:

$$\sigma_{x,k}(x, y_3) = -M(x) E_2 \frac{y_3(x)}{D_I(x)} = \frac{qL^2}{b_0 H_0^2} \bar{\sigma}_{x,k}(x, y_3), \tag{30}$$

где $\bar{\sigma}$ – безразмерное напряжение.

На рис. 5 показаны графики безразмерных относительных напряжений $s_2(x, y_3)$ для различных проектов балок: 1 – для исходного проекта балки с непрофилированным слоем;

2 – для оптимальной балки. Последний наглядно иллюстрирует снижение уровня максимальных напряжений $\max\limits_{x} s_2(x, y_3)$ за счет перераспределения материала во втором слое.

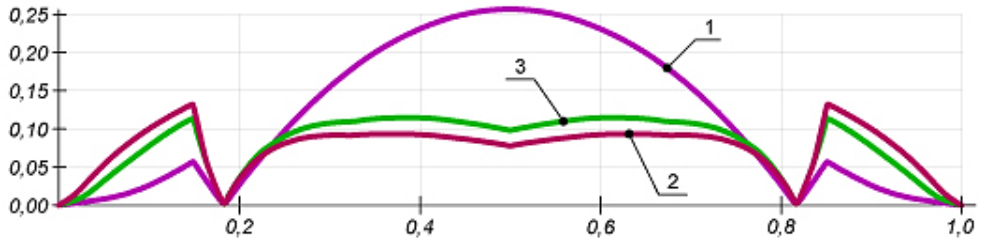


Рис. 5. Графики безразмерных нормальных напряжений на границе внутреннего слоя $s_2(x, y_3)$:
1 – для исходной призматической балки;
2 – для профилируемой балки по критерию минимума потенциальной энергии деформации;
3 – для профилируемой балки по критерию выравнивания напряжений

Для профилированной балки характерно несовпадение координаты максимального изгибающего момента с координатой экстремума напряжения в пролете:

$$\frac{\partial s_k(x, y_3)}{\partial x} = 0 \;\Rightarrow\; x = x_*, \tag{31}$$

которая составила $x_* = 0,37L$. Максимальное напряжение $\max\limits_{x} s_2(x, y_3) = 0,13$ действует в опорном сечении. По сравнению с исходной балкой имеем снижение в 2 раза. В силу пропорциональности напряжений нагрузке констатируем, что оптимизация профиля привела к возможности повышения нагрузки в 2 раза.

Отметим, что, как показано в ряде работ, например [11], энергетический критерий в вариационной постановке приводит к выравниванию напряжений на поверхности слоя. В данной постановке при задании *формы профилирования* (любой, в том числе кусочно-линейной) это не выполняется. Наблюдается лишь сближение уровней напряжений в двух локальных максимумах – на опоре и в точке экстремума, что является весьма ценным проявлением критерия и обеспечивает значительный рост несущей способности.

Показатели проекта могут быть дополнительно улучшены. С этой целью применено варьирование параметров p_1, p_2 по условию выравнивания напряжений $s_k(x)$ на опоре и в пролете балки. Результат расчета отражает график 3 на рис. 5, которому соответствуют значения параметров $p_1 = 0,592$, $p_2 = 1,386$, $p_3 = 1,843$ и величина максимального напряжения $\max\limits_{x} s_2(x, y_3) = 0,115$. Это позволяет повысить нагрузку в 2,2 раза по сравнению с исходной балкой.

Отметим еще одно обстоятельство, касающееся расположения опасных уровней напряжений в слоисто-неоднородных стержнях. Независимо от того, какие геометрические параметры варьируются, опасные уровни по координате y могут располагаться на любой из межслойных границ [10]. Это определяется тремя факторами: деформированным состоянием в слоистой структуре, характеристиками упругости и прочности материалов.

Выводы. Применение интегрального энергетического критерия в сочетании с заданием параметрической формы профилирования слоев и условия постоянства стоимости материалов системы позволяет свести вариационную задачу к задаче параметрической оптимизации.

Применение кусочно-линейной формы дает возможность построить методику оптимизации неоднородного стержня, которая: а) позволяет обосновать увеличение несущей способности в 1,5–2 раза; б) пригодна для создания проектов с невысокой трудоемкостью изготовления.

Результаты оптимизации системы по критерию минимума потенциальной энергии деформации коррелируют с инженерными методами выравнивания расчетных усилий и напряжений.

Библиографический список

1. Тамразян А. Г., Алексейцев А. В. Современные методы оптимизации конструктивных решений для несущих систем зданий и сооружений // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. Вып. 1. С. 12–30. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.1.12-30.

2. Перельмутер А. В. Задачи синтеза в теории сооружений (краткий исторический обзор) // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 2 (55). С. 70–106.

3. Ляхович Л. С., Перельмутер А. В. Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. Т. 10, № 2. С. 14–23.

4. Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Оптимизация слоисто-неоднородных рам на основе кусочно-непрерывных условий прочности // Актуальные вопросы строительства: материалы V Всерос. науч.-техн. конф., 2012. С. 69–74.

5. Баничук Н. В., Кобелев В. В. Рикардс Р. Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.

6. Особенности проектирования и возведения. Высотные здания и другие уникальные сооружения Китая [науч. ред. П. А. Акимов и др.]: пер. с кит. М.: АСВ, 2013. 808 с.

7. Колчунов В. И., Клюева Н. В., Андросова Н. Б., Бухтиярова А. С. Живучесть зданий и сооружений при запроектных воздействиях. М.: АСВ, 2014. 208 с.

8. Нойферт Э. Строительное проектирование: пер. с нем. 42-е изд., перераб. и доп. М.: Архитектура-С, 2020. 612 с.

9. Катюшин В. В. Здания с каркасами из стальных рам переменного сечения (расчёт, проектирование, строительство). 2-е изд., перераб. и доп. М.: АСВ, 2018. 1071 с.

10. Мищенко А. В. Методы расчета и рационального проектирования структурно неоднородных стержней. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2025. 144 с.

11. Мищенко А. В., Вешкин М. С. Применение критерия минимума энергии деформации в задачах рационального профилирования неоднородных стержней // Известия вузов. Строительство. 2025. № 5. С. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-797-5-15-29.

12. Carrera E., Filippi M., Zappino E. Laminated beam analysis by polynomial, trigonometric, exponential and zig-zag theories // European Journal of Mechanics-A/Solids. 2013. Vol. 41. Pp. 58–69. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.02.006.

13. Giunta G., Belouettar S., Carrera E. Static analysis of laminated beams via a unified formulation // Composite Structures. 2011. Vol. 94, Iss. 1. Pp. 75–83. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.015.

14. Vidal P., Polit O. Assessment of the refined sinus model for the non-linear analysis of composite beams // Composite Structures. 2009. Vol. 87, Iss. 4. Pp. 370–381. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1359836811001090.

15. Мищенко А. В. Напряженное состояние структурно-неоднородных стержней из разномодульных материалов при термосиловом воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 4. С. 43–52.

16. Юрьев А. Г. Естественный фактор оптимизации топологии конструкций // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. 2013. № 5. С. 46–48.

17. Мищенко А. В. Энергетическая оптимизация структурно-неоднородной двухшарнирной рамы // Строительная механика и конструкции. 2022. № 3 (34). С. 71–81. DOI: 10.36622/VSTU.2022.34.3.005

18. Волков Ф. С., Мищенко А.В. Анализ напряженного состояния пространственного неоднородного стержня // Труды НГАСУ. 2026. Т. 29, № 1 (99). С. 20–39. DOI: 10.32683/1815-5987-2026-29-99-1-20-39.

References

1. Tamrazyan A. G., Alekseytsev A. V. Modern methods for optimizing structural solutions for load-bearing systems of buildings and structures. Bulletin of Moscow State University of Civil Engineering (MGSU). Vol. 15. Issue 1. 2020. Pp. 12–30. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.1.12-30.

2. Perelmuter A. V. Synthesis problems in the theory of structures (a brief historical review). Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. No. 2(55). 2016. Pp. 70–106.

3. Lyakhovich L. S., Perelmuter A. V. Some issues of optimal design of building structures. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. Vol. 10. No. 2. 2014. Pp. 14–23.

4. Mishchenko A. V., Nemirovsky Yu. V. Optimization of layered heterogeneous frames based on piecewise continuous strength conditions. Current Issues in Construction: Proc. of the 5th All-Russian Scientific and Technical Conf. 2012. Pp. 69–74.

5. Banichuk N. V., Kobelev V. V., Rikards R. B. Optimization of Structural Elements from Composite Materials. Moscow: Mashinostroenie, 1988. 224 p.

6. Akimov P. A. et al. Design and Construction Features. High-Rise Buildings and Other Unique Structures of China. Translated from Chinese. Moscow: ASV, 2013. 808 p.

7. Kolchunov V. I., Klyueva N. V., Androsova N. B., Bukhtiyarova A. S. Survivability of Buildings and Structures under Beyond Design Factor Impacts. Moscow: ASV, 2014. 208 p.

8. Neufert E. Construction Design: Translated from German. 42nd ed., revised and enlarged. Moscow: Arkhitektura-S, 2020. 612 p.

9. Katyushin V. V. Buildings with Frames Made of Steel Frames of Variable Cross-Section (Calculation, Design, Construction). 2nd ed., revised and enlarged. Moscow: ASV, 2018. 1071 p.

10. Mishchenko A. V. Methods of Calculation and Rational Design of Structurally Heterogeneous Rods. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2025. 144 p.

11. Mishchenko A. V., Veshkin M. S. Application of the minimum strain energy criterion in problems of rational profiling of non-uniform bars. News of universities. Construction. No. 5. 2025. Pp. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-797-5-15-29.

12. Carrera E., Filippi M., Zappino E. Laminated beam analysis by polynomial, trigonometric, exponential and zig-zag theories. European Journal of Mechanics-A/Solids. Vol. 41. 2013. Pp. 58–69. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2013.02.006.

13. Giunta G., Belouettar S., Carrera E. Static analysis of laminated beams via a unified formulation. Composite Structures. Vol. 94. Issue 1. 2011. Pp. 75–83. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.07.015.

14. Vidal P., Polit O. Assessment of the refined sinus model for the non-linear analysis of composite beams. Composite Structures. Vol. 87. Issue 4. 2009. Pp. 370–381. https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1359836811001090.

15. Mishchenko A. V. Stress state of structurally inhomogeneous rods made of materials with different modulus under thermal and force action. Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions. No. 4. 2016. Pp. 43–52.

16. Yuryev A. G. Natural factor in optimization of structural topology. Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov. No. 5. 2013. Pp. 46–48.

17. Mishchenko A. V. Energy optimization of a structurally inhomogeneous double-hinged frame. Structural Mechanics and Constructions. No. 3(34). 2022. Pp. 71–81. DOI: 10.36622/VSTU.2022.34.3.005

18. Volkov F. S., Mishchenko A. V. Analysis of the stress state of a spatial inhomogeneous rod. Proceedings of NGASU. Vol. 29. No. 1(99). 2026. Pp. 20–39. DOI: 10.32683/1815-5987-2026-29-99-1-20-39.

DETERMINING OF THE OPTIMAL LONGITUDINAL CONTOUR OF A LAYERED INHOMOGENEOUS BEAM FOR A GIVEN LOADING SCHEME

A. V. Mishchenko [1], M. S. Veshkin [2], O. E. Babenko [3]

Novosibirsk Higher Military Command Order of Zhukov School [1]
Russia, Novosibirsk
Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) [1, 2, 3]
Russia, Novosibirsk

[1] Dr. of Technical Sciences, Head of the Department of General Professional Disciplines, e-mail: mishchenko.av59@yandex.ru; Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(383)266-33-80, e-mail: a.michshenko@sibstrin.ru
[2] PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(913)892-75-22, e-mail: m.veshkin@sibstrin.ru
[3] Student of the Institute of Construction, tel.: +7(950)117-09-01, e-mail: o.babenko11@sibstrin.ru

This paper considers the problem of optimizing the longitudinal contour of layered inhomogeneous beam made of various quasi-homogeneous materials. The geometric dimension – the width or height of a layer is specified by a piecewise linear shape function with the desired parameters – the values at the boundaries of the design sections. The optimality criterion is the condition of minimum potential elastic deformation energy of the layered system while maintaining the total cost of materials.

A numerical example of determining the optimal height profile of the inner layer in a three-layer beam is considered. The piecewise linear shape function was determined by five variable parameters – nodal heights at the boundaries of the design sections. Taking into account the symmetry of the beam, this number was reduced to three. Spatial graphs of the integral function of deformation energy are obtained as a function of two variable parameters – the ratios of nodal heights. The desired beam design corresponds to the point of the global minimum of the energy function. Optimization of the layer height profile shape allowed us to justify a 1.5 to 2-fold increase in the design load while maintaining the total cost of materials in the layered system.

Keywords: layered beam, optimal longitudinal contour, profiled bar, minimum potential deformation energy criterion, equal stress criterion.

УДК 69.04
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.003

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ КОНСТРУКЦИЙ В ВИДЕ ПАРАЛЛЕЛОГРАММНЫХ ПЛАСТИН И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ РАСЧЁТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ

А. А. Черняев [1]

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева [1]
Россия, г. Орел

[1] Канд. техн. наук, доц. кафедры промышленного и гражданского строительства, тел.: 8(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru

Предложен приближенный способ решения прямых и обратных задач устойчивости для случаев шарнирного опирания и жесткого защемления контура с использованием приема моделирования геометрического контура параллелограммных пластин конформными радиусами. Приводятся основные положения и зависимости предложенного подхода. Рассматриваются тонкие упругие пластины, в рамках технической теории применимы гипотезы Кирхгофа – Лява. Приведены математические и графические зависимости критического усилия с конформными радиусами для упругих тонких пластин. На примере задачи равномерного всестороннего сжатия показаны основные возможности такого подхода к расчету пластин сложных форм на примере параллелограммных. Показаны решения прямых задач на определение критического усилия и обратных задач на определение геометрии на заданную критическую силу. Исследовано влияние выбора геометрических преобразований и расчетных функций на точность результатов решения. На численных примерах проведена оценка полученных результатов с решениями по методу конечного элемента в программном комплексе «SCAD Office».

Ключевые слова: параллелограммные пластины, устойчивость, критическая сила, конформные радиусы, геометрическое моделирование, конструкции.

Введение. Параллелограммные пластины встречаются в числе элементов различных силовых конструкций, они испытывают разные виды нагрузок, в число которых сжатие. Расчетным параметром при этом является критическое усилие в момент потери устойчивости.

Вопросы устойчивости пластин простых геометрических форм, таких как прямоугольные постоянной толщины, простые случаи с выступающими силовыми ребрами (ортотропные), хорошо изучены. При этом имеются полученные точные аналитические решения. Значительно меньше получено решений для пластин сложных геометрических форм в плане, например для параллелограммных, из-за усложняющихся при их рассмотрении вычислений.

Для них вынужденным становится применение различных приближенных методов (аналитических, численных [1]), среди недостатков которых различные авторы отмечают лишение решаемой задачи физического смысла при использовании численных методов и значительную трудоемкость и громоздкость при применении аналитических методов к пластинам сложной геометрии. Для численных методов следует отметить также необходимость каждый раз выстраивать и получать решение для каждого расчетного случая заново, а также невозможность произвести качественную оценку получаемых результатов, в том числе при изменении геометрии пластины.

Не имеющими подобных недостатков, присущих численным методам, и значительно более простыми по сравнению с известными аналитическими методами являются геометрические методы. В соответствии с [2] под геометрическими методами в работе подразумевается решение задач по отысканию значений различных физических и механических параметров напряженно-деформированного состояния, основанных на анализе и преобразованиях

© Черняев А. А., 2026

только геометрической формы области и использовании лишь некоторых известных или полученных решений.

Одним из таких методов является метод конформных отображений, который может быть применен к решению различных двумерных задач [3–7]. В предыдущих работах [8, 9] на ряде двумерных задач теории упругости было предложено использовать отдельные элементы конформных отображений – конформные радиусы – в качестве геометрического параметра формы плоской области (пластины). Формулы по их определению для ряда областей приводятся в справочной литературе, а недостающие могут быть получены с помощью формулы Кристофелля – Шварца [6]. Преимуществом такого подхода является отсутствие необходимости отыскивать отображающую функцию по методу конформных отображений, задача определения которой, как известно, для сложных областей сама по себе является сложной, для решения которой приходится прибегать к различным приближенным методам [10]. А поиск решений для пластин сложных форм можно осуществлять, опираясь лишь на некоторые решения для простых форм пластин, решения для которых известны или могут быть однократно получены каким-либо методом и в дальнейшем использованы в качестве опорных.

Цель работы – исследовать возможности приема моделирования геометрического контура параллелограммных пластин с использованием конформных радиусов в решении задач устойчивости.

Метод. *Определение терминов.* Следующие величины связаны с плоской областью *D: A* – площадь; r_a – внутренний радиус *D* относительно точки *a*, точка *a* берется обязательно внутри *D*. Мы отображаем конформно внутреннюю часть *D* на внутреннюю часть круга так, чтобы точка *a* соответствовала центру круга, а линейное растяжение в точке *a* равнялось 1; радиус полученного таким образом круга будет равен r_a. Величина r_a изменяется в зависимости от точки *a*; $\dot{r}$ – максимальный внутренний радиус; $\bar{r}$ – внешний радиус *D*. Мы отображаем область, дополнительную к *D*, т. е. внешнюю по отношению к *C*, конформно на внешнюю область круга так, чтобы бесконечно удаленные точки соответствовали друг другу, а линейное растяжение на бесконечности равнялось 1; радиус полученного таким образом круга будет равен $\bar{r}$ [11, с. 18].

В открытых источниках [4, 11] для некоторых односвязных областей можно найти выведенные формулы по нахождению значений конформных радиусов. Приведем некоторые из них для областей, которые будут рассмотрены в настоящей работе:

– для ромбов при угле $\pi\alpha$:

$$\dot{r} = \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} L, \tag{1}$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция; *L* – периметр;

– для прямоугольников при сторонах *a* и *b* ($a \geq b$):

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi} b \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\right)^{-2}, \quad \begin{cases} \dfrac{a}{\bar{r}} = \pi \cos^2 \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((2k-1)!!\right)^2}{2^{2k}(k+1)!k!} \cos^{2k} \alpha; \\ \dfrac{b}{\bar{r}} = \pi \sin^2 \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left((2k-1)!!\right)^2}{2^{2k}(k+1)!k!} \sin^{2k} \alpha, \end{cases} \tag{2}$$

где $q = e^{-\pi a/b}$; α – аргумент одного из прообразов вершин, расположенных симметрично; (–1)!! = 1.

В работе [9] приведены значения конформных радиусов и их отношения, полученные по формулам (1), (2) с округлением до 4-го знака.

На рис. 1 приведены графики отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ с указанием их геометрических параметров. Для областей в виде параллелограммов формулы не известны. Численно были определены для ряда геометрических параметров ранее [9] с использованием формулы Кристоффеля – Шварца (рис. 1c).

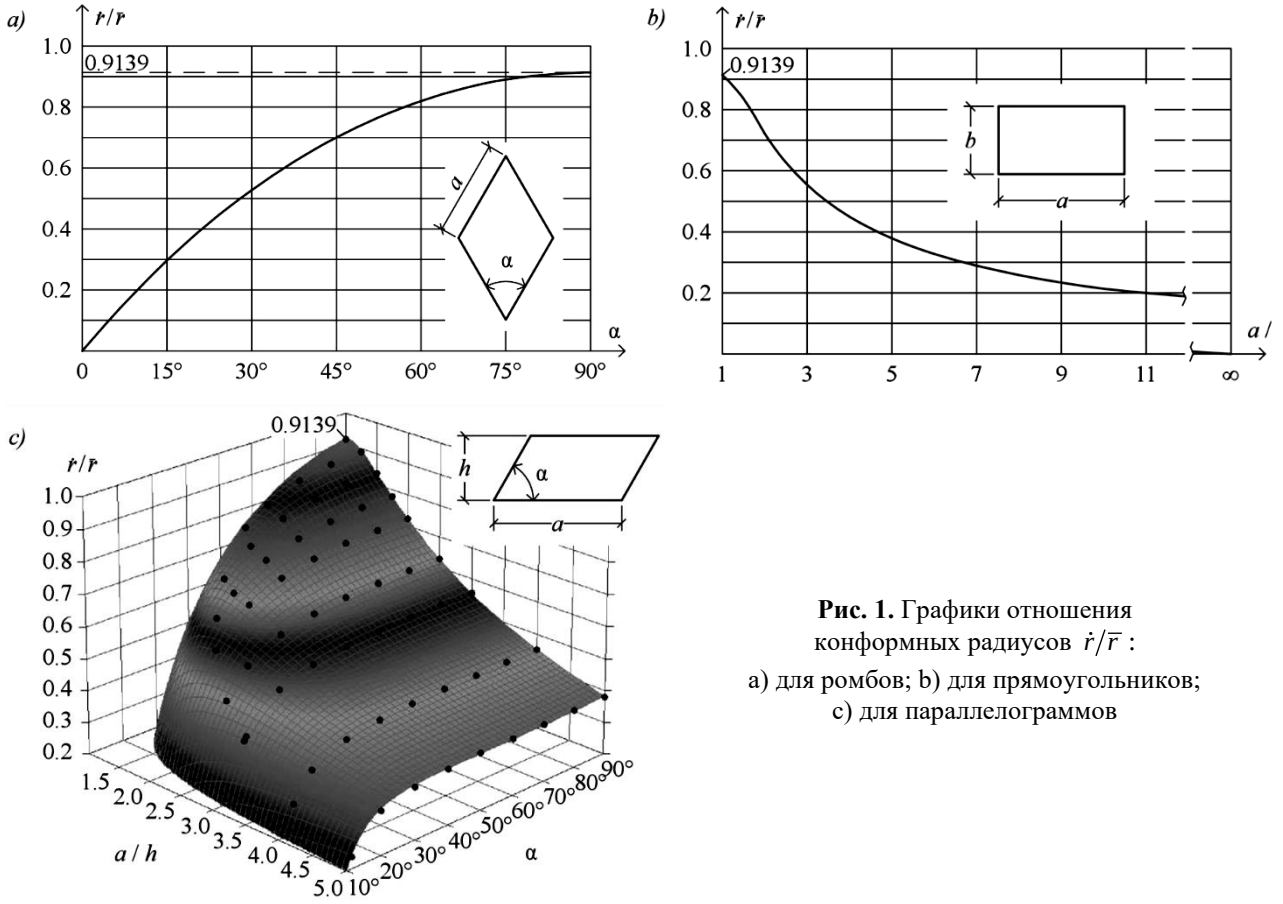


Рис. 1. Графики отношения конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$:
a) для ромбов; b) для прямоугольников;
c) для параллелограммов

Для параллелограммов полученная аппроксимирующая функция имеет вид [9]:

$$\dot{r}/\bar{r} = k + b(a/h)^{-1} + c(\ln\alpha) + d(a/h)^{-2} + e(\ln\alpha)^2 + f(\ln\alpha)(a/h)^{-1} + \\ + g(a/h)^{-3} + j(\ln\alpha)^3 + i(\ln\alpha)^2(a/h)^{-1} + p(\ln\alpha)(a/h)^{-2}, \quad (3)$$

где k = –0,35747; b = –8,0875; c = 0,87769; d = –4,2622; e = –0,36236; f = 5,0926; g = 0,048766; j = 0,041774; i = –0,64312; p = 0,72539 (погрешность не превышает 1,7 %).

Основные положения и зависимости. Рассматриваются тонкие упругие пластины, в рамках технической теории справедливы гипотезы Кирхгофа – Лява. Дифференциальное уравнение задачи устойчивости пластины имеет вид [12]:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -q_o\left(\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \beta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad (4)$$

где D – цилиндрическая жесткость пластины:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (5)$$

где E – модуль упругости материала первого рода; h – толщина пластины; ν – коэффициент Пуассона; q_0 – сжимающая нагрузка; $w = w(x, y)$ – функция прогибов (выгибов); α, β и γ – положительные коэффициенты, в случае представления внутренних усилий N_x, N_y сжимающих и N_{xy} сдвигающих в виде: $N_x = \alpha q_o$, $N_y = \beta q_o$, $N_{xy} = \gamma q_o$.

Тогда из них всех наименьшее значение q_o будет критическим $q_{o,cr}$ при ненулевом решении (4) и соответствующих граничных условиях. Решение в замкнутом виде отыскиваемо лишь в частных случаях, и большинство практических задач не решаемо. Решение приходится находить приближенными методами.

В статье [8], опираясь на работы [11, 13], рассмотрен математический вывод функциональной взаимосвязи критического усилия $q_{0,cr}$ и конформных радиусов, подсчитанных для плоской области с границей от контура пластины:

$$q_{0,cr} \le \pi k \left(\frac{\dot{r}}{\bar{r}} \right)^{-1} \cdot \frac{D}{A}, \tag{6}$$

где k – числовая константа, оборачивающая (6) в равенство для круглых пластин: при шарнирном опирании $k = 5{,}783$, при жестком защемлении $k = 14{,}79$; A – площадь пластины.

Из (6) следует, что отношение конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$ выступает единственным параметром, определяющим геометрическую форму пластины. Показывает верхнюю границу значения критического усилия в общем виде. При этом не требуется решать уравнение (4), а все решения можно получать через отношение $\dot{r}/\bar{r}$, что дает возможность производить оценку как качественной, так и количественной стороны рассматриваемой задачи.

Для получения $q_{0,cr}$ не в виде неравенства (6) вместо числовой константы k вместе с числом π, как сделано в [8, 14], можно ввести подправляющие функции $k_q = k_q\left(\dot{r}/\bar{r}\right)$, и выражение примет вид:

$$q_{0,cr} = k_q \cdot \frac{D}{A}, \tag{7}$$

где $k_q = k_q\left(\dot{r}/\bar{r}\right)$ – значение критического усилия в общем безразмерном виде, которое зависит от граничных условий и формы пластины.

В (8)–(11) приведены полученные в [8] функции $k_q = k_q\left(\dot{r}/\bar{r}\right)$, на рис. 2 – их графики для ромбовидных и прямоугольных пластин, необходимые далее. Для удобства графического отображения на рис. 2 значения k_q отложены в обратном виде.

В случае шарнирного опирания контура:

– для ромбовидных пластин:

$$k_q = \left(1 + 0{,}2112\left(\dot{r}/\bar{r}\right)\right) \Big/ \left(0{,}0002 + 0{,}0664\left(\dot{r}/\bar{r}\right)\right); \tag{8}$$

– для прямоугольных пластин:

$$k_q = \left(1 - 0{,}6954\left(\dot{r}/\bar{r}\right) + 0{,}4577\left(\dot{r}/\bar{r}\right)^2\right) \Big/ 0{,}0414\left(\dot{r}/\bar{r}\right). \tag{9}$$

В случае жесткого защемления контура:

– для ромбовидных пластин:

$$k_q = \left(1 + 4{,}187\left(\dot{r}/\bar{r}\right)^2 - 1{,}6096\left(\dot{r}/\bar{r}\right)^4\right) \Big/ 0{,}0771\left(\dot{r}/\bar{r}\right)^2, \tag{10}$$

– для прямоугольных пластин:

$$k_q = \left(1 - 0,73304\left(\dot{r}/\bar{r}\right) + 0,18951\left(\dot{r}/\bar{r}\right)^2\right) \Big/ 0,01016\left(\dot{r}/\bar{r}\right). \quad (11)$$

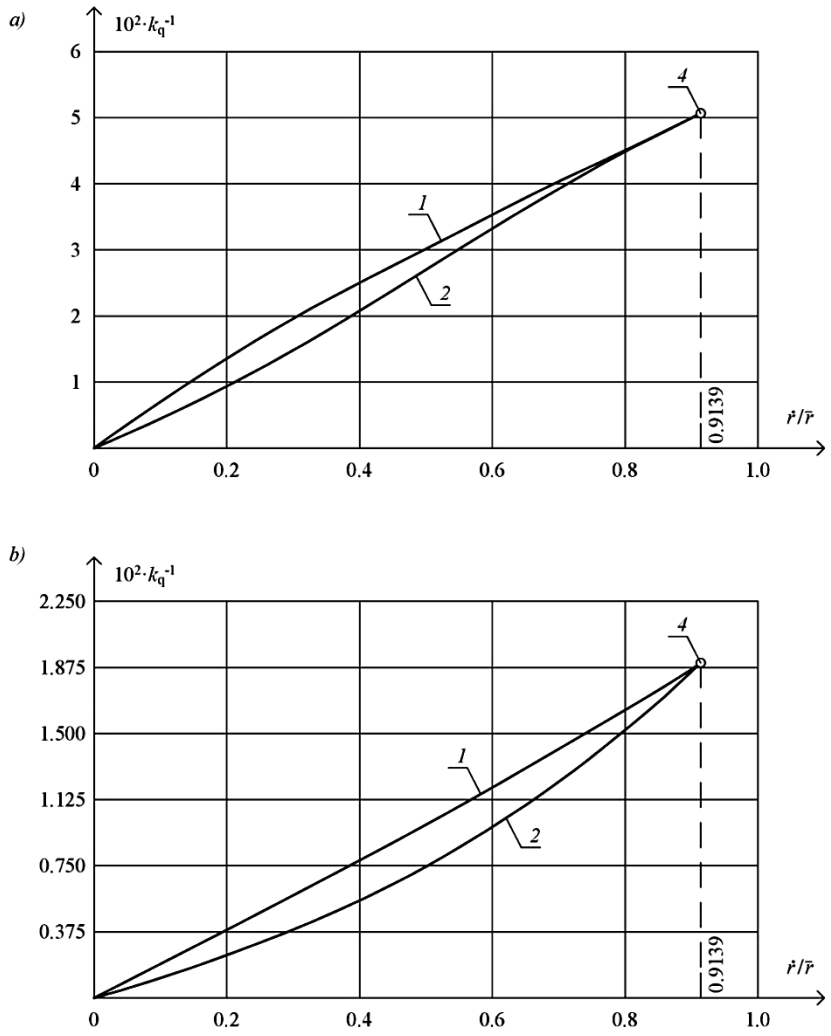


Рис. 2. Графики критического усилия пластин с отношением конформных радиусов:
a) шарнирное опирание, b) жесткое защемление;
1 – для ромбовидных, 2 – для прямоугольных, 4 – квадратная пластина

Функции (8), (10) получены на основе найденных методом конечных элементов решений, (9) – на основе точного решения, (11) – на основе решений, найденных методом Галеркина.

В предыдущих работах [8 и др.] было доказано, что для параллелограммных пластин все множество значений критического усилия будут находиться внутри показанных на рис. 2 кривых 1 и 2. Кривая 1 принадлежит ромбовидным, а кривая 2 прямоугольным пластинам. Формы этих двух пластин в соответствии с [2] считаются простыми, так как их можно задать одним параметром. Такое обстоятельство позволяет решать различные задачи по определению критического усилия для всех параллелограммных пластин, используя при этом приемы геометрического моделирования формы. При этом полученная область является узкой, что позволит получать результаты ожидаемо с достаточно высокой точностью.

Результаты и обсуждение. *Решение прямых задач***.** Рассмотрим следующий пример. Требуется вычислить критическое усилие в момент потери устойчивости пластины. Контур пластины имеет форму параллелограмма. По всему контуру пластина жестко защемлена скользящей заделкой. Геометрия и материал: основание a = 1 м, высота h = 0,5 м, угол

α = 60° (см. рис. 1c), толщина пластины t = 5 мм; материал – латунь корабельная: модуль упругости $E = 0{,}98 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона ν = 0,36.

Критическое усилие для заданной параллелограммной пластины может быть получено, опираясь на значения для ромбовидных и прямоугольных. Первое решение, которое можно получить путем несложных вычислений, это решение в виде неравенства. Подсчитываем отношение $\dot{r}/\bar{r}$ для параллелограммной пластины заданной геометрии по функции (3): $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,7007. Графически по рис. 2b или с помощью функций (10)–(11) при $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,7007 определяем значение критического усилия в общем виде (7): для ромбовидной: $k_q = 70,472$ ($k^{-1}{}_q = 0,01418$) – и прямоугольной: $k_q = 81,387$ ($k^{-1}{}_q = 0,01228$) – пластин. Тогда значение критического усилия заданной параллелограммной пластины будет находиться между полученными двумя значениями:

$$70,472 \cdot \frac{D}{A} < q_{0,cr} < 81,387 \cdot \frac{D}{A}. \qquad (12)$$

Заметим, что полученный интервал достаточно узкий.

Определим значение цилиндрической жесткости (5):

$$D = \frac{0,98 \cdot 10^{11} \cdot 0,005^3 \cdot 10^{-3}}{12\left(1 - 0,36^2\right)} = 1,1728 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

и площадь пластины

$$A = a \cdot h = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ м}^2.$$

Тогда по (7) абсолютное значение критического усилия заданной параллелограммной пластины будет находиться между значениями

$$70,472 \cdot \frac{1,1728}{0,5} < q_{0,cr} < 81,387 \cdot \frac{1,1728}{0,5},$$

$$165,3 < q_{0,cr} < 190,9 \text{ кН/м}.$$

Второе решение, которое можно получить уже в виде одного значения, предполагает выбрать два опорных решения, принадлежащих одно ромбовидной другое прямоугольной пластине. При этом опорные и заданная параллелограммная пластины должны быть объединены каким-то геометрическим преобразованием. В монографии [2] показаны некоторые возможные варианты различных преобразований, но ими не исчерпаны и могут быть расширены самостоятельно.

Выберем три преобразования [9], приведенные на рис. 3. Каждое из них в своих крайних положениях превращает заданную параллелограммную пластину в опорные. Из рис. 3 заметно, что опорные пластины получаются отличными друг от друга. Графически в CAD-программах легко можно определить их параметр, который задает им геометрическую форму. Для ромбовидной это внутренний острый угол α_1, для прямоугольной это соотношение сторон *a/b*. Для преобразования по рис. 3a соотношение *a/b* = 2,0 для прямоугольной пластины, угол α_1 = 30° для ромбовидной пластины. Для преобразования по рис. 3b соотношение *a/b* = 2,909, угол α_1 = 46,76°. Для преобразования по рис. 3c соотношение *a/b* = 1,7778, угол α_1 = 18,9°.

Заметим, что решение отыскивается на этом шаге в общем виде (7). Геометрические размеры пластин не влияют здесь на решение. Масштаб (размеры, площадь) заданной пластины учитываются на последнем шаге при определении абсолютного значения в размерных величинах критического усилия.

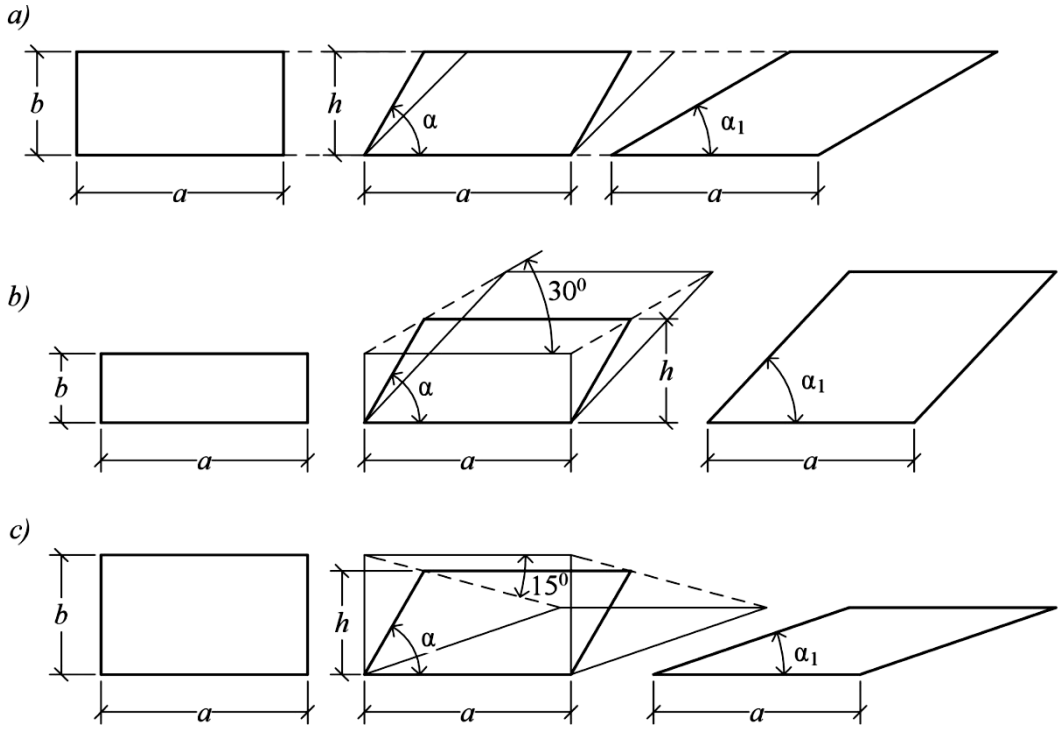


Рис. 3. Геометрические преобразования контура: a) аффинный сдвиг;
b) аффинный сдвиг с растяжением под углом 30 °; c) аффинный сдвиг с сжатием под углом 15°

Подсчитываем по полученных параметрам для опорных пластин отношение $\dot{r}/\bar{r}$ по (1)–(2) и значения критического усилия в общем виде (7) по рис. 2b или по (10)–(11). Для преобразования по рис. 3a: для ромбовидной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,5277, $k_q = 95,069$ ($k^{-1}{}_q = 0,01051$), для прямоугольной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,7222, $k_q = 77,606$ ($k^{-1}{}_q = 0,01288$). Для преобразования по рис. 3b: для ромбовидной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,7168, $k_q = 68,823$ ($k^{-1}{}_q = 0,01453$), для прямоугольной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,5664, $k_q = 112,18$ ($k^{-1}{}_q = 0,00891$). Для преобразования по рис. 3c: для ромбовидной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,3628, $k_q = 150,09$ ($k^{-1}{}_q = 0,00666$), для прямоугольной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,7715, $k_q = 69,817$ ($k^{-1}{}_q = 0,01432$).

