

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ**

Научный журнал

**Выпуск № 2 (49)**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научный журнал

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения – Российская Федерация.

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В. С.**, д-р техн. наук, профессор,

Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора: Козлов В. А.**, д-р физ.-мат. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е.**, канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Антонов В. М.**, канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;

**Беляева С. Ю.**, канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Буренин А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;

**Гриднев С. Ю.**, д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Зверев В. В.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Липецкий государственный технический университет;

**Ефрюшин С. В.**, канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Кирсанов М. Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;

**Колчунов В. И.**, д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;

**Коробко А. В.**, д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;

**Михайлов В. В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;

**Нугужинов Ж. С.**, д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития  
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;

**Овчинников И. Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;

**Пшеничкина В. А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;

**Свентиков А. А.**, д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Трещев А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;

**Турищев Л. С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;

**Шимановский А. О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;

**Шитикова М. В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки – А. Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,  
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Подписной индекс в электронном каталоге Почты России – ПД038

Дата выхода в свет 30.06.2026. Усл. печ. л. 16,0. Формат 60×84/8. Тираж 29 экз. Заказ № 84.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Регистрационный номер ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018

Цена свободная

Адрес редакции и издателя: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
(строительный факультет, кафедра строительной механики),  
тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»  
394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

12+

ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2026

ISSN 2219-1038 (print)  
ISSN 2949-3757 (online)

# **STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES**

Scientific Journal

**Issue № 2 (49)**

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh – 2026

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.

Territory of distribution — Russian Federation.

The journal «Structural mechanics and structures» is included into the List of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof.,

Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Kozlov V. A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G. E.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

**Antonov V. M.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

**Belyaeva S. Yu.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Burenin A. A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

**Gridnev S. Yu.**, Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Zverev V. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Lipetsk State Technical University;

**Efryushin S. V.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Kirsanov M. N.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

**Kolchunov V. I.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

**Korobko A. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenyev;

**Mikhailov V. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

**Nguyen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

**Nuguxhinov Zh. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

**Ovchinnikov I. G.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

**Pshenichkina V. A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

**Sventikov A. A.**, Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Trechshev A. A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

**Turichshev L. S.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

**Shimanovsky A. O.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

**Shitikova M. V.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A. R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Subscription index in the electronic catalog of the Russian Post – ПД038

Publication date 30.06.2026. Conventional printed sheets 16.0. Format 60×84/8. Numbers of copies 29. Order № 84.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 – 72895 dated 22.05.2018

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation

(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics),

tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>7</b>
<i>Кирсанов М. Н.</i> Прогиб и первая собственная частота свободных колебаний плоской консольной фермы .....	7
<i>Бакушев С. В.</i> Потенциальная энергия многослойного неоднородного упругого стержня .....	17
<i>Волков Ф. С., Мищенко А. В., Гербер Ю. А.</i> Напряженное состояние призматического составного неоднородного стержня при кручении.....	28
<i>Кирсанов М. Н., Грибова О. В.,</i> Формула для расчета первой частоты собственных колебаний четырехгранной башни .....	42
<i>Турусов Р. А., Василькова О. Р., Решетов А. А., Черницов А. Г., Коренной А. А.</i> Модель цифрового паспорта материалов для интеграции разнородных данных в информационных системах материаловедения .....	51
<i>Селезнев К. К.</i> Формулы прогиба и первой частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей .....	71
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ .....</b>	<b>80</b>
<i>Шевченко Н. С., Каменчуков А. В.</i> Ресурсы грузоподъемности сталежелезобетонных пролетных строений при регулировании внутренних усилий.....	80
<b>ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>95</b>
<i>Гриднев С. Ю., Сафронов В. С., Дятлов В. В., Вакулин А. В.</i> Описание и результаты инструментальных измерений колебаний четырехэтажного корпуса ВГТУ, расположенного вблизи нагруженной городской улицы .....	95
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ .....</b>	<b>107</b>
<i>Кожевников А. Н.</i> Сравнительный анализ динамических параметров свободных колебаний геометрически подобной и имитационной моделей решетчатой опоры линий электропередачи .....	107
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ .....</b>	<b>119</b>
<i>Ким В. Х., Ким М. С.</i> Исследования давления морозного пучения при промерзании грунта под подошвой фундамента в натуральных условиях .....	119
<b>ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>126</b>
<i>Глазков Д. С., Козлов В. А.</i> Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния висячей железобетонной оболочки типа «гипар» на основании данных лазерного сканирования .....	126
<b>ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ .....</b>	<b>138</b>

## CONTENTS

<b>STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS .....</b>	<b>7</b>
<i>Kirsanov M. N.</i> Deflection and First Natural Frequency Flat Cantilever Truss Free Vibrations.....	7
<i>Bakushev S. V.</i> Potential Energy of a Multilayer Inhomogeneous Elastic Rod .....	17
<i>Volkov F. S., Mishchenko A. V., Gerber Yu. A.</i> Stress State of a Prismatic Composite Inhomogeneous Rod Under Torsion.....	28
<i>Kirsanov M. N., Gribova O. V.</i> Formula for Calculating the First Frequency Tethradial Tower Natural Oscillations .....	42
<i>Turusov R. A., Vasilkova O. R., Reshetov A. A., Chernitsov A. G., Korennoy A. A.</i> Digital Material Passport Model for Integration of Heterogeneous Data in Material Science Information Systems .....	51
<i>Seleznev K. K.</i> Formulas for Deflection and First Frequency of Natural Oscillations of a Planar Truss with an Arbitrary Number of Panels.....	71
<b>CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES .....</b>	<b>80</b>
<i>Shevchenko N. S., Kamenchukov A. V.</i> Weight Capacity of Steel-Reinforced Concrete Superstructures When Regulating Internal Forces.....	80
<b>MOBILE LOAD DYNAMIC EFFECT ON ELASTIC SYSTEMS .....</b>	<b>95</b>
<i>Gridnev S. Y., Safronov V. S., Dyatlov V. V., Vakulin A. V.</i> Description and Results of Instrumental Measurements of Vibrations of a Four-story VSTU Building, Located Near a Busy City Street .....	95
<b>CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES .....</b>	<b>107</b>
<i>Kozhevnikov A. N.</i> Comparative Analysis of the Dynamic Parameters of Free Oscillations of a Geometrically Similar and Simulation Model of a Lattice Support of Power Transmission Lines.....	107
<b>CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES .....</b>	<b>119</b>
<i>Kim V. Kh., Kim M. S.</i> Study of Frost Heave Pressure During Soil Freezing Under the Foundation in Natural Conditions .....	119
<b>PILOT AND FIELD OBSERVATIONS OF STRUCTURES AND MATERIALS .....</b>	<b>126</b>
<i>Glazkov D. S., Kozlov V. A.</i> Experimental Study of the Stress-Strain State of a Hanging Prestressed Concrete Hyperbolic Paraboloid Shell Based on Laser Scanning Data.....	126
<b>RULES OF PREPARATION OF ARTICLES .....</b>	<b>138</b>

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04:531.391.3

DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.001

## ПРОГИБ И ПЕРВАЯ СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ КОНСОЛЬНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов <sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет «МЭИ» <sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,  
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Рассмотрена простая схема статически определимой регулярной фермы плоской консоли. Нисходящие и восходящие раскосы решетки фермы наклонены под разными углами. Предполагается, что масса конструкции равномерно распределена по ее узлам. Выводятся приближенные формулы зависимости прогиба и первой частоты собственных колебаний от числа панелей. В расчетах используется метод Донкерлея и его упрощенный вариант. Усилия в стержнях, входящие в матрицу жесткости конструкции, разыскиваются в аналитической форме с применением системы символьной математики «Maple». Для расчета жесткости фермы используется интегральная формула Максвелла – Мора. Обобщение ряда решений для ферм различного порядка на произвольный случай дает зависимость частоты колебаний от числа панелей, размеров фермы и массы в узлах.

**Ключевые слова:** плоская ферма, собственная частота, прогиб, аналитическое решение, метод Донкерлея, упрощенный расчет частоты, «Maple», метод индукции, формула Максвелла – Мора.

**Введение.** Для расчета собственных частот свободных колебаний ферменных конструкций в инженерной практике используются, как правило, численные методы с применением различных специализированных пакетов, в основе которых лежит метод конечных элементов [1–3]. Независимо от этого для расчета простых моделей регулярных статически определимых ферм можно получить и аналитические решения. Наиболее интересны и практичны решения для регулярных ферм периодической структуры, содержащие в качестве параметров не только размеры конструкции, но и их порядок – число панелей или число ячеек периодичности.

В сборнике [4] даны формулы для расчета статических прогибов различных схем плоских периодических ферм под действием узловых нагрузок. В справочнике [5], помимо формул для прогибов, приводятся простые приближенные решения для первой частоты собственных колебаний плоских статически определимых ферм. Аналитический расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы в [6] дан методом Донкерлея. В [7] выведены оценки прогиба и частоты собственных колебаний статически определимой фермы рамного типа с произвольным числом панелей. Одни из первых, кто изучал возможности аналитических решений задач статики для регулярных стержневых систем, были R. G. Hutchinson и N. A. Fleck [8, 9]. Они отмечали, что число регулярных статически определимых схем, для которых возможен такой расчет, ограничено. Двухсторонняя оценка собственной частоты колебаний регулярной фермы в аналитической форме получена методами Рэля и Донкерлея в [10]. Аналитическое решение задачи о частоте собственных колебаний



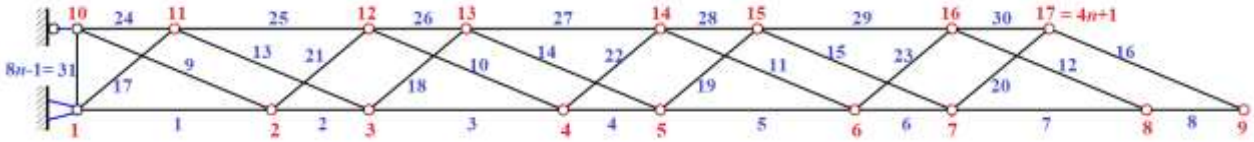


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней консоли,  $n = 4$

Координаты узлов вносятся в программу расчета усилий. Начало координат располагается в опорном узле  $A$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, x_{2i} = (3i - 1)a, x_{2i+1} = 3ia, \\ x_{2i+2n} &= 3(i - 1)a, x_{2i+2n+1} = (3i - 2)a, i = 1, \dots, n, \\ y_i &= 0, i = 1, \dots, 2n + 1, y_{i+2n+1} = h, i = 1, \dots, 2n. \end{aligned}$$

Усилия в стержнях определяются из уравнения равновесия узлов. В матричной форме они имеют вид:  $\mathbf{GS} = \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P}$  – вектор правой части, задающий узловые нагрузки,  $\mathbf{G}$  – симметричная матрица, элементы которой – направляющие косинусы стержней фермы. Матрица  $\mathbf{G}$  имеет размеры  $n_s \times n_s$ ,  $\mathbf{S}$  – вектор искомых усилий в стержнях длиной  $n_s$ . В число усилий включены и три опорные реакции – горизонтальная реакция опоры  $B$  и две реакции шарнира  $A$ . Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  рассчитываются по данным о координатах концов стержней конструкции и порядку их соединения.

**Прогиб.** Прогиб узла  $C$  на конце нижнего пояса фермы с  $n$  панелями от действия нагрузки, распределенной по узлам *нижнего* пояса, определяется по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_{\alpha}^1 S_{\alpha}^P l_{\alpha} / (EF), \quad (1)$$

где  $S_{\alpha}^P$  – усилие в стержне  $\alpha$ ;  $S_{\alpha}^1$  – усилие в этом же стержне от действия единичной силы на узел  $C$ ;  $l_{\alpha}$  – длина стержня. Получается следующая последовательность формул прогиба для ферм с различным числом панелей:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(59a^3 + c^3 + d^3 + 2h^3) / (EFh^2), \\ \Delta_2 &= P(514a^3 + 3c^3 + 3d^3 + 4h^3) / (EFh^2), \\ \Delta_3 &= 3P(677a^3 + 2c^3 + 2d^3 + 2h^3) / (EFh^2), \\ \Delta_4 &= 2P(2800a^3 + 5c^3 + 5d^3 + 4h^3) / (EFh^2), \\ &\dots \\ \Delta_8 &= 4P(17884a^3 + 9c^3 + 9d^3 + 4h^3) / (EFh^2), \dots \end{aligned}$$

С помощью операторов системы компьютерной математики «Maple» из решения рекуррентного уравнения, которому удовлетворяют члены последовательности, можно получить следующее выражение для прогиба консоли:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (EFh^2), \quad (2)$$

где  $C_1 = (27n^3 + 60n^2 + 27n + 4)n / 2$ ,  $C_2 = C_3 = (n + 1)n / 2$ ,  $C_4 = 2n$ .

На рисунке даны кривые I, II решения (2), построенные для относительного прогиба  $\Delta' = \Delta_n EF / (LP_0)$ , где  $L = 3na$ ,  $P_0 = 2nP$ , и различных значений длины  $a$ .

Решение (2) допускает упрощение. В пределе при  $n \rightarrow \infty$  кривой решения является квадратная парабола:  $\lim(\Delta' / n^2) = 9a^2 / (4h^2)$ . На графике 3 полученное упрощенное решение соответствует кривой II'. Погрешность приближения незначительна, а при  $n = 4$  и  $n = 5$  решения II и II' почти совпадают.

Аналогично получается решение задачи о прогибе от действия нагрузки на узлы *верхнего* пояса фермы. Коэффициенты в (2) имеют вид:

$$C_1 = 3(9n^2 + 4n - 7)n^2 / 2, C_2 = (n + 1)n / 2, C_3 = (n - 1)n / 2, C_4 = 2n - 1. \quad (3)$$

Наиболее простую форму имеет решение задачи о прогибе при действии одной сосредоточенной силы  $P$  на вершину  $C$ :

$$C_1 = 3(6n^2 + 6n + 1)n, C_2 = C_3 = n, C_4 = 1. \quad (4)$$

Линейная комбинация этих трех решений дает возможность аналитически рассчитывать широкий круг задач о прогибе этой конструкции.

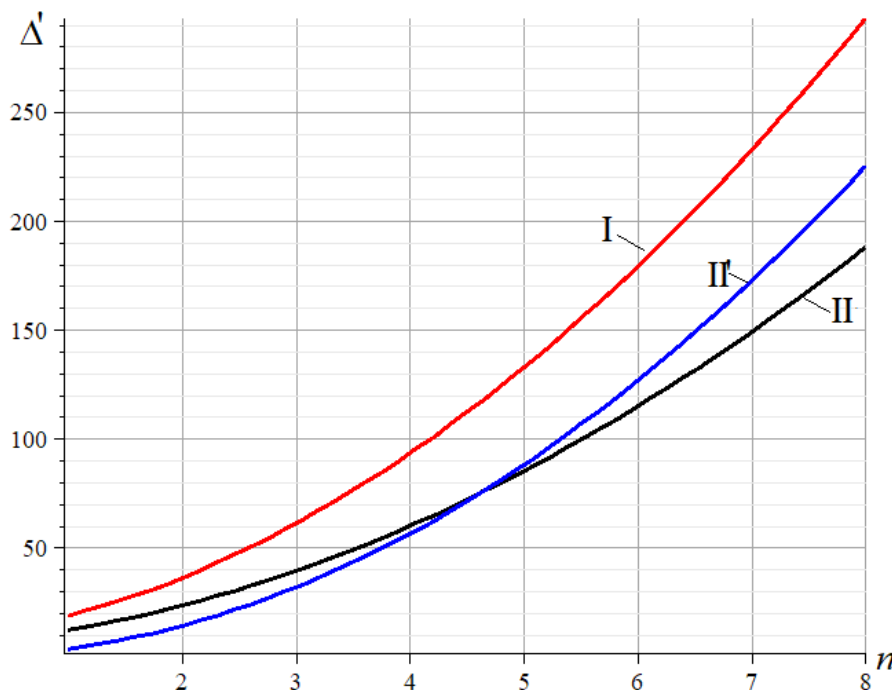


Рис. 3. Зависимость прогиба консоли от числа панелей,  $h = 2$  м:  
I —  $a = 2,5$  м; II, II' —  $a = 2$  м

**Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея.** Для приближенного расчета первой частоты собственных колебаний модели фермы с массой, равномерно распределенной по всем ее узлам, используется формула Донкерлея [6, 7, 11, 12]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{j=1}^K \omega_j^{-2}. \quad (5)$$

Здесь  $K = 4n + 1$  — число степеней свободы системы грузов в предположении, что грузы совершают движение только по вертикали. Горизонтальные колебания узлов фермы при таком креплении конструкции незначительны. Введено обозначение  $\omega_j$  для парциальной частоты колебаний массы  $m$  в узле  $j$  по вертикали. Уравнение колебаний отдельной массы имеет вид:

$m\ddot{u}_j + d_j \dot{u}_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, K$ , где  $u_j$  – смещение массы,  $d_j$  – коэффициент жесткости отдельного узла  $j$ . Частота колебаний массы  $m$  в узле имеет вид:  $\omega_j = \sqrt{d_j / m}$ . По формуле Максвелла – Мора вычисляется жесткость  $d_j$  как обратная величина податливости:  $\delta_j = 1 / d_j = \sum_{\alpha=1}^v (S_{\alpha}^j)^2 l_{\alpha} / (EF)$ .

Согласно (5):

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{j=1}^K \delta_j = m \Delta_n. \quad (6)$$

По формуле Максвелла – Мора коэффициент  $\Delta_n$  в (6) для различных чисел панелей  $n = 1, 2, \dots$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (58a^3 + 2c^3 + 2d^3 + 7h^3) / (EFh^2), \\ \Delta_2 &= (536a^3 + 8c^3 + 8d^3 + 13h^3) / (EFh^2), \\ \Delta_3 &= (2226a^3 + 18c^3 + 18d^3 + 19h^3) / (EFh^2), \\ \Delta_4 &= (6352a^3 + 32c^3 + 32d^3 + 25h^3) / (EFh^2), \\ &\dots \\ \Delta_8 &= (86816a^3 + 128c^3 + 128d^3 + 49h^3) / (EFh^2), \dots \end{aligned}$$

Обобщение этой последовательности на произвольное число панелей дает выражение:

$$\Delta_n = (A_1 a^3 + A_2 (c^3 + d^3) + A_3 h^3) / (EFh^2), \quad (7)$$

где  $A_1 = 2(9n^3 + 12n^2 + 6n + 2)n$ ,  $A_2 = 2n^2$ ,  $A_3 = 6n + 1$ . Согласно (6), (7) расчетная формула для определения первой частоты по методу Донкерлея имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(A_1 a^3 + A_2 (c^3 + d^3) + A_3 h^3)}}. \quad (8)$$

В [20] описан упрощенный вариант метода Донкерлея, в котором сумма в (6) вычисляется по ее среднему значению:

$$\omega_*^{-2} = m \delta^{\max} K / 2, \quad (9)$$

где  $\delta^{\max}$  – максимальная по всем узлам фермы величина прогиба  $\delta_p$ ,  $p = 1, \dots, K$ , от действия вертикальной единичной силы на узел фермы с максимальным смещением. В рассматриваемой ферме это узел  $C$ . Упрощение состоит в замене суммы в расчетной формуле ее средним значением, что для аналитического метода является существенным фактором. Коэффициент  $\delta^{\max}$  в (9) для различных чисел панелей  $n = 1, 2, \dots$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta_1^{\max} &= (39a^3 + c^3 + d^3 + h^3) / (EFh^2), \\ \delta_2^{\max} &= (222a^3 + 2c^3 + 2d^3 + h^3) / (EFh^2), \\ \delta_3^{\max} &= (657a^3 + 3c^3 + 3d^3 + h^3) / (EFh^2), \\ \delta_4^{\max} &= (1452a^3 + 4c^3 + 4d^3 + h^3) / (EFh^2), \\ &\dots \\ \delta_8^{\max} &= (10392a^3 + 8c^3 + 8d^3 + h^3) / (EFh^2), \dots \end{aligned}$$

Отсюда получается решение для собственной частоты:

$$\omega_* = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{K E F}{m(A_1 a^3 + A_2(c^3 + d^3) + A_3 h^3)}}, \quad (10)$$

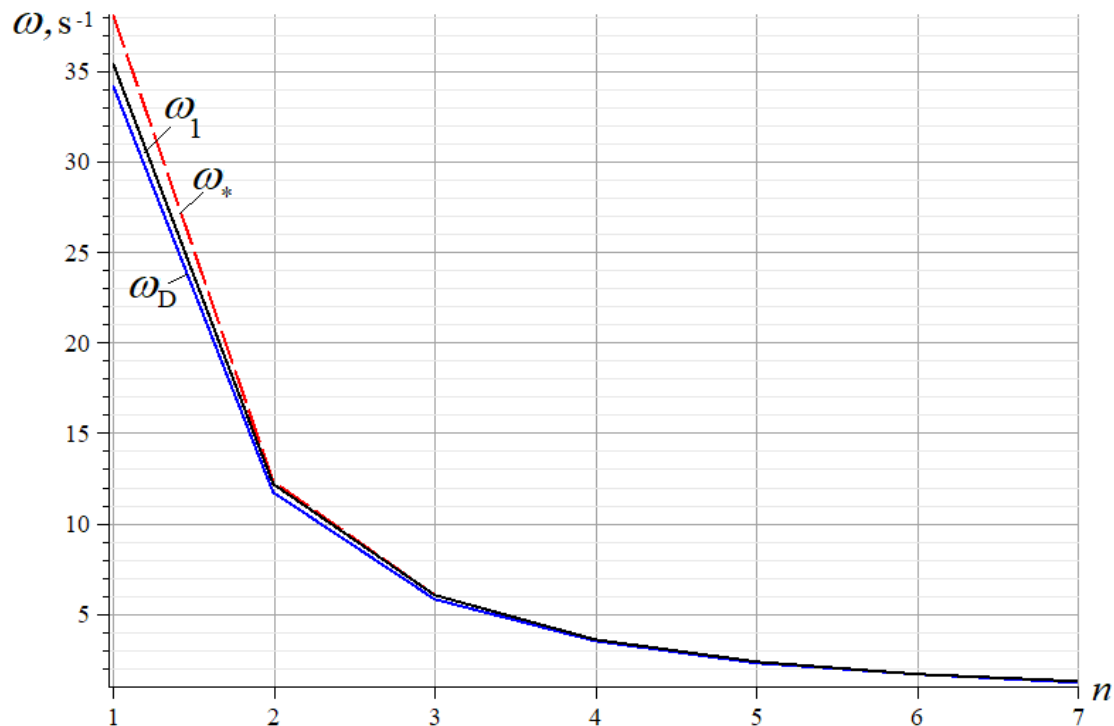
где коэффициенты находятся из решения линейных рекуррентных уравнений:

$$A_1 = 3(6n^2 + 6n + 1)n, \quad A_2 = n, \quad A_3 = 1. \quad (11)$$

Решение иллюстрировано кривыми на рис. 4. Во всех узлах фермы расположены одинаковые массы  $m = 200$  кг. Кривые зависимости частот  $\omega_D$  от числа панелей по формуле Донкерлея (8) сопоставлены с первой частотой спектра  $\omega_1$ , полученной численно, и кривой  $\omega_*$  по упрощенной формуле (10) с коэффициентами (11). Численный расчет частоты  $\omega_1$  выполняется в предположении, что система имеет  $K$  степеней свободы по числу узлов. Колебания узлов происходят по вертикали. Матрица, собственные числа которой дают частоты колебаний фермы, имеет элементы:

$$v_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^v S_{\alpha}^i S_{\alpha}^j l_{\alpha}, \quad i, j = 1, 2, \dots, K,$$

Здесь  $S_{\alpha}^i$  – усилие в стержне с номером  $\alpha$  от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу  $i$ . Собственные числа матрицы в системе «Maple» находятся с помощью оператора вычисления собственных чисел матрицы Eigenvalues. Площадь сечения стержней решетки фермы принята  $F = 9 \text{ см}^2$ , модуль упругости стали —  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа.



**Рис. 4.** Зависимость частоты колебаний от числа панелей,  $a = 3$  м,  $h = 1,5$  м:

$\omega_1$  – численный расчет первой частоты системы  $K$  масс в узлах фермы;

$\omega_*$  – упрощенный вариант метода Донкерлея;  $\omega_D$  – метод Донкерлея

Предложенный метод по упрощенной формуле (10) дает кривую  $\omega_*$ , расположенную немного выше кривой численного решения  $\omega_1$ . Решение Донкерля  $\omega_D$ , как и ожидалось, соответствует кривой ниже численного решения, однако все три метода при большом числе панелей почти совпадают. Это отражено на рис. 5 кривыми зависимости точности методов от числа панелей. Оценки погрешностей методов даются по величинам:

$$\varepsilon_D = |\omega_1 - \omega_D| / \omega_1, \quad \varepsilon_* = |\omega_1 - \omega_*| / \omega_1.$$

На рис. 5 представлены зависимости погрешностей методов от числа панелей при  $a = 3$  м для различных значений высоты фермы  $h$ .

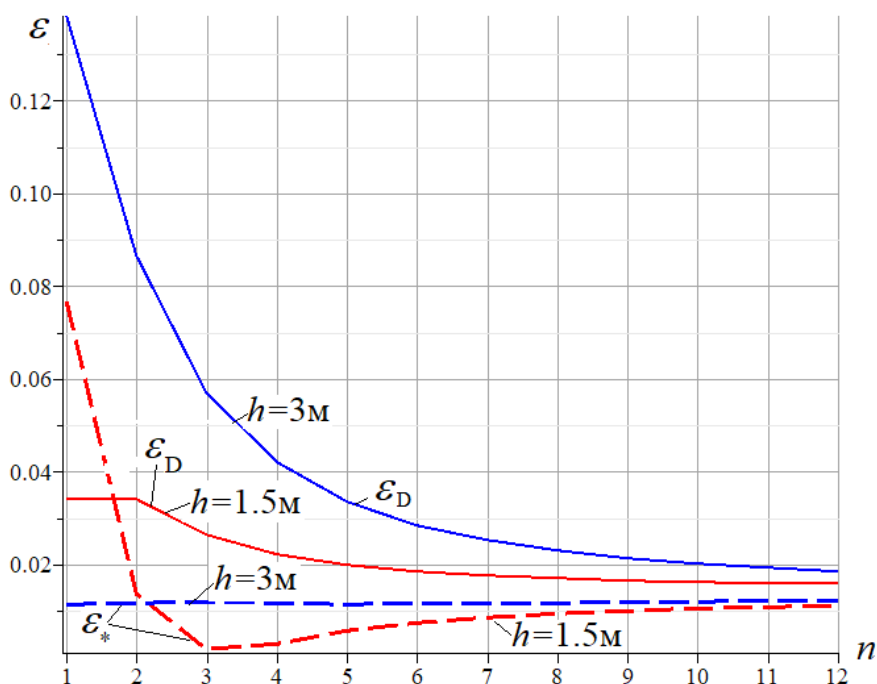


Рис. 5. Погрешность приближенных решений в зависимости от числа панелей

**Заключение.** Для плоской схемы статически определимой консольной фермы тремя методами выведены формулы приближенной оценки основной частоты собственных колебаний. Использован метод Донкерля и его упрощенный вариант. Сравнение аналитических решений с традиционным численным, полученным с учетом всех степеней свободы модели фермы, показало хорошую точность найденных решения. Отмечается высокая точность решений для определенного числа панелей конструкции. Предложенные методы могут быть применимы и для других регулярных систем.

#### Библиографический список

1. Seventekidis P., Giagopoulos D. Generalization gap estimation for damage classification tasks when finite element simulated data is used for training: A numerical study and experimental validation on a steel truss // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 319. P. 118855. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118855>.
2. Цуканова Е. С. Расчет вынужденных колебаний стержневых систем методом конечных элементов с применением динамического конечного элемента // *Транспортное машиностроение*. 2015. № 2 (46). С. 93.

3. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method // *Computers & Structures*. 2024. Vol. 305. P. 107570. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.
4. Kirsanov M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing. Newcastle upon Tyne. UK. 2024. 186 p.
5. Кирсанов М. Н. Плоские фермы. Прогибы и частоты колебаний: справочник. М.: ИНФРА-М, 2025. 196 с.
6. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 4 (39). С. 27–34.
7. Лыонг К. Л. Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4 (43). С. 42–53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004.
8. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. No. 4 (54). Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.
9. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. No. 9 (85). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.
10. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4.
11. Лыонг К. Л. Зависимость области резонансно безопасных частот от размеров статически определимой плоской фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 2 (41). С. 16–26. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.002.
12. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
13. Галишникова В. В., Игнатъев В. А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. 552 с. EDN: QNMMHT.
14. Петриченко Е. А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // *Строительная механика и конструкции*. 2020. Т. 3, №. 26. С. 21–29.
15. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 109. Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
16. Грибова О. В. Формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2025. № 1 (44). С. 31–39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003.
17. Щиголь Е. Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 46–53. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.005.
18. Астахов С. В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4 (43). С. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003.
19. Dai Qiao. Вывод формулы для расчета первой частоты собственных колебаний трапециевидной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2026. № 1 (48). С. 55–62. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.48.1.005.
20. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

## References

1. Seventekidis P., Giagopoulos D. Generalization gap estimation for damage classification tasks when finite element simulated data is used for training: A numerical study and experimental validation on a steel truss // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 319. P. 118855. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118855>.
2. Tsukanova E. S. Calculation of forced vibrations of rod systems by the finite element method using a dynamic finite element // *Transport engineering*. 2015. No. 2 (46). P. 93.
3. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method // *Computers & Structures*. 2024. Vol. 305. P. 107570. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.
4. Kirsanov M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing. Newcastle upon Tyne. UK. 2024. 186 p.
5. Kirsanov M. N. *Planar trusses. Deflections and oscillation frequencies: reference book*. Moscow: INFRA-M, 2025. 196 p. (in Russian).
6. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss // *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). Pp. 27–34 (in Russian).
7. Luong C. L. Estimates of deflection and natural frequency of vibrations of a hinged-rod truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2024. No. 4 (43). Pp. 42–53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004.
8. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. No. 4 (54). Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.
9. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. No. 9 (85). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.
10. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4.
11. Luong K. L. Dependence of the region of resonantly safe frequencies on the dimensions of a statically determinate flat truss // *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 2 (41). Pp. 16–26. DOI: 10.36622 / 2219-1038.2024.41.2.002 (in Russian).
12. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency // *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002 (in Russian).
13. Galishnikova V. V., Ignatiev V. A. *Regular rod systems. Theory and calculation methods*. Volgograd: VolgGASU. 2006. 552 p. EDN: QNMMHT (in Russian).
14. Petrichenko E. A. Lower limit of the natural oscillation frequency of the Fink truss // *Structural mechanics and structures*. 2020. Vol. 3. No. 26. Pp. 21–29 (in Russian).
15. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 109. Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
16. Gribova O. V. Formulas for calculating the deflection and natural frequency of a flat truss with an arbitrary number of panels // *Structural Mechanics and Structures*. 2025. No. 1 (44). Pp. 31–39 (in Russian). DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003.
17. Shchigol E. D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 2 (37). Pp. 46–53 (in Russian). DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.005.
18. Astakhov S. V. Analytical estimation of the deflection of a rod model of a hip roof frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 4 (43). P. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003 (in Russian).

19. Qiao D. Derivation of a formula for the first frequency trapezoid truss natural oscillations. *Structural mechanics and structures*. 2026. No. 1 (48). Pp. 55–62. (in Russian). DOI: 10.36622/2219-1038.2026.48.1.005.

20. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

## DEFLECTION AND FIRST NATURAL FREQUENCY FLAT CANTILEVER TRUSS FREE VIBRATIONS

M. N. Kirsanov <sup>1</sup>

National Research University "MPEI" <sup>1</sup>  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup> Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof. of the Dept. of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

---

A simple design of a statically determinate regular planar cantilever truss is considered. The descending and ascending diagonals of the truss are inclined at different angles. The mass of the structure is assumed to be uniformly distributed among its nodes. Approximate formulas are derived for the dependence of the deflection and the first natural frequency on the number of panels. The Dunkerley method and its simplified version are used. The forces in the rods, which are part of the structural stiffness matrix, are calculated analytically using the «Maple» symbolic mathematics system. The Maxwell – Mohr's formula is used to calculate truss stiffness. Generalizing a series of solutions for trusses of various orders to an arbitrary case yields a dependence of the oscillation frequency on the number of panels, truss dimensions, and mass at the nodes.

**Keywords:** plane truss, natural frequency, deflection, analytical solution, Dunkerley method, simplified frequency calculation, «Maple», induction method, Maxwell – Mohr formula.

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ МНОГОСЛОЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

С. В. Бакушев<sup>1</sup>

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства<sup>1</sup>  
Россия, г. Пенза

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры механики, e-mail: bakuchsv@mail.ru

**Постановка задачи.** Рассматриваются вопросы определения полной и удельной потенциальной энергии многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях осевого растяжения-сжатия, кручения и плоского поперечного изгиба.

**Результаты.** Получены формулы для полной и удельной потенциальной энергии многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях осевого растяжения-сжатия, кручения и плоского поперечного изгиба.

**Выводы.** Полученные результаты могут быть использованы при решении задач строительной механики с использованием потенциальной энергии упругого многослойного неоднородного тела.

**Ключевые слова:** стержень, неоднородность, упругость, потенциальная энергия деформации.

**Введение.** Потенциальная энергия деформации имеет важное прикладное значение не только в науке о сопротивлении материалов, но и в общей механике деформируемого твёрдого тела. Вопросы расчёта элементов строительных и машиностроительных конструкций с использованием потенциальной энергии деформации рассматривались в работах [1–5].

В [6] показано, что в существующей теории упругих волн закон сохранения энергии не выполняется. Установлено, что через каждые четверть периода в волне без потерь происходит полное преобразование кинетической энергии в потенциальную и обратно, при этом в каждой пространственной точке волны ее полная плотность энергии одинакова в любой момент времени, что согласуется с законом сохранения энергии.

В работе [8] для различных случаев загрузки упругих тел вычисляются как работа внешних сил, действующих на упругое тело, так и потенциальная энергия деформации упругого тела на основе удельной потенциальной энергии деформации. При загрузке упругого стержня продольной силой и продольной равномерно распределённой нагрузкой работа внешних сил точно совпадает с потенциальной энергией деформации упругого тела. При изгибе упругого стержня сосредоточенной силой и равномерно распределённой нагрузкой в первом случае работа сосредоточенных внешних сил точно совпадает с потенциальной энергией деформации упругого тела, во втором случае работа внешних сил отличается от работы деформации, причём поправка за счёт сдвиговых деформаций составляет менее 0,0001 %.

В данной работе рассматриваются вопросы определения полной и удельной потенциальной энергии многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях осевого растяжения-сжатия, кручения и плоского поперечного изгиба.

**1. Осевое растяжение-сжатие.** Под действием внешней продольной нагрузки  $F$  стержень изменяет свою длину. Считая справедливой гипотезу плоских сечений, получим, что все слои стержня изменят свою длину на одну и ту же величину  $\Delta l$ . Изменение длины стержня обусловлено действующими в слоях стержня напряжениями.

Поскольку [8]

$$F = N_1 + N_2 + \dots + N_n, \quad (1)$$

то нормальное напряжение в каждом слое будет определяться так:

$$\sigma_{z1} = \frac{N_1}{A_1}; \quad \sigma_{z2} = \frac{N_2}{A_2}; \quad \dots; \quad \sigma_{zn} = \frac{N_n}{A_n}. \quad (2)$$

При этом продольная деформация в слоях стержня будет связана с напряжениями законом Гука:

$$\sigma_{z1} = E_1 \varepsilon_{z2}; \quad \sigma_{z2} = E_2 \varepsilon_{z2}; \quad \dots; \quad \sigma_{zn} = E_n \varepsilon_{zn}, \quad (3)$$

причём  $\varepsilon_{z1} = \varepsilon_{z2} = \dots = \varepsilon_{zn}$ , то есть

$$\Delta l = \frac{N_1 l_0}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_0}{E_2 A_2} = \dots = \frac{N_n l_0}{E_n A_n}. \quad (4)$$

Работа  $W$  силы  $F$  на перемещении  $\Delta l$  будет равна:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} F \cdot \Delta l = \frac{1}{2} (N_1 + N_2 + \dots + N_n) \Delta l = \\ &= \frac{1}{2} N_1 \frac{N_1 l_0}{E_1 A_1} + \frac{1}{2} N_2 \frac{N_2 l_0}{E_2 A_2} + \dots + \frac{1}{2} N_n \frac{N_n l_0}{E_n A_n} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{N_1^2 l_0}{E_1 A_1} + \frac{1}{2} \frac{N_2^2 l_0}{E_2 A_2} + \dots + \frac{1}{2} \frac{N_n^2 l_0}{E_n A_n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, работа, а значит, и потенциальная энергия деформации неоднородного многослойного упругого стержня при осевом растяжении-сжатии будут определяться соотношением (5).

Найдём удельную потенциальную энергию:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{W}{V_0} = \frac{\frac{1}{2} F \cdot \Delta l}{A_{\text{общ}} l_0} = \frac{1}{2} \frac{F}{A_{\text{общ}}} \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{2} \frac{N_1 + N_2 + \dots + N_n}{A_{\text{общ}}} \varepsilon_{z0} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{z0}}{A_{\text{общ}}} (N_1 + N_2 + \dots + N_n) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{z0}}{A_{\text{общ}}} (\sigma_{z1} A_1 + \sigma_{z2} A_2 + \dots + \sigma_{zn} A_n) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \sigma_{z1} \varepsilon_{z1} \frac{A_1}{A_{\text{общ}}} + \sigma_{z2} \varepsilon_{z2} \frac{A_2}{A_{\text{общ}}} + \dots + \sigma_{zn} \varepsilon_{zn} \frac{A_n}{A_{\text{общ}}} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $A_{\text{общ}} = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ .

**2. Кручение.** Для многослойного неоднородного упругого стержня длиной  $l_0$  с круглым поперечным сечением, находящегося в условиях кручения, работа  $W$  внешнего крутящего момента  $M_{\text{кр}}$  будет равна количеству потенциальной энергии, накопленной в стержне при его закручивании на угол  $\varphi$ :

$$W = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} \cdot \varphi. \quad (7)$$

В соответствии с работой [9] угол закручивания определяется соотношением:

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}. \quad (8)$$

Пусть в формуле (8) и числитель, и знаменатель в правой части не зависят от координаты  $z$ . Тогда угол закручивания стержня длиной  $l_0$ :

$$\varphi = \frac{M_{\text{кр}} l_0}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}. \quad (9)$$

Следовательно,

$$W = \frac{1}{2} \frac{M_{\text{кр}}^2 l_0}{G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}}. \quad (10)$$

Таким образом, работа, а значит, и потенциальная энергия деформации неоднородного многослойного упругого стержня круглого поперечного сечения при кручении будут определяться соотношением (10).

Найдём удельную потенциальную энергию:

$$W_0 = \frac{W}{V_0} = \frac{\frac{1}{2}M_{\text{кр}}\varphi}{A_{\text{общ}}l_0} = \frac{1}{2}M_{\text{кр}} \frac{\varphi}{A_{\text{общ}}l_0}. \quad (11)$$

На основании [10] имеем:

$$\begin{aligned} M_{\text{кр}} &= \frac{d\varphi}{dz} (G_1 I_{1\rho} + G_2 I_{2\rho} + \dots + G_n I_{n\rho}) = \\ &= G_1 I_{1\rho} \frac{d\varphi}{dz} + G_2 I_{2\rho} \frac{d\varphi}{dz} + \dots + G_n I_{n\rho} \frac{d\varphi}{dz} = \\ &= M_{z1} + M_{z2} + \dots + M_{zn}. \end{aligned} \quad (12)$$

Далее:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \gamma_{1\rho} G_1 = \rho_1 \frac{d\varphi}{dz} G_1, \quad 0 \leq \rho_1 \leq r_1; \\ M_{z1} &= G_1 I_{1\rho} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} G_1 I_{1\rho} = \frac{\tau_1}{\rho_1} I_{1\rho} = \frac{\tau_1}{r_1} I_{1\rho}. \\ \tau_2 &= \gamma_{2\rho} G_2 = \rho_2 \frac{d\varphi}{dz} G_2, \quad r_1 \leq \rho_2 \leq r_1 + h_2; \\ M_{z2} &= G_2 I_{2\rho} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} G_2 I_{2\rho} = \frac{\tau_2}{\rho_2} I_{2\rho} = \frac{\tau_2}{r_1+h_2} I_{2\rho}; \end{aligned} \quad (13)$$

...

$$\begin{aligned} \tau_n &= \gamma_{n\rho} G_n = \rho_n \frac{d\varphi}{dz} G_n, \\ r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1} &\leq \rho_n \leq r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n; \\ M_{zn} &= G_n I_{n\rho} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} G_n I_{n\rho} = \frac{\tau_n}{r_1+h_2+h_3+\dots+h_n} I_{n\rho}. \end{aligned}$$

Итак,

$$M_{\text{кр}} = \frac{\tau_1}{r_1} I_{1\rho} + \frac{\tau_2}{r_1+h_2} I_{2\rho} + \dots + \frac{\tau_n}{r_1+h_2+h_3+\dots+h_n} I_{n\rho}. \quad (14)$$

Тогда

$$W_0 = \frac{1}{2} M_{\text{кр}} \frac{\varphi}{A_{\text{общ}}l_0} = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{A_{\text{общ}}l_0} \left( \frac{\tau_1}{r_1} I_{1\rho} + \frac{\tau_2}{r_1+h_2} I_{2\rho} + \dots + \frac{\tau_n}{r_1+h_2+h_3+\dots+h_n} I_{n\rho} \right). \quad (15)$$

Пусть

$$t_1 \equiv r_1; \quad t_2 \equiv r_1 + h_2; \quad t_n \equiv r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n.$$

Далее:

$$\begin{aligned} \gamma_{1t_1} G_1 &= t_1 \frac{d\varphi}{dz} G_1, \quad \text{то есть } \gamma_{1t_1} = t_1 \frac{d\varphi}{dz}, \quad \text{или } \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma_{1t_1}}{t_1}, \\ \gamma_{2t_2} G_2 &= t_2 \frac{d\varphi}{dz} G_2, \quad \text{то есть } \gamma_{2t_2} = t_2 \frac{d\varphi}{dz}, \quad \text{или } \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma_{2t_2}}{t_2}; \end{aligned} \quad (16)$$

...

$$\gamma_{nt_n} G_n = t_n \frac{d\varphi}{dz} G_n, \quad \text{то есть } \gamma_{nt_n} = t_n \frac{d\varphi}{dz}, \quad \text{или } \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\gamma_{nt_n}}{t_n}.$$

Интегрируя (16), получаем:

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_0^{l_0} \frac{\gamma_{1t_1}}{t_1} dz = \frac{\gamma_{1t_1}}{t_1} l_0, \quad \varphi = \int_0^{l_0} \frac{\gamma_{2t_2}}{t_2} dz = \frac{\gamma_{2t_2}}{t_2} l_0, \\ \dots, \quad \varphi &= \int_0^{l_0} \frac{\gamma_{nt_n}}{t_n} dz = \frac{\gamma_{nt_n}}{t_n} l_0. \end{aligned}$$

При этом формула (15) получает вид:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \frac{1}{2} \frac{\varphi}{A_{\text{общ}} l_0} \left( \frac{\tau_1}{t_1} I_{1\rho} + \frac{\tau_2}{t_2} I_{2\rho} + \dots + \frac{\tau_n}{t_n} I_{n\rho} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{A_{\text{общ}} l_0} \left( \frac{\tau_1}{t_1} \varphi I_{1\rho} + \frac{\tau_2}{t_2} \varphi I_{2\rho} + \dots + \frac{\tau_n}{t_n} \varphi I_{n\rho} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{A_{\text{общ}} l_0} \left( \frac{\tau_1 \gamma_1 t_1}{t_1} l_0 I_{1\rho} + \frac{\tau_2 \gamma_2 t_2}{t_2} l_0 I_{2\rho} + \dots + \frac{\tau_n \gamma_n t_n}{t_n} l_0 I_{n\rho} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \tau_1 \gamma_1 t_1 \frac{I_{1\rho}}{A_{\text{общ}} t_1^2} + \tau_2 \gamma_2 t_2 \frac{I_{2\rho}}{A_{\text{общ}} t_2^2} + \dots + \tau_n \gamma_n t_n \frac{I_{n\rho}}{A_{\text{общ}} t_n^2} \right). \tag{17}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$I_{1\rho} = \frac{\pi r_1^4}{2} -$$

полярный момент инерции первого (от центра круглого поперечного сечения) слоя;

$$I_{2\rho} = \frac{\pi}{2} [(r_1 + h_2)^4 - r_1^4] -$$

полярный момент инерции второго (от центра круглого поперечного сечения) слоя;

$$I_{n\rho} = \frac{\pi}{2} [(r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_n)^4 - (r_1 + h_2 + h_3 + \dots + h_{n-1})^4] -$$

полярный момент инерции внешнего слоя.

**3. Плоский поперечный изгиб.** Потенциальная энергия при упругом изгибе стержня складывается из потенциальной энергии растяжения-сжатия волокон стержня и потенциальной энергии сдвига волокон в направлении, параллельном оси стержня. Для неоднородного многослойного стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба в плоскости  $ZOY$ , со слоями, параллельными плоскости  $ZOX$ , удельная потенциальная энергия растяжения-сжатия будет определяться соотношением (6):

$$W_0^{\text{p-c}} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{z1} \varepsilon_{z1} \frac{A_1}{A_{\text{общ}}} + \sigma_{z2} \varepsilon_{z2} \frac{A_2}{A_{\text{общ}}} + \dots + \sigma_{zn} \varepsilon_{zn} \frac{A_n}{A_{\text{общ}}} \right). \tag{18}$$

Для определения удельной потенциальной энергии сдвига слоёв один относительно другого рассмотрим пакет разнородных слоёв размером  $a \times a$  и толщиной  $b$  (рис.).

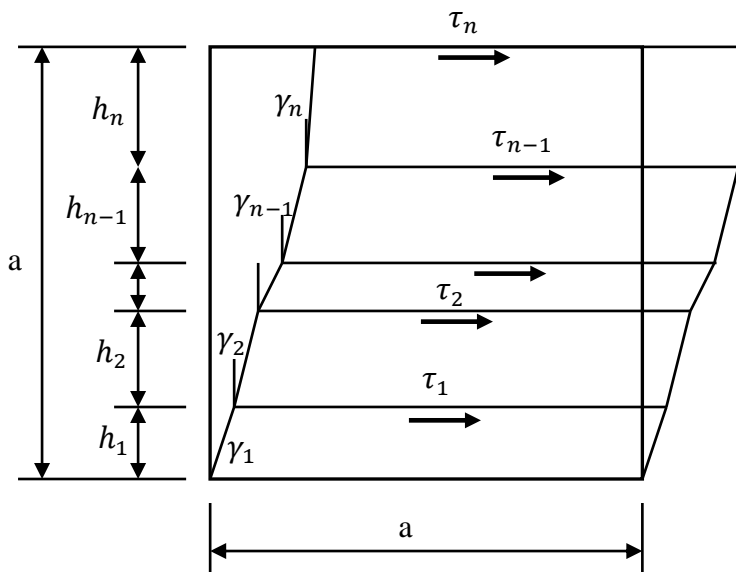


Рис. Пакет разнородных слоёв

Пусть под действием касательных напряжений  $\tau_i$ , действующих по верхним граням каждого слоя, пакет деформируется. При этом связь между касательными напряжениями  $\tau_i$  и углами сдвига  $\gamma_i$  в каждом слое описывается законом Гука:

$$\tau_1 = G_1\gamma_1; \tau_2 = G_2\gamma_2; \dots; \tau_n = G_n\gamma_n. \quad (19)$$

Сдвигающие усилия по верхней стороне каждого слоя будут равны:

$$T_1 = \tau_1 ab; T_2 = \tau_2 ab; \dots; T_n = \tau_n ab. \quad (20)$$

Сдвигающие усилия  $T_i$  на перемещениях  $\delta_i = h_i\gamma_i$  совершат работу, в совокупности составляющую потенциальную энергию деформируемого пакета:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n T_i \delta_i = \frac{1}{2} (\tau_1 ab h_1 \gamma_1 + \tau_2 ab h_2 \gamma_2 + \dots + \tau_n ab h_n \gamma_n) = \\ &= \frac{1}{2} ab (\tau_1 \gamma_1 h_1 + \tau_2 \gamma_2 h_2 + \dots + \tau_n \gamma_n h_n). \end{aligned} \quad (21)$$

Удельная потенциальная энергия пакета будет равна:

$$W_0^{cd} = \frac{W}{a^2 b} = \frac{1}{2} \left( \tau_1 \gamma_1 \frac{h_1}{a} + \tau_2 \gamma_2 \frac{h_2}{a} + \dots + \tau_n \gamma_n \frac{h_n}{a} \right). \quad (22)$$

Итак, удельная потенциальная энергия неоднородного многослойного изгибаемого стержня будет определяться выражением:

$$\begin{aligned} W_0 &= W_0^{p-c} + W_0^{cd} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{z1} \varepsilon_{z1} \frac{A_1}{A_{общ}} + \sigma_{z2} \varepsilon_{z2} \frac{A_2}{A_{общ}} + \dots + \sigma_{zn} \varepsilon_{zn} \frac{A_n}{A_{общ}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \tau_1 \gamma_1 \frac{h_1}{a} + \tau_2 \gamma_2 \frac{h_2}{a} + \dots + \tau_n \gamma_n \frac{h_n}{a} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $h_i$  – толщина слоя;  $a$  – толщина балки в направлении оси  $OY$ .

С учётом соотношений (3) и (19) приведём выражение (23) к виду:

$$\begin{aligned} W_0 &= W_0^{p-c} + W_0^{cd} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{z1} \frac{\sigma_{z1}}{E_1} \frac{A_1}{A_{общ}} + \sigma_{z2} \frac{\sigma_{z2}}{E_2} \frac{A_2}{A_{общ}} + \dots + \sigma_{zn} \frac{\sigma_{zn}}{E_n} \frac{A_n}{A_{общ}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \tau_1 \frac{\tau_1}{G_1} \frac{h_1}{a} + \tau_2 \frac{\tau_2}{G_2} \frac{h_2}{a} + \dots + \tau_n \frac{\tau_n}{G_n} \frac{h_n}{a} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{z1}^2}{E_1} \frac{A_1}{A_{общ}} + \frac{\sigma_{z2}^2}{E_2} \frac{A_2}{A_{общ}} + \dots + \frac{\sigma_{zn}^2}{E_n} \frac{A_n}{A_{общ}} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_{zy1}^2}{G_1} \frac{h_1}{a} + \frac{\tau_{zy2}^2}{G_2} \frac{h_2}{a} + \dots + \frac{\tau_{zyn}^2}{G_n} \frac{h_n}{a} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Будем рассматривать изгибаемый упругий стержень, содержащий  $n$  разнородных слоёв, причём  $k$  слоёв находятся выше нейтрального слоя (слоя, в котором проходит нейтральная линия) в сжатой зоне поперечного сечения,  $m$  слоёв находятся ниже нейтрального слоя в растянутой зоне поперечного сечения. Так что  $n = k + m + 1$ .

В соответствии с работой [10]:

$$\begin{aligned} \sigma_{zi}^{(-)} &= M_x E_i^{(-)} \frac{h_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(-)} + y_i}{EI}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \\ \sigma_{z0}^{(-)} &= M_x E_0 \frac{y_0^{(-)}}{EI}; \quad \sigma_{z0}^{(+)} = M_x E_0 \frac{y_0^{(+)}}{EI}; \\ \sigma_{zi}^{(+)} &= M_x E_i^{(+)} \frac{h_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(+)} + y_i}{EI}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $\sigma_{zi}^{(-)}$  – нормальные напряжения в слоях сжатой зоны поперечного сечения;  $\sigma_{z0}^{(-)}$  – нормальные напряжения в сжатой зоне нейтрального слоя поперечного сечения;  $\sigma_{z0}^{(+)}$  – нормальные напряжения в растянутой зоне нейтрального слоя поперечного сечения;  $\sigma_{zi}^{(+)}$  – нормальные напряжения в слоях растянутой зоны поперечного сечения.

В соответствии с работой [11]:

$$\tau_{zy}^{(-)} = \frac{Q_y}{b_k EI} \left( E_k^{(-)} \tilde{S}_x^{k(-)} + \sum_{i=k+1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right). \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tau_{zy}^{(+)} = & \frac{Q_y}{b_m EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + \right. \\ & \left. + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \sum_{i=1}^{i=m-1} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_m^{(+)} S_x^{m(+)} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $\tau_{zy}^{(-)}$  – касательные напряжения в слоях сжатой зоны поперечного сечения;  $\tau_{zy}^{(+)}$  – касательные напряжения в слоях растянутой зоны поперечного сечения и нулевого слоя;  $b_k$  – ширина слоёв сжатой зоны поперечного сечения;  $b_m$  – ширина слоёв растянутой зоны поперечного сечения.

В формулах (26) и (27) в соответствии с работой [12]:

$$\begin{aligned} EI = & E_{n_B}^{(-)} I_x^{(n_B)(-)} + E_{n_B-1}^{(-)} I_x^{(n_B-1)(-)} + \dots + E_1^{(-)} I_x^{(1)(-)} + E_0 I_x^{(0)(-)} + \\ & + E_0 I_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} I_x^{(1)(+)} + E_2^{(+)} I_x^{(2)(+)} + \dots + E_{n_H}^{(+)} I_x^{(n_H)(+)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь  $n_B$  – номер крайнего сжатого слоя поперечного сечения изгибаемого стержня;  $n_H$  – номер крайнего растянутого слоя поперечного сечения изгибаемого стержня.

Запишем выражение удельной потенциальной энергии изгибаемого многослойного неоднородного упругого стержня (24) применительно к рассматриваемому стержню:

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zn_B}^{2(-)} A_{n_B}}{E_{n_B} A_{\text{общ}}} + \frac{\sigma_{zn_{B-1}}^{2(-)} A_{n_{B-1}}}{E_{n_{B-1}} A_{\text{общ}}} + \dots + \frac{\sigma_{z1}^{2(-)} A_1^{(-)}}{E_1^{(-)} A_{\text{общ}}} + \frac{\sigma_{z0}^{2(-)} A_0}{E_0 A_{\text{общ}}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{z0}^{2(+)} A_0}{E_0 A_{\text{общ}}} + \frac{\sigma_{z1}^{2(+)} A_1^{(+)}}{E_1^{(+)} A_{\text{общ}}} + \dots + \frac{\sigma_{zn_{H-1}}^{2(+)} A_{n_{H-1}}}{E_{n_{H-1}} A_{\text{общ}}} + \frac{\sigma_{zn_H}^{2(+)} A_{n_H}}{E_{n_H} A_{\text{общ}}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_{zy,n_B}^{2(-)} h_{n_B}}{G_{n_B} a} + \frac{\tau_{zy,n_{B-1}}^{2(-)} h_{n_{B-1}}}{G_{n_{B-1}} a} + \dots + \frac{\tau_{zy,1}^{2(-)} h_1^{(-)}}{G_1^{(-)} a} + \frac{\tau_{zy,0}^{2(-)} h_0^{(-)}}{G_0 a} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\tau_{zy,0}^{2(+)} h_0^{(+)}}{G_0 a} + \frac{\tau_{zy,1}^{2(+)} h_1^{(+)}}{G_1^{(+)} a} + \dots + \frac{\tau_{zy,n_{H-1}}^{2(+)} h_{n_{H-1}}}{G_{n_{H-1}} a} + \frac{\tau_{zy,n_H}^{2(+)} h_{n_H}}{G_{n_H} a} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь  $A_{\text{общ}} = A_{n_B} + A_{n_{B-1}} + \dots + A_1^{(-)} + A_0 + A_1^{(+)} + A_{n_{H-1}} + A_{n_H}$ .

Таким образом, удельная потенциальная энергия многослойного неоднородного стержня представилась суммой удельных потенциальных энергий каждого слоя:

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zn_B}^{2(-)} A_{n_B}}{E_{n_B} A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,n_B}^{2(-)} h_{n_B}}{G_{n_B} a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zn_{B-1}}^{2(-)} A_{n_{B-1}}}{E_{n_{B-1}} A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,n_{B-1}}^{2(-)} h_{n_{B-1}}}{G_{n_{B-1}} a} \right) + \dots + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{z1}^{2(-)} A_1^{(-)}}{E_1^{(-)} A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,1}^{2(-)} h_1^{(-)}}{G_1^{(-)} a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{z0}^{2(-)} A_0}{E_0 A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,0}^{2(-)} h_0^{(-)}}{G_0 a} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{z0}^{2(+)} A_0}{E_0 A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,0}^{2(+)} h_0^{(+)}}{G_0 a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{z1}^{2(+)} A_1^{(+)}}{E_1^{(+)} A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,1}^{2(+)} h_1^{(+)}}{G_1^{(+)} a} \right) + \dots + \\ & + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zn_{H-1}}^{2(+)} A_{n_{H-1}}}{E_{n_{H-1}} A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,n_{H-1}}^{2(+)} h_{n_{H-1}}}{G_{n_{H-1}} a} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_{zn_H}^{2(+)} A_{n_H}}{E_{n_H} A_{\text{общ}}} + \frac{\tau_{zy,n_H}^{2(+)} h_{n_H}}{G_{n_H} a} \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставим формулы (25), (26) и (27) в выражение (29) и после элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned} W_0 = & \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}} E_{n_B}} E_{n_B}^2 \left( h_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{n_B-1} h_j^{(-)} + y_{n_B} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}} E_{n_{B-1}}} E_{n_{B-1}}^2 \left( h_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{n_B-2} h_j^{(-)} + y_{n_{B-1}} \right)^2 + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_1^{(-)}}{E_1^{(-)}} E_1^{2(-)} \left( h_0^{(-)} + y_1^{(-)} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_0^{(-)}}{E_0} E_0^{2(-)} \left( y_0^{(-)} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_0^{(+)}}{E_0} E_0^{2(+)} \left( y_0^{(+)} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_1^{(+)}}{E_1^{(+)}} E_1^{2(+)} \left( h_0^{(+)} + y_1^{(+)} \right)^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_{n_H-1}}{E_{n_H-1}} E_{n_H-1}^2 \left( h_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{n_H-2} h_j^{(+)} + y_{n_H-1} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_{n_H}}{E_{n_H}} E_{n_H}^2 \left( h_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{n_H-1} h_j^{(+)} + y_{n_H} \right)^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_B}}{G_{n_B} a \cdot b_{n_B}^2} \left[ E_{n_B}^{(-)} \tilde{S}_x^{n_B(-)} \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_B-1}}{G_{n_B-1} a \cdot b_{n_B-1}^2} \left[ E_{n_B-1}^{(-)} \tilde{S}_x^{n_B-1(-)} + E_{n_B}^{(-)} S_x^{n_B(-)} \right]^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(-)}}{G_1^{(-)} a \cdot b_1^2} \left[ E_1^{(-)} \tilde{S}_x^{1(-)} + \sum_{i=2}^{n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_0^{(-)}}{G_0^{(-)} a \cdot b_0^2} \left[ E_0^{(-)} \tilde{S}_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_0^{(+)}}{G_0^{(+)} a \cdot b_0^2} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(+)}}{G_1^{(+)} a \cdot b_1^2} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + \right. \\
 & \quad \left. + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} \right]^2 + \dots + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_H-1}}{G_{n_H-1} a \cdot b_{n_H-1}^2} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_H-2} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_{n_H-1}^{(+)} S_x^{n_H-1(+)} \right]^2 + \\
 & + \frac{1}{2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_H}}{G_{n_H} a \cdot b_{n_H}^2} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_H-1} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_{n_H}^{(+)} S_x^{n_H(+)} \right]^2 \}. \tag{31}
 \end{aligned}$$

Полная потенциальная энергия изгибаемого стержня находится путём интегрирования удельной потенциальной энергии по объёму стержня:

$$W = \int_V W_0 = \int_l \int_{A_{\text{общ}}} W_0 dz \cdot dA. \tag{32}$$

Принимая во внимание формулу (30), интегрирование по общей площади стержня  $A_{\text{общ}}$ , заменим интегрированием по площади поперечного сечения каждого слоя:

$$\begin{aligned}
 W & = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_{n_B}}{E_{n_B}} E_{n_B}^2 dz \int_{A_{n_B}} \left( h_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{n_B-1} h_j^{(-)} + y_{n_B} \right)^2 dA + \\
 & + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_{n_B-1}}{E_{n_B-1}} E_{n_B-1}^2 dz \int_{A_{n_B-1}} \left( h_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{n_B-2} h_j^{(-)} + y_{n_B-1} \right)^2 dA + \\
 & + \dots + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_1^{(-)}}{E_1^{(-)}} E_1^{2(-)} dz \int_{A_1} \left( h_0^{(-)} + y_1^{(-)} \right)^2 dA + \\
 & + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_0^{(-)}}{E_0} E_0^2 dz \int_{A_0} \left( y_0^{(-)} \right)^2 dA + \\
 & + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{\text{общ}}} \frac{A_0^{(+)}}{E_0} E_0^2 dz \int_{A_0} \left( y_0^{(+)} \right)^2 dA +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{0\text{бш}}} \frac{A_1}{E_1^{(+)} } E_1^{2(+)} dz \int_{A_1} \left( h_0^{(+)} + y_1^{(+)} \right)^2 dA + \dots + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{0\text{бш}}} \frac{A_{n_{\text{H}}-1}}{E_{n_{\text{H}}-1}} E_{n_{\text{H}}-1}^2 dz \int_{A_{n_{\text{H}}-1}} \left( h_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{n_{\text{H}}-2} h_j^{(+)} + y_{n_{\text{H}}-1} \right)^2 dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2 A_{0\text{бш}}} \frac{A_{n_{\text{H}}}}{E_{n_{\text{H}}}} E_{n_{\text{H}}}^2 dz \int_{A_{n_{\text{H}}}} \left( h_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{n_{\text{H}}-1} h_j^{(+)} + y_{n_{\text{H}}} \right)^2 dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_{\text{B}}}}{G_{n_{\text{B}}} a \cdot b_{n_{\text{B}}}^2} dz \int_{A_{n_{\text{B}}}} \left[ E_{n_{\text{B}}}^{(-)} \tilde{S}_x^{n_{\text{B}}(-)} \right]^2 dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_{\text{B}}-1}}{G_{n_{\text{B}}-1} a \cdot b_{n_{\text{B}}-1}^2} dz \int_{A_{n_{\text{B}}-1}} \left[ E_{n_{\text{B}}-1}^{(-)} \tilde{S}_x^{n_{\text{B}}-1,(-)} + E_{n_{\text{B}}}^{(-)} S_x^{n_{\text{B}}(-)} \right]^2 dA + \\
& + \dots + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(-)}}{G_1^{(-)} a \cdot b_1^2} dz \int_{A_1} \left[ E_1^{(-)} \tilde{S}_x^{1,(-)} + \sum_{i=2}^{n_{\text{B}}} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right]^2 dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_0^{(-)}}{G_0^{(-)} a \cdot b_0^2} dz \int_{A_0} \left[ E_0^{(-)} \tilde{S}_x^{0,(-)} + \sum_{i=1}^{n_{\text{B}}} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right]^2 dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_0^{(+)}}{G_0^{(+)} a \cdot b_0^2} dz \int_{A_0} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_{\text{B}}} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right]^2 dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(+)}}{G_1^{(+)} a \cdot b_1^2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(+)}}{G_1^{(+)} a \cdot b_1^2} dz \int_{A_1} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_{\text{B}}} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + \right. \\
& \quad \left. + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1,(+)} \right]^2 dA + \dots + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_{\text{H}}-1}}{G_{n_{\text{H}}-1} a \cdot b_{n_{\text{H}}-1}^2} dz \int_{A_{n_{\text{H}}-1}} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_{\text{B}}} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + \right. \\
& \quad \left. + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \sum_{i=1}^{n_{\text{H}}-2} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_{n_{\text{H}}-1}^{(+)} S_x^{n_{\text{H}}-1,(+)} \right]^2 dA + \\
& + \frac{1}{2} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_{\text{H}}}}{G_{n_{\text{H}}} a \cdot b_{n_{\text{H}}}^2} dz \int_{A_{n_{\text{H}}}} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{n_{\text{B}}} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^{n_{\text{H}}-1} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_{n_{\text{H}}}^{(+)} S_x^{n_{\text{H}},(+)} \right]^2 dA \}. \tag{33}
\end{aligned}$$

В формуле (33)

$$\begin{aligned}
& \int_{A_{n_{\text{B}}}} \left( h_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{n_{\text{B}}-1} h_j^{(-)} + y_{n_{\text{B}}} \right)^2 dA = I_x^{n_{\text{B}}}; \\
& \int_{A_{n_{\text{B}}-1}} \left( h_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{n_{\text{B}}-2} h_j^{(-)} + y_{n_{\text{B}}-1} \right)^2 dA = I_x^{n_{\text{B}}-1}; \dots; \\
& \int_{A_1} \left( h_0^{(-)} + y_1^{(-)} \right)^2 dA = I_x^{1,(-)}; \int_{A_0} \left( y_0^{(-)} \right)^2 dA = I_x^{0,(-)}; \\
& \int_{A_0} \left( y_0^{(+)} \right)^2 dA = I_x^{0,(+)}; \int_{A_1} \left( h_0^{(+)} + y_1^{(+)} \right)^2 dA = I_x^{1,(+)}; \dots; \\
& \int_{A_{n_{\text{H}}-1}} \left( h_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{n_{\text{H}}-2} h_j^{(+)} + y_{n_{\text{H}}-1} \right)^2 dA = I_x^{n_{\text{H}}-1}; \\
& \int_{A_{n_{\text{H}}}} \left( h_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{n_{\text{H}}-1} h_j^{(+)} + y_{n_{\text{H}}} \right)^2 dA = I_x^{n_{\text{H}}}.
\end{aligned} \tag{34}$$

Здесь  $I_z^{n_{\text{B}}}, I_z^{n_{\text{B}}-1}, \dots, I_z^{1,(-)}, I_z^{0,(-)}, I_z^{0,(+)}, I_z^{1,(+)}, \dots, I_z^{n_{\text{H}}-1}, I_z^{n_{\text{H}}}$  – осевые моменты инерции поперечных сечений слоёв изгибаемого стержня относительно нейтральной оси  $X$ .

Обозначим:

$$\begin{aligned}
k_{n_{\text{B}}}^{(-)} &= \int_{A_{n_{\text{B}}}} \left[ E_{n_{\text{B}}}^{(-)} \tilde{S}_x^{n_{\text{B}}(-)} \right]^2 dA; \\
k_{n_{\text{B}}-1}^{(-)} &= \int_{A_{n_{\text{B}}-1}} \left[ E_{n_{\text{B}}-1}^{(-)} \tilde{S}_x^{n_{\text{B}}-1,(-)} + E_{n_{\text{B}}}^{(-)} S_x^{n_{\text{B}}(-)} \right]^2 dA; \dots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_1^{(-)} &= \int_{A_1} \left[ E_1^{(-)} \bar{S}_x^{1,(-)} + \sum_{i=2}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i,(-)} \right]^2 dA; \\
 k_0^{(-)} &= \int_{A_0} \left[ E_0^{(-)} \bar{S}_x^{0,(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i,(-)} \right]^2 dA; \\
 k_0^{(+)} &= \int_{A_0} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0,(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i,(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0,(+)} \right]^2 dA; \\
 k_1^{(+)} &= \int_{A_1} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0,(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i,(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0,(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1,(+)} \right]^2 dA; \dots; \\
 k_{n_H-1}^{(+)} &= \int_{A_{n_H-1}} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0,(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i,(-)} + \right. \\
 &\quad \left. + E_0^{(+)} S_x^{0,(+)} + \sum_{i=1}^{i=n_H-2} E_i^{(+)} S_x^{i,(+)} + E_{n_H-1}^{(+)} S_x^{n_H-1,(+)} \right]^2 dA; \\
 k_{n_H}^{(+)} &= \int_{A_{n_H}} \left[ E_0^{(-)} S_x^{0,(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i,(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0,(+)} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i=1}^{i=n_H-1} E_i^{(+)} S_x^{i,(+)} + E_{n_H}^{(+)} S_x^{n_H,(+)} \right]^2 dA.
 \end{aligned} \tag{35}$$

С учётом обозначений (34) и (35) соотношение (33) после упрощений и элементарных преобразований запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} I_x^{n_B} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_{n_B}}{A_{общ}} E_{n_B} dz + \frac{1}{2} I_x^{n_B-1} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_{n_B-1}}{A_{общ}} E_{n_B-1} dz + \dots + \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_x^{1,(-)} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_1^{(-)}}{A_{общ}} E_1^{(-)} dz + \frac{1}{2} I_x^{0,(-)} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_0^{(-)}}{A_{общ}} E_0 dz + \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_x^{0,(+)} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_0^{(+)}}{A_{общ}} E_0 dz + \frac{1}{2} I_x^{1,(+)} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_1^{(+)}}{A_{общ}} E_1^{(+)} dz + \dots + \\
 &\quad + \frac{1}{2} I_x^{n_H-1} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_{n_H-1}}{A_{общ}} E_{n_H-1} dz + \frac{1}{2} I_x^{n_H} \int_l \frac{M_x^2}{EI^2} \frac{A_{n_H}}{A_{общ}} E_{n_H} dz + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_{n_B}^{(-)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_B}}{G_{n_B} a \cdot b_{n_B}^2} dz + \frac{1}{2} k_{n_B-1}^{(-)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_B-1}}{G_{n_B-1} a \cdot b_{n_B-1}^2} dz + \dots + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_1^{(-)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(-)}}{G_1^{(-)} a \cdot b_1^2} dz + \frac{1}{2} k_0^{(-)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_0^{(-)}}{G_0^{(-)} a \cdot b_0^2} dz + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_0^{(+)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_0^{(+)}}{G_0^{(+)} a \cdot b_0^2} dz + \frac{1}{2} k_1^{(+)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(+)}}{G_1^{(+)} a \cdot b_1^2} \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_1^{(+)}}{G_1^{(+)} a \cdot b_1^2} dz + \dots + \\
 &\quad + \frac{1}{2} k_{n_H-1}^{(+)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_H-1}}{G_{n_H-1} a \cdot b_{n_H-1}^2} dz + \frac{1}{2} k_{n_H}^{(+)} \int_l \frac{Q_y^2}{EI^2} \frac{h_{n_H}}{G_{n_H} a \cdot b_{n_H}^2} dz \}.
 \end{aligned} \tag{36}$$

Формула (36) представляет собой выражение для полной потенциальной энергии многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба.

Для определения положения нейтральной линии воспользуемся условием, что при плоском поперечном изгибе упругой балки продольная сила равна нулю [12]:

$$\begin{aligned}
 -E_{n_B}^{(-)} S_x^{(n_B)} - E_{n_B-1}^{(-)} S_x^{(n_B-1)} - \dots - E_1^{(-)} S_x^{(1)(-)} - E_0 S_x^{(0)(-)} + \\
 + E_0 S_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} S_x^{(1)(+)} + \dots + E_{n_H-1}^{(+)} S_x^{(n_H-1)(+)} + E_{n_H}^{(+)} S_x^{(n_H)} = 0.
 \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь  $S_z^{n_B}, S_z^{n_B-1}, \dots, S_z^{n_H-1}, S_z^{n_H} S_z^{n_H}$  – статические моменты площадей поперечных сечений слоёв изгибаемого стержня относительно нейтральной оси  $X$ .

### Заключение

1. Получена формула для полной и удельной потенциальной энергии многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях осевого растяжения (сжатия).

2. Получена формула для полной и удельной потенциальной энергии многослойного неоднородного упругого стержня с круглым поперечным сечением, находящегося в условиях кручения.

3. Получена формула для полной и удельной потенциальной энергии многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба, со слоями, параллельными плоскости  $XOZ$ .

Полученные в статье результаты могут быть использованы при решении задач строительной механики с использованием потенциальной энергии упругого многослойного неоднородного тела.

#### Библиографический список

1. Мищенко А. В. Формулировка критерия минимума энергии деформации в физически нелинейных задачах деформирования неоднородных стержней // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2024. Т. 26, № 6. С. 214–223. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-6-214-223.
2. Мищенко А. В., Вешкин М. С. Применение критерия минимума энергии деформации в задачах рационального профилирования неоднородных стержней // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2025. № 5 (797). С. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-797-5-15-29.
3. Зинькова В. А. Формы консоли на основе вариационного принципа Кастильяно // Вестник Инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 4 (61). С. 90–95. DOI: 10.24866/2227-6858/2024-4/90-95.
4. Ступишин Л. Ю., Никитин К. Е., Мошкевич М. Л. Остаточная энергия деформации при прогрессирующем предельном состоянии конструкции // Промышленное и гражданское строительство. 2023. № 7. С. 50–55. DOI: 10.33622/0869-7019.2023.07.50-55.
5. Цыбулько А. Е., Романенко Е. А. Новый вариант энергетического критерия прочности // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2020. № 5. С. 9–10.
6. Невдах В. В. О выполнении закона сохранения энергии в теории упругих волн // Наука и техника. 2021. Т. 20, № 2. С. 161–167. DOI: 10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167.
7. Бакушев С. В., Голиков А. А. К вопросу о потенциальной энергии деформации упругого тела // Моделирование и механика конструкций. 2022. № 16. С. 63–72.
8. Бакушев С. В. Осевое растяжение-сжатие неоднородных упругопластических стержней // Моделирование и механика конструкций. 2025. № 21. С. 48–62.
9. Бакушев С. В., Середнев А. А. Жёсткость многослойных неоднородных скручиваемых упругопластических стержней // Моделирование и механика конструкций. 2025. № 22. С. 40–52.
10. Бакушев С. В., Мирзаханов М. Р. К вопросу о равнопрочности изгибаемых неоднородных стержней // Моделирование и механика конструкций. 2025. № 21. С. 69–81.
11. Бакушев С. В. Касательные напряжения в многослойном неоднородном упругом стержне // Строительная механика и конструкции. 2026. № 1 (48). С. 7–21. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.48.1.001.
12. Бакушев С. В., Ахмедханов Х. Г. Прогобы в многослойных балках // Моделирование и механика конструкций. 2025. № 22. С. 62–75.

#### References

1. Mishchenko A. V. Formulation of the minimum strain energy criterion in physically non-linear problems of deformation of inhomogeneous bars // Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2024. Vol. 26. No. 6. Pp. 214–223. DOI: 10.31675/1607-1859-2024-26-6-214-223.

2. Mishchenko A. V., Veshkin M. S. Application of the minimum strain energy criterion in problems of rational profiling of inhomogeneous bars // *Bulletin of Higher Educational Institutions. Construction*. 2025. No. 5 (797). Pp. 15–29. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-797-5-15-29.
3. Zin'kova V. A. Cantilever shapes based on the Castigliano variational principle // *Bulletin of the Engineering School of the Far Eastern Federal University*. 2024. No. 4 (61). Pp. 90–95. DOI: 10.24866/2227-6858/2024-4/90-95.
4. Stupishin L. Yu., Nikitin K. E., Moshkevich M. L. Residual energy of deformation under the progressive limit state of a structure // *Industrial and Civil Engineering*. 2023. No. 7. Pp. 50–55. DOI: 10.33622/0869-7019.2023.07.50-55.
5. Tsybulko A. E., Romanenko E. A. New version of the energy criterion of strength. Forging and Stamping Production // *Material Processing by Pressure*. 2020. No. 5. Pp. 9–10.
6. Nevдах V. V. On the fulfillment of the law of conservation of energy in the theory of elastic waves // *Science and Technology*. 2021. Vol. 20. No. 2. Pp. 161–167. DOI: 10.21122/2227-1031-2021-20-2-161-167.
7. Bakushev S. V., Golikov A. A. On the issue of the potential energy of deformation of an elastic body // *Modeling and Mechanics of Structures*. 2022. No. 16. Pp. 63–72.
8. Bakushev S. V. Axial tension-compression of inhomogeneous elastoplastic rods // *Modeling and Mechanics of Structures*. 2025. No. 21. Pp. 48–62.
9. Bakushev S. V., Serednev A. A. Stiffness of multilayer inhomogeneous twisted elastoplastic rods // *Modeling and Mechanics of Structures*. 2025. No. 22. Pp. 40–52.
10. Bakushev S. V., Mirzakhanov M. R. On the issue of equal strength of bending inhomogeneous rods // *Modeling and Mechanics of Structures*. 2025. No. 21. Pp. 69–81.
11. Bakushev S. V. Shear stresses in a multilayer inhomogeneous elastic rod // *Structural Mechanics and Constructions*. 2026. No. 1 (48). Pp. 7–21. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.48.1.001.
12. Bakushev S. V., Akhmedkhanov H. G. Deflections in multilayer beams // *Modeling and Mechanics of Structures*. 2025. No. 22. Pp. 62–75.

## POTENTIAL ENERGY OF A MULTILAYER INHOMOGENEOUS ELASTIC ROD

S. V. Bakushev <sup>1</sup>

Penza State University of Architecture and Construction <sup>1</sup>  
Russia, Penza

---

<sup>1</sup> Dr of Technical Sciences, Prof. of the Dept. of Mechanics, e-mail: bakuchsv@mail.ru

---

**Problem statement.** The problems of determining the total and specific potential energy of a multilayer inhomogeneous elastic rod under conditions of axial tension-compression, torsion and plane transverse bending are considered.

**Results.** Formulas for the total and specific potential energy of a multilayer inhomogeneous elastic rod under conditions of axial tension-compression, torsion and plane transverse bending are obtained.

**Conclusions.** The results obtained in the article can be used in solving problems of structural mechanics using the potential energy of an elastic multilayer inhomogeneous body.

**Keywords:** rod, heterogeneity, elasticity, potential strain energy.

УДК 624.04+624.07

DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.003

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СОСТАВНОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ КРУЧЕНИИ

Ф. С. Волков<sup>1</sup>, А. В. Мищенко<sup>2</sup>, Ю. А. Гербер<sup>3</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)<sup>1,2,3</sup>

Россия, г. Новосибирск

Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище<sup>2</sup>

Россия, г. Новосибирск

---

<sup>1</sup> Магистрант института строительства, тел.: +7(913)370-07-31, e-mail: f.volkov@sibstrin.ru<sup>2</sup> Д-р техн. наук, зав. кафедрой общепрофессиональных дисциплин НВВКУ;

проф. кафедры строительной механики НГАСУ, тел.: +7(383)266-33-80, e-mail: mishchenko.av59@yandex.ru

<sup>3</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(905)959-40-12, e-mail: yu.gerber@sibstrin.ru

---

Рассмотрен способ построения аналитического решения задачи о кручении составного неоднородного стержня прямоугольного поперечного сечения. Касательные напряжения определяются с использованием функции напряжений Прандтля в сочетании с мембранной аналогией. Для функции напряжений применены аппроксимации алгебраического, тригонометрического и гиперболического типов. Произведено сопоставление результатов аналитических расчетов с численными конечно-элементными по программам «SCAD» и «Ansys». Показано, что гиперболическая аппроксимация позволяет построить решение приемлемой точности.

**Ключевые слова:** структурно неоднородный стержень, пространственный стержень, жесткость при кручении, функция напряжений Прандтля, мембранная аналогия, область Парето, напряжения при кручении.

**Введение.** Конструктивные элементы, испытывающие кручение, широко распространены в машиностроении, авиа- и судостроении, в конструкциях зданий и сооружений. Из них особый интерес представляют неоднородные стержневые элементы с поперечным сечением, отличающимся от круга, кольца и других, для которых существует аналитическое решение [1–3]. Актуальными направлениями исследований по данной тематике являются: построение и развитие уточненных расчетных методов для стержневых элементов со сложным контуром поперечного сечения [4, 5]; построение математических моделей расчета неоднородных стержней, в том числе изготовленных из анизотропных материалов и при учете нелинейных факторов [6–9]; верификация расчетных методов с помощью различных численных методов [8].

В данной статье рассматривается способ построения решения задачи о кручении неоднородного составного стержня, основанный на аппроксимации мембранной функции, принятой в качестве функции напряжений Прандтля. Результаты расчетов сопоставлены с конечно-элементным (КЭ) расчетом по программам «SCAD» и «Ansys».

**Аналитическое решение.** Рассмотрим неоднородный стержень с прямоугольным внешним контуром поперечного сечения. В системе координат  $xOz$  его продольная ось совмещена с осью  $x$ , структура обладает симметрией относительно плоскостей  $xOy$ ,  $xOz$ . Стержень составлен из структурных элементов (слоев, фаз и др. включений), выполненных из различных однородных линейно-упругих материалов, соединенных идеальным образом в неоднородную монолитную структуру.

В расчетах напряженного состояния при кручении будем использовать подход, основанный на функции напряжений Прандтля  $\varphi$ , согласно которому компоненты касательного напряжения, действующие в плоскости  $zOy$  (поперечного сечения), для однородных стержней имеют вид [10]:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (1)$$

Для неоднородного стержня введем расчетное предположение о напряжениях [11, 12]:

$$\tau_{yx}^{(k)} = G_k \kappa_x b h \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}, \quad \tau_{zx}^{(k)} = -G_k \kappa_x b h \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}. \quad (2)$$

Здесь  $\kappa_x$  – кручение оси стержня;  $G_k$  – модуль сдвига материала  $k$ -го структурного элемента;  $\bar{\varphi}$  – единая для всех фаз сечения аппроксимация безразмерной функции напряжений при кручении;  $b, h$  – ширина и высота поперечного сечения – геометрические параметры для согласования размерностей в (2). Зависимость касательных напряжений (2) от модуля сдвига  $G_k$  обуславливает наличие разрывов в функции напряжений на границах фаз в поперечном сечении.

Для построения приближенного решения используем мембранную аналогию ( $w \rightarrow \bar{\varphi}$ ), аппроксимируя функцию  $\bar{\varphi}$  функцией прогибов гибкой мембраны  $w$ , закрепленной на контуре сечения. Среди способов задания функции напряжений  $\bar{\varphi}$  рассмотрим способы, основанные на алгебраической  $\bar{\varphi}_a$ , тригонометрической  $\bar{\varphi}_t$  и гиперболической  $\bar{\varphi}_g$  формах:

$$\bar{\varphi}_a = \left( \frac{4z^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{4y^2}{h^2} - 1 \right), \quad (3)$$

$$\bar{\varphi}_t = -\cos\left(\frac{\pi z}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{h}\right), \quad (4)$$

$$\bar{\varphi}_g = \frac{\left[ \operatorname{ch}\left(\frac{2\alpha_{0z}z}{b}\right) - \operatorname{ch}(\alpha_{0z}) \right] \left[ \operatorname{ch}\left(\frac{2\alpha_{0y}y}{h}\right) - \operatorname{ch}(\alpha_{0y}) \right]}{(1 - \operatorname{ch}(\alpha_{0z}))(1 - \operatorname{ch}(\alpha_{0y}))}. \quad (5)$$

Аппроксимация (5) содержит масштабные параметры  $\alpha_{0z}, \alpha_{0y}$ , определяющие интервалы гиперболических функций, принятые для аппроксимации на прямоугольной области сечения. Дополнительный анализ и подбор их оптимальных значений будут выполнены ниже. Первоначально примем  $\alpha_{0z} = \alpha_{0y} = 1$ . Функции (3)–(5) удовлетворяют требуемому условию  $\bar{\varphi} = 0$  на внешнем контуре поперечного сечения.

Подставив напряжения (2) в условие равновесия для крутящего момента

$$M_t(x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} (\tau_{zx}^{(k)} y - \tau_{yx}^{(k)} z) dA,$$

получим физическое равенство

$$\kappa_x D_t = M_x, \quad (6)$$

записанное с использованием жесткости неоднородного сечения при кручении:

$$D_t = b h \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} y + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} z \right) dA. \quad (7)$$

В дальнейшем для упрощения записей обозначим  $D_t \rightarrow D$ .

При использовании аппроксимаций (3)–(5) жесткость принимает вид:

$$D_a = 8bh \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left[ \left( \frac{4z^2}{b^2} - 1 \right) \left( \frac{y}{h} \right)^2 + \left( \frac{4y^2}{h^2} - 1 \right) \left( \frac{z}{b} \right)^2 \right] dA, \quad (8)$$

$$D_t = \pi bh \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left[ \frac{y}{h} \cos \left( \frac{\pi z}{b} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{b} \right) + \frac{z}{b} \cos \left( \frac{\pi y}{h} \right) \sin \left( \frac{\pi z}{b} \right) \right] dA, \quad (9)$$

$$D_g = \frac{2bh}{(1 - \text{ch}(1))^2} \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left\{ \frac{y}{h} \text{sh} \left( \frac{2y}{h} \right) \left[ \text{ch} \left( \frac{2z}{b} \right) - \text{ch}(1) \right] + \frac{z}{b} \text{sh} \left( \frac{2z}{b} \right) \left[ \text{ch} \left( \frac{2y}{h} \right) - \text{ch}(1) \right] \right\} dA. \quad (10)$$

Касательные напряжения (2) при учете (6), (7) определяются формулами:

$$\tau_{xy}^{(k)} = \frac{G_k M_t}{\sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} y + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} z \right) dA} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}, \quad \tau_{xz}^{(k)} = - \frac{G_k M_t}{\sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} y + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} z \right) dA} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}. \quad (11)$$

В знаменателях формул (11) присутствует посылонная сумма, согласно (7), равная величине удельной жесткости сечения:

$$\bar{D} = \frac{D}{bh} = \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left( \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} y + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} z \right) dA.$$

С учетом трех аппроксимаций (3)–(5) получим:

$$\tau_{zx,a}^{(k)} = \frac{8G_k M_t}{h \bar{D}_a} \left( \frac{4z^2}{b^2} - 1 \right) \frac{y}{h}, \quad \tau_{yx,a}^{(k)} = - \frac{8G_k M_t}{b \bar{D}_a} \left( \frac{4y^2}{h^2} - 1 \right) \frac{z}{b}, \quad (12)$$

$$\tau_{zx,t}^{(k)} = \frac{\pi G_k M_t}{h \bar{D}_t} \cos \left( \frac{\pi z}{b} \right) \sin \left( \frac{\pi y}{h} \right), \quad (13)$$

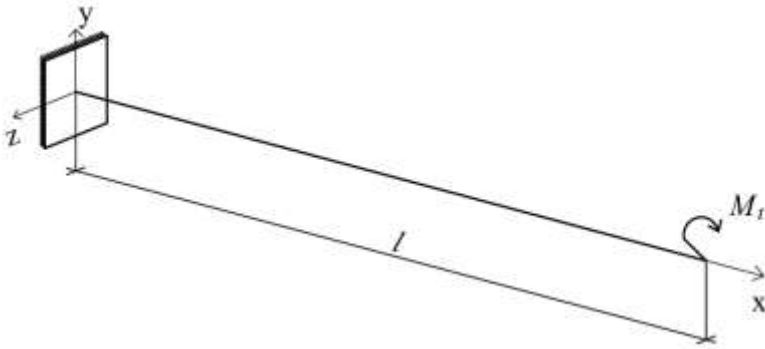
$$\tau_{yx,t}^{(k)} = - \frac{\pi G_k M_t}{b \bar{D}_t} \sin \left( \frac{\pi z}{b} \right) \cos \left( \frac{\pi y}{h} \right),$$

$$\tau_{zx,g}^{(k)} = \frac{2G_k M_t}{h \bar{D}_g} \left[ \text{ch} \left( \frac{2z}{b} \right) - \text{ch}(1) \right] \frac{\text{sh}(2y/h)}{(1 - \text{ch}(1))^2}, \quad (14)$$

$$\tau_{yx,g}^{(k)} = - \frac{2G_k M_t}{b \bar{D}_g} \left[ \text{ch} \left( \frac{2y}{h} \right) - \text{ch}(1) \right] \frac{\text{sh}(2z/b)}{(1 - \text{ch}(1))^2}.$$

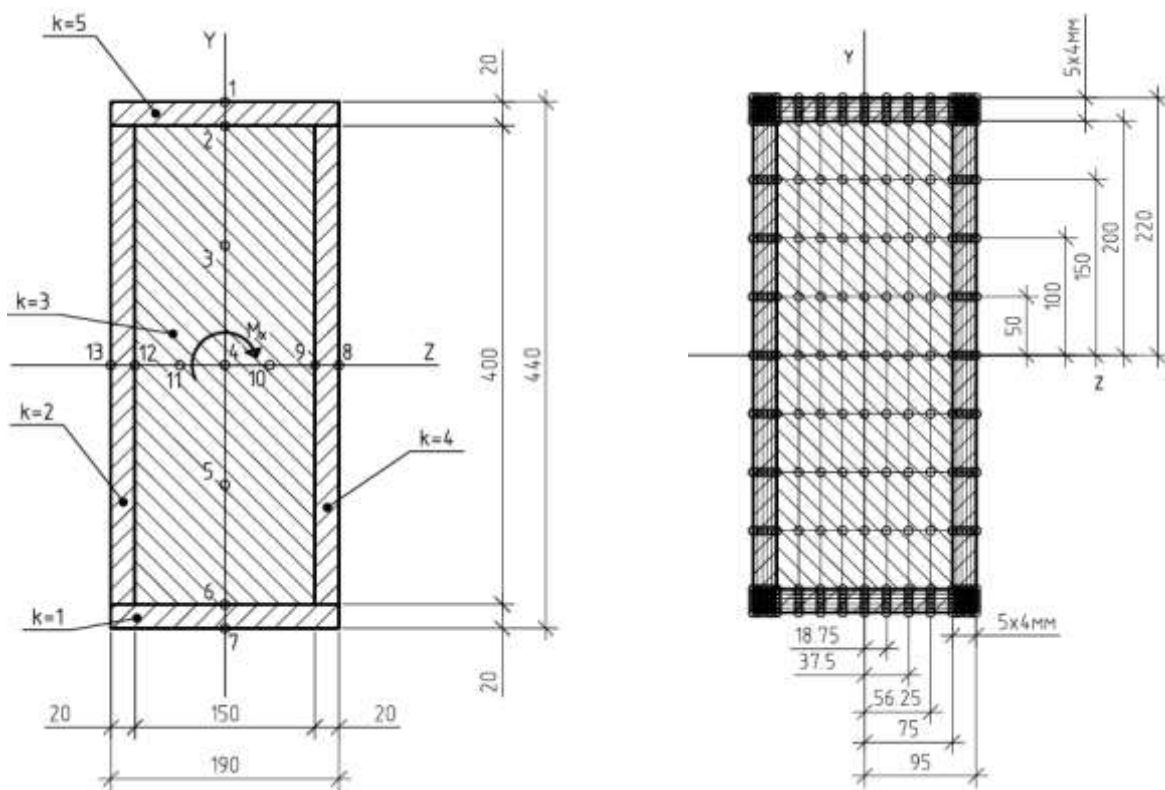
**Расчет по методу конечных элементов.** Численное решение задачи о кручении неоднородного стержня выполним по двум программным комплексам – «SCAD» и «Ansys», основанным на методе конечных элементов.

На рис. 1 показан составной стержень длиной  $l = 6$  м, нагруженный моментом  $M_t = 20$  кН·м в плоскости торцевого сечения. Прямоугольное поперечное сечение (рис. 2) имеет внутреннюю область ( $k = 3$ ) размерами  $150 \times 400$  мм из древесины сосны и четыре наружных слоя ( $k = 1, 2, 4, 5$ ) толщиной 20 мм из асботекстолита. В сечении назначены расчетные точки для вычисления касательных напряжений в плоскости  $zOy$ .



**Рис. 1.** Расчетная схема структурно неоднородного стержня

Расчеты выполнены в линейной постановке (определяющие уравнения на основе закона Гука для изотропных материалов, линейные геометрические соотношения). Соединение пяти структурных элементов друг с другом – идеальное без проскальзывания.



**Рис. 2.** Поперечное сечение составного стержня с расчетными точками

В программе «SCAD» создана КЭ-модель стержня (рис. 3). Модель составлена из восьмиузловых изопараметрических КЭ (тип 36), имеющих по три степени свободы в каждом узле – поступательные перемещения вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Для аппроксимации полей перемещений внутри КЭ применены дробно-рациональные функции. Общее количество узлов в модели – 22021, элементов – 19440. В продольном направлении сетка содержала 60 элементов. Разбивка в поперечном направлении в плоскости  $zOy$  представлена на рис. 3.

Рассмотрено два способа приложения крутящего момента на правом конце. В первом из них момент создается двумя парами, действующими в плоскости торцевого сечения с приложением сил  $F = 31,75$  кН в серединах длинных и коротких сторон прямоугольника. Во втором способе момент прикладывается к торцу стержня через жесткую диафрагму с применением инструмента «твердое тело». Левое торцевое сечение в обоих способах жестко закреплено.

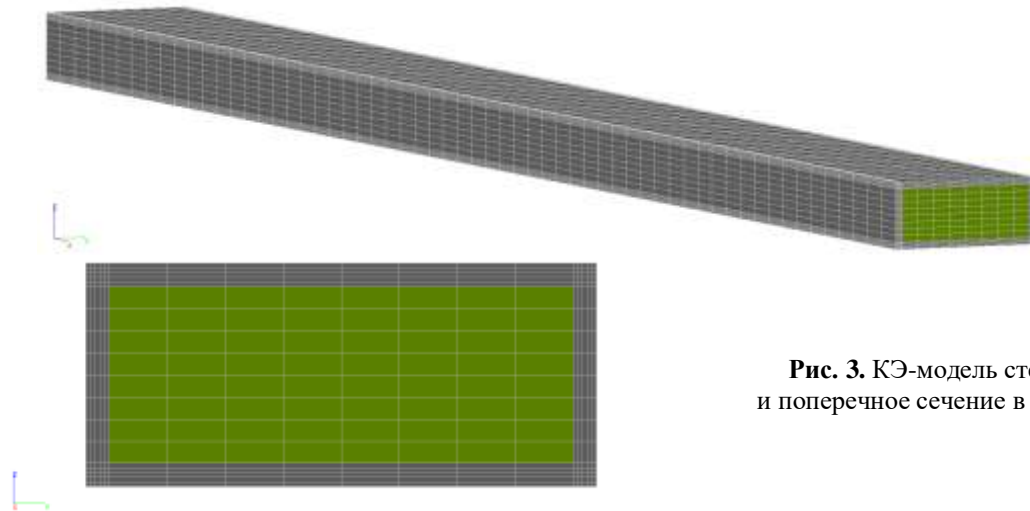


Рис. 3. КЭ-модель стержня и поперечное сечение в «SCAD»

На рис. 4 показана модель стержня в программном комплексе «Ansys». Использован КЭ в форме 20-узлового гексаэдра – «SOLID 186» с тремя степени свободы в каждом узле – поступательные перемещения вдоль осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Общее количество узлов в «Ansys» – 979113, общее количество элементов – 231840. Разбивка в поперечном направлении представлена на рис. 4. Аппроксимация полей внутри КЭ описывается неполными кубическими полиномами.

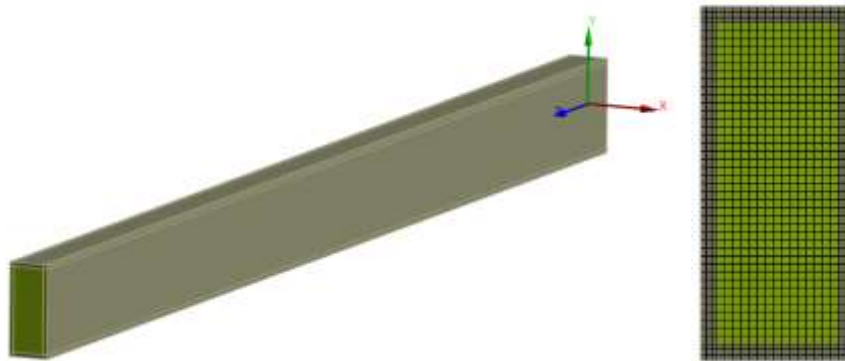


Рис. 4. КЭ-модель стержня в «Ansys»

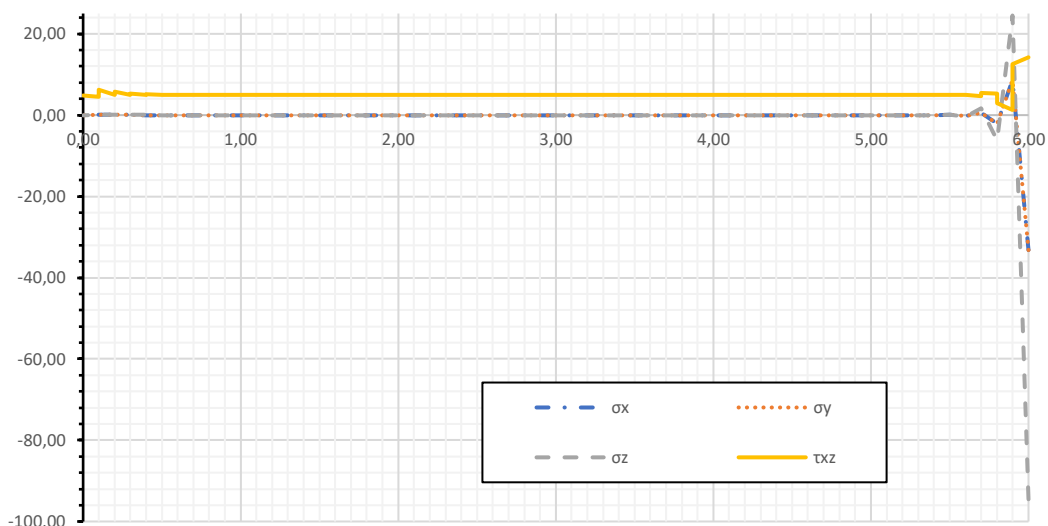
Крутящий момент приложен в центре жесткости левого торцевого сечения, а жесткое закрепление – на правом конце.

Результаты КЭ-расчета представлены на рис. 5–8. В частности, на рис. 5 приведены графики функций напряжений  $\tau_{zx}^{(k)}$ ,  $\sigma_x^{(k)}$ ,  $\sigma_y^{(k)}$ ,  $\sigma_z^{(k)}$  в зависимости от координаты  $x$  при  $z = 0$ ,  $y = h/2$  – середина короткой грани. А на рис. 6 –  $\tau_{yx}^{(k)}$ ,  $\sigma_x^{(k)}$ ,  $\sigma_y^{(k)}$ ,  $\sigma_z^{(k)}$  в зависимости от  $x$  при  $y = 0$ ,  $z = b/2$  – середина длинной грани. Графики иллюстрируют зоны краевого эффекта на концах КЭ-модели стержня, обусловленные стесненностью деформации.