Покажем на графике (рис. 4) полученные точки 1, 2 для опорных пластин и кривую 3 для параллелограммных по преобразованиям рис. 3.

Для заданной пластины в форме параллелограмма решение находится на некой кривой 3. У кривой 3 начало и конец исходят из точек 1 и 2. Чтобы приближенно ее описать, в [2] предложены и опробованы на тестовых задачах две простые интерполирующие (аппроксимирующие) функции:

– линейная (через две точки 1 и 2):

$$k_q = k_{q1} + \frac{\dot{r}/\bar{r} - \left(\dot{r}/\bar{r}\right)_1}{\left(\dot{r}/\bar{r}\right)_2 - \left(\dot{r}/\bar{r}\right)_1} \cdot \left(k_{q2} - k_{q1}\right), \tag{13}$$

– и степенная (через три точки 0, 1 и 2 или 1, 2 и 4), которая для первого случая функции будет иметь вид:

$$k_q = k_{q1}\left(\frac{\dot{r}/\bar{r}}{\left(\dot{r}/\bar{r}\right)_1}\right)^n, \quad n = \frac{\ln\left(k_{q2}/k_{q1}\right)}{\ln\left(\left(\dot{r}/\bar{r}\right)_2/\left(\dot{r}/\bar{r}\right)_1\right)}. \tag{14}$$

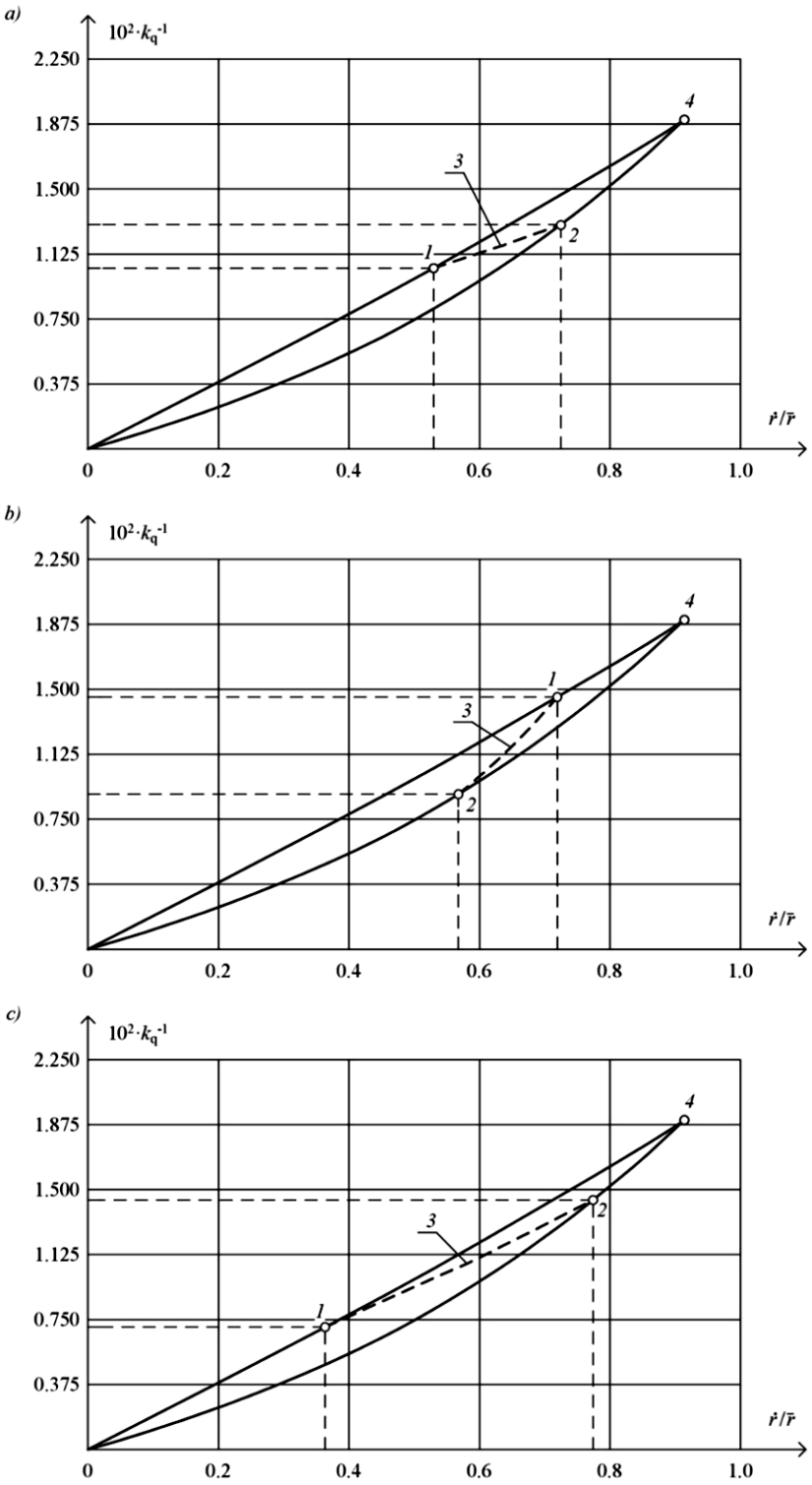


Рис. 4. Кривые к геометрическим преобразованиям:
a) рис. 3a; b) рис. 3b; c) рис. 3c;
1 – ромбовидная пластина; 2 – прямоугольная пластина; 3 – параллелограммные пластины

Посчитаем результаты по функции (13) для трех преобразований:

– для преобразования по рис. 3a:

$$k_q = 95,069 + \frac{0,7007 - 0,5277}{0,7222 - 0,5277} \cdot \left(77,606 - 95,069\right) = 79,536 ;$$

– для преобразования по рис. 3b:

$$k_q = 112{,}18 + \frac{0{,}7007 - 0{,}5664}{0{,}7168 - 0{,}5664} \cdot (68{,}823 - 112{,}18) = 73{,}464;$$

– для преобразования по рис. 3c:

$$k_q = 150{,}09 + \frac{0{,}7007 - 0{,}3628}{0{,}7715 - 0{,}3628} \cdot (69{,}817 - 150{,}09) = 83{,}722.$$

Численные результаты для преобразований по рис. 3a и b получились расположенными в границах ранее вычисленного диапазона (12), третий выходит за их рамки, что показывает его более сильное отклонение по сравнению с первыми двумя от действительного значения. Объяснить это можно тем, что преобразование по рис. 3c дало опорные пластины сильнее отличающейся формы, чем первые два, что видно из рис. 3; и, как следствие, опорные решения также оказались дальше расположены друг от друга, что видно из рис. 4. Поэтому при выборе геометрических преобразований для получения результата с большей точностью следует стремиться к тому, чтобы опорные пластины были как можно ближе по форме к заданной. Тогда опорные решения, между которыми осуществляется интерполяция (аппроксимация), также окажутся ближе друг к другу.

Так как точного решения, чтобы оценить полученные результаты для заданной параллелограммной пластины, нет, получим решение методом конечного элемента в программном комплексе «SCAD Office» [15] с числом конечных элементов ~400 и треугольной сеткой, абсолютное значение $q_{0,cr} = 94{,}87$ кН / м, в общем виде (7) $k_q = 80{,}832D / A$.

Сравнивая результаты, замечаем, что преобразование по рис. 3a ближе всех к численному: отклонение составляет –1,61 %.

Оставляя в выбранной интерполирующей (аппроксимирующей) функции отношение $\dot{r}/\bar{r}$ в общем виде, полученная функция описывает изменение критического усилия для всех параллелограммных пластин геометрически связанным соответствующим преобразованием при переходе от ромбовидной к прямоугольной.

Решение обратных задач. Рассмотрим обратную задачу на определение геометрии на заданную критическую силу. Задано критическое усилие, абсолютное значение $q_{0,cr} = 100$ кН / м. Пластина жестко защемлена по контуру. Материал и толщина пластины те же, что и в первом примере: латунь корабельная, толщина t = 5 мм. Требуется определить геометрические размеры параллелограммной пластины, соответствующие заданной критической силе.

Приводим значение критического усилия к общему виду (7). Определяем значение цилиндрической жесткости (5), в данном случае оно то же, что в первом примере: $D = 1{,}1728$ кН·м. Тогда $k_q = 85{,}266\, D / A$.

Проводим на графиках взаимосвязи критического усилия пластин с отношением конформных радиусов (рис. 2b) горизонтальную линию, соответствующую критической силе, в рассматриваемом случае его обратному значению: $k^{-1}_{\ q} = 0{,}01172$ (рис. 5a). Графически по рис. 5a или аналитически по (10)–(11) определяем значения отношения $\dot{r}/\bar{r}$ для опорных пластин: ромбовидной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,5833, прямоугольной $\dot{r}/\bar{r}$ = 0,6759.

Графически по рис. 1a, b или аналитически по (1)–(2) вычисляем значения геометрических параметров, определяющих форму опорных пластин: ромбовидной α_1 = 34,35°, прямоугольной a/b = 2,230. Для получения параллелограммных пластин из опорных воспользуемся приемом из работы [16]. Приведем опорные пластины к одному основанию. Выбрав вид интерполирующей (аппроксимирующей) функции (линейной, степенной), строим семейство

параллелограммных пластин из опорных по выбранной направляющей, в данном случае линейной (рис. 5b). Таким образом, мы получили семейство параллелограммных пластин, имеющих заданную критическую силу в общем виде (7). Для получения решения в абсолютных величинах (определения геометрических размеров) из (7) следует определить площадь пластин, до которой их следует с масштабировать.

В данном случае:

$$A = \frac{1{,}1728}{100} \cdot 85{,}266 = 1\,\text{м}^2 .$$

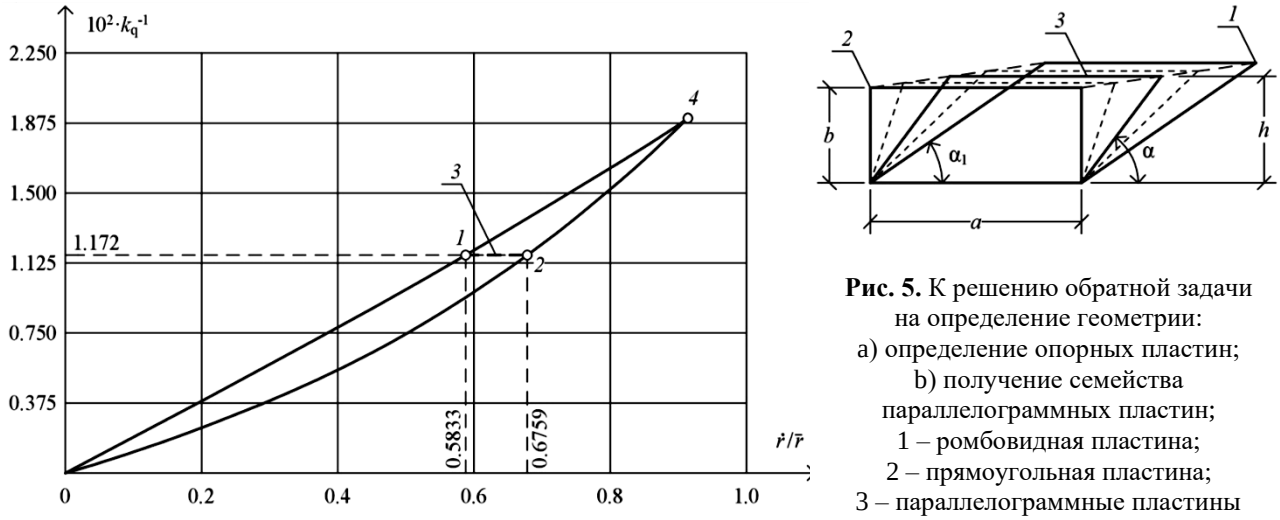


Рис. 5. К решению обратной задачи на определение геометрии:
a) определение опорных пластин;
b) получение семейства параллелограммных пластин;
1 – ромбовидная пластина;
2 – прямоугольная пластина;
3 – параллелограммные пластины

Выберем для численной проверки из полученного семейства 3 параллелограммных пластины (рис. 6a) и посчитаем для них критическую силу методом конечного элемента в программном комплексе «SCAD Office» [15] с числом конечных элементов ~480 и треугольной сеткой (рис. 6b). Критическое усилие составило 101,2 кН/м, 97,1 кН/м, 103,2 кН/м. Наибольшее отклонение – 3,2 %.

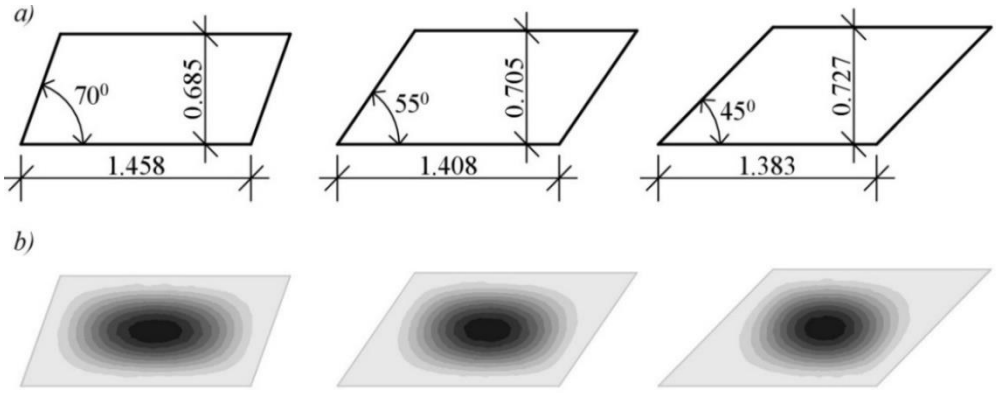


Рис. 6. Параллелограммные пластины для численного расчета:
a) геометрия пластин; b) формы потери устойчивости

Предложенный прием может быть развит и применен к решению отличных от рассмотренных случаев: геометрии, нагружений, условиями закрепления и материала, – что представляет собой темы для дальнейших исследований.

Выводы. В работе показаны возможности приема моделирования геометрического контура параллелограммных пластин с использованием конформных радиусов в решении

прямых и обратных задач устойчивости. С помощью полученных ранее результатов для расчета пластин простых форм (ромбовидных и прямоугольных) и математической функциональной взаимосвязи критического усилия при потере устойчивости с отношением конформных радиусов для случаев шарнирного опирания и жесткого защемления контура показан порядок действий с подробными примерами вычислений к расчету параллелограммных пластин.

С помощью предложенного приема решения получают путем геометрических преобразований контура пластин. Преимуществом такого подхода является графическая и геометрическая наглядность получаемых результатов, возможность оценить влияние геометрии на критическое усилие пластины в общем безразмерном виде независимо от толщины и материала и проведение качественной оценки получаемых решений.

Производимые вычисления являются приближенными. Тем не менее решенные в работе наглядные задачи показали точность, которая может быть достаточной для большинства прикладных инженерных задач.

В случаях (1) использования точных решений или близких к ним для опорных пластин (ромбовидных и прямоугольных), (2) выбора наиболее выгодных геометрических преобразований и (3) интерполирующих (аппроксимирующих) функций приближение к точному результату может быть повышено. Если первое условие трудно улучшаемо, то второе и третье дают вариативность при использовании предложенного в работе приема, способны влиять на результаты решения.

Библиографический список

1. Сидоров В. Н. О численно-аналитическом решении задач расчёта строительных конструкций // Материалы 4-й междунар. науч.-практ. конф. ин-та архитектуры, строительства и транспорта Тамбовского государственного технического университета. Тамбов: Першина Р. В., 2017. С. 193–197.

2. Коробко А. В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. М.: АСВ, 1999. 320 с.

3. Иванов В. И., Попов В. Ю. Конформные отображения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2002. 324 с.

4. Казанцев В. П., Золотов О. А., Долгополова М. В. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы // Вестник Красноярского государственного университета. Физико-математические науки. 2005. № 1. С. 32–38.

5. Abzalilov D. F., Ivanshin P. N., Shirokova E. A. Solution the dirichlet problem for multiply connected domain using numerical conformal mapping // Complex Analysis and Operator Theory. 2019. Vol. 13. No. 3. Pp. 1419–1429.

6. Колесников И. А. Однопараметрический метод определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца // Сибирский математический журнал. 2021. Т. 62. № 4. С. 784–802.

7. Ivanshin, P. N. Construction of solutions for the first elasticity problem for noncircular domain // International Journal of Applied and Computational Mathematics. 2021. Vol. 7. No. 5. 181 p.

8. Черняев А. А. Использование геометрических методов строительной механики в решении задач устойчивости косоугольных пластин // Труды центрального научно-исследовательского института им. акад. А. Н. Крылова. 2016. № 4 (378). С. 21–36.

9. Черняев А. А. Геометрическое моделирование формы параллелограммных пластин в задаче свободных колебаний с использованием конформных радиусов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 143–159.

10. Власов В. И., Пальцев А. Б. Аналитико-численный метод конформного отображения сложных областей // Доклады Академии наук. 2009. Т. 429. № 1. С. 12–14.

11. Полиа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: КомКнига, 2006. 336 с.

12. Коробко В. И., Коробко А. В. Строительная механика пластинок: техническая теория. М.: Спектр, 2010. 410 с.

13. Коробко В. И., Хусточкин А. Н. Изопериметрический метод в задачах устойчивости пластинок. Ростов-н/Д: Северо-Кавказский научный центр высшей школы, 1994. 146 с.

14. Черняев А. А. Расчет на устойчивость правильных n-угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов в качестве геометрического аргумента // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Сер.: Естественные науки. 2012. № 5. С. 38–42

15. Карпиловский В. С., Криксунов Э. З., Маляренко А. А., Фиалко С. Ю., Перельмутер А. В., Перельмутер М. А. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++. М.: СКАД СОФТ, 2015. 848 с.

16. Черняев А. А. Построение алгоритма и разработка программы для ЭВМ по вариантному проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условия жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2016. № 2. С. 147–157.

References

1. Sidorov V. N. On the numerical-analytical solution of problems of calculation of building structures. Proc. 4th Int. Scientific-Practical. Conf. Institute of Architecture, Civil Engineering and Transport. Tambov State Technical University. Tambov: Pershina R. V., 2017. Pp. 193–197.

2. Korobko A. V. Geometric Modeling of the Shape of a Domain in Two-Dimensional Problems of Elasticity Theory. Moscow: ASV, 1999. 320 p.

3. Ivanov V. I., Popov V. Yu. Conformal Mappings and Their Applications. Moscow: Editorial URSS, 2002. 324 p.

4. Kazantsev V. P., Zolotov O. A., Dolgopolova M. V. Electrostatics on the plane. Normalization of the potential. Capacitances of an isolated conductor and a line relative to a point. conformal radii. Bulletin of Krasnoyarsk State University. Physical and Mathematical Sciences. No. 1. 2005. Pp. 32–38.

5. Abzalilov D. F., Ivanshin P. N., Shirokova E. A. Solution to the dirichlet problem for a multi-tiply connected domain using numerical conformal mapping. Complex Analysis and Operator Theory. Vol. 13. No. 3. 2019. Pp. 1419–1429.

6. Kolesnikov I. A. One-parameter method for determining parameters in the Christoffel–Schwarz integral. Siberian Mathematical Journal. Vol. 62. No. 4. 2021. Pp. 784–802.

7. Ivanshin P. N. Construction of solutions for the first elasticity problem for a noncircular domain. International Journal of Applied and Computational Mathematics. Vol. 7. No. 5. 2021. 181 p.

8. Chernyaev A. A. Using geometric methods of structural mechanics in solving stability problems of oblique plates. Proceedings of the A. N. Krylov Central Research Institute. No. 4 (378). 2016. Pp. 21–36.

9. Chernyaev A. A. Geometric modeling of the shape of parallelogram plates in the problem of free vibrations using conformal radii. Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics. No. 70. 2021. Pp. 143–159.

10. Vlasov V. I., Pal'tsev A. B. An analytical-numerical method for conformal mapping of complex domains. Reports of the Academy of Sciences. Vol. 429. No. 1. 2009. Pp. 12–14.

11. Polya G., Sego G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Moscow: KomKniga, 2006. 336 p.

12. Korobko V. I., Korobko A. V. Structural Mechanics of Plates: Technical Theory. Moscow: Spektr, 2010. 410 p.

13. Korobko V. I., Khustochkin A. N. Isoperimetric Method in Plate Stability Problems. Rostov-on-Don: North Caucasus Scientific Center of Higher Education, 1994. 146 p.

14. Chernyaev A. A. Stability analysis of regular n-global, triangular, and rhombic hinged plates using the ratio of conformal radii as a geometric argument. News of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Series: Natural Sciences. No. 5. 2012. Pp. 38–42

15. Karpilovskiy V. S., Kriksunov E. Z., Maliarenko A. A., Fialko S. Yu., Perelmuter A. V., Perelmuter M. A. SCAD Office. Version 21. SCAD++ Computing Complex. Moscow: SKAD SOFT, 2015. 848 p.

16. Chernyaev A. A. Construction of an algorithm and development of a computer program for the variant design of plate-rod load-bearing structures based on the condition of plate rigidity by geometric modeling of their shape. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. No. 2. 2016. Pp. 147-157.

MODELING THE GEOMETRY OF STRUCTURES IN THE FORM OF PARALLELOGRAM PLATES AND THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF COMPUTATIONAL METHODS FOR STABILITY CALCULATION

A. A. Chernyaev [1]

Orel State University named after I. S. Turgenev [1]
Russia, Orel

[1] PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial and Civil Engineering,
tel.: 8(4862)73-43-95; e-mail: Chernyev87@yandex.ru

An approximate method for solving direct and inverse stability problems for cases of pinned and rigidly clamped contours is proposed using the technique of modeling the geometric contour of parallelogram plates with conformal radii. The main principles and dependencies of the proposed approach are presented. Thin elastic plates are considered, and the Kirchhoff-Love hypotheses are applicable within the framework of engineering theory. Mathematical and graphical relationships between the critical force and conformal radii for elastic thin plates are presented. Using a uniform compression problem as an example, the main capabilities of this approach to calculating complex-shaped plates are demonstrated, particularly parallelogram plates. Solutions are presented for direct problems of determining the critical force and inverse problems of determining the geometry for a given critical force. The influence of the choice of geometric transformations and calculation functions on the accuracy of the solution results is investigated. Numerical examples are used to evaluate the obtained results against solutions using the finite element method in the SCAD Office software package.

Keywords: parallelogram plates, stability, critical force, conformal radii, geometric modeling, structures.

УДК 624.04:531.391.3
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.004

ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБОВ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ СО СЛОЖНОЙ РЕШЕТКОЙ

М. Н. Кирсанов [1], Г. Е. Габриелян [2]

Национальный исследовательский университет «МЭИ» [1,]
Россия, г. Москва
Воронежский государственный технический университет [2]
Россия, г. Воронеж

[1] Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: (495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru
[2] Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: grayr2010@rambler.ru

Для плоской статически определимой регулярной решетчатой фермы с двойными опорами по концам методом индукции выведены формулы зависимости прогиба середины пролета от числа панелей. Отдельно рассмотрены распределенные вертикальные узловые нагрузки на нижний, верхний пояс и сосредоточенная нагрузка на узел в середине пролета. Для расчета величины прогиба фермы и горизонтального сдвига подвижной опоры используется интегральная формула Максвелла – Мора в предположении, что жесткость всех стержней одинаковая. Усилия в стержнях разыскиваются в аналитической форме в системе символьной математики «Maple». Обобщение ряда решений для ферм различного порядка на произвольное число панелей дает зависимость прогиба от числа панелей и размеров фермы.

Ключевые слова: плоская ферма, прогиб, аналитическое решение, «Maple», метод индукции, формула Максвелла-Мора, сдвиг опоры.

Введение. Шарнирно-стержневые конструкции широко используются в строительстве, машиностроении, транспорте. Одна из основных задач здесь – расчет усилий и деформаций с учетом произвольного числа элементов конструкции. Для регулярных систем, обладающих свойством подобия, в ряде случаев удается получить аналитические решения для прогиба или частоты собственных колебаний в зависимости от порядка конструкции или сооружения. В работе [1] рассматривается инженерная оптимизация ферменных конструкций с использованием обобщенного стохастического метода конечных элементов на основе возмущений. Численная реализация поставленной задачи здесь имеет гибридный характер и основана на взаимодействии метода конечных элементов и системы компьютерной алгебры «Maple», где запрограммированы все вероятностные функции. Символьные расчеты двумерных ферм, подверженных узловым нагрузкам, применимые к любым конфигурациям ферм, используются в [2]. На основе программы «Symbolic Math Toolbox» в этой работе выводятся аналитические выражения в замкнутой форме для перемещений, опорных реакций и усилий в стержнях. В статье [3] для расчета пространственных ферменных конструкций используется методология анализа с учетом шарнирных соединений в сочетании со стойками, которые подвержены только растяжению или сжатию. Для типовой ферменной конструкции, состоящей из 64 стоек, в этой работе достигается существенное сокращение времени вычислений. Новый алгоритм на основе искусственного интеллекта для масштабируемой оптимизации ферменных конструкций предложен в [4]. Для анализа производительности алгоритма здесь используется непараметрический ранговый критерий Фридмана. В справочнике [5] приведены формулы расчета статических прогибов и усилий в отдельных стержнях для различных схем плоских периодических ферм под действием сосредоточенны узловых нагрузок. Аналитический расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы с произвольным

© Кирсанов М. Н., Габриелян Г. Е., 2026

числом панелей предложен в [6]. Все возможности вывода точных решений задач статики для стержневых систем регулярного типа рассмотрены R. G. Hutchinson и N. A. Fleck [7, 8]. Области резонансно безопасных частот статически определимой плоской фермы изучены в [9]. Показана зависимость размеров этих областей от геометрических параметров конструкции. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы с нестандартной решеткой получена в системе «Maple» [10]. В [11] разработана цифровая методика оценки усталости на основе расширенного метода конечных элементов для оценки характеристик сварных соединений с учетом комбинированного воздействия собственного веса, нагрузки от транспортного средства и на ферму стального балочного подвесного моста с двумя пролетами. Анализ возникновения усталостных трещин, вызванных деформацией в зазорах между балками в фермах многобалочных стальных мостов, рассмотрен в [12]. Формула для нижней границы частоты собственных колебаний плоской регулярной фермы типа Финка в системе компьютерной математики выведена в [13]. Зависимость частоты колебаний от параметров фермы получена в [14] для регулярной балочной фермы с треугольной решеткой приближенными аналитическими методами Донкерлея и Рэлея. О. В. Грибова [15] получила простые формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской регулярной фермы с произвольным числом панелей. Упрощенный вариант метода Донкерлея использован в [16] для аналитического расчета первой собственной частоты плоской фермы с нисходящими раскосами. В [17] предложен метод, позволяющий эффективно снизить внутренние силы и деформации ферменной конструкции в рамках теплового проектирования и практики строительства пространственных ферменных конструкций больших пролетов. Явление внезапного выпучивания критически важных элементов двухслойных сводчатых ферменных конструкций под действием сжимающих нагрузок изучено в [18]. Оценка усталостной надежности, имеющей решающее значение для обеспечения эксплуатационной безопасности ферм стареющих стальных железнодорожных мостов при стохастической транспортной нагрузке, дана в [19]. В [20] описан алгоритм сравнения методов расчета грузоподъемности металлических пролетных строений. В качестве расчетной модели использовались фермы металлических пролетных строений с треугольной решеткой с полигональным верхним поясом и дополнительными стойками и подвесками с ездой понизу. В обзоре [21] представлены схемы ферменных конструкций в летательных аппаратах, а также даны теоретические основы и практические рекомендации для будущих исследований в области легких конструкционных систем в авиационной технике.

В настоящей работе предлагается плоская схема статически определимой решетчатой фермы на четырех опорах и выводятся формулы для прогиба и горизонтального сдвига подвижной опоры в зависимости от числа панелей для различных узловых нагрузок.

Конструкция фермы. Плоская ферма со сложной крестообразной решеткой с дополнительными горизонтальными связями закреплена на трех подвижных и одной неподвижной шарнирной опоре. Раскосы имеют длины $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ и $2c$, горизонтальные стержни имеют длину $2a$ и $4a$. Продольная жесткость всех стержней конструкции EF предполагается одинаковой, опоры недеформируемые. В ферме с $2n$ панелями $10n + 9$ узлов и $\nu = 20n + 18$ стержней, включая пять жестких стержней, моделирующих четыре опоры. Все стержни, кроме опорных, предполагаются линейно упругими.

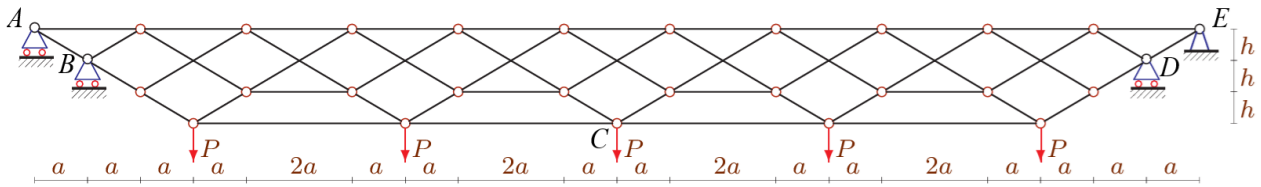


Рис. 1. Схема фермы, $n = 2$. Нагрузка на нижний пояс

Расчет усилий в стержнях. Усилия, входящие в формулу Максвелла – Мора, для определения жесткости конструкции рассчитываются в символьной форме из аналитического решения системы уравнений равновесия узлов конструкции. Для определения матрицы этой системы находятся направляющие косинусы внутренних усилий и векторов приложенных нагрузок. Значения косинусов рассчитываются по данным о порядке соединения стержней в узлы и координатам узлов. Все узлы (шарниры) фермы и стержни нумеруются (рис. 2).

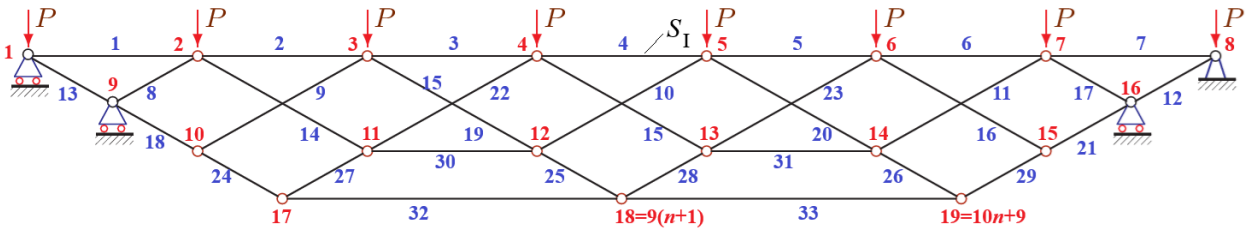


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней консоли, $n = 1$

Координаты узлов вносятся в программу расчета усилий. Длина пролета конструкции $L_0 = 2a(4n+3)$:

$$
\begin{aligned}
&x_i = 2a(i-1),\ \ y_i = 3h,\\
&x_{4n+5} = a,\ y_{4n+5} = 2h,\\
&x_{8n+8} = L_0 - a,\ y_{8n+8} = 2h,\\
&x_{i+4n+5} = 2ai, y_{i+4n+5} = h,\ i = 1,..,4n+2,\\
&x_{i+8n+8} = a(4i-1), y_{i+8n+8} = 0,\ i = 1,..,2n+1.
\end{aligned}
$$

Аналитические выражения усилий в стержнях рассчитываются в системе «Maple» [22] из решения уравнения равновесия узлов. Матричная форма системы уравнений имеет вид: $\mathbf{GS} = \mathbf{P}$, где $\mathbf{P}$ – вектор правой части, в котором записаны вектора узловых нагрузок; $\mathbf{G}$ – симметричная матрица размером $\nu \times \nu$. Элементы этой матрицы – направляющие косинусы стержней фермы, $\mathbf{S}$ – вектор искомых усилий в стержнях длиной ν. В число усилий включены и пять опорных реакций – две компоненты реакции опоры *E* и три вертикальны реакции шарниров *A, B, D*. Элементы матрицы $\mathbf{G}$ вычисляются по данным о координатах концов стержней конструкции и порядку соединения стержней в шарнирные узлы. Распределение усилий по стержням фермы в случае безразмерной нагрузки $P = 1$ представлено на рис. 3. Красным цветом отмечены растянутые стержни, синим – сжатые. Толщина линий условно пропорциональна модулям усилий. Для указанных размеров при $n = 2$ наиболее сжатым оказался стержень в середине верхнего пояса. Методом индукции можно вывести формулу зависимости усилия в этом стержне от числа панелей в ферме. Последовательно рассчитывая это усилие из решения системы уравнений равновесия, получаем последовательность: $S_I = -4aP/h, -12aP/h, -24aP/h, -40aP/h, \ldots$ Общий член этой последовательности имеет вид: $S_I = -2Pa(n+1)n/h$. Опуская выкладки, приведем аналогичное решение для этого же стержня в случае нагружения фермы по *нижнему* поясу (рис. 1): $S_I = -Pa(2n^2 + 2n + 1)/(2h)$.

Реакции опор конструкции находятся методом индукции обобщением последовательности отдельных решений для ферм с различным числом панелей. Чередующаяся последовательность реакций опор *A* и *E* при загружении *середины* пролета *сосредоточенной* силой *P*

имеет вид: $-P/2, P/2, -P/2, P/2, \ldots,$ или $Y_A = Y_E = P(-1)^n/2$. Аналогично: $Y_B = Y_D = P\ 1-(-1)^n\ /2$. При загружении фермы распределенной нагрузкой по узлам *верхнего* пояса имеем решения: $Y_A = Y_E = 0,\ Y_B = Y_D = 2P(n+1)$. В случае действия распределенной нагрузки на узлы *нижнего* пояса реакции опор имеют вид: $Y_A = Y_E = P/2$, $Y_B = Y_D = Pn$.