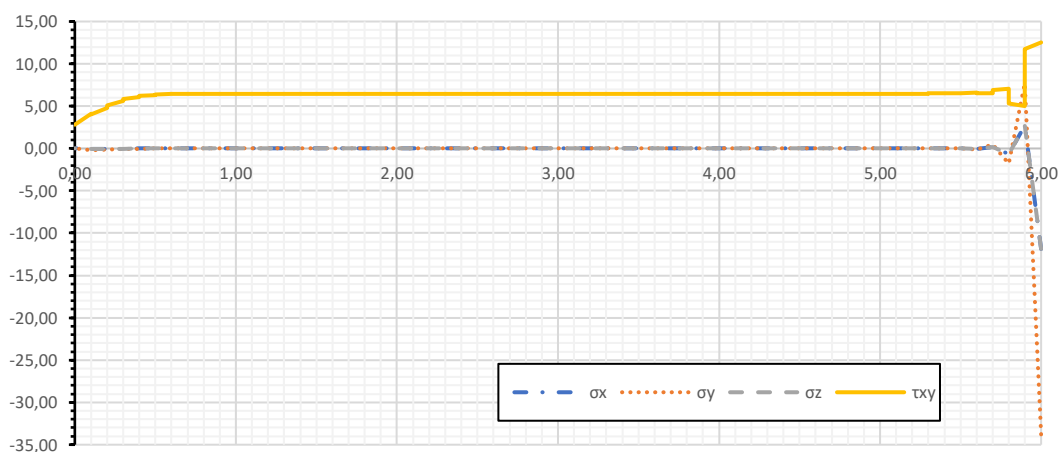
В программе «SCAD» при задании внешнего момента в виде пар сил (способ 1) наблюдается бóльший размер зоны краевого эффекта глубиной  $\Delta x \sim 0,9h$  с наличием всех компонент пространственного напряженного состояния, в том числе  $\sigma_j^{(k)} \neq 0$  ( $j \in [x, y, z]$ ). Использование инструмента «твердое тело» приводило к снижению глубина зоны до  $\Delta x \sim 0,2h$ .

В основной части стержня, согласно принципу Сен-Венана, краевые эффекты не наблюдались. Однородное по продольной координате напряженное состояние характеризуется наличием компонент

$$\tau_{zx}^{(k)}(x, y, z) = \text{const}_x, \quad \tau_{yx}^{(k)}(x, y, z) = \text{const}_x, \quad \sigma_j^{(k)} = 0 \quad (j \in [x, y, z]).$$

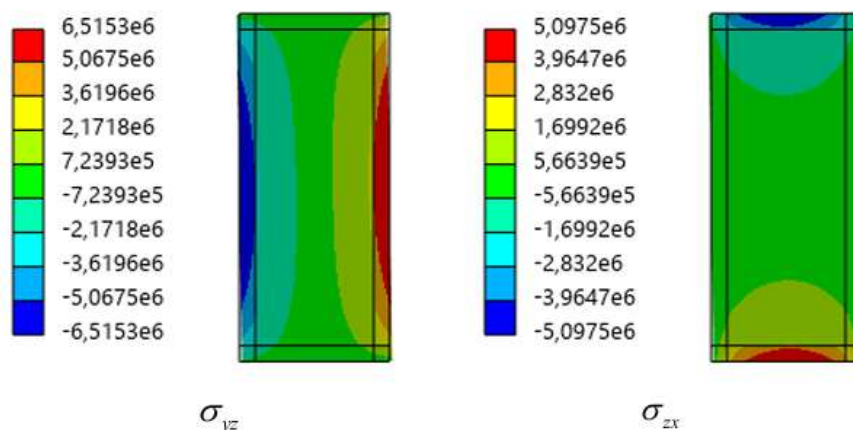


**Рис. 5.** «SCAD». Компоненты напряжений при  $z = 0, y = h/2$ , МПа:  
горизонтальная ось – координата  $x$ , м; вертикальная ось – напряжения, МПа

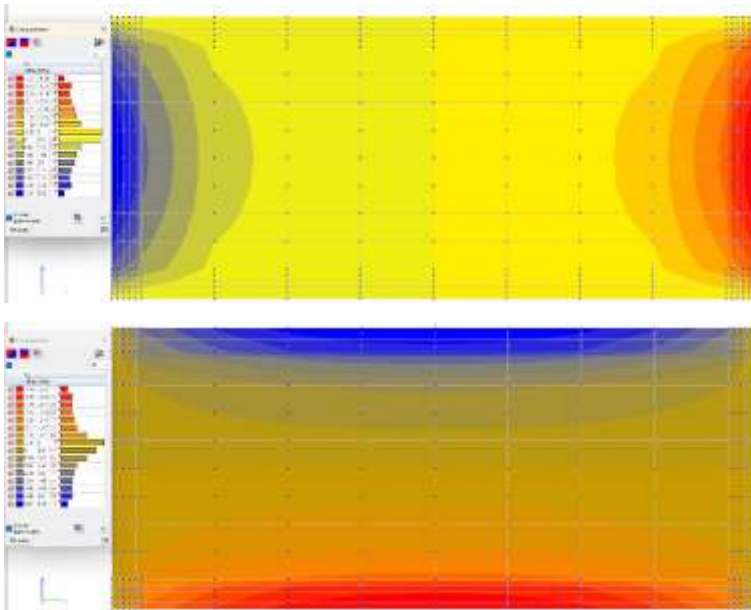


**Рис. 6.** «SCAD». Компоненты напряжений при  $y = 0, z = b/2$ , МПа:  
горизонтальная ось – координата  $x$ , м; вертикальная ось – напряжения, МПа

На рис. 7, 8 представлены поля напряжений в поперечных сечениях основной части стержня.



**Рис. 7.** «Ansys». Поля касательных напряжений в плоскости сечения, Па.  
Соответствие обозначений:  $\sigma_{zx} \rightarrow \tau_{zx}, \sigma_{yz} \rightarrow \tau_{yx}$



**Рис. 8.** «SCAD».  
Поля касательных напряжений  
 $\tau_{zx}^{(k)}$ ,  $\tau_{yx}^{(k)}$  в плоскости сечения, МПа

Наибольшие по модулю значения касательных напряжений, действующих в серединах короткой и длинной сторон поперечного сечения, в программе «Ansys» составляют  $\tau_{xz}^{(k)} = 5,098$  МПа,  $\tau_{xy}^{(k)} = 6,515$  МПа соответственно, в программе «SCAD» –  $\tau_{xz}^{(k)} = 5,019$  МПа,  $\tau_{xy}^{(k)} = 6,479$  МПа. Расхождение между результатами расчета напряжений по двум программам составляет 1,53 и 0,55 % соответственно. С практической точки зрения их можно считать незначительными. Далее для оценки результатов аналитических расчетов будем использовать результаты «SCAD»-расчета.

**Анализ результатов аналитического расчета.** Для расчета напряженного состояния по аналитической методике в табл. 1 приведены геометрические параметры структурных элементов составного сечения.

Таблица 1

Геометрические параметры структурных элементов составного сечения

$k$	$b_k(y)$ , м	$h_k(z)$ , м	$y_k$ , м	$y_{k+1}$ , м	$z_k$ , м	$z_{k+1}$ , м
1	0,19	0,02	-0,22	-0,20	-0,095	0,095
2	0,02	0,40	-0,20	0,20	-0,095	-0,075
3	0,15	0,40	-0,20	0,20	-0,075	0,075
4	0,02	0,40	-0,20	0,20	0,075	0,095
5	0,19	0,02	0,20	0,22	-0,095	0,095

По формулам (8)–(10) определена жесткостная характеристика при кручении по трем аппроксимациям для каждого структурного элемента и для всего сечения в целом. Результаты сведены в табл. 2.

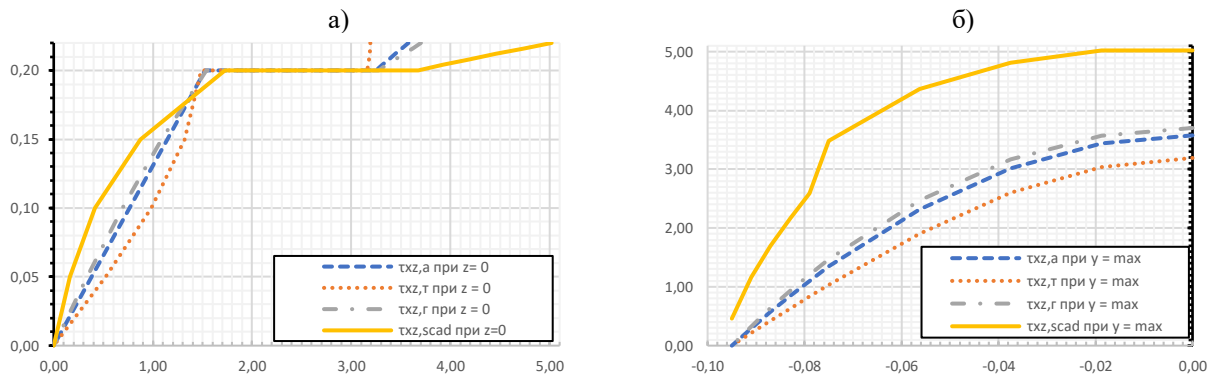
Таблица 2

Жесткостные характеристики при кручении (8)–(10)

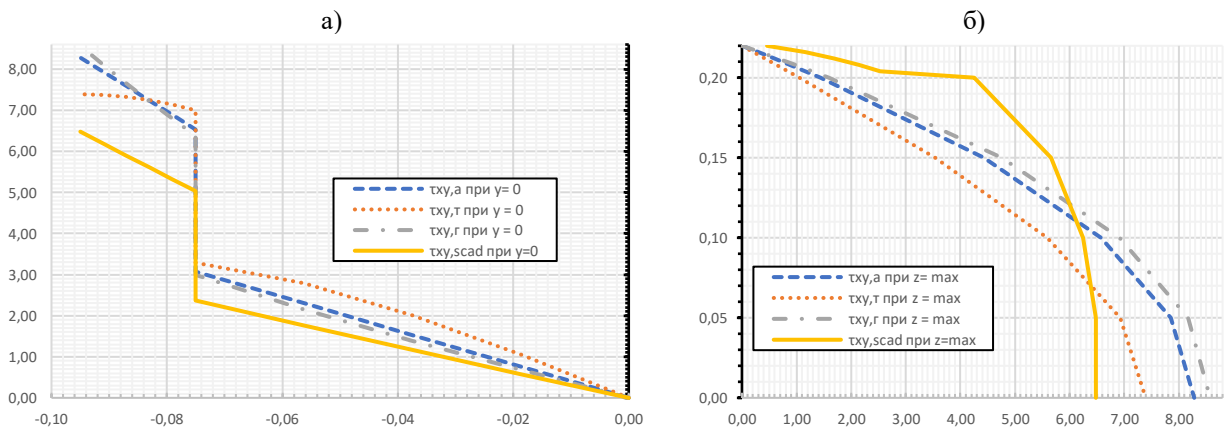
$k$	Материал	$G_k$ , МПа	$10^7 D_a$	$10^7 D_i$	$10^7 D_g$
1	АСБ	7143	3,46	2,71	3,75
2	АСБ	7143	7,28	5,99	7,76
3	Д	3356	14,8	14,6	14,9
4	АСБ	7143	7,28	5,99	7,76
5	АСБ	7143	3,46	2,71	3,75
$\Sigma$			<b>36,3</b>	<b>32,0</b>	<b>38,0</b>

На рис. 9 показаны эпюры касательных напряжений  $\tau_{zx}^{(k)}$ , найденные по формулам (12)–(14). В частности, на рис. 9а – эпюры напряжений  $\tau_{zx}^{(k)}(y)$  на линии  $z = 0$  (ось  $y$ ), а на рис. 9б – эпюры  $\tau_{zx}^{(k)}(z)$  на линии  $y = \max$  (верхняя грань). Рис. 10 содержит эпюры касательных напряжений  $\tau_{yx}^{(k)}$  (12), (13), (14). На схеме (а) – эпюры напряжений  $\tau_{yx}^{(k)}(z)$  на линии  $y = 0$  (ось  $z$ ), а на схеме (б) –  $\tau_{yx}^{(k)}(y)$  на линии  $z = \max$  (правая боковая грань).

По соображениям симметрии результаты показаны для четвертой сечения. Для сравнения на графиках приведены результаты соответствующих касательных напряжений КЭ-расчета по «SCAD».



**Рис. 9.** Сравнение  $\tau_{xz}$ , МПа, полученных аналитическим путем (а, т, г) и решением по «SCAD»: а) эпюры напряжений при  $z = 0$  (ось  $y$ ): вертикальная ось – координата  $y$ , м; горизонтальная ось – напряжения, МПа; б) эпюры напряжений при  $y = h/2$  (верхняя грань): вертикальная ось – напряжения, МПа; горизонтальная ось –  $b$  сечения, м



**Рис. 10.** «SCAD». Сравнение  $\tau_{xz}$ , МПа, полученных аналитическим путем (а, т, г) и решением по «SCAD»: а) эпюры напряжений при  $y = 0$  (ось  $z$ ): вертикальная ось – напряжения, МПа; горизонтальная ось – координата  $z$ , м; б) эпюры напряжений при  $z = b/2$  (правая боковая грань): вертикальная ось – координата  $y$ , м; горизонтальная ось – напряжения, МПа

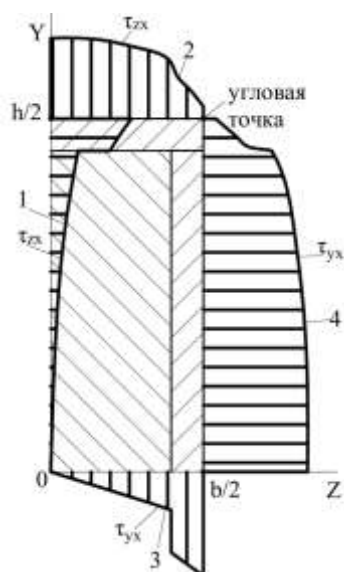
Анализ полученных распределений напряжений позволяет сделать следующие выводы.

а) тригонометрическая аппроксимация мембранной функции дает значительные отклонения от КЭ-расчета, составляющие для напряжений в серединах длинных и коротких сторон поперечного сечения:  $\delta = 14,08\%$  для  $\tau_{yx}^{(k)}$  и  $\delta = -36,41\%$  для  $\tau_{zx}^{(k)}$ . Кроме этого, форма эпюр для данной аппроксимации имеет направление выпуклости, не соответствующее численному расчету;

б) алгебраическая аппроксимация также характеризуется выпуклостью эпюр, не соответствующей численным расчетам, но в меньшей степени;

в) гиперболическое представление мембранной функции качественно правильно отражает распределение касательных напряжений, но погрешность их в серединах длинной и короткой сторон составляет:  $\delta = 32,31\%$  для  $\tau_{yx}^{(k)}$  и  $\delta = -26,25\%$  для  $\tau_{zx}^{(k)}$ . Это также является значительным, но данная модель (5) имеет два свободных параметра  $\alpha_{0y}$ ,  $\alpha_{0z}$ , которые могут быть использованы для повышения точности аналитических расчетов;

г) в угловых точках поперечных сечений при отсутствии нагрузки на боковых поверхностях стержня получены нулевые теоретические напряжения. Численный расчет дал в этих точках и на всех четырех продольных ребрах стержня ненулевые касательные напряжения, достигающие 8% от максимальных (рис. 11). Это эффект объясняется сингулярностью внешнего контура сечения. Данная особенность исследовалась в слоистых структурах аналитически в [13], в работах [14, 15] была получена численно при изгибе неоднородного стержня в угловых точках двутаврового поперечного сечения. Кроме того, на напряженное состояние оказывает влияние и сингулярность внутренней межслойной границы. Если стержень выполнить однородным, то напряжение в наружной угловой точке снижается до 6% от максимума, что свидетельствует об усилении краевых эффектов в неоднородных структурах по сравнению с однородными. Причина этого заключается в том, что здесь, кроме фактора *геометрической сингулярности*, присутствует и фактор *физической сингулярности*, проявляющийся в разрывности функции модуля сдвига  $G_k(y, z)$ . В результате во внутренних областях стержня вдоль четырех его продольных ребер формируются *продольные зоны краевых эффектов* с возмущенным напряженным состоянием. Наличие их сказывается и на напряжениях на поверхности стержня (рис. 11).



**Рис. 11.** Распределение касательных напряжений на контуре сечения и на осях симметрии (по результатам «SCAD»-расчета); первая координатная четверть поперечного сечения:  
1 –  $\tau_{zx}(y)$  при  $z = 0$ ; 2 –  $\tau_{zx}(z)$  при  $y = h/2$ ;  
3 –  $\tau_{yx}(z)$  при  $y = 0$ ; 4 –  $\tau_{yx}(y)$  при  $z = b/2$

Качественно лучшие результаты аналитических расчетов получены на основе гиперболической аппроксимации (5). Для дополнительного улучшения ее точности исследуем влияние параметров  $\alpha_{0z}$ ,  $\alpha_{0y}$ .

**Повышение точности гиперболической аппроксимации.** Масштабные параметры  $\alpha_{0z}$ ,  $\alpha_{0y}$  в (5), определяющие интервалы функции для аппроксимации мембраны на прямоугольной области сечения, подчиним условию связи

$$\alpha_{0z} \cdot \alpha_{0y} = 1.$$

Один из параметров ( $\alpha_{0z}$ ) поставим в зависимость от отношения сторон прямоугольного сечения:

$$\alpha_{0z} = \left(\frac{b}{h}\right)^p,$$

где  $p \geq 0$  – параметр модели, регулирующий значения масштабных параметров. В случае принятия  $p = 0$  получаем вышерассмотренный случай при  $\alpha_{0z} = \alpha_{0y} = 1$ .

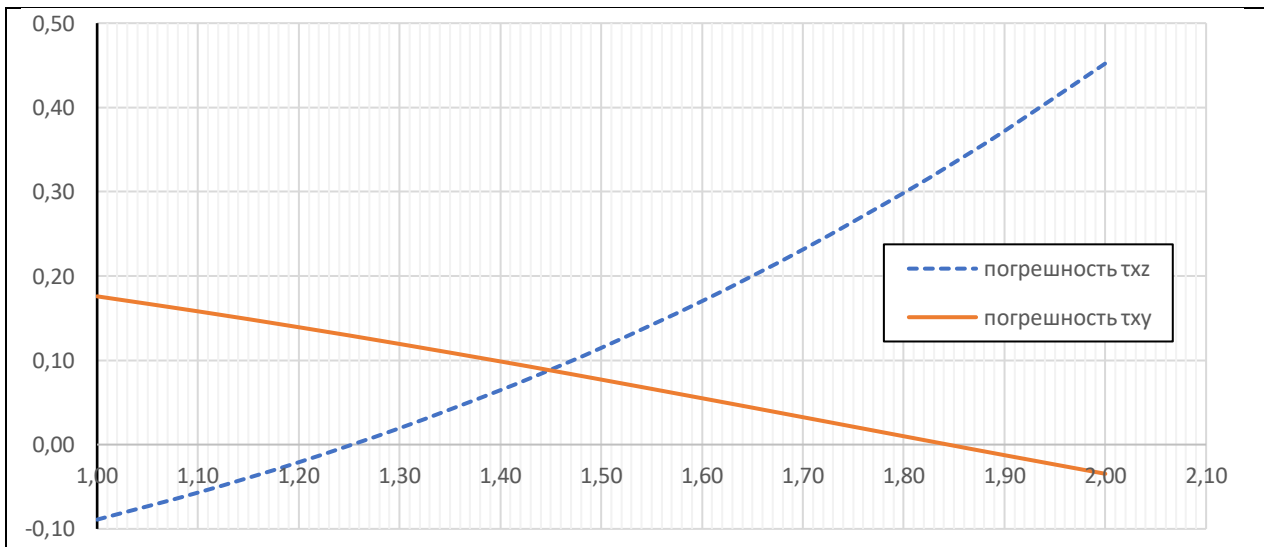
Тогда (5), (14) принимают следующий вид:

$$\bar{D} = \frac{2}{(1 - \text{ch}(\alpha_{0z}))(1 - \text{ch}(\alpha_{0y}))} \sum_{k=1}^s G_k \iint_{A_k} \left\{ \frac{y}{h} \alpha_{0y} \text{sh}\left(\frac{2\alpha_{0y}y}{h}\right) \left[ \cosh\left(\frac{2\alpha_{0z}z}{b}\right) - \text{ch}(\alpha_{0z}) \right] + \frac{z}{b} \alpha_{0z} \text{sh}\left(\frac{2\alpha_{0z}z}{b}\right) \left[ \cosh\left(\frac{2\alpha_{0y}y}{h}\right) - \text{ch}(\alpha_{0y}) \right] \right\} dA, \quad (15)$$

$$\tau_{zx,g}^{(k)} = \frac{2G_k M_t}{h D_g} \frac{\alpha_{0y} \text{sh}\left(\frac{2\alpha_{0y}y}{h}\right) \left[ \text{ch}\left(\frac{2\alpha_{0z}z}{b}\right) - \text{ch}(\alpha_{0z}) \right]}{(1 - \text{ch}(\alpha_{0z}))(1 - \text{ch}(\alpha_{0y}))}, \quad (16)$$

$$\tau_{yx,g}^{(k)} = -\frac{2G_k M_t}{b D_g} \frac{\alpha_{0z} \text{sh}\left(\frac{2\alpha_{0z}z}{b}\right) \left[ \text{ch}\left(\frac{2\alpha_{0y}y}{h}\right) - \text{ch}(\alpha_{0y}) \right]}{(1 - \text{ch}(\alpha_{0z}))(1 - \text{ch}(\alpha_{0y}))}.$$

По результатам расчетов напряжений  $\tau_{zx,g}^{(k)}, \tau_{yx,g}^{(k)}$ , найденных с использованием (15) и (16), на рис. 12 показаны графики относительных погрешностей  $\delta(p)$  максимальных напряжений, действующих в серединах короткой и длинной сторон поперечного сечения, по отношению к КЭ-расчету.



**Рис. 12.** Графики погрешностей аналитических максимальных напряжений (16), действующих в серединах короткой и длинной сторон поперечного сечения в зависимости от параметра  $p$ . Сравнение с решением методом конечных элементов: вертикальная ось – относительная погрешность, горизонтальная ось – параметр  $p$

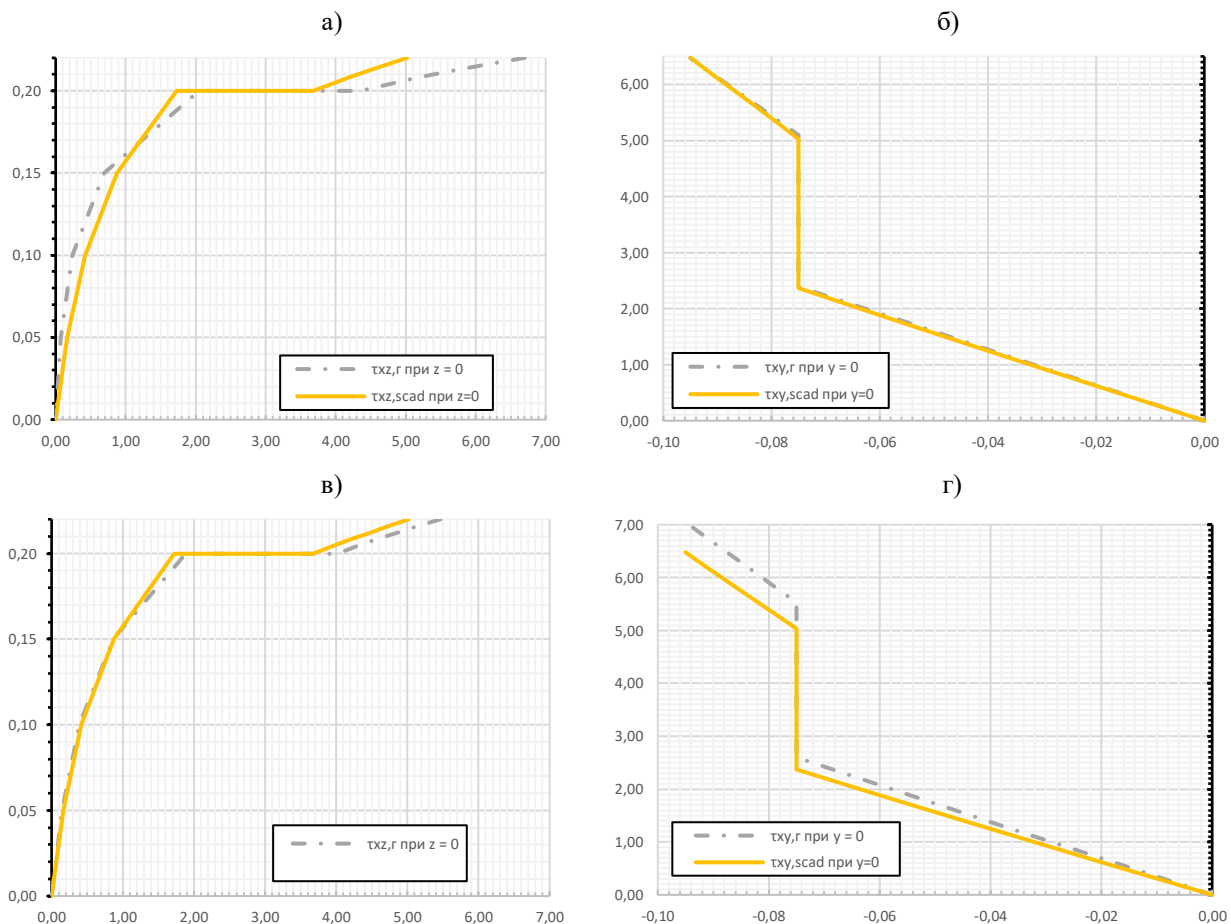
Графики погрешностей, построенные в расчетном интервале для параметра  $p \in [1, 2]$ , позволяют сделать следующие выводы:

а) функции погрешностей двух напряжений имеют монотонный характер, причем погрешность напряжения  $\tau_{zx}^{(k)}$  является возрастающей, а погрешность  $\tau_{yx}^{(k)}$  – убывающей. В расчетном интервале содержатся не совпадающие друг с другом точки с нулевыми погрешностями данных напряжений;

б) при росте параметра в интервале  $p \in [1; 1,25]$  модули погрешностей обоих напряжений уменьшаются. Аналогичное их снижение происходит и с уменьшением параметра в интервале  $p \in [1,85; 2,0]$ . Отсюда вытекает возможность сокращения области искомых значений параметра до  $p \in [1,25; 1,85]$ ;

в) найденная область значений  $p \in [1,25; 1,85]$  является областью *Парето-оптимальных решений*, характеризуемая тем, что любое варьирование параметра  $p$  с целью уменьшения одной из погрешностей неизбежно приводит к увеличению другой погрешности.

С учетом сказанного для назначения оптимального значения параметра  $p$  должны привлекаться дополнительные соображения. Например, принятие граничных точек интервала Парето-решений, для которых одно из напряжений становится близким к условно точному. Во-вторых, может быть принято равенство погрешностей двух напряжений – точка  $p = 1,45$ .



**Рис. 13.** Сравнение напряжений, полученных на основе гиперболической функции, с параметром  $p$  и «SCAD»-решением:

а), в)  $\tau_{zx}^{(k)}$ ,  $z = 0$  (ось  $y$ ), вертикальная ось – координата  $y$ , м, горизонтальная ось – напряжения, МПа;

б), г)  $\tau_{yx}^{(k)}$ ,  $y = 0$  (ось  $z$ ), вертикальная ось – напряжения, МПа, горизонтальная ось – координата  $z$ , м;

а), б)  $p = 1,85$ ; в), г)  $p = 1,45$

С учетом данных соображений по формулам (16) выполнен ряд расчетов напряжений  $\tau_{zx}^{(k)}$ ,  $\tau_{yx}^{(k)}$  при различных значениях  $p$ , результаты которых показаны на рис. 13. В частности, на схемах (а), (б) – напряжения при  $p = 1,85$  (правая граница Парето-области), а на (в), (г) – при  $p = 1,45$  (точка равных погрешностей).

Приведенные на рис. 13 эпюры подтверждают возможность регулирования точности гиперболической модели путем изменения параметра  $p$ . В частности, принятие значения  $p = 1,45$  дает погрешности максимальных напряжений в точках середин сторон сечения, равные  $\delta = 8,9\%$  для  $\tau_{zx}^{(k)}$  и  $\delta = 8,8\%$  для  $\tau_{yx}^{(k)}$ .

### Выводы

1. Из трех рассмотренных аппроксимаций мембранной функции худшими результатами характеризуется тригонометрическая функция. Она обладает меньшей точностью и дает направление выпуклости эпюры напряжений, не соответствующее численным расчетам.

2. Качественно и количественно лучшие результаты дает форма, основанная на аппроксимации мембранной функции гиперболическим косинусом. Варьирование в ней дополнительного масштабного параметра позволило установить для него область Парето-оптимальных решений с погрешностями максимальных напряжений до 8–9%. Одним из оптимальных значений параметра  $p$  в данной области является точка пересечения графиков погрешностей максимальных напряжений при  $p = 1,45$ . Также с точки зрения повышения достоверности отражения максимальных напряжений может быть рекомендовано увеличение параметра в направлении границ Парето-интервала.

3. Предложенная гиперболическая аппроксимация мембранной функции позволяет выполнить аналитический расчет компонент касательных напряжений в неоднородном стержне прямоугольного сечения с приемлемой точностью и не высокой вычислительной трудоемкостью.

### Библиографический список

1. Нурибетов А. У. Полупространственная теория кручения композиционного слоистого стержня произвольного сечения // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2010. № 1. С. 26–35.
2. Нурибетов А. У. Напряженно-деформированное состояние слоистых композиционных стержней и лопаток при кручении // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2015. № 1. С. 59–66.
3. Турусов Р. А., Андреев В. И., Цыбин Н. Ю. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. 2017. № 4. С. 34–42.
4. Миронов Б. Г., Миронов Ю. Б. Кручение неоднородного цилиндрического стержня с эллиптическим сечением // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2018. № 3 (37). С. 173–177.
5. Анарова Ш. А., Шокиров Д. А., Исмоилов Ш. М. Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней // *Проблемы вычислительной и прикладной математики*. 2022. № 4 (42). С. 54–78.
6. Горбачев В. И., Мельник Т. М. О постановке задач в общей теории Бернулли — Эйлера неоднородных анизотропных стержней // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2018. № 1. С. 43–52.
7. Горбачев В. И., Олехова Л. В. Эффективные свойства неоднородного стержня при кручении // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2007. № 5. С. 41–48.

8. Чепурненко А. С., Тюрина В. С. Применение метода конечных элементов в сочетании с методом контактного слоя для определения напряженно-деформированного состояния многослойных балок // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 4. С. 130–139.
9. Бакушев С. В. Предельная нагрузка при кручении многослойного неоднородного стержня из упругопластического материала // Эффективные строительные конструкции: теория и практика: сб. ст. XXV Междунар. науч.-техн. конф., Пенза, 27–28 марта 2025 года. Пенза: НОО «Приволжский Дом знаний», 2025. С. 7–14. DOI: 10.58841/9785835618330\_7.
10. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1975. 576 с.
11. Мищенко А. В. Методы расчета и рационального проектирования структурно неоднородных стержней: монография. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2025. 144 с.
12. Mishchenko A. V. Spatially Structure Spatial Problem of the Stressed-Deformed State of a Structural Inhomogeneous Rod // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. No. 953 (1). 012004. DOI: 10.1088/1757-899X/953/1/012004.
13. Андреев В. И., Цыбин Н. Ю., Турусов Р. А. Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухслойной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. № 14 (3). С. 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.
14. Мищенко А. В., Калинин С. А. Численный анализ температурных полей и напряженно-деформированного состояния слоисто-неоднородных стержней при стационарном тепловом воздействии // Известия вузов. Строительство. 2019. № 9. С. 19–38. DOI: 10.32683/0536-1052-2019-729-9-19-32.
15. Мищенко А. В., Калинин С. А. Напряженное состояние слоисто-неоднородных стержней при стационарном тепловом воздействии // Труды НГАСУ. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2017. Т. 20, № 2 (65). С. 29–42.

#### References

1. Nurimbetov A. U. Half-spatial theory of torsion of a composite layered bar of arbitrary cross-section. Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions. 2010. No. 1. Pp. 26–35.
2. Nurimbetov A. U. Stress-strain state of layered composite bars and blades under torsion. Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions. 2015. No. 1. Pp. 59–66.
3. Turusov R. A., Andreev V. I., Tsybin N. Yu. General solution of the bending problem of a multilayer beam in fourier series. Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions. 2017. No. 4. Pp. 34–42.
4. Mironov B. G., Mironov Yu. B. Torsion of a non-uniform cylindrical rod with elliptical cross-section. Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Limit State Mechanics. 2018. No. 3 (37). Pp. 173–177.
5. Anarova Sh. A., Shokirov D. A., Ismoilov Sh. M. Current state and statement of the problem of studying three-layer rods. Problems of Computational and Applied Mathematics. 2022. No. 4 (42). Pp. 54–78.
6. Gorbachev V. I., Melnik T. M. On the statement of problems in the general bernoulli-euler theory of non-uniform anisotropic rods. Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 2018. No. 1. Pp. 43–52.
7. Gorbachev V. I., Olekhova L. V. Effective properties of a non-uniform rod under torsion. Bulletin of Moscow University. Series 1: Mathematics. Mechanics. 2007. No. 5. Pp. 41–48.
8. Chepurnenko A. S., Tyurina V. S. Application of the finite element method in combination with the contact layer method to determine the stress-strain state of multilayer beams. Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. 2023. No. 4. Pp. 130–139.
9. Bakushev S. V. Ultimate torsional load of a multilayer non-uniform rod made of elastic-plastic material. Effective building structures: theory and practice: collection of articles. XXV Int.

Sci.-Tech. Conf., Penza, March 27–28, 2025. Penza: NPO "Privolzhsky House of Knowledge". 2025. Pp. 7–14. DOI: 10.58841/9785835618330\_7.

10. Timoshenko S. P., Goodier J. Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, 1975. 576 p.

11. Mishchenko A. V. Methods of Calculation and Rational Design of Structurally Heterogeneous Rods: Monograph. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin), 2025. 144 p.

12. Mishchenko A. V. Spatially structure spatial problem of the stressed-deformed state of a structural inhomogeneous rod. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. No. 953 (1). 012004. DOI: 10.1088/1757-899X/953/1/012004.

13. Andreev V. I., Tsybin N. Yu., Turusov R. A. Analysis of the edge effect of shear stresses in a two-layer beam. Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions. 2018. No. 14 (3). Pp. 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.

14. Mishchenko A. V., Kalinkin S. A. Numerical analysis of temperature fields and stress-strain state of layered-heterogeneous rods under steady-state thermal action. News of Universities. Construction. 2019. No. 9. Pp. 19–38. DOI: 10.32683/0536-1052-2019-729-9-19-32.

15. Mishchenko A. V., Kalinkin S. A. Stress state of layered-heterogeneous rods under steady-state thermal action. Proceedings of NGASU. Novosibirsk: NGASU (Sibstrin). 2017. Vol. 20. No. 2 (65). Pp. 29–42.

## STRESS STATE OF A PRISMATIC COMPOSITE INHOMOGENEOUS ROD UNDER TORSION

F. S. Volkov<sup>1</sup>, A. V. Mishchenko<sup>2</sup>, Yu. A. Gerber<sup>3</sup>

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin)<sup>1,2,3</sup>  
Russia, Novosibirsk

Novosibirsk Higher Military Command School Order of Zhukov<sup>2</sup>  
Russia, Novosibirsk

---

<sup>1</sup> MA Student of Institute of Construction, tel.: +7(913)370-07-31, e-mail: f.volkov@sibstrin.ru

<sup>2</sup> Dr. of Technical Sciences, Head of the Dept. of General Professional Disciplines,

Prof. of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(383)266-33-80, e-mail: mishchenko.av59@yandex.ru

<sup>3</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Prof. of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(905)959-40-12, e-mail: yu.gerber@sibstrin.ru

---

This paper examines a method for constructing an analytical solution to the torsion problem of a composite inhomogeneous rod of rectangular cross-section. Tangential stresses are determined using the Prandtl stress function in combination with the membrane analogy. Algebraic, trigonometric, and hyperbolic approximations are used for the stress function. The results of the analytical calculations are compared with numerical finite element calculations using SCAD and Ansys programs. It is shown that the hyperbolic approximation makes it possible to construct a solution of acceptable accuracy.

**Keywords:** structurally inhomogeneous rod, spatial rod, torsional stiffness, Prandtl stress function, membrane analogy, Pareto domain, torsional stresses.

УДК 624.04:531.391.3

DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.004

## ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ЧЕТЫРЕХГРАННОЙ БАШНИ

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>, О. В. Грибова<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «МЭИ»<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

<sup>2</sup> Ст. преп. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: gribovaov@mail.ru

Предлагается схема статически определимой регулярной фермы башенного типа. Осесимметричная ферма опирается на восемь вертикальных стоек. Предполагается узловая нагрузка сосредоточенными силами. Для вывода формулы зависимости основной частоты собственных колебаний от числа панелей предлагается вариант упрощенного метода Донкерлея. Масса конструкции сосредоточена в ее узлах. В расчете жесткости фермы используется формула Максвелла – Мора. Сравнение результатов аналитического решения с численным устанавливает точность предлагаемого подхода. Аналитические преобразования выполняются в системе символьной математики «Maple» с использованием метода индуктивного обобщения по результатам расчетов последовательности ферм различного порядка. Показано, что зависимость точности предлагаемого метода от числа панелей имеет экстремум.

**Ключевые слова:** пространственная ферма, собственная частота, метод Донкерлея, «Maple», метод индукции, формула Максвелла – Мора.

**Введение.** Для расчета частот собственных колебаний инженерных конструкций на практике, как правило, используют специализированные численные прикладные компьютерные программы, в основе которых лежит метод конечных элементов [1, 2]. Значительно реже расчеты ведутся для упрощенных моделей конструкций в аналитической форме [3–5]. Известны также приближенные методы вычисления первой частоты по методу Донкерлея (оценка снизу) и методу Рэлея (оценка сверху) [6, 7]. В этом случае возможны и аналитические расчеты несложных конструкций. Если же ферма регулярная и в ее схеме можно выделить периодическую структуру, то с использованием метода индукции по числу периодических элементов, например панелей или отдельных групп стержней, такие конструкции допускают аналитические решения.

Главное достоинство аналитических решений, полученных для произвольного порядка сооружения, – это возможность практически без потери точности рассчитывать сложные сооружения периодической структуры с большим или весьма большим числом элементов. Аналитические методы особенно эффективны по времени и точности в расчетах пространственных конструкций, для традиционного расчета которых требуется большие вычислительные мощности [8, 9]. Для вывода основных формул расчета регулярных конструкций используется метод индукции с применением системы символьной математики [10, 11]. С использованием этого метода и приближенных оценок Донкерлея и Рэлея в [12] найдена первая частота колебаний простой плоской статически определимой фермы с треугольной решеткой. Формулы для расчета статического прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей в системе компьютерной математики «Maple» методом индукции выполнены в [13]. Возможность резонанса регулярной фермы исследована в [14]. Вероятно, единственной альтернативой этому подходу может быть аналитический метод расчета статики

и динамики строительных конструкций с применением рядов и специальных функций [15, 16]. Упрощенный метод Донкерлея, дающий большую точность, чем исходный метод Донкерлея, использован в [17] для вывода формулы зависимости основной собственной частоты колебаний плоской фермы от числа панелей. В предлагаемом ниже расчете этот метод применяется для пространственной стержневой конструкции регулярного типа.

**Конструкция башни.** Предлагается схема башенной осесимметричной фермы с идеальными шарнирами. Всего в ферме  $n_s = 24n + 27$  стержней, включая одиннадцать опорных стержней, восемь из которых – вертикальные стойки, а три вместе с вертикальными стойками образуют сферический (узел 7) и цилиндрический (узел 3) шарниры. Одиннадцать опорных стержней принимаются недеформированными, при вычислении деформаций их длины не имеют значения. Общая высота фермы  $(n + 2)h$  (рис. 1, 2). Купол из восьми стержней имеет высоту  $2h$ .

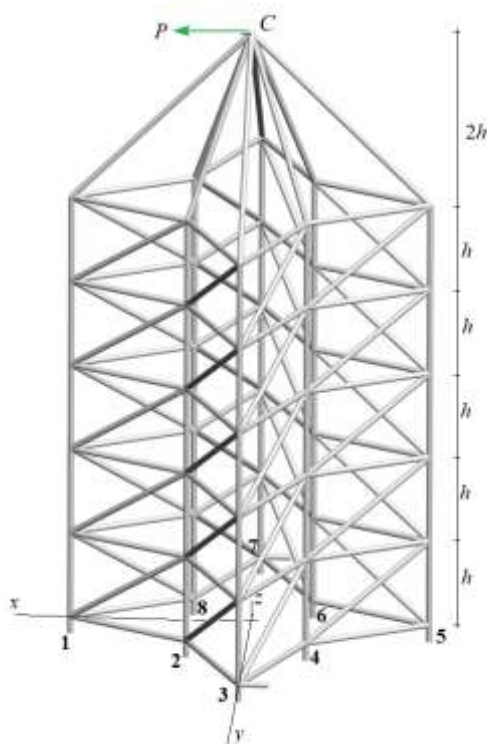


Рис. 1. Схема конструкции башни,  $n = 5$

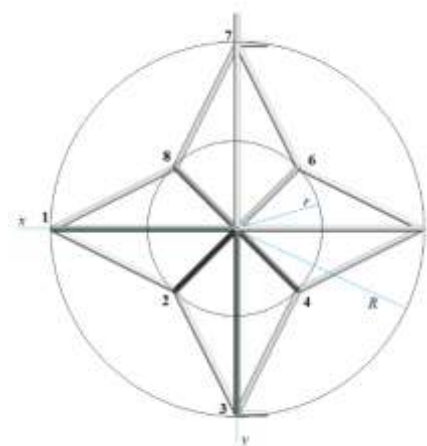


Рис. 2. Схема фермы в проекции на плоскость  $x$ - $y$

Принимается, что масса фермы равномерно распределена по всем  $K = 8n + 9$  узлам. Масса каждого узла равна  $m$ .

**Расчет усилий в стержнях.** Расчет усилий, необходимых для определения жесткости конструкции, выполняется в символьной форме на основе решения системы уравнений равновесия узлов конструкции. Матрица системы линейных уравнений равновесия состоит из направляющих косинусов усилий. Эти величины определяются по программе расчета координат узлов и данных о порядке соединения стержней в узлах. Все узлы фермы и стержни нумеруются. Фрагмент программы расчета координат в цикле по высоте конструкции ( $j = 1, \dots, n + 1$ ) на языке системы «Maple» [18] имеет вид:

```
> R:=3*a: r:=a*sqrt(2):
> for j to n+1 do
> for i to 4 do
> f1:=evalf(Pi/2*(i-1)):
> f2:=evalf(f+Pi/4):
```

```

> k:=8*(j-1):
> x[2*i-1+k]:=R*cos(f1):y[2*i-1+k]:=R*sin(f1):z[2*i-1+k]:=j*h:
> x[2*i+k]:=r*cos(f2): y[2*i+k]:=r*sin(f2): z[2*i+k]:=j*h:
> end: end:

```

Уравнение равновесия узлов записывается в матричной форме:  $\mathbf{GS} = \mathbf{P}$ , где  $\mathbf{P}$  – вектор правой части, задающий узловые нагрузки;  $\mathbf{G}$  – симметричная матрица, элементы которой есть направляющие косинусы. Матрица имеет размеры  $n_s \times n_s$ ,  $\mathbf{S}$  – вектор неизвестных усилий в стержнях длиной  $n_s$ . В это число неизвестных включены усилия в стойках и три горизонтальные опорные реакции в углах 3 и 7. Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  рассчитываются по данным о координатах концов стержней конструкции.

### Оценка первой частоты собственных колебаний

**Колебания по оси x.** Расчет первой собственной частоты  $\omega_*$  выполняется по формуле, предложенной в [17, 18]:

$$\omega_*^{-2} = m\delta^{\max}K / 2, \quad (1)$$

где  $\delta^{\max}$  – максимальная по всем узлам фермы величина прогиба  $\delta_p$ ,  $p = 1, \dots, K$  от действия вертикальной единичной силы на один из узлов фермы.

В первоначальном методе Донкерлея, определяющем нижнюю оценку частоты колебаний, вычисление включает в себя сумму смещений по *всем* узлам:

$$\omega_*^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p.$$

Однако если при численной реализации метода это почти не влияет на скорость вычислений, то суммирование в символьной форме, как правило, создает трудности и значительно увеличивает время вывода формулы, а также усложняет итоговую формулу. Помимо чисто вычислительных проблем здесь также появляется вопрос о выборе узла с максимальным смещением, которое входит в формулу (1). В данном случае выбор этой точки достаточно очевиден. Это узел в вершине  $C$  башни. Прогиб рассчитывается с помощью формулы Максвелла суммированием по всем усилиям в деформируемых стержнях конструкции:

$$\delta^{\max} = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_{\alpha}^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где  $S_{\alpha}$  – усилие в стержне  $\alpha$  при действии на выбранный узел единичной вертикальной силы;  $l_{\alpha}$  – длина этого стержня;  $\nu = n_s - 11$ . Жесткость  $EF$  всех стержней принимается одинаковой.

Расчет сумм  $\delta_n^{\max}$  в (2) для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \delta_1^{\max} &= (90\sqrt{5}a^3 + 8b^3 + 9g^3 + 59h^3 + 9d^3) / (36a^2EF), \\ \delta_2^{\max} &= (135\sqrt{5}a^3 + 8b^3 + 9g^3 + 100h^3 + 18d^3) / (36a^2EF), \\ \delta_3^{\max} &= (180\sqrt{5}a^3 + 8b^3 + 9g^3 + 141h^3 + 27d^3) / (36a^2EF), \\ \delta_4^{\max} &= (225\sqrt{5}a^3 + 8b^3 + 9g^3 + 200h^3 + 36d^3) / (36a^2EF), \\ \delta_5^{\max} &= (270\sqrt{5}a^3 + 8b^3 + 9g^3 + 295h^3 + 45d^3) / (36a^2EF), \dots \end{aligned}$$

где обозначено  $d = \sqrt{5a^2 + h^2}$ ,  $g = \sqrt{2a^2 + 4h^2}$ ,  $b = \sqrt{9a^2 + 4h^2}$ . Чтобы определить общие зависимости  $\delta_n^{\max}$  от числа панелей, требуется проанализировать не менее десяти ферм различного порядка. В результате решения линейных однородных рекуррентных уравнений, выведенных оператором `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` системы «Maple» [19], дают искомую формулу:

$$\delta_n^{\max} = \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 g^3 + C_4 h^3 + C_5 d^3}{a^2 EF}, \quad (3)$$

где коэффициенты имеют полиномиальный по числу панелей вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= 5\sqrt{5}(n+1)/4, \quad C_2 = 2/9, \\ C_3 &= 1/4, \quad C_4 = n(3n^2 - 18n + 74)/36, \quad C_5 = n/4. \end{aligned} \quad (4)$$

Окончательно, согласно (1), (3), расчетная формула для определения нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея имеет вид:

$$\omega_D = a \sqrt{\frac{2EF}{m(8n+9)(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 g^3 + C_4 h^3 + C_5 d^3)}}. \quad (5)$$

**Численное решение.** Для расчета приняты размеры панели фермы:  $a = 1$  м,  $h = 3$  м и  $h = 5$  м. Материал стержней – сталь с модулем упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, площадь поперечного сечения стержней  $F = 4$  см<sup>2</sup>, в узлах расположены массы  $m = 300$  кг. На рис. 3 кривые зависимости частот  $\omega_D$  от числа панелей по формуле (5) сопоставлены с первой частотой спектра  $\omega_1$ , полученной численно.

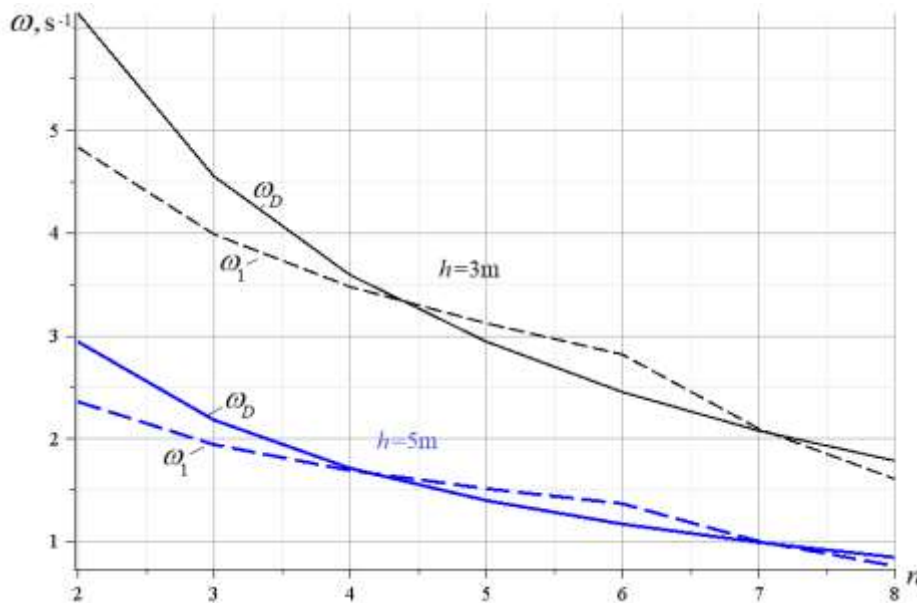


Рис. 3. Сравнение аналитического решения  $\omega_D$  с численным  $\omega_1$ . Колебания по оси  $x$

Численный расчет выполняется в предположении, что система имеет  $K$  степеней свободы, по числу узлов. Колебания узлов происходят в направлении оси  $x$ . Матрица, собственные числа которой дают частоты колебаний фермы, имеет элементы:

$$v_{i,j} = \sum_{k=1}^{\eta} S_i^k S_j^k l_k, \quad i, j = 1, 2, \dots, \eta.$$

Здесь  $S_i^k$  – усилие в стержне с номером  $k$  от единичной силы, приложенной к узлу  $i$  по выбранному направлению колебаний. Собственные числа матрицы находятся оператором Eigenvalues системы «Maple» [19].