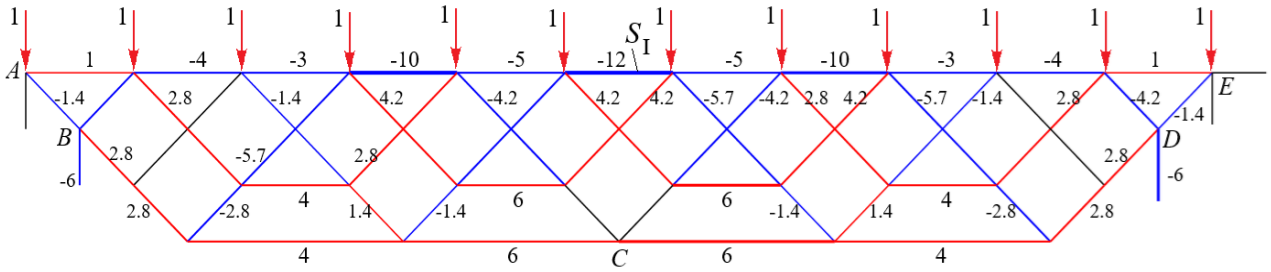


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях, n = 2, a = h = 2 м

Прогиб. Для определения прогиба среднего узла C на нижнем поясе фермы с n панелями от действия нагрузки, распределенной по узлам *нижнего* пояса (рис. 1), используется формула Максвелла – Мора:

$$\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu-5} S_\alpha^1 S_\alpha^P l_\alpha / (EF), \tag{1}$$

где S_α^P – усилие от узловой внешней нагрузки в стержне с номером $\alpha = 1, \ldots, \nu-5$; S_α^1 – усилие в этом же стержне от действия единичной вертикальной силы на узел C; l_α – длина стержня. Усилия пяти жестких опорных стержней в формулу не входят. Последовательный расчет прогиба для ферм с различным числом панелей дает следующие выражения:

$$\Delta_1 = P(33a^3 + 7c^3)/(2EFh^2),$$
$$\Delta_2 = P(299a^3 + 33c^3)/(2EFh^2),$$
$$\Delta_3 = P(969a^3 + 161c^3)/(2EFh^2),$$
$$\Delta_4 = P(2907a^3 + 307c^3)/(2EFh^2), \ldots$$
$$\Delta_5 = 5P(1189a^3 + 179c^3)/(2EFh^2), \ldots$$

С помощью оператора `rgf_findrecur` системы «Maple» можно убедиться, что коэффициенты членов последовательности при a^3 удовлетворяют рекуррентному уравнению

$$C_{1,n} = C_{1,n-1} + 4C_{1,n-2} - 4C_{1,n-3} - 6C_{1,n-4} + 6C_{1,n-5} + 4C_{1,n-6} - 4C_{1,n-7} - C_{1,n-8} + C_{1,n-9}. \tag{2}$$

Для получения этой закономерности потребовалось проанализировать последовательность 18 решений. Общий вид решения:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3)/(EFh^2). \tag{3}$$

Оператор `rsolve` системы компьютерной математики «Maple» дает решение уравнения (2):

$$C_1 = \left(40n^4 + 8\left(-1^{\,n} + 10\right)n^3 + 2\left(6\ -1^{\,n} + 37\right)n^2 + 2\left(5\ -1^{\,n} + 17\right)n + 9\ -1^{\,n} + 9\right) / 12. \quad (4)$$

Аналогично находится и коэффициент C_2 в формуле (3):

$$C_2 = \left(5n^4 + 2\left(5 - 2\ -1^{\,n}\right)n^3 + \left(13 - 6\ -1^{\,n}\right)n^2 + 4\left(-1^{\,n} + 2\right)n + 9\ -1^{\,n} + 9\right) / 12. \quad (5)$$

В случае загружения узлов *верхнего* пояса фермы решение для прогиба середины пролета также имеет вид (2), но с коэффициентами:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(40n^4 + 8\left(-1^{\,n} + 10\right)n^3 + 2\left(6\ -1^{\,n} + 25\right)n^2 + 2\left(5 - \ -1^{\,n}\right)n - 9\ -1^{\,n} - 3\right) / 12, \\ C_2 &= \left(5n^4 + 2\left(5 - 2\ -1^{\,n}\right)n^3 + \left(19 - 6\ -1^{\,n}\right)n^2 + 2\left(7 - \ -1^{\,n}\right)n - 6\ -1^{\,n}\right) / 6. \end{aligned} \quad (6)$$

Если ферма загружена сосредоточенной силой в узле *C* середины пролета, то коэффициенты в (3) также являются полиномами по числу панелей, но на порядок ниже:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(16n^3 + 6\left(-1^{\,n} + 4\right)n^2 + 2\left(3\ -1^{\,n} + 13\right)n - 3\ -1^{\,n} + 12\right) / 12, \\ C_2 &= \left(4n^3 + 6\left(1 - \ -1^{\,n}\right)n^2 + 2\left(10 - 3\ -1^{\,n}\right)n + 3\ -1^{\,n} + 15\right) / 12. \end{aligned}$$

График зависимости относительного прогиба $\Delta'_n = EF\Delta_n / (PL_0)$ от числа панелей при $a = 3$ м от действия силы *P*, приложенной к узлу *C* в середине пролета, представлен кривыми на рис. 3.

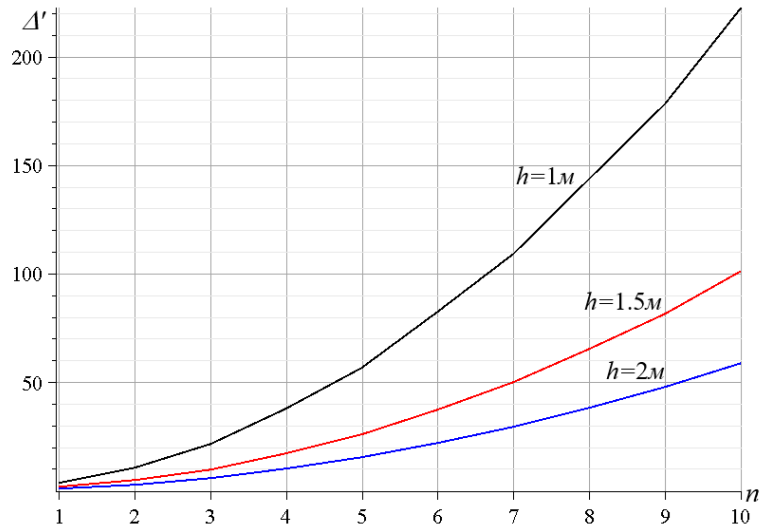


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей. Нагрузка на узел *C*

Кривые имеют квадратичную асимптотику: $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta'_n / n^2 = (8a^3 + c^3) / (24ah^2)$. Выражение для прогиба (3) с коэффициентами (6) для случая загружения *верхнего* пояса при $\Delta'_n = EF\Delta_n / (P_a L_0)$, где $P_a = P / (4n + 4)$ имеет аналогичную асимптотику: $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta'_n / n^2 = 5(8a^3 + c^3) / (192ah^2)$.

Смещение опоры. Вертикальные нагрузки на ферму вызывают не только ее прогиб, но и горизонтальное смещение трех подвижных опор. Вычисление смещения крайней опоры *A* выполняется в том же алгоритме, что и расчет прогиба. Расчетная формула по Максвеллу – Мору имеет вид:

$$\delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu-5} S_\alpha^1 S_\alpha^P l_\alpha \,/\,(EF), \tag{7}$$

где S_α^P – усилие в стержне с номером $\alpha = 1, \ldots, \nu - 5$ от узловой внешней нагрузки; S_α^1 – усилие в этом же стержне от действия единичной горизонтальной силы на опорный узел *A*. От такой нагрузки, очевидно, возникнут усилия только в горизонтальных стержнях длиной 2*a* верхнего пояса, поэтому в решение войдут усилия и длины именно в этих стержнях, что существенно упрощает решение. Обобщением методом индукции серии решений для ферм с различным числом панелей из рекуррентного уравнения

$$\delta_{A,n} = 4\delta_{A,n-1} - 6\delta_{A,n-2} + 4\delta_{A,n-3} - \delta_{A,n-4}$$

получается выражение для смещения опоры при загружении фермы по *верхнему* поясу:

$$\delta_{An} = 4Pa^2 \;\; n+1 \;^2 (2n-1) \,/\, (hEF).$$

Аналогично, для равномерной нагрузки фермы по узлам *нижнего* пояса смещение имеет вид:

$$\delta_{An} = Pa^2 \;\; 4n^3 + 6n^2 + 6n + 3 \;\; / \,(hEF).$$

От действия сосредоточенной силы *P* на узел *C* в середине пролета опора *A* получает горизонтальное смещение:

$$\delta_{An} = Pa^2 \;\; (6n^2 + 6n + 3 + (2n+3)(-1)^n) \,/\, (2h) \;\; / \,(hEF).$$

В последнем решении, в отличие от двух предыдущих для распределенных нагрузок, зависимость по числу панелей квадратичная.

Заключение. Для плоской схемы внешне статически неопределимой фермы и трех видов нагрузки методами компьютерной математики выведены формулы для прогиба конструкции и смещения подвижной опоры. Найдены зависимости реакций опор от числа панелей. Все формулы имеют вид полиномов по числу панелей с коэффициентами, знаки которых зависят от четности числа панелей. Предложенный алгоритм может быть применим и для других регулярных систем.

Библиографический список

1. Kamiński M., Solecka M. Optimization of the truss-type structures using the generalized perturbation-based Stochastic Finite Element Method // Finite Elements in Analysis and Design. 2013. Vol. 63. Pp. 69–79. DOI: 10.1016/j.finel.2012.08.002.

2. Plevris V., Ahmad A. Deriving analytical solutions using symbolic matrix structural analysis: P. 2. Plane trusses // Heliyon. 2025. Vol. 11. No. 4. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2025.e42372.

3. Jäger M., Albertsen J., Wartzack S. An analytical exact, locking free element formulation for thin-walled composite Timoshenko beams // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2025. Vol. 439. P. 117886. DOI: 10.1016/j.heliyon.2025.e42372.

4. Zamani H. [et al.]. An Enhanced Memory-Based Metaheuristic for Optimization of Large-Scale Truss Structures // Systems and Soft Computing. 2026. P. 200510. https://doi.org/10.1016/j.sasc.2026.200510.

5. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019.

6. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 4 (39). С. 27–34.

7. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. No. 4 (54). Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.

8. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitectured cellular solids. The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. No. 9 (85). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.

9. Лыонг К. Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // Строительная механика и конструкции. 2024. № 2 (41). С. 16–26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002.

10. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.

11. Ding S. L., Liu H. J., Wang C. S. Fatigue crack propagation evaluation of cruciform welded joints in steel truss girder suspension bridge using digital fatigue technique // Structures. 2026. Vol. 91. P. 112478. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.112478.

12. Wang C. S. [et al.]. Digital simulation of distortion-induced fatigue in steel bridges with different geometrical configurations // Journal of Constructional Steel Research. 2024. Vol. 216. P. 108613. https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.108613.

13. Петриченко Е. А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. Т. 3. №. 26. С. 21–29.

14. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 109. Article No. 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

15. Грибова О. В. Формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2025. № 1 (44). С. 31–39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003.

16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 108. Article No. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

17. Xu W. [et al.]. Thermal behavior of large-span spatial truss structure: Experiment, numerical analysis, and construction study // Journal of Building Engineering. 2026. P. 116436. DOI: 10.1016/j.jobe.2026.116436.

18. Chenaghlou M. R., Kheirollahi M., Mirzaei M. Enhancing the seismic ductility and strength reduction factor of double-layered vaulted spatial shells incorporating buckling-restrained compound truss elements // Structures. 2025. Vol. 72. P. 108220. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.108220.

19. Xiao X. [et al.]. Fatigue reliability assessment of aging steel truss railway bridges under stochastic traffic loading // Structures. 2026. Vol. 88. P. 111848. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.111848.

20. Pengfei Y. A. N. [et al.]. A review on truss structures in aircraft design and optimization // Chinese Journal of Aeronautics. 2026. P. 104158. https://doi.org/10.1016/j.cja.2026.104158.

21. Попов О. Н., Мартынюк И. В., Ящук М. О., Хамидуллина Н. В. Сравнительный анализ методов расчета грузоподъемности металлического пролетного строения моста // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. 2022. № 3. С. 70–78. DOI: 10.15593/24111678/2022.03.08.

22. Кирсанов М. Н. «Maple» и «Maple»t. Решения задач механики. СПб.: Лань, 2022. 512 с.

References

1. Kamiński M., Solecka M. Optimization of the truss-type structures using the generalized perturbation-based Stochastic Finite Element Method // Finite Elements in Analysis and Design. 2013. Vol. 63. Pp. 69–79. DOI: 10.1016/j.finel.2012.08.002.

2. Plevris V., Ahmad A. Deriving analytical solutions using symbolic matrix structural analysis: P. 2. Plane trusses // Heliyon. 2025. Vol. 11. No. 4. https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2025.e42372.

3. Jäger M., Albertsen J., Wartzack S. An analytical exact, locking free element formulation for thin-walled composite Timoshenko beams // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2025. Vol. 439. P. 117886. DOI: 10.1016/j.heliyon.2025.e42372.

4. Zamani H. [et al.]. An Enhanced Memory-Based Metaheuristic for Optimization of Large-Scale Truss Structures // Systems and Soft Computing. 2026. P. 200510. https://doi.org/10.1016/j.sasc.2026.200510.

5. Kirsanov M. Planar Trusses: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, 2019.

6. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural vibrations of a flat model of a composite truss // Structural Mechanics and Structures. 2023. No. 4 (39). Pp. 27–34 (in Russian).

7. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. No. 4 (54). Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.

8. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitectured cellular solids. The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. No. 9 (85). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.

9. Luong C. L. Dependence of the region of resonantly safe frequencies on the dimensions of a statically determinate plane truss // Structural Mechanics and Structures. 2024. No. 2 (41). Pp. 16–26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002 (in Russian).

10. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical assessment of the fundamental frequency of natural vibrations of a regular truss // Structural Mechanics and Structures. 2023. No. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002 (in Russian).

11. Ding S. L., Liu H. J., Wang C. S. Fatigue crack propagation evaluation of cruciform welded joints in steel truss girder suspension bridge using digital fatigue technique // Structures. 2026. Vol. 91. P. 112478. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.112478.

12. Wang C. S. [et al.]. Digital simulation of distortion-induced fatigue in steel bridges with different geometrical configurations // Journal of Constructional Steel Research. 2024. Vol. 216. P. 108613. https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2024.108613.

13. Petrichenko E. A. Lower bound for the natural frequency of the Fink truss // Structural Mechanics and Structures. 2020. No. 3. 26. Pp. 21–29 (in Russian).

14. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 109. Article No. 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

15. Gribova O. V. Formulas for calculating the deflection and natural frequency of a flat truss with an arbitrary number of panels // Structural Mechanics and Structures. 2025. No. 1 (44). Pp. 31–39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003 (in Russian).

16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. No. 108. Article No. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

17. Xu W. [et al.]. Thermal behavior of large-span spatial truss structure: Experiment, numerical analysis, and construction study // Journal of Building Engineering. 2026. P. 116436. DOI: 10.1016/j.jobe.2026.116436.

18. Chenaghlou M. R., Kheirollahi M., Mirzaei M. Enhancing the seismic ductility and strength reduction factor of double-layered vaulted spatial shells incorporating buckling-restrained compound truss elements // Structures. 2025. Vol. 72. P. 108220. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.108220.

19. Xiao X. [et al.]. Fatigue reliability assessment of aging steel truss railway bridges under stochastic traffic loading // Structures. 2026. Vol. 88. P. 111848. https://doi.org/10.1016/j.istruc.2026.111848.

20. Pengfei Y. A. N. [et al.]. A review on truss structures in aircraft design and optimization // Chinese Journal of Aeronautics. 2026. P. 104158. https://doi.org/10.1016/j.cja.2026.104158.

21. Popov O. N., Martynyuk I. V., Yashchuk M. O., Khamidullina N. V. Comparative analysis of methods for calculating the load-bearing capacity of a metal bridge superstructure // Transport. Transport structures. Ecology. 2022. No. 3. Pp. 70–78. DOI: 10.15593/24111678/2022.03.08 (in Russian).

22. Kirsanov M. N. «Maple» and «Maple»t. Solutions of mechanics problems. St. Petersburg: Lan, 2022. 512 p. (in Russian).

FORMULAS FOR THE DEFLECTIONS OF A PLANAR TRUSS WITH A COMPLEX LATTICE

M. N. Kirsanov [1], G. E. Gabrielyan [2]

National Research University "MPEI" [1]
Moscow, Russia
Voronezh State Technical University [2]
Russia, Voronezh

[1] Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: (495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru
[2] PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, email: grayr2010@rambler.ru

For a planar, statically determinated, regular lattice truss with double end supports, formulas for the dependence of midspan deflection on the number of panels are derived using induction. Distributed vertical nodal loads on the lower and upper chords and a concentrated load on the midspan node are considered separately. The Maxwell – Mohr integral formula is used to calculate the truss deflection and the horizontal shear of the sliding support, assuming equal stiffness for all members. The forces in the members are found analytically using the «Maple» symbolic mathematics system. Generalizing a series of solutions for trusses of various orders to an arbitrary number of panels yields the dependence of the deflection on the number of panels and the truss dimensions.

Keywords: plane truss, deflection, analytical solution, «Maple», induction method, Maxwell – Mohr formula, support shift.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 6214.072.14
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.005

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ СПЛОШНОСТЕНЧАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

В. А. Кравчук [1], Е. В. Кравчук [2]

Тихоокеанский государственный университет [1]
Россия, г. Хабаровск
Дальневосточный государственный университет путей сообщения [2]
Россия, г. Хабаровск

[1] Д-р техн. наук, проф. Высшей школы промышленного и гражданского строительства, тел.: +7(4212)97-08-11, e-mail: 000415@togudv.ru
[2] Ст. преп. кафедры строительства, тел.: +7(4212)40-75-79, e-mail: 004938@togudv.ru

Постановка задачи. Изучить критические нагрузки и напряжения, а также соответствующие им перемещения в предварительно напряженном стальном стержне постоянного сечения, получившем выгиб в процессе его изготовления

Материалы и методы. В основу научного поиска приняты методы сопротивления материалов и теории устойчивости внецентренно нагруженных стержней, а также методика расчета стальных тонкостенных стержней, предварительно напряженных вытяжкой стенки.

Результаты. Приведены сведения о величине предварительных напряжений в «анкерном» поясе и стенки тавра, являющегося исходным элементом двутаврового сечения стержня. Определен выгиб на стадии изготовления предварительно напряженного стального стержня. Установлена величина момента усилий предварительного напряжения, создающего его выгиб. Рассмотрена общая устойчивость предварительно напряженного стержня при жестком закреплении его в основании. Вычислены перемещения, критические усилия и напряжения предварительно напряженного стержня, имеющего начальную погибь. Определено напряженно-деформированное состояние стержня при шарнирном закреплении его концевых участков. Изучены перемещения и критические напряжения предварительно напряженного стержня при изменении граничных условий его закрепления в опорных узлах. Рассчитан коэффициент продольного изгиба предварительно напряженных стержней, имеющих начальную погибь.

Выводы. Предварительное напряжение стального стержня, имеющего начальную погибь, повышает его общую устойчивость как при жестком, так и при шарнирном закреплении его концевых участков.

Ключевые слова*:* предварительное напряжение, общая устойчивость, начальная погибь, внецентренное сжатие, критические усилия.

Введение. В том случае, когда работа внешних нагрузок A равна потенциальной энергии сжатого стержня U, устойчивая форма его равновесия переходит в первую форму неустойчивого равновесия. Сила P, приводящая к значительным перемещениям стержня, находящегося в состоянии неустойчивого равновесия, называется критической.

Сжатые стержни, являющиеся составной частью металлических колонн или же входящие в состав ферм, наряду с изгибаемыми элементами балочных конструкций являются основой для конструктивных построений металлических каркасов зданий и сооружений.

Теория расчета центрально или внецентренно нагруженных (сжато-изогнутых) стержней представлена в научных исследованиях по сопротивлению материалов, строительной механике и специальных научных работах по теории устойчивости сжатых стержней.

© Кравчук В. А., Кравчук Е. В., 2026

Исследования Эйлера [1], Лагранжа [2], Мушенброка [3], а также И. Г. Бубнова [4] и Б. Г. Галеркина [5], Ритца и С. П. Тимошенко [6, 7], А. М. Ляпунова [8], Болотина [9] и др. заложили основы научной концепции об устойчивости сжатых стержней. Большинство работ посвящены исследованию центрально сжатых стержней при различных закреплениях концевых сечений в предположении упругой работы материала по недеформируемой схеме, учитывающей пропорциональную зависимость между внешними нагрузками и перемещениями поперечных сечений стержня.

Однако в практике эксплуатации сжатых стержней приходится встречаться со схемой нагружения, когда внешняя нагрузка прикладывается к стойке с некоторым эксцентриситетом по отношению к центру тяжести поперечного сечения.

Исследования С. П. Тимошенко [7], А. С. Вольмира [10], И. Я Штаермана и А. А. Пиковского [11], Н. В. Корноухова [12], Р. С. Санжаровского [13–15], Ф. Блейха [16], С. Д. Лейтеса [17] и др. посвящены исследованию внецентренно нагруженных (сжато-изогнутых) стержней с учетом малых и больших прогибов. Установлено, что при упругой работе материала сечения стержень устойчивости не теряет.

И. Я Штаерман и А. А. Пиковский [11, с. 30] пишут: «…строго говоря, потери устойчивости ни первого, ни второго род здесь не может быть. Поэтому несущая способность сжато-изогнутых стержней, работающих в пределах упругости, должна определяться либо по прогибам, либо по максимальным краевым напряжениям». Н. В. Корноухов [12, с. 12] отмечает: «Поэтому для практических целей не столь важно знать критическое значение нагрузок, при которых нарушается равновесие между внутренними и внешними силами, сколь значение нагрузок, при которых напряжения и деформации системы перестают быть допустимыми. Ясно, что такой расчет следует вести по деформируемой схеме, поскольку он должен обеспечивать сооружению защиту от нарушения прочности и от внезапного резкого роста деформаций. Такое состояние конструкций мы назовем расчетом по устойчивой прочности, определяющей напряжения и деформации, соответствующие некоторым промежуточным состояниям, отличающиеся от критического».

Правомерность такого подхода к оценке предельного напряженного состояния стержней подтверждается исследованиями Р. С. Санжаровского и С. В. Бондаренко [13–15].

Изложенное приобретает остроту при исследовании стальных сжатых и сжато-изогнутых стержней. По мнению С. П. Тимошенко [6, п. 58]: «…стойки из стали теряют устойчивость, как только $\sigma_{cr} = \sigma_T$», и далее, на с. 127: «…конструкции теряют сопротивление, когда нагрузка достигает критических значений».

Однако исследования А. С. Вольмира [10], Ф. Блейха [16], С. Д. Лейтеса [17] показали, что сжато-изогнутые стержни, работающие в области упругопластических деформаций, также обладают устойчивостью. Критическое напряжение, соответствующее пределу пропорциональности материала, больше критического напряжения, соответствующего пределу текучести, примерно на 40 % [16, с. 60], и, следовательно, проверку несущей способности сжато-изогнутых стержней следует вести в предположении упругопластической работы материала.

Все последующие исследования устойчивости стержней проводятся, придерживаясь изложенной концепции.

Интенсивная работа по изучению общей устойчивости стержней проводится в Санкт-Петербургском архитектурно-строительном университете. Изучены влияние повреждений на устойчивость по изгибо-крутильной форме, теоретические основы и практические методы устойчивости тонкостенных стальных конструкций, запредельная несущая способности стержней после потери устойчивости, проведено исследование сжатых стержней различной гибкости с начальной кривизной [18–23].

В научно-исследовательском институте НИИЖБ им. А. А. Гвоздева проводятся экспериментальные исследования устойчивости трубобетонных колонн [24]**,** ЦНИИСКе им. В. А. Кучеренко изучается продольная устойчивость стержней с учетом реальной диаграммы работы

стали [25], в институте «Хабаровскпромпроект» проведено исследование устойчивости внецентренно сжатой двутавровой колонны с линейно изменяющейся высотой стенки [26]. Ученые Пензенского государственного университета архитектуры и строительства изучили критические силы для автономного упругого стержня и для неоднородного упругого элемента [27]. В диссертационном исследовании [29] и монографии [30] рассмотрена несущая способность предварительно напряженных, сплошностенчатых стальных стержней, имеющих начальный выгиб, при различных внешних нагрузках. В Воронежском государственном техническом университете изучена устойчивость цилиндрической гофрированной трубы с начальным прогибом [31]; прочность и продольный изгиб трубобетонных стержней при центральном сжатии исследованы в Нижегородском государственном архитектурно-строительном университете [32].

Модели и методы. В настоящей статье изложена общая устойчивость стального предварительно напряженного стержня, имеющего начальный выгиб.

На стадии предварительного напряжения он получает начальную погибь:

$$f_o = \frac{M_o l^2}{EI_{xt}} = 0{,}1268\frac{R_y l^2}{Eh} \text{ см;}$$

$$M_o = \frac{R_y AhK^2}{(K+1^2(K+2)} -$$

момент усилий предварительного напряжения; l – длина стержня; E – модуль упругости стали; $I_{xt} = 0{,}0873438 \cdot Ah^2$ – момент инерции тавра (исходного элемента стержня); R_y – расчетное сопротивление материала стенки стержня; h – высота поперечного сечения элемента; K – коэффициент асимметрии сечения; A – площадь поперечного сечения стержня.

Предварительное напряжение по сечению распределяется таким образом, что верхний поясной лист двутавра получает сжимающее предварительное напряжение $\sigma_{fv} = 0{,}23R_y$, зона стенки высотой $2h/3$, примыкающая к верхнему поясному листу, находится под воздействием растягивающих предварительных напряжений $\sigma_{wv} = 0{,}77R_y$, а нижняя зона стенки $(h/3)$ – сжимающих предварительных напряжений $\sigma_{wn} = 0{,}375R_y$.

Эффект от предварительного напряжения будет достигнут тогда, когда стержень нагружается внешней сжимающей нагрузкой S, приложенной с эксцентриситетом e (рисунок).

При этом предполагается, что сжимающее усилие $-S$ и момент $M = -Se_1 = -S(k+e-y)$ должны ликвидировать как предварительные напряжения в поперечном сечении элемента, так и его начальную погибь f_o. Известно [28], что при полном использовании эффекта предварительного напряжения суммарные усилия в поперечном сечении стенки стержня вызывают пластические, а в поясах упругие деформации. Следовательно, в том случае, когда напряжения в поясах достигнут значений, равных расчетному сопротивлению материала, стержень будет находиться в предельном состоянии и неизбежна потеря устойчивости в плоскости большей жесткости.

При исследовании предварительно напряженных стержней [28] установлено, что приведенный модуль упругости материала стержня, находящегося в состоянии упруго-пластического деформирования, определяется выражением

$$T = 0{,}972E. \quad (1)$$

На рис. а представлен один из вариантов расчетной схемы внецентренно нагруженного стержня. Очевидно, что в процессе нагружения стержня внешней нагрузкой срединное сечение его поворачиваться не будет. Отсутствие поворота сечения характерно для стержней, жестко закрепленных в основании. Условно полагая, что срединное сечение имеет жесткое

закрепление, допустим свободное перемещение верхнего конца стержня и исследуем его критические напряжения с расчетной схемой, представленной на рис. б.

Внешняя нагрузка $-S$ приложена с эксцентриситетом e_1 и создает момент

$$M = -S[f_o - y) + (k - f_o + e] = -S(k + e - y), \tag{2}$$

где $y -$ текущая ордината, характеризующая изменение прогиба по оси X ; $k -$ перемещение верхнего конца стержня; $e -$ эксцентриситет усилия S`.

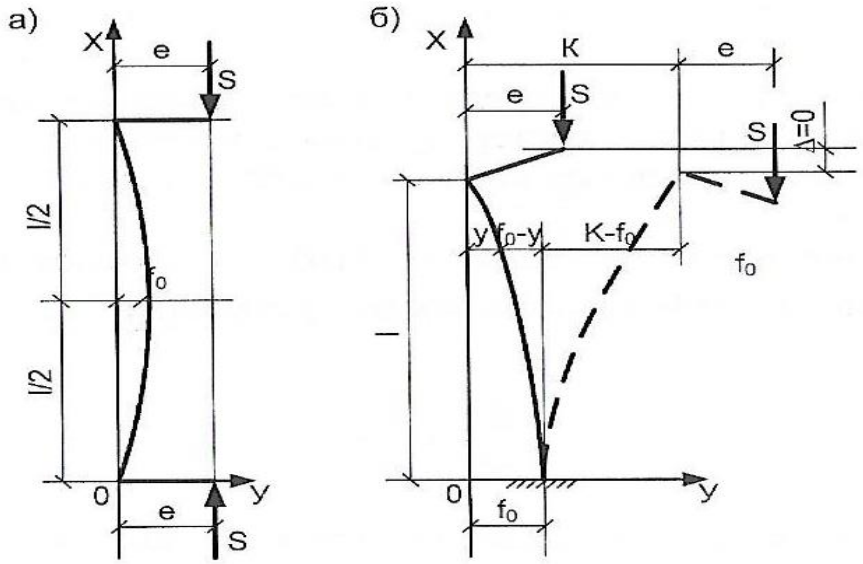


Рисунок. Расчетная схема предварительно напряженного стержня

Критическое напряжение в стержне σ_{cr} определяется на основании дифференциального уравнения изогнутой оси стержня.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{TI_x}. \tag{3}$$

Здесь $TI_x -$ изгибная жесткость стержня, находящегося в состоянии упругопластического деформировании.

Уравнение прогибов, удовлетворяющих равенству (3), примем в виде:

$$y = C_1 \sin px + C_2 \cos px + (k + e), \tag{4}$$

где

$$p = \sqrt{\frac{S}{TI_x}}; \tag{5}$$

$C_1, C_2 -$ постоянные интегрирования, подлежащие определению.

Первая и вторая производные от прогибов y по параметру x имеют вид:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 p \cos px - C_2 p \sin px;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - C_1 p^2 \sin px - C_2 p^1 \cos px = -p^2 (C_1 \sin px + C_2 \cos px).$$

Из граничных условий закрепления концов стержня следует, что в жестком узле $(x=0)$ поворот сечения $dx/dy=0,$ то есть $C_1=0.$

С другой стороны, при $x=0$ прогиб стержня y равен его выгибу, полученному на стадии изготовления f_o, то есть $y=f_o$.

Следовательно, $y=C_1\sin px+C_2\cos px+(k+e)=f_o$. Из этого следует, что $C_2=f_o-(k+e)$, или же

$$y=[(f_o-(k+e)]\cos px+(k+e)=f_o\cos px-(k+e)(\cos px-1). \quad (6)$$

В предельном состоянии верхний конец стержня переместится на расстояние $y=k,$ или $y=f_o\cos pl-(k+e)(\cos pl-l)=k.$ Откуда

$$k=f_o+e\cdot\frac{1-\cos pl}{\cos pl}. \quad (7)$$

С учетом выражения (7) прогиб

$$y=f_o-e\cdot\frac{\cos px-1}{\cos pl}. \quad (8)$$

Условие $y=0$ позволяет заключить, что $k=0$. При этом из зависимости (8) следует, что

$$e=\frac{f_o\cos pl}{\cos pl-1}. \quad (9)$$

С учетом изложенного момент внешних нагрузок:

$$\begin{aligned} M&=S(k+e-y)=S[(f_o+e\cdot\frac{1-\cos pl}{\cos pl})+e-(f_o-e\cdot\frac{\cos px-1}{\cos pl})]=\\ &=S\cdot e\frac{1-\cos pl+\cos pl+\cos px-1}{\cos pl}=Se\frac{\cos px}{\cos pl}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для стержня, нижний конец которого жестко закреплен в основании, максимальный момент внешних нагрузок будет наблюдаться в заделке. Поэтому

$$M_{\max(x=0)}=Se\frac{1}{\cos pl}=S\cdot f_o\frac{\cos pl}{(\cos pl-1)}\cdot\frac{1}{\cos pl}=Sf_o\frac{1}{(\cos pl-1)}. \quad (11)$$

Прогибы y и k, а также момент внешних нагрузок M будут приобретать максимальные значения тогда, когда аргумент тригонометрической функции косинуса $pl=0,2\pi\ldots$ и т. д. Нулевые значения аргумента pl не удовлетворяют условию задачи, так как $p\neq 0$ и $l\neq 0.$ Следовательно, $pl=2\pi$, или $p=2\pi/l$. Приравнивая значение p к соответствующему значению, по выражению (5) находим, что критическая сжимающая нагрузка S определяется зависимостью

$$S=\frac{4\pi^2ET}{l^2}, \quad (12)$$

а соответствующее ей критическое напряжение

$$\sigma_{cr}=\frac{S}{A}=\frac{4\pi^2\cdot 0,972E\cdot}{Al^2}=\frac{3,888\cdot\pi^2E}{\lambda_x}. \quad (13)$$

Из условия о том, что предельное состояние элемента наступает при значении тригонометрической функции $\cos pl = \cos 2\pi = 1{,}0$, следует, что на основании зависимости (7) максимальное перемещение верхнего конца стержня $k = f_0$, а эксцентриситет $e \mapsto \infty$, то есть стержень будет находиться в критическом состоянии в тот момент, когда начальная погибь f_o будет ликвидирована полностью. Для достижения такого состояния сила S должна быть приложена с эксцентриситетом $e \mapsto \infty$.

Максимальная кривизна $1/\rho$ может быть вызвана только максимальным моментом внешних нагрузок. Известно, что в стержнях, жестко закрепленных в основании, максимальный момент наблюдается в заделке, то есть при $x = 0$, что соответствует принятой расчетной схеме (рис. б).

При $x = 0$ $1/\rho = -M / ET = ep^2$, то есть решение задачи устойчивости внецентренно нагруженных стержней полностью соответствует трактовке дифференциального уравнения изогнутой оси.

В соответствии с теорией предварительного напряжения стальных стержней, изложенной в работе [31], пластические деформации в их стенке наступают при внешних напряжениях $\sigma_o = 42{,}875$ kH / см^2. Полагая, что при указанных напряжениях стержень будет находиться в критическом состоянии, можно определить допустимую гибкость, при которой останется справедливой формула (13):

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{3{,}888 \cdot \pi^2 E}{42{,}875}} = 137. \tag{14}$$

В предыдущем изложении рассмотрена стойка с одним защемленным, а другим свободным концом. Аналитические выражения перемещения k (7), прогиба y (8) и эксцентриситета e (9), полученные для стойки с жестким нижним узлом, можно применить и для стойки с шарнирными узлами (рис. а). На основании симметрии можно заключить, что срединное сечение не имеет поворота при изгибе и каждая половина стойки рис. а находится в таких же условиях, как и стойка рис. б. Следовательно, прогибы, эксцентриситет, перемещения и момент получаются подстановкой $l/2$ вместо l в уравнения (7)–(10):

$$y = f_o - e\frac{\cos px/2 - 1}{\cos pl2}; \tag{15}$$

$$k = f_o + e\frac{1 - \cos pl/2}{\cos pl/2}; \tag{16}$$

$$e = f_o \frac{\cos pl/2}{\cos pl/2 - 1}; \tag{17}$$

$$M_{\max} = Se \quad \frac{1}{\cos pl/2 - 1}. \tag{18}$$

К зависимостям (15)–(18) можно прийти, рассмотрев напряженно-деформированное состояние стержня с расчетной схемой рис. а, вне связи с рис. б.

Момент в произвольном сечении стержня можно записать как

$$M = -S(e - y), \tag{19}$$

а прогиб

$$y = C_1 \sin px + C_2 \cos px + e. \tag{20}$$

Из граничных условий закрепления концов стержня следует, что при $x = l/2$ прогиб $y = f_o$ и $C_1 = \frac{f_0}{\sin pl/2} - C_2 \frac{\cos pl/2}{\sin pl/2} - \frac{e}{\sin pl/2}$.

В сечении, на расстоянии $x = l/2$, поворот поперечного сечения равен нулю ($\frac{dy}{dx} = 0$). Это означает, что $C_1 = C_2 \frac{\sin pl/2}{\cos pl/2}$. Сопоставление значений коэффициентов C_1 позволяет установить, что $C_2 = (f_o - e)\cos pl/2$, а $C_1 = (f_o - e)\sin pl/2$. В таком случае прогиб

$$y = (f_o - e)(\cos\frac{pl}{2}\cos px + \sin\frac{pl}{2}\sin px) + e. \quad (21)$$

Эксцентриситет e усилия S, при котором начальная погибь f_0 полностью ликвидирована, то есть при $f_0 = 0$, находится из условия, что в этом случае $y = 0$ (рис. а):

$$e = f_0 \frac{\cos pl/2}{\cos pl/2 - 1}. \quad (22)$$

Момент внешних нагрузок:

$$M = S(e - y) = Sf_0 \frac{\cos pl/2}{\cos pl/2 - 1}. \quad (23)$$

Таким образом, доказано, что формулы, характеризующие напряженно-деформированное состояние стержня, при изменении его расчетной схемы не изменяются.

Справедливость формул (15)–(18) может быть доказана при изменении граничных условий закрепления стержня, показанного на рис. а.

При $x = 0$ и $y = 0$ постоянная интегрирования $C_2 = -e$. Если $x = l$, при $y = 0$ $C_2 = -e \cdot \frac{1}{\cos pl} - C_1 \cdot \frac{\sin pl}{\cos pl}$. Сопоставляя значения коэффициента C_2, находим, что $C_1 = e \cdot \frac{1 - \cos pl}{\sin pl}$. Прогиб стержня в таком случае:

$$y = e(1 - \frac{1 - \cos pl}{\sin pl} \cdot \sin pl - \cos pl). \quad (24)$$

Так как при $x = l/2$ прогиб $y = f_o$, то эксцентриситет внешней нагрузки:

$$e = f_0 \frac{1}{1 - \frac{1 - \cos pl}{\sin pl}\sin\frac{pl}{2} - \cos\frac{pl}{2}}. \quad (25)$$

С учетом выражения прогиба стержня по зависимости (24) момент внешних нагрузок:

$$M = S(e - y) = Se(\frac{1 - \cos pl}{\sin pl}\sin px - \cos px). \quad (26)$$

Максимальный момент следует ожидать в опорных узлах, т. е. при $x = 0$:

$$M_{\max(x=0)} = Sf_0 \frac{1}{1 - \frac{1 - \cos pl}{\sin pl}\sin\frac{pl}{2} - \cos\frac{pl}{2}} = Sf_0 \frac{\sin pl}{\sin pl - 2 \cdot \sin\frac{pl}{2}}. \quad (27)$$

Здесь учтено, что $\sin\frac{pl}{2}\cos pl-\cos\frac{pl}{2}\sin pl=\sin(\frac{pl}{2}-pl)=-\sin\frac{pl}{2}$.

Учитывая, что $\sin pl=2\sin\frac{pl}{2}\cos\frac{pl}{2}$, получим:

$$M=Sf_0\frac{\cos pl/2}{\cos pl/2-1}=Se\frac{1}{\cos pl/2-1}. \tag{28}$$

В таком случае:

$$e=f_0\frac{\cos pl/2}{\cos pl/2-1}. \tag{29}$$

Этим самым установлена идентичность формул (28) и (29) формулам (15)–(18). Предельное напряженно-деформированное состояние стержня будет наблюдаться при $\cos pl/2=1$ или $pl/2=2\pi$. Отсюда следует, что

$$S_{cr}=\frac{16\pi^2\cdot 0,972E}{l^2}=\frac{15,552\cdot\pi^2E}{l^2}; \tag{30}$$

$$\sigma_{cr}=\frac{S_{cr}}{A}=\frac{15,552\cdot\pi^2E}{\lambda_z^2}. \tag{31}$$

Допустимая гибкость предварительно напряженных колонн, шарнирно закрепленных в узлах, определяется на основе равенства критических напряжений максимальному сжимающему напряжению:

$$\sigma_o=42,875\ \text{kH/см}^2,\ \lambda_z=\sqrt{\frac{15,552\cdot\pi^2E}{42,875}}=274. \tag{32}$$

Неизбежные случайные несовершенства стержней при изготовлении, транспортировке и монтаже требуют снижения уровня критических напряжений. На основании рекомендаций С. П. Тимошенко [6] фактические критические усилия следует получать делением их на коэффициент безопасности, принимаемый равным 1,7–2,5.

Другой путь определения более достоверных сжимающих критических напряжений сводится к их вычислению из выражения сложного напряженного состояния внецентренно нагруженных предварительно напряженных стержней:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max}&=\frac{S}{A}+\frac{M}{W_z}=\frac{S}{A}+\frac{Se\frac{1}{\cos pl/2}}{\rho A}=\frac{S}{A}+\frac{S}{A}\cdot\frac{e}{\rho}\cdot\frac{1}{\cos pl/2}=\frac{S}{A}[1+m_z\frac{1}{\cos pl/2}]=\\&=\sigma_o[1+m_z\frac{1}{\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{S}{EI_z}}}]=\sigma_o[1+m_z\frac{1}{\cos\frac{l}{2}\sqrt{\frac{S}{Er^2A}}}]=\sigma_o[1+m_z\frac{1}{\cos\frac{\lambda_z}{2}\sqrt{\frac{\sigma_o}{E}}}].\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь учтено, что ядровое расстояние $\rho=W_z/A$, относительный эксцентриситет $m_z=e/\rho$, «центральное» сжимающее напряжение $\sigma_o=S/A$.

Коэффициент продольного изгиба внецентренно нагруженных (сжато-изогнутых) предварительно напряженных стержней $\phi_{e.pr}$ будет определен делением максимального сжимающего напряжения $\sigma_{\max}$ на сжимающее напряжение σ_o, создающее текучесть материала стенки стержня:

$$\phi_{e.pr}=\sigma_{\max}/\sigma_o. \tag{34}$$

Значение коэффициента $\phi_{e.pr}$ приведены в таблице.

Таблица

Коэффициенты ϕ_e при внецентренном сжатии сплошностенчатых предварительно напряженных стержней в плоскости действия момента, совпадающей с плоскостью симметрии

Условная гибкость $\bar{\lambda}$	Значение ϕ_e при приведенном относительном эксцентриситете m_{ef}									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,99
0,9	0,9999	0,8000	0,7000	0,6000	0,5000	0,4000	0,3000	0,2000	0,1000	0,01
1,8	0,8999	0,7999	0,6999	0,5999	0,499	0,3998	0,2998	0,1998	0,099	0,0098
2,7	0,8999	0,7999	0,6999	0,5998	0,4999	0,3998	0,2998	0,1997	0,099	0,0097
3,6	0,8999	0,7998	0,6998	0,5997	0,4996	0,3996	0,2995	0,1994	0,099	0,0093
4,5	0,8999	0,7998	0,6997	0,5997	0,4996	0,3995	0,2992	0,1993	0,099	0,0092
5,4	0,8998	0,7997	0,6996	0,5995	0,4994	0,3993	0,2989	0,1991	0,098	0,0089
6,3	0,8998	0,7996	0,6995	0,5994	0,4992	0,3991	0,2986	0,1987	0,098	0,0084
7,23	0,8998	0,7996	0,6994	0,5993	0,4990	0,3988	0,2982	0,1984	0,098	0,0080
8,13	0,8997	0,7995	0,6992	0,5989	0,4987	0,3984	0,2978	0,1979	0,097	0,0075
9,0	0,8997	0,7994	0,6990	0,5987	0,4984	0,3981	0,2973	0,1975	0,097	0,0069
9,94	0,8996	0,7992	0,6988	0,5984	0,4981	0,3977	0,2973	0,1969	0,096	0,0062
10,84	0,8995	0,7991	0,6986	0,5982	0,4977	0,3973	0,2968	0,1964	0,095	0,0055
11,75	0,8995	0,7989	0,6984	0,5978	0,4973	0,3968	0,2963	0,1957	0,095	0,0048
12,63	0,8994	0,7987	0,6981	0,5975	0,4969	0,3963	0,2957	0,1950	0,094	0,0039
13,55	0,8993	0,7985	0,6978	0,5971	0,4964	0,3957	0,2951	0,1943	0,093	0,0030

Выводы

1. Предварительное напряжение стержня повышает его общую устойчивость.

2. Ликвидация начальной погиби в предварительно напряженном стержне посредством его внецентренного нагружения сопровождается ростом внешнего сжимающего усилия и снижением уровня предварительного напряжения в сечении. Это требует применения конструктивного решения стержня в виде биметаллического элемента с высокопрочной сталью в поясных листах.

3. Выпрямление предварительно напряженного стержня приводит его в «нулевое» состояние, способствует росту критических усилий и напряжений, а также повышению его несущей способности.

4. Аналитическое выражение максимального сжимающего напряжения, создающего предельное состояние и пластические деформации в элементе сечения, выраженное через относительный эксцентриситет, гибкость и приведенный модуль упругости материала, позволило определить коэффициент продольного изгиба предварительно напряженных стержней, имеющих начальную погибь.

Библиографический список

1. Euler Leonhard. Sur la force des colloes // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. 1759. 13 (1757). Pp. 252–282. https://archive.org/details/euler-e238/page/n27/mode/2up.

2. Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes // Miscellanea Taurinensia. 1770–1773. T. V.

3. Muschenbrock Petrus van. Interducto ad cohoerentiam cprporum firmosum // Physicae experimentales et geometricae dissertationes. Lugduni Batavorum, 1729. https://archive.org/details/gpl_1055035/page/n13/mode/2up.

4. Бубнов И. Г. Избранные труды. М.: Судпромгиз, 1956.

5. Галеркин Б. Г. Стержни и пластины // Вестник инженеров. 1915. № 19.

6. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Более сложные вопросы и задачи. М.: Наука, 1965.

7. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., 1973.
8. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950.
9. Болотин В. В. О понятии устойчивости в строительной механике // Проблемы устойчивости в строительной механике: тр. Всесоюз. конф. М., 1965.
10. Вольмир А. С. Устойчивость деформированных систем. М.: Наука, 1967.
11. Штаерман И. Я., Пиковский А. А. Основы теории устойчивости строительных конструкций. М. –Л.: Стройиздат, 1939.
12. Корноухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем. М.: Стройиздат, 1949.
13. Санжаровский Р. С. Устойчивость элементов строительных конструкций при ползучести. Л.: изд-во ЛГУ, 1984.
14. Санжаровский Р. С. Теория и расчет прочности и устойчивости элементов конструкций из стальных труб, заполненных бетоном: автореф. дис. … д-ра техн. наук. Л.: ЛИСИ 1977. 32 с.
15. Санжаровский Р. С. Расчет статически неопределимых систем с учетом физической нелинейности // Труды молодых ученых. Ч. 1. СПб., 1997.
16. Блейх Ф. Устойчивость стальных конструкций М.: Госфизматиздат, 1959.
17. Лейтес С. Д. Устойчивость стальных строительных конструкций. М.: Госстройиздат, 1954.
18. Белый Г. И., Матвеев Е. А. Влияние повреждений на устойчивость элементов стальных конструкций по изгибо-крутильной форме // Вестник гражданских инженеров. 2026. № 2 (115). С. 27–36.
19. Белый Г. И., Гарипов А. И. Теоретические основы проверки устойчивости тонкостенных элементов стальных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2025. № 4. С. 33–42.
20. Белый Г. И., Гарипов А. И. Новый практический метод проверки устойчивости тонкостенных элементов стальных конструкций // Промышленное и гражданское строительство. 2025. № 5. С. 20–30.
21. Белый Г. И., Гарипов А. И. Запредельная несущая способность стержневых элементов стальных конструкций после потери общей устойчивости // Вестник гражданских инженеров. 2022. № 5 (94). С. 5–19.
22. Белый Г. И. К расчету устойчивости элементов стальных конструкций с дефектами и повреждениями // Вестник гражданских инженеров. 2024. № 3 (104). С. 25–35.
23. Калашников С. Ю. Сжатие стержней различной гибкости с начальной кривизной, приобретающих индуцированную анизотропию // Промышленное и гражданское строительство. 2024. № 3 (104). С. 25–35.
24. Крылов С. Б., Арленинов П. Д., Корнюшина М. П. Экспериментальные исследования устойчивости трубобетонных колонн // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 4. С. 36–42.
25. Ведяков И. И., Конин Д. В. и др. Продольная устойчивость стержня с учетом реальной диаграммы работы стали // Строительная механика и расчет сооружений. 2025. № 1. С. 13–24.
26. Ильюшенков А. О. Устойчивость внецентренно-сжатой двутавровой колонн с линейно изменяющейся высотой стенки в плоскости действия момента // Строительная механика и расчет сооружений. 2025. № 6. С. 16–26.
27. Бакушев С. В. Критическая сила для автономно упругого стержня // Строительная механика и расчет сооружений. 2025. № 1. С. 6–15.
28. Кравчук В. А. Стальные стержни, предварительно напряженные без затяжек. М.: АСВ, 2015. 548 с.
29. Кравчук В. А. Металлические строительные конструкции, предварительно напряженные продольной деформацией стенки: дис. … д-ра техн. наук. СПб.: ЛИСИ, 1998. 555 с.

30. Кравчук В. В. Стальные сжато-изогнутые стержни, предварительно напряженные без затяжек. Хабаровск: изд-во ТОГУ, 2017. 277 с.

31. Черников А. В. Оценка устойчивости цилиндрической гофрированной водопроводной трубы с начальным прогибом // Строительная механика и конструкции. 2023. № 3 (38). С. 7–19.

32. Хазов П. А., Помазов А. П. Прочность и продольный изгиб трубобетонных стержней при центральном сжатии // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 77–86.

References

1. Euler Leonhard. Sur la force des colloes // Mémoires de l'académie des sciences de Berlin. 1759. 13 (1757). Pp. 252–282. https://archive.org/details/euler-e238/page/n27/mode/2up.

2. Lagrange J. L. Sur la figure des colonnes // Miscellanea Taurinensia. 1770–1773. T. V.

3. Muschenbrock Petrus van. Interducto ad cohoerentiam cprporum firmosum // Physicae experimentales et geometricae dissertationes. Lugduni Batavorum, 1729. https://archive.org/details/gpl_1055035/page/n13/mode/2up.

4. Bubnov I. G. Selected Works. Moscow: Sudpromgiz, 1956.

5. Galerkin B. G. Bars and Plates. Engineers' Bulletin. No. 19. 1915.

6. Timoshenko S. P. Strength of Materials: Advanced Problems and Topics. Moscow: Nauka, 1965.

7. Timoshenko S. P. Stability of Bars, Plates, and Shells. Moscow, 1973.

8. Lyapunov A. M. The General Problem of the Stability of Motion. Moscow: Gostekhizdat, 1950.

9. Bolotin V. V. On the Concept of Stability in Structural Mechanics. Stability Problems in Structural Mechanics: Proceedings of the All-Union Conference. Moscow, 1965.

10. Volmir A. S. Stability of Deformable Systems. Moscow: Nauka, 1967.

11. Shtaerman I. Ya., Pikovsky A. A. Fundamentals of the Theory of Stability of Building Structures. Moscow-Leningrad: Stroyizdat 1939.

12. Kornoukhov N. V. Strength and Stability of Rod Systems. Moscow: Stroyizdat 1949.

13. Sanzharovsky R. S. Stability of Elements of Building Structures under Yield. Leningrad State University Publ., 1984.

14. Sanzharovsky R. S. Theory and Calculation of Strength and Stability of Structural Elements Made of Steel Pipes Filled with Concrete: Abstract of a Doctor of Engineering Science Dessertation. Leningrad: LISI, 1977. 32p.

15. Sanzharovsky R. S. Calculation of Statically Indeterminate Systems Taking into Account Physical Nonlinearity // Works of Young Scientists. Part 1. Saint Petersburg: 1997

16. Bleikh F. Stability of Steel Structures Moscow: Gosfizmatizdat, 1959.

17. Leites S. D. Stability of Steel Building Structures. Moscow: Gosstroyizdat, 1954.

18. Bely G. I., Matveyev E. A. The effect of damage on the stability of steel structure elements in bending-torsional mode // Bulletin of Civil Engineers. 2026. No. 2 (115). Pp. 27–36.

19. Bely G. I., Garipov A. I. Theoretical foundations for checking the stability of thin-walled elements of steel structures // Industrial and Civil Engineering. 2025. No. 4. Pp. 33–42.

20. Bely G. I., Garipov A. I. New practical method for checking the stability of thin-walled elements of steel structures // Industrial and Civil Engineering. 2025. No. 5. Pp. 20–30.

21. Bely G. I., Garipov A. I. Ultimate bearing capacity of rod elements of steel structures after loss of general stability // Bulletin of Civil Engineers. 2022. No. 5 (94). Pp. 5–19.

22. Bely G. I. On calculating the stability of elements of steel structures with defects and damage // Bulletin of Civil Engineers. 2024. No. 3 (104). Pp. 25–35.

23. Kalashnikov S. Yu. Compression of rods of different flexibility with initial curvature, acquiring induced anisotropy // Industrial and Civil Engineering. 2024. No. 3 (104). Pp. 25–35.

24. Krylov S. B., Arleninov P. D., Kornyushina M. P. Experimental studies of the stability of pipe-concrete columns // Industrial and Civil Engineering. 2022. No. 4. Pp. 36–42.

25. Vedyakov I. I., Konin D. V. [et al.] Longitudinal stability of a rod taking into account the actual steel performance diagram // Structural Mechanics and Calculation of Structures. 2025. No. 1. Pp. 13–24.

26. Ilyushenkov A. O. Stability of eccentrically compressed I-beam columns with a linearly varying wall height in the plane of moment action // Structural Mechanics and Calculation of Structures. 2025. No. 6. Pp. 16–26.

27. Bakushev S. V. Critical force for an autonomously elastic rod // Structural Mechanics and Calculation of Structures. 2025. No. 1. Pp. 6–15.

28. Kravchuk V. A. Steel rods, prestressed without ties. ASV. 2015. 548p.

29. Kravchuk V. A. Metal Building Structures Prestressed by Longitudinal Deformation of the Wall. Dissertation of a Doctor of Engineering Sciences. St. Petersburg: LISI, 1998. 555p.

30. Kravchuk V. V. Steel Compression-Bent Rods Prestressed Without Ties. Khabarovsk: Pacific National University Press, 2017. 277p.

31. Chernikov A. V. Stability assessment of a cylindrical corrugated water pipe with initial deflection // Structural Mechanics and Structures. 2023. No. 3 (38). Pp. 7–19.

32. Khazov P. A., Pomazov A. P. Strength and longitudinal bending of tube-concrete rods under central compression // Structural Mechanics and Structures. 2023. No. 2(37). Pp. 77–86.

STABILITY OF PRESTRESSED SOLID-WALLED RODS

V. A. Kravchuk [1], E. V. Kravchuk [2]

Pacific National University [1]
Russia, Khabarovsk
Far Eastern State Transport University [2]
Russia, Khabarovsk

[1] Dr of Technical Sciences, Professor of Graduate School of Industrial and Civil Engineering,
tel.: +7(4212)97-08-11, e-mail: 000415@togudv.ru
[2] Assistant Professor of the Department of Construction, tel.: +7(4212)40-75-79, e-mail: 004938@togudv.ru

Problem Statement. To study critical loads and stresses, as well as the corresponding displacements, in a prestressed steel bar of constant cross-section deflected during its manufacture.

Materials and Methods. The research is based on methods of strength of materials and the theory of stability of eccentrically loaded bars, as well as a calculation method for thin-walled steel bars prestressed by web drawing.

Results. Data are presented on the magnitude of prestresses in the anchor chord and the web of the I-beam, which is the initial element of the bar's I-beam cross-section. The deflection during the manufacture of the prestressed steel bar is determined. The magnitude of the prestressing moment causing its deflection is determined. The overall stability of the prestressed bar is examined when rigidly fixed to the base. The displacements, critical forces, and stresses of the prestressed bar with initial deflection are calculated. The stress-strain state of the bar with its end sections pinned is determined. The displacements and critical stresses of a prestressed bar were studied under varying boundary conditions for its attachment at support nodes. The buckling coefficient of prestressed bars with initial deflection was calculated.

Conclusions. Prestressing a steel bar with initial deflection increases its overall stability with both rigid and pinned end connections.

Keywords: prestress, overall stability, initial deflection, eccentric compression, critical forces.

УДК 539.3
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.006

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПРИЛОЖЕНИЯ НАГРУЗКИ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УЗЛА КРЕПЛЕНИЯ

Д. Е. Решетников [1], А. Н. Кожевников [2], Н. В. Панова [3]

Новосибирский государственный технический университет [1, 2, 3]
Россия, г. Новосибирск

[1] Аспирант кафедры прочности летательных аппаратов, тел.: 8-913-775-44-89
[2] Канд. техн. наук, доц. кафедры прочности летательных аппаратов, тел.: 8-913-717-69-47,
e-mail: kozhevnikov.2010@corp.nstu.ru
[3] Канд. техн. наук, доц. кафедры прочности летательных аппаратов, e-mail: Nadejda_panova@bk.ru

Представлено численное исследование напряженно-деформированного состояния узла крепления ветровой связи (талрепа) многогранной промежуточной опоры воздушной линии электропередачи типа 2МП500-1В при изменении условий нагружения элемента. Основная цель работы заключалась в количественной оценке влияния угла приложения растягивающего усилия от стальной ветровой связи на распределение и уровень максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в элементах талрепа. Исследование проведено для диапазона углов приложения силы относительно продольной оси симметрии элемента от –90° до +90° с шагом 10°. По результатам расчётов установлена нелинейная зависимость максимальных эквивалентных напряжений от направления приложения нагрузки. Напряжения изменяются в широком диапазоне. Для рабочего диапазона углов выполнена аппроксимация полученных данных полиномиальными зависимостями с оценкой погрешности. Полученные результаты могут быть использованы для уточнения методик проектирования узлов крепления гибких связей опор воздушных линий электропередачи.

Ключевые слова: метод конечных элементов, опора воздушных линий электропередачи, талреп, ветровая связь, угол приложения нагрузки, эквивалентные напряжения по Мизесу, ANSYS Workbench.

Введение. Обеспечение надежности и безопасной эксплуатации конструкций при динамических и статических нагрузках является ключевой задачей при проектировании ответственных инженерных объектов. К числу таких систем относятся металлические опоры воздушных линий электропередачи. Данные сооружения работают в условиях сложного нагружения, включающего воздействие ветровых нагрузок, гололедных образований, вибраций от проводов и температурных перепадов. Ветровые связи, выполненные в виде стальных тросов или полнотелых стержней, играют ключевую роль в обеспечении пространственной жесткости и устойчивости опор, воспринимая значительную часть горизонтальных усилий. Однако именно эти гибкие элементы часто становятся источником неопределенностей в расчетах, так как их напряженно-деформированное состояние (НДС) существенно зависит от текущей конфигурации провиса и усилия натяжения.

Прямые экспериментальные исследования на реальных сооружениях часто оказываются нерациональными из-за больших размеров опор, высокой трудоемкости и значительных финансовых затрат, а также из-за сложности учета взаимодействия с проводами электрических сетей и изменчивости погодных условий в процессе испытаний [1]. В связи с этим современная практика все чаще опирается на результаты, полученные в ходе испытаний и расчетов отдельных узлов, а также на применение методов математического и компьютерного моделирования [2]. Ключевым элементом, обеспечивающим передачу усилия от ветровой связи к стойке опоры (рис. 1), является талреп – винтовая стяжка, изготовленная согласно ГОСТ [4].

Изменение направления усилия в ветровой связи, вызванное изменением натяжения и соответствующим провисом, приводит к изменению вектора нагрузки, передаваемого на

© Решетников Д. Е., Кожевников А. Н., Панова Н. В., 2026

резьбовые элементы и проушины талрепа [3]. В связи с этим оценка влияния угла приложения нагрузки от ветровой связи опоры на НДС (поле напряжений) талрепа представляется актуальной задачей, решение которой позволит уточнить методики прочностных расчетов и повысить надежность узлов крепления [5].

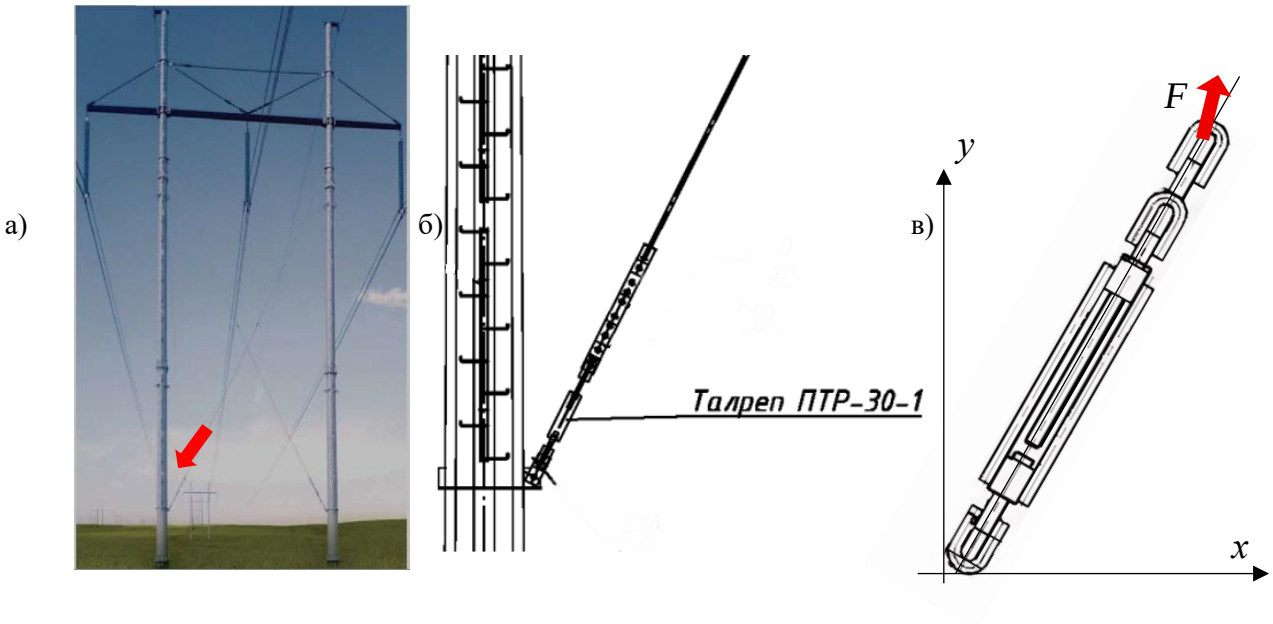


Рис. 1. Общий вид: а) опоры 2МП500-1В; б) узла крепления ветровой связи; в) талрепа с приложенной нагрузкой от ветровой связи

В зависимости от уровня растягивающего усилия в ветровой связи сама связь может принимать различную конфигурацию – возникают провисы. В этом случае нагрузка на талреп также изменяет свое направление. Оценка влияния угла приложения усилия от ветровой связи и является основной задачей представленного исследования.

Обзор литературы. Вопросы прочности и надежности элементов воздушных линий электропередачи широко освещены в отечественной и зарубежной научной литературе. Далее рассмотрим несколько тематических блоков источников информации.

1. Моделирование опор воздушных линий электропередачи и динамический анализ. Значительное количество работ посвящено моделированию электросетевых конструкций с использованием метода конечных элементов. В исследованиях [6–8] рассматриваются вопросы учета ветровых и гололедных нагрузок, а также динамического поведения решетчатых опор. Подчеркивается, что применение конечно-элементных комплексов (таких как «ANSYS», «Abaqus», «ЛИРА») позволяет с высокой точностью оценивать НДС конструкций, однако точность расчета существенно зависит от корректного задания граничных условий и распределения нагрузок. Применительно к конкретным типам опор (в частности, серии 2МП) работы [9] показывают, что учет податливости фундаментов и особенностей соединений элементов может вносить существенные коррективы в частотный спектр и распределение напряжений.

2. Анализ работы ветровых связей и талрепов. Отдельное направление исследований посвящено работе гибких элементов – стальных тросов или стержней. В работе [10] исследуются нелинейные эффекты, связанные с провисом и изменением жесткости троса при его натяжении. Авторы отмечают, что угол отклонения троса от оси талрепа может изменяться в диапазоне от единиц до десятков градусов в зависимости от атмосферных условий. Это, в свою очередь, создает изгибающие моменты и дополнительные напряжения в резьбовых соединениях. Однако, как отмечается в обзоре [11], детальный анализ влияния угла приложения нагрузки на распределение напряжений непосредственно в проушинах и стержне талрепа

проведен недостаточно. В большинстве работ, посвященных расчету талрепов (например, [12]), акцент делается на проверку резьбы на срез и растяжение, тогда как локальные концентрации напряжений, обусловленные изменением вектора силы, часто упрощаются или принимаются как осевые.

3. Применение метода конечных элементов для анализа узлов конструкций. Метод конечных элементов является на сегодняшний день стандартом при анализе НДС несущих конструкций. Для трехмерного анализа объемных узлов, к которым относится талреп, наиболее часто используются пространственные двадцатиузловые конечные элементы типа Solid186 (в «ANSYS Workbench») и подобные им, поскольку они позволяют корректно описать изгиб, кручение и сложное объемное напряженное состояние с высоким порядком аппроксимации [13]. В работах [14, 15] указывается, что при построении сетки для таких элементов важно обеспечить достаточную плотность сетки в зонах концентрации напряжений, в частности во внутренних углах проушин и галтелях резьбы. Вопрос локального напряженно-деформированного состояния именно узла талрепа ветровой связи в зависимости от направления приложенной нагрузки исследован недостаточно. Существующие подходы часто ограничиваются рассмотрением осевой нагрузки, что не вполне соответствует реальным условиям эксплуатации. В связи с этим целью настоящей работы является конечно-элементное исследование влияния угла приложения нагрузки к проушине талрепа с использованием программного комплекса «ANSYS Workbench» для определения зон концентрации напряжений и оценки их чувствительности к изменению направления силы.

Постановка задачи. При определении НДС талрепа ветровой связи опор воздушных линий электропередачи предполагается использовать метод конечного элемента в линейной упругой постановке. Исходными данными является геометрия узла талрепа, материал, а также значение статической растягивающей осевой силы F и направление ее приложения относительно продольной оси талрепа (задано через угол φ) (рис. 2). В рамках сформулированной задачи используем модельную нагрузку в 1000 кгс (9806 Н), которую в дальнейшем можно масштабировать под реальные эксплуатационные условия. Предполагается, что нагрузка действует в плоскости ветровых связей опоры, что соответствует рабочему режиму эксплуатации опоры без сильного ветра вдоль направления проводов электросети.

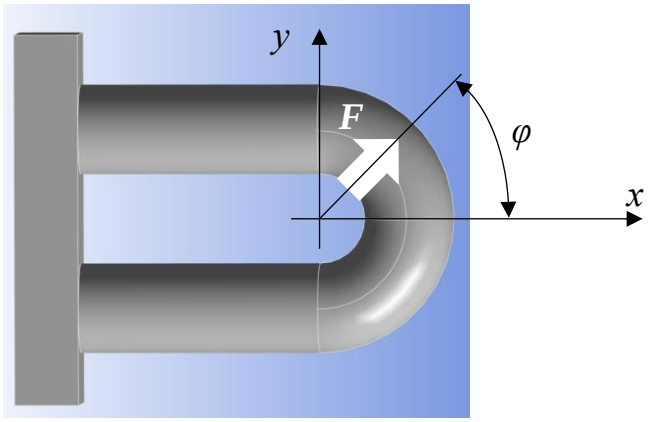


Рис. 2. Приложение нагрузки к узлу крепления ветровой связи

Расчетное исследование НДС талрепа. Далее выполнен конечно-элементный расчет в программном комплексе «ANSYS Workbench». Использован конечный элемент Solid186, определен максимальный размер элемента не менее двух мм (общее число элементов в модели составило 1399). При расчете определялось распределение эквивалентных напряжений по Мизесу ($\sigma_{экв}$). Сводные результаты расчета приведены в таблице.

Таблица

Сводные результаты расчета эквивалентных напряжений

Угол φ,°	Проекции нагрузки, Н		Максимальные напряжения $\sigma_{экв}$, МПа
	F_x	F_y	
–90	0	–9806,0	53,05
–80	1702,9	–9656,7	52,43
–70	3353,9	–9213,3	57,96
–60	4903,0	–8492,1	71,52
–50	6303,4	–7511,9	88,86
–40	7510,8	–6302,4	105,0
–30	8492,1	–4903,0	118,8
–20	9213,5	–3353,4	129,3
–10	9656,7	–1702,9	136,2
0	9806,0	0	139,2
10	9656,7	1702,9	142,2
20	9213,5	3353,4	149,0
30	8492,1	4903,0	151,4
40	7510,8	6302,4	149,2
50	6303,4	7511,9	142,5
60	4903,0	8492,1	131,5
70	3353,9	9213,3	116,6
80	1702,9	9656,7	98,10
90	0	9806,0	76,69

В первую очередь полученные данные были систематизированы в табличной форме, что позволило зафиксировать точные численные значения исследуемых параметров для каждого расчетного случая. Однако для наглядного отображения общих закономерностей и характера распределения величин дополнительно построена графическая зависимость (рис 3).

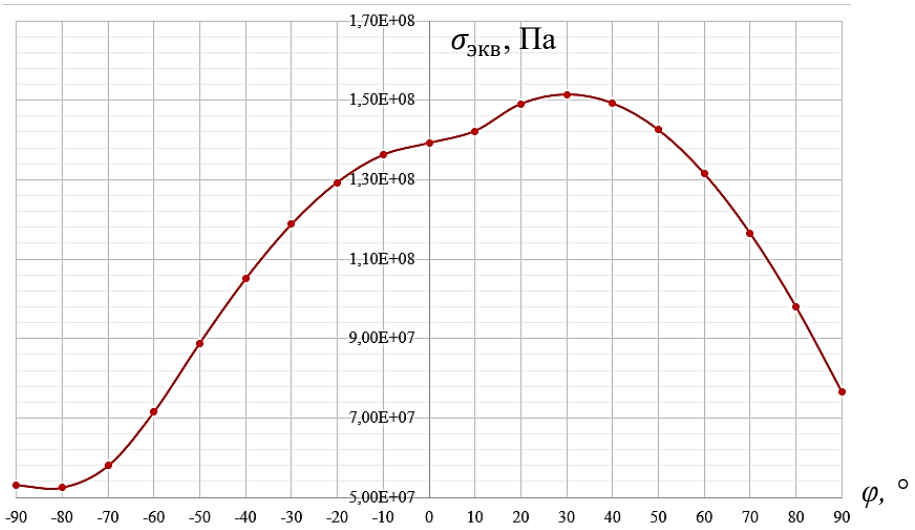


Рис. 3. График зависимости максимальных напряжений по Мизесу от угла приложения нагрузки

Соответствующие максимальные эквивалентные напряжения в рассмотренном элементе талрепа в зависимости от выбранного расчетного случая изменяются от 52,4 до 151 МПа. Поля рассчитанных напряжений $\sigma_{экв}$ показаны на рис. 4.

Полученное различие в результатах обусловлено достаточно большими пределами изменения направления нагрузки, которые в реальности не могут встречаться. Например, углы, близкие к –90°, соответствуют уже обрыву ветровой связи (связь висит на одном из талрепов

и нагрузка существенно ниже эксплуатационной), в то время как углы, большие нуля, соответствуют значительному провису ветровой связи.

а) б)

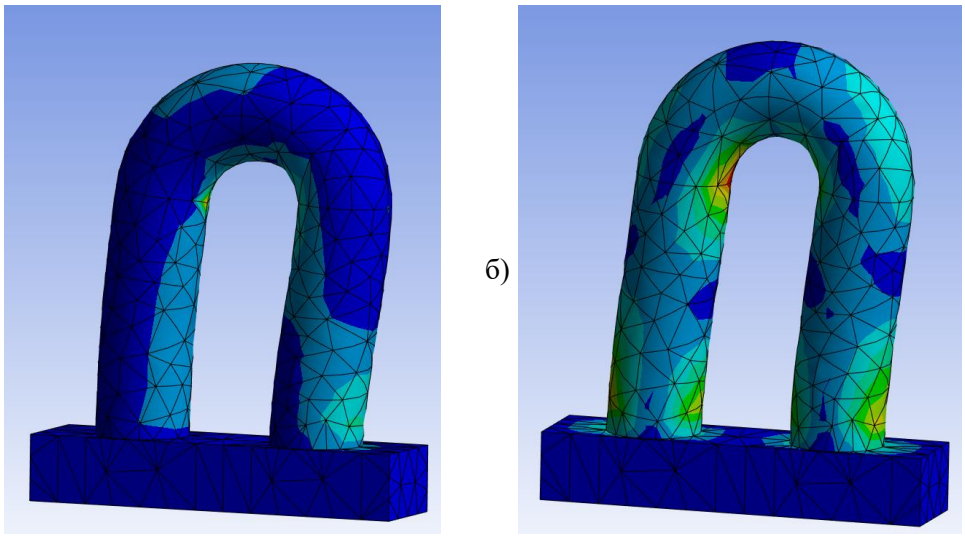


Рис. 4. Поля эквивалентных напряжений по Мизесу:
а) угол φ = –80°; б) угол φ = +30°

Дополнительно были найдены поля перемещений для углов –80° и 30° (рис. 5). Эти результаты нужны в случае использования деформационных критериев или оценки общей податливости силового элемента.

а) б)

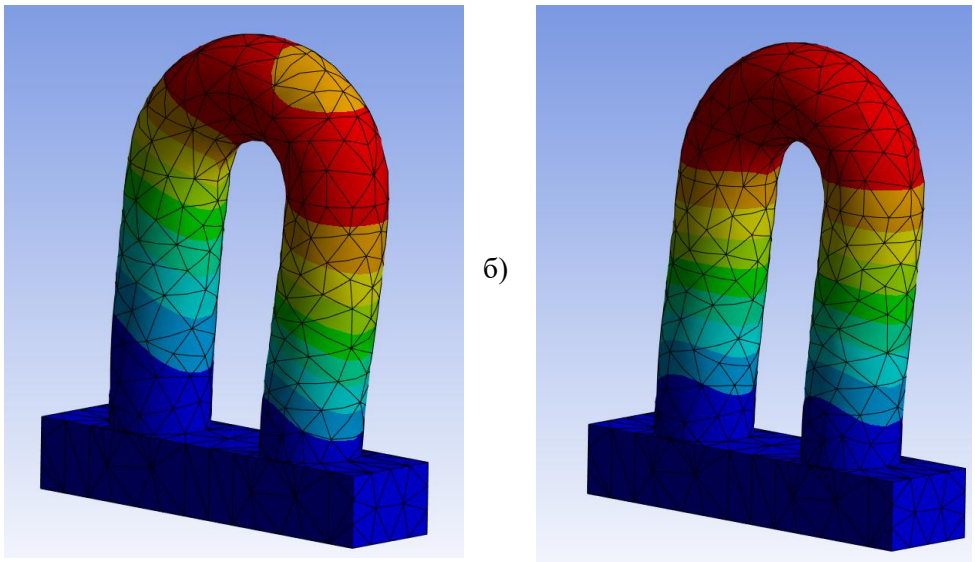


Рис. 5. Поля геометрических суммарных перемещений:
а) угол φ = –80°; б) угол φ = +30°

Ожидаемый реальный диапазон углов существенно у́же рассмотренного в расчете. Для последующей работы необходимо определить аналитическое выражение для функции значения максимальных эквивалентных напряжений. Рассмотрим несколько полиномиальных зависимостей в диапазонах углов [–50° … +50°]. Результаты аппроксимации удобно представить в виде графика (рис. 6).

Аппроксимацию выполнена по методу наименьших квадратов. Оценка относительной погрешности проведена относительно рассчитанных ранее значений напряжений.