Предложенный метод дает кривую  $\omega_D$ , расположенную выше или ниже кривой численного решения  $\omega_1$ , найденного численно с учетом всех степеней свободы, пересекающей ее несколько раз. Исходный же метод Донкерлея имеет меньшую точность. Кривая этого метода всегда ниже кривой точного решения. Таким образом, предложенный метод не только проще, но и точнее метода Донкерлея.

Для более точной оценки погрешностей метода вводится относительная величина:

$$\varepsilon = \left| \omega_1 - \omega_D \right| / \omega_1.$$

На рис. 4 представлена зависимость погрешности от числа панелей при  $a = 1$  м для различных значений высоты  $h$ .

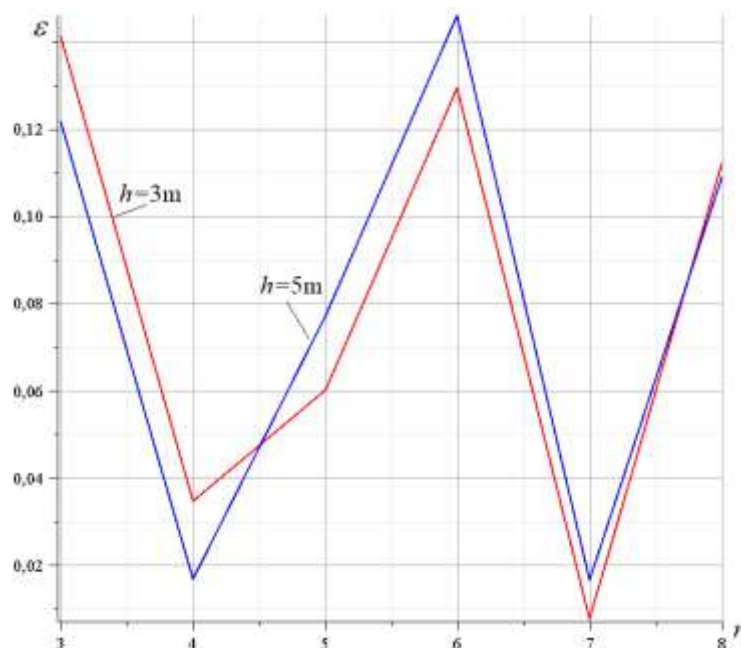


Рис. 4. Погрешность оценки основной частоты по Донкерлею  $\varepsilon$ . Колебания по оси  $x$

**Колебания по оси  $y$ .** Решение имеет ту же форму (5), но с коэффициентами

$$\begin{aligned} C_1 &= 5\sqrt{5}(n+3)/8, & C_2 &= 1/3, \\ C_3 &= 1/4, & C_4 &= n(3n^2 - 6n + 56)/24, & C_5 &= n/8. \end{aligned} \quad (6)$$

На рис. 5 даны зависимости первой частоты колебаний конструкции по оси  $y$ . Несмотря на кажущуюся осевую симметрию фермы, результаты расчетов частоты колебаний по осям  $x$  и  $y$  различны. Объясняется это креплением конструкции к основанию. Цилиндрический шарнир 3 (два стержня) и сферический 7 (три стержня) лежат на оси  $y$ . Кроме этого, интересно отметить наличие нескольких экстремумов на кривой зависимости точности аналитического расчета от числа панелей (рис. 6).

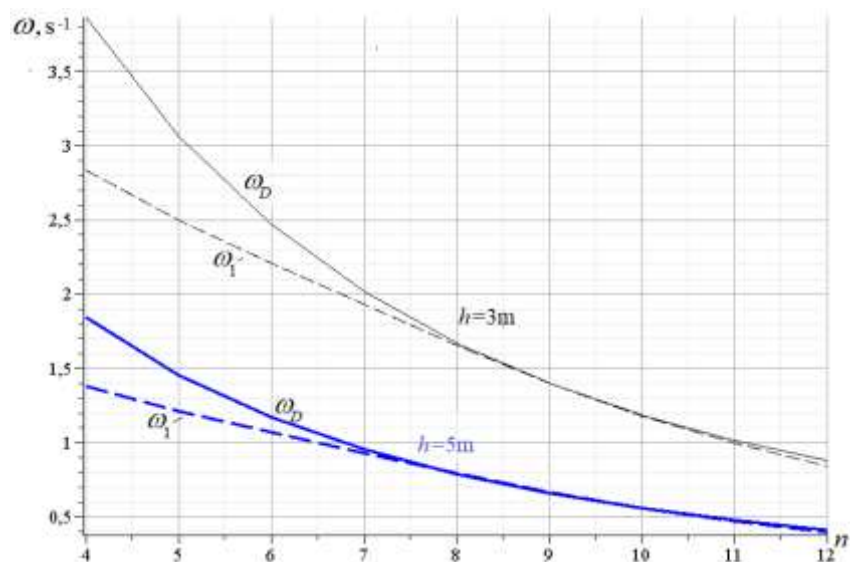


Рис. 5. Сравнение аналитического решения  $\omega_D$  с численным  $\omega_1$ . Колебания по оси  $y$

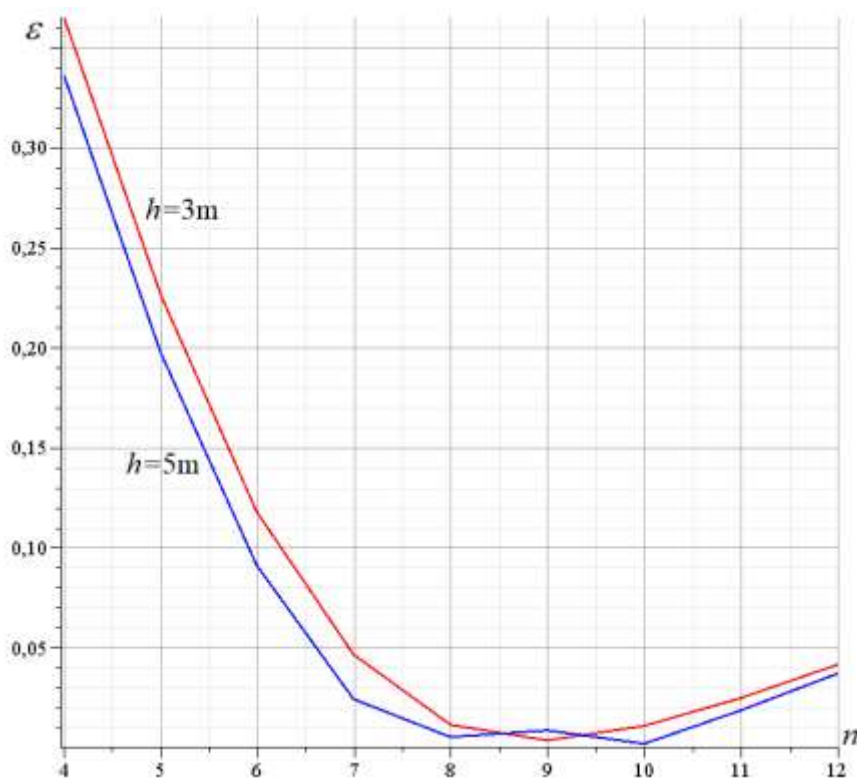


Рис. 6. Погрешность оценки основной частоты по Донкерлею  $\varepsilon$ . Колебания по оси  $y$

**Заключение.** Для новой схемы статически определимой пространственной модели шарнирно-стержневой конструкции башенного типа выведены формулы для оценки основной частоты собственных колебаний. Предложено упрощение метода Донкерлея с заменой суммы в расчетной формуле этого метода ее средним значением. Сравнение с численным решением, полученным с учетом всех степеней свободы принятой модели фермы, показало хорошую точность найденного решения. Замечена экстремально низкая погрешность предложенных решений при определенном числе панелей конструкции. Предложенный метод может быть применим и для других регулярных систем.

## Библиографический список

1. Bahoo R. Vibration analysis of laminated planar frame structures // *Journal of Sound and Vibration*. 2022. Vol. 526, 26. 116787. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116787>.
2. Игнатьев В. А., Игнатьев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: АСВ, 2022. 306 с.
3. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 4 (39). С. 27–34.
4. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. No. 111 (3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
5. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
6. Low K. H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. Vol. 42, no. 7. Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1.
7. Льюнг Конг Луан. Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4 (43). С. 42–53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004.
8. Астахов С. В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4 (43). С. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003.
9. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 35–45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004.
10. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. No. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
11. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. 2023. No. 29. Article No 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.
12. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 109. Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
13. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. № 2 (29). С. 29–37.
14. Luong C. L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024. No. 113. Article No 11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4.
15. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. No. 36. Pp. 137–141. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_15](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15).
16. Matrosov A. V., Goloskokov D. P. Analytical Solutions for Cylindrical Bending of Multilayered Orthotropic Plates // *Stability and Control Processes*. SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Proceedings. Springer, Cham, 2022. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-87966-2\\_94](https://doi.org/10.1007/978-3-030-87966-2_94).

17. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

18. Кирсанов М. Н. Методы аналитического расчета частоты собственных колебаний фермы пространственной консоли // *Вестник МГСУ*. 2026. № 21 (3). С. 315–322. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2026.3.315-322>.

19. Бердников Д. Ю., Голоскоков Д. П. Решение задач сопротивления материалов в среде компьютерной математики maple // *Транспорт: проблемы, идеи, перспективы: сб. тр. LXXXIV Всерос. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых*. СПб., 2024. С. 114–120.

#### References

1. Bachoo R. Vibration analysis of laminated planar frame structures // *Journal of Sound and Vibration*. 2022. Vol. 526. No. 26. 116787. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.116787>.

2. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p. (in Russian).

3. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss // *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). Pp. 27–34 (in Russian).

4. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. No. 111 (3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.

5. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency // *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002 (in Russian).

6. Low K. H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. V. 42. No. 7. Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1.

7. Luong C. L. Estimates of deflection and natural frequency of vibrations of a hinged-rod truss with an arbitrary number of panels // *Structural mechanics and structures*. 2024. No. 4 (43). Pp. 42–53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004.

8. Astakhov S. V. Analytical estimation of the deflection of a rod model of a hip roof frame // *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 4 (43). Pp. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003 (in Russian).

9. Komerzan E. V., Maslov A. N. Estimation of the L-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations // *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 2 (37). Pp. 35–45. (in Russian). DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004 (in Russian).

10. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. No. 101. Article No. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.

11. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. 2023. No. 29 Article No. 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.

12. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 109 Article No. 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

13. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels // *Structural Mechanics and Structures*, 2021. No. 2 (29). Pp. 29–30 (in Russian).

14. Luong C. L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024. No. 113. Article No 11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4.
15. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. No. 36. Pp. 137–141. [https://doi.org/10.18720/MPM.3612018\\_15](https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15).
16. Matrosov A. V., Goloskokov D. P. Analytical Solutions for Cylindrical Bending of Multilayered Orthotropic Plates // *Stability and Control Processes. SCP 2020. Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings / Smirnov, N., Golovkina, A. (eds). Springer, Cham, 2022. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-87966-2\\_94](https://doi.org/10.1007/978-3-030-87966-2_94).*
17. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 108. Article No. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.
18. Kirsanov M. N. Methods of analytical calculation of the natural vibration frequency of a spatial console truss // *Bulletin of MGSU*. 2026. No. 21 (3). Pp. 315–322. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2026.3.315-322> (in Russian).
19. Berdnikov D. Yu., Goloskokov D. P. Solving problems of strength of materials in the maple computer mathematics environment // *Transport: problems, ideas, prospects. Collection of works of the LXXXIV All-Russian scientific and technical conference of students, graduate students and young scientists. St. Petersburg, 2024. Pp. 114–120 (in Russian).*

## FORMULA FOR CALCULATING THE FIRST FREQUENCY TETHRADIAL TOWER NATURAL OSCILLATIONS

M. N. Kirsanov <sup>1</sup>, O. V. Gribova <sup>2</sup>

National Research University "MPEI" <sup>1,2</sup>  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup> Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof. of the Dept. of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

<sup>2</sup> Senior Lecturer of the Dept. of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: gribovaov@mail.ru

---

A design for a statically determinate regular tower-type truss is proposed. The axisymmetric truss is supported by eight vertical columns. A nodal load with concentrated forces is assumed. A simplified version of the Dunkerley method is proposed to derive a formula for the dependence of the fundamental frequency of natural vibrations on the number of panels. The mass of the structure is concentrated at its nodes. The Maxwell – Mohr formula is used to calculate the truss rigidity. The accuracy of the proposed approach is established by comparing the analytical and numerical results. Analytical transformations are performed in the Maple symbolic mathematics system using the inductive generalization method based on the calculation results for a sequence of trusses of varying orders. It is shown that the dependence of the proposed method's accuracy on a certain number of panels has an extremum.

**Keywords:** spatial truss, natural frequency, Dunkerley method, Maple, induction method, Maxwell – Mohr formula.

## МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ПАСПОРТА МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ИНТЕГРАЦИИ РАЗНОРОДНЫХ ДАННЫХ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ

Р. А. Турусов<sup>1</sup>, О. Р. Василькова<sup>2</sup>, А. А. Решетов<sup>3</sup>, А. Г. Черницов<sup>4</sup>, А. А. Коренной<sup>5</sup>

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет<sup>1,2,3,4</sup>

Россия, г. Москва

Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт»<sup>5</sup>

Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры сопротивления материалов, тел.: +7(499)183-43-29,  
e-mail: sopromat@mgsu.ru

<sup>2</sup> Аспирант кафедры сопротивления материалов, тел.: +7(917) 556-96-83, e-mail: vasilkova1994@list.ru

<sup>3</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры сопротивления материалов, тел.: +7(499)183-43-29,  
e-mail: sopromat@mgsu.ru

<sup>4</sup> Магистрант, тел.: +7(499)183-43-29, e-mail: sopromat@mgsu.ru

<sup>5</sup> Ведущий инженер, тел.: +7(499)196-71-00, e-mail: aa.korennoy@yandex.ru

Развитие цифровых технологий и информационных систем приводит к необходимости интеграции разнородных материаловедческих, технологических и расчётных данных, получаемых в ходе экспериментальных исследований, научных разработок, проектирования, производства. Эти данные формируются в различных источниках и зачастую имеют различную структуру, что затрудняет их совместное использование, сопоставление и включение в расчётные модели.

Предложена модель цифрового паспорта конструкционных материалов. Модель основана на иерархической структуре объектов (материал, экземпляр, проба, испытание, расчётный сценарий) и атрибутивном представлении свойств. В отличие от существующих баз данных материаловедения, в которых расчётные инструменты функционируют отдельно от хранилищ данных, предложенная архитектура обеспечивает непосредственную интеграцию расчётного модуля в структуру паспорта. Расчётный модуль представлен как библиотека моделей, включающая классическую теорию слоистых пластин (CLT), деформационную модель железобетона, модели фиброармированного бетона по остаточной прочности и реологические модели на основе коэффициента ползучести и функции податливости. Это позволяет вычислять эффективные упругие характеристики многослойных композиционных материалов и сохранять результаты как полноправные показатели свойств с метаданными провенанса. Разработанный подход обеспечивает унификацию представления данных о различных типах материалов, расширяемость структуры свойств без изменения схемы базы данных и прослеживаемость происхождения как экспериментальных, так и расчётных значений характеристик. Предложенная модель может быть использована при создании цифровых платформ и информационно-аналитических систем цифрового материаловедения.

**Ключевые слова:** цифровой паспорт материала, информационные системы, цифровое материаловедение, конструкционные материалы, расчётная модель, композиционные материалы, железобетон, фиброармированный бетон, ползучесть, интеграция данных, свойства материалов.

**Введение.** Современное развитие цифровых технологий существенно изменяет подходы к хранению, обработке и интерпретации научных данных [15, 16, 18]. В области материаловедения и строительной механики формируются значительные массивы информации, получаемые в результате лабораторных испытаний, технологических процессов, проектных расчётов, цифрового мониторинга и эксплуатации конструкций. Эти данные включают сведения о химическом составе, структуре, физических и механических свойствах, технологиях изготовления, а также о расчётных моделях, используемых для оценки работоспособности материала или конструкции.

В настоящее время материаловедческие данные формируются в различных источниках и часто хранятся в разрозненных базах данных и информационных системах. Различия в структуре данных, используемых параметрах и форматах представления затрудняют их интеграцию и совместное использование. Это ограничивает возможности комплексного анализа свойств материалов, разработки новых материалов и применения методов цифрового моделирования, а также прогнозирования свойств с помощью метода искусственного интеллекта.

В строительном материаловедении объектом паспортизации нередко является не только исходный материал, но и материал в составе изделия или конструктивного элемента. Поэтому в цифровом паспорте должны быть связаны сведения о составе, структуре, технологии производства, результатах испытаний, условиях среды, истории нагружения и расчётных допущениях [12]. Для части материалов достаточно универсального набора физико-механических параметров; для армированных бетонных композитов, включая железобетон и фиброармированный бетон, дополнительно существенны параметры арматуры, фибр, сцепления, трещинообразования, ползучести и усадки.

Целью настоящей работы является разработка модели цифрового паспорта конструкционных материалов, обеспечивающей интеграцию разнородных материаловедческих данных, расчётных параметров, условий изготовления и эксплуатации в информационных системах цифрового материаловедения [11].

**Требования к цифровому паспорту конструкционных материалов.** Цифровой паспорт должен обеспечивать структурированное представление информации о материале, его химическом составе, технологиях производства, свойствах, условиях применения, ограничениях, нормативной документации, версиях записей и истории изменений. Если свойства материала зависят от конфигурации изделия или элемента, паспорт должен дополнительно фиксировать геометрию сечения, армирование, фиброармирование, сцепление, трещиностойкость, длительную прочность, ползучесть, усадку, температурно-влажностные условия. При разработке модели цифрового паспорта необходимо учитывать следующие требования:

- модель должна обеспечивать унифицированное представление данных о различных типах материалов, включая металлы, сплавы, полимеры, слоистые и дисперсно-армированные композиты, бетоны, железобетонные и фиброармированные бетонные материалы, а также другие классы конструкционных материалов;
- структура цифрового паспорта должна поддерживать хранение разнородных данных, полученных в результате экспериментальных исследований, технологических процессов, расчётных сценариев, контроля качества, обследования конструкций и мониторинга эксплуатационного состояния;
- модель должна обладать расширяемостью, позволяя добавлять новые свойства и параметры материалов без изменения базовой структуры информационной системы;
- кроме того, цифровой паспорт должен обеспечивать связь между различными уровнями описания материала, включая сам материал, его экземпляры, пробы и результаты испытаний. Такая структура позволяет учитывать происхождение экспериментальных данных, корректно интерпретировать расчётные результаты и сопоставлять значения, полученные разными методами.

**Информационная модель цифрового паспорта материалов.** Для обеспечения интеграции разнородных материаловедческих данных предлагается использовать информационную модель цифрового паспорта материалов, основанную на иерархической структуре объектов и атрибутивной модели представления свойств [15].

Предлагаемая модель включает несколько уровней описания данных, отражающих жизненный цикл материала и процесс получения экспериментальных характеристик. Основными элементами модели являются объекты, указанные в табл. 1.

Такая структура позволяет учитывать особенности получения данных о материалах и обеспечивать корректную связь между объектом исследования и результатами испытаний.

Предложенная структура информационной модели позволяет формировать цифровые паспорта материалов, обеспечивающие хранение данных о составе, структуре, свойствах и применении материалов [11, 13]. Использование данной модели обеспечивает возможность интеграции разнородных материаловедческих данных, полученных в различных исследованиях и источниках, а также их последующего анализа в информационных системах цифрового материаловедения.

Таблица 1

Основные элементы модели

№	Обозначение массива	Назначение массива
1	Материалы	Сведения о материалах, включая химический состав, характеристики, свойства материала и связи с другими материалами, а также связь с владельцем данных
2	Экземпляры	Информация о конкретных формах или разновидностях материала (сортамент, полуфабрикат, форма поставки или выпуска)
3	Пробы	Данные об отдельных или типовых образцах (пробах) материала, отобранных для исследования свойств
4	Группы свойств	Описание условий проведения испытаний с целью определения свойств на конкретном или типовом образце
5	Свойства	Описание определяемых свойств материалов и связанных с ними статистических параметров
6	Показатели свойств	Конкретные значения свойств с учетом условий измерения и метода получения
7	Изделия	Информация о конкретных деталях или продуктах, которые изготавливаются из материала либо содержат данный материал, с привязкой к значениям показателей свойств
8	Группы изделий	Объединение изделий по функциональному или производственному признаку
9	Владельцы данных	Участники, владеющие или управляющие данными: предприятия, организации, научные коллективы или авторы исследований
10	Документация	Сведения о стандартах, технических условиях и иных нормативных документах, содержащих требования к свойствам материалов, методики определения показателей и информацию о применении материалов
11	Каталог файлов	Описание и метаданные прикрепленных файлов и документов, связанных с объектами информационной системы
12	Компоненты материала	Описание составляющих материала: цементное вяжущее, заполнители, вода, добавки, матрица, армирующие компоненты и их доли
13	Армирование	Параметры стержневой, канатной и предварительно напряжённой арматуры: класс, диаметр, площадь, шаг, защитный слой, схема расположения, анкеровка и сцепление
14	Фиброармирование	Характеристики фибр: тип, материал, длина, диаметр, отношение длины к диаметру, объёмная доля, ориентация, распределение, остаточные прочности
15	Реологические параметры	Данные о ползучести, усадке и релаксации: возраст нагружения, длительность, влажность, температура, приведённый размер сечения, функция податливости и коэффициент ползучести
16	Расчётные модели и сценарии	Описание выбранной модели, исходных параметров, граничных условий, истории нагружения, версии алгоритма и области применимости расчёта

Модель включает иерархическую структуру объектов, отражающих этапы формирования экспериментальных данных о материале. Использование такой структуры позволяет установить связь между материалом, условиями его получения, подготовкой проб и результатами испытаний.

Для реализации предложенной модели цифрового паспорта материалов используется реляционная структура базы данных, обеспечивающая хранение и управление информацией о материалах, их экземплярах, образцах и результатах испытаний. Основные сущности базы данных цифрового паспорта материалов приведены в табл. 2.

Таблица 2

## Основные сущности базы данных цифрового паспорта материалов

№	Сущность	Назначение
1	materials	Хранение информации о материалах
2	instances	Описание экземпляров материалов
3	samples	Данные об исследуемых образцах
4	tests	Информация о проведённых испытаниях
5	propcats	Категории свойств
6	propvalues	Значения свойств
7	products	Изделия, в которых используется материал
8	owners	Владельцы данных
9	documents	Нормативная документация
10	components	Составляющие материала и их количественные доли
11	reinforcements	Параметры стержневого и предварительно напряжённого армирования
12	fiber_systems	Параметры фиброармирования и остаточной прочности
13	creep_params	Параметры ползучести, усадки и релаксации
14	load_histories	Истории нагружения и длительности воздействий
15	environments	Температурно-влажностные условия твердения и эксплуатации
16	calculation_runs	Метаданные расчётных запусков и версий моделей

**Представление свойств материалов.** Свойства материалов в предлагаемой модели представлены в виде атрибутивной структуры, позволяющей хранить различные параметры материалов без изменения общей структуры базы данных.

Каждое свойство описывается набором параметров:

- наименование свойства;
- значение свойства;
- единица измерения;
- метод определения;
- условия проведения испытания.

Использование атрибутивной модели обеспечивает гибкость структуры цифрового паспорта и позволяет хранить данные о различных типах материалов, включая металлы, строительные материалы, полимеры, слоистые композиты, бетоны и армированные бетонные материалы.

Кроме того, свойства могут быть сгруппированы по категориям, отражающим характер исследуемых параметров. К основным категориям свойств относятся:

- химические свойства;
- структурные характеристики;
- механические свойства;
- физические свойства;
- технологические параметры;
- характеристики армирования и сцепления компонентов;
- характеристики фиброармирования и остаточной прочности;
- реологические свойства: ползучесть, усадка, релаксация;
- параметры среды и истории нагружения.

Такой подход позволяет использовать единое ядро паспорта для разных классов материалов, а предметные особенности – например, армирование, фиброармирование или реологические характеристики – описывать через расширяемые профили и расчётные связи.

Информационная модель цифрового паспорта материалов предполагает наличие иерархических связей между основными объектами системы. Такие связи обеспечивают логическую структуру данных и позволяют устанавливать взаимосвязь между материалом, его конкретными реализациями, экспериментальными образцами и результатами испытаний.

Основные иерархические связи между объектами модели представлены в табл. 3.

Таблица 3

Иерархические связи между основными объектами

Родительская сущность	Дочерняя сущность	Поле связи
Материал (materials)	Экземпляр (instances)	material_id
Экземпляр	Проба (samples)	instance_id
Проба	Группа свойств (tests)	sample_id
Группа свойств	Свойство (propcats)	test_id
Свойство	Показатель свойства (propvalues)	propcat_id
Показатель свойства	Изделие (products)	propvalue_id
Экземпляр	Группа изделий (prodcats)	instance_id
Материал	Компоненты материала (components)	material_id
Экземпляр	Система армирования (reinforcements)	instance_id
Экземпляр	Система фиброармирования (fiber systems)	instance_id
Группа свойств	Реологические параметры (creep_params)	test_id
Группа свойств	Условия среды (environments)	test_id

Такая структура отражает последовательность формирования данных о материале: от описания материала и его экземпляров до конкретных значений свойств, полученных в ходе экспериментальных исследований.

При этом в модели допускается возможность установления связей между объектами различных уровней иерархии. В частности, дочерние объекты могут иметь прямые ссылки на объекты более высокого уровня, что обеспечивает гибкость структуры данных и упрощает выполнение аналитических запросов.

**Расчётный модуль цифрового паспорта материала.** В рамках развития модели цифрового паспорта материалов, представленной в работе, предлагается расширение функциональности информационной системы за счёт внедрения расчётного модуля, обеспечивающего вычисление эффективных свойств материалов на основе хранимых данных.

Расчётный модуль предназначен для:

- определения эффективных механических характеристик однородных, ортотропных, слоистых и дисперсно-армированных материалов;
- расчётного описания элементов, в которых поведение материала связано с геометрией сечения, армированием, сцеплением компонентов и условиями среды;
- учёта длительных процессов ползучести, усадки, релаксации и температурно-влажностных воздействий;
- прогнозирования поведения материалов и изделий при различных условиях нагружения и эксплуатации.

Классическая теория слоистых пластин рассматривается как одна из ветвей расчётной библиотеки, применимая к многослойным композитам. Для иных классов материалов активируются соответствующие предметные модели, основанные на их собственных параметрах и допущениях.

Расчётный модуль реализуется как отдельный программный компонент, взаимодействующий с базой данных цифрового паспорта материалов посредством прикладного интерфейса.

#### **Архитектура системы цифрового паспорта материала с расчётным модулем**

**Общая архитектура системы.** Информационная система цифрового паспорта материалов с интегрированным расчётным модулем реализуется на основе трёхуровневой архитектуры, включающей:

- уровень хранения данных (база данных);
- уровень прикладной логики (API и расчётный модуль);
- пользовательский уровень (интерфейс взаимодействия).

Такая архитектура обеспечивает разделение ответственности компонентов системы, масштабируемость и возможность независимого развития отдельных модулей.

**Математическая модель расчётного модуля.** Расчётный модуль цифрового паспорта материала предназначен для определения физико-механических, прочностных, деформационных и реологических характеристик материалов и элементов на основе данных, содержащихся в информационной системе [12]. В отличие от простого хранения экспериментальных значений, расчётный модуль позволяет получать производные характеристики с использованием уравнений механики деформируемого твёрдого тела, сопротивления материалов, моделей композиционных материалов и реологических моделей длительного деформирования [1–8, 15].

В общем виде расчётная модель связывает данные о составе, структуре, геометрии, армировании, условиях нагружения, времени и свойствах компонентов материала с определяемыми эффективными характеристиками:

$$\mathbf{Y} = F(\mathbf{X}, \mathbf{P}, \mathbf{L}, \mathbf{B}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{Y}$  – вектор рассчитываемых характеристик материала;  $\mathbf{X}$  – структурные параметры материала;  $\mathbf{P}$  – свойства компонентов или слоёв;  $\mathbf{L}$  – параметры внешнего нагружения;  $\mathbf{B}$  – граничные условия и условия закрепления.

К рассчитываемым характеристикам могут относиться эффективный модуль упругости, модуль сдвига, коэффициент Пуассона, напряжения, деформации, прогибы, кривизны, коэффициенты запаса прочности, остаточные прочности фиброармированного бетона, коэффициент ползучести, функция податливости, усадочные деформации и предельные эксплуатационные параметры материала или элемента.

В основе расчётного модуля лежит система уравнений механики деформируемого твёрдого тела. Для малых деформаций рассматривается тело, занимающее область  $\Omega$ , граница которого обозначается через  $\Gamma$ . Основными неизвестными являются перемещения, деформации и напряжения.

Зададим для начала вектор перемещений:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \quad (2)$$

а после запишем явный вид тензора малых деформаций, через ранее введённые перемещения:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (3)$$

или же в компонентной форме:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций;  $u_i$  – компоненты вектора перемещений.

Уравнения равновесия в объёмной области имеют вид  $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$ , где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{b}$  – вектор объёмных сил [1]. А в компонентной форме:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + b_i = 0. \quad (5)$$

Связь между напряжениями и деформациями для линейно-упругого материала задаётся обобщённым законом Гука  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$ , который также можно записать в матричной форме:  $\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$ , где  $[C]$  – матрица жёсткости материала [3].

Для изотропного материала связь напряжений и деформаций может быть записана через параметры Ламе:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + 2G\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (6)$$

где  $\lambda$  и  $G$  – параметры Ламе;  $G$  – модуль сдвига. Модуль сдвига же определяется через модуль упругости и коэффициент Пуассона:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (7)$$

Также используется выражение для объёмного модуля упругости:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (8)$$

Эти зависимости позволяют алгоритму расчётного модуля автоматически дополнять недостающие механические параметры материала, если в цифровом паспорте заданы модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Для корректного расчёта должны быть заданы граничные условия. На части границы  $\Gamma_u$  задаются перемещения:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (9)$$

На части границы  $\Gamma_t$  задаются поверхностные усилия:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t, \quad (10)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности;  $\bar{\mathbf{t}}$  – заданный вектор поверхностной нагрузки.

Для инженерных расчётов в цифровом паспорте может использоваться упрощённая модель сопротивления материалов, позволяющая рассчитывать напряжения, деформации и прогибы элементов, изготовленных из заданного материала.

При одноосном растяжении или сжатии нормальное напряжение определяется выражением:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (11)$$

где  $N$  – продольная сила;  $A$  – площадь поперечного сечения [2].

Относительная продольная деформация:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (12)$$

Связь напряжения и деформации при линейно-упругом поведении задаётся законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (13)$$

Отсюда удлинение стержневого элемента:

$$\Delta l = \frac{Nl_0}{EA}. \quad (14)$$

При кручении круглого стержня касательное напряжение определяется как:

$$\tau = \frac{Tr}{J_p}, \quad (15)$$

где  $T$  – крутящий момент;  $r$  – расстояние от центра сечения;  $J_p$  – полярный момент инерции.

Угол закручивания:

$$\varphi = \frac{Tl}{GJ_p}. \quad (16)$$

При изгибе нормальные напряжения определяются по формуле Навье:

$$\sigma_x = \frac{My}{I}, \quad (17)$$

где  $M$  – изгибающий момент;  $y$  – расстояние от нейтральной оси;  $I$  – момент инерции сечения.

Касательные напряжения при поперечном изгибе могут быть рассчитаны по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{QS}{Ib}, \quad (18)$$

где  $Q$  – поперечная сила;  $S$  – статический момент отсечённой части сечения;  $b$  – ширина сечения на рассматриваемом уровне.

Прогиб балки при изгибе определяется дифференциальным уравнением упругой линии:

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = M(x), \quad (19)$$

где  $w(x)$  – прогиб балки.

Более точная форма уравнения изгиба может быть записана как:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) = q(x), \quad (20)$$

где  $q(x)$  – распределённая нагрузка.

Данный набор зависимостей позволяет использовать данные цифрового паспорта материала для расчёта поведения изделий и конструктивных элементов, изготовленных из соответствующего материала.

Для расчёта эффективных характеристик слоистых композиционных материалов используется модель многослойной среды. Материал рассматривается как пакет из  $n$  слоёв, каждый из которых характеризуется толщиной  $h_i$ , углом ориентации  $\theta_i$ , модулем упругости  $E_i$ , модулем сдвига  $G_i$ , коэффициентом Пуассона  $\nu_i$  и пределами прочности.

Суммарная толщина многослойного материала определяется выражением:

$$h = \sum_{i=1}^n h_i. \quad (21)$$

Объёмная доля  $i$ -го слоя:

$$V_i = \frac{h_i}{h}. \quad (22)$$

Для предварительной оценки эффективного модуля упругости вдоль направления укладки используется правило смесей [4]:

$$E_{\parallel} = \sum_{i=1}^n V_i E_i. \quad (23)$$

Для направления, перпендикулярного слоям, используется обратное правило смесей:

$$E_{\perp} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{E_i} \right)^{-1}. \quad (24)$$

Для композиционного материала, состоящего из матрицы и армирующего наполнителя, продольный модуль упругости может быть определён как:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m. \quad (25)$$

Поперечный модуль упругости:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f}. \quad (26)$$

Модуль сдвига композиционного материала:

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f}. \quad (27)$$

Коэффициент Пуассона в первом приближении:

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m, \quad (28)$$

где индексы  $f$  и  $m$  соответствуют армирующему компоненту и матрице.

Для более точного расчёта каждый слой композиционного материала рассматривается как ортотропный материал [5]. В локальной системе координат слоя связь напряжений и деформаций при плоском напряжённом состоянии записывается в виде:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  – напряжения в локальных осях слоя;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_{12}$  – соответствующие деформации [8].

Коэффициенты матрицы жёсткости слоя определяются как:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{66} = G_{12}. \quad (30)$$

При этом выполняется условие взаимности  $\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$ , откуда  $\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$ .

Если слой ориентирован под углом к глобальной системе координат, выполняется преобразование матрицы жёсткости. В глобальной системе координат используется преобразованная матрица, учитывающая ориентацию армирования относительно глобальных осей конструкции.

Для многослойного композиционного материала расчётный модуль может использовать положения классической теории слоистых пластин. В этой модели деформации в произвольной точке по толщине материала выражаются через деформации срединной поверхности и кривизны:

$$\{\varepsilon(z)\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\}, \quad (31)$$

где  $\varepsilon^0$  – деформации срединной поверхности;  $\kappa$  – вектор кривизн;  $z$  – координата по толщине материала.

В развёрнутом векторном виде:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Напряжения в  $k$ -м слое определяются выражением:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)}(\{\varepsilon^0\} + z\{\kappa\}). \quad (33)$$

Силовые и моментные факторы связаны с деформациями и кривизнами через матрицы жёсткости слоистого пакета:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{bmatrix}. \quad (34)$$

При этом:  $\mathbf{N}$  – вектор мембранных усилий;  $\mathbf{M}$  – вектор изгибающих и крутящих моментов;  $\mathbf{A}$  – матрица растяжения;  $\mathbf{B}$  – матрица связи растяжения и изгиба;  $\mathbf{D}$  – матрица изгибной жёсткости.

Компоненты матриц **A**, **B** и **D** определяются суммированием по слоям:

$$\begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}); \\ B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^2 - z_{k-1}^2); \\ D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \end{cases} \quad (35)$$

где  $z_{k-1}$  и  $z_k$  – координаты нижней и верхней поверхности  $k$ -го слоя [6,7].

Если слоистый пакет симметричен относительно срединной поверхности, матрица **B** = 0. Это означает отсутствие связи между растяжением и изгибом.

На основе матрицы растяжения **A** могут быть определены эффективные инженерные характеристики слоистого материала. Для этого вводится нормированная матрица жёсткости:

$$\mathbf{A}^* = \frac{1}{h} \mathbf{A}. \quad (36)$$

Матрица податливости определяется как:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}^*)^{-1}. \quad (37)$$

Тогда эффективные характеристики слоистого материала в плоскости могут быть определены выражениями:

$$E_x^{eff} = \frac{1}{a_{11}}; \quad E_y^{eff} = \frac{1}{a_{22}}; \quad (38)$$

$$G_{xy}^{eff} = \frac{1}{a_{66}}; \quad (39)$$

$$\nu_{xy}^{eff} = -\frac{a_{12}}{a_{11}}; \quad \nu_{yx}^{eff} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}. \quad (40)$$

Данные выражения позволяют рассчитывать эффективные характеристики многослойного материала с учётом свойств каждого слоя, его толщины и ориентации.

После определения деформаций и кривизн расчётный модуль определяет напряжения в каждом слое [11]. Для  $k$ -го слоя:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\}^{(k)}. \quad (41)$$

Для оценки работоспособности материала могут использоваться критерии прочности. В простейшем случае применяется критерий максимальных напряжений:

$$|\sigma_1| \leq X; \quad |\sigma_2| \leq Y; \quad |\tau_{12}| \leq S, \quad (42)$$

где  $X$  – предел прочности вдоль волокон;  $Y$  – предел прочности поперёк волокон;  $S$  – предел прочности при сдвиге.

Коэффициент запаса прочности может быть определён как:

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{max}}, \quad (43)$$

где  $\sigma_{lim}$  – предельно допустимое напряжение;  $\sigma_{max}$  – максимальное расчётное напряжение.

Для более точной оценки разрушения композиционных материалов может применяться квадратичный критерий Цая – Хилла [4]:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 \leq 1. \quad (44)$$

Если значение левой части выражения меньше или равно единице, условие прочности считается выполненным. Если значение превышает единицу, в соответствующем слое прогнозируется потеря прочности [8].

Также может быть использован критерий Цая – Ву:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 \leq 1. \quad (45)$$

Данный критерий позволяет учитывать различие прочности материала при растяжении и сжатии. Но в цифровом паспорте материала могут храниться не только механические, но и термомеханические характеристики. При изменении температуры в расчётной модели учитываются температурные деформации:

$$\{\varepsilon_T\} = \{\alpha\}\Delta T, \quad (46)$$

где  $\alpha$  – вектор коэффициентов линейного температурного расширения;  $\Delta T$  – изменение температуры [1].

Тогда напряжения в слое определяются выражением:

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)}(\{\varepsilon\}^{(k)} - \{\varepsilon_T\}^{(k)}). \quad (47)$$

Такой подход позволяет рассчитывать напряжённо-деформированное состояние материала с учётом температурных воздействий и условий эксплуатации.

**Расширение математической модели для железобетона, фиброармирования и ползучести.** Железобетонный элемент в цифровом паспорте описывается не как слоистая конструкция, а как составная конструкционная система: бетонная матрица, дискретная арматура, возможная предварительно напряжённая арматура, фибры, сцепление компонентов, геометрия сечения и история воздействий. Эти сведения целесообразно хранить как предметный профиль, связанный с общими сущностями материала, экземпляра, пробы, испытания и расчётного сценария [19, 20].

$$\varepsilon_x(z, t) = \varepsilon_0(t) + z\kappa(t), \quad (48)$$

где  $\varepsilon_0(t)$  – продольная деформация оси или срединной линии;  $\kappa(t)$  – кривизна;  $z$  – координата точки сечения. Такая запись позволяет хранить в паспорте не только свойства материала, но и параметры деформационной модели сечения.

$$\sigma_c(z, t) = E_{c,\text{eff}}(t, t_0)[\varepsilon_c(z, t) - \varepsilon_{sh}(t) - \alpha_c \Delta T(t)]; \quad (49)$$

$$\sigma_s(t) = E_s[\varepsilon_s(t) - \varepsilon_s^0]. \quad (50)$$

Здесь  $\sigma_c(z, t)$  и  $\sigma_s(t)$  – напряжения в бетоне и арматуре;  $E_{c,\text{eff}}(t, t_0)$  – эффективный модуль бетона с учётом длительности нагружения;  $\varepsilon_c(z, t)$  – полная деформация бетона;  $\varepsilon_{sh}(t)$  – усадочная деформация;  $\alpha_c \Delta T(t)$  – температурная деформация;  $E_s$  – модуль упругости арматуры;  $\varepsilon_s(t)$  – деформация арматуры;  $\varepsilon_s^0$  – начальная деформация предварительно напряжённой арматуры.

$$N(t) = \int_{A_c} \sigma_c(z, t) dA + \sum_{i=1}^{n_s} A_{s,i} \sigma_{s,i}(t); \quad (51)$$

$$M(t) = \int_{A_c} \sigma_c(z, t) z dA + \sum_{i=1}^{n_s} A_{s,i} \sigma_{s,i}(t) z_i; \quad (52)$$

где  $A_c$  – площадь бетонной части сечения;  $A_{s,i}$  – площадь  $i$ -го арматурного стержня;  $\sigma_{s,i}(t)$  – напряжение в  $i$ -м арматурном стержне;  $z_i$  – координата  $i$ -го стержня;  $n_s$  – число арматурных стержней.

Формулы (51) и (52) фиксируют связь между расчётными усилиями и параметрами паспорта: площадью бетона  $A_c$ , площадями арматуры  $A_{s,i}$ , координатами арматурных стержней  $z_i$  и диаграммами деформирования компонентов. В такой постановке дискретное положение арматуры, анкеровка и сцепление являются самостоятельными данными паспорта, а не производными от универсального набора упругих констант.

$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c}, \quad \rho_f = \frac{V_f}{V_{\text{FRC}}}, \quad \lambda_f = \frac{l_f}{d_f}. \quad (53)$$

Здесь  $\rho_s$  – коэффициент стержневого армирования;  $\rho_f$  – объёмная доля фибры;  $\lambda_f$  – отношение длины фибры к её диаметру;  $A_s$  – суммарная площадь арматуры;  $V_f$  – объём фибры;  $V_{\text{FRC}}$  – объём фиброармированного бетонного композита;  $l_f$  и  $d_f$  – соответственно длина и диаметр фибры.

Для фиброармированного бетона паспорт должен хранить не только факт наличия фибры, но и её тип, материал, длину  $l_f$ , диаметр  $d_f$ , отношение  $\lambda_f$ , объёмную долю  $\rho_f$ , коэффициент ориентации, распределение по объёму и остаточные прочностные характеристики. При обработке результатов изгибных испытаний остаточная прочность может быть представлена, например, через значения  $f_{R,j}$ , определяемые по нагрузкам  $F_j$  при заданных раскрытиях трещины [24–27]:

$$f_{R,j} = \frac{3F_j L}{2bh_{sp}^2}, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (54)$$

$$\sigma_{t,\text{FRC}}(w) = \sigma_{ct}(\varepsilon) + \eta_\theta \eta_l \sigma_{\text{res}}(w; f_{R,1}, f_{R,2}, f_{R,3}, f_{R,4}), \quad (55)$$

где  $L$  – пролёт образца;  $b$  – ширина;  $h_{sp}$  – высота сечения;  $w$  – раскрытие трещины;  $\eta_\theta$  и  $\eta_l$  – коэффициенты ориентации и эффективности фибр. В цифровом паспорте эти величины сохраняются как отдельные показатели свойств и могут использоваться как входные данные для расчёта трещиностойкости и остаточной несущей способности.

Для учёта ползучести бетона и других длительных процессов в паспорт вводится реологический профиль. В нём фиксируются возраст материала при нагружении  $t_0$ , текущий возраст  $t$ , относительная влажность  $RH$ , температура  $T$ , приведённый размер сечения  $h_0$ , класс бетона, вид цемента, усадка, коэффициент ползучести и функция податливости. Эти параметры необходимы, поскольку длительные деформации зависят не только от состава материала, но и от времени, влажности, температуры и истории нагрузки [20].

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} [1 + \varphi(t, t_0)] + \varepsilon_{sh}(t) + \alpha_c \Delta T(t); \quad (56)$$

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} = \frac{1 + \varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)}; \quad (57)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t, \tau) d\sigma(\tau) + \varepsilon_{sh}(t) + \varepsilon_T(t); \quad (58)$$

$$E_{c,\text{eff}}(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)}; \quad (59)$$

$$\varphi(t, t_0) = \Phi(f_{cm}, RH, h_0, t_0, t, T, c_{\text{cem}}, \mathcal{M}). \quad (60)$$

Здесь  $t_0$  – возраст бетона в момент приложения нагрузки;  $\varphi(t, t_0)$  – коэффициент ползучести;  $E_c(t_0)$  – модуль упругости бетона в возрасте  $t_0$ ;  $J(t, t_0)$  – функция податливости,  $\chi(t, t_0)$  – коэффициент старения,  $\varepsilon_T(t)$  – температурная деформация;  $f_{cm}$  – средняя прочность бетона на сжатие;  $RH$  – относительная влажность среды;  $h_0$  – приведённый размер сечения;  $T$  – температура;

$c_{cem}$  – параметр, характеризующий вид цемента  $\mathcal{M}$  – применяемая расчётная методика. Формулы (56)–(60) показывают, что параметры длительного деформирования не могут быть сведены к одному табличному значению: они должны храниться вместе с условиями определения, временной шкалой, методикой расчёта и областью применимости.

Исходные данные для расчётного модуля извлекаются из цифрового паспорта материала, экземпляра или связанного с ним элемента. Связь математических моделей с сущностями базы данных для основных групп расчётных параметров может быть представлена следующим образом (табл. 4, 5).

Таблица 4

Связь иерархии модели с основными типами расчётных данных

Тип расчётных данных	Источник в цифровом паспорте
Наименование материала	materials
Тип материала и класс материала	materials, instances
Состав материала	materials, propvalues
Свойства компонентов	propcats, propvalues
Толщина слоёв	samples, propvalues
Ориентация слоёв	samples, propvalues
Модуль упругости	propvalues
Модуль сдвига	propvalues
Коэффициент Пуассона	propvalues
Предел прочности	propvalues
Условия испытаний	tests
Нормативные методики	documents
Расчётные результаты	propvalues
Класс бетона, прочность, модуль упругости	materials, instances, propcats, propvalues
Параметры стержневой и напрягаемой арматуры	reinforcements, propvalues
Схема расположения арматуры, защитный слой, анкеровка	reinforcements, samples, propvalues
Параметры фибр: тип, длина, диаметр, объёмная доля	fiber_systems, propvalues
Остаточные прочности $f_{R,j}$ и закон $\sigma(\epsilon)$	fiber_systems, tests, propvalues
Возраст нагружения $t_0$ , текущий возраст $t$	creep_params, load_histories
Относительная влажность, температура, приведённый размер $h_0$	environments, samples, creep_params
Коэффициент ползучести $\phi(t, t_0)$	creep_params, propvalues
Функция податливости $J(t, t_0)$	creep_params, propvalues
Усадочные деформации $\epsilon_{sh}(t)$	creep_params, propvalues
История нагружения и длительность воздействий	load_histories, calculation_runs
Версия расчётной модели и область применимости	calculation_runs, documents, propvalues

Таблица 5

Предметные параметры армированных бетонных материалов и элементов

Группа параметров	Содержание паспорта	Назначение в расчётной модели
Бетонная матрица	Класс бетона, $f_{ck}/f_{cm}$ , $E_{cm}$ , $\nu$ , $\alpha_T$ , $f_{ct}$ , диаграмма растяжения/сжатия $\sigma - \epsilon$ , состав, цемент, заполнители, добавки, режим твердения	Определение прочности, упругости, трещинообразования и исходных параметров ползучести
Стержневая и напрягаемая арматура	Класс, диаметр, площадь, шаг, координаты, защитный слой, $E_s$ , $f_{yk}$ , $f_{uk}$ , начальные напряжения, анкеровка, сцепление	Расчёт усилий, деформаций, трещиностойкости, несущей способности и предварительного напряжения
Фиброармирование	Тип и материал фибры, $l_f$ , $d_f$ , $l_f/d_f$ , $V_f$ , ориентация, распределение, $f_{R,1} - f_{R,4}$ , закон остаточного растяжения	Учёт остаточной прочности, трещиностойкости и постпикового поведения фибробетона
Геометрия элемента	Форма сечения, $A_c$ , $I_c$ , $b$ , $h$ , $h_{sp}$ , координаты слоёв/зон, положение арматуры и фиброобъёма	Связь материала с конструктивным элементом и интегрирование напряжений по сечению

Окончание табл. 5

Группа параметров	Содержание паспорта	Назначение в расчётной модели
Ползучесть и усадка	$t_0, t, RH, T, h_0, \varphi(t, t_0), J(t, t_0), \chi, \varepsilon_{sh}(t)$ , методика расчёта и область применимости	Расчёт длительных деформаций, перераспределения напряжений и эффективного модуля
История нагружения	$N(t), M(t), Q(t)$ , длительность, повторность, эксплуатационный сценарий, граничные условия	Корректное применение реологической модели и расчёт НДС во времени
Провенанс и неопределённость	Источник данных, метод испытания, стандарт, версия модели, дата расчёта, доверительный интервал, тип значения	Воспроизводимость расчёта и сопоставимость экспериментальных, расчётных и прогнозных данных

Выделение профильных параметров не нарушает универсальности паспорта: базовая структура данных сохраняется, а дополнительные поля активируются только для тех материалов, для которых они физически необходимы. Это позволяет описывать армированные и фиброармированные бетонные материалы с учётом состава, армирования, геометрии, трещиностойкости и длительного поведения, не подменяя их расчётную природу моделью другого класса.

Результаты расчёта сохраняются в цифровом паспорте как новые показатели свойств. При этом для каждого расчётного значения фиксируются:

- 1) используемая математическая модель и её класс: упругая, ортотропная, CLT, модель сечения с дискретным армированием, модель фиброармирования, реологическая или комбинированная;
  - 2) набор исходных параметров, включая состав, структуру, армирование, фибры, геометрию, условия среды и историю нагружения;
  - 3) версия данных цифрового паспорта и версия расчётного алгоритма;
  - 4) дата расчёта и идентификатор расчётного запуска;
  - 5) единицы измерения;
  - 6) параметры ползучести, усадки и температурно-влажностных условий, если они использовались;
  - 7) условия нагружения, длительность воздействия и возраст материала;
  - 8) ссылка на методику или нормативный документ;
  - 9) тип результата: экспериментальный, расчётный, нормативный или прогнозный;
- оценка неопределённости и область применимости.

Это позволяет обеспечить прослеживаемость происхождения данных и повторяемость расчётов. Алгоритм расчёта характеристик материала или связанного с ним элемента включает следующие этапы:

- 1) выбор материала, экземпляра или конструктивного элемента в цифровом паспорте;
- 2) загрузка физико-механических, технологических, геометрических и реологических характеристик из базы данных;
- 3) проверка полноты исходных данных, единиц измерения, применимости нормативной или расчётной методики;
- 4) идентификация класса расчётной модели: изотропная, ортотропная, слоистая, модель сечения с дискретным армированием, фиброармированная, реологическая или комбинированная;
- 5) формирование матриц жёсткости отдельных компонентов, слоёв или зон сечения;
- 6) для слоистых композитов – преобразование матриц жёсткости и сборка матриц  $A, B, D$ ;
- 7) для элементов с дискретным армированием – формирование бетонного сечения, положения арматуры, параметров сцепления и диаграмм деформирования;
- 8) для фиброармированного бетона – загрузка параметров фибр и остаточных прочностей  $f_{R,j}$ ;

- 9) для длительных воздействий – загрузка истории нагружения, возраста материала, влажности, температуры и параметров ползучести;
- 10) расчёт эффективных модулей упругости и сдвига, напряжений, деформаций, кривизн и прогибов;
- 11) проверка условий прочности, трещиностойкости, деформативности и области применимости модели;
- 12) сохранение расчётных результатов в цифровом паспорте с указанием провенанса, версии модели, исходных параметров и неопределённости.

Таким образом, расчётный модуль расширяет функциональность цифрового паспорта и позволяет использовать его не только как средство хранения данных, но и как инструмент инженерного анализа материалов и элементов с различной внутренней структурой: слоистой, дисперсно-армированной, дискретно армированной или реологически зависимой. Использование уравнений механики деформируемого твёрдого тела, сопротивления материалов, теории слоистых композитов, деформационных моделей армированных бетонных элементов и реологических моделей ползучести обеспечивает расчёт эффективных характеристик, напряжённо-деформированного состояния, трещиностойкости и длительных деформаций при различных режимах эксплуатации.

**Применение модели в информационных системах цифрового материаловедения и строительного проектирования.** Предложенная модель цифрового паспорта может использоваться при разработке информационных систем, предназначенных для хранения, анализа и обработки материаловедческих и строительных данных. Использование данной модели позволяет интегрировать сведения о различных типах материалов, полученные в ходе экспериментальных исследований, технологических процессов, проектных расчётов, контроля качества и эксплуатации. Для материалов строительного назначения паспорт связывает лабораторные испытания, нормативные данные, расчётные параметры, условия среды и результаты мониторинга, что создаёт основу для сопоставления экспериментальных, расчётных и эксплуатационных характеристик.

**Описание алгоритма расчётного модуля, его преимущества и научная новизна.** Разработанный алгоритм расчётного модуля цифрового паспорта реализует мультимодельную методологию, включая методологию классической теории слоистых пластин. Он обеспечивает вычисление эффективных упругих характеристик многослойных композиционных материалов, расчёт параметров элементов с дискретным или фибровым армированием, а также учёт ползучести и усадки на основе данных, хранящихся непосредственно в информационной системе цифрового паспорта.

**Описание алгоритма.** Алгоритм реализуется в виде отдельного программного компонента на языке Python и взаимодействует с базой данных цифрового паспорта посредством прикладного интерфейса. Входными данными служат физико-механические характеристики, хранящиеся в сущностях `propvalues` и `propcats`, а также дополнительные профили `components`, `reinforcements`, `fiber_systems`, `creep_params`, `load_histories` и `environments`. Для слоистых композитов используются модули упругости вдоль и поперек волокон ( $E_1$ ,  $E_2$ ), модуль сдвига  $G_{12}$ , коэффициент Пуассона  $\nu_{12}$ , толщина и ориентация слоёв; для элементов с дискретным армированием – класс бетона, диаграммы деформирования, параметры арматуры, геометрия сечения, сцепление и предварительное напряжение; для фиброармированного бетона – тип и параметры фибр, объёмная доля, ориентация и остаточные прочности; для ползучести – возраст нагружения, длительность, влажность, температура, приведённый размер сечения и выбранный методика.

Алгоритм выполняется в следующей последовательности. На первом этапе производится загрузка и верификация данных из цифрового паспорта: проверяется наличие обязательных параметров для выбранного класса модели, совместимость единиц измерения,

актуальность версии записи и наличие ссылки на методика. На втором этапе выбирается расчётная ветвь: CLT для слоистого композита, деформационная модель сечения для элемента с дискретным армированием, модель остаточной прочности для фибробетона или реологическая модель длительных деформаций. На третьем этапе формируются расчётные объекты: матрицы жёсткости слоёв, сечение с дискретной арматурой, параметры фибр и функция податливости. На четвёртом этапе рассчитываются эффективные характеристики, напряжения, деформации, кривизны, прогибы, раскрытие трещин и длительные деформации. На заключительном этапе результаты записываются в паспорт как новые показатели свойств с указанием типа значения, версии модели, исходных параметров, даты расчёта и источника нормативной методики (рис. 1).

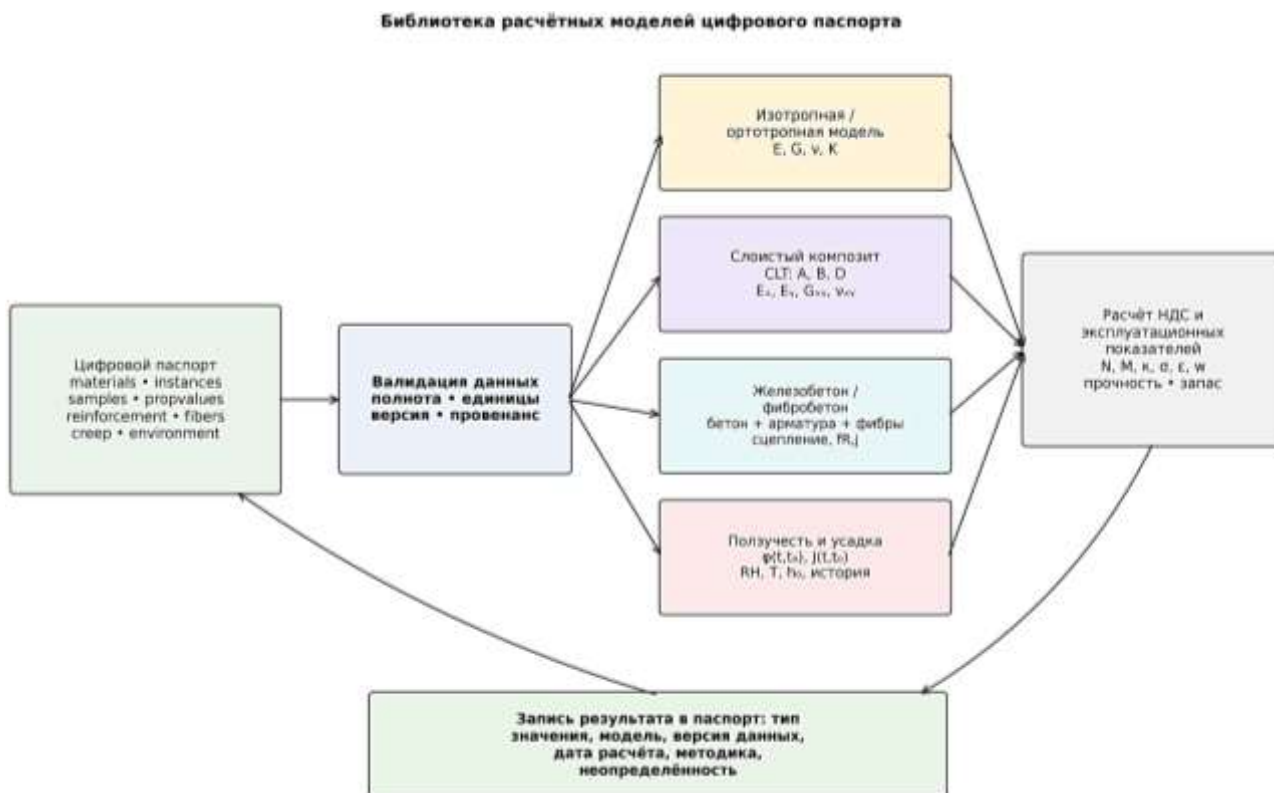


Рис. 1. Схема алгоритма расчётного модуля

Важной особенностью алгоритма является то, что он не требует приведения всех конструкционных материалов к одной физической модели. Многослойный композит, элемент с дискретным армированием, фиброармированный бетон и реологическая модель используют разные наборы исходных параметров, однако результаты сохраняются в единой атрибутивной структуре `propvalues` и сопровождаются единым набором метаданных провенанса.

Подробная блок-схема работы алгоритма для случая слоистого композита приведена на рис. 2.

**Преимущества предложенного подхода.** Ключевым преимуществом разработанного подхода является непосредственная интеграция расчётного модуля с моделью цифрового паспорта конструкционных материалов. В отличие от изолированных расчётных программ, требующих ручного переноса данных, предложенный модуль использует показатели свойств, уже хранящиеся в информационной системе, и записывает результаты обратно в ту же структуру. Это исключает дублирование данных, снижает риск ошибок при вводе и обеспечивает прослеживаемость происхождения каждого расчётного значения – от первичных экспериментальных показателей до производных эффективных, прочностных и реологических характеристик.

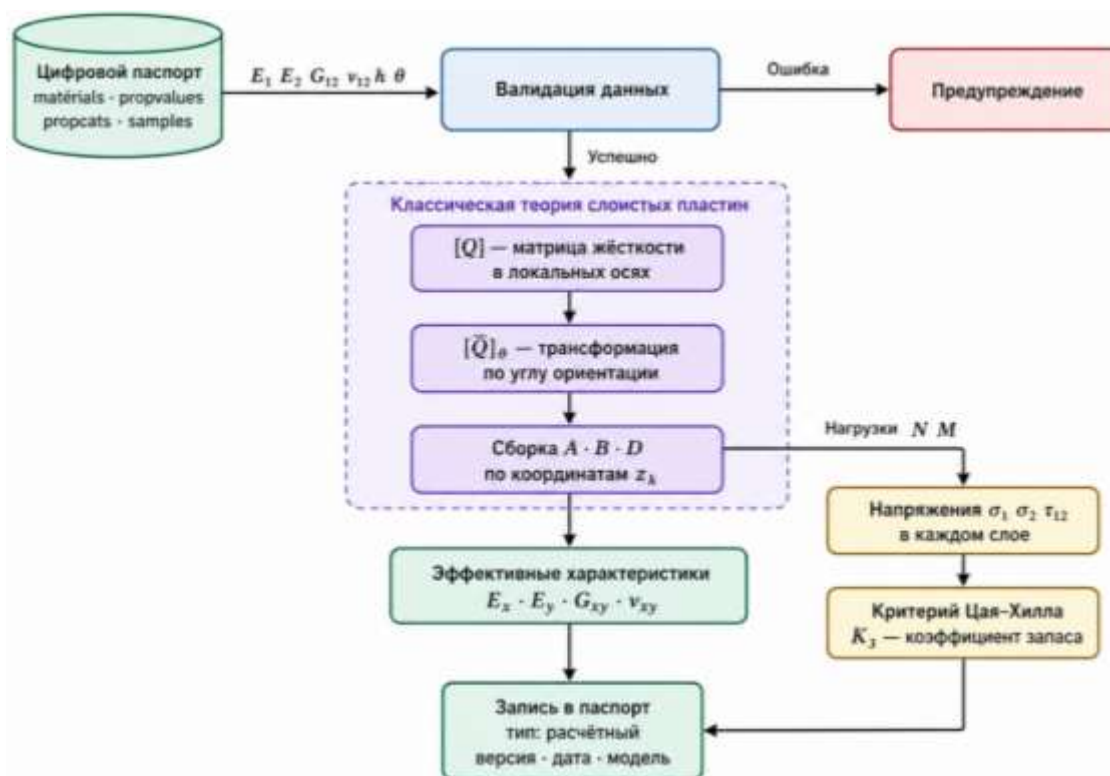


Рис. 2. Схема алгоритма

Иерархическая структура объектов паспорта (материал → экземпляр → проба → группа свойств → показатель свойства) дополнена связями для компонентов, армирования, фибр, условий среды, истории нагружения и расчётных запусков. Эти связи используются только при наличии соответствующего профиля материала или расчётной задачи и обеспечивают корректную привязку результатов к исходным экспериментальным данным и конструктивной конфигурации элемента.

Использование алгоритма позволяет существенно сократить трудозатраты на подготовку данных для инженерного анализа. Автоматическое дополнение недостающих механических параметров, проверка совместимости единиц измерения, выбор применимой расчётной ветви и запись результатов с провенансом повышают практическую применимость системы в условиях неполного или неоднородного набора экспериментальной информации.

**Научная новизна.** Во-первых, предложена мультимодельная информационно-расчётная структура цифрового паспорта, пригодная для различных классов конструкционных материалов и расчётных задач. Предложенная архитектура объединяет универсальное атрибутивное ядро паспорта с предметными профилями параметров, которые подключаются без изменения базовой схемы данных. В существующих подходах к цифровому материаловедению, таких как Materials Project, AFLOW, NOMAD и других базах материаловедческих данных, расчётные инструменты и хранилища данных, как правило, функционируют отдельно, что требует экспорта и импорта данных между системами. Предложенная архитектура устраняет этот разрыв за счёт использования единой реляционной модели для хранения как первичных экспериментальных, так и вычисленных производных характеристик.

Во-вторых, разработана иерархическая связь между объектами базы данных и параметрами математической модели расчёта (см. табл. 4), которая формализует соответствие между сущностями информационной системы и переменными уравнений механики деформируемого твёрдого тела. Такая формализация является необходимым условием для автоматизированного извлечения исходных данных из паспорта и однозначной интерпретации результатов расчёта в контексте информационной системы.

В-третьих, расчётный модуль сформулирован как библиотека взаимосвязанных моделей, результаты которых сохраняются в единой атрибутивной структуре с метаданными провенанса. За счёт этого экспериментальные, нормативные, расчётные и прогнозные значения могут сопоставляться в одной информационной системе и использоваться в дальнейших задачах анализа данных и машинного обучения.

Таким образом, совокупность предложенных решений – единая модель данных для хранения разнородных материаловедческих характеристик, интегрированный расчётный модуль и формализованная связь параметров математической модели с объектами информационной системы – представляет самостоятельный научный вклад в область цифрового материаловедения и информационных систем управления данными о материалах.

**Заключение.** В работе предложена модель цифрового паспорта конструкционных материалов, предназначенная для интеграции разнородных данных в информационных системах материаловедения и строительного проектирования.

Разработанная модель основана на иерархической структуре объектов, включающей уровни материала, экземпляра, пробы, испытания и расчётного сценария, а также на атрибутивной модели представления свойств. Такой подход обеспечивает унификацию представления данных о различных типах материалов и позволяет расширять структуру свойств без изменения базовой архитектуры информационной системы. Предложенная модель может быть использована при разработке цифровых платформ и информационно-аналитических систем цифрового материаловедения и обеспечивает основу для дальнейшего применения методов анализа данных и компьютерного моделирования свойств материалов.

#### Библиографический список

1. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости: пер. с англ. М.: Наука, 1979. 560 с.
2. Тимошенко С. П. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1976. 544 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
4. Jones R. M. *Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999. 519 p.
5. Kaw A. K. *Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2005. 542 p.
6. Reddy J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
7. Vinson J. R., Sierakowski R. L. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Dordrecht: Springer, 2008. 452 p.
8. Daniel I. M., Ishai O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2006. 411 p.
9. Callister W. D., Rethwisch D. G. *Materials Science and Engineering: an Introduction*. 9th ed. New York: Wiley, 2014. 960 p.
10. Ашби М. Ф. Выбор материалов в машиностроении: пер. с англ. М.: Техносфера, 2010. 512 с.
11. Ward C. H., Wolverton C. Materials informatics: the role of data-driven approaches in materials science // *MRS Bulletin*. 2017. Vol. 42, no. 8. Pp. 586–589. DOI: 10.1557/mrs.2017.164.
12. Kalidindi S. R. Materials data science: current status and future outlook // *Annual Review of Materials Research*. 2015. Vol. 45. Pp. 171–193. DOI: 10.1146/annurev-matsci-070214-020844.
13. Jain A. [et al.]. The Materials Project: a materials genome approach to accelerating materials innovation // *APL Materials*. 2013. Vol. 1, no. 1. 011002. DOI: 10.1063/1.4812323.
14. Agrawal A., Choudhary A. Perspective: Materials informatics and big data: Realization of the “fourth paradigm” of science in materials science // *APL Materials*. 2016. Vol. 4. 053208. DOI: 10.1063/1.4946894.

15. Elmasri R., Navathe S. B. *Fundamentals of Database Systems*. 7th ed. Boston: Pearson, 2016. 1272 p.
16. Date C. J. *An Introduction to Database Systems*. 8th ed. Boston: Addison-Wesley, 2004. 1024 p.
17. ГОСТ 2.051–2013. Единая система конструкторской документации. М.: Стандартинформ, 2014. 14 с.
18. ISO 10303-1:2014. *Industrial automation systems and integration — Product data representation and exchange (STEP)*. Geneva: ISO, 2014.
19. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М.: Стандартинформ, 2019.
20. *Fib Model Code for Concrete Structures 2010*. Berlin: Ernst & Sohn, 2013.

#### References

1. Timoshenko S.P., Goodyer J. *Theory of Elasticity*: trans. from English. Moscow: Nauka, 1979. 560 p.
2. Timoshenko S.P. *Strength of Materials*. Moscow: Nauka, 1976. 544 p.
3. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Theory of Elasticity*. Moscow: Fizmatlit, 2003. 264 p.
4. Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999. 519 p.
5. Kaw A.K. *Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2005. 542 p.
6. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press, 2004. 831 p.
7. Vinson J.R., Sierakowski R.L. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Dordrecht: Springer, 2008. 452 p.
8. Daniel I.M., Ishai O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2nd ed. New York: Oxford University Press, 2006. 411 p.
9. Callister W.D., Rethwisch D.G. *Materials Science and Engineering: Introduction*. 9th ed. New York: Wiley, 2014. 960 p.
10. Ashbi M.F. *Choice of Materials in Mechanical Engineering*: trans. from English M.: Tekhnosphere, 2010. 512 p.
11. Ward C.H., Wolverton C. *Materials informatics: the role of data-driven approaches in materials science*. *MRS Bulletin*. Vol. 42. No. 8. 2017. Pp. 586–589. DOI: 10.1557/mrs.2017.164.
12. Kalidindi S.R. *Materials data science: current status and future outlook*. *Annual Review of Materials Research*. Vol. 45. 2015. Pp. 171–193. DOI: 10.1146/annurev-matsci-070214-020844.
13. Jain A. [et al.]. *The Materials Project: a materials genome approach to accelerating materials innovation*. *APL Materials*. Vol. 1. No. 1. 2013. 011002. DOI: 10.1063/1.4812323.
14. Agrawal A., Choudhary A. *Perspective: Materials informatics and big data: Realization of the “fourth paradigm” of science in materials science*. *APL Materials*. Vol. 4. 2016. 053208. DOI: 10.1063/1.4946894.
15. Elmasri R., Navathe S.B. *Fundamentals of Database Systems*. 7th ed. Boston: Pearson, 2016. 1272 p.
16. Date C.J. *An Introduction to Database Systems*. 8th ed. Boston: Addison-Wesley, 2004. 1024 p.
17. Federal Standard 2.051–2013. *Unified system for design documentation*. Moscow: Standartinform, 2014. 14 p.
18. ISO 10303-1:2014. *Industrial automation systems and integration — Product data representation and exchange (STEP)*. Geneva: ISO, 2014.

19. Set of Rules 63.13330.2018. Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. Updated version of SNiP 52-01-2003. Moscow: Standartinform, 2019.
20. Fib Model Code for Concrete Structures 2010. Berlin: Ernst & Sohn, 2013.

## DIGITAL MATERIAL PASSPORT MODEL FOR INTEGRATION OF HETEROGENEOUS DATA IN MATERIAL SCIENCE INFORMATION SYSTEMS

R. A. Turusov <sup>1</sup>, O. R. Vasilkova <sup>2</sup>, A. A. Reshetov <sup>3</sup>, A. G. Chernitsov <sup>4</sup>, A. A. Korennoy <sup>5</sup>

National Research Moscow State University of Civil Engineering <sup>1, 2, 3, 4</sup>  
Russia, Moscow  
National Research Centre "Kurchatov Institute" <sup>5</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Prof. of the Dept. of Strength of Materials, tel.: +7 (499) 183-43-29, e-mail: sopromat@mgsu.ru

<sup>2</sup> Postgraduate Student of the Dept. of Strength of Materials, tel.: +7 (917) 556-96-83, e-mail: vasilkova1994@list.ru

<sup>3</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Prof. of the Dept. of Strength of Materials, tel.: +7 (499) 183-43-29, e-mail: sopromat@mgsu.ru

<sup>4</sup> MA Student, tel.: +7 (499) 183-43-29, e-mail: sopromat@mgsu.ru

<sup>5</sup> Lead Engineer, tel.: +7(499)196-71-00, e-mail: aa.korennoy@nrcki.ru

---

The development of digital technologies and information systems creates a need to integrate heterogeneous material science, technological, and computational data generated during experimental studies, research and development, design, and production. These data are formed in different sources and often have different structures, which complicates their joint use, comparison, and incorporation into computational models.

This paper proposes a digital passport model for structural materials. The model is based on a hierarchical structure of objects – material, instance, sample, test, and computational scenario – and on an attribute-based representation of properties. Unlike existing materials-science databases, in which computational tools operate separately from data repositories, the proposed architecture provides direct integration of a computational module into the passport structure. The computational module is represented as a model library that includes Classical Laminate Theory (CLT), a deformation-based model of reinforced concrete, residual-strength models for fiber-reinforced concrete, and rheological models based on the creep coefficient and compliance function. This makes it possible to calculate the effective elastic properties of multilayer composite materials and to store the results as full-fledged property indicators with provenance metadata. The developed approach ensures a unified representation of data on different types of materials, extensibility of the property structure without changing the database schema, and traceability of the origin of both experimental and calculated characteristic values. The proposed model can be used in the development of digital platforms and information-analytical systems for digital materials science.

**Keywords:** digital material passport, information systems, digital materials science, structural materials, computational model, composite materials, reinforced concrete, fiber-reinforced concrete, creep, data integration, material properties.

## ФОРМУЛЫ ПРОГИБА И ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

К. К. Селезнев<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет «МЭИ»<sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Студент, e-mail: kirillseleznev@inbox.ru

Исследована плоская статически определимая ферменная конструкция. Принято, что вся масса сооружения сконцентрирована в узловых точках, а перемещения узлов возможны только в вертикальном направлении. В зависимости от числа панелей система может быть как геометрически изменяемой, так и неизменяемой. Сформулирован критерий неизменяемости. Для неизменяемого варианта получены аналитические выражения, позволяющие рассчитать прогиб фермы и первую частоту свободных колебаний при различном числе панелей. Сначала были найдены решения для конкретного числа панелей, а затем они были распространены на общие случаи с применением математической индукции. При вычислении прогиба фермы использовалась формула Максвелла – Мора, при вычислении частоты колебаний – упрощенная формула Донкерлея. Полученные по выведенной формуле значения сопоставлены с результатами численного решения, в котором собственная частота определялась через собственное число матрицы прогибов. Сравнение показало хорошее совпадение с результатом численного решения. Выполнение всех вычислительных операций и аналитических преобразований происходило в программной среде «Maple».

**Ключевые слова:** ферма, четыре опоры, прогиб, свободные колебания, первая собственная частота, упрощенная формула Донкерлея, формула Максвелла – Мора, индукция, критерий кинематической неизменяемости, «Maple».

**Введение.** При эксплуатации стержневых конструкций возможны воздействия динамического характера, вызывающие выход механической системы из равновесия и появление свободных (собственных) колебаний. Такие нагрузки обусловлены разными факторами: подземными толчками, интенсивными ветрами, движением транспорта, авариями и прочими явлениями. Для оценки реакции сооружений на подобные воздействия необходимо знать динамические параметры системы, среди которых важной является частота собственных колебаний [1]. На практике наиболее часто требуется определение первой (основной) частоты. Для ее приближенного расчета используются разные подходы: метод Донкерлея, дающий оценку снизу [2–4], и метод Рэлея, позволяющий оценить частоту сверху [5–7]. Оба метода приводят к аналитическим выражениям, поскольку не предполагают составления характеристического уравнения, порядок которого определяется числом степеней свободы узлов фермы. Хотя метод Рэлея обеспечивает более высокую точность по сравнению с методом Донкерлея, получаемые решения оказываются довольно громоздкими. Кроме того, метод Рэлея неприменим, если нельзя вывести формулы для конечных сумм. В данной работе используется подход Донкерлея, который дает компактное аналитическое выражение, отличающееся хорошей точностью. Сначала этим методом находят решения для отдельных значений числа панелей, а затем с помощью индукции [8–10] обобщают их на случай произвольного количества панелей. Для оценки погрешности предложенной аналитической формулы проводится сравнение с результатами точных численных расчетов [11–13].

**Модель фермы.** Рассматривается плоская стержневая система, которая является статически определимой. По типу закрепления конструкция является балочной (пролетной), по

форме поясов – прямоугольной (с параллельными поясами), по типу решетки – крестовой. Вся масса фермы считается сосредоточенной в узлах, причем каждый узел обладает массой  $m$ , а стержни условно принимаются невесомыми. Все стержни имеют одинаковую жесткость, равную  $EF$ . Предполагается, что перемещения узлов возможны только в вертикальном направлении (горизонтальные смещения отсутствуют). Общий вид фермы представлен на рис. 1.

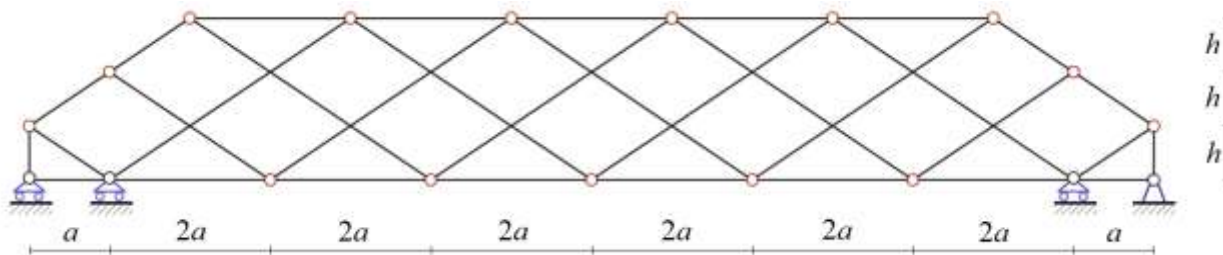


Рис. 1. Схема фермы при  $n = 3$

Ферма будет неизменяемой, если количество панелей в половине пролета подчиняется формуле:

$$n = \frac{6k + 1 - (-1)^k}{4}, \quad (1)$$

где  $k \in N$ . Из зависимости (1) следует, что допустимые значения  $n$  равны 2, 3, 5, 6, 8, 9... При невыполнении (1) система становится изменяемой, и для такого случая расчет проводится не будет ( $n = 1, 4, 7, 10, 13...$ ). Пример неизменяемой конструкции показан на рис. 1, а изменяемой – на рис. 2.

На рис. 2 приведена картина виртуальных скоростей [14–16] для мгновенно изменяемого варианта фермы, полученная из кинематического анализа; МЦС<sub>1</sub> и МЦС<sub>2</sub> – мгновенные центры скоростей. Аналогичную картину распределения возможных скоростей узлов можно получить и других чисел панелей из списка  $n = 1, 4, 7, 10, 13...$

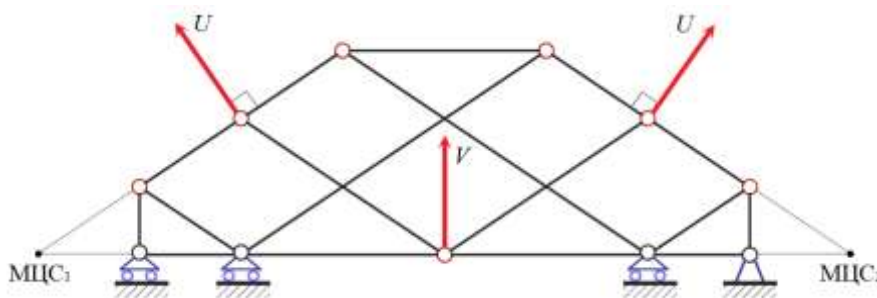


Рис. 2. Схема виртуальных скоростей при  $n = 1$

Между скоростями  $U$  и  $V$  справедливо соотношение:

$$\frac{U}{c} = \frac{V}{2a},$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

Количество степеней свободы фермы равно числу ее узлов:  $K = 4n + 7$ . При построении схемы фермы в среде «Maple» опоры заменяются стержнями: три подвижные опоры моделируются вертикальными стержнями (на каждую опору один вертикальный стержень),

а неподвижная опора рассматривается как два стержня: горизонтальный и вертикальный. В результате такой замены общее количество стержней становится равным  $v = 8n + 14$ , а число узлов равно  $u = 4n + 12$ .

**Расчет усилий в стержнях фермы.** Вычисление вектора усилий в стержнях фермы выполняется с помощью формулы:

$$S = G^{-1}R,$$

где  $R$  – вектор узловых нагрузок,  $G$  – квадратная матрица  $v \times v$ , заполняемая направляющими косинусами стержней (каждый стержень рассматривается как вектор в пространстве). Направляющие косинусы находят по формуле:  $\cos(\alpha) = l_{\text{пр}} / l$ , в которой  $l_{\text{пр}}$  – длина проекции стержня на координатную ось, а  $l$  – его длина. Поскольку проекции на оси  $x$  или  $y$  определяются как разность соответствующих координат концов стержня, предварительно требуется присвоить номера всем узлам и стержням (как показано на рис. 3).

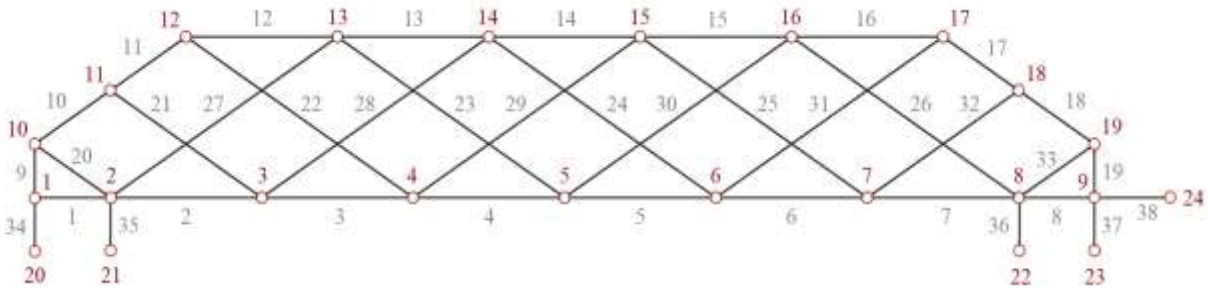


Рис. 3. Пример нумерации узлов и стержней фермы при  $n = 3$

Затем в «Maple» задаются координаты узлов схемы:

```

> x[1]:=0:          y[1]:=0:
> for i to 2*n+1 do
>   x[i+1]:=2*i*a-a;  y[i+1]:=0;
> od:
> x[2*n+3]:=L0:      y[2*n+3]:=0:
> x[2*n+4]:=0:       y[2*n+4]:=h:
> x[2*n+5]:=a:       y[2*n+5]:=2*h:
> for i to 2*n do
>   x[i+2*n+5]:=2*i*a; y[i+2*n+5]:=3*h;
> od:
> x[4*n+6]:=L0-a:    y[4*n+6]:=2*h:
> x[4*n+7]:=L0:      y[4*n+7]:=h:
> x[m3-4]:=0:        y[m3-4]:=-h:
> x[m3-3]:=a:        y[m3-3]:=-h:
> x[m3-2]:=L0-a:     y[m3-2]:=-h:
> x[m3-1]:=L0:       y[m3-1]:=-h:
> x[m3]:=L0+a:       y[m3]:=0:
    
```

Принимается, что длина вертикальных стержней опор составляет  $h$ , а горизонтальных –  $a$ . Система уравнений, решаемая в «Maple», позволяет вычислить усилия в стержнях конструкции.

**Формула для расчета прогиба.** Прогибом фермы является вертикальное смещение центрального узла нижнего пояса, которое находится по формуле Максвелла – Мора [17, 18]:

$$\delta = \sum_{j=1}^v S_j^{(P)} S_j^{(n+2)} l_j \frac{1}{E_j F_j} = \frac{1}{EF} \sum_{j=1}^v S_j^{(P)} S_j^{(n+2)} l_j,$$

где  $S_j^{(P)}$  – усилие в  $j$ -м стержне, которое возникает из-за действия нагрузки  $P$ , равномерно распределенной по всем узлам конструкции;  $S_j^{(n+2)}$  – усилие в  $j$ -м стержне от единичной вертикальной силы, приложенной к узлу с номером  $n+2$  в середине пролета;  $l_j$  – длина  $j$ -го стержня. Поскольку жесткость  $EF$  принята одинаковой для всех элементов фермы, она вынесена за знак суммирования.

Результаты вычисления прогиба в «Maple» для разных  $k$  выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\delta^{k=1} &= \frac{136a^3 + 28c^3 + 82h^3}{4h^2EF}, \\ \delta^{k=2} &= \frac{380a^3 + 24c^3 - 10h^3}{4h^2EF}, \\ \delta^{k=3} &= \frac{2892a^3 + 100c^3 + 138h^3}{4h^2EF}, \\ \delta^{k=4} &= \frac{4912a^3 + 96c^3 - 18h^3}{4h^2EF}, \\ \delta^{k=5} &= \frac{16136a^3 + 220c^3 + 194h^3}{4h^2EF}, \\ \delta^{k=6} &= \frac{23004a^3 + 216c^3 - 26h^3}{4h^2EF}, \\ \delta^{k=7} &= \frac{53500a^3 + 388c^3 + 250h^3}{4h^2EF}.\end{aligned}$$

На основе найденных выражений для конкретных значений  $k$  средствами «Maple» можно обобщить формулу прогиба для любого  $k$ :

$$\delta = \frac{C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3}{4h^2EF},$$

где коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  определяются через  $k$  следующим образом:

$$C_1 = 15k^4 + 2(15 - 7(-1)^k)k^3 + 3(8 - 7(-1)^k)k^2 + (1 - (-1)^k)(13k + 3),$$

$$C_2 = 6k^2 + (1 - (-1)^k) \cdot (6k + 5),$$

$$C_3 = 4(3 - 4(-1)^k)k - 28(-1)^k + 26.$$

**Формула первой частоты собственных колебаний.** Для приближенного определения первой собственной частоты колебаний системы применяется формула Донкерлея в упрощенном виде:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{i=1}^K \delta_i = \frac{m\delta_{\max}K}{2},$$

где  $\delta_i$  – прогиб  $i$ -го узла под действием вертикальной единичной силы;  $\delta_{\max}$  – наибольшее среди всех  $\delta_i$  ( $i=1, \dots, K$ ). В рассматриваемой ферме наибольший прогиб возникает в центральном узле нижнего пояса, имеющем номер  $n+2$ . Величина  $\delta_{\max}$  определяется с использованием формулы Максвелла – Мора:

$$\delta_{\max} = \sum_{j=1}^v (S_j^{(n+2)})^2 l_j \frac{1}{E_j F_j} = \frac{1}{EF} \sum_{j=1}^v (S_j^{(n+2)})^2 l_j.$$

Вычисления в системе «Maple» для разных значений параметра  $k$  дают следующие выражения для максимального прогиба:

$$\delta_{\max}^{k=1} = \frac{32a^3 + 12c^3 + 18h^3}{4h^2 EF},$$

$$\delta_{\max}^{k=2} = \frac{36a^3 + 12c^3 + 2h^3}{4h^2 EF},$$

$$\delta_{\max}^{k=3} = \frac{260a^3 + 24c^3 + 18h^3}{4h^2 EF},$$

$$\delta_{\max}^{k=4} = \frac{264a^3 + 24c^3 + 2h^3}{4h^2 EF},$$

$$\delta_{\max}^{k=5} = \frac{872a^3 + 36c^3 + 18h^3}{4h^2 EF},$$

$$\delta_{\max}^{k=6} = \frac{876a^3 + 36c^3 + 2h^3}{4h^2 EF},$$

$$\delta_{\max}^{k=7} = \frac{2060a^3 + 48c^3 + 18h^3}{4h^2 EF},$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

Полученная в «Maple» общая формула для любого коэффициента  $k$ :

$$\delta_{\max} = \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{4h^2 EF},$$

где коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  равны:

$$C_1 = 4k^3 + 6(1 - (-1)^k)k^2 + (8 - 6(-1)^k)k + 1 - (-1)^k,$$

$$C_2 = 6k + 3 - 3(-1)^k,$$

$$C_3 = 10 - 8(-1)^k.$$

Таким образом, искомая первая частота собственных колебаний определяется формулой:

$$\omega_D = 2h \sqrt{\frac{2EF}{mK(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}.$$

**Погрешность формулы первой частоты собственных колебаний.** Для оценки точности выведенной формулы следует выполнить сравнение с результатами численного решения, при котором учитываются все степени свободы узлов системы. Действующая нагрузка распределяется равномерно по всем узлам фермы, которая рассматривается как совокупность сосредоточенных масс с числом степеней свободы, равным  $K$ . Первая собственная частота при численном подходе вычисляется по формуле:

$$\omega_N = \sqrt{\frac{1}{m\lambda}},$$

где  $\lambda$  – собственное число матрицы прогибов, для расчета которых применяется формула Максвелла – Мора. Для нахождения собственных чисел применяется встроенная функция Eigenvalues пакета «Maple».

Относительная погрешность аналитического решения определяется как:

$$\varepsilon = \frac{|\omega_D - \omega_N|}{\omega_N}.$$

В расчетах использованы следующие числовые данные: панель фермы имеет длину  $a = 3$  м, стержни изготовлены из материала с модулем упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, площадь поперечного сечения каждого стержня  $F = 16$  см<sup>2</sup>, в каждом узле сосредоточена масса  $m = 100$  кг.

На рис. 4 представлены зависимости первой собственной частоты от коэффициента  $k$ . Сплошной линией показан результат аналитического расчета ( $\omega_D$ ), штриховой – численного ( $\omega_N$ ). Рассмотрены два варианта высоты конструкции:  $h = 2$  м (фиолетовый цвет) и  $h = 4$  м (голубой цвет).

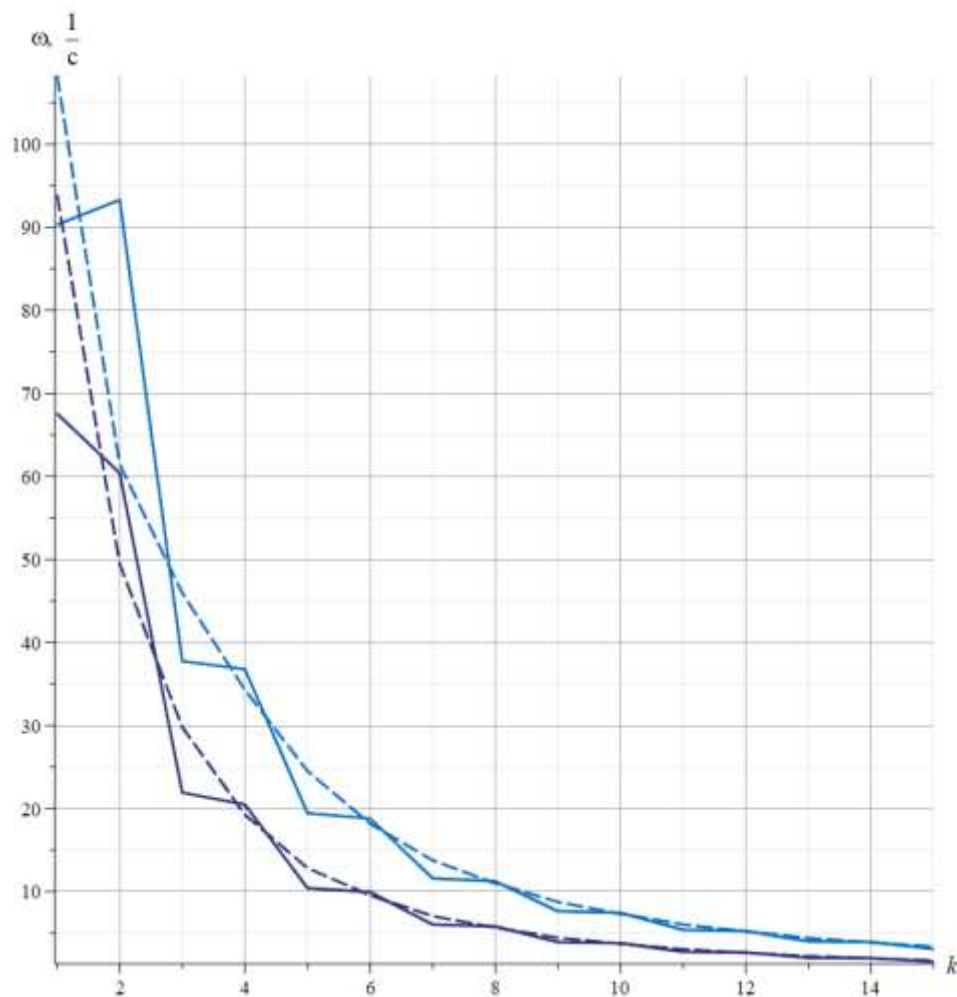


Рис. 4. Сопоставление аналитического и численного решений

График изменения  $\varepsilon$  в зависимости от коэффициента  $k$  представлен на рис. 5.

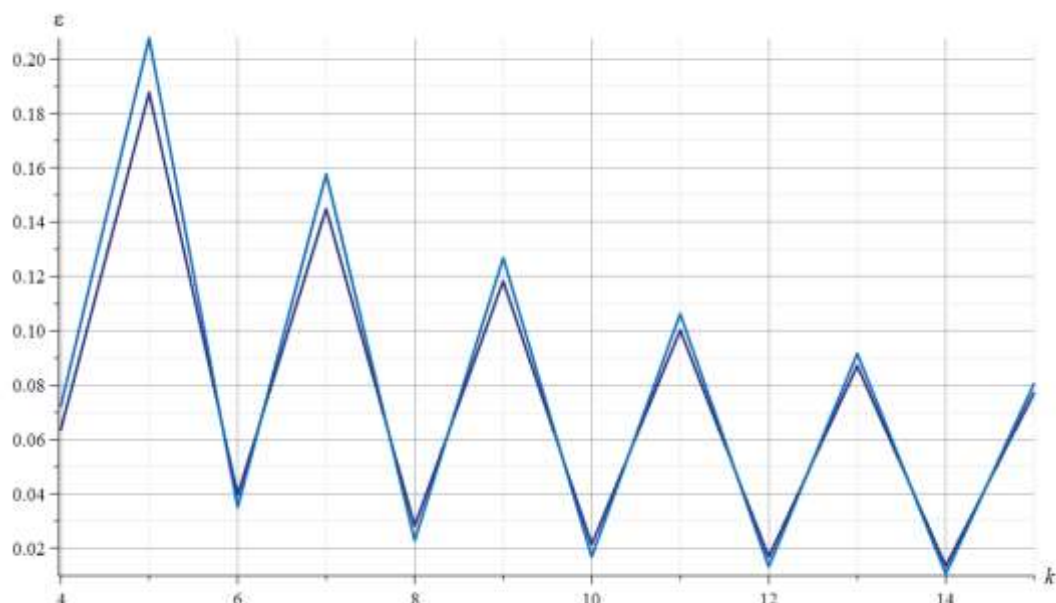


Рис. 5. Погрешность аналитического решения

**Заключение.** В работе представлена новая схема плоской статически определимой фермы. Особенность этой схемы – ограничение на число панелей, необходимое для кинематической неизменяемости конструкции. Найдена соответствующая формула для числа панелей. Получено аналитическое выражение для расчета первой собственной частоты колебаний. Сравнение аналитического и численного решений говорит о хорошем совпадении результатов решений. Погрешность предложенной формулы уменьшается по мере увеличения числа панелей. Описанная методика получения расчетной формулы основной частоты может быть распространена на другие плоские статически определимые фермы.

#### Библиографический список

1. Хазов П. А., Кожанов Д. А., Анущенко А. М., Сатанов А. А. Динамика строительных конструкций при экстремальных природных воздействиях: колебания, прочность, ресурс. Н. Новгород: ННГАСУ, 2022. 96 с.
2. Дай Цяо. Вывод формулы для расчета первой частоты собственных колебаний трапециевидной фермы // Строительная механика и конструкции. 2026. Вып. 1 (48). С. 55–62. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.48.1.005.
3. Кирсанов М. Н., Грибова О. В. Формулы для двух первых частот собственных колебаний плоской фермы // Вестник МГСУ. 2026. Вып. 2 (21). С. 186–194. DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.186-194.
4. Селезнев К. К. Формула первой частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2025. Вып. 3 (46). С. 33–40. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.46.3.004.
5. Кирсанов М. Н. Формулы для двухсторонней оценки основной частоты колебаний решетчатой фермы // Вестник МГСУ. 2024. Вып. 3 (19). С. 377–386. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386.
6. Maslov A. N. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Iss. 4 (109). Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
7. Кирсанов М. Н. Метод энергетической коллокации для оценки основной частоты собственных колебаний фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. Вып. 1 (36). С. 27–37. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.003.

8. Лыонг К. Л. Формула зависимости основной частоты регулярной фермы от числа панелей // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: тезисы докладов 13-й междунар. науч.-техн. конф. студентов и аспирантов. М., 2024. С. 1081.
9. Грибова О. В. Формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2025. № 1 (44). С. 31–39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003.
10. Kirsanov M. N. Formulas for Fundamental Natural Frequency of Plane Periodic Truss. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023. Iss. 6 (19). Pp. 551–559. DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-551–559.
11. Кирсанов М. Н. Прогиб и первые собственные частоты колебаний регулярной арочной фермы // Электронные библиотеки. 2025. Вып. 2 (28). С. 364–377. DOI: 10.26907/1562-5419-2025-28-2-364-373.
12. Кирсанов М. Н. Оценка частоты колебаний опоры линии электропередач // Вестник МЭИ. 2022. Вып. 5. С. 150–156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156.
13. Ефимчук А. В. Аналитический вывод формулы первой частоты колебаний шарнирно-стержневой конструкции // Строительная механика и конструкции. 2025. № 3 (46). С. 25–32. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.46.3.003.
14. Кирсанов М. Н., Воробьев О. В. Аналитический расчет деформаций и кинематический анализ плоской фермы с произвольным числом панелей // Научный журнал строительства и архитектуры. 2021. Вып. 3 (63). С. 113–122. DOI: 10.36622/VSTU.2021.63.3.011.
15. Кирсанов М. Н. Признаки геометрической изменяемости регулярных ферм // Строительная механика и конструкции. 2021. Вып. 1 (28). С. 22–31.
16. Кирсанов М. Н. Кинематический анализ и оценка частоты собственных колебаний плоской решетки // Вестник МГСУ. 2022. Вып. 10 (17). С. 1324–1330. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330.
17. Снитко Н. К. Строительная механика: учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. М.: Высш. шк., 1980. 431 с.
18. Кирсанов М. Н. Формулы для расчета прогиба плоской распорной фермы моста с произвольным числом панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. Вып. 3. С. 9–13. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.3.9.13.