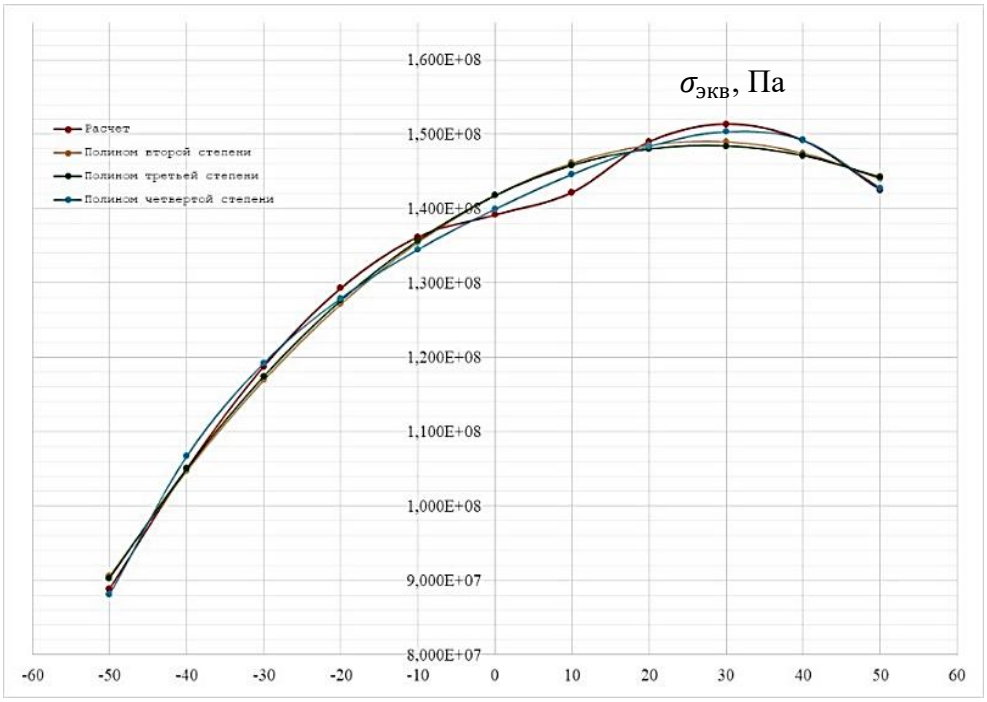


Рис. 6. Расчетные результаты и три аппроксимирующие функции для выбранного диапазона углов

Обсуждение результатов. Наличие среди расчетных результатов точек, приводящих к нескольким перегибам на рассмотренном интервале углов приложения нагрузки, показывает, что аппроксимация полиномом второго порядка даст недостаточно хороший результат. В связи с этим лучшее соответствие достигается использованием аппроксимирующих зависимостей в виде полиномов более высоких порядков. При оценке относительных отклонений аппроксимаций от исходных данных был построен соответствующий график (рис. 7).

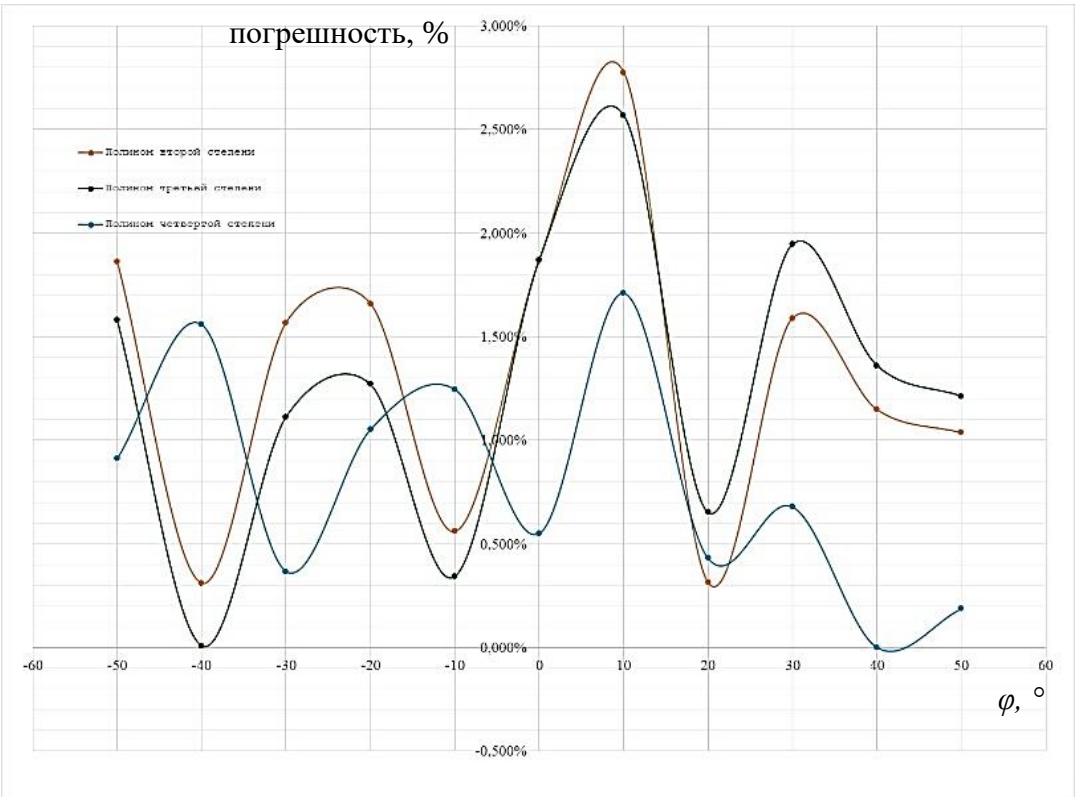


Рис. 7. Изменение погрешности относительно расчетных результатов для выбранного диапазона углов

Максимальная погрешность для полинома второго порядка не превышает 3,00 %; для полинома третьей степени – 2,60 %; для полинома четвертой степени наибольшее отклонение составило 1,70 %.

Таким образом в дальнейшей работе целесообразно использовать аппроксимирующую функцию в виде полинома четвертой степени при минимальной погрешности относительно расчетных данных.

Заключение. Проведено расчетное исследование по определению зоны и уровня максимальных эквивалентных напряжений по Мизесу в узле крепления ветровой связи опоры 2ПМ500-1В при действии модельной нагрузки 1000 кгс (9806 Н). Получена зависимость напряжений от угла приложения нагрузки относительно продольной оси крепежного элемента. Построена функция для аппроксимации полученных результатов с максимальным отклонением от расчетных данных в диапазоне от 1,70 до 3,00 %. В дальнейшем рекомендовано использовать полином четвертого порядка.

Библиографический список

1. Бурнышева Т. В., Кожевников А. Н. Методика оценки технического состояния опор воздушных линий электропередачи с учетом типовых эксплуатационных дефектов // Инженерный журнал: наука и инновации: электрон. журн. 2021. № 2 (110). С. 2. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44818408. DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2053.

2. Кожевников А. Н. Сравнительный анализ динамических параметров свободных колебаний геометрически подобной и имитационной моделей решетчатой опоры линий электропередачи // Строительная механика и конструкции. 2026. № 2 (49). С. 107–118. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.49.2.009.

3. Решетников Д. Е., Кожевников А. Н., Матвеев К. А. Экспериментально-расчетное определение динамических параметров растягиваемых тросов // Инженерный журнал: наука и инновации: электрон. журн. 2025. № 6 (162). С. 1–11. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_82640848_16542031.pdf (дата обращения: 29.07.2026).

4. ГОСТ Р 51177-2017. Арматура линейная. Общие технические требования: введ. 2018-01-07. М.: Стандартинформ, 2017. 24 с.

5. Овсянников А. Г., Арбузов Р. С., Тарасов А. Г. Технические средства диагностирования электрооборудования: учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2015. 192 с.

6. Chen B., Guo W. H., Li P. Y., Xie W. P. Dynamic responses and vibration control of the transmission tower-line system: a state-of-the-art review // The Scientific World Journal. 2014. Vol. 2014. Article ID 538457. 20 p. http://dx.doi.org/10.1155/2014/538457.

7. Кравченко А. Я., Роденко С. В., Сафонов О. Н., Снежков И. И., Чаплин И. В. Экспериментальные исследования динамической работы опор линий электропередачи при разработке измерительного комплекса «ЛЭПтон» для оценки их технического состояния // Электроэнергия. Передача и распределение. 2018. № 6 (51). С. 126–131.

8. Крюков К. П., Новгородцев Б. П. Конструкции и механический расчет линий электропередачи. Л.: Энергия, Ленингр. отд., 1979. 312 с.

9. Chen Sh., Dai K. Modal Characteristics of Two Operating Power Transmission Poles // Shock and Vibration. 2010. Vol. 17, no. 4–5. Pp. 551–561. DOI: 10.3233/SAV-2010-0547.

10. Li Y., Liu Y., Zhang J. Mechanical Calculation of Power Lines and Strands in Overhead Transmission Lines // MATEC Web of Conferences. 2016. 50. 02003. 10.1051/matecconf/20165002003.

11. Chen H., Wang Y., Yin H., Xia L., Wan H., Kalungi M. P., Zhu A. Study of the Static Performance of Guyed Towers in High-Voltage Transmission Lines // Buildings. 2024. 14 (12). 3960. https://doi.org/10.3390/buildings14123960.

12. Кульцеп А. В., Манухин В. А., Новожилова М. В. Методика расчета гибких тросово-стержневых систем на прочность и устойчивость: тез. докл. Всерос. науч.-техн. конф. по строит. мех. корабля, посвящ. памяти П. Ф. Папковича. СПб.: изд-во ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова, 2000. С. 93–94.

13. Вержбицкий В. М. Основы численных методов: учеб. для вузов. М.: Высш. шк., 2005. 840 с.

14. ASME V&V 10-2006. Guide for verification and validation in computational solid mechanics. American Society of Mechanical Engineers, New York, 2006.

15. ГОСТ Р 57700.10-2018. Численное моделирование физических процессов. Определение напряженно-деформированного состояния. Верификация и валидация численных моделей сложных элементов конструкций в упругой области: введ. 2018-06-02. М.: Стандартинформ, 2018. 16 с.

References

1. Burnysheva T. V., Kozhevnikov A. N. Methodology for assessing the technical condition of overhead power line supports taking into account typical operational defects // Engineering Journal: Science and Innovations: Electronic Journal. 2021. No. 2 (110). P. 2. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44818408. DOI: 10.18698/2308-6033-2021-2-2053.

2. Kozhevnikov A. N. Comparative analysis of dynamic parameters of free oscillations of a geometrically similar and simulation models of a lattice power line support // Structural Mechanics and Structures. 2026. No. 2 (49). Pp. 107–118. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.49.2.009.

3. Reshetnikov D. E., Kozhevnikov A. N., Matveev K. A. Experimental and computational determination of dynamic parameters of stretchable cables // Engineering Journal: Science and Innovation: Electronic Journal. 2025. No. 6 (162). Pp. 1–11. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_82640848_16542031.pdf (date of access: 29.07.2026).

4. Federal Standard R 51177-2017. Linear reinforcement. General technical requirements: introduction. 2018.01.07. Moscow: Standartinform, 2017. 24 p.

5. Ovsyannikov A. G., Arbuzov R. S., Tarasov A. G. Technical means of diagnostics of electrical equipment: a tutorial. Novosibirsk: NSTU Publishing House, 2015. 192 p.

6. Chen B., Guo W. H., Li P. Y., Xie W. P. Dynamic responses and vibration control of the transmission tower-line system: a state-of-the-art review // The Scientific World Journal. 2014. Vol. 2014. Article ID 538457. 20 p. http://dx.doi.org/10.1155/2014/538457.

7. Kravchenko A. Ya., Rodenko S. V., Safonov O. N., Snezhkov I. I., Chaplin I. V. Experimental studies of the dynamic operation of power transmission line supports during the development of the lepton measuring complex for assessing their technical condition // Electric Power. Transmission and Distribution. 2018. No. 6 (51). Pp. 126–131.

8. Kryukov K. P., Novgorodtsev B. P. Designs and Mechanical Calculation of Power Transmission Lines. Leningrad: Energy. Leningrad Branch, 1979, 312 p.

9. Chen Sh., Dai K. Modal characteristics of two operating power transmission poles // Shock and Vibration. 2010. Vol. 17. No. 4–5. Pp. 551–561. DOI: 10.3233/SAV-2010-0547.

10. Li Y., Liu Y., Zhang J. Mechanical calculation of power lines and strands in overhead transmission lines // MATEC Web of Conferences. 2016. 50. 02003. 10.1051/matecconf/20165002003.

11. Chen H., Wang Y., Yin H., Xia L., Wan H., Kalungi M. P., Zhu A. Study of the static performance of guyed towers in high-voltage transmission lines // Buildings. 2024. No. 14 (12). 3960. https://doi.org/10.3390/buildings14123960.

12. Kul'tsep A. V., Manukhin V. A., Novozhilova M. V. Methodology for calculating the strength and stability of flexible rope-bar systems // Abstract of the Report of the All-Russian Scientific and Technical Conf. on Shipbuilding, Dedicated to the Memory of P. F. Papkovich. St. Petersburg: Krylov Central Research Institute. 2000. Pp. 93–94.

13. Verzhbitsky V. M. Fundamentals of Numerical Methods: Textbook for Universities. Moscow: Higher School, 2005. 840 p.

14. ASME V&V 10-2006. Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics. American Society of Mechanical Engineers, New York, 2006.

15. Federal Standard R 57700.10-2018. Numerical Modeling of Physical Processes. Determination of the Stress-Strain State. Verification and Validation of Numerical Models of Complex Structural Elements in the Elastic Domain: Introduction. 2018-06-02. Moscow: Standartinform, 2018. 16 p.

INVESTIGATION OF THE EFFECT OF LOAD APPLICATION DIRECTION ON THE STRESS-STRAIN STATE OF A MOUNTING JOINT

D. E. Reshetnikov [1], A. N. Kozhevnikov [2], N. V. Panova [3]

Novosibirsk State Technical University [1, 2, 3]
Russia, Novosibirsk

[1] Postgraduate Student of Aircraft Strength Department, tel.: 8-913-775-44-89
[2] PhD of Technical Sciences, Associate Professor of Aircraft Strength Department, tel.: +7-913-717-69-47, e-mail: kozhevnikov.2010@corp.nstu.ru
[3] PhD of Technical Sciences, Associate Professor of Aircraft Strength Department, e-mail: Nadejda_panova@bk.ru

This paper presents a numerical study of the stress-strain state of the attachment assembly for a wind brace (turnbuckle) on a multifaceted intermediate pylon (type 2MP500-1V) for an overhead power transmission line, under varying loading conditions. The primary objective of the study was to quantitatively assess how the angle of application of the tensile force from the steel cable affects the distribution and magnitude of maximum von Mises equivalent stresses within the turnbuckle components. The study covered a range of force application angles relative to the element's longitudinal axis of symmetry, spanning from –90° to +90° with 10° increments. The calculations revealed a non-linear relationship between the maximum equivalent stresses and the direction of the applied load, with the stresses varying over a wide range. For the operating angular range, the obtained data were approximated using polynomial functions, accompanied by an error analysis. These results can be used to refine design methodologies for the attachment assemblies of flexible links in overhead transmission line supports.

Keywords: finite element method, overhead power transmission line pylon, turnbuckle, wind bracing, load application angle, equivalent von Mises stresses, ANSYS Workbench.

УДК 624.074.43:519.6
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.007

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАТЯЖЕНИЯ ВАНТ В СОСТАВЕ ВИСЯЧЕЙ ОБОЛОЧКИ ПО ИХ РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЕ

Д. С. Глазков [1], В. А. Козлов [2]

Воронежский государственный технический университет [1, 2]
Россия, г. Воронеж

[1] Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(915)542-17-05, e-mail: glazckov.mitia@yandex.ru
[2] Д-р физ.-мат. наук, доц., зав. кафедрой строительной механики, e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

Для оценки натяжения ванты в составе висячей оболочки предлагается метод сведения многопараметрической задачи расчета сложной нелинейной системы к рассмотрению нелинейной краевой задачи для выделенной из системы ванты.

Равновесная форма отдельной ванты висячей железобетонной оболочки определяется совместным действием внешней нагрузки и усилий, передаваемых со стороны бетона и пересекающих ее других вант. Предложенный метод использует эту равновесную форму в качестве исследуемого отклика при решении обратной задачи для растяжимой гибкой нити под действием известной распределенной нагрузки и неизвестных пространственных узловых сил, которые прикладываются в местах пересечения вант и заменяют собой действие отброшенной оболочки и остальных вант. В качестве известных дополнительно принимаются положения опор ванты, ее продольная жесткость, места пересечения вант, а также ненапряженные длины участков между узлами пересечения вант.

Расчет выполняется для центральной несущей ванты исследуемой висячей оболочки в форме гиперболического параболоида. Неизвестные узловые силы находятся из условия совпадения расчетной и наблюдаемой геометрии ванты в каждом из двух равновесных состояний при различных нагрузках. Расчетную геометрию предлагается формировать коллокационным методом нелинейной краевой задачи нити для каждого участка ванты. Решения на соседних участках связываются условиями непрерывности оси и равновесия узлов. Наблюдаемая геометрия получается в результате конечно-элементного расчёта висячей оболочки в ПК «ЛИРА-САПР».

При 19 узловых силах относительное среднеквадратическое расхождение натяжений в обратной задаче и в «ЛИРА-САПР» составляет не более 1 %. В обоих состояниях воспроизводятся кривая провисания ванты и характер изменения натяжения под действием распределенной нагрузки.

Ключевые слова: висячая оболочка, вантовая сеть, натяжение ванты, обратная задача, распределенная нагрузка, узловая сила, материальная координата.

Введение. При обследовании висячих конструкций, в том числе висячих оболочек, актуальной является задача определения фактического натяжения несущих вант с целью оценки их напряжённо-деформированного состояния и запаса несущей способности.

Для экспериментального определения натяжения вант, в том числе в составе висячих систем, применяют различные методы неразрушающего контроля. Среди них можно отметить метод контролируемого нагружения или разгружения конструкции с измерением деформаций, например, тензометрическими датчиками [1], а также динамический метод [2–4]. У каждого из них есть ряд достоинств и недостатков. При измерении деформаций относительно уже нагруженного состояния возможно определить лишь приращения внутренних усилий, поэтому для нахождения полного натяжения вант необходимы дополнительные сведения об исходном состоянии конструкции и применение соответствующих расчетных моделей. Полная разгрузка конструкции с определением внутреннего усилия не всегда возможна. Динамический метод широко применяется для отдельных вант, а для канатов в составе многокомпонентных систем анализ осложняется влиянием связей с другими элементами на собственные частоты и формы колебаний [3, 4]. Применимость каждого метода к существующему

© Глазков Д. С., Козлов В. А., 2026

сооружению зависит от конструкции вант и анкерных узлов, доступности элементов для установки оборудования и возможности проведения необходимых измерений.

Внутренние усилия в вантах влияют на геометрическую жёсткость конструкции, а их изменение зачастую явно отражается на её равновесной форме [5]. Поэтому актуальным для определения фактического натяжения вант представляется подход, основанный на использовании наблюдаемой статической равновесной формы висячей конструкции. Возможность определения натяжения таким способом подтверждена в исследованиях [1, 6–9]. Актуальность данного подхода в настоящее время обосновывается также широким распространением бесконтактных точных способов получения пространственной геометрии конструкции, например с помощью лазерного сканирования [10, 11].

Переход от измеренной геометрии к внутренним усилиям представляет собой одну из разновидностей статической обратной задачи. Наблюдаемая форма в такой задаче служит исходной информацией для определения неизвестных характеристик равновесного состояния конструкции. При этом для пространственных многокомпонентных конструкций сведений, содержащихся в равновесной форме, в общем случае недостаточно для определения всех неизвестных параметров при отсутствии дополнительных независимых сведений, полученных при обследовании. Более того, получить достоверные сведения о параметрах всех элементов висячих систем сложно. Если целью обследования является оценка состояния именно несущих канатов, то актуальной представляется задача сведения расчёта сложной многокомпонентной висячей системы к задачам равновесия отдельных вант, параметры которых немногочисленны и поддаются контролю.

Цель настоящей работы состоит в исследовании возможности определения распределения натяжения по длине ванты в составе висячей системы на основе наблюдения её равновесной формы. Предлагаемый метод основан на решении обратной задачи с использованием нелинейной краевой задачи для выделенной из системы ванты. В качестве наблюдаемой геометрии используются идеальные исходные данные, полученные из конечно-элементного расчёта оболочки без внесения измерительных погрешностей.

Постановка задачи. Исследование проводится для висячей оболочки покрытия здания Воронежского цирка, особенности расчёта которой рассмотрены в работах [12–15]. Предварительно напряженная железобетонная оболочка выполнена в форме гиперболического параболоида. Вантовая сеть состоит из 19 несущих и 19 стягивающих вант. Проектный шаг вантовой сети в плане – 2,4 м. Распор сети воспринимается депланированным в пространстве железобетонным опорным контуром переменного сечения, диаметр которого в плане составляет 48 м.

Расчетная КЭ-модель рассматриваемой висячей оболочки представлена на рис. 1а. На рис. 1б часть элементов оболочки скрыта, чтобы показать перекрёстную вантовую сеть.

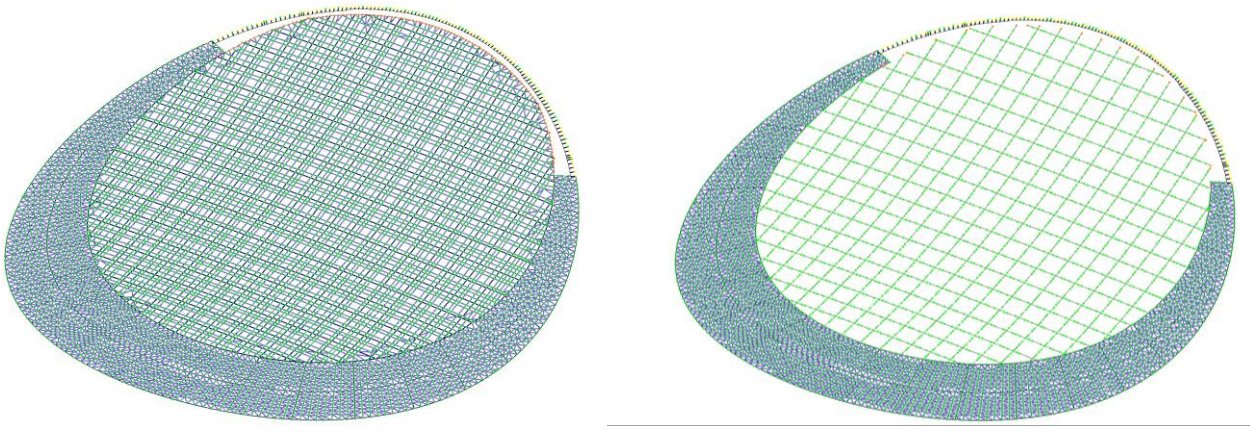


Рис. 1. КЭ-модель предварительно напряженной висячей оболочки (а)
и фрагментированный вид, представляющий несущую перекрестную вантовую сеть оболочки (б)

Рассмотрим далее возможность редукции представленной выше системы к модели отдельной ванты с целью оценки ее натяжения по равновесным формам, а также предложим для этого расчетную схему.

Отдельная ванта рассматривается как растяжимая геометрически нелинейная гибкая нить с известными постоянной продольной жесткостью EA, ненапряженной длиной L_0 и закрепленными в точках **A** и **B** концами. Расчёт ведём в материальной координате S, отсчитываемой вдоль ненапряжённой длины ванты [5, 16], при этом каждому значению S соответствует одно и то же сечение ванты независимо от её текущей формы.

На ванту также действуют заданная известная распределенная внешняя нагрузка $\mathbf{q}$ и неизвестные силы $\mathbf{F}_j$, приложенные в узлах S_j, $j = 1, \dots, J$ (рис. 2). Нагрузка $\mathbf{q}$ отнесена к единице ненапряженной длины и в рассматриваемом расчете постоянна по величине и направлению. Неизвестные узловые силы в местах пересечения вант учитывают передаваемые на рассматриваемую ванту усилия от отброшенных оболочки и пересекающих вант и формируют ее полное натяжение. Эти узловые силы в отдельных случаях будем называть силами взаимодействия. Проскальзывание в местах приложения узловых сил не учитывается, поэтому при переходе между равновесными состояниями при различных загружениях узлы сохраняют свои материальные координаты.

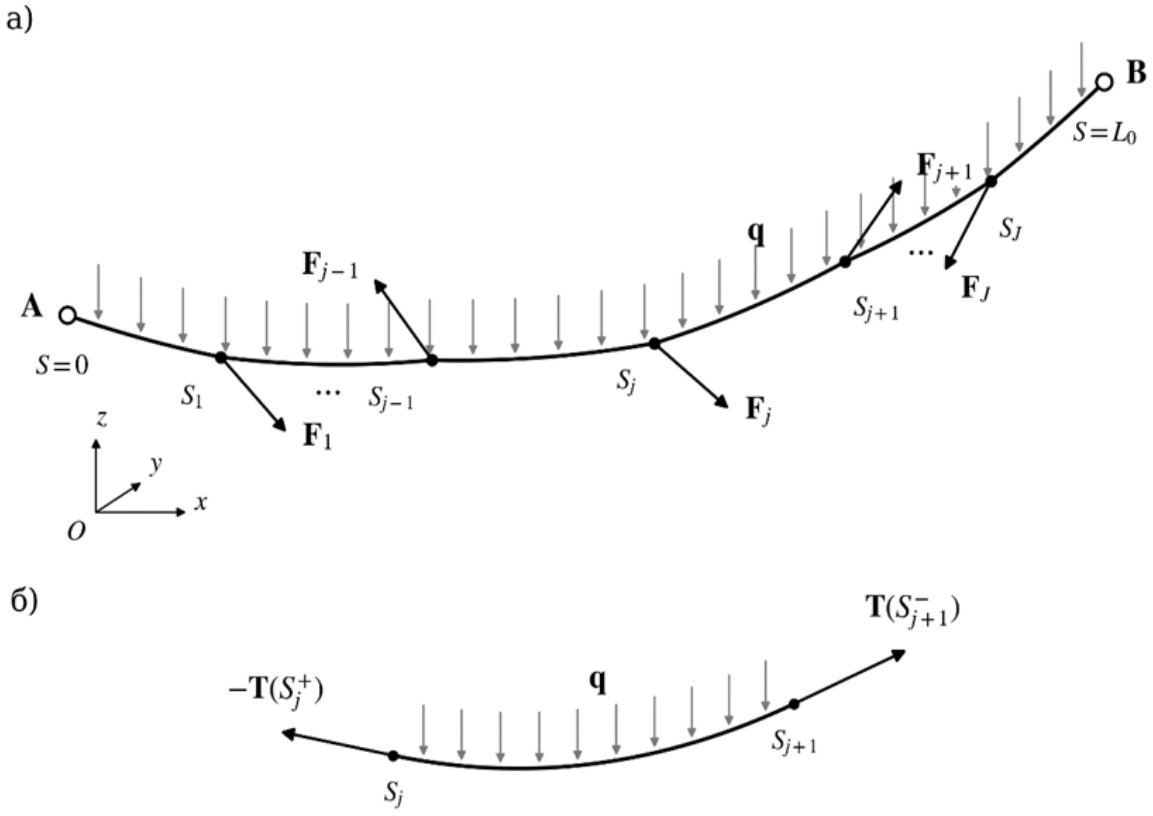


Рис. 2. Расчётная схема ванты:
а) общая схема нагружения; б) участок между соседними узлами

Обозначим положение оси через вектор $\mathbf{r}(S)$, вектор внутреннего усилия через $\mathbf{T}(S)$, а модуль натяжения через $N = \| \mathbf{T} \|$. При линейном законе деформирования в пределах каждого участка ванты между соседними узловыми силами выполняются дифференциальные уравнения:

$$\frac{d\mathbf{T}}{dS} = -\mathbf{q}, \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dS} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right)\frac{\mathbf{T}}{N}, \qquad N > 0. \tag{1}$$

Из уравнений (1) следует, что в пределах каждого участка под действием распределённой нагрузки непрерывно изменяются натяжение и направление касательной к оси ванты.

В местах приложения узловых сил ось ванты должна сохранять непрерывность, а вектор внутреннего усилия иметь скачок. Запишем условия сопряжения соседних участков ванты, равновесия отдельного узла, а также условия закрепления концов в виде:

$$[\mathbf{r}]_j = \mathbf{0}, \qquad [\mathbf{T}]_j + \mathbf{F}_j = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{r}(L_0) = \mathbf{B}. \tag{2}$$

Квадратные скобки в (2) обозначают разность значений соответствующей функции справа и слева от рассматриваемого узла.

При деформировании ванты изменяются положения её материальных точек и длины участков между ними. Натяжение связано с относительным удлинением законом упругости, поэтому для его определения по наблюдаемой форме необходимо задать ненапряжённые длины участков между соседними узлами. В качестве исходной принимается монтажная геометрия висячей оболочки по проектной документации [17], с помощью которой устанавливаются длины дуг рассматриваемой ванты, обозначаемые a_i, между проектными положениями соседних узлов пересечения примыкающих вант. Эта монтажная геометрия соответствует стадии предварительного натяжения вантовой сети до отпуска оттяжек [17] и используется в качестве начальной формы оболочки в «ЛИРА-САПР». При допущении одинаковой начальной относительной деформации при преднатяжении сети ненапряженные длины этих участков пропорциональны a_i. Для заданной ненапряженной длины L_0 получаем:

$$\Delta S_i = L_0 \frac{a_i}{\sum_{k=0}^{J} a_k}, \qquad S_j = \sum_{i=0}^{j-1} \Delta S_i, \qquad i = 0, \dots, J, \tag{3}$$

где i – номер рассматриваемого участка ванты; ΔS_i – его ненапряженная длина.

Поскольку далее будут рассматриваться различные варианты нагружения одной и той же висячей оболочки, ненапряжённые длины ΔS_i и материальные координаты узлов S_j принимаются одинаковыми для всех равновесных состояний. При этом пространственные положения узлов изменяются. Их наблюдаемые положения в каждом состоянии обозначим векторами $\mathbf{p}_j$.

При заданных EA, L_0, S_j и $\mathbf{q}$ равновесная форма ванты зависит от неизвестных узловых сил. Разложим каждую из неизвестных сил по осям принятой системы координат и объединим их независимые компоненты в единый вектор $\mathbf{f}$. Подберём узловые силы через решение обратной задачи таким образом, чтобы под совместным действием этих сил и заданной распределённой нагрузки ванта принимала наблюдаемую равновесную форму. Для этого будем сопоставлять расчётные $\mathbf{r}(S_j, \mathbf{f})$ и наблюдаемые $\mathbf{p}_j$ положения узлов приложения сил:

$$\Phi(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{J} \| \mathbf{r}(S_j, \mathbf{f}) - \mathbf{p}_j \|^2, \qquad \mathbf{f}^* = \arg\min_{\mathbf{f}} \Phi(\mathbf{f}). \tag{4}$$

Методы исследования. Для расчёта равновесной формы ванты при заданных узловых силах решение строится отдельно на каждом участке между соседними узлами. Поскольку в местах приложения сосредоточенных сил вектор внутреннего усилия имеет скачки, решения на участках ванты сопрягаются при помощи условий непрерывности оси и равновесия узлов (2). Такое разбиение обусловливается принятой авторами схемой нагружения ванты при редуцировании полной системы висячей оболочки.

Для решения поставленной нелинейной краевой задачи в пределах каждого рассматриваемого участка ванты применяется коллокационная схема четвёртого порядка, эквивалентная неявной схеме Рунге – Кутты [18, 19]. Чтобы применять коллокационную схему на едином расчётном интервале [0, 1] для участков с различными ненапряжёнными длинами, на каждом участке вводится безразмерная координата $\xi = (S - S_i)/\Delta S_i$, где $0 \le \xi \le 1$, $i = 0, \dots, J$, а функции $\mathbf{r}_i(\xi)$ и $\mathbf{T}_i(\xi)$ аппроксимируются кусочно-кубическими полиномами. Коэффициенты полиномов при этом определяются из условия выполнения уравнений (1) в точках коллокации с учётом условий закрепления концов ванты и сопряжения ее участков (2).

Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается методом Ньютона с регулированием длины шага итерации. Расчётная сетка сгущается там, где невязка дифференциальных уравнений превышает заданный допуск [19].

Неизвестные узловые силы определяются минимизацией целевой функции (4) при помощи метода доверительной области [20]. При каждом уточнении вектора $\mathbf{f}$ решается краевая задача (1), (2), после чего расчётные положения узлов $\mathbf{r}(S_j, \mathbf{f})$ сравниваются с наблюдаемыми. При этом для каждого равновесного состояния вектор узловых сил находится отдельно.

Для задания начального приближения узловых сил выполняется предварительная оценка внутренних усилий по упрощённой геометрии ванты. С этой целью ось ванты приближённо представляется ломаной, соединяющей соседние наблюдаемые узлы. Сравнение длин её звеньев с ненапряжёнными длинами соответствующих участков позволяет приближенно оценить относительные продольные деформации. Направления звеньев ломаной принимаются за начальные направления внутренних усилий. Затем усилия на концах каждого участка уточняются с учётом распределённой нагрузки, а из условий равновесия узлов (2) определяются начальные значения узловых сил взаимодействия.

После завершения подбора узловых сил по найденному равновесному состоянию определяется распределение натяжения вдоль ванты. При постоянной распределённой нагрузке на каждом участке получаем:

$$N_i(\xi) = \| \mathbf{T}_i(0) - \Delta S_i \mathbf{q} \xi \|, \qquad 0 \le \xi \le 1. \tag{5}$$

Результаты исследования. Расчет обратной задачи по предложенной схеме произведен для центральной несущей ванты висячей оболочки. При этом координаты наблюдаемых узлов ванты в двух равновесных состояниях (и соответственно наблюдаемые оси) получены из расчёта полной модели покрытия в «ЛИРА-САПР». В этой модели ванта представлена 78 конечными элементами и 79 узлами. Для обратного расчёта выбраны 19 наблюдаемых внутренних узлов с шагом, соответствующим перекрестной вантовой сети.

Рабочий пролёт рассматриваемой ванты в горизонтальной проекции составляет 47,1 м. Координаты ее концов равны $\mathbf{A} = (0;\ 0;\ 15{,}8)$ м и $\mathbf{B} = (47{,}1;\ 0;\ 26{,}9)$ м. Ванта состоит из двух канатов с суммарной продольной жёсткостью $EA = 383{,}39$ МН.

Монтажная поверхность висячей оболочки по [17] задаётся уравнением $z = 15{,}5 + +x^2/200 - y^2/800$. Для центральной ванты $y = 0$, поэтому проектные длины дуг между соседними узлами вычисляются по формуле:

$$a_i = \int_{x_i^0}^{x_{i+1}^0} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{100}\right)^2}\, dx. \tag{6}$$

Проектные координаты внутренних узлов рассматриваемой ванты в плане задаются выражением $x_j^0 = 2{,}6 + 2{,}4(j-1)$ м, $j = 1, \ldots, 19$. Крайние интервалы между закреплениями и ближайшими узлами в горизонтальной проекции составляют 2,6 и 1,3 м. Монтажная геометрия и разбивка ванты на участки показаны на рис. 3.

Ненапряженную длину L_0 при допущении линейно-упругой работы материала и равномерного распределения внутреннего усилия по длине ванты можно определять по ее геометрии при преднатяжении в монтажном состоянии, а также по усилию натяжения, определённому по показаниям манометра домкрата. В нашем случае численной верификации обратной задачи длина L_0 рассматриваемой ванты определена по длинам и усилиям конечных элементов соответствующей ванты в «ЛИРА-САПР» для полной модели висячей оболочки в первом равновесном состоянии, которое сформировано как постоянной нагрузкой, так и предварительным натяжением вант по проектной документации [17]: 1860 кН – для каждой из несущих, 1600 кН – для каждой из стягивающих. Для первого равновесного состояния вычислена сумма $\sum_e l_e / (1 + N_e/EA)$, после чего принята ненапряженная длина всей ванты (табл. 1). Здесь l_e и

N_e – текущая длина и натяжение конечного элемента. Ненапряжённые длины участков назначены по монтажной геометрии согласно (3), (6).

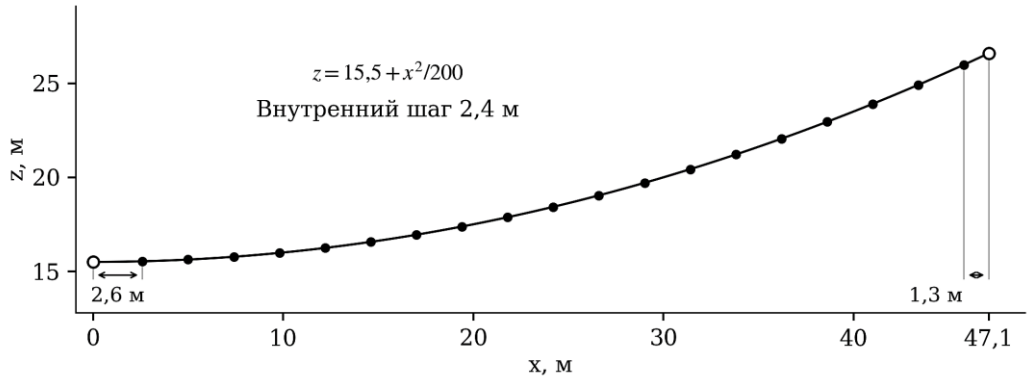


Рис. 3. Монтажная геометрия и разбивка центральной ванты. Размеры даны в горизонтальной проекции

Все исходные данные для параметров обратной задачи приведены в табл. 1. Распределенная по ненапряженной длине нагрузка на рассматриваемую ванту получена умножением нагрузки полной модели «ЛИРА-САПР» в соответствующем загружении на шаг вант.