#### References

1. Khazov P. A., Kozhanov D. A., Anushchenko A. M., Satanov A. A. Dynamics of building structures under extreme natural influences: fluctuations, strength, resource. Nizhny Novgorod: NNGASU, 2022. 96 p.
2. Dai Qiao. Derivation of a formula for the first frequency trapezoid truss natural oscillations // *Structural mechanics and structures*. 2026. Iss. 1 (48). Pp. 55–62. DOI: 10.36622/2219-1038.2026.48.1.005.
3. Kirsanov M. N., Gribova O. V. Formulas for the first two frequencies of natural oscillations of a flat truss // *Vestnik MGSU*. 2026. Iss. 2 (21). Pp. 186–194 DOI: 10.22227/1997-0935.2026.2.186-194.
4. Seleznev K. K. Formula for the first frequency of natural oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // *Structural mechanics and structures*. 2025. Iss. 3 (46). Pp. 33–40. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.46.3.004.
5. Kirsanov M. N. Formula for two-sided estimation of the fundamental frequency of oscillations of a lattice truss // *Vestnik MGSU*. 2024. Iss. 3 (19). С. 377–386. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386.
6. Maslov A. N. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. Iss. 4 (109). Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
7. Kirsanov M. N. Energy collocation method for the truss fundamental frequency estimation // *Structural mechanics and structures*. 2023. Iss. 1 (36). Pp. 27–37. DOI: 10.36622/VSTU.2023.36.1.003.

8. Luong C. L. Formula for the dependence of the fundamental frequency of a regular truss on the number of panels // *Radio Electronics, Electrical Engineering and Power Engineering. Abstracts of the 13th Int. Scientific and Technical Conf. of Students and Postgraduates, Moscow*, p. 1081.
9. Gribova O. V. Formulas for calculation of deflection and natural frequency of a flat truss with an arbitrary number of panels // *Structural mechanics and structures*. 2025. Iss. 1 (44). Pp. 31–39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003.
10. Kirsanov M. N. Formulas for Fundamental Natural Frequency of Plane Periodic Truss // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023. Iss. 6 (19). Pp. 551–559. DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-6-551–559.
11. Kirsanov M. N. Deflection and first natural frequencies of a regular arched truss oscillation // *Russian Digital Libraries Journal*. 2025. Iss. 2 (28). Pp. 364–377. DOI: 10.26907/1562-5419-2025-28-2-364-373.
12. Kirsanov M. N. Estimation of overhead power line support vibration frequency // *Vestnik MEI*. 2022. Iss. 5. Pp. 150–156. DOI: 10.24160/1993-6982-2022-5-150-156.
13. Efimchuk A. V. Analytical derivation of the formula for the first oscillation frequency of a swing-and-pendant structure // *Structural mechanics and structures*. 2025. Iss. 3 (46). Pp. 25–32. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.46.3.003.
14. Kirsanov M. N., Vorobev O. V. Analytical calculation of deformations and kinematic analysis of a flat truss with an arbitrary number of panels // *Nauchnyi zhurnal stroitel'stva i arkhitektury*. 2021. Iss. 3 (63). Pp. 113–122. DOI: 10.36622/VSTU.2021.63.3.011.
15. Kirsanov M. N. Signs of geometric variability of regular trusses // *Structural mechanics and structures*. 2021. Iss. 1 (28). Pp. 22–31.
16. Kirsanov M. N. Kinematic analysis and estimation of the frequency of natural oscillations of a planar lattice // *Vestnik MGSU*. 2022. Iss. 10 (17). Pp. 1324–1330. DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330.
17. Snitko N. K. *Structural mechanics. Textbook for universities*. M.: Vyssh. shk., 1980. 431 p.
18. Kirsanov M. N. Formula for calculation of the deflection of a flat strut bridge with an arbitrary number of panels // *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2022. Iss. 3. Pp. 9–13. DOI: 10.37538/0039-2383.2022.3.9.13.

**FORMULAS FOR DEFLECTION AND FIRST FREQUENCY  
OF NATURAL OSCILLATIONS OF A PLANAR TRUSS  
WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS**

K. K. Seleznev <sup>1</sup>

National Research University «MPEI» <sup>1</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Student, e-mail: kirillseleznev@inbox.ru

A planar statically determinate truss structure is investigated. It is assumed that the entire mass of the structure is concentrated at the nodes, and the displacements of the nodes are possible only in the vertical direction. Depending on the number of panels, the system can be either geometrically variable or invariable. A criterion is formulated for the latter case. For the invariable case, analytical expressions are obtained to calculate the deflection of the truss and the first frequency of natural oscillations for various numbers of panels. First, solutions for a specific number of panels were found, and then they were extended to general cases using mathematical induction. The Maxwell – Mohr formula was used to calculate the deflection of the truss, and the simplified Dunkerley formula was used to calculate the frequency of oscillations. The values obtained from the derived formula are compared with the results of a numerical solution, in which the natural frequency was determined through the eigenvalue of the deflection matrix calculated by the Maxwell – Mohr formula. The comparison shows good agreement with the numerical solution. All computational operations and analytical transformations were performed in the «Maple» software environment.

**Keywords:** truss, deflection, natural oscillations, first natural frequency, simplified Dunkerley formula, Maxwell – Mohr’s formula, induction, criterion of kinematic immutability, «Maple».

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.21/.8

DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.007

## РЕСУРСЫ ГРУЗОПОДЪЕМНОСТИ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ ПРИ РЕГУЛИРОВАНИИ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ

Н. С. Шевченко<sup>1</sup>, А. В. Каменчуков<sup>2</sup>Тихоокеанский государственный университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Хабаровск

<sup>1</sup> Аспирант высшей школы транспортного строительства, геодезии и землеустройства,  
тел.: +7(924)409-54-51, e-mail: nik\_shev\_most@mail.ru

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц. высшей школы транспортного строительства, геодезии и землеустройства,  
e-mail: 006641@togudv.ru

**Постановка задачи.** Рассматривается формирование перечня технологических операций для регулирования внутренних усилий в двухбалочных сталежелезобетонных пролетных строениях с целью разгрузки обжатого верхнего пояса главных балок для повышения устойчивости конструкции в целом при реконструкции по половине проезжей части.

**Результаты.** Обозначена предыстория нагружения сталежелезобетонного пролетного строения в качестве начальной точки отсчета для перечня технологических операций по регулированию внутренних усилий. Определено пять этапов выдомкрачивания для плавного выключения из совместной работы верхнего пояса в двутавровом сечении и железобетонной плиты с целью повышения устойчивости изгибно-крутильной формы сплошностенчатых главных балками, а также создания усилий предварительного напряжения в главных балках для более полного исчерпания ресурса грузоподъемности существующих металлоконструкций пролетного строения.

**Выводы.** Полученные результаты теоретического эксперимента, реализованного путем аналитического и численного моделирования, показывают высокую сходимость, что дает возможность судить об их достоверности. Представленная методика может найти отражение в реализации практической составляющей технологического обеспечения процесса реконструкции сталежелезобетонного пролетного строения.

**Ключевые слова:** сталежелезобетонное пролетное строение, напряженно-деформированное состояние мостовых конструкций, выдомкрачивание, регулирование внутренних усилий, предварительное напряжение, временная опора.

**Введение.** Динамичная модернизация транспортной инфраструктуры привела к активному развитию парка сталежелезобетонных мостовых переходов на территории Дальнего Востока в начале 70-х годов прошлого столетия [1]. Спустя четыре – пять десятилетий активной эксплуатации наблюдаются значительные дефекты в железобетонной плите, которые являются определяющими в общем эксплуатационном состоянии сооружения [2, 3]. Анализ технико-экономических показателей проектов капитального ремонта или реконструкции на сталежелезобетонных мостах [4, 5] показал, что затраты на специальные вспомогательные устройства в виде временного объезда, включающего временный мост, а иногда и технологическую эстакаду для размещения строительной техники в случае исключения применения временных опор, могут занимать долю до 1/4 от общей стоимости проекта.

Цель исследования: разработка эффективной технологии производства работ по замене существующей железобетонной плиты проезда на двухбалочных сталежелезобетонных мостах по половине проезжей части на металлический ортотропный настил при одновременном пропуске транзитного транспорта по одной половине и размещении строительной техники на другой, что позволит исключить устройство временных объездных мостов и технологических эстакад.

Задачи, которые решаются в рамках данного исследования:

- анализ начального напряженно-деформированного состояния (НДС) сталежелезобетонных пролетных строений, которые эксплуатируются на территории Дальнего Востока, для определения обоснованной точки начального отсчета при проработке этапов выдомкрачивания;
- разработка технологических приемов по разгрузке сжатого верхнего пояса в двутавровом сталежелезобетонном сечении для повышения устойчивости изгибно-крутильной формы сплошностенчатых балок при специфическом нагружении;
- выявление возможности изыскания дополнительных ресурсов грузоподъемности металлических главных балок в результате перераспределения усилий в поперечном сечении пролетного строения.

Известно, что возведение балочных сталежелезобетонных пролетных строений сопровождается возможностью последовательного вовлечения их элементов в совместную работу при возведении пролёта путем перераспределения усилий между стальной и железобетонной частями. Данный вопрос является решением прямой задачи с целью возведения конструкции, основные аспекты широко освещены в работах Н. Н. Стрелецкого [6], И. Ю. Белуцкого [7], А. В. Перельмутера [8], а также В. В. Бирюлева [9]. Однако в настоящее время недостаточно освещены положения, которые бы решали обратную задачу – по разгрузке сжатого верхнего пояса в двутавровом сечении эксплуатируемого сталежелезобетонного пролетного строения для проведения работ по реконструкции. Именно этот вопрос становится главенствующим при реализации технологии строительно-монтажных работ по половине проезжей части при одновременном пропуске транзитного движения, так как реализация процесса выдомкрачивания конструкций создает предпосылки для выполнения условий прочности и устойчивости изгибно-крутильной формы сплошностенчатых балок при специфическом нагружении. Таким образом, формирование технологических операций регулирования внутренних усилий в сталежелезобетонном сечении для разгрузки обжатого верхнего пояса главных балок и плавного преобразования системы «сталежелезобетон» в «сталь + бетон» необходимо для обеспечения эффективности и безопасности при реконструкции пролетного строения по половине проезжей части [10].

В проработке данного вопроса принимаются замечания И. Ю. Белуцкого [4, 5, 11] о необходимости сопровождения рассматриваемых работ подведением под реконструируемые пролетные строения двух временных опор. С целью модернизации конструктивно-технологического обеспечения рассматриваемой технологии предлагается применение одной временной опоры по центру пролетного строения.

В качестве объекта исследования принято двухбалочное сталежелезобетонное пролетное строение с расчетным пролетом 42,5 м в соответствии с типовым проектом № 43282КМ, с габаритом проезжей части 8,0 метров. Ввиду того, что данные конструкции наиболее часто представлены на искусственных сооружениях такого типа в Дальневосточном регионе [1].

**Предыстория нагружения пролетного строения** необходима для определения начальной точки отсчета перечня технологических операций по регулированию внутренних усилий в сталежелезобетонном сечении с целью обеспечения механической безопасности металлоконструкций на этапе демонтажа существующей плиты проезда. Для анализа конечного НДС моделируются две расчетные схемы пролетного строения в соответствии с процессом возведения [8, 12, 13]. Так, первая схема выполняется при возведении строго по типовому

проекту 43282КМ, вторая – при регулировании внутренних усилий при помощи выдомкрачивания с одной временной опоры посередине расчетного пролета. При второй технологической последовательности строительных работ предполагается разгрузка верхнего пояса и, как следствие, полноценное включение сталежелезобетонного сечения в его «классическую» работу [6], когда бетон плиты проезда воспринимает основные сжимающие усилия. Общая последовательность работ, моделируемых для двух расчетных случаев в программном комплексе «Midas Civil», представлена на рис. 1.

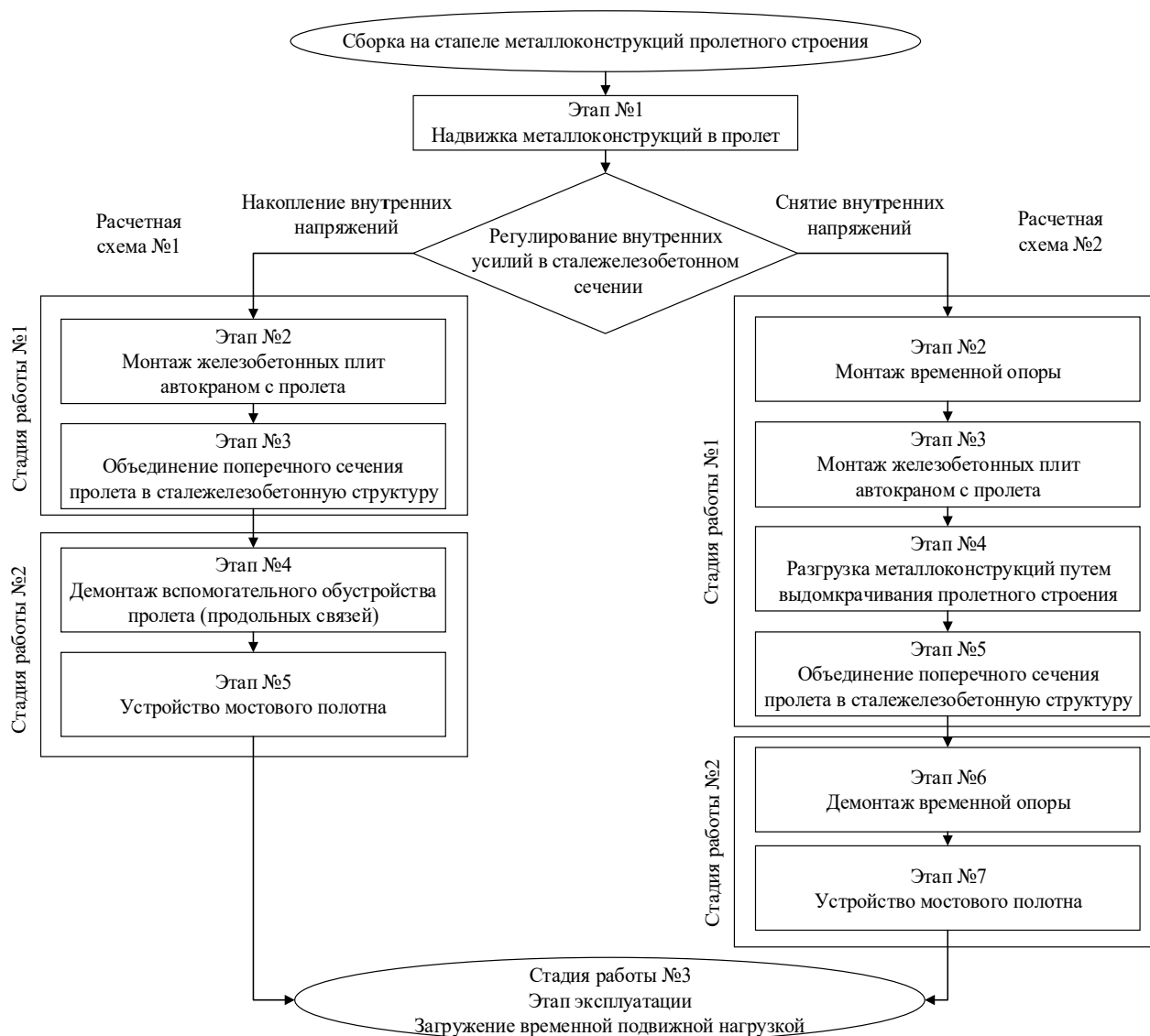


Рис. 1. Блок-схема моделирования строительно-монтажных работ

Результаты численного моделирования технологии возведения с применением временной опоры полностью согласуются с теоретическими постулатами регулирования усилий [6]. Таким образом, при сравнительном анализе двух способов возведения сталежелезобетонного пролетного строения с геометрическими характеристиками металлоконструкций и железобетонных плит по типовому проекту № 43282КМ выявляется значительный перегруз металлической части сечения при первом варианте конструирования ввиду накопления внутренних напряжений металлом главных балок и, как следствие, неполного включения железобетонной части пролета в работу сталежелезобетонного сечения. Итоговые схемы работы конструкций представлены на рис. 2.

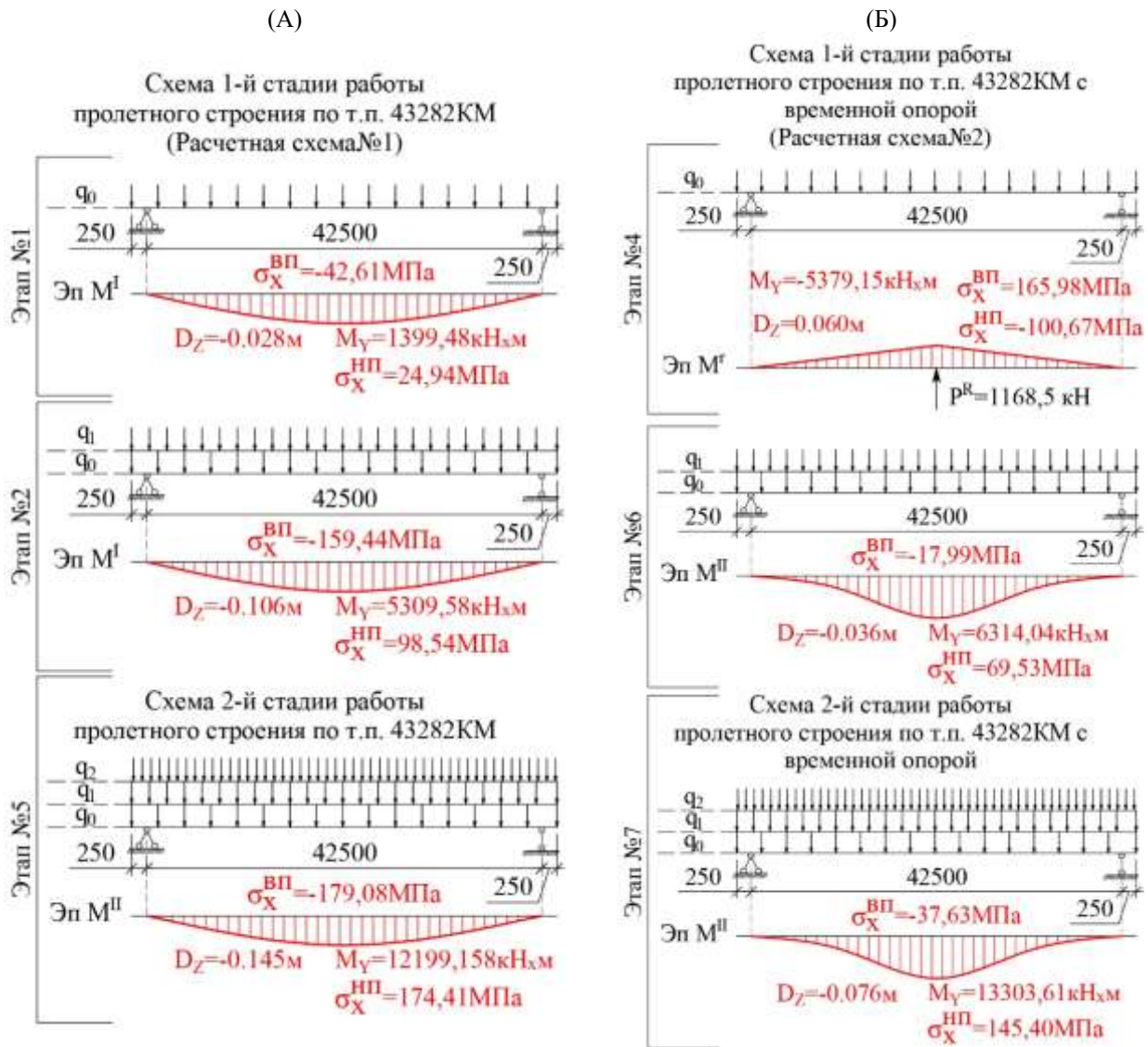


Рис. 2. Стадии работы разрезного сталежелезобетонного пролетного строения при моделировании стадий возведения:

- (А) схема возведения по типовому проекту; (Б) схема с использованием временной опоры;
- $q^0$  – масса металлоконструкций;  $q^1$  – масса железобетонной плиты проезжей части;
- $q^2$  – масса элементов мостового полотна, дорожной одежды, ограждений

Для определения достоверности полученных результатов численного моделирования были произведены поверочные расчеты аналитическим методом. Контрольные вертикальные перемещения с учётом симметрии нагрузки и компоновочных решений пролётного строения определены при действии от постоянной составляющей распределённой нагрузки из формулы Мора – Максвелла:

$$f = 2 \frac{1}{E_{st/b}} \sum_{i=1}^{i=4} \frac{1}{j_i} \int_{L_{i-1}}^{L_i} MdL .$$

Таким образом, особенностью внутреннего предварительного напряжения с перераспределением силовых факторов является предварительный выгиб металлоконструкций и снятие сжимающих усилий в верхнем поясе после объединения железобетона и стали. Тогда при монтаже плит по типовому проекту центральная часть металлоконструкций пролета перегружена, о чем свидетельствует средняя разница полученных нормальных сжимающих напряжений в

верхнем поясе. Данный факт выявлен при моделировании двух вариантов возведения конструкции. При сравнении вариантов строительства в 141,45 МПа для конечно-элементной модели пролетного строения и 154,43 МПа при аналитическом методе возникают большие вертикальные упругие прогибы. Данное явление перегруза создает предпосылку к восстановлению потребительских способностей путем исчерпания металлоконструкциями ресурса грузоподъемности за счет более рационального использования возможностей существующих конструкций путем трансформации из сталежелезобетонного сечения в цельнометаллическое. Результаты численного и аналитического моделирования представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты численного и аналитического моделирования стадий работы сталежелезобетонного пролетного строения при различных технологиях возведения

Результаты численного моделирования				
Технология возведения пролетного строения	M, кН·м	D <sub>z</sub> , мм (середина пролета)	σ <sub>x</sub> , МПа (верхний пояс)	σ <sub>x</sub> , МПа (нижний пояс)
По типовому проекту 432825КМ. Расчетная схема № 1	12 199,15	-145,21	-179,08	174,41
То же с временной опорой. Расчетная схема № 2	13 303,61	-75,55	-37,63	145,40
Результаты аналитического моделирования				
По типовому проекту 432825КМ. Расчетная схема № 1	12 239,19	-160,00	-190,16	161,51
То же с временной опорой. Расчетная схема № 2	12 239,19	-81,00	-35,73	133,83

Следовательно, первоначальным этапом перед стадией демонтажа железобетонных плит проезжей части является разгрузка сжатого верхнего пояса путем выдомкрачивания пролетного строения по центру пролета, исходной точкой которого будут являться параметры эксплуатируемых пролетных строений по типовому проекту, смоделированные ранее. Выдомкрачивание служит для исключения влияния факторов внутреннего напряжения при дальнейшем моделировании поведения конструкции на различных этапах рассматриваемой технологии, а также создания резерва механической надежности пролетного строения с целью предотвращения потери устойчивости изгибно-крутильной формы сплошностенчатыми балками (временная опора, таким образом, будет играть роль следящей системы в общей работоспособности конструкции на время проведения работ) [10, 11].

**Характеристика технологических операций в обратной задаче перераспределения усилий при помощи временной опоры.** Рассматривается на примере конструкций по типовому проекту 43282КМ и подразделяется на пять этапов. Предлагаемая последовательность работ по разгрузке сжатого верхнего пояса решает обратную задачу моделирования работы сталежелезобетонного пролетного строения, что создает резерв устойчивости металлоконструкций при проведении дальнейших операций по смене плиты проезда и условия для более полного исчерпания ресурса грузоподъемности пролетного строения за счет создания внутренних усилий предварительного напряжения в главных балках. Общая последовательность работ представлена на рис. 3.

Необходимо отметить, что часто чрезмерный объем дорожной одежды на участке мостового полотна, скопившийся за годы эксплуатации сооружения, потенциально сопутствует потере строительного подъема. В свою очередь, это влечет за собой необходимость дополнительного учета резерва высоты выдомкрачивания и грузоподъемности толкающих устройств на значения постоянной нагрузки, превышающие указанные в типовом проекте. В каждом индивидуальном случае эксплуатируемого пролетного строения следует рассчитывать значение второй стадии на основании его инструментального обследования. Однако чрезмерное

увеличение постоянной нагрузки не является первостепенным фактором в утрате металлоконструкциями заложенного в них конструктивного прогиба на стадии возведения. При рассмотрении в отдельности каждого сооружения имеют место и другие немаловажные факторы (к примеру, возможные отступления от изначальных конструктивных размеров на стадии сборки металлоконструкций). Однако и игнорировать данный аспект при реализации технологии выдомкрачивания невозможно. Так, при выдомкрачивании эксплуатируемого пролетного строения на первом этапе необходимо учитывать существующую постоянную нагрузку, актуализированную в соответствии с реальными геометрическими параметрами конструктивов (в частности, мостового полотна), которые зачастую отличны от типового проекта.

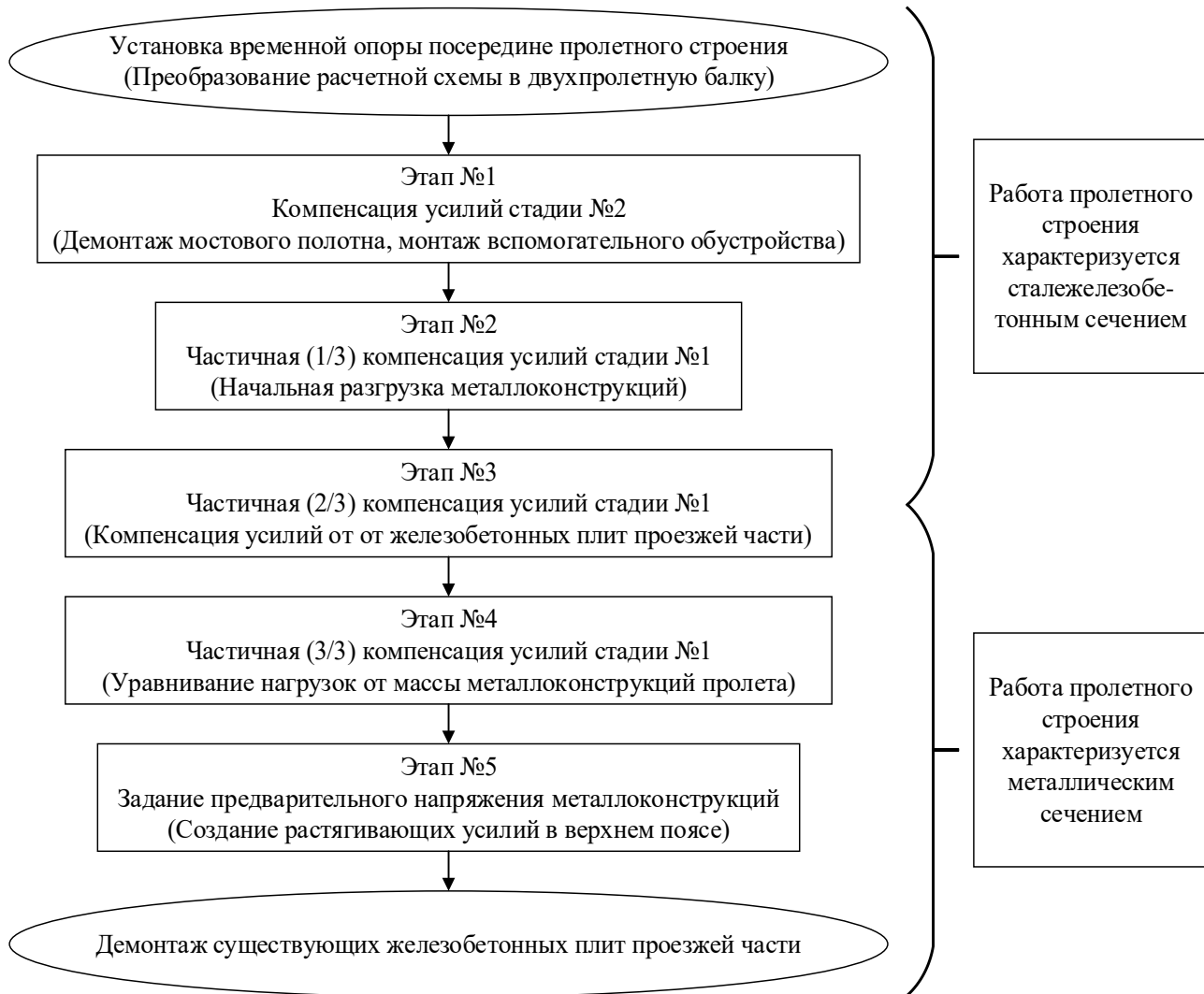


Рис. 3. Линейная блок-схема алгоритма выдомкрачивания пролетного строения

Технологические операции по выдомкрачиванию пролетного строения и усилия в конструкциях от технологических операций были получены при помощи метода конечных элементов путем реализации модели в программном комплексе «Midas Civil» на примере сталежелезобетонного пролетного строения по типовому проекту 43282КМ.

Подъем пролетного строения производится одновременно с шести точек. Четыре точки расположены на постоянных опорах, две – в центре пролета, в створе вспомогательной точки опирания. Для предотвращения концентрации чрезмерных опорных реакций на временной опоре и, как следствие, упрощения конструкции и уменьшения металлоемкости. Схема приложения усилий в расчетной конечно-элементной модели обозначена на рис. 4.

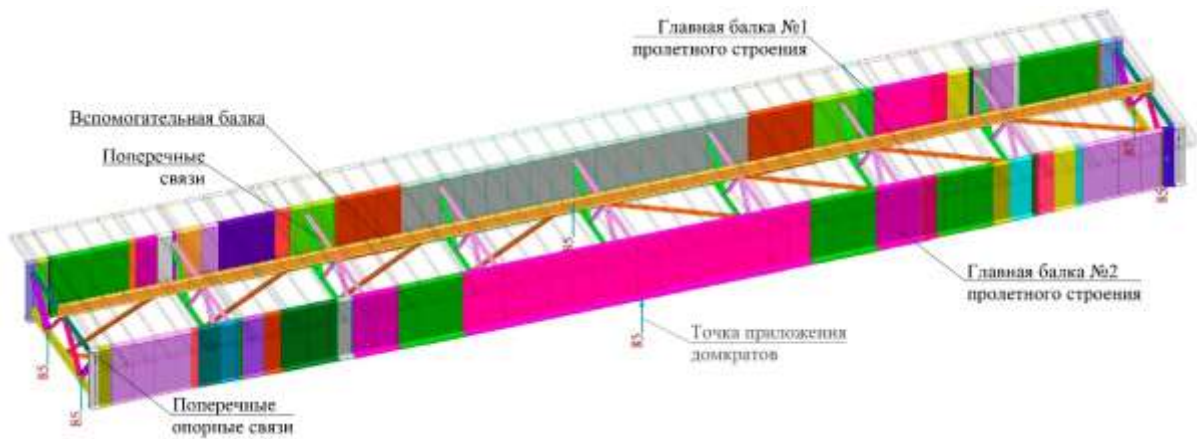


Рис. 4. Схема приложения усилий в объемной пространственной модели ПК «Midas Civil» (железобетонная плита условно не показана)

На время производства работ по поднятию пролета, выверке высотного положения конструкций временной опоры и опусканию на шесть точек опирания металлоконструкций временно прекращается движение транзитного транспорта. Перед производством работ по выдомкрачиванию происходит трансформация расчетной схемы из однопролетной балки в двухпролетную неразрезную систему (рис. 5А).

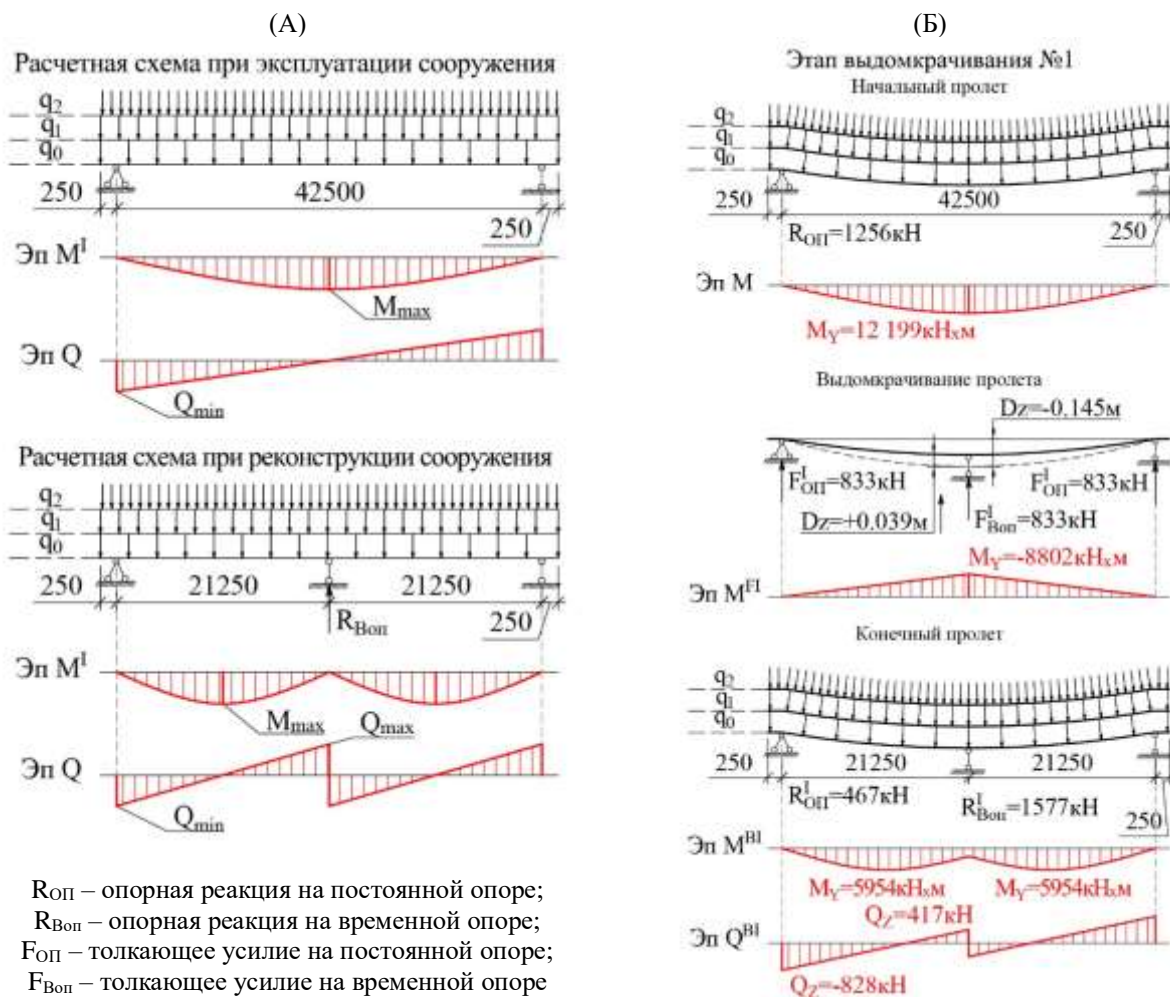


Рис. 5. Схемы работы конструкций на первом этапе выдомкрачивания: (А) изменение расчетной схемы; (Б) выдомкрачивание пролетного строения на первом этапе

Первый этап направлен на компенсацию действия в виде постоянных нагрузок обустройства мостового полотна стадии работы № 2 (от веса дорожной одежды, барьерных и перильных ограждений). Предусматривается выдомкрачивание пролётного строения с временной опоры на величину второй стадии возведения с отсчётом от исходного НДС конструкции (рис. 5Б).

Завершается первый этап работами по демонтажу обустройства мостового полотна, дорожной одежды и установке временных ограждений проезжей части, а также вспомогательных подмостей для рабочих. Движение транзитного транспорта при этом приостанавливается только на время подъема пролета до момента его фиксации на шести точках (четырёх на постоянных опорах и двух на временной). При производстве работ по демонтажу элементов мостового полотна движение осуществляется в непрерывном режиме по одной полосе в реверсивном порядке.

После удаления постоянной нагрузки, характеризующей вторую стадию работы пролётного строения, перераспределение усилий в расчетной схеме ввиду разгрузки конструкций путем демонтажа обустройств характеризует нивелирование усилий выдомкрачивания первого этапа, закладывая в сталежелезобетонное сечение отрицательный изгибающий момент, создающий предпосылки для дальнейшей разгрузки пролета, и возможности более точного контроля поведения конструкций.

На данном этапе учитываются доводы И. Ю. Белуцкого, что в расчётах по определению опорной реакции использованы моменты инерции сечений балки, бетонная часть которой наделена значением начального модуля упругости  $E_b$  с учётом предположения о том, что в течение короткого времени выдомкрачивание будет сопровождаться преимущественно мгновенными деформациями без развития деформаций упругого последствия в железобетонной плите [11]. Распределение внутренних усилий от постоянных нагрузок по завершении первого этапа отражено на рис. 6А.

Второй этап выдомкрачивания (рис. 6Б) знаменует начало бифуркации системы сталежелезобетонного пролётного строения на составные части и заключается в высвобождении сжатого верхнего пояса и придании ему положительного изгибающего момента для создания запаса устойчивости при проведении дальнейших работ по переустройству плиты проезжей части. Данный этап нацелен на обеспечение восприятия металлоконструкциями 50 % вертикального усилия от железобетонных плит.

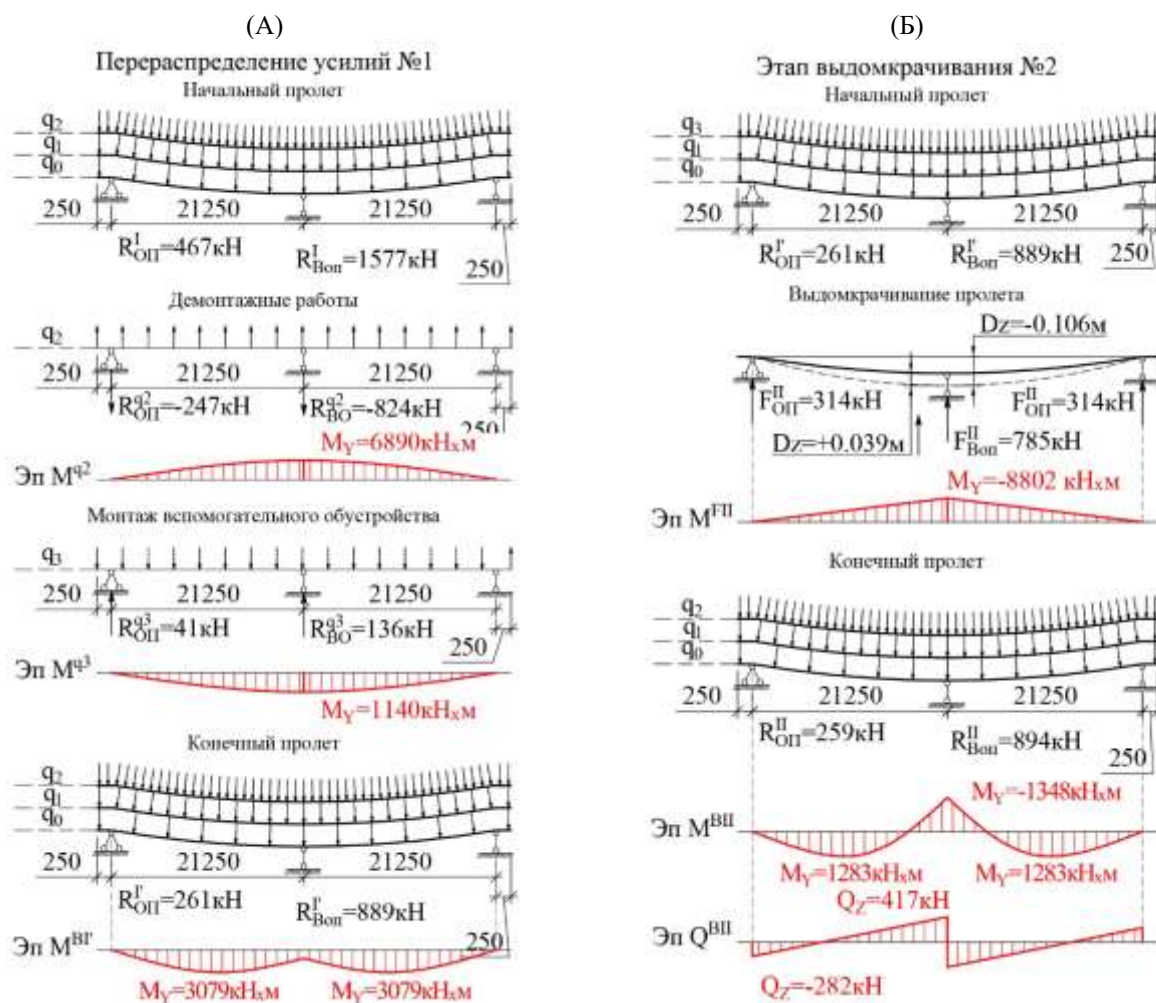
При этом следует отметить, что второй и третий этапы направлены на компенсацию нагрузки непосредственно от железобетонных плит проезда и разделяются только для обеспечения безопасности производства работ постепенным и плавным выключением железобетонной плиты из совместной работы ввиду движения транзитного транспорта.

Третий этап характеризуется полной компенсацией постоянных нагрузок от железобетонных плит проезда. Данный этап предполагает полное исключение из совместной работы в сталежелезобетонном сечении металла главных балок и бетона плиты проезда, т. е. возникновение участков пластической деформации бетона в участке объединения стальной части и железобетона плиты проезда и, как следствие, возникновение пластических шарниров в расчетной схеме неразрезной балки. Соответственно происходит перераспределение моментов и опорных реакций из системы сталежелезобетонного сечения в раздельную работу стальной балки и железобетонной плиты.

При определении деформационных характеристик и перераспределении силовых факторов учитываются положения, выведенные В. Г. Ереминым и А. В. Козловым в части учета зависимости смещения железобетонной плиты по стальной балке от сдвиговой жесткости стыка [14, 15]. Схема работы пролётного строения при реализации третьего этапа представлена на рис. 7.

Четвертый этап (рис. 8А) предполагает полную разгрузку пролётного строения от постоянных нагрузок и абсолютную компенсацию вертикальных деформаций, перевод расчет-

ной схемы в «нулевое положение». Подразумеваем, что далее при расчете железобетон не участвует в совместной работе со стальным сечением, плиты свободно опираются на верхний пояс главных балок.



**Рис. 6.** Схемы работы конструкций на втором этапе выдомкрачивания:  
(А) перераспределение усилий от постоянных нагрузок на пролетном строении;  
(Б) выдомкрачивание пролетного строения при проведении второго этапа;  
 $q^3$  – масса вспомогательных устройств, временных ограждений

НДС пролетного строения данного этапа принимается в качестве контроля, заложенного в предпосылки оценки устойчивости конструкций стальной части, в предположении того, что ключевым фактором в обеспечении механической надежности сооружения будет являться обеспечение условия изгибно-крутильной устойчивости сплошностенчатыми балками, не подкрепленными поперечными ребрами жесткости [10, 16, 17].

Пятый, финальный, этап выдомкрачивания (рис. 8Б) заключается в придании сжато-сжатому верхнему поясу при рядовой эксплуатации сооружения положительного изгибающего момента.

Предполагаемое конечное НДС системы пролетного строения может быть использовано в дальнейшем после монтажа блоков ортотропной плиты для повышения грузоподъемности вследствие перераспределения нормальных и касательных напряжений в металлоконструкциях [18, 19], в случае когда будет затянут последний высокопрочный болт на стыке нижнего пояса ортотропной плиты с верхним поясом главных балок, с последующим демонтажем временной опоры.

Стоит отметить, что полноценное преднапряжение существующих металлоконструкций для более полного исчерпания ресурсов грузоподъемности довольно затруднительно в условиях непрерывного движения транзитного транспорта ввиду большой трудоемкости работ по фиксации концов пролетного строения к постоянным опорам в случае выдавливания по центру. Помимо этого, становится особо острым вопрос устойчивости стенки балки в участке воздействия домкратных установок. Таким образом, создание внутренних усилий преднапряжения ограничивается упругостью стального сечения пролета, заканчиваясь на моменте, когда опорные реакции на постоянных опорах стремятся к нулю.

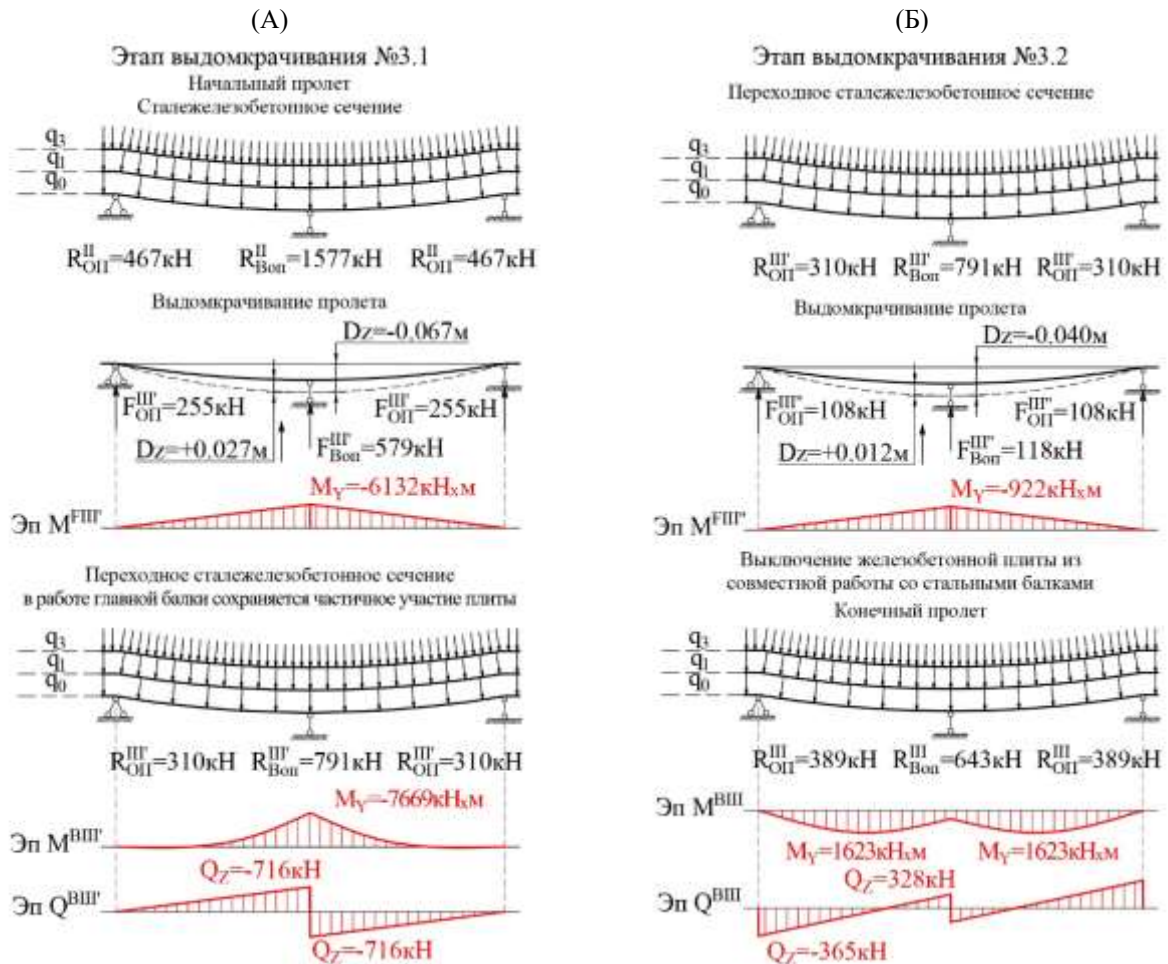


Рис. 7. Схемы работы конструкций на третьем этапе выдомкрачивания

В результате пятый этап создает предварительные усилия в стальном сечении пролета, равные 61,97 % от максимально возможных. После присоединения ортотропной плиты и снятия усилий предварительного напряжения стенка за счет обратных упругих деформаций обжимает сечение тавра, соответствующее верхнему поясу главной балки, создавая предпосылки к более полному исчерпанию ресурса грузоподъемности металлоконструкций. Результаты этапов выдомкрачивания представлены в табл. 2.

Таким образом, перечень технологических операций по регулированию внутренних усилий в сталежелезобетонном сечении с помощью временной опоры, расположенной по центру расчетного пролета, создает предпосылки для резерва устойчивости металлоконструкций при проведении дальнейших операций по смене плиты проезда и условия для более полного исчерпания ресурса грузоподъемности пролетного строения за счет создания внутренних усилий предварительного напряжения в главных балках.

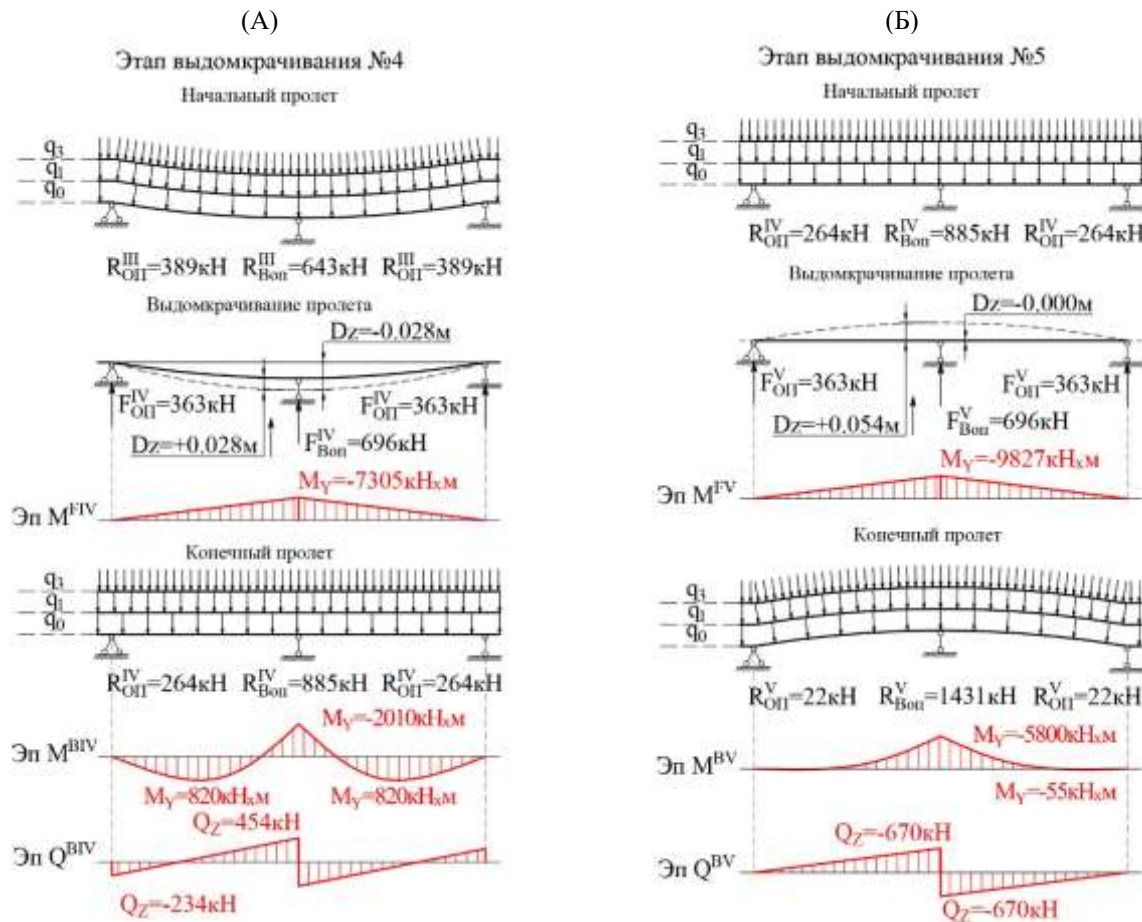


Рис. 8. Схемы работы конструкций на завершающих этапах выдомкрачивания: (А) параметры четвертого этапа; (Б) параметры пятого этапа

Таблица 2

Усилия в главной балке в процессе выдомкрачивания

Номер этапа	Прогиб центра пролета, м	Высота выдомкрачивания, м	Нормальные напряжения в главной балке, МПа					
			Первый пролёт (L <sub>1/2</sub> = 21,25 м)		Центр пролета		Второй пролет (L <sub>1/2</sub> = 21,25 м)	
			Верхний пояс	Нижний пояс	Верхний пояс	Нижний пояс	Верхний пояс	Нижний пояс
I	-0,145		-22,4	12,7	-37,4	145,1	-22,4	12,7
		+0,039	-16,8	66,0	-13,7	54,3	-16,8	66,0
II	-0,106		-	-	-	-	-	-
		+0,039	-33,3	18,4	33,2	-111,2	-33,3	18,4
III	-0,067							
		+0,027	21,9	-14,1	22,5	-81,4	21,9	-14,1
	-0,040							
VI		+0,012	-52,1	46,6	-22,3	87,4	-52,1	46,6
	-0,028							
V	0,000		-28,8	23,5	52,6	-35,5	-28,8	23,5
V		+0,054	16,1	-32,1	182,8	-119,7	16,1	-32,1
	+0,054							

**Выводы и заключение.** При формировании главенствующих аспектов, сопутствующих обеспечению механической безопасности сталежелезобетонных конструкции, для реализации технологии смены плиты проезда по половине проезжей части важным является оценка

распределения внутренних усилий между обжатой металлической и железобетонной частями сечения. Рассмотренная последовательность работ позволит постепенно выключить из общей работы железобетонную плиту, плавно разделяя структуру сечения на отдельные несущие конструкции, что будет создавать резерв механической надежности пролетного строения с целью предотвращения потери устойчивости изгибно-крутильной формы сплошнотенчатыми балками [16], значительно снижая вероятность выпучивания краевых зон полки, не подкрепленной ребром жёсткости. Соответственно временная опора будет играть роль следящей системы в общей работоспособности конструкции на время проведения работ [11]. Данный набор операций служит для исключения влияния факторов внутреннего напряжения при дальнейшем моделировании поведения конструкции на различных этапах рассматриваемой технологии замены существующей железобетонной плиты проезда по половине проезжей части без устройства временной объездной дороги, а также позволит за счет создания внутренних усилий предварительного напряжения в главных балках создать предпосылки для более полного исчерпания ресурса грузоподъемности существующих металлоконструкций пролетного строения.

Произведенный анализ работы конструкции пролетного строения по типовому проекту № 43282КМ на этапах выдомкрачивания формирует условия для детального изучения следующих аспектов разрабатываемой технологии:

- оценки устойчивости изгибно-крутильной формы главными балками при сжатом состоянии верхнего пояса в реализации промежуточных этапов выдомкрачивания, когда пояс не до конца разгружен, и организации движения транзитного транспорта по смежной полосе;
- детальной оценки сложнапряженного состояния главных балок и работы металлоконструкций в целом из-за изменения одного пролетного строения большой протяженности в двухбалочную неразрезную сталежелезобетонную систему при специфических условиях нагружения [10].

#### Библиографический список

1. Шевченко Н. С., Смагина Е. В., Белуцкий И. Ю. Статистический обзор по сталежелезобетонным мостам как аргументы в пользу их реновации и выборе ее эффективной реализации // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. 2022. № 1. С. 112–120. EDN: NICANL.
2. Белуцкий И. Ю., Лапин А. В. Практика восстановительных работ железобетонной плиты проезда на автодорожных мостах // Дальний Восток. Автомобильные дороги и безопасность движения: междунар. сб. науч. тр. / Отв. ред. А. В. Каменчуков. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2020. Вып. 20. С. 152–155. EDN: NEIPJF.
3. Белуцкий И. Ю., Лазарев И. В. Трещиностойкость и несущая способность поперечных сечений плиты проезда сталежелезобетонных мостов // Строительная механика и расчет сооружений. 2022. № 3. С. 2–8
4. Белуцкий И. Ю., Шевченко Н. С., Смагина Е. В. Организационно-технологические аспекты смены плиты проезда на сталежелезобетонных мостах в условиях транзитного движения // Дальний Восток: проблемы развития архитектурно-строительного комплекса. 2023. № 1. С. 84–92. EDN: PLBZDX.
5. Белуцкий И. Ю., Лазарев И. В. Совершенствование специальных вспомогательных сооружений и устройств и технологий, сопутствующих реконструкции сталежелезобетонных мостов через водотоки // Электронный сетевой политематический журнал «Научные труды КубГТУ». 2022. № 1. С. 1–12. EDN: FUPQJK.
6. Стрелецкий Н. Н. Сталежелезобетонные пролетные строения мостов. М.: Транспорт, 1981. 360 с.

7. Белуцкий И. Ю. Совершенствование методов оценки работоспособности эксплуатируемых сталежелезобетонных пролетных строений. Владивосток: Дальнаука, 2003. 280 с.
8. Перельмутер А. В., Кабанцев О. В. Анализ конструкций с изменяющейся расчетной схемой. М.: СКАД СОФТ; АСВ, 2015. 148с.
9. Бирюлев В. В. Металлические неразрезные конструкции с регулированием уровня опор. М.: Стройиздат, 1984. 88 с.
10. Шевченко Н. С., Каменчуков А. В., Пиотрович А. А. Работоспособность двухбалочных сталежелезобетонных пролетных строений при специфических случаях нагружения // Вестник евразийской науки. 2025. Т. 12, № 4. URL: <https://t-s.today/PDF/16SATS425.pdf>. DOI: 10.15862/16SATS425.
11. Belutsky I. Yu., Kudryavtsev S. A., Lazarev I. V. Justification of the parameters of regulation of forces for steel-reinforced concrete span structures from project “43282 km” by TSNIIPSK // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. № 18. С. 407–416.
12. Саражинский А. С., Ефрюшин С. В. Исследование напряженно-деформированного состояния объемно-блочных конструкций с учетом стадийности возведения // Строительная механика и конструкции. 2022. № 3 (34). С. 99–114. DOI: 10.36622/VSTU.2022.34.3.008. EDN: GKRGZC.
13. Боровиков А. Г., Картопольцев В. М. Оценка грузоподъемности сталежелезобетонных пролетных строений автодорожных мостов // Вестник ТГАСУ. 2013. № 4. С. 273–279.
14. Еремин В. Г., Козлов А. В. Аналитическая зависимость смещения от сдвиговой жесткости шва между железобетонной плитой и стальной балкой в пролетных строениях мостов // Научный журнал строительства и архитектуры. 2019. № 3 (55). С. 94–104. DOI: 10.25987/VSTU.2019.55.3.010. EDN: ECUHFU.
15. Козлов А. В. Расчет сталежелезобетонных мостов с учетом сдвига плиты по верхнему поясу балки // Строительная механика и конструкции. 2018. № 4 (19). С. 64–71. EDN: YPUHVJ.
16. Шевченко Н. С., Белуцкий И. Ю. Актуальность всесторонней оценки условий устойчивости в элементах металлоконструкции сталежелезобетонных пролетных строений при реконструкции плиты проезжей части // Дальний Восток. Автомобильные дороги и безопасность движения: сб. науч. тр. Хабаровск: Тихоокеанский государственный университет, 2024. С. 110–116. EDN: RPIFEN.
17. Кузнецова С. В., Козлов А. В. Причины аварий мостовых сооружений на территории РФ и стран СНГ // Дороги и мосты. 2018. № 1 (39). С. 16. EDN: YXTZUL.
18. Кравчук Е. В., Белуцкий И. Ю., Кравчук В. А. Параметры несущей способности. Напряжения и деформации на стадии изготовления стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки // Транспорт Азиатско-Тихоокеанского региона. 2024. № 3 (40). С. 18–27. EDN: EJDQRK.
19. Кравчук Е. В., Иодчик А. А., Кравчук В. А. Теоретическое и экспериментальное обоснование параметров несущей способности стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки // Строительная механика и конструкции. 2025. № 1 (44). С. 63–78. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.006. EDN: PMWYPD.

#### References

1. Shevchenko N. S., Smagina E. V., Belutskiy I. Yu. Statistical review of composite bridges as arguments in favor of their renovation and the choice of its effective implementation. Far East: Problems of Development of the Architectural and Construction Complex. No. 1. 2022. Pp. 112–120. EDN: NICANL.
2. Belutskiy I. Yu., Lapin A. V. Practice of restoration work of reinforced concrete driveway slabs on highway bridges // Far East. Highways and Traffic Safety: International. Collection of

Scientific Papers. Ed. A. V. Kamenchukov. Khabarovsk: Pacific State University, 2020. Issue 20. Pp. 152–155. EDN: NEIPJF.

3. Belutskiy I. Yu., Lazarev I. V. Crack Resistance and Bearing Capacity of Cross-Sections of Driveway Slabs of Composite-Concrete Bridges // *Structural Mechanics and Analysis of Structures*. No. 3. 2022. Pp. 2–8

4. Belutskiy I. Yu., Shevchenko N. S., Smagina E. V. Organizational and technological aspects of replacing driveway slabs on composite-concrete bridges under transit traffic conditions // *Far East: Problems of Development of the Architectural and Construction Complex*. No. 1. 2023. Pp. 84–92. EDN: PLBZDX.

5. Belutskiy I. Yu., Lazarev I. V. Improvement of special auxiliary structures, devices, and technologies accompanying the reconstruction of composite-concrete bridges over watercourses. *Electronic Online Polythematic Journal "Scientific Works of KubSTU"*. No. 1. 2022. Pp. 1–12. EDN: FUPQJK.

6. Streletsky N. N. *Steel-Reinforced Concrete Bridge Superstructures*. M.: Transport, 1981. 360 p.

7. Belutsky I. Yu. *Improving Methods for Assessing the Performance of Operated Steel-Reinforced Concrete Superstructures*. Vladivostok: Dalnauka, 2003. 280 p.

8. Perelmuter A. V., Kabantsev O. V. *Analysis of Structures with a Changing Design Scheme*. Moscow: SKAD SOFT; ACB, 2015. 148 p.

9. Biryulev V. V. *Continuous Metal Structures with Adjustable Support Levels*. Moscow: Stroyizdat, 1984. 88 p.

10. Shevchenko N. S., Kamenchukov A. V., Piotrovich A. A. Performance of double-girder steel-reinforced concrete span structures under specific loading cases // *Bulletin of Eurasian Science*. Vol. 12. No. 4. 2025. URL: <https://t-s.today/PDF/16SATS425.pdf>. DOI: 10.15862/16SATS425.

11. Belutsky I. Y., Kudryavtsev S. A., Lazarev I. V. Justification of the Parameters of Regulation of Forces for Steel-Reinforced Concrete Span Structures from Project “43282 km” by TSNIIPSK // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No. 18. 2022. Pp. 407–416.

12. Sarazhinsky A. S., Efryushin S. V. Study of the stress-strain state of volumetric block structures taking into account the staged construction // *Structural Mechanics and Structures*. No. 3 (34). 2022. Pp. 99–114. DOI: 10.36622/VSTU.2022.34.3.008. EDN: GKRGZC.

13. Borovikov A. G., Kartopoltsev V. M. Assessment of the load-bearing capacity of steel-reinforced concrete superstructures of highway bridges // *Bulletin of TSUACE*. No. 4. 2013. Pp. 273–279.

14. Eremin V. G., Kozlov A. V. Analytical dependence of the displacement on the shear stiffness of the joint between a reinforced concrete slab and a steel beam in bridge superstructures // *Scientific Journal of Construction and Architecture*. No. 3 (55). 2019. Pp. 94–104. DOI: 10.25987/VSTU.2019.55.3.010. EDN: ECUHFU.

15. Kozlov A. V. Calculation of composite bridges taking into account the shear of the slab along the upper chord of the beam // *Structural Mechanics and Structures*. No. 4 (19). 2018. Pp. 64–71. EDN: YPUHVJ.

16. Shevchenko N. S., Belutskiy I. Yu. Relevance of a comprehensive assessment of stability conditions in metal structure elements of composite-concrete superstructures during roadway slab reconstruction // *Far East. Highways and Traffic Safety: Coll. of Scientific Papers*. Khabarovsk: Pacific National University, 2024. Pp. 110–116. EDN: RPIFEN.

17. Kuznetsova S. V., Kozlov A. V. Causes of bridge failures in the Russian Federation and the CIS Countries // *Roads and Bridges*. No. 1 (39). 2018. P. 16. EDN: YXTZUL.

18. Kravchuk E. V., Belutskiy I. Yu., Kravchuk V. A. Bearing capacity parameters. Stresses and strains at the manufacturing stage of steel beams prestressed by web drawing // *Transport of the Asia-Pacific Region*. No. 3 (40). 2024. Pp. 18–27. EDN: EJDQRK.

19. Kravchuk E. V., Iodchik A. A., Kravchuk V. A. Theoretical and experimental substantiation of the bearing capacity parameters of steel beams prestressed by web drawing. *Structural Mechanics and Structures*. No. 1 (44). 2025. Pp. 63–78. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.006. EDN: PMWYPD.

## WEIGHT CAPACITY OF STEEL-REINFORCED CONCRETE SUPERSTRUCTURES WHEN REGULATING INTERNAL FORCES

N. S. Shevchenko <sup>1</sup>, A. V. Kamenchukov <sup>2</sup>

Pacific National University <sup>1,2</sup>  
Russia, Khabarovsk

---

<sup>1</sup> Postgraduate Student of the Higher School of Transport Construction, Geodesy and Land Management, tel.: +7(924)409-54-51, e-mail: nik\_shev\_most@mail.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Prof. of the Higher School of Transport Construction, Geodesy and Land Management, tel.: +7(924)301-93-65, e-mail: 006641@togudv.ru

---

**Problem statement.** Formation of a list of technological operations for regulating internal forces in double-girder steel-reinforced concrete span structures for unloading the compressed upper chord of the main beams in order to increase the stability of the structure as a whole during the reconstruction of a span along half of the roadway.

**Results.** The loading history of the steel-reinforced concrete superstructure is outlined as the starting point for a list of technological operations to regulate internal forces. Five stages of jack up are defined for smoothly disengaging the upper chord in the I-section and the reinforced concrete slab from combined section, increasing the flexural-torsional stability of the solid-wall main beams. And also allows creates internal prestressing forces in the main beams to more fully exhaust the load-bearing capacity of the existing superstructure steel structures.

**Conclusions.** The obtained results of the theoretical experiment, implemented through analytical and numerical modeling, show high convergence of the results, which makes it possible to judge the reliability of the results obtained. The presented methodology can be reflected in the implementation of the practical component of the technological support for the reconstruction of a steel-reinforced concrete superstructure.

**Keywords:** steel-reinforced concrete superstructure, stress-strain state of bridge structures, jacking, regulation of internal forces, prestressing, temporary support.

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

УДК 624.131.551.4; 624.07  
DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.008

## ОПИСАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ ЧЕТЫРЕХЭТАЖНОГО КОРПУСА ВГУ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ НАГРУЖЕННОЙ ГОРОДСКОЙ УЛИЦЫ

С. Ю. Гриднев<sup>1</sup>, В. С. Сафронов<sup>2</sup>, В. В. Дятлов<sup>3</sup>, А. В. Вакулин<sup>4</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>  
Россия, г. Воронеж  
Российский университет транспорта (МИИТ)<sup>4</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел. +7(910)346-60-19,  
e-mail: gridnev\_s\_y@rambler.ru

<sup>2</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел. +7(473)271-52-30, e-mail: vss@mail.ru

<sup>3</sup> Аспирант кафедры строительной механики, тел. +7(901)874-91-93,  
e-mail: dyatlovvladislavvladimirovich@gmail.com

<sup>4</sup> Аспирант кафедры мостов и тоннелей, тел. +7(915)036-26-57, e-mail: dron.vakulin@gmail.com

Проведены натурные измерения уровня колебаний конструкций учебного корпуса от воздействия транспортного потока. Приведена программа выполнения измерений и методика инструментальной оценки вибрации вблизи проезжей части, у стен учебного корпуса и в характерных точках внутри него. Описана приборная база натурных измерений и техника установки приборов. Выполнена обработка полученных результатов с целью их анализа и дальнейшего их применения для решения поставленной задачи численными методами. Представлены некоторые результаты и выявлена регулярная составляющая транспортной вибрации. Рассмотрены методы оценки влияния вибрации на конструктивные элементы сооружений и организм человека. Определены некоторые закономерности и особенности распространения вибрации от транспортного потока через грунтовое основание к сооружению и его конструктивным элементам. Выявлено превышение уровня вибрации, допускаемого санитарными нормами.

**Ключевые слова:** транспортный поток, динамическое воздействие, грунтовое основание, сейсмическая волна, виброметрические измерения, акселерограммы вибрационных волн.

**Введение.** Вибрация способна негативно влиять как на состояние строительных конструкций, так и на человеческий организм. Периодическое воздействие вибрации на общественные и жилые здания может как снижать несущую способность его конструктивных элементов, так и ухудшать физическое состояние пребывающих в здании людей. Существующие в настоящее время нормы регламентируют максимально допустимые уровни вибрации для разных типов конструкции, однако предлагают разные подходы оценки влияния вибрации на несущие элементы и на организм человека. Это связано с тем, что здание, его элементы, а также человеческий организм имеют разные собственные частоты. И если собственные частоты здания и его несущих элементов определяются их формой и размером, то собственная частота человеческого организма и жизненно важных органов хорошо известна.

Здания центральных улиц крупных городов подвержены постоянному вибрационному воздействию со стороны стремительно развивающейся транспортной инфраструктуры.

В условиях ежегодного роста уровня автомобильной вибрации, здания, возведенные задолго до активного развития автомобильных сетей и появления массивных транспортных средств для перевозок тяжелых грузов, испытывают все более интенсивное динамическое воздействие со стороны плотного транспортного потока. Некоторые объекты, которые приобрели культурное значение и находятся в непосредственной близости от автомобильных магистралей, попросту не были рассчитаны на такие транспортные вибрации. Оценка влияния динамических автомобильных нагрузок на конструкции зданий требует комплексного подхода, включающего в себя как натурные экспериментальные исследования для решения поставленной задачи в рамках конкретного объекта, так и численные теоретические расчеты для выявления общих закономерностей передачи вибрации через дорожное полотно и грунтовое основание на фундамент сооружения с последующими расчетами отдельных элементов конструкции. Помимо этого, вибрация отдельных элементов сооружения, например перекрытий, может оказывать негативное влияние на общее состояние здоровья пребывающих в помещении людей. Санитарные нормы жестко регламентируют предельно допустимые уровни вибрации в помещениях зданий и требуют отдельной оценки влияния существующих динамических нагрузок на психофизическое состояние организма человека. Основные тезисы о влиянии транспортных потоков на элементы сооружений отражены в [1].

В рамках общего исследования по оценке влияния транспортных потоков на напряженно-деформированное состояние зданий рамно-связевых систем на этом этапе решалась задача по оценке влияния вызываемых движением автомобилей вибраций на конструкции зданий, расположенных в непосредственной близости к проезжей части. Постановка задачи, а также обзор литературы по теме исследования подробно изложены в работе [4].

Выполняемые исследования направлены на построение методики натуральных измерений и выявление закономерностей распространения динамических нагрузок в системе «транспортный поток – грунтовое основание – строительная конструкция».

Экспериментальное исследование передачи вибраций от проезжающих автомобилей на конструкции зданий можно разделить на три этапа:

1. Регистрация уровня динамического воздействия с целью определения его характера и особенности распространения в грунте;
2. Измерение характера и особенности передачи вибрации на фундамент и конструкции сооружения;
3. Измерение и оценка распространения вибраций в элемент конструкции.

Каждый из этих этапов требует отдельного рассмотрения. Полученные в ходе выполняемых измерений данные использованы для верификации численного метода исследования поставленной задачи, а также для оценки особенностей уровней динамического воздействия. Так, например, в работах [2, 3] рассматриваются вопросы, связанные с численными исследованиями распространения динамической нагрузки в грунтовом основании. Обзор литературы по данной тематике, а также подробное описание каждого этапа исследования представлены в работе [4]. Выполняемые исследования описывают методику проведения виброметрических измерений на примере конкретного строительного объекта.

**Объект исследования.** В качестве объекта исследования выступает корпус № 2 Воронежского государственного технического университета (ВГТУ), расположенный по адресу: г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84. Северное крыло корпуса расположено на пересечении ул. 20-летия Октября и ул. Станкевича. В непосредственной близости от перекрестка расположена автобусная остановка. Корпус имеет 3 этажа. По итогам измерений решается вопрос о допустимости уровня вибрационного воздействия на несущие конструкции и организм человека в границах аудитории 2245, расположенной на втором этаже. Обследуемая аудитория имеет 3 окна, которые выходят во внутренний двор корпуса. Под окнами аудитории в уровне земли выполнена отмостка. Со стороны ул. 20-летия Октября расположены колонны. Перед колоннами находится тротуар, остановка и озеленение (рис. 1).



Рис. 1. Объект исследования

Детальная информация об объекте получена по материалам технического паспорта корпуса. Полученные в ходе сбора информации данные использовались при разработке программы натурных измерений и сведены в таблицу (табл. 1).

Таблица 1

Технические характеристики корпуса

Год постройки	1933
Фундамент	Бутовый ленточный
Стены	Кирпич
Перекрытия	Деревянные
Крыша	Железная
Полы	Паркет, плитка
Дата обследования	13.10.2015
Физический износ, %	48

После сбора технической информации выполнены обмеры обследуемого крыла сооружения и, опираясь на существующие поэтажные планы (рис. 2), составлены чертежи с указанием размеров и предполагаемым расположением датчиков для измерения вибраций (рис. 3). Согласно плану второго этажа и результатам натурных измерений размеры помещения составляют 11,8×6,4 м.

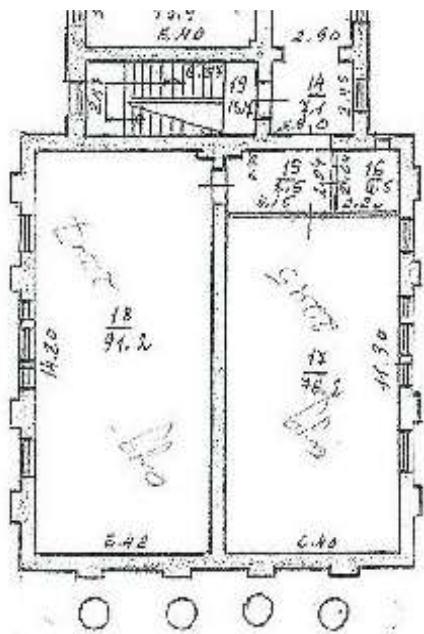


Рис. 2. План аудитории

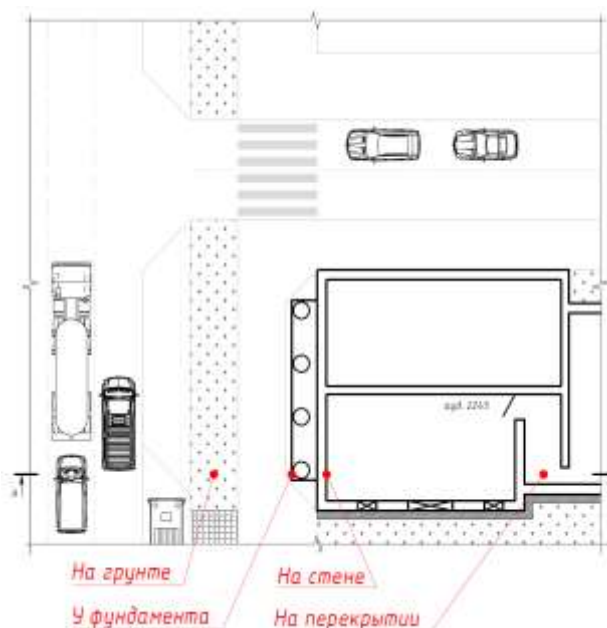


Рис. 3. Схема установки вибродатчиков

**Описание эксперимента.** Натурные измерения выполнены 1 ноября 2025 года на базе ВГТУ. Для северного крыла корпуса измерен уровень вибрационного воздействия от транспортного потока на аудиторию второго этажа. В рамках выполнения научных исследований под руководством профессора Сергея Юрьевича Гриднева сформирована исследовательская группа в составе 5 человек из представителей Российского университета транспорта (МИИТ), Научно-исследовательского института железнодорожного транспорта и кафедры строительной механики ВГТУ. Задачей ставилось выполнение полномасштабных виброметрических измерений в точках прохождения сейсмических волн от дорожного покрытия до конструкций обследуемой аудитории с целью определения регулярной составляющей динамического воздействия от транспортного потока, проходящего по улице 20-летия Октября, а также выявления закономерностей передачи вибраций от грунтового основания на фундамент второго корпуса. Поставленная в рамках измерений задача в силу ограниченного количества виброметров решалась в несколько этапов. Обследование проводилось в будний световой день.

Предлагаемое место установки датчиков указано на чертежах (рис. 3):

1. На грунте между улицей 20-летия Октября и пешеходной зоной;
2. В месте расположения фундамента колонн;
3. На стенах аудитории;
4. На перекрытии корпуса.

При планировании эксперимента определено такое расположение датчиков для регистрации уровня вибрации, которое позволило бы выявить закономерности передачи вибрационного воздействия от транспортных средств к конструктивным элементам аудитории, расположенной на втором этаже. Динамический сигнал распространяется в следующих элементах:

1. Дорожное полотно;
2. Грунт, разделяющий автомобильную и пешеходную зоны с возможным образованием волноводов;
3. Тротуар;
4. Грунт, к которому примыкают конструкции фундамента здания;
5. Обследуемый корпус университета.

В силу ограниченного количества датчиков инструментальные измерения проводились в несколько этапов. На первом этапе проводились измерения на грунте за пределами корпуса –

вдоль дороги и под окнами аудитории. Поскольку измерения показали одинаковые уровни вибрации вдоль дороги, то на втором этапе количество датчиков в этой точке было сокращено до одного. Остальные датчики располагались у фундамента и на конструкциях здания – стенах и перекрытиях. Поскольку отдельные результаты после второй серии испытаний имели дефекты записи, был проведен третий, завершающий, этап, на котором уточнялись полученные в аудитории результаты, в том числе были измерены значения вибраций на полу аудитории для оценки соблюдения санитарных норм в помещении и возможности образования стоячих волн.

В процессе измерений использовалось современное оборудование, включающее:

1. Шумомер-вибромметр, анализатор спектра «ЭКОФИЗИКА-110А» (№ БФЛ231633) – 6 шт.;
2. Акселерометр трехкомпонентный «PCB PIEZTRONICS» – 6 шт.;
3. Металлические платформы 004ОП (рис. 4);
4. Колы металлические длиной 20 см.

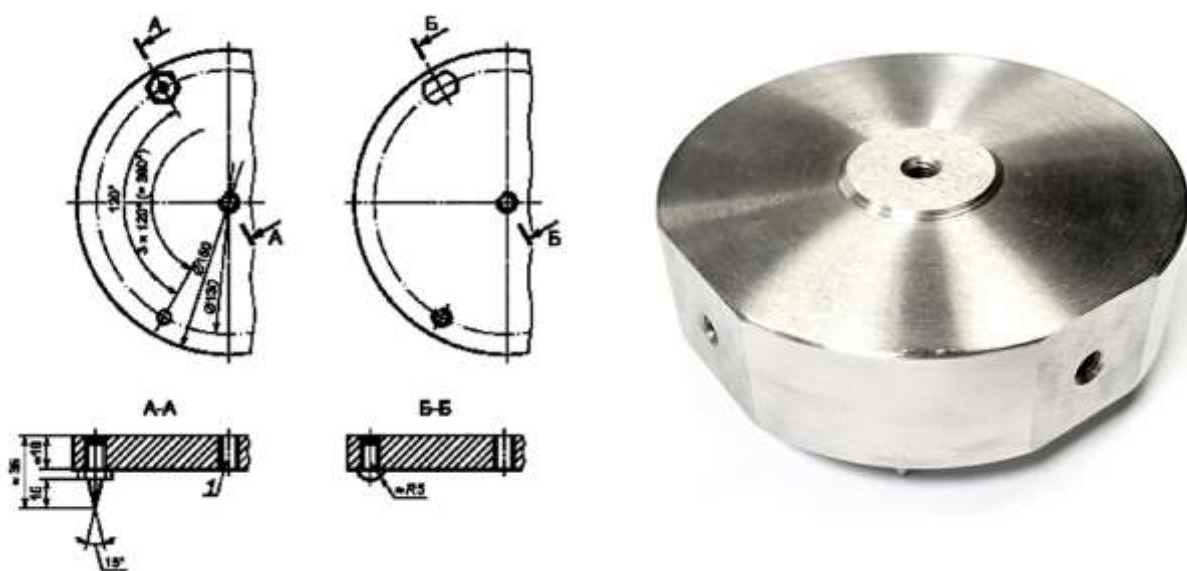


Рис. 4. Приспособление для измерения вибраций на покрытии. Платформа 004ОП

Все измерения проводились в сухую погоду. На грунт датчики устанавливались при помощи металлических колов (рис. 6а, 6б), вбиваемых в грунт способом «датчик на стержне», согласно рекомендациям [10]. Все датчики оборудованы магнитами для крепления на металлическую основу. На вертикальные конструкции для крепления датчиков приклеивались металлические пластинки (рис. 6в). На горизонтальные конструкции устанавливались массивные металлические платформы на трех ножках, обеспечивающие устойчивое положение датчика (рис. 6г). Все вибромметры имели встроенные часы, что обеспечило синхронизацию приборов во времени и позволило соотнести полученные результаты со временем прохождения транспортных средств. Транспортные средства фиксировались в журнале (рис. 5). Учитывался тип ТС, время прохождения и полоса, на которой фиксировалась нагрузка. Для выполнения измерений использован портативный многофункциональный шумомер-вибромметр и анализатор спектра «ЭКОФИЗИКА-110А», предназначенный для многих исследовательских задач [5]. В связке с вибромметром использовались трехкомпонентные акселерометры «PCB PIEZTRONICS», которые обеспечивают одновременное измерение вибрации и ударных воздействий в трех ортогональных направлениях. Все измерения проводились в соответствии с руководством по эксплуатации [6].

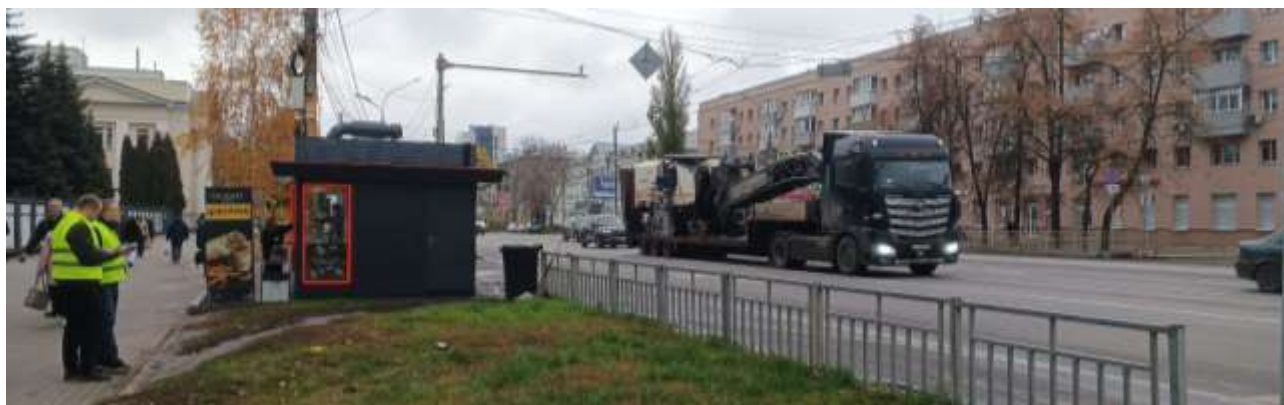


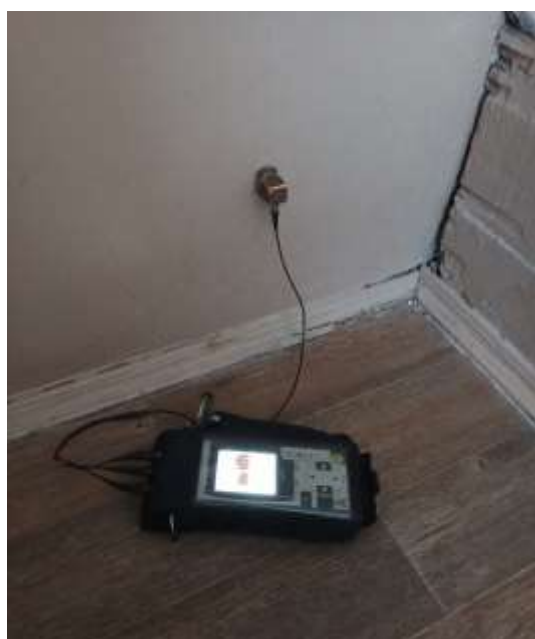
Рис. 5. Регистрация крупногабаритного транспортного средства по ближним полосам движения



а) датчик на грунте



б) датчик у фундамента



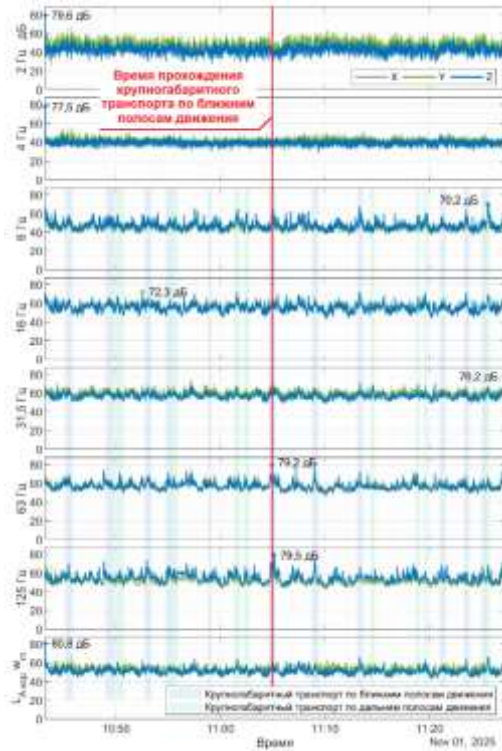
в) датчик на стене



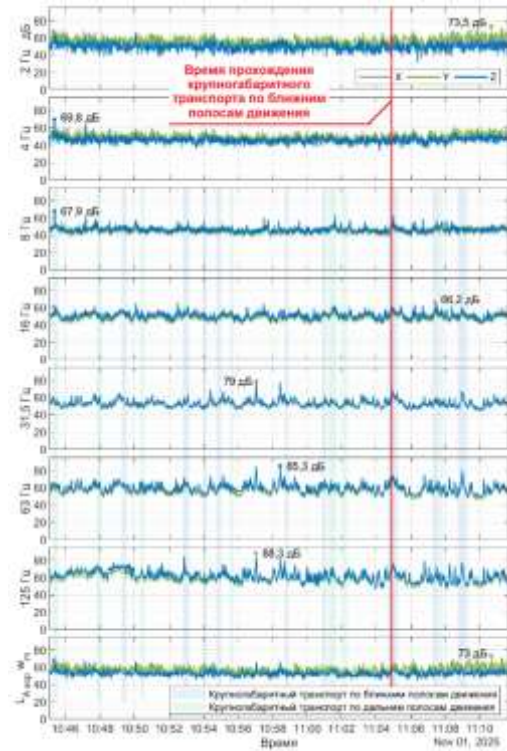
г) датчик на перекрытии перед входом в аудиторию

Рис. 6. Вид установленных приборов в характерных точках

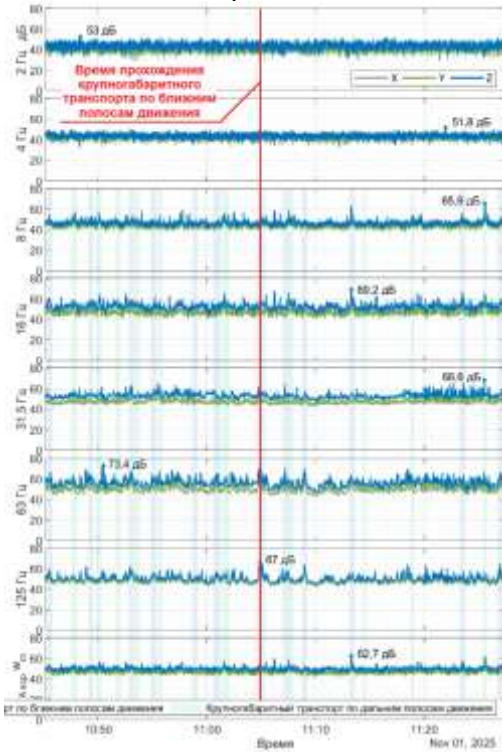
**Результаты.** По результатам измерений получены виброграммы виброускорений в характерных местах здания в относительных единицах в октавных полосах со среднегеометрическими значениями частот 2; 4; 8; 16; 31,5; 63 и 125 Гц (рис. 7).



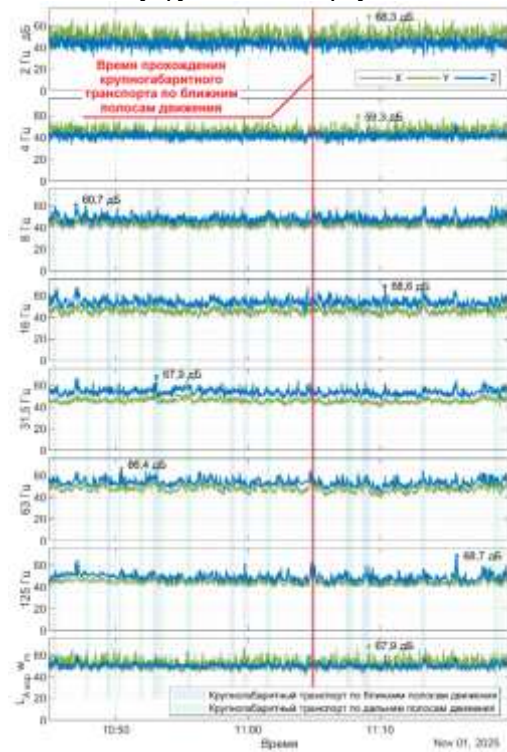
а) виброграмма виброускорений  
вблизи проезжей части



б) виброграмма виброускорений  
у фундамента корпуса



в) виброграмма виброускорений  
на стене аудитории



г) виброграмма виброускорений  
на перекрытии корпуса перед входом в аудиторию

**Рис. 7.** Результаты измерений по трем направлениям (в направлении X – серая линия, в направлении Y – зеленая линия, в направлении Z – синяя линия) за наиболее интенсивные 30 минут движения

Дополнительно для оценки воздействия вибрации на организм человека выполнено измерение на конструкции пола аудитории (рис. 8).

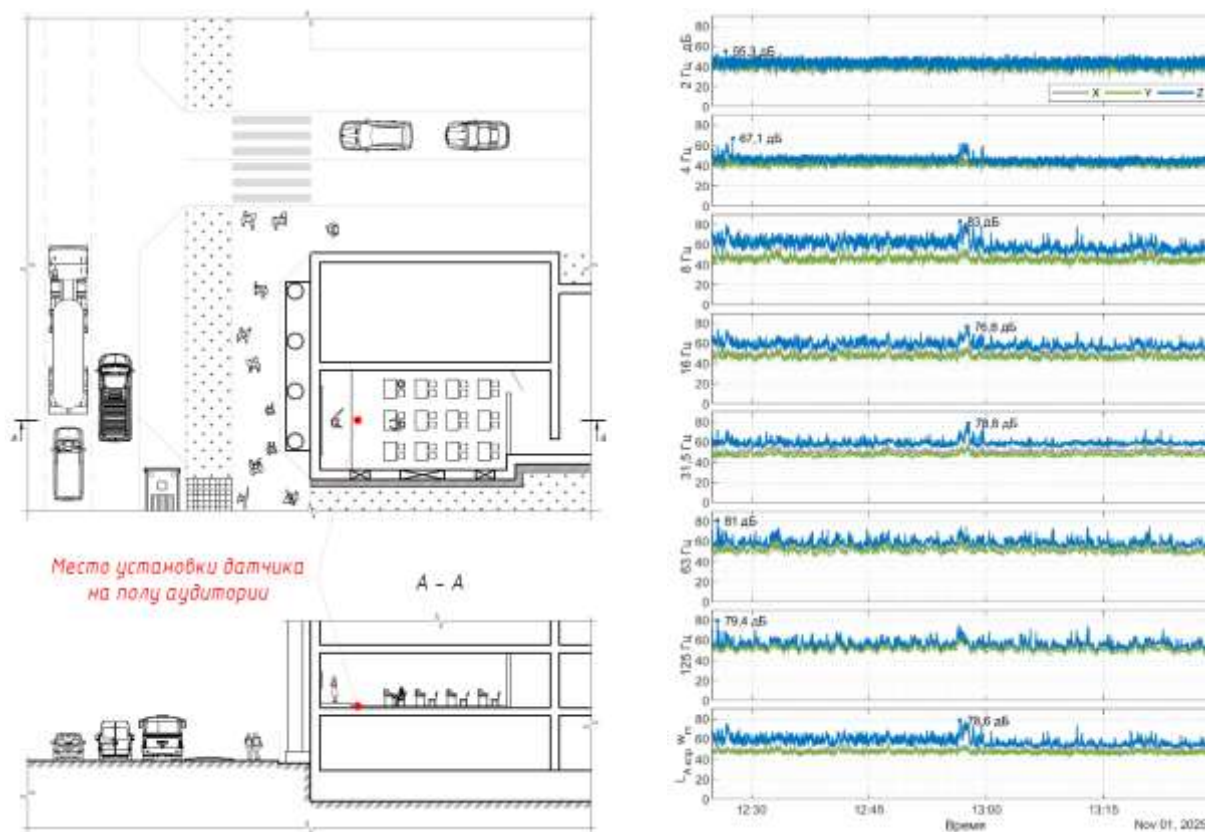


Рис. 8. Схема установки приборов и виброграмма виброускорений на полу в аудитории

Оценка допустимых уровней вибрации осуществлялась на основе сравнения измеряемых ускорений с нормируемыми параметрами вибрации [7].

Согласно [8], оценка постоянной и непостоянной вибрации производится следующими методами:

- 1) частотным (спектральным) анализом нормируемого параметра;
- 2) интегральной оценкой по частоте нормируемого параметра;
- 3) интегральной оценкой с учетом времени вибрационного воздействия по эквивалентному (по энергии) уровню нормируемого параметра.

При частотном (спектральном) анализе, который использовался для обработки результатов в проведенных исследованиях, нормируемыми параметрами являются средние квадратические значения виброскорости и виброускорения или их логарифмические уровни, измеряемые в 1/1 и 1/3 октавных полос частот.

Логарифмические уровни, дБ, виброускорения определялись по формуле:

$$La = 20 \lg \frac{a}{1 \times 10^{-6}},$$

где  $a$  – среднее квадратическое значение виброускорения,  $\text{м/с}^2$  (параметр, зависящий от результатов измерений);  $1 \times 10^{-6}$  – опорное значение виброускорения,  $\text{м/с}^2$ .

Согласно [9], основными нормируемыми параметрами вибрации являются среднеквадратичные величины виброскорости и виброускорений в октавных полосах со среднегеометрическими значениями частот 2; 4; 8; 16; 31,5; 63 Гц.

Допустимые уровни вибрации в помещениях общественных зданий регламентируются санитарными нормами [7]. Для помещений образовательных учреждений, читальных залов

библиотек к допустимым значениям уровней, вводится поправка «-3 дБ», абсолютные значения умножаются на 0,71. Допустимые уровни виброускорений для помещений образовательных учреждений с учетом поправок сведены в табл. 2.

Таблица 2

Допустимые уровни вибрации в помещениях образовательных учреждений

Среднегеометрические частоты октавных полос, Гц	Уровни виброускорений, дБ
2	77
4	78
8	80
16	86
31,5	92
63	98

Согласно [8], автомобильное транспортное воздействие относится к общей широкополосной низкочастотной постоянной вибрации от внешних источников с нормируемым диапазоном частот от 0,8 до 80 Гц. Условия и правила измерения вибраций приведены в [9]. Оценка воздействия вибраций на организм человека производится на основании измеренного среднеквадратичного значения скорректированного ускорения по [11]. Согласно [10], выделяют следующие факторы, влияющие на измеряемую величину (табл. 3).

Таблица 3

Факторы, влияющие на измеряемую величину

Факторы источника (транспортного потока)	Тип, полная масса, нагрузка на ось, тип ходовой части
	Характеристики колес
	Маршрут и характер транспортного движения
	Скорость и направление движения
	Состав и плотность движения в разные моменты времени
Факторы пути распространения вибрации	Расстояние от источника до точки измерений
	Изменения условий распространения (мерзлый грунт, грунтовые воды)
	Связь строения с грунтовым основанием, другими зданиями
	Тип грунтового основания
	Категория грунта
	Имеющиеся в грунте препятствия распространения вибраций
Факторы места измерений	Характеристика зданий (вид, число этажей, возраст, состояние)
	Особенности конструкции (фундамента, стен, перекрытий)
	Назначение здания (способ его использования)
	Собственные частоты здания и его элементов
	Грунтовое основание
	Связь с другими сооружениями
	Покрытие и конструкция пола

### Выводы

1. Уровень вибраций от проезжающего транспорта оказался равномерен вдоль участка дороги, на котором проводились измерения. При удалении от дорожного полотна вибрации поглощаются грунтовым основанием, что закономерно приводит к затуханию вибраций. Затухание динамического воздействия на элементах конструкции происходит неравномерно. Доминирующие частоты вибраций непостоянны и зависят от формы и размеров конструктивных элементов (фундамента, стен, перекрытий).

2. Анализ виброграмм виброускорений на полу аудитории выявил завышенные значения для канала по вертикальному направлению Z. Это может быть связано с податливостью конструкции пола аудитории. Для корректной оценки влияния вибрации на перекрытия аудитории датчики устанавливались непосредственно на поверхность плиты перекрытия.

3. На всех проанализированных виброграммах всплески виброускорений согласуются со временем прохождения тяжелых транспортных средств и показывают регулярность такого динамического воздействия.

4. При распространении вибрационной волны через пешеходную зону значительно увеличиваются уровни вибрации для высоких частот – 31,5 и 63 Гц, в то время как для других частот уровни закономерно снижаются. Изменение частотных характеристик вибрации можно объяснить наличием в толще грунта волнопроводящих сред с разной плотностью.