Таблица 1

Исходные данные для обратной задачи

Параметр	**Состояние 1**	**Состояние 2**
EA, МН	383,39	383,39
L_0, м	48,552	48,552
q, кН/м	4,14	9,56

Искомые узловые силы взаимодействия определяются отдельно по форме ванты в каждом состоянии. При числе узловых сил $J = 19$ в обратной задаче по одному равновесному состоянию определяются 57 их независимых компонент.

На рис. 4 формы центральной ванты по результатам обратного расчёта и прямого расчета в «ЛИРА-САПР» сопоставлены с монтажной геометрией.

Как видно из рис. 4, в обоих равновесных состояниях обратное решение воспроизводит геометрию оси ванты, определенную прямым расчетом «ЛИРА-САПР», и характер её отклонений от монтажной формы. Расчётные положения 19 материальных узлов приложения сил взаимодействия почти совпадают с исходными. Восстановленная в обратной задаче форма ванты также дополнительно проверена в 77 сечениях, проходящих через внутренние узлы рассматриваемой ванты в полной модели «ЛИРА-САПР» перпендикулярно хорде между опорами. Среднеквадратическое расстояние между соответствующими точками осей составило 3,03 мм в первом равновесном состоянии и 1,02 мм во втором. Расхождение обусловлено тем, что в полной модели «ЛИРА-САПР» воздействие оболочки передается на ванту по всей ее длине в большем количестве узлов, а в обратной задаче оно сведено к точкам приложения сил в 19 узлах пересечения рассматриваемой ванты с примыкающими вантами.

Верификация расчетной схемы обратной задачи произведена также через сопоставление натяжений, определённых в обратной задаче в двух равновесных состояниях, с усилиями полной модели «ЛИРА-САПР» в 78 сечениях, проходящих через середины конечных элементов перпендикулярно хорде между опорами. Усилие каждого конечного элемента сравнивалось с натяжением в точке пересечения соответствующего сечения с осью выделенной ванты. Относительное среднеквадратическое расхождение эпюр рассчитано по формуле:

$$e_N = \frac{\sqrt{\frac{1}{M}\sum_{e=1}^{M}\left(N_e^{\text{обр}} - N_e^{\text{МКЭ}}\right)^2}}{\frac{1}{M}\sum_{e=1}^{M} N_e^{\text{МКЭ}}}\ 100\ \%, \qquad M = 78. \tag{7}$$

Здесь $N_e^{\text{обр}}$ – натяжение выделенной ванты в рассматриваемом сечении; $N_e^{\text{МКЭ}}$ – усилие соответствующего конечного элемента той же ванты в полной модели. Среднее натяжение в табл. 2 рассчитано как среднее арифметическое значений в этих 78 сечениях.

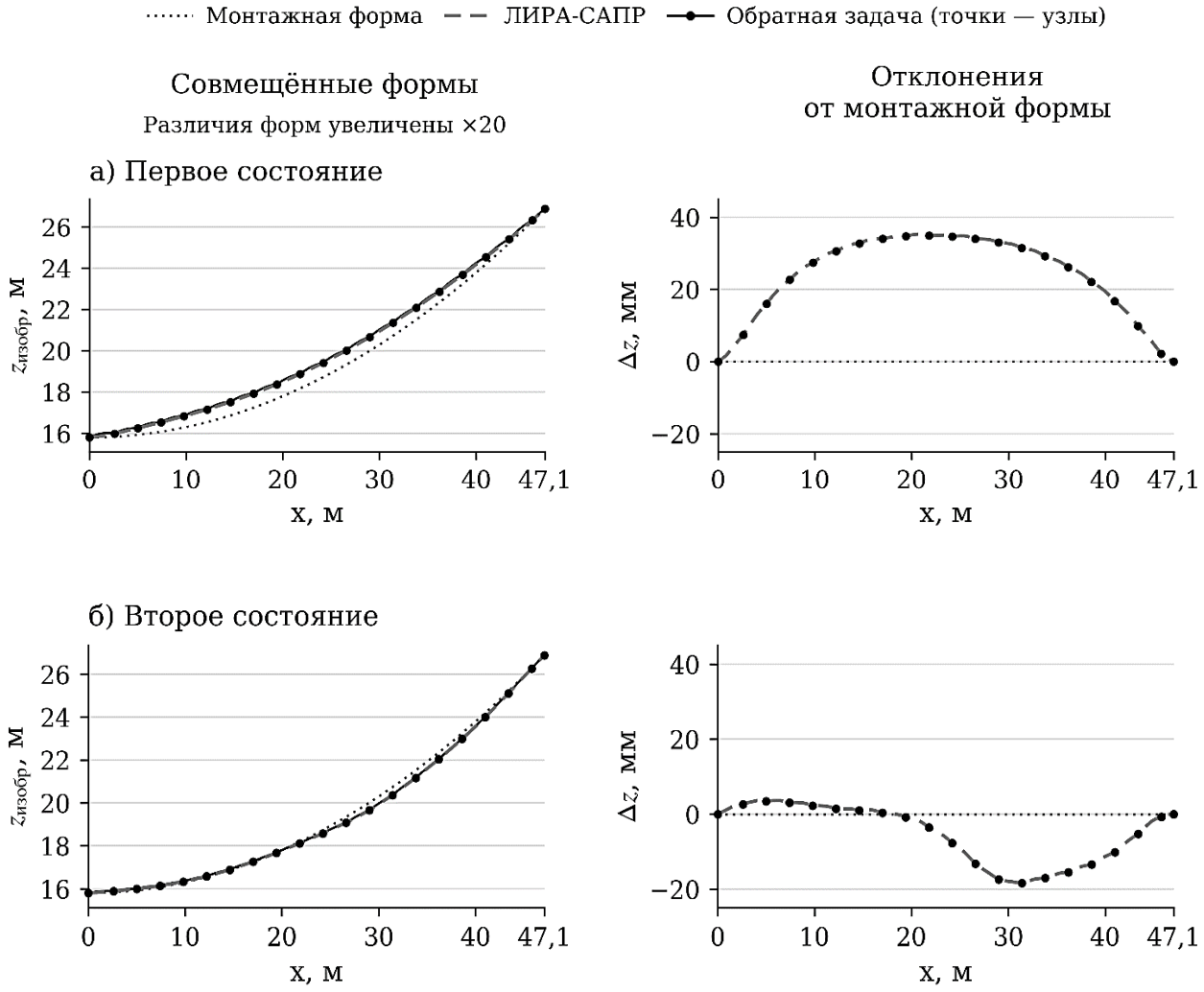


Рис. 4. Совмещённые формы центральной ванты и отклонения от монтажной формы:
а) первое состояние; б) второе состояние

По данным табл. 2, среднее натяжение центральной несущей ванты, полученное в обратной задаче, ниже результата полной модели в «ЛИРА-САПР» на 6,36 кН в первом равновесном состоянии и на 1,42 кН во втором. Относительное среднеквадратическое расхождение эпюр составило соответственно 0,388 и 0,169 %.

Таблица 2

Сопоставление натяжений ванты по обратной задаче с расчетом в «ЛИРА-САПР»

Величина	**Состояние 1**	**Состояние 2**
Среднее натяжение «ЛИРА-САПР», кН	1847,19	1945,83
Среднее натяжение обратной задачи, кН	1840,83	1944,41
Среднеквадратическое расхождение, кН	7,17	3,29
Относительное расхождение e_N, %	0,388	0,169

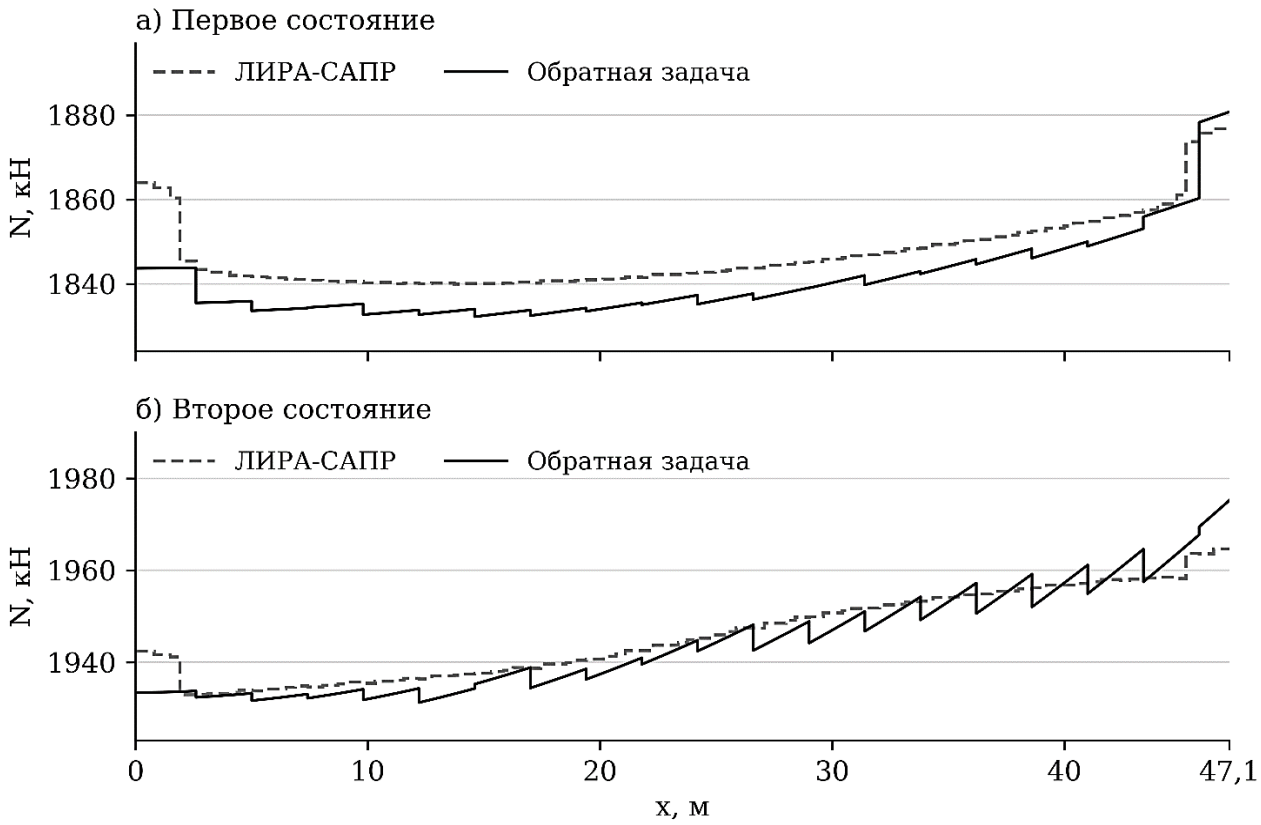


Рис. 5. Натяжение центральной ванты в двух равновесных состояниях

Как видно из рис. 5, обратный расчёт воспроизводит как средний уровень натяжения ванты в различных равновесных состояниях, так и общий характер распределения натяжения по полной модели «ЛИРА-САПР». Более выраженные скачки натяжения, наблюдаемые для эпюр обратной задачи, связаны с дискретизацией ванты по 19 узлам сил взаимодействия, соответствующим местам пересечения рассматриваемой ванты с примыкающими вантами, тогда как в «ЛИРА-САПР» взаимодействие передается через большее количество узлов. Также из-за этого на участках между узлами форма ванты в обратном решении несколько отличается от её формы в полной модели «ЛИРА-САПР», что приводит к небольшому различию расчётных удлинений и соответственно средних натяжений.

Дополнительно сопоставлены приращения натяжения при переходе от первого равновесного состояния ко второму на одних и тех же 20 материальных участках ванты. Для каждого из участков приращение натяжения определено как разность средних по длине натяжений в двух состояниях. Среднеквадратическое расхождение между приращениями натяжения, полученными в обратной задаче и полной модели «ЛИРА-САПР», составило 5,10 кН, а максимальное абсолютное расхождение – 8,38 кН. В среднем по 20 материальным участкам приращение натяжения в обратной задаче превышает соответствующее приращение в «ЛИРА-САПР» на 4,87 кН.

Выводы. На основании анализа предложенной расчетной схемы и произведенных численных расчетов обратной задачи можно сделать следующие выводы:

1. Для определения натяжения ванты в составе висячей оболочки предложена ее редуцированная модель и сформулирована обратная задача с неизвестными пространственными узловыми силами, которые учитывают действие на рассматриваемую ванту отброшенных оболочки и примыкающих вант. Эти силы определяются из условия минимизации расхождения расчетных и наблюдаемых положений узлов. Натяжение в конечном итоге рассчитывается по уравнениям равновесия и деформирования растяжимой гибкой нити;

2. Численная верификация предложенной расчётной схемы выполнена для центральной несущей ванты висячей оболочки. Наблюдаемые координаты узлов получены из решения прямой задачи для полной модели висячей оболочки в «ЛИРА-САПР». При 19 найденных узловых силах относительное среднеквадратическое расхождение натяжений ванты в обратной задаче с расчётом в «ЛИРА-САПР» составило 0,388 и 0,169 % в двух равновесных состояниях при различных нагрузках. Среднеквадратическое расхождение изменений натяжения между состояниями на 20 участках ванты равно 5,10 кН;

3. Показано, что равновесная форма центральной ванты воспроизводится в обратной задаче как в заданных материальных узлах, так и между ними. Среднеквадратическое расстояние между точками в 77 контрольных сечениях для расчетных и наблюдаемых осей ванты составило 3,03 и 1,02 мм соответственно в первом и втором равновесных состояниях.

Библиографический список

1. Pacitti A., Peigney M., Bourquin F., Lacarbonara W. Cable tension identification via nonlinear static inverse problem // Structural Health Monitoring. 2021. Vol. 20, no. 2. P. 546–566. DOI: 10.1177/1475921720940645.

2. Иванов Ю. С., Снежков И. И., Чаплин И. В., Яшнов А. Н. Автоматизация процесса определения усилия в вантовых элементах мостов по частотам собственных колебаний // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. 2017. № 4 (43). С. 18–25.

3. Geuzaine M., Foti F., Denoël V. Minimal requirements for the vibration-based identification of the axial force, the bending stiffness and the flexural boundary conditions in cables // Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 511. Art. 116326. DOI: 10.1016/j.jsv.2021.116326.

4. Xu Y., Zhang J., Zhang Y., Li C. A Novel Approach for Cable Tension Monitoring Based on Mode Shape Identification // Sensors. 2022. Vol. 22, no. 24. Art. 9975. DOI: 10.3390/s22249975.

5. Li W., Huang Q., Chen S. A cable finite element formulation based on exact tension field for static nonlinear analysis of cable structures. arXiv:2401.05609, version 5. 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2401.05609.

6. Suchocki C., Rutkiewicz A., Katzer J., Kowalska E. Remote estimation of cable tension using catenary theory and point clouds obtained by terrestrial laser scanning // Measurement. 2024. Vol. 236. Art. 115147. DOI: 10.1016/j.measurement.2024.115147.

7. Liu C., Yan C., Yu S., Ou J., Chen J. 3D Laser Scanning-Based Tension Assessment for Bridge Cables Considering Point Cloud Density // Structural Control and Health Monitoring. 2024. Vol. 2024. Art. 8094924. DOI: 10.1155/stc/8094924.

8. Srimontriphakdi T., Mahasuwanchai P., Athisakul C., Leelataviwat S., Klaycham K., Poovarodom N., Magteppong N., Chucheepsakul S. A Non-contact approach for cable tension evaluation based on 3D laser scanning data and nonlinear finite element analysis // Measurement. 2023. Vol. 212. Art. 112680. DOI: 10.1016/j.measurement.2023.112680.

9. Rinaldi C., Lepidi M., Potenza F., Gattulli V. Identification of cable tension through physical models and non-contact measurements // Mechanical Systems and Signal Processing. 2023. Vol. 205. Art. 110867. DOI: 10.1016/j.ymssp.2023.110867.

10. Епифанова Е. А., Строкова Л. А. Анализ деформаций прожекторной мачты при помощи наземного лазерного сканирования и метода конечных элементов // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2019. Т. 330, № 5. С. 7–17. DOI: 10.18799/24131830/2019/5/267.

11. Глазков Д. С., Козлов В. А. Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния висячей железобетонной оболочки типа «гипар» на основании данных лазерного сканирования // Строительная механика и конструкции. 2026. № 2 (49). С. 126–137. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.49.2.011.

12. Глазков Д. С., Козлов В. А. Моделирование и расчет на устойчивость к прогрессирующему обрушению здания сложной геометрической структуры // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тезисы докладов VIII Международного симпозиума (Тамбов, 17–21 мая 2023 г.). Тамбов: Изд-во ИП Чеснокова А. В., 2023. С. 219–220.

13. Глазков Д. С., Гребенкин С. Д., Козлов В. А. Компьютерное моделирование здания с комбинированным вантовым покрытием при расчете на устойчивость к прогрессирующему разрушению // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции (Воронеж, 2–4 декабря 2024 г.). Воронеж, 2025. С. 468–475.

14. Глазков Д. С., Козлов В. А. Анализ работы висячей оболочки отрицательной гауссовой кривизны под действием динамических нагрузок // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тезисы докладов IX Международного симпозиума (Пенза, 21–24 мая 2025 г.). Пенза: Изд-во ПГУ, 2025. С. 83–84.

15. Глазков Д. С., Козлов В. А. Влияние на НДС оболочки отрицательной гауссовой кривизны изменения податливости опорного контура // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. Междунар. науч. конф. (Воронеж, 1–3 дек. 2025 г.). Воронеж, 2026.

16. Светлицкий В. А. Механика абсолютно гибких стержней / под ред. А. Ю. Ишлинского. М.: Изд-во МАИ, 2001. 431 с.

17. Пояснительная записка по монтажу висячей оболочки цирка в г. Новосибирске / Министерство культуры СССР, Государственный проектный институт «ГИПРОТЕАТР». 1967.

18. Ascher U. M., Mattheij R. M. M., Russell R. D. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. Philadelphia: SIAM, 1995. 595 p. DOI: 10.1137/1.9781611971231.

19. Kierzenka J., Shampine L. F. A BVP solver based on residual control and the Matlab PSE // ACM Transactions on Mathematical Software. 2001. Vol. 27, no. 3. P. 299–316. DOI: 10.1145/502800.502801.

20. Branch M. A., Coleman T. F., Li Y. A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems // SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 21, no. 1. P. 1–23. DOI: 10.1137/S1064827595289108.

References

1. Pacitti A., Peigney M., Bourquin F., Lacarbonara W. Cable tension identification via nonlinear static inverse problem. Structural Health Monitoring. 2021. Vol. 20, no. 2. P. 546–566. DOI: 10.1177/1475921720940645.

2. Ivanov Yu. S., Snezhkov I. I., Chaplin I. V., Yashnov A. N. Automation of the determination of forces in bridge cable elements from natural frequencies. The Siberian Transport University Bulletin. 2017. No. 4 (43). P. 18–25. (In Russian).

3. Geuzaine M., Foti F., Denoël V. Minimal requirements for the vibration-based identification of the axial force, the bending stiffness and the flexural boundary conditions in cables. Journal of Sound and Vibration. 2021. Vol. 511. Art. 116326. DOI: 10.1016/j.jsv.2021.116326.

4. Xu Y., Zhang J., Zhang Y., Li C. A Novel Approach for Cable Tension Monitoring Based on Mode Shape Identification. Sensors. 2022. Vol. 22, no. 24. Art. 9975. DOI: 10.3390/s22249975.

5. Li W., Huang Q., Chen S. A cable finite element formulation based on exact tension field for static nonlinear analysis of cable structures. arXiv:2401.05609, version 5. 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2401.05609.

6. Suchocki C., Rutkiewicz A., Katzer J., Kowalska E. Remote estimation of cable tension using catenary theory and point clouds obtained by terrestrial laser scanning. Measurement. 2024. Vol. 236. Art. 115147. DOI: 10.1016/j.measurement.2024.115147.

7. Liu C., Yan C., Yu S., Ou J., Chen J. 3D Laser Scanning-Based Tension Assessment for Bridge Cables Considering Point Cloud Density. Structural Control and Health Monitoring. 2024. Vol. 2024. Art. 8094924. DOI: 10.1155/stc/8094924.

8. Srimontriphakdi T., Mahasuwanchai P., Athisakul C., Leelataviwat S., Klaycham K., Poovarodom N., Magteppong N., Chucheepsakul S. A Non-contact approach for cable tension evaluation based on 3D laser scanning data and nonlinear finite element analysis. Measurement. 2023. Vol. 212. Art. 112680. DOI: 10.1016/j.measurement.2023.112680.

9. Rinaldi C., Lepidi M., Potenza F., Gattulli V. Identification of cable tension through physical models and non-contact measurements. Mechanical Systems and Signal Processing. 2023. Vol. 205. Art. 110867. DOI: 10.1016/j.ymssp.2023.110867.

10. Epifanova E. A., Strokova L. A. Numerical analysis of deformations of the lighting mast by ground laser scanning and finite elements method. Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Geo Assets Engineering. 2019. Vol. 330, no. 5. P. 7–17. DOI: 10.18799/24131830/2019/5/267. (In Russian).

11. Glazkov D. S., Kozlov V. A. Experimental study of the stress-strain state of a hanging prestressed concrete hyperbolic paraboloid shell based on laser scanning data. Structural Mechanics and Structures. 2026. No. 2 (49). P. 126–137. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.49.2.011. (In Russian).

12. Glazkov D. S., Kozlov V. A. Modelling and analysis of the resistance to progressive collapse of a building with a complex geometric structure. In: Current Problems of Computer Modelling of Structures and Buildings: Abstracts of the VIII International Symposium (Tambov, 17–21 May 2023). Tambov: A. V. Chesnokov Publishing House, 2023. P. 219–220. (In Russian).

13. Glazkov D. S., Grebenkin S. D., Kozlov V. A. Computer modelling of a building with a combined cable-supported roof for progressive collapse resistance analysis. In: Current Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics: Proceedings of the International Scientific Conference (Voronezh, 2–4 December 2024). Voronezh, 2025. P. 468–475. (In Russian).

14. Glazkov D. S., Kozlov V. A. Analysis of the behaviour of a suspended shell of negative Gaussian curvature under dynamic loads. In: Current Problems of Computer Modelling of Structures and Buildings: Abstracts of the IX International Symposium (Penza, 21–24 May 2025). Penza: Penza State University Publishing House, 2025. P. 83–84. (In Russian).

15. Glazkov D. S., Kozlov V. A. Effect of changes in the support contour flexibility on the stress-strain state of a shell of negative Gaussian curvature. In: Current Problems of Applied Mathematics, Computer Science and Mechanics: Proceedings of the International Scientific Conference (Voronezh, 1–3 December 2025). Voronezh, 2026. (In Russian).

16. Svetlitsky V. A. Mechanics of perfectly flexible rods. Ishlinsky A. Yu., ed. Moscow: MAI Publishing House, 2001. 431 p. (In Russian).

17. Ministry of Culture of the USSR, GIPROTEATR State Design Institute. Explanatory note on the erection of the suspended shell of the circus in Novosibirsk. 1967. (In Russian).

18. Ascher U. M., Mattheij R. M. M., Russell R. D. Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations. Philadelphia: SIAM, 1995. 595 p. DOI: 10.1137/1.9781611971231.

19. Kierzenka J., Shampine L. F. A BVP solver based on residual control and the Matlab PSE. ACM Transactions on Mathematical Software. 2001. Vol. 27, no. 3. P. 299–316. DOI: 10.1145/502800.502801.

20. Branch M. A., Coleman T. F., Li Y. A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems. SIAM Journal on Scientific Computing. 1999. Vol. 21, no. 1. P. 1–23. DOI: 10.1137/S1064827595289108.

DETERMINATION OF CABLE TENSION IN A SUSPENDED SHELL FROM THE EQUILIBRIUM SHAPE OF THE CABLES

D. S. Glazkov [1], V. A. Kozlov [2]

Voronezh State Technical University [1, 2]
Russia, Voronezh

[1] Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, e-mail: glazckov.mitia@yandex.ru
[2] Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Structural Mechanics, e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

The article proposes a method for estimating cable tension in a suspended shell by reducing the multiparameter analysis of a complex nonlinear system to a nonlinear boundary value problem for an isolated cable.

The equilibrium shape of a cable in a suspended reinforced concrete shell reflects external loading and forces transmitted by the concrete and intersecting cables. This shape is used as the observed response in an inverse problem for an extensible flexible cable subjected to a known distributed load and unknown spatial nodal forces. Applied at cable intersections, these forces represent the action of the excluded shell and other cables. The support positions, axial stiffness, intersection locations and unstressed segment lengths are assumed known.

The method is applied to the central carrying cable of a hyperbolic paraboloid shell. Nodal forces are determined by matching calculated and observed geometry separately for two equilibrium states under different loads. A collocation method is proposed for solving each segment's nonlinear boundary value problem, with continuity of the cable axis and nodal equilibrium imposed at segment junctions. The observed geometry is obtained from finite element analysis of the shell in LIRA-SAPR.

With 19 nodal forces, the relative root mean square difference in tension between the inverse solution and LIRA-SAPR is below 1 %. Both states reproduce the cable sag curve and the tension variation caused by the distributed load.

Keywords: suspended shell, cable net, cable tension, inverse problem, distributed load, nodal force, material coordinate.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.012.45
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.008

ИЗМЕРЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ

О. В. Душко [1], А. П. Долганов [2], М. И. Бочков [3], И. С. Завьялов [4], А. И. Тараканов [5]

Волгоградский государственный технический университет [1, 2, 3, 4, 5]
Россия, г. Волгоград

[1] Д-р техн. наук, доц., зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(8442) 97-48-72, e-mail: dushko@vgasu.ru
[2] Канд. техн. наук, доц. кафедры гидротехнических и земляных сооружений, тел.: +7(8442) 96-98-87, e-mail: kafgzs@vgasu.ru
[3] Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7 (8442) 96-99-17, e-mail: bochkovmi@vgasu.ru
[4] Канд. техн. наук, ст. преп. кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, тел.: +7 (8442) 96-99-17, e-mail: skoins@mail.ru
[5] Лаборант кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений, тел.: +7 (8442) 96-99-17, e-mail: tarakanov.afona@gmail.com

Описывается опыт измерения динамических параметров здания с помощью виброанализатора-регистратора портативного ВИБРАН-3.2. В качестве нормативной базы таких исследований рассмотрены современные российские нормы по обследованию и мониторингу зданий в области проведения измерений динамических характеристик при обследованиях. В качестве объекта исследования выбрано восемнадцатиэтажное монолитное железобетонное здание на этапе выполнения отделочных работ (при полностью готовых несущих конструкциях). Произведено численное моделирование этого здания с помощью верифицированного программного комплекса с определением динамических характеристик. Произведено численное сравнение результатов экспериментального определения динамических характеристик здания со значениями, определенными с помощью нормативных методик расчета, основанных на эмпирических формулах.

Ключевые слова: обследование зданий, динамический мониторинг зданий, период колебания, декремент затухания колебаний.

Введение. Динамические параметры являются важным фактором, который необходимо учитывать при проектировании зданий и сооружений как с точки зрения прочностного расчета [1–3], так и с точки зрения организации безопасности жизнедеятельности [4–6]. Однако вопрос измерения динамических параметров зданий и сооружений при обследовании и их мониторинге является недостаточно изученным вследствие сложности экспериментальных измерений. На сегодняшний день проблема измерения динамических характеристик зданий при обследовании осложняется тем, что не все проектные организации имеют оборудование, позволяющее измерить динамические параметры зданий, или не обладают достаточными компетенциями и временем на полноценный анализ методик измерения [7].

В соответствии с ГОСТ 31937-2011 при обследовании и мониторинге технического состояния зданий и сооружений необходимо измерение динамических параметров. В соответствии с нормативным документом, в паспорте здания необходимо зафиксировать такие динамически параметры, как:

– период основного тона собственных колебаний вдоль большой, малой и вертикальной осей;

© Душко О. В., Долганов А. П., Бочков М. И., Завьялов И. С., Тараканов А. И., 2026

– логарифмические декременты основного тона собственных колебаний вдоль большой, малой и вертикальной осей.

Также предполагается фиксировать изменение этих параметров при общем мониторинге технического состояния зданий [8–10].

Динамические параметры здания также могут применяться для анализа его технического состояния не только с точки зрения его строительной безопасности, но и с точки зрения охраны жизнедеятельности. Например, в методике по оценке безопасности сооружений МЧС [11] приводятся критерии увеличения периода собственных колебаний в зависимости от степени повреждения здания.

Стоит отметить и тот факт, что измеренные натурными испытаниями динамические характеристики зданий можно использовать и для решения обратной задачи строительной механики и прочих альтернативных задач [12–17]. Например, в [17] авторами рассмотрена возможность оценки жесткостных характеристик зданий по результатам экспериментальных измерений частоты их собственных колебаний.

Также стоит отметить возможность верификации расчетных комплексов и методов, которые они используют для определения динамических характеристик при моделировании.

Таким образом, задача измерения динамических характеристик зданий регламентирована ведущим нормативным документом и представляет собою актуальную и практически значимую проблему.

Целью исследования является проведение сравнительного анализа динамических характеристик многоэтажного монолитного здания, полученных натурными испытаниями, численным моделированием и нормативными методиками.

Для достижения целей исследования решены *задачи*:

– проведения натурных испытаний;
– формирования верификационной конечно-элементной модели ПК «ЛИРА»;
– выполнения модального расчета в ПК «ЛИРА»;
– сравнения численных результатов.

Описание объекта и экспериментальной программы. Для натурных измерений динамических параметров здания был использован виброанализатор-регистратор портативный ВИБРАН-3.2, предназначенный для записи и анализа колебательных процессов различных объектов, а также для оценки влияния вибрации на человека в производственных, жилых и общественных зданиях в соответствии с СН 2.2.4/2.1.8.566. Определение значений периода и логарифмического декремента основного тона собственных колебаний здания осуществлялось согласно ГОСТ 34081. Поставленной задачей являлось измерение собственных резонансных колебаний здания, вызванных атмосферными воздействиями либо наведенными воздействиями (микросейсмами) от близкорасположенных зданий и сооружений, а также проходящего транспорта. Для решения задачи использован сейсмометр трехосевой СМЕ-4211, имеющий гораздо большую чувствительность, по сравнению с обычными вибродатчиками.

В качестве объекта исследования выбрано 18-этажное жилое здание на этапе выполнения отделочных работ (рис. 1). Высота здания – 60,0 м, размеры в плане – 30,2×16,62 м.

Контрольной точкой измерений выбран 16 этаж, так как необходимые данные рекомендуется регистрировать, как правило, в верхней точке объекта вблизи центра масс. Схема расположения виброанализатора-регистратора приведена на рис. 2. Сейсмометр устанавливается на плиту перекрытия и приводится в горизонт с помощью пузырькового уровня на корпусе самого прибора. Колебания, регистрируемые сейсмометром, передаются через кабель и усилитель сигнала на электронный блок регистратора, который обрабатывает полученные данные и выдает на экране необходимую для исследований информацию. После завершения регистрационных работ с помощью специализированного ПО измерения переданы на ПК для дальнейшего анализа.





Рис. 1. Фасады
18-этажного жилого здания

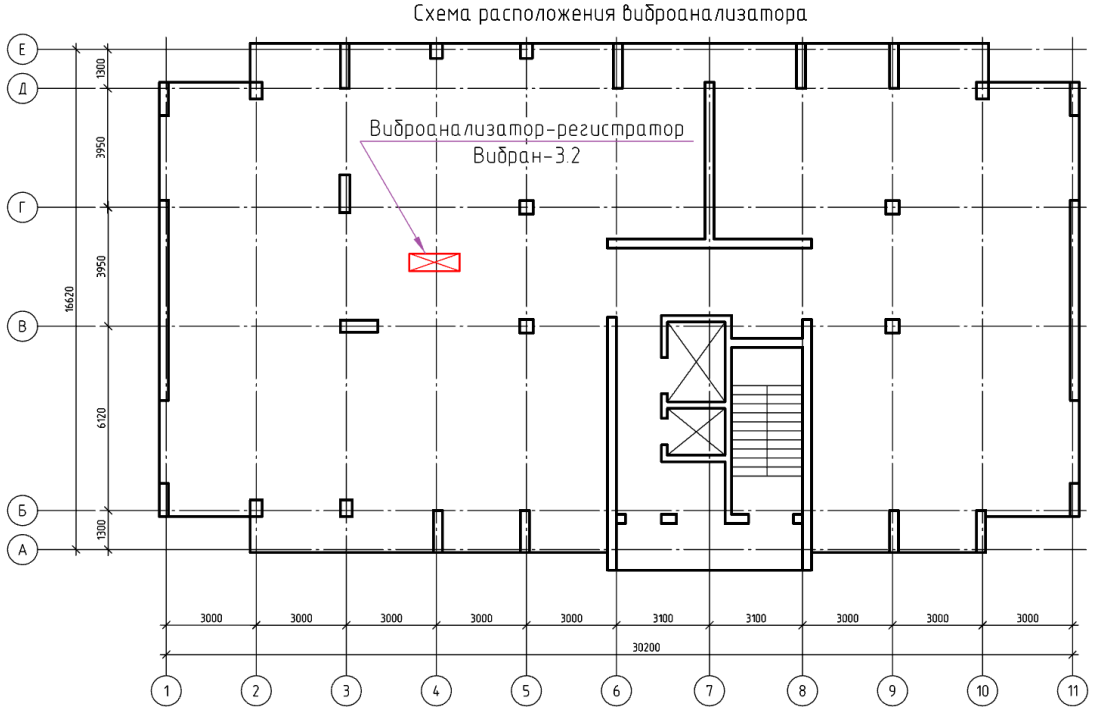


Рис. 2. Схема расположения виброанализатора

Численный модальный анализ. Верификационная модель ПК «ЛИРА-САПР». Для проведения численного модального анализа и сравнения экспериментальных данных с численными значениями разработана верификационная конечно-элементная модель исследуемого жилого здания в ПК «ЛИРА-САПР» (рис. 3). Общее количество конечных элементов в модели достигло 123 740.

Жесткости элементов схемы:

- колонна в осях Б-2, Д-2, Б-3, Д-10 – сечение 400×550 мм;
- колонна в осях Е-4, Е-5 – сечение 400×500 мм;
- колонна в осях В-5, В-9 – сечение 450×450 мм;
- колонна в осях Г-5, Г-9 – сечение 450×500 мм;
- толщина монолитных перекрытий – 200 мм;
- пилоны, стены толщиной 300 мм.

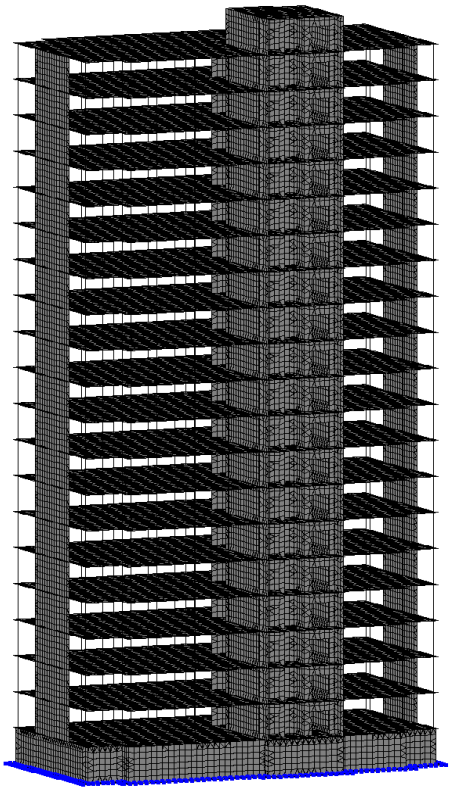


Рис. 3. Расчетная схема исследуемого жилого здания

Моделирование выполнялось с использованием технологии «импорт поэтажного плана DXF». С точки зрения строительной механики вся модель состоит из стержневых, пластинчатых, оболочечных и объемных конечных элементов. Дискретизация здания выполнена с использованием комбинации конечных элементов:

- универсального пространственного стержневого КЭ 10;
- прямоугольного КЭ плиты КЭ 11;
- четырехугольного КЭ плиты КЭ 19;
- треугольного КЭ плиты КЭ-12;
- объемного КЭ «параллелепипед КЭ 31»;
- объемного КЭ «прямая треугольная призма КЭ 33»;
- универсального треугольного КЭ оболочки КЭ 42;
- универсального четырехугольного КЭ оболочки КЭ 44;
- одноузлового КЭ одиночной сваи КЭ 57.

В базовой модели принят класс бетона В30 для всех элементов. Значение начального модуля упругости принято равным E_b = 32 500 МПа. Модуль упругости материала принят равным E_b с понижающими коэффициентами:

- 0,6 – для вертикальных сжатых элементов;
- 0,3 – для плит перекрытий (покрытий).

Коэффициент Пуассона для всех элементов принят 0,20. Плотность железобетона – 2500 кг/м³.

Моделирование грунтового массива выполнялось трехмерными конечными элементами с применением системы «ГРУНТ». По литологическому составу и физико-механическим свойствам в разрезе исследуемой площадки выделено 3 инженерно-геологических элемента (ИГЭ):

- ИГЭ-1 – насыпной грунт, суглинок тугопластичный, выше уровня грунтовых вод (tQIV).

На изучаемом участке имеют повсеместное распространение, залегают с дневной поверхности на глубину 2,7 м.

Физические характеристики грунтов (ИГЭ-1): нормативные значения ρ = 1,99 г/см^3.

Расчетные показатели сопротивления консолидированному срезу с предварительным уплотнением и водонасыщением для грунтов (ИГЭ-1) приняты: φ = 25°; С = 11 кПа.

Деформационные характеристики грунтов (ИГЭ-1): одометрический модуль деформации грунтов по результатам компрессионных испытаний при природной влажности E_W изменяется от 4,0 до 10,5 МПа, среднее значение – 5,7 МПа;

– ИГЭ-2 – супесь пластичная, ниже уровня грунтовых вод (v(L)QIII).

Представлены супесями светло-коричневыми с прослоями суглинков и серо зеленого пылеватого песка. Мощность слоя составила 6,2 м.

Физические характеристики грунтов (ИГЭ-2): нормативные значения ρ = 1,92 г/см^3.

Показатели сопротивления консолидированному срезу с предварительным уплотнением и водонасыщением для грунтов (ИГЭ-2) приняты φ = 31°; С = 7 кПа.

Деформационные характеристики грунтов (ИГЭ-2): одометрический модуль деформации грунтов составил E_W = 6,0 МПа;

– ИГЭ-3 – суглинок тугопластичный (песчано-алевритовая порода) (P2mč).

Представлены песчано-алевритовой породой, неравномерно сцементированной, серо-зеленого цвета, трещиноватой, с прослоями светло-серого алевритистого песка и ожелезнения, с включением обломков песчаника разного размера. Мощность слоя составила 21,1 м.

Физические характеристики грунтов (ИГЭ-3): нормативные значения ρ = 1,95 г/см^3.

Показатели сопротивления консолидированному срезу с предварительным уплотнением и водонасыщением для грунтов (ИГЭ-3) приняты: φ = 19°; С = 14 кПа.

Деформационные характеристики грунтов (ИГЭ-3): одометрический модуль деформации грунтов составил E_W = 14,1 МПа.

Нормативные и расчетные значения характеристик физико-механических свойств грунтов вычислены в соответствии с требованиями СП 22.13330.2016 (актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83*) и ГОСТ 20522-2011. Классификация грунтов принята по ГОСТ 25100-2020.

В расчётную модель введены следующие нагрузки:

– собственный вес конструкций;
– вес перегородок;
– вес ненесущих стен и фасадных элементов;
– ветровая нагрузка: средняя и пульсационная составляющие.

Массовая модель для динамического анализа сформирована на основе статических загружений. Для формирования матрицы масс конечного элемента при динамическом расчете по МКЭ используются различные подходы, приводящие к согласованной или диагональной матрице масс. Инерционные параметры в динамической модели заданы в виде распределенных масс в узлах конечно-элементной сетки [18,19]:

$$M = \rho \int_{\Omega} N^T N h d\Omega ,$$

где ρ – плотность материала; N – матрица функций формы конечного элемента.

В данном случае применялась диагональная матрица масс. Упрощение построения матрицы масс основано на том, что влиянием инерции вращения масс, распределенных по длине конечного элемента-стержня или конечного элемента-пластинки, обычно пренебрегают из-за его малости.

В процессе расчёта на динамическое воздействие система разлагается по формам колебаний, для каждой из форм определяются период и частота собственных колебаний. Количество рассматриваемых форм колебаний ограничивается предельным значением частоты, которое определяется по табл. 11.5 СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия» и зависит от типа сооружения и ветрового района.

Результаты экспериментальных измерений. В результате натурных испытаний прибором ВИБРАН-3.2 и модального расчёта в верификационной модели ПК «ЛИРА-САПР» был определен период основного тона собственных колебаний здания. Дополнительно использованы нормативные значения периодов по ГОСТ Р 54859-2011 и методике МЧС РФ для оценки полученных численных значений.

В табл. 1 приведены результаты натурных измерений по наименее жесткому направлению, значения периодов колебаний, определенные по указаниям, а также результаты численного расчета в ПК «ЛИРА».

Таблица 1

Результаты определения периодов собственных колебаний по основному тону

Метод определения		Период колебаний, с
Аппаратное измерение	1 измерение	0,925
	2 измерение	0,926
	3 измерение	0,926
По указаниям ГОСТ [20]		1,01–1,51
По указаниям методики [11]		1,216
ПК «ЛИРА-САПР»		1,179

На рис. 4 приведен спектр частот, измеренных на объекте. Вверху рисунка представлены значения периода (T = 0,926 с) и декремента колебаний (D = 0,032).

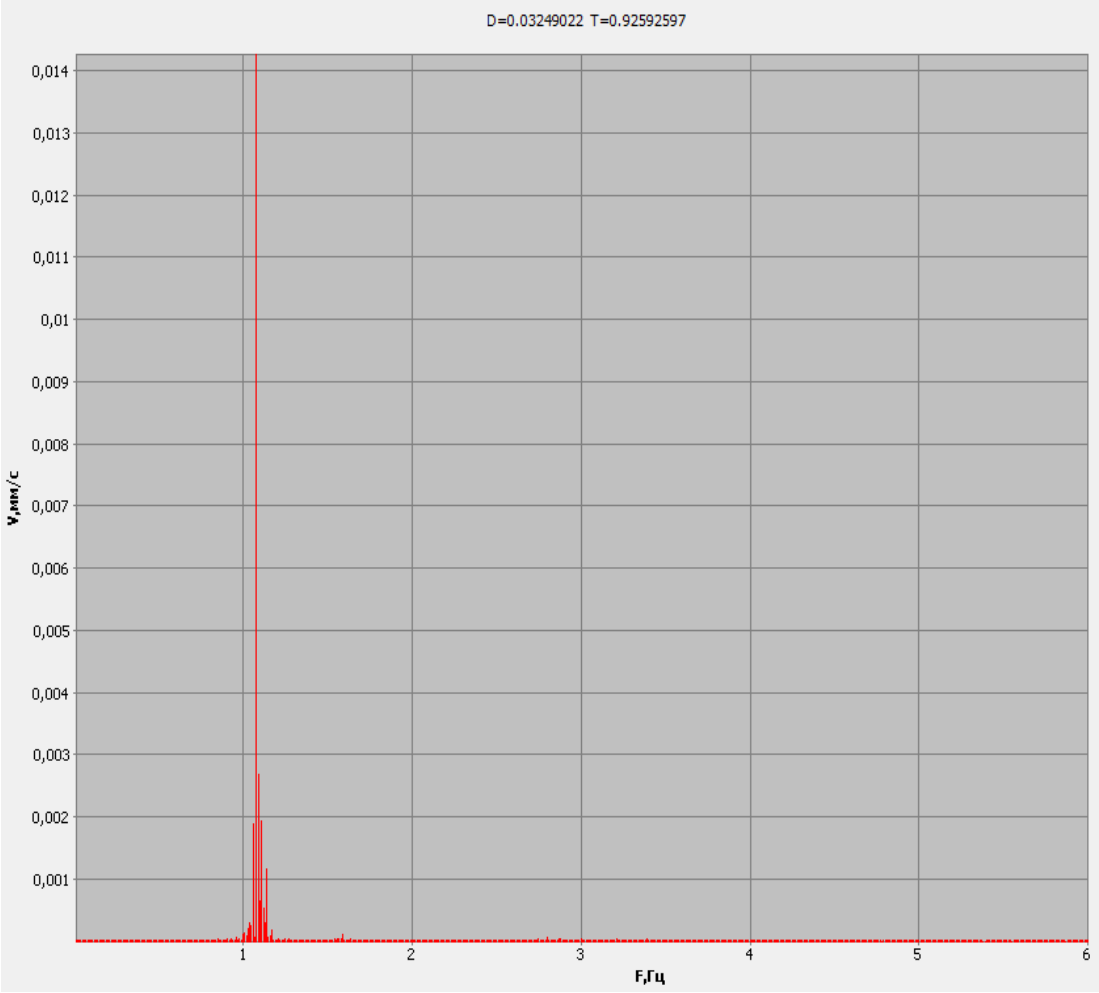


Рис. 4. Спектр частот

В соответствии с п. 11.1.7 СП 20.13330.2016 для зданий высотой более 40 м пульсационную составляющую ветровой нагрузки следует определять с учетом первых трех форм собственных колебаний. В связи с этим в рамках настоящего исследования был выполнен модальный анализ в ПК «ЛИРА-САПР», в ходе которого определены периоды и частоты для первых трех тонов собственных колебаний здания. Численные значения периодов колебаний, частот колебаний первых трех форм приведены в табл. 2.

Помимо этого, нормативными требованиями установлено, что для высотных сооружений следует стремиться к тому, чтобы первые две формы колебаний не были крутильными [21].

Таблица 2

Результаты определения первых трех форм собственных колебаний

Номер формы (i)	Период колебаний, с	Частота f_i, Гц	Тип формы колебаний	Отношение f_2/f_1	Отношение f_3/f_2
1	1,179	0,848	Изгибная по оси X	–	–
2	0,911	1,097	Изгибная по оси Y	1,293	–
3	0,774	1,291	Крутильная	–	1,176

На рис. 5–7 приведены первые три собственные формы колебаний, рассчитанные в ПК «ЛИРА-САПР».

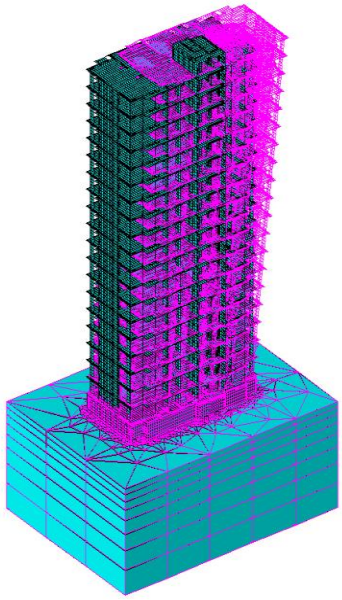


Рис. 5. 1-я форма колебаний исследуемого здания

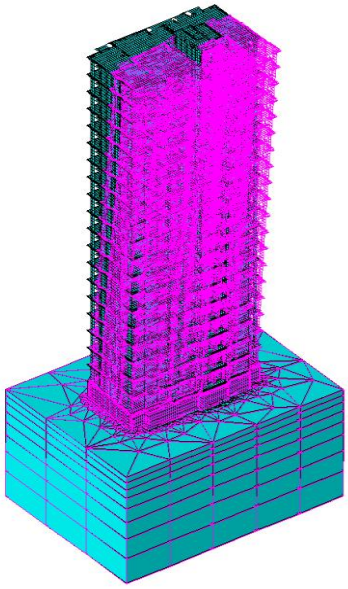


Рис. 6. 2-я форма колебаний исследуемого здания

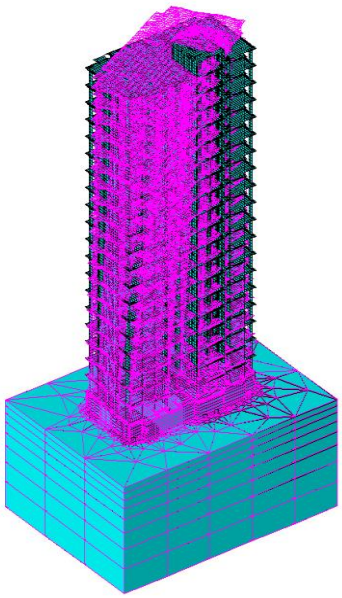


Рис. 7. 3-я форма колебаний исследуемого здания

Заключение. В работе выполнены натурные измерения динамических характеристик многоэтажного здания с помощью портативного виброанализатора-регистратора ВИБРАН-3.2 и проведён модальный анализ верификационной расчётной модели в ПК «ЛИРА-САПР». Нормативные значения периодов (ориентировочные данные о границах диапазона периода) собственных колебаний определены в соответствии с ГОСТ Р 54859-2011 и методикой МЧС РФ.

Следует особо отметить, что тема определения динамических характеристик зданий и сооружений в процессе их возведения и эксплуатации остаётся недостаточно изученной, несмотря на наличие нормативных документов.

Сопоставление результатов показало стабильное выявление первых собственных мод как в натурных измерениях, так и в расчёте. Установлено удовлетворительное соответствие натурно определенных периодов колебаний с численным моделированием в верифицированном программном комплексе и результатами расчета по формулам из ГОСТ Р 54859-2011. Выявленные погрешности могут быть связаны с несовершенством модели грунтового основания. Анализ численных значений показал, что экспериментальные периоды в целом укладываются в типовые нормативные пределы для зданий аналогичной этажности и конструктивного исполнения.

В развитие темы исследования авторами планируется исследование объектов с другими конструктивными схемами различной этажности, а также изучение влияния различных факторов на возможные причины расхождения численных результатов измерения динамических параметров.

Сведения о финансировании. Расчётно-экспериментальные задачи производились на виброанализаторе-регистраторе портативном ВИБРАН-3.2, внедренном на кафедре «Строительная механика» ВолгГТУ в рамках реализации программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030».

Библиографический список

1. Коротков В. А., Родин П. А. Установление критерия для динамического мониторинга железобетонных строительных конструкций зданий // Строительная механика и расчет сооружений. 2024. № 5 (316). С. 22–27.

2. Патрикеев А. В. Практическое применение методов и оборудования периодического динамического контроля (мониторинга) для обеспечения механической безопасности зданий и сооружений транспортной инфраструктуры // Студент-инновации России. 2019. Т. 1. № 5. С. 11–19.

3. Danilin A. N., Kurbatov A. S., Zhavoronok S. I. Simulation of a Multi-Frequency Stockbridge Vibration Damper Oscilations with Energy Scattering Hysteresis // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16, No. 4. Pp. 29–37. DOI: 10.22337/2587-9618-2020-16-4-29-37. EDN: RCMWRL.

4. Liu Z., Zhou Y., Golyanin A. Simulation Study on The Blocking Effect and Vibration Reduction Characteristics of Acoustic Black Hole in Thin Plate // Bulletin of Science and Practice. 2020. Vol. 6, No. 4. Pp. 223–231. DOI: 10.33619/2414-2948/53/26. EDN: CIOCPT.

5. Патрикеев А. В., Першина К. В. Основные принципы контроля механической безопасности несущих конструкций высотных зданий и сооружений как элемента ТИМ-модели // Вестник московского информационно-технологического университета – Московского архитектурно-строительного института. 2023. № 1. С. 43–46.

6. Могилюк Ж. Г., Хлыстунов М. С., Подувальцев В. В. Проблемы автоматизированного контроля и мониторинга динамических параметров безопасности объектов техносферы // Автоматизация в промышленности. 2018. № 10. С. 19–24.

7. Улыбин А. В. Измерение периодов и декрементов колебаний многоэтажных зданий // Обследование зданий и сооружений: проблемы и пути их решения: материалы VIII междунар. науч.-практ. конф., Санкт-Петербург, 13 окт. 2017 г. СПб.: ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», 2017. С. 192–202. – EDN: YQYCBV.

8. Ota T., Watanabe H. Dynamic characteristics of a re-reinforced steel reinforced concrete building based on seismic observation-using observed first natural period and predominant period // Новые идеи нового века: материалы междунар. науч. конф. ФАД «ТОГУ», 2017. Т. 3. С. 323–328.

9. Корепанов В. В., Цветков Р. В. Сезонные изменения собственных частот колебаний здания на свайном фундаменте // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2014. № 2. С. 153–167.

10. Базаров А. Д., Лундэнбазар Б., Иванов И. А Оценка динамических характеристик каркасного здания при воздействии техногенной вибрации // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2020. Т. 10, № 1 (32). С. 46–53.

11. Методика оценки и сертификации инженерной безопасности зданий и сооружений. МЧС России. М., 2003. 85 с.

12. Базаров А. Д., Лундэнбазар Б., Комаров А. К., Иванов И. А Оценка динамической реакции каркасного здания под воздействием микросейсмического шума в г. Улан-Баторе // Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость. 2020. Т. 10, № 2 (33). С. 198–205.

13. Савинов А. М., Нигметов Г. М., Ковалева С. Д., Нигметов Т. Г. Определение логарифмического декремента колебаний зданий и сооружений // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 1 (294). С. 62–65.

14. Савинов А. М., Нигметов Г. М., Нигметов Т. Г. Определение логарифмического декремента колебаний зданий и сооружений башенного типа // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2025. № 5 (80). С. 24–28.

15. Tamrazyan A. G., Kudryavtsev M. V. Influence of damage level on dynamic characteristics of reinforced concrete structures when assessing their seismic resistance // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2024. Vol. 20, No. 3. Pp. 255–264.

16. Benai H., Zagoruiko T., Smirnova N. Scientific and experimental aspects of architectural and urban surveying of spectacular buildings and structures during reconstruction // Proceeding of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. 2022. No. 3 (155). Pp. 41–46.

17. Савин С. Н., Фан Ч. Д. Контроль технического состояния зданий и сооружений по их динамическим характеристикам // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. 2024. № 1 (47). С. 20–27. DOI: 10.52684/2312-3702-2024-47-1-20-27. EDN: EZGXVH.

18. Секулович М. Метод конечных элементов: пер. с серб. М.: Стройиздат, 1993. 664 с.

19. Лукашевич А. А. Современные численные методы строительной механики: учеб. пособие. Хабаровск: изд-во Хабаровск. гос. техн. ун-та, 2003. 135с.

20. ГОСТ Р 54859-2011. Здания и сооружения. Определение параметров основного тона собственных колебаний. М.: Стандартинформ, 2012. 19 с.

21. СП 20.13330.2016. Свод правил. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85* (утв. Приказом Минстроя России от 03.12.2016 N 891/пр) (ред. от 30.12.2020). М.: Стандартинформ, 2018. 95 с.

References

1. Korotkov V. A., Rodin P. A. Establishing a criterion for dynamic monitoring of reinforced concrete building structures // Structural Mechanics and Analysis of Structures. 2024. No. 5 (316). Pp. 22–27.

2. Patrikeev A. V. Practical application of periodic dynamic monitoring methods and equipment to ensure mechanical safety of buildings and transport infrastructure structures // Student-Innovators of Russia. 2019. Vol. 1. No. 5. Pp. 11–19.

3. Danilin A. N., Kurbatov A. S., Zhavoronok S. I. Simulation of a multi-frequency stockbridge vibration damper oscillations with energy scattering hysteresis // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2020. Vol. 16. No. 4. Pp. 29–37. DOI: 10.22337/2587-9618-2020-16-4-29-37. EDN: RCMWRL.

4. Liu Z., Zhou Y., Golyanin A. Simulation study on the blocking effect and vibration reduction characteristics of acoustic black hole in thin plate // Bulletin of Science and Practice. 2020. Vol. 6. No. 4. Pp. 223–231. DOI: 10.33619/2414-2948/53/26. EDN: CIOCPT.

5. Patrikeev A. V., Pershina K. V. Basic principles of mechanical safety control of load-bearing structures of high-rise buildings and structures as an element of the TIM model // Bulletin of the Moscow Information Technology University – Moscow Institute of Architecture and Civil Engineering. 2023. No. 1. Pp. 43–46.

6. Mogilyuk Zh. G., Khlystunov M. S., Poduvaltsev V. V. Problems of automated control and monitoring of dynamic safety parameters of technosphere objects // Automation in Industry. 2018. No. 10. Pp. 19–24.

7. Ulybin A. V. Measurement of periods and decrements of oscillations of multi-story buildings // Inspection of buildings and structures: problems and solutions: Proc. VIII International Scientific and Practical Conf., St. Petersburg, October 13. 2017. St. Petersburg: Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University. 2017. Pp. 192–202. EDN: YQYCBV.

8. Ota T., Watanabe H. Dynamic characteristics of a re-reinforced steel-reinforced concrete building based on seismic observation – using the observed first natural period and predominant period // New Ideas for the New Century: Proc. Int. Scientific Conf. FAD “PSU”. 2017. Vol. 3. Pp. 323–328.

9. Korepanov V. V., Tsvetkov R. V. Seasonal changes in the natural frequencies of vibrations of a building on a pile foundation // Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2014. No. 2. Pp. 153–167.

10. Bazarov A. D., Lundenbazar B., Ivanov I. A. Evaluation of the dynamic characteristics of a frame building exposed to man-made vibration // News of Universities. Investments. Construction. Real Estate. 2020. Vol. 10. No. 1 (32). Pp. 46–53.

11. Methodology for the assessment and certification of engineering safety of buildings and structures. EMERCOM of Russia. Moscow, 2003. 85 p.

12. Bazarov A. D., Lundenbazar B., Komarov A. K., Ivanov I. A. Evaluation of the dynamic response of a frame building exposed to microseismic noise in Ulaanbaatar // News of Universities. Investments. Construction. Real Estate. 2020. Vol. 10. No. 2 (33). Pp. 198–205.

13. Savinov A. M., Nigmetov G. M., Kovaleva S. D., Nigmetov T. G. Determination of the logarithmic decrement of oscillations of buildings and structures // Structural Mechanics and Analysis of Structures. 2021. No. 1 (294). Pp. 62–65.

14. Savinov A. M., Nigmetov G. M., Nigmetov T. G. Determination of the logarithmic decrement of oscillations of buildings and tower-type structures // Natural and Man-Made Risks. Safety of Structures. 2025. No. 5 (80). Pp. 24–28.

15. Tamrazyan A. G., Kudryavtsev M. V. Influence of damage level on dynamic characteristics of reinforced concrete structures when assessing their seismic resistance // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2024. Vol. 20. No. 3. Pp. 255–264.

16. Benai H., Zagoruiko T., Smirnova N. Scientific and experimental aspects of architectural and urban surveying of spectacular buildings and structures during reconstruction // Proceedings of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. 2022. No. 3(155). Pp. 41–46.

17. Savin S. N., Fan Ch. D. Monitoring the technical condition of buildings and structures by their dynamic characteristics // Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region. 2024. No. 1 (47). Pp. 20–27. DOI: 10.52684/2312-3702-2024-47-1-20-27. EDN: EZGXVH.

18. Sekulovich M. Finite element method: trans. from Serbian. Moscow: Stroyizdat, 1993. 664 p.

19. Lukashevich A. A. Modern Numerical Methods of Structural Mechanics: Textbook. Khabarovsk: Publishing House of Khabarovsk State Technical University, 2003. 135 p.

20. Federal Stadard 54859-2011. Buildings and Structures. Determination of the Parameters of the Fundamental Tone of Natural Oscillations. Moscow: Standartinform, 2012. 19 p.

21. Set of Rules 20.13330.2016. Code of Practice. Loads and Impacts. Updated version of SNiP 2.01.07-85* (approved by Order of the Ministry of Construction of Russia dated 03.12.2016 N 891/pr) (as amended on 30.12.2020). M.: Standartinform, 2018. 95 p.

MEASUREMENT OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF MULTI-STORY BUILDINGS

O. V. Dushko [1], A. P. Dolganov [2],
M. I. Bochkov [3], I. S. Zavyalov [4], A. I. Tarakanov [5]

Volgograd State Technical University [1, 2, 3, 4, 5]
Russia, Volgograd

[1] Dr. of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Structural Mechanics,
tel.: +7(8442) 97-48-72, e-mail: dushko@vgasu.ru
[2] PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Hydraulic Engineering and Earthworks,
tel.: +7(8442) 96-98-87, e-mail: kafgzs@vgasu.ru
[3] PhD of Technical Sciences, Associate Professor at the Department of Structural Mechanics,
tel.: +7 (8442) 96-99-17, e-mail: maxim.bochckow@yandex.ru
[4] PhD of Technical Sciences, Assistant Professor of the Department of Building Structures, Foundations
and Reliability of Structures, tel.: +7 (8442) 96-99-17, e-mail: is_zavyalov@mail.ru
[5] Laboratory Assistant of the Department of Building Structures, Foundations and Reliability of Structures,
tel.: +7 (8442) 96-99-17, e-mail: tarakanov.afona@gmail.com

The article describes the authors' experience in measuring the dynamic parameters of a building using the portable VIBRAN-3.2 vibration analyzer and recorder. Current Russian standards for building inspection and monitoring, in the field of dynamic characteristic measurements are considered as the normative basis for such research. An eighteen-story monolithic reinforced concrete building at the stage of finishing work (with fully completed load-bearing structures) was chosen as the object of study. Numerical modeling of this building was performed using a verified software package to determine its dynamic characteristics. A numerical comparison of the results of the experimental determination of the building's dynamic characteristics and the values determined using normative calculation methods based on empirical formulas was carried out.

Keywords: building inspection, dynamic monitoring of buildings, oscillation period, oscillation damping decrement.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.04
DOI 10.36622/2219-1038.2026.50.3.009

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГРУНТОВОГО МАССИВА ПРЯМЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

О. В. Мкртычев [1], С. А. Айтян [2]

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет [1, 2]
Россия, г. Москва

[1] Д-р техн. наук, зав. кафедрой сопротивления материалов, тел.: +7(499)183-34-83, e-mail: MkrtychevOV@mgsu.ru
[2] Магистр, тел.: +7(968)552-77-61, e-mail: Serezhaaitian@mail.ru

Рассмотрена методика определения амплитудно-частотных характеристик грунтового массива прямым динамическим методом. Численное моделирование выполнено в программном комплексе «ANSYS/LS-DYNA» на примере однородного грунтового массива в линейно-упругой постановке. Исследованы пять расчетных вариантов с динамическим модулем деформации грунта от 8 до 200 МПа. Для каждого варианта проведена серия расчетов при гармоническом входном воздействии с частотами от 1 до 55 Гц. Отклик массива определялся в центральной точке свободной поверхности по максимальным значениям перемещений, скоростей и ускорений. Установлено, что характер динамического отклика зависит от частоты воздействия и жесткости грунта. Максимальные перемещения преимущественно формируются в низкочастотной области, тогда как наиболее выраженное влияние модуля деформации проявляется в амплитудно-частотных характеристиках ускорений. При увеличении динамического модуля деформации резонансная частота возрастает от 3,1 до 42,1 Гц, а область максимального отклика смещается в сторону более высоких частот.

Ключевые слова: амплитудно-частотная характеристика, грунтовый массив, прямой динамический метод, резонансная частота.

Введение. При оценке сейсмического воздействия на сооружение важность имеют не только максимальные значения ускорений входного воздействия, но и частотные свойства грунтовой толщи. В зависимости от строения и физико-механических характеристик грунтового массива его отклик может заметно изменяться при внешнем воздействии различной частоты. Это особенно актуально для расчетов на интенсивные сейсмические воздействия, поскольку характер движения основания определяет особенности взаимодействия системы «сооружение – основание» и влияет на динамическую реакцию системы.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) грунтового массива отражает изменение отклика грунтовой толщи в зависимости от частоты внешнего воздействия. В задачах сейсмического микрорайонирования учет таких свойств имеет принципиальное значение, поскольку инженерно-геологические условия могут изменять как амплитудный уровень, так и частотный состав сейсмических колебаний. В СП 283.1325800.2016 это положение отражено через понятие спектральных характеристик грунтовой толщи, к которым отнесены спектры Фурье, спектры реакции и коэффициенты динамичности грунтового массива. В документе также введено понятие сейсмогрунтовой модели как инженерно-геологической модели, дополненной сейсмическими параметрами каждого инженерно-геологического элемента. При этом модель грунтовой толщи должна адекватно отображать амплитудно-частотные характеристики грунтового массива [1].

© Мкртычев О. В., Айтян С. А., 2026

В работах, посвященных развитию положений СП 283.1325800.2016 [2, 3], отмечается, что спектры реакции, коэффициенты динамичности и грунтовые коэффициенты используются для инженерного описания связи между свойствами грунтовой толщи и параметрами сейсмического воздействия. Такой подход позволяет рассматривать грунтовый массив не только по отдельным физико-механическим параметрам, но и с учетом его реакции на входное динамическое воздействие.

Для получение амплитудно-частотной характеристики грунтового массива только по данным натурных инструментальных наблюдений в рамках СМР связано со значительными затратами времени и ресурсов. Нормативные положения указывают на необходимость учета спектральных и амплитудно-частотных характеристик грунтовой толщи, однако не раскрывают самостоятельную численную процедуру построения АЧХ для конкретной площадки строительства. В настоящей работе такая задача рассматривается с позиций прямого динамического моделирования. Последовательное задание входного воздействия различной частоты позволяет определить отклик расчетной модели в контрольных точках и на этой основе построить амплитудно-частотную характеристику грунтового массива.

Цель работы – описание методики определения амплитудно-частотной характеристики грунтового массива площадки строительства прямым динамическим методом.

Материалы и методы исследования. Исследование выполнено с использованием прямого динамического метода в программном комплексе «ANSYS/LS-DYNA» [4].

Объектом исследования является однородный грунтовый массив размерами 50×50×20 м. Расчетная область разбита регулярной конечно-элементной сеткой на объемные конечные элементы с характерным размером 2,5 м. Общий вид расчетной модели представлен на рис. 1.

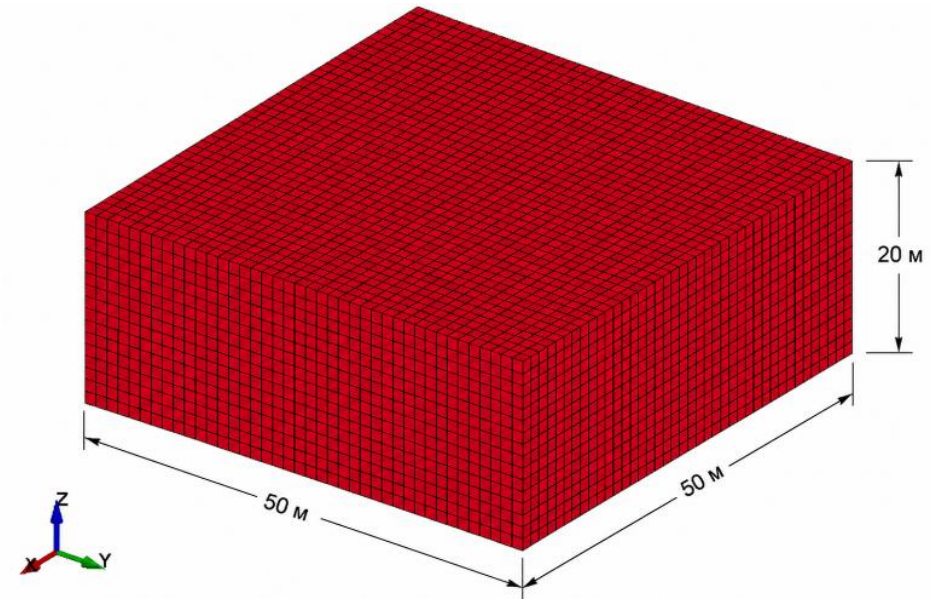


Рис. 1. Расчетная модель однородного грунтового массива. Общий вид

По размерам область моделирования принималась достаточно протяженной, чтобы в пределах расчетного времени можно было отследить распространение волны от нижней границы к свободной поверхности и оценить отклик в контрольной точке.

Расчет выполнялся в линейной постановке. Для описания грунта использовалась линейно-упругая модель материала. Плотность грунта принималась равной 2000 кг/м³, коэффициент Пуассона – 0,30.

В качестве варьируемого параметра используется динамический модуль деформации грунта ($E_{дин}$). Расчетные варианты представлены в таблице.

Были рассмотрены пять вариантов жесткости грунта: E = 8, 20, 70, 100 и 200 МПа. Такой диапазон позволит проследить, как изменяются амплитудно-частотные характеристики массива при переходе от относительно мягких грунтов к более жестким.

Таблица

Параметры расчетных вариантов грунтового массива

Вариант	Плотность ρ, кг/м³	Коэффициент Пуассона ν	Модуль деформации ($E_{дин}$), МПа
1	2000	0,30	8,0
2			20,0
3			70,0
4			100,0
5			200,0

Основным численным подходом для решения данной задачи принят прямой метод (direct method), который используется для решения задач о взаимодействии сооружения с грунтовым основанием. При такой постановке расчетная область должна приближенно воспроизводить поведение грунтового полупространства. Для этого необходимо обеспечить, с одной стороны, затухание волн, распространяющихся от зоны приложения воздействия к границам модели, а с другой – работу боковых и нижней границ в режиме, близком к условиям свободного поля [5, 6].

Для достижения данных условий боковые границы задаются по схеме чистого сдвига, при которой узлы боковой поверхности на одном уровне перемещаются согласованно. Такая постановка используется для имитации поведения части грунтового массива, не включенной непосредственно в расчетную область. Нижняя граница расчетной области задается как передающая граница, предназначенная для уменьшения отражения волн обратно в расчетную область [7]. Расчетная схема граничных условий и входного воздействия представлена на рис. 2.

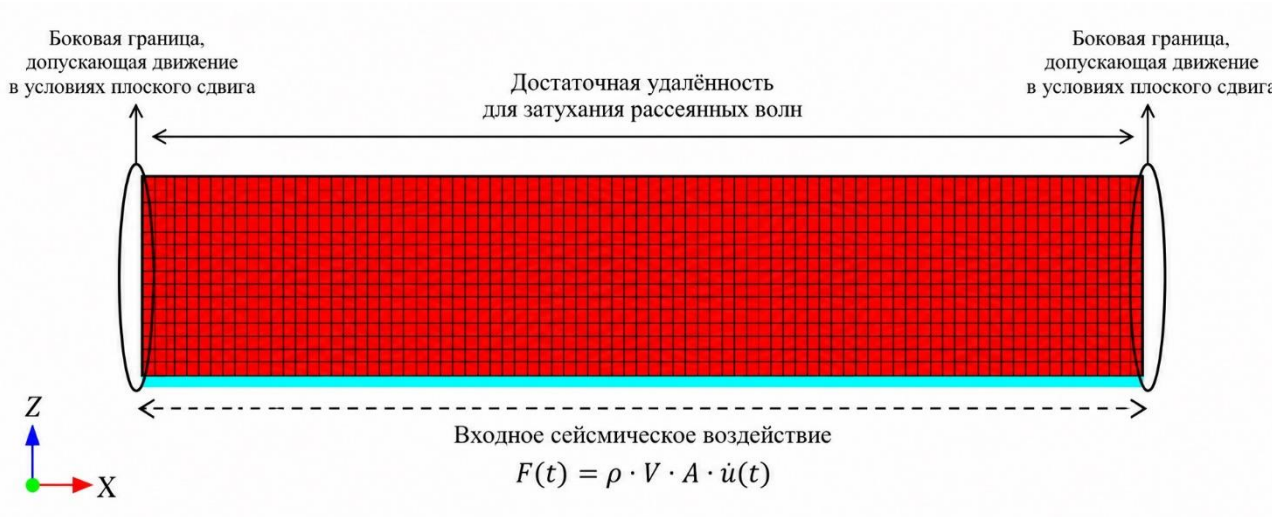


Рис. 2. Расчетная схема прямого (direct) метода

Входное динамическое воздействие на нижней границе расчетной области учитывалось посредством эквивалентной сдвиговой нагрузки, соответствующей вертикально распространяющейся сдвиговой волне и определяемой выражением:

$$F(t) = \rho \cdot V_s \cdot A \cdot \dot{u}(t), \quad (1)$$

где ρ – плотность грунта; V_s – скорость распространения сдвиговой волны в грунтовой среде; A – площадь нагруженной области; $\dot{u}(t)$ – заданная скорость движения частиц грунта.

Поскольку входной сигнал задавался гармонически, $\dot{u}(t)$ принималась в виде:

$$\dot{u}(t) = v_0 \sin(2\pi ft), \tag{2}$$

где v_0 – амплитуда скорости входного воздействия; f – частота воздействия.

С учетом принятого способа задания воздействия уравнение движения конечно-элементной модели записывается в виде:

$$M\ddot{u}_t + C\dot{u}_t + Ku_t = f^a(t), \tag{3}$$

где M – матрица масс; C – матрица диссипации; K – матрица жесткости; u_t – вектор узловых перемещений; $f^a(t)$ – вектор эквивалентных сил, соответствующий заданному силовому воздействию на нижней границе расчетной области [8].

Расчет выполнен методом прямого интегрирования уравнений движения во временной области с использованием явной центрально-разностной схемы [9].

Таким образом, в расчетной модели частотный прогон выполнялся путем изменения частоты (f) входного гармонического воздействия при неизменной общей схеме задания граничных условий.

Для каждого значения модуля деформации грунта выполнялась серия динамических расчетов при частотах от 1 до 55 Гц. На рис. 3 приведены отдельные сигналы из расчетного частотного диапазона.

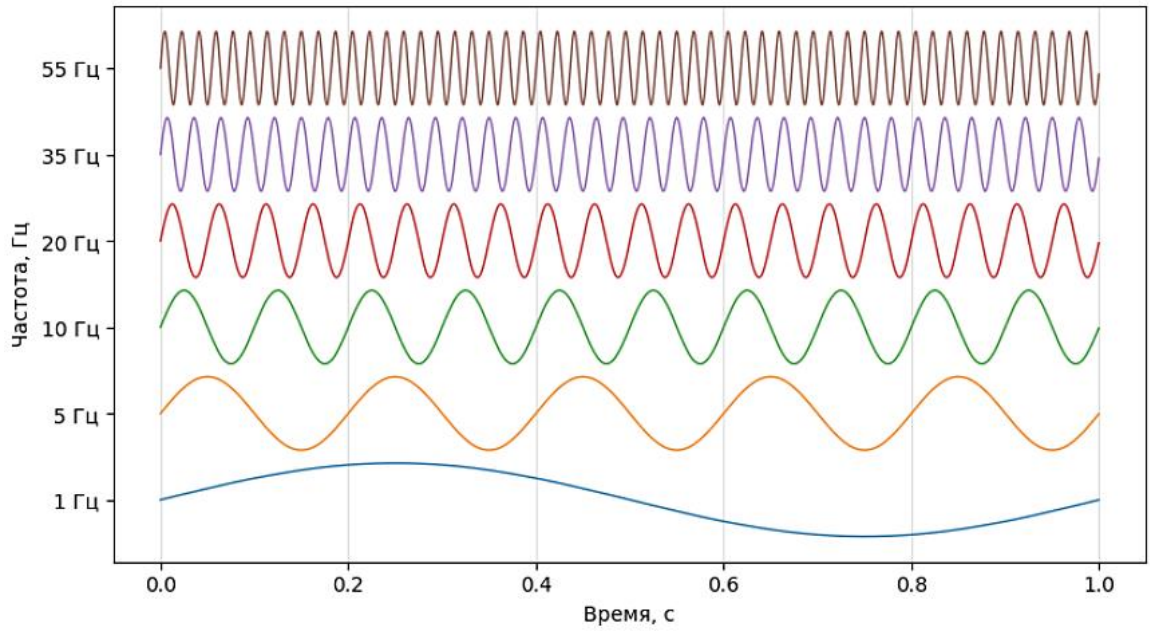


Рис. 3. Гармонические входные воздействия различной частоты

Отклик массива фиксировался в центральной точке верхней свободной поверхности. В качестве расчетных характеристик принимались максимальные значения перемещений, скоростей и ускорений по направлению действия входного воздействия.

Амплитудно-частотные характеристики определялись по следующим зависимостям:

$$A_u(f) = \max\left|u_x(t, f)\right|, \tag{4}$$

$$A_v(f) = \max\left|v_x(t, f)\right|, \tag{5}$$

$$A_a(f) = \max\left|a_x(t, f)\right|, \tag{6}$$

где $A_u(f)$, $A_v(f)$, $A_a(f)$ – амплитудно-частотные характеристики по максимальным перемещениям, скоростям и ускорениям соответственно; $u_x(t, f)$, $v_x(t, f)$, $a_x(t, f)$ – временные реализации перемещения, скорости и ускорения в контрольной точке при разной частоте входного воздействия (f).

Результаты и обсуждение. В ходе серии прямых динамических расчетов были построены амплитудно-частотные характеристики однородного грунтового массива, которые представлены на рис. 4.

Анализ графиков показывает, что динамический отклик грунтового массива существенно зависит от модуля деформации грунта и частоты входного воздействия.

АЧХ максимальных перемещений показывает, что для всех расчетных вариантов наибольшие значения перемещений наблюдаются в области низких частот. С увеличением частоты их значения быстро уменьшаются и после 3–5 Гц изменяются незначительно. Это свидетельствует о том, что перемещения наиболее чувствительны к низкочастотному воздействию.

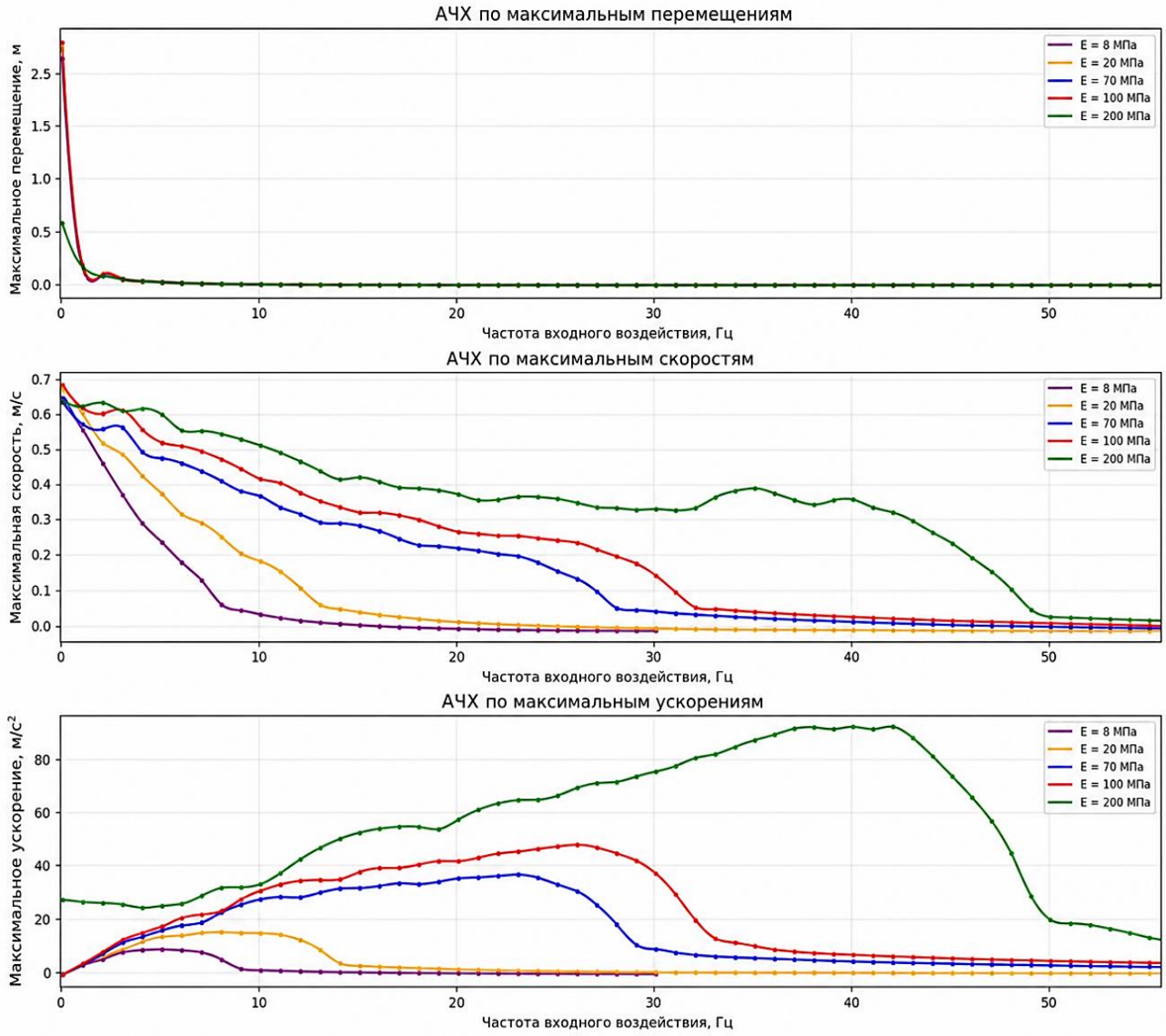


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики

Частотные зависимости максимальных скоростей характеризуются более широким диапазоном отклика по сравнению с перемещениями. С увеличением модуля деформации снижение максимальной скорости происходит менее интенсивно, вследствие чего заметные значения сохраняются при более высоких частотах. Наиболее протяженный частотный отклик получен для варианта с $E_{дин}$ = 200 МПа.

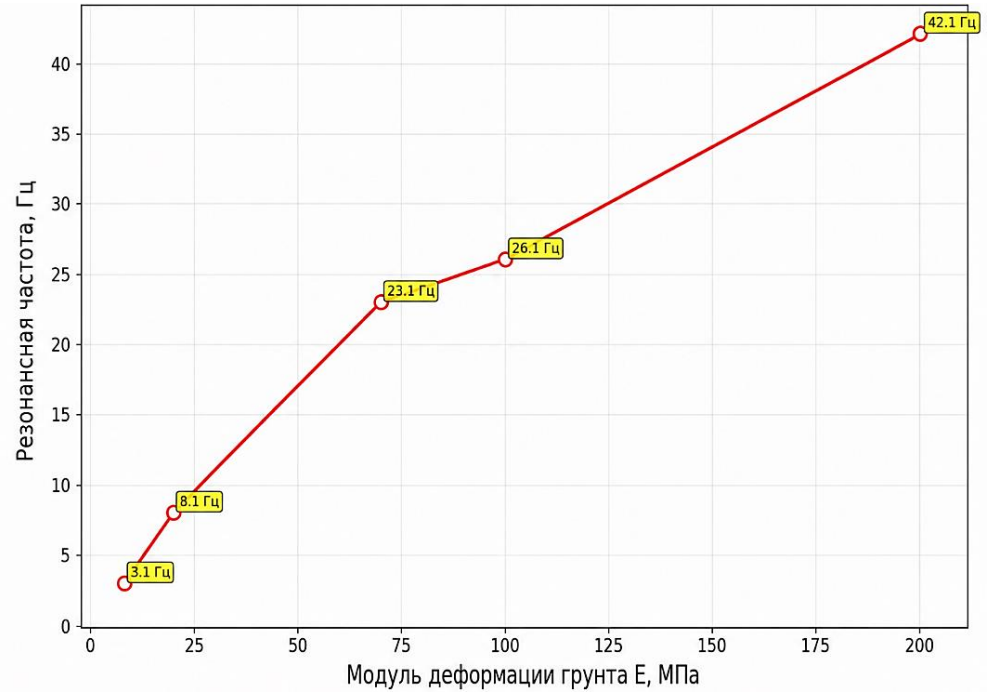


Рис. 5. Зависимость резонансной частоты грунтового массива от модуля деформации грунта

Наиболее выраженное влияние жесткости грунта прослеживается по амплитудно-частотным характеристикам максимальных ускорений. Для каждого расчетного варианта наблюдается характерный максимум, положение которого смещается в область более высоких частот при увеличении модуля деформации.

Как видно из рис. 5, зависимость резонансной частоты от модуля деформации имеет монотонно возрастающий характер. При увеличении E от 8 до 200 МПа резонансная частота возрастает с 3,1 до 42,1 Гц. Одновременно увеличивается максимальный уровень ускорений, причем наибольшее значение получено для наиболее жесткого грунта. Таким образом, повышение жесткости массива приводит к смещению области максимального динамического отклика в сторону более высоких частот и к увеличению амплитуды ускорений.

Выводы. Построены амплитудно-частотные характеристики. Выявлены резонансные частоты для различных вариантов динамической жесткости грунтового массива (динамический модуль деформации $E_{дин}$ = 8, 20, 70, 100 и 200 МПа.) Установлено, что увеличение модуля деформации грунта смещает резонансные пики в сторону более высоких частот, повышая интенсивность динамического отклика.

Для средних по жесткости грунтов ($E_{дин}$ = 200 МПа) резонансная частота формируется в области около 42 Гц, а для слабых грунтов ($E_{дин}$ = 20 МПа) резонансные максимумы расположены в низкочастотной области (8 Гц).

В дальнейшем необходимо провести исследования по определению резонансных частот для слоистых грунтовых основании при различной мощности соответствующих слоев и их физико-механических свойствах.

Сведения о финансировании. Работа автора (Мкртычева Олега Вартановича) финансировалась РНФ, грант 26-19-00040.

Библиографический список

1. СП 283.1325800.2016. Объекты строительные повышенной ответственности. Правила сейсмического микрорайонирования: свод правил: утв. приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 16 декабря 2016 г. № 981/пр.: введ. 17.06.2017. 12 с.

2. Алешин А. С. О грунтовых коэффициентах // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. № 2. С. 6–13.

3. Алешин А. С. О спектральных характеристиках грунтовой толщи // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2018. № 5. С. 16–23.

4. Муйземнек А. Ю., Морозов Е. М. ANSYS в руках инженера: динамическое нагружение. – М.: URSS: ЛЕНАНД, 2022. 242 с.

5. Bolisetti C., Coleman J. Advanced Seismic Soil Structure Modeling: technical report INL/EXT-15-35687. Idaho Falls, ID: Idaho National Laboratory, 2015. 27 p.

6. Hallquist J. O. LS-DYNA Theory Manual. Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2006. 680 p.

7. Bolisetti C. Site Response, Soil-Structure Interaction and Structure-Soil-Structure Interaction for Performance Assessment of Buildings and Nuclear Structures: dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. Buffalo, NY: University at Buffalo, State University of New York, 2014.

8. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Fox D. D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2014.

9. Мкртычев О. В. Развитие прямых нелинейных динамических методов расчета на сейсмические воздействия // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 7. С. 12–16. DOI: 10.33622/0869-7019.2022.07.12-16.

References

1. Set of Rules 283.1325800.2016. Highly Critical Construction Facilities. Seismic Microzoning Rules: Set of Rules: Approved by Order of the Ministry of Construction, Housing and Communal Services of the Russian Federation dated December 16, 2016, No. 981/pr.: introduced on June 17, 2017. 12 p.

2. Aleshin A.S. On soil coefficients. Earthquake Engineering // Safety of Structures. No. 2. 2018. Pp. 6–13.

3. Aleshin A.S. On spectral characteristics of soil layers. Earthquake Engineering // Safety of Structures. No. 5. 2018. Pp. 16–23.

4. Muizemnek A.Yu., Morozov E.M. ANSYS in the Hands of an Engineer: Dynamic Loading. Moscow: URSS: LENAND, 2022. 242 p.

5. Bolisetti C., Coleman J. Advanced Seismic Soil Structure Modeling: technical report INL/EXT-15-35687. Idaho Falls, ID: Idaho National Laboratory, 2015. 27 p.

6. Hallquist J.O. LS-DYNA Theory Manual. Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2006. 680 p.

7. Bolisetti C. Site Response, Soil-Structure Interaction, and Structure-Soil-Structure Interaction for Performance Assessment of Buildings and Nuclear Structures: dissertation for the degree of Doctor of Philosophy. Buffalo, NY: University at Buffalo, State University of New York, 2014.

8. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2014.

9. Mkrtychev O.V. Development of direct nonlinear dynamic methods for seismic analysis // Industrial and Civil Engineering. No. 7. 2022. Pp. 12–16. DOI: 10.33622/0869-7019.2022.07.12-16.

DETERMINATION OF THE FREQUENCY-RESPONSE CHARACTERISTICS OF A SOIL MASS USING THE DIRECT DYNAMIC METHOD

O. V. Mkrtichev [1], S. A. Aityan [2]

National Research Moscow State University of Civil Engineering [1, 2]
Russia, Moscow

[1] Dr of Technical Sciences, Head of the Department of Strength of Materials, tel.: +7(499)183-34-83, e-mail: MkrtychevOV@mgsu.ru
[2] MA Student, tel.: +7(968)552-77-61, e-mail: Serezhaaitian@mail.ru

This paper presents a methodology for determining the amplitude-frequency characteristics of a soil mass by a direct dynamic method. Numerical simulations were performed using the ANSYS/LS-DYNA software package for homogeneous soil mass under linear-elastic conditions. Five computational cases with dynamic soil deformation modulus ranging from 8 to 200 MPa were investigated. For each case, a series of simulations were conducted under harmonic input excitation with frequencies ranging from 1 to 55 Hz. The soil response was determined at the center point of the free surface using maximum displacements, velocities, and accelerations. The results demonstrate that the dynamic response depends on both the excitation frequency and soil stiffness. Maximum displacements occur predominantly in the low-frequency range, whereas the influence of the deformation modulus is most pronounced in the acceleration frequency-response characteristics. As the dynamic deformation modulus increases, the resonant frequency rises from 3.1 to 42.1 Hz, and the range of maximum response shifts towards higher frequencies.

Keywords: frequency-response characteristic, soil mass, direct dynamic method, resonant frequency.

НАУЧНЫЕ ДИСКУССИИ

25.06.2026 в редакцию научного журнала «Строительная механика и конструкции» поступило письмо от генерального директора ООО «ЛИНО» О. В. Горского об опровержении статьи «Экспериментальные исследования работы профилированных листов пролетом 6 м по однопролетной и двухпролетной схемам загружения» (авторы: А. С. Семенов, В. В. Зверев, Д. П. Попоудин, Д. А. Бобровских) , опубликованной в выпуске № 2(41) за 2024 г.

Ниже приводим полное содержание письма.

STALLIN
СТАЛЬНАЯ ЛИНИЯ

Главному редактору научного журнала «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ»
Сафронову В.С., доктору техн. наук, профессору
Адрес: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ауд. 1102а.

От
ООО «ЛИНО»
Адрес: 129085, г Москва, ул. Большая Марьинская, 9 / строение 1, помещ. 1/1

Заявление об опровержении
в научном журнале СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ статьи «Экспериментальные исследования работы профилированных листов пролетом 6 м по однопролетной и двухпролетной схемам загружения» (авторы: А.С. Семенов, В.В. Зверев, Д.П. Попоудин, Д.А. Бобровских)

Уважаемый Владимир Сергеевич!

В процессе ознакомления с вышеуказанной статьей, опубликованной в Вашем журнале, были выявлены системные и грубые нарушения методики проведения испытаний, предусмотренные действующими нормативными документами (ГОСТ Р 58900-2020, ГОСТ 58901-2022, СП 260.1325800.2016). Допущенные нарушения ставят под сомнение достоверность полученных авторами экспериментальных данных, а также выводы о несущей способности профилированных листов и их соответствии заявленным производителем характеристикам.

Испытания №2 проводились на профлисте Н144-860-1. Данная маркировка соответствует проекции ООО «ЛИНО».

Качество и технические характеристики профлиста Н144-860-1 были установлены в техническом заключении 2023 года, выданное ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко Институт АО «НИЦ «Строительство».

Данный документ утвержден И.И. Ведяковым (д.т.н., профессор).

На основании изложенного редакционная коллегия уведомляется о необходимости официального опровержения указанной статьи. Ниже последовательно излагаются выявленные факты нарушений.

1. Нарушение требований к условиям проведения испытаний (разные погодные условия)

В статье представлены фотографии, на которых зафиксированы различные внешние условия при проведении эксперимента:

наличие снежного покрова на элементах конструкции;

ясная солнечная погода;

проведение испытаний в помещении.

Согласно п. 6.1–6.3 ГОСТ Р 58900-2020, условия окружающей среды в рамках одной серии испытаний должны быть стабильными и задокументированными. Различие погодных условий (снег, солнечный нагрев, закрытое помещение) вносит систематическую погрешность в результаты: изменяются механические свойства материала, условия опирания и трения, возникает дополнительная неравномерная нагрузка.

В статье отсутствует какое-либо описание или таблица погодных условий для каждого опыта, что делает невозможным воспроизведение эксперимента. Указанное обстоятельство является самостоятельным и достаточным основанием для признания результатов недостоверными.

2. Нарушение требований к размещению нагрузки (точечное загружение, расстояние между грузами менее 50 мм)

На фотографиях, иллюстрирующих проведение испытаний, зафиксированы следующие нарушения схемы нагружения:

Точечный характер приложения нагрузки

Грузы сконцентрированы локально, отсутствует выравнивающий слой (песок, вода, распределительная рама), что противоречит требованию ГОСТ Р 58900-2020 (п. 7.2.6–7.2.8) о создании равномерно распределенной нагрузки по всей поверхности листа.

Расстояние между штучными грузами менее 50 мм

На фотографиях визуально фиксируется расстояние между грузами, не соответствующее нормируемому. При точечном загружении с зазорами менее 50 мм (и тем более при соприкосновении грузов) имитация распределенной нагрузки не достигается.

Фактически авторами реализована группа точечных нагрузок, что для тонкостенных профилей приводит к искусственному занижению несущей способности (особенно по условиям местного смятия и устойчивости стенки на опоре). Сравнение таких экспериментальных данных с теоретическими расчетами по СП 260 и паспортными значениями по ТУ является некорректным.

В то время как ЛГТУ фиксирует критическую нагрузку на уровне 250-290 кг/м², ЦНИИСК приводит цифру 400 кг/м² для того же материала (СТ144-860, 1.0 мм) по схожей схеме.

Столь сильный разброс данных (почти 40% разницы) говорит о нестабильности методики ЛГТУ или о специфических условиях (ширина бруска, затяжка винтов, качество конкретной партии стали), не характерных для массовой продукции.

ЛГТУ использовал листы стандартной длины, стыкуя их на опоре саморезами.

Отсутствие неразрезного (длинномерного) листа. Место стыка — это всегда «слабое звено», особенно при изгибе на опоре.

Схема испытаний не соответствует современным технологиям монтажа, где используются длинномерные рулонные системы без поперечных стыков в зоне максимальных напряжений.

Кроме того, не известно являлся ли объект испытания проекцией ООО «ЛИНО». Инициаторы проведения исследования имели возможность напрямую заказать профлист для исследования у производителя для исключения использования в испытании некачественного образца или контрафактного товара.

На основании изложенного, руководствуясь принципами научной добросовестности и нормативными требованиями к проведению испытаний строительных конструкций,

требую:

Признать статью Семенова А.С., Зверева В.В., Попоудина Д.П., Бобровских Д.А. содержащей недостоверные экспериментальные данные, полученные с грубыми нарушениями методики испытаний.

Опубликовать в ближайшем номере журнала официальное опровержение (в порядке, предусмотренном редакционной политикой издания) с указанием следующих фактов:

нарушение требований к одинаковым условиям испытаний (разные погодные условия: снег, солнечная погода, помещение);

нарушение требований к схеме нагружения (точечный характер загружения, расстояние между штучными грузами менее 50 мм, отсутствие равномерно распределенной нагрузки);

невозможность использования полученных результатов для оценки соответствия продукции требованиям ТУ и СП 260.

Рекомендовать авторам провести повторные испытания в соответствии с аттестованной методикой (ГОСТ Р 58900-2020) в контролируемых условиях и с корректной схемой нагружения.

Данная статья уже нанесла убытки в виде отказа от нашей продукции. Откуда и стало известно о существовании данной статьи.

О дате и результатах рассмотрения настоящего заявления прошу сообщить в установленном порядке.

С уважением,

Генеральный директор
ООО «ЛИНО» **/О.В. Горский/**

25.05.2026 года

ООО «ЛИНО»
129085, Москва, вн. тер. г. Муниципальный округ Останкинский, ул. Большая Марьинская, дом 9, стр.1, помещ. 1/1
тел./факс: +7 (499) 322-31-21, info@stallin.ru, www.stallin.ru
ИНН: 7728484871 КПП: 772801001 ОГРН: 1197746538791

Редакция журнала обратилась за разъяснениями к авторскому коллективу статьи во главе с профессором В. В. Зверевым, заведующим кафедрой металлических конструкций Липецкого ГТУ, крупным специалистом в области проектирования и расчетов строительных конструкций, членом-корреспондентом РААСН.

Ниже приводим письмо-ответ от авторов статьи.

Главному редактору научного журнала
«Строительная механика и конструкции»
доктору техн. наук, профессору Сафронову В. С.

касается заявления
об опровержении статьи

Уважаемый Владимир Сергеевич!

Направляем Вам пояснения и ответы (см. приложение) на письмо ген. директора ООО «ЛИНО» Горского О. В. (от 25.05.2026 г.) в редакцию научного журнала «Строительная механика и конструкции», в котором высказан ряд претензий к результатам исследований, представленных в статье «Экспериментальные исследования работы профилированных листов пролетом 6 м по однопролетной и двухпролетной схемам нагружения» (авторы А. С. Семенов, В. В. Зверев, Д. П. Попоудин, Д. А. Бобровских).

Требования ООО «ЛИНО» об опровержении результатов испытаний, приведенных в статье, считаем необоснованными. Давление, оказываемое ООО «ЛИНО» с целью исказить полученные результаты, считаем не приемлемым и нарушающим наши гражданские права, указанные в п. 3 и 4 статьи 29 Конституции Российской Федерации.

При необходимости анализа несущей способности продукции, выпускаемой ООО «ЛИНО», авторы статьи в рамках научно-технического сотрудничества готовы провести испытания стальных профилированных листов, предоставленных данной компанией в присутствии всех заинтересованных лиц с последующей публикацией результатов в научно-технических журналах уже со ссылками на конкретного производителя.

Приложение

Ответы авторов на претензии ООО «ЛИНО» по результатам испытаний, приведенным в статье «Экспериментальные исследования работы профилированных листов пролетом 6 м по однопролетной и двухпролетной схемам нагружения»

По поручению авторов статьи:
зав. кафедрой
металлических конструкций Липецкого
государственного технического университета
докт. техн. наук, профессор В. В. Зверев
тел. +79107428714

Отв. исполнитель
канд. техн. наук, доцент кафедры
металлических конструкций ЛГТУ А. С. Семенов
тел. 89046977720

Приложение

Ответы авторов на претензии ООО «ЛИНО» по результатам испытаний, приведенным в статье «Экспериментальные исследования работы профилированных листов пролетом 6 м по однопролетной и двухпролетной схемам нагружения».

Претензия ООО «ЛИНО»	В процессе ознакомления с вышеуказанной статьей, опубликованной в Вашем журнале, были выявлены системные и грубые нарушения методики проведения испытаний, предусмотренные действующими нормативными документами (ГОСТ Р 58900-2020, ГОСТ 58901-2022, СП 260.1325800.2016). Допущенные нарушения ставят под сомнение достоверность полученных авторами экспериментальных данных, а также выводы о несущей способности профилированных листов и их соответствии заявленным производителем характеристикам.
Ответ	Сомнения представителей ООО «ЛИНО» в достоверности результатов испытаний не обоснованы. Наличие системных и грубых нарушений методики проведения испытаний не доказано. Кроме того, следует заметить , что указанные документы не подлежат применению на обязательной основе, см. Постановление Правительства РФ от 28.05.2021 N 815 "Об утверждении перечня национальных стандартов и сводов правил (частей таких стандартов и сводов правил), в результате применения которых на обязательной основе обеспечивается соблюдение требований Федерального закона "Технический регламент о безопасности зданий и сооружений", и о признании утратившим силу постановления Правительства Российской Федерации от 4 июля 2020 г. N 985" и носят рекомендательный характер.
Претензия ООО «ЛИНО»	Испытания №2 проводились на профлисте Н144-860-1. Данная маркировка соответствует проекции ООО «ЛИНО».
Ответ	Продукция под данной маркировкой выпускается десятками компаний: Стальнофф (https://profnastillist.ru/produktsiya/profnastil/profnastil-n144/?ysclid=mqurfs1zdm592926419), ООО ГК «Лига стали» (https://lsgk.ru/goods/101268395/proflist-n-144-860-st144?ysclid=mqurgop57r59798972), ООО «Векторсталь» (https://vektorstal48.ru/2026/06/02/n144-nesushhij-profnastil-dlya-bolshih-prolyotov-razbor-geometrii-i-raboty-pod-nagruzkoj/) и т.д.
Претензия ООО «ЛИНО»	Качество и технические характеристики профлиста Н144-860-1 были установлены в техническом заключении 2023 года, выданное ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко Институт АО «НИЦ «Строительство».
Ответ	Мы не ставим под сомнение исследования, выполненные другими организациями, выполнявшими испытания конкретных листов, с конкретными марками стали. В нашей статье мы оперируем данными, полученными непосредственно нами при проведении испытаний. Обращаем Ваше внимание, что опубликованы результаты испытаний, выполненные другими компаниями, которые также показывают более низкие показатели, чем указаны в каталогах Вашей продукции (при аналогичных сечениях) (https://proflist.ru/company/news/memorandum-po-rezultatam-provedeniya-ispytaniy-profnastila-na-ispytatelnom-stende-zavoda-stalnye-kon/).

Претензия ООО «ЛИНО»	На основании изложенного редакционная коллегия уведомляется о необходимости официального опровержения указанной статьи. Ниже последовательно излагаются выявленные факты нарушений. 1. Нарушение требований к условиям проведения испытаний (разные погодные условия) В статье представлены фотографии, на которых зафиксированы различные внешние условия при проведении эксперимента: наличие снежного покрова на элементах конструкции; ясная солнечная погода; проведение испытаний в помещении. Согласно п. 6.1–6.3 ГОСТ Р 58900-2020, условия окружающей среды в рамках одной серии испытаний должны быть стабильными и задокументированными. Различие погодных условий (снег, солнечный нагрев, закрытое помещение) вносит систематическую погрешность в результаты: изменяются механические свойства материала, условия опирания и трения, возникает дополнительная неравномерная нагрузка. В статье отсутствует какое-либо описание или таблица погодных условий для каждого опыта, что делает невозможным воспроизведение эксперимента. Указанное обстоятельство является самостоятельным и достаточным основанием для признания результатов недостоверными.
Ответ	В пунктах 6.1-6.3 ГОСТ Р 58900-2020 данные требования отсутствуют. Испытания, описанные в статье, не относятся к одной серии (всего было 6 серий испытаний). Сравнивалась теоретическая и экспериментальная несущая способность внутри каждой серии образцов. Испытания проводились в разное время, это процесс длительный. Погодные условия в рамках каждой отдельной серии были одинаковыми. В частности, испытания профиля Н144-860-1 проводились в сентябре-октябре 2023 г. при положительных температурах. Протоколы, составленные при проведении испытаний, в статье не приводились. Полная информация о датах испытаний представлена в материалах научно-технического отчета.
Претензия ООО «ЛИНО»	2. Нарушение требований к размещению нагрузки (точечное загружение, расстояние между грузами менее 50 мм) На фотографиях, иллюстрирующих проведение испытаний, зафиксированы следующие нарушения схемы нагружения: Точечный характер приложения нагрузки Грузы сконцентрированы локально, отсутствует выравнивающий слой (песок, вода, распределительная рама), что противоречит требованию ГОСТ Р 58900-2020 (п. 7.2.6–7.2.8) о создании равномерно распределенной нагрузки по всей поверхности листа. Расстояние между штучными грузами менее 50 мм На фотографиях визуально фиксируется расстояние между грузами, не соответствующее нормируемому. При точечном загружении с зазорами менее 50 мм (и тем более при соприкосновении грузов) имитация распределенной нагрузки не достигается. Фактически авторами реализована группа точечных нагрузок, что для тонкостенных профилей приводит к искусственному занижению несущей способности (особенно по условиям местного смятия и устойчивости стенки на опоре). Сравнение таких экспериментальных данных с теоретическими расчетами по СП 260 и паспортными значениями по ТУ является некорректным.

Ответ	В соответствии с ГОСТ Р 58900-2020 загружения осуществляются штучными материалами (см. п.7.2.6., рисунок 7) или при помощи траверс (п. 7.2.9, рисунок 9). Никаких указаний о создании выравнивающего слоя («песок, вода, распределительная рама») в ГОСТ не приводится. Наоборот, в п.6.2 в явном виде указано, что «Не допускается сплошное загружение испытательных образцов сыпучими материалами или водой». Указание о соблюдении расстояния в 50 мм между рядами грузов предназначено для выполнения требования о недопущении образования самонесущих сводов (п. 7.2.6 ГОСТ Р 58900-2020). При проведении испытаний расстояния между грузами контролировались на всем протяжении испытаний. Образование самонесущих сводов не допускалось.
Претензия ООО «ЛИНО»	В то время как ЛГТУ фиксирует критическую нагрузку на уровне 250-290 кг/м², ЦНИИСК приводит цифру 400 кг/м² для того же материала (СТ144-860, 1.0 мм) по схожей схеме. Столь сильный разброс данных (почти 40% разницы) говорит о нестабильности методики ЛГТУ или о специфичсских условиях (ширина бруска, затяжка винтов, качество конкретной партии стали), не характерных для массовой продукции.
Ответ	Для оценки фактической высокой несущей способности конкретно профилированных листов ООО «ЛИНО» достаточно испытаний ЦНИИСК. В случае, если есть необходимость публикации с анализом достижения столь значительной несущей способности, необходимо будет проведение дополнительных исследований в части сравнения геометрии, технологии производства, механических и физических свойств, зон упрочнения и т.п. Листы для испытаний, описанных в статье, были взяты непосредственно из партии, предназначенной для поставки на строительную площадку.
Претензия ООО «ЛИНО»	ЛГТУ использовал листы стандартной длины, стыкуя их на опоре саморезами. Отсутствие неразрезного (длинномерного) листа. Место стыка — это всегда «слабое звено», особенно при изгибе на опоре. Схема испытаний не соответствует современным технологиям монтажа, где используются длинномерные рулонные системы без поперечных стыков в зоне максимальных напряжений.
Ответ	При испытаниях по двухпролётной схеме использовался 12-метровый лист. Стыков по длине не было.
Претензия ООО «ЛИНО»	Кроме того, не известно являлся ли объект испытания проекцией ООО «ЛИНО». Инициаторы проведения исследования имели возможность напрямую заказать профлист для исследования у производителя для исключения использования в испытании некачественного образца или контрафактного товара.
Ответ	В статье нет никакого упоминания о компании ООО «ЛИНО». В исследованиях не ставилась цель испытания продукции ООО «ЛИНО», выявление ее достоинств или недостатков. Задачей было выявление особенностей работы листа Н114-750-1,5 в связи с началом его выпуска в г. Липецке. Другие листы (Н144 и Н153) выбраны для сравнения и анализа области применения листа Н114-750-1,5, исходя из схожих теоретических показателей несущей способности.

Претензия ООО «ЛИНО»	**требую:** Признать статью Семенова А.С., Зверева В.В., Попоудина Д.П., Бобровских Д.А. содержащей недостоверные экспериментальные данные, полученные с грубыми нарушениями методики испытаний.
Ответ	Основано на эмоциональных подходах, не имеющих обоснования (см. ответы выше).
Претензия ООО «ЛИНО»	Опубликовать в ближайшем номере журнала официальное опровержение (в порядке, предусмотренном редакционной политикой издания) с указанием следующих фактов: нарушение требований к одинаковым условиям испытаний (разные погодные условия: снег, солнечная погода, помещение);
Ответ	Оснований для опровержения статьи нет в связи с корректностью полученных результатов (см. ответы выше). Требования к одинаковым условиям испытаний (разные погодные условия, снег, солнечная погода, помещение) в ГОСТ Р 58900-2020 отсутствуют. Испытания профлиста Н144 проводились в сентябре–октябре 2023 г. при положительных температурах.
Претензия ООО «ЛИНО»	нарушение требований к схеме нагружения (точечный характер загружения, расстояние между штучными грузами менее 50 мм, отсутствие равномерно распределенной нагрузки); невозможность использования полученных результатов для оценки соответствия продукции требованиям ТУ и СП 260.
Ответ	Нагружение выполнялось штучными грузами (см. п.7.2.6., рисунок 7 ГОСТ Р 58900-2020). Равномерно-распределенная нагрузка в понимании ООО «ЛИНО» (песок, вода, распределительная рама) ГОСТом Р 58900-2020 не допускается. 50 мм – требование, необходимое для предотвращения образования самонесущих сводов. При испытаниях выполнялся систематический контроль, смыкания рядов штучных материалов не было, образование самонесущих сводов не допускалось.
Претензия ООО «ЛИНО»	Опубликовать в ближайшем номере журнала официальное опровержение (в порядке, предусмотренном редакционной политикой издания) с указанием следующих фактов: нарушение требований к одинаковым условиям испытаний (разные погодные условия: снег, солнечная погода, помещение); нарушение требований к схеме нагружения (точечный характер загружения, расстояние между штучными грузами менее 50 мм, отсутствие равномерно распределенной нагрузки); невозможность использования полученных результатов для оценки соответствия продукции требованиям ТУ и СП 260.
Ответ	Задача оценки соответствия требованиям ТУ не ставилась. Задача испытаний – определение несущей способности конкретного профилированного листа. Результаты исследования не являются основанием для использования в расчетах по п. 5.2.1. СП 260. Статья определяет направление для дальнейших исследований, а также указывает на необходимость учета всех факторов при производстве тонколистового проката.

Претензия ООО «ЛИНО»	Данная статья уже нанесла убытки в виде отказа от нашей продукции. Откуда и стало известно о существовании данной статьи.
Ответ	В соответствии с информацией из письма ООО «ЛИНО», имеются испытания продукции именно этой компании. Вопрос об убытках следует отнести к менеджерам ООО «ЛИНО», которые не смогли обосновать, почему их продукция существенно лучше аналогов (или не предложили выполнить испытания конкретной партии продукции для подтверждения оговоренной несущей способности в присутствии Заказчика).

Авторы:
А. С. Семенов,
В. В. Зверев,
Д. П. Попоудин,
Д. А. Бобровских

Редакция журнала считает возможным проведение подобных обсуждений по разным аспектам на своих страницах. Так как конструкция, испытанная в лаборатории ЛГТУ, является гибкой, то возможны различного рода отклонения от расчетных положений при проведении эксперимента.

Оснований для опровержения или отзыва статьи редакция не находит.

В. С. Сафронов, д-р техн. наук, проф.,
гл. редактор журнала «Строительная механика и конструкции»

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]). Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, доц.,
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доц.

Почтовый адрес редакции: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.