5. Сигнал, зарегистрированный на стене здания, имеет уровень ниже, чем у фундамента, за исключением частот 8 и 16 Гц, что соответствует основной частоте автомобильной вибрации [14]. При распространении вибрационной волны на перекрытие снова происходит изменение частотных параметров волны. Для частот 2 и 4 Гц заметно увеличение уровней вибрации, в то время как для остальных частот наблюдается незначительное уменьшение. Это может быть связано с резонансными явлениями, вызванными совпадением собственных частот перекрытия с частотой вибрации.

6. С точки зрения существующих санитарных норм наблюдается превышение допустимого уровня вертикальных ускорений в помещении аудитории. Частота, для которой зафиксировано превышение, соответствует 8 Гц. Согласно исследованию [12], общая низкочастотная вибрация в диапазоне от 4 до 11 Гц является одним из самых опасных видов вибрации для человека.

Полученные результаты показали актуальность исследований и необходимость дальнейшего изучения колебаний несущих конструкций здания для оценки распространения динамических волн от транспортного потока в грунтовой среде и в несущих элементах здания учебного корпуса.

#### Библиографический список

1. Гриднев С. Ю., Дятлов В. В. Моделирование условий возникновения стоячих волн в элементах сооружения при воздействии транспортных потоков // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тез. док. IX Междунар. симпозиума, Пенза, 21–24 мая 2025 г. Пенза: Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, 2025. С. 187–189. – EDN: OWUQPU.

2. Дятлов В. В., Гриднев С. Ю., Скалько Ю. И. Оптимизация размеров грунтового основания при моделировании передачи динамического воздействия автомобильного транспортного потока на жилые здания // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии : Сборник материалов XXVI Международной научно-технической конференции, Тула, 26–27 июня 2025 года. – Тула: Тульский государственный университет, 2025. С. 37–46. EDN: WCUSUI.

3. Дятлов В. В., Гриднев С. Ю., Скалько Ю. И. Оценка влияния образования волновода в грунтовом основании на характер распространения вибрационной нагрузки от транспортных потоков // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сб. материалов XXVI Междунар. науч.-техн. конф., Тула, 26–27 июня 2025 г. Тула: Тульский государственный университет, 2025. С. 47–52. EDN: IQSKXG.

4. Гриднев С. Ю., Сафронов В. С., Дятлов В. В. Оценка динамического воздействия автомобильного потока на здания рамно-связевых систем вблизи транспортных артерий (обзор и постановка задачи) // Строительная механика и конструкции. 2025. № 4 (47). С. 119–130. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.47.4.011. EDN: PPOWYV.

5. Шумомер-виброметр и анализатор спектра «Экофизика-110А» // Мир измерений. 2012. № 9. С. 30–32. EDN: PBRHVD.

6. Измеритель акустический многофункциональный ЭКОФИЗИКА. Руководство по эксплуатации ПКДУ.411000.001РЭ.

7. СанПиН 1.2.3685-21. Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания.
8. СН 2.2.4/2.1.8.566-96. Производственная вибрация, вибрация в помещениях жилых и общественных зданий.
9. СанПиН 1304-75. Санитарные нормы допустимых вибраций в жилых домах.
10. ГОСТ Р 53964-2010. Вибрация. Измерения вибрации сооружений. Руководство по проведению измерений.
11. ГОСТ 31191.2-2004. Вибрация и удар. Измерение общей вибрации и оценка ее воздействия на человека. Ч. 2. Вибрация внутри зданий.
12. Трифонов А. П., Будаев Д. Д., Алябьева К. А. Влияние вибрации на организм человека, методы борьбы с вибрацией на производстве // Школа молодых новаторов: сб. науч. ст. 2-й Междунар. науч. конф. перспективных разработок молодых ученых: в 3-х т. Т. 3, Курск, 18 июня 2021 г.– Курск: Юго-Западный государственный университет, 2021. С. 41–45. EDN: INIFBP.
13. Зацепина А. А., Загребнева Д. И., Шульчева А. С. Влияние вибрации и шума на организм человека // Академическая публицистика. 2022. № 3–2. С. 213–217. EDN: ZSOBQB.
14. Жигалин А. Д., Локшин Г. П. Формирование вибрационного поля в геологической среде // Инженерная геология. 1991. № 6. С. 110–119.

#### References

1. Gridnev S. Yu., Dyatlov V. V. Modeling the conditions for the emergence of standing waves in structural elements exposed to traffic flows // Actual Problems of Computer Modeling of Structures and Buildings: Abstract of Doc. of the IX International Symposium, Penza. May 21–24. 2025. Penza: Penza State University of Architecture and Civil Engineering, 2025. Pp. 187–189. EDN: OWUQPU.
2. Dyatlov V. V., Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I. Optimization of the dimensions of the soil base when modeling the transfer of the dynamic impact of automobile traffic on residential buildings // Actual Problems of Construction and Construction Industry: Collection of Materials of the XXVI International Scientific and Technical Conference. Tula, June 26–27. 2025. Tula: Tula State University, 2025. Pp. 37–46. EDN: WCUSUI.
3. Dyatlov V. V., Gridnev S. Yu., Skal'ko Yu. I. Assessment of the influence of waveguide formation in the soil foundation on the nature of vibration load propagation from traffic flows // Actual Problems of Construction and Construction Industry: Collection of Materials of the XXVI Int. Scientific and Technical Conf. Tula, June 26–27. 2025. Tula: Tula State University, 2025. Pp. 47–52. EDN: IQSKXG.
4. Gridnev S. Yu., Safronov V. S., Dyatlov V. V. Assessment of the dynamic impact of vehicle flow on buildings of frame-braced systems near transport arteries (review and problem statement) // Structural mechanics and Constructions. No. 4(47). 2025. Pp. 119–130. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.47.4.011. EDN: PPOWYV.
5. Sound Level Meter-Vibrometer and Spectrum Analyzer "Ecophysics-110A". World of Measurements. No. 9. 2012. Pp. 30–32. EDN: PBRHVD.
6. EKOPHIZIKA Multifunctional Acoustic Meter. Operating Manual PKDU.411000.001RE.
7. SanPiN 1.2.3685-21. Hygienic Standards and Requirements for Ensuring the Safety and (or) Harmlessness of Environmental Factors for Humans.
8. SN 2.2.4/2.1.8.566-96. Industrial Vibration, Vibration in Residential and Public Buildings.
9. SanPiN 1304-75. Sanitary standards for permissible vibration in residential buildings.
10. Federal Standard R 53964-2010. Vibration. Vibration measurements of structures. Measurement guidelines.

11. Federal Standard 31191.2-2004. Vibration and shock. Measurement of general vibration and assessment of its impact on humans. Part 2. Vibration inside buildings.
12. Trifonov A. P., Budaev D. D., Alyabyeva K. A. The effect of vibration on the human body, methods for combating vibration in production // School of young innovators: Coll. Sci. Art. 2nd Int. Sci. Conf. Promising Developments of Young Scientists: in 3 volumes. Vol. 3. Kursk, June 18. 2021. Kursk: South-West State University, 2021. Pp. 41–45. EDN: IHIFBP.
13. Zatsepina A. A., Zagrebneva D. I., Shulcheva A. S. The influence of vibration and noise on the human body // Academic Journalism. No. 3–2. 2022. Pp. 213–217. EDN: ZSOBQB.
14. Zhigalin A. D., Lokshin G. P. Formation of a vibration field in a geological environment // Engineering Geology. No. 6. 1991. Pp. 110–119.

## DESCRIPTION AND RESULTS OF INSTRUMENTAL MEASUREMENTS OF VIBRATIONS OF A FOUR-STORY VSTU BUILDING, LOCATED NEAR A BUSY CITY STREET

S. Y. Gridnev<sup>1</sup>, V. S. Safronov<sup>2</sup>, V. V. Dyatlov<sup>3</sup>, A. V. Vakulin<sup>4</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2,3</sup>  
Russia, Voronezh  
Russian University of Transport (MIIT)<sup>4</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Dr. of Technical Sciences, Prof. of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(910)346-60-19,  
e-mail: gridnev\_s\_y@rambler.ru

<sup>2</sup> Dr. of Technical Sciences, Prof. of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: vss@mail.ru

<sup>3</sup> Graduate Student of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(901)874-91-93,  
e-mail: dyatlovvladislavvladimirovich@gmail.com

<sup>4</sup> Graduate Student of the Dept. of Bridges and Tunnels, tel.: +7(915)036-26-57, e-mail: dron.vakulin@gmail.com

---

Field measurements of the vibration levels of the academic building's structures due to traffic flow were conducted. A measurement program and methodology for instrumental vibration assessment near the roadway, the walls of the academic building, and at key points inside it are presented. The instrumentation for field measurements and the installation technique are described. The obtained results were processed for analysis and subsequent application to solving the stated problem using numerical methods. Some results are presented and the regular component of traffic vibration is identified. Methods for assessing the impact of vibration on structural elements of buildings and the human body are considered. Certain patterns and characteristics of vibration propagation from traffic through the ground foundation to the building and its structural elements have been identified. Vibration levels exceeding sanitary standards have been identified.

**Keywords:** traffic flow, dynamic impact, ground foundation, seismic wave, vibrometric measurements, vibration wave accelerograms.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 531.001.362, 534.13

DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.009

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ПОДОБНОЙ И ИМИТАЦИОННОЙ МОДЕЛЕЙ РЕШЕТЧАТОЙ ОПОРЫ ЛИНИЙ ЭЛЕКТРОПЕРЕДАЧИ

А. Н. Кожевников<sup>1</sup>

Новосибирский государственный технический университет<sup>1</sup>  
Россия, г. Новосибирск

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры прочности летательных аппаратов, тел.: 8-913-717-69-47,  
e-mail: kozhevnikov.2010@corp.nstu.ru

Динамические характеристики пространственных решетчатых конструкций представляют интерес в силу возможности их использования при решении задач диагностики. Отработку методик контроля технического состояния целесообразно проводить на масштабных макетах. В работе представлены результаты построения динамически подобной модели реальной опоры воздушных линий электропередачи в масштабе 1:5 без учета технологических ограничений и имитационной модели из существующего металлопроката. Выполнено сопоставление расчетных спектров частот и соответствующих форм собственных колебаний. В силу сохранения топологии реальной конструкции обе модели показали качественное совпадение по формам собственных колебаний. Спектры частот моделей оказались существенно выше, чем у натурной конструкции, как и ожидалось. Использование имитационной модели приводит к отклонениям в относительном спектре колебаний  $f_i/f_1$  на уровне не более 12 % для пятой формы колебаний, соответствующей изгибному колебанию с одним узлом.

**Ключевые слова:** собственные колебания, пространственная решетчатая конструкция, имитационная модель, динамически подобная модель, теория подобия, отдельно стоящая конструкция.

**Введение.** Исследование динамического поведения пространственных решетчатых конструкций является одной из актуальных задач строительной механики, обусловленной необходимостью обеспечения надежности и безопасности инженерных сооружений при воздействии переменных и динамических нагрузок. К таким конструкциям относятся, в частности, металлические промежуточные опоры воздушных линий электропередачи (ВЛ), представляющие собой пространственные решетчатые конструкции башенного типа.

Проведение натуральных динамических испытаний подобных объектов связано со значительными трудностями, включая большие габариты конструкций, ограниченную доступность для экспериментальных исследований и высокую стоимость проведения подобных испытаний. Дополнительную трудность представляет необходимость исследования не только отдельно опоры ВЛ, но и присоединенных проводников электрического тока. В рамках данной работы объектом исследования является отдельно стоящая промежуточная металлическая решетчатая опора башенного типа марки П110-3. В связи с этим широкое распространение получили методы моделирования, позволяющие исследовать динамические характеристики конструкций на основе их уменьшенных аналогов.

Традиционно построение масштабных моделей основывается на положениях теории подобия, в соответствии с которыми модель должна обеспечивать сохранение безразмерных параметров или комплексов, определяющих поведение системы. Однако для пространственных решетчатых конструкций, выполненных из металлического проката, строгое выполнение условий динамического подобия затруднено в силу дискретности выбора реального сортамента для изготовления силовых элементов. Это проявляется в невозможности пропорционального масштабирования геометрических характеристик поперечных сечений, таких как площадь и осевые моменты инерции, а также в исполнении узловых соединений.

При исследовании поведения сложных пространственных конструкций не всегда требуется добиться однозначного соответствия между реальным объектом и его аналогом. В таких случаях целесообразно использовать понятие имитационной модели, которая воспроизводит качественные особенности поведения конструкции, но не удовлетворяет строгим критериям подобия.

Наряду с этим теоретически возможно построение геометрически подобной модели (ГПМ), в которой все линейные размеры конструкции масштабируются с заданным коэффициентом. При таком подходе обеспечивается строгое выполнение условий геометрического подобия, что позволяет корректно воспроизводить соотношения жесткостных характеристик элементов. Однако практическая реализация подобных моделей для решетчатых конструкций затруднена, поскольку требует масштабирования параметров поперечных сечений вне рамок существующего сортамента.

Таким образом, возникает необходимость сравнительного анализа различных подходов к моделированию отдельно стоящей пространственной решетчатой конструкции опоры воздушных линий электропередачи П110-3, включая геометрически подобные и имитационные модели, с точки зрения воспроизведения динамических характеристик реального объекта, что и является целью настоящей работы. Дополнительно возможно установить особенности и ограничения применения различных типов моделей при исследовании динамики пространственных решетчатых конструкций.

**Обзор литературы.** Теория подобия и методы моделирования физических процессов подробно разработаны в классических трудах, в которых сформулированы условия геометрического, кинематического и динамического подобия, а также требования к сохранению безразмерных параметров или комплексов при переходе от натурального объекта к модельному [1–3]. В дальнейшем указанные подходы получили развитие в работах, посвящённых применению теории подобия в инженерных задачах, где показано, что для сложных систем часто используется приближённое или частичное подобие, допускающее нарушение отдельных критериев [4, 5].

При рассмотрении задач механики деформируемого твёрдого тела отмечается, что обеспечение динамического подобия требует сохранения соотношений между жесткостными и инерционными характеристиками конструкции [5, 6]. Для стержневых систем это условие имеет принципиальное значение, поскольку их поведение определяется не только геометрией, но и характеристиками поперечных сечений элементов, в частности осевыми моментами инерции. В работах по строительной механике и динамике конструкций показано, что частоты и формы собственных колебаний зависят от распределения жесткости и массы в системе [8, 9]. При этом формы колебаний в значительной степени определяются топологией конструкции, тогда как частотные характеристики чувствительны к изменению геометрических и жесткостных параметров элементов.

Анализ современных исследований показывает, что для пространственных решетчатых конструкций, таких как промежуточные опоры ВЛ, преимущественно используются численные методы моделирования, например, с применением конечно-элементного дискретного моделирования [10, 11]. Это связано преимущественно со сложностью геометрии, большим числом элементов и наличием узловых соединений, влияние которых трудно учесть в рамках физического моделирования.

В опубликованном ранее кратком обзоре литературы [12] показано, что имеющиеся литературные источники фокусируются на рассмотрении вынужденных колебаний систем «опора ВЛ – провода» под действием внешних ветровых и снеговых нагрузок с целью выявления причин разрушения конструкций. На первом этапе предлагается рассмотреть отдельно стоящую опору ВЛ, поскольку учет влияния присоединенных проводов существенно усложняет расчетную модель и требует решения задач совместного динамического деформирования сложной пространственной системы с учетом геометрической нелинейности в силу существенной податливости проводов относительно достаточно жесткой конструкции самой опоры [13].

В то же время применение масштабных моделей для таких конструкций ограничено рядом факторов. Использование реального металлического проката приводит к нарушению условий геометрического и динамического подобия вследствие дискретности сортамента и невозможности пропорционального изменения как массовых, так и жесткостных характеристик сечений. В этих условиях для экспериментальных исследований могут применяться имитационные модели, воспроизводящие топологию и расчетную схему конструкции при отсутствии строгого соответствия динамических параметров.

Таким образом, анализ литературы показывает, что, несмотря на развитость теории подобия, вопрос сопоставления динамических характеристик геометрически подобных и имитационных моделей металлических пространственных решетчатых конструкций башенного типа, например опоры П110-3, остается недостаточно изученным и требует дополнительного исследования.

**Постановка задачи.** Для оценки влияния способа масштабирования на динамические характеристики пространственных решетчатых конструкций рассматривается задача сравнительного анализа нескольких моделей одной и той же конструкции, отличающихся подходом к формированию их геометрических и жесткостных параметров.

В качестве исходного объекта принимается промежуточная металлическая опора ВЛ марки П110-3, для которой формируется конечно-элементная модель, рассматриваемая в дальнейшем как условно натурная. Моделирование выполняется с использованием стержневых пространственных конечных элементов с учетом геометрических и физико-механических характеристик элементов реальной конструкции. Условия закрепления конструкции заданы в виде жесткой заделки всех четырех опорных точек конструкции. Использование такого закрепления позволит получить верхнюю консервативную оценку спектра частот собственных колебаний конструкции.

На основе исходной модели формируется ГПМ, полученная путем масштабирования всех линейных размеров конструкции, в том числе и размеров поперечных сечений, с коэффициентом  $l_c = 1/5$ . При этом обеспечивается строгое выполнение условий геометрического подобия, включая пропорциональное изменение длин элементов и их взаимного расположения. Данная модель рассматривается как идеализированная, поскольку параметры поперечных сечений элементов могут быть заданы в соответствии с требованиями теории подобия без ограничений, связанных с технологическими условиями. Граничные условия ГПМ идентичны натурному объекту исследования.

Параллельно с этим формируется имитационная модель конструкции, предназначенная для физической реализации. В данной модели сохраняется топология и расчетная схема исходного объекта, однако элементы конструкции выполняются из металлического проката фиксированного сортамента (равнополочных уголков по ГОСТ 8509-93 [14]). Вследствие этого геометрические характеристики поперечных сечений элементов не масштабируются пропорционально линейным размерам конструкции, что приводит к отклонению от условий геометрического и, как следствие, динамического подобия. В этом случае производится уменьшение числа силовых элементов в конструкции для исключения избыточной жесткости модели. Условия опирания имитационной модели также соответствуют закреплению реальной конструкции.

Для всех рассматриваемых моделей выполняется модальный анализ с определением частот и форм собственных колебаний с применением единого вычислительного алгоритма. Сопоставление результатов осуществляется по следующим параметрам:

- характер низших форм собственных колебаний;
- значения низших частот собственных колебаний;
- спектр относительных частот  $f_i/f_1$ .

По результатам сравнительного анализа указанных моделей формулируется вывод о применимости методов теории подобия при построении динамических аналогов реальных пространственных решетчатых конструкций с учетом ограничений на имеющийся сортамент металлопроката.

**Расчетное исследование.** Определение динамических характеристик пространственной решетчатой конструкции выполнено с использованием метода конечных элементов. Для этого сформированы конечно-элементные модели исходной конструкции, а также её геометрически подобного и имитационного аналогов.

Моделирование выполнено в программной среде «ANSYS Mechanical APDL» с использованием пространственных балочных конечных элементов, позволяющих учитывать продольную, изгибную и крутильную жесткость стержневых элементов конструкции [15]. Геометрическая схема моделей сформирована на основе пространственной расчетной схемы решетчатой конструкции с сохранением взаимного расположения элементов и узлов [16]. При построении расчетной модели использована программа автоматизированного построения расчетных моделей пространственных решетчатых конструкций, разработанная на кафедре «Прочность летательных аппаратов» Новосибирского государственного технического университета [17].

Полноразмерная модель рассматривается как условно натурная и задается с использованием геометрических и физико-механических характеристик, соответствующих реальной конструкции опоры П110-3. Материал элементов принят линейно-упругим, с параметрами, характерными для конструкционной стали 3.

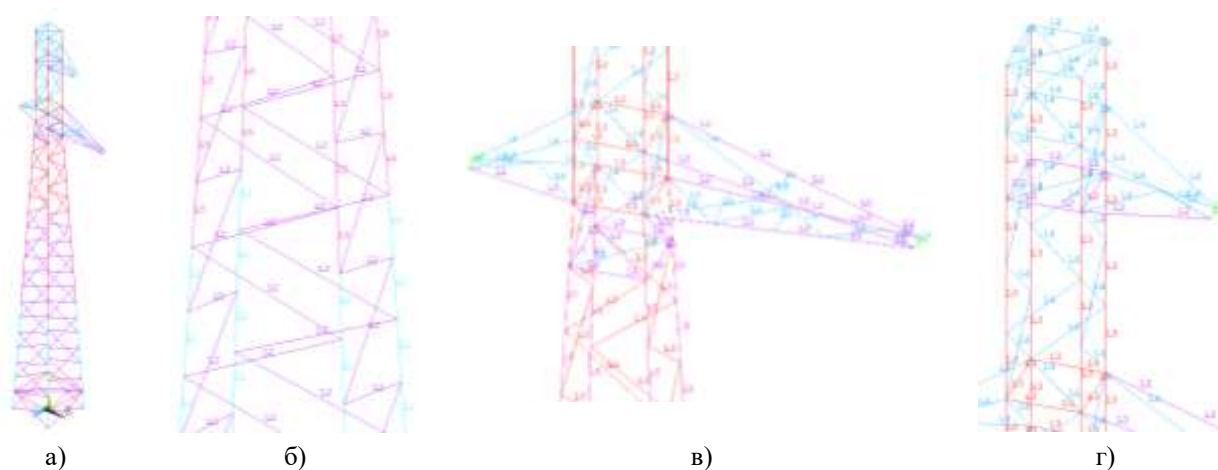
ГПМ получена путем масштабирования всех линейных размеров исходной конструкции с коэффициентом  $l_c = 1/5$ . При этом для данной модели обеспечивается пропорциональное изменение геометрических характеристик элементов, включая площади поперечных сечений  $F$  и моменты инерции  $I_{max}$  и  $I_{min}$ , что соответствует условиям геометрического подобия. Таким образом, данная модель представляет собой идеализированный случай, в котором отсутствуют ограничения, связанные с использованием реального сортамента профилей.

Имитационная модель формируется с сохранением топологии и расчетной схемы конструкции, однако геометрические характеристики поперечных сечений элементов задаются на основе доступного сортамента равнополочных уголков. Вследствие этого параметры сечений не масштабируются пропорционально линейным размерам конструкции, что приводит к отклонению от условий геометрического подобия и изменению жесткостных характеристик элементов. Распределение типов силовых элементов для реальной опоры и имитационной модели показано на рис. 1 и 2. Цифрами обозначен номер типа уголка, который приведен в последующих таблицах.

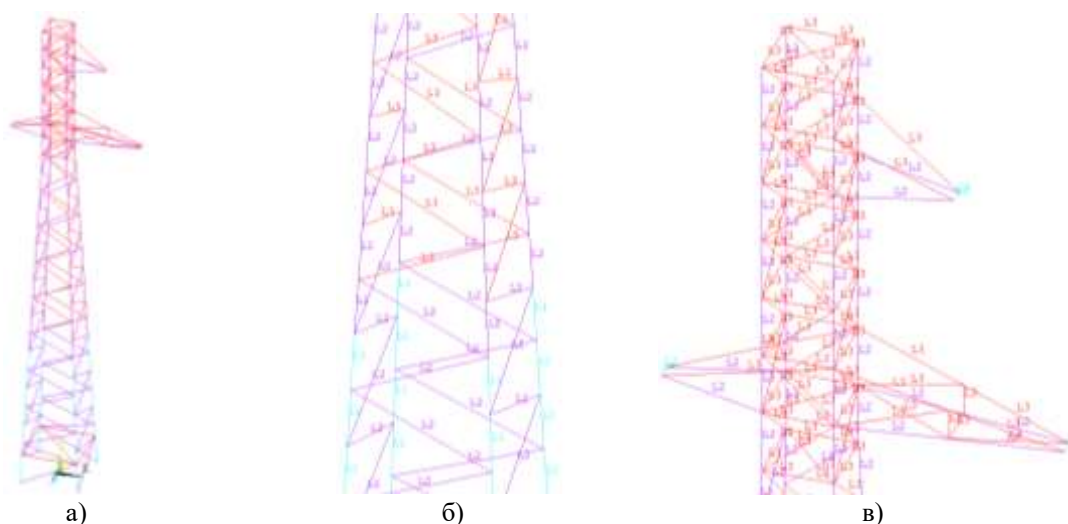
Полученные модельные конструкции обладают различным распределением жесткостных характеристик как в силу выбора различных типов силовых элементов для поясных уголков или решетки заполнения, так и вследствие различной структуры решетки заполнения траверс (рис. 1 в и г; рис. 2 в).

Данные о соответствии характеристик поперечных сечений натурального объекта и ГПМ приведены в табл. 1.

При анализе полученных значений геометрических характеристик поперечных сечений установлено, что уменьшение линейных размеров поперечных сечений в 5 раз проявляется в уменьшении площади поперечного сечения в 25 раз с относительной погрешностью не более 0,026 % и снижении осевых моментов инерции в 625 раз с относительной погрешностью не более 0,252 %.



**Рис. 1.** Распределение типов силовых элементов по конструкции опоры П110-3: а) общий вид; б) укрупненный вид стыковки вертикальных секций; в) зона крепления большей траверсы; г) тросостойка



**Рис. 2.** Распределение типов силовых элементов по имитационной модели: а) общий вид; б) укрупненный вид стыковки вертикальных секций; в) зона крепления большей траверсы

Данный результат соотносится с основными положениями теории подобия конструкций. Выявленные погрешности являются следствием математического округления.

Таблица 1

Тип элемента	Тип конструкции	Тип равнополочного уголка	Площадь сечения $F$ , см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	
				$I_{min}$	$I_{max}$
1	Натурная	L90×7	12,2779	38,9411	149,6657
	ГПМ	L90×7 уменьш	0,4911	0,0623	0,2395
	<b>Отношение</b>		<b>25,001</b>	<b>625,058</b>	<b>624,909</b>
2	Натурная	L63×5	6,1325	9,5190	36,5915
	ГПМ	L63×5 уменьш	0,2453	0,0152	0,05855
	<b>Отношение</b>		<b>25,000</b>	<b>626,250</b>	<b>624,962</b>
3	Натурная	L70×6	8,1461	15,5242	59,6372
	ГПМ	L70×6 уменьш	0,3258	0,0248	0,0954
	<b>Отношение</b>		<b>25,003</b>	<b>625,976</b>	<b>625,128</b>
4	Натурная	L50×4	3,8910	3,8029	14,6251
	ГПМ	L50×4 уменьш	0,1556	0,0061	0,0234
	<b>Отношение</b>		<b>25,006</b>	<b>623,426</b>	<b>625,004</b>

Окончание табл. 1

Тип элемента	Тип конструкции	Тип равнополочного уголка	Площадь сечения $F$ , см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	
				$I_{min}$	$I_{max}$
5	Натурная	L80×6	9,3752	23,5421	90,3952
	ГПМ	L80×6 уменьш	0,3750	0,0377	0,1446
	<b>Отношение</b>		<b>25,001</b>	<b>624,459</b>	<b>625,140</b>
6	Натурная	L125×10	24,3298	148,5916	571,1040
	ГПМ	L125×10 уменьш	0,9732	0,2378	0,9137
	<b>Отношение</b>		<b>25,000</b>	<b>624,860</b>	<b>625,045</b>

Построение имитационной модели основано на сохранении топологии реальной конструкции с уменьшением ее размеров и использованием реального сортамента равнополочных уголков. Поэтому весьма условно можно установить соответствие между выбранными реальными константами (табл. 2).

Таблица 2

Тип элемента	Тип конструкции	Тип равнополочного уголка	Площадь сечения $F$ , см <sup>2</sup>	Осевой момент инерции, см <sup>4</sup>	
				$I_{min}$	$I_{max}$
1	Натурная	L90×7	12,2779	38,9411	149,6657
	Имитационная модель	L45×5	4,2913	3,3272	12,7400
	<b>Отношение</b>		<b>2,8611</b>	<b>11,7039</b>	<b>11,7477</b>
2	Натурная	L63×5	6,1325	9,5190	36,5915
	Имитационная модель	L32×4	2,4338	0,9438	3,5786
	<b>Отношение</b>		<b>2,5197</b>	<b>10,0858</b>	<b>10,2251</b>
3	Натурная	L70×6	8,1461	15,5242	59,6372
	Имитационная модель	L32×4	2,4338	0,9438	3,5786
	<b>Отношение</b>		<b>3,3471</b>	<b>16,4486</b>	<b>16,6650</b>
4	Натурная	L50×4	3,8910	3,8029	14,6251
	Имитационная модель	L25×4	1,8601	0,4353	1,6211
	<b>Отношение</b>		<b>2,0918</b>	<b>8,7363</b>	<b>9,0217</b>
5	Натурная	L80×6	9,3752	23,5421	90,3952
	Имитационная модель	L32×4	2,4338	0,9438	3,5786
	<b>Отношение</b>		<b>3,8521</b>	<b>24,9439</b>	<b>25,2599</b>
6	Натурная	L125×10	24,3298	148,5916	571,1040
	Имитационная модель	L45×5	4,2913	3,3272	12,7400
	<b>Отношение</b>		<b>5,6696</b>	<b>44,6597</b>	<b>44,8276</b>

Построенная модель использует такой набор типов силовых элементов, который не дает единого масштабного множителя, но позволяет реализовать ее в лабораторных или реальных условиях. Геометрические характеристики полученных моделей приведены в табл. 3.

На основании анализа данных в табл. 3 установлено, что обе модели имеют размеры, соответствующие 1/5 от размеров реальной конструкции, однако масса уменьшилась в 125 раз для ГПМ (в соответствии с положениями теории подобия) и в 14,5 раза для имитационной модели.

Граничные условия для всех моделей заданы в виде жесткого закрепления опорных узлов, что соответствует расчетной схеме отдельно стоящей конструкции. Влияние различного навесного оборудования и проводов в рамках данного исследования не учитывается, что позволяет сосредоточить внимание на динамических свойствах самой отдельно стоящей решетчатой конструкции.

Для всех моделей выполнен модальный анализ, в ходе которого определены частоты и формы собственных колебаний конструкции. Расчет выполнен в линейной постановке, что соответствует условиям теории малых колебаний упругих систем с распределенными параметрами [9].

Таблица 3

Объект	Площадь основания, м <sup>2</sup>	Высота, м	Масса, кг
Реальная опора П110-3	2,70 × 2,70	25,00	2558
ГПМ	0,54 × 0,54	5,00	20,46
Имитационная модель	0,54 × 0,54	5,04	176,75

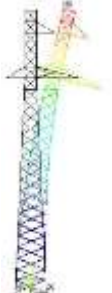



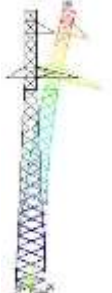



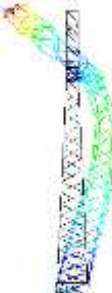
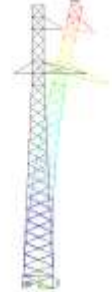


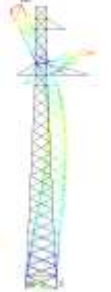
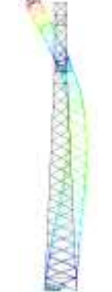



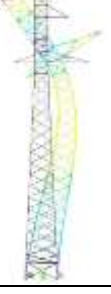

Сопоставление результатов расчетного исследования проведено по следующим критериям:

- характер форм низших собственных колебаний;
- значения низших собственных частот конструкции/модели.

Полученные результаты позволяют оценить влияние способа масштабирования на динамические характеристики конструкции и выявить различия между геометрически подобной и имитационной моделями натурального объекта, а также определить области их дальнейшего применения.

**Результаты и обсуждение.** Для каждой модели определялся спектр частот собственных колебаний (табл. 4).

Таблица 4

Характер формы собственных колебаний	Безузловая изгибная в соответствующей плоскости		Крутильная относительно вертикальной оси	Одноузловая изгибная в соответствующей плоскости	
					
Формы колебаний опоры П110-3					
Частоты собственных колебаний опоры П110-3	$f_1 = 2,9504$ Гц	$f_2 = 2,9541$ Гц	$f_3 = 10,446$ Гц	$f_4 = 11,491$ Гц	$f_5 = 11,949$ Гц
Формы колебаний ГПМ					
Частоты собственных ГПМ	$f_1 = 14,751$ Гц	$f_2 = 14,769$ Гц	$f_3 = 52,181$ Гц	$f_4 = 57,441$	$f_5 = 59,738$ Гц
Формы колебаний имитационной модели					
Частоты собственных колебаний имитационной модели	$f_1 = 13,702$ Гц	$f_2 = 13,732$ Гц	$f_3 = 51,604$ Гц	$f_4 = 59,239$ Гц	$f_5 = 61,495$ Гц

В результате проведенного расчетного исследования выполнено сопоставление динамических характеристик трех моделей пространственной решетчатой конструкции: исходной опоры П110-3 (условно натурной), геометрически подобной и имитационной.

Приведенные в табл. 4 данные в дальнейшем подвергались анализу.

**Сопоставление форм собственных колебаний.** Анализ форм собственных колебаний показал, что для всех рассматриваемых моделей сохраняется качественное соответствие модальных форм. Наблюдается одинаковая последовательность изгибных и крутильных форм, а также сходный характер пространственного распределения перемещений.

Полученный результат объясняется тем, что формы колебаний в значительной степени определяются топологией конструкции и схемой соединения элементов. Поскольку эти параметры сохраняются как в геометрически подобной, так и в имитационной модели, обеспечивается качественное совпадение форм колебаний.

Следует отметить, что данное обстоятельство имеет принципиальное значение, поскольку позволяет использовать имитационные модели для анализа характера деформирования конструкции, несмотря на отсутствие количественного совпадения частотных характеристик.

**Сопоставление спектров частот собственных колебаний.** На рис. 3 представлена зависимость собственных частот от номера формы для рассматриваемых моделей. Анализ полученных результатов показывает, что геометрически подобная и имитационная модели характеризуются существенным увеличением значений собственных частот по сравнению с исходной конструкцией. Данный результат является закономерным и обусловлен уменьшением линейных размеров конструкции при сохранении пропорциональных характеристик поперечных сечений, что приводит к изменению соотношения жесткости и массы системы.

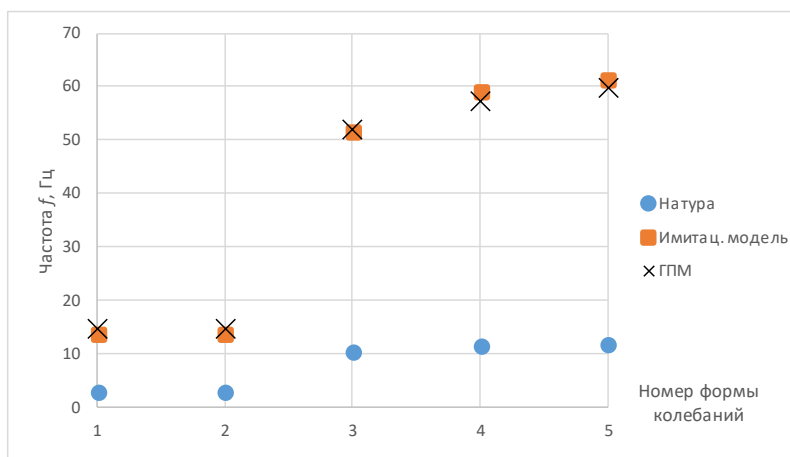


Рис. 3. Сопоставление спектров частот собственных колебаний реальной конструкции и двух типов моделей

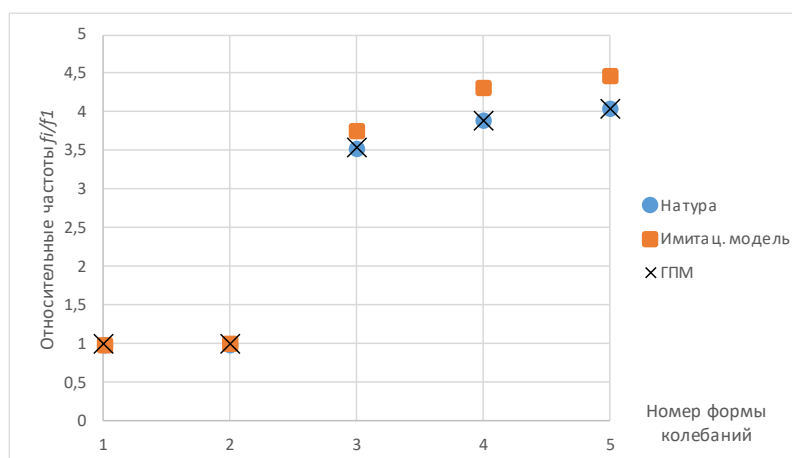
Полученные результаты являются малоинформативными в силу достаточно большой разницы между спектрами частот в абсолютных значениях, поэтому целесообразно перейти к некоторым относительным оценкам. Например, к относительным частотам собственных колебаний.

Для оценки структуры спектра собственных колебаний выполнена нормировка частот по первой форме колебаний для каждой из рассмотренных расчетных моделей. На рис. 4 представлены зависимости относительных частот  $f_i/f_1$  в соответствии с номером формы колебаний.

Полученные результаты показывают, что ГПМ реальной конструкции имеет идентичный реальной опоре относительный спектр частот собственных колебаний, что объясняется соблюдением условий геометрического подобия.

Имитационная модель демонстрирует заметное искажение относительных соотношений между частотами (не более 12%), что свидетельствует о нарушении динамического

подобия. Данный эффект обусловлен непропорциональным изменением жесткости отдельных элементов конструкции вследствие использования прокатных профилей фиксированного сортамента.



**Рис. 4.** Сопоставление относительных спектров частот собственных колебаний реальной конструкции и двух типов моделей

Таким образом, анализ относительных частот подтверждает, что только полное соблюдение принципов геометрического подобия обеспечивает полное воспроизведение спектра собственных колебаний исходной конструкции.

**Заключение.** В работе выполнен сравнительный анализ динамических характеристик геометрически подобной и имитационной моделей пространственной решетчатой конструкции, полученных на основе единого исходного объекта – промежуточной опоры ВЛ марки П110-3.

Проведенное исследование показало, что ГПМ, полученная путем пропорционального масштабирования всех линейных размеров конструкции, обеспечивает строгое выполнение условий геометрического подобия. Однако при уменьшении размеров конструкции происходит существенное изменение соотношения жесткости и массы, что приводит к значительному отклонению абсолютных значений собственных частот по сравнению с исходной конструкцией. Переход к оценке относительных спектров частот колебаний  $f_i/f_1$  демонстрирует совпадение результатов с натурным объектом исследования. Кроме того, реализация подобной модели в физическом виде затруднена вследствие невозможности масштабирования геометрических характеристик поперечных сечений в рамках существующего сортамента проката. Изготовление силовых элементов с толщиной стенки менее 1 мм представляется слабо реализуемым.

В отличие от этого имитационная модель, сформированная с использованием элементов реального сортамента при сохранении топологии конструкции, демонстрирует качественное соответствие форм собственных колебаний исходному объекту, а также хорошее воспроизведение относительных соотношений частот реальной опоры ВЛ. Данный результат обусловлен тем, что имитационная модель в большей степени отражает реальные соотношения жесткости элементов и особенности их конструктивного исполнения.

Вместе с тем следует отметить, что построение имитационной модели фактически представляет собой решение обратной задачи, в рамках которой по заданным динамическим характеристикам подбираются геометрические и жесткостные параметры элементов. Такая постановка не имеет единственного решения, вследствие чего существует множество возможных имитационных моделей, способных обеспечить более близкое соответствие динамическим характеристикам исходной конструкции.

Таким образом, в отличие от ГПМ, которая определяется однозначно выбранным масштабным коэффициентом  $l_c$ , имитационные модели образуют класс решений, различающихся по конструктивному исполнению, но сходных по динамическому поведению. Это обстоятельство необходимо учитывать при интерпретации результатов моделирования и переносе результатов, полученных на имитационных моделях, на натурные объекты.

В целом результаты исследования позволяют сделать вывод о том, что ГПМ обладают строгой теоретической определенностью, однако ограничены в практическом применении и не обеспечивают адекватного воспроизведения динамических характеристик решетчатых конструкций. Имитационные модели, напротив, являются физически реализуемыми и позволяют корректно (с некоторой погрешностью) воспроизводить формы колебаний и структуру спектра, однако не являются единственными и требуют обоснования при их построении.

Полученные результаты подтверждают целесообразность использования имитационных моделей при экспериментальных исследованиях динамики пространственных решетчатых конструкций при условии учета их неоднозначности и ограничений, связанных с отсутствием строгого динамического подобия. При расчетных исследованиях предпочтение следует отдавать полноразмерным моделям или строгим динамическим аналогам реальных объектов.

#### Библиографический список

1. Кирпичев М. В. Теория подобия. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 152 с.
2. Кирпичев М. В., Конаков П. К. Математические основы теории подобия. М.: Наука, 1965. 224 с.
3. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. М.: Высш. шк., 1973. 296 с.
4. Клайн С. Дж. Подобие и приближённые методы. М.: Мир, 1968. 302 с.
5. Алабужев П. М., Герасимов В. И., Минкевич Л. М. Теория подобия и размерностей. Моделирование. М.: Высш. шк., 1981. 208 с.
6. Веников В. А. Теория подобия и моделирования. М.: Высш. шк., 1976. 479 с.
7. Шаповалов Л. А. Моделирование в задачах механики элементов конструкций. М.: Машиностроение, 1989. 312 с.
8. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность, устойчивость, колебания: справочник: в 3 т. Т. 3. М.: Машиностроение, 1988. 567 с.
9. Бабаков И. М. Теория колебаний. 3-е изд. М.: Наука, 1968. 560 с.
10. Кожевников А. Н., Бурнышева Т. В. Применение расчетно-экспериментальной оценки технического состояния эксплуатируемых опор ВЛ // Материалы 22-й Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021). М.: МАИ, 2021. С. 228–230.
11. Garanzha I. M., Tanasoglo A. V., Ademola H. A., Pisareva M. M. Dynamic behavior of power transmission line supports under wind influence // Magazine of Civil Engineering. 2025. V ol. 18, no. 1. Article 13301.
12. Левин В. Е., Кожевников А. Н., Сафонов О. Н. К вопросу о расчете опор и участков воздушных линий электропередачи // Электроэнергия. Передача и распределение. 2017. № 6 (45). С. 68–72.
13. The method of analyzing vibrations of air power transmission lines using reduced finite-element models of pylons and differential model of thin elastic rod system / A. N. Kozhevnikov, D. A. Krasnorutskiy, V. E. Levin, N. V. Pustovoy // 11 International forum on strategic technology (IFOST 2016): proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016. Novosibirsk: NSTU, 2016. Pt. 2. P. 200–203. DOI: 10.1109/IFOST.2016.7884227.
14. ГОСТ 8509-93. Уголки стальные горячекатаные равнополочные. Сортамент. Межгосударственный совет по стандартизации, метрологии и сертификации. Минск, 1993, 11 с.

15. ANSYS Theory Reference 5.6 Release. Eleventh Edition. SAS IP, Inc. 1999.
16. Унифицированные стальные нормальные опоры ВЛ 35, 110 и 150 кВ. Т. 9. Рабочие чертежи промежуточных опор ВЛ 110 и 150 кВ. Рабочие чертежи и КМ. Минэнерго СССР, 1968. 71 с.
17. Kozhevnikov A. N., Krasnorutskiy D. A., Levin V. E. Development of subroutine for automatic building of finite-element models of typical metal pylons of air power transmission lines // 2015 International Conference on Mechanical Engineering, Automation and Control Systems (ME-ACS). Tomsk, 2015. Pp. 1–4. DOI: 10.1109/MEACS.2015.7414897.

#### References

1. Kirpichev M. V., Similarity Theory. Moscow: USSR Academy of Sciences Press, 1953. 152 p.
2. Kirpichev M. V., Konakov P. K. Mathematical Foundations of Similarity Theory. Moscow: Nauka, 1965. 224 p.
3. Gukhman A. A. Introduction to Similarity Theory. Moscow: Higher School, 1973. 296 p.
4. Klein S. J. Similarity and Approximate Methods. Moscow: Mir, 1968. 302 p.
5. Alabuzhev P. M., Gerasimov V. I., Minkevich L. M. Similarity and Dimension Theory. Modeling. Moscow: Higher School, 1981. 208 p.
6. Venikov V. A. Similarity Theory and Modeling. Moscow: Higher School, 1976. 479 p.
7. Shapovalov L. A. Modeling in Problems of Mechanics of Structural Elements. Moscow: Mashinostroenie, 1989. 312 p.
8. Birger I. A., Panovko Ya. G. Strength, Stability, Oscillations: Handbook: in 3 volumes. Vol. 3. Moscow: Mashinostroenie, 1988. 567 p.
9. Babakov I. M. Oscillation Theory. 3rd ed. Moscow: Nauka, 1968. 560 p.
10. Kozhevnikov A. N., Burnysheva T. V. Application of computational and experimental assessment of the technical condition of operated overhead power line supports // Proc. 22nd Int. Conf. on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems (VMSPPS'2021). Moscow: MAI, 2021. Pp. 228–230.
11. Garanzha I. M., Tanasoglo A. V., Ademola H. A., Pisareva M. M. Dynamic behavior of power transmission line supports under wind influence // Magazine of Civil Engineering. Vol. 18. No. 1. 2025. Article 13301.
12. Levin V. E., Kozhevnikov A. N., Safonov O. N. On the issue of calculating supports and sections of overhead power transmission lines // Electric Power. Transmission and Distribution. No. 6(45). 2017. Pp. 68–72.
13. Kozhevnikov A. N., Krasnorutskiy D. A., Levin V. E., Pustovoy N. V. The method of analyzing vibrations of air power transmission lines using reduced finite-element models of pylons and a differential model of a thin elastic rod system // 11th International Forum on Strategic Technology (IFOST 2016): proc., Novosibirsk, 1–3 June 2016. Novosibirsk: NSTU, 2016. Pt. 2. Pp. 200–203. DOI: 10.1109/IFOST.2016.7884227.
14. Federal Standard 8509-93. Hot-rolled equal-leg steel angles. Assortment. Interstate Council for Standardization, Metrology, and Certification. Minsk. 1993, 11 p.
15. ANSYS Theory Reference 5.6 Release. Eleventh Edition. SAS IP, Inc. 1999.
16. Unified steel normal supports for 35, 110, and 150 kV overhead power lines. Vol. 9. Working drawings of intermediate supports for 110 and 150 kV overhead power lines. Working drawings and CM. USSR Ministry of Energy, 1968. 71 p.
17. Kozhevnikov A. N., Krasnorutskiy D. A., Levin V. E. Development of subroutine for automatic building of finite-element models of typical metal pylons of air power transmission lines // 2015 International Conference on Mechanical Engineering, Automation, and Control Systems (ME-ACS). Tomsk. 2015. Pp. 1–4. DOI: 10.1109/MEACS.2015.7414897.

---

**COMPARATIVE ANALYSIS OF THE DYNAMIC PARAMETERS  
OF FREE OSCILLATIONS OF A GEOMETRICALLY SIMILAR  
AND SIMULATION MODEL OF A LATTICE SUPPORT  
OF POWER TRANSMISSION LINES**

A. N. Kozhevnikov <sup>1</sup>

Novosibirsk State Technical University <sup>1</sup>  
Russia, Novosibirsk

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Prof. of Aircraft Strength Dept., tel.: 8-913-717-69-47,  
e-mail: kozhevnikov.2010@corp.nstu.ru

---

The dynamic characteristics of spatial lattice structures are of interest due to their potential use in diagnostics problems solving. It is advisable to develop technical condition monitoring methods using geometrically scaled models. This paper presents the results of constructing a dynamically similar model of a real overhead power transmission line pylon at a scale of 1:5, ignoring technological limitations, and a simulation model using available rolled metal. A comparison of the calculated eigenvalue spectra and the corresponding natural oscillation modes was performed. Due to the preservation of the topology of the real structure, both models demonstrated qualitative accordance in their eigenvectors. The frequency spectra of the models were significantly higher than similar ones of the real structure, as expected. Using the simulation model results in deviations in the relative eigenvalue spectrum  $f_i/f_l$  of no more than 12 % for the fifth vibration mode, corresponding to single-node bending oscillation.

**Keywords:** eigenvalues, spatial lattice structure simulation model, geometrically similar model, dynamic analogue, theory of similarity, single standing structure.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.139.6

DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.010

## ИССЛЕДОВАНИЯ ДАВЛЕНИЯ МОРОЗНОГО ПУЧЕНИЯ ПРИ ПРОМЕРЗАНИИ ГРУНТА ПОД ПОДОШВОЙ ФУНДАМЕНТА В НАТУРНЫХ УСЛОВИЯХ

В. Х. Ким<sup>1</sup>, М. С. Ким<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов, тел.: +7(920) 423-90-78, e-mail: vyachhkim@yandex.ru

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов, тел.: +7(920) 468-9-136, e-mail: marskim@yandex.ru

Описываются результаты полевых экспериментальных исследований развития давления морозного пучения при промерзании грунта под подошвой фундамента. Исследования, посвященные изучению силовых воздействий пучинистых грунтов на сооружения, приобретают в настоящее время особое значение в связи с интенсивным освоением районов севера и северо-востока России. Проведенные исследования позволили выявить особенности развития давления морозного пучения глинистых грунтов при промерзании грунта под подошвой фундамента в зависимости от условий промерзания грунта. Выявлено, что формирование давления в значительной степени зависит от локализации мерзлой зоны промерзающего грунта и сжимаемости талой зоны грунта.

**Ключевые слова:** промерзающий грунт, давление морозного пучения, натурные исследования.

**Введение.** Актуальность строительства новых территориально-производственных комплексов промышленного и гражданского назначения в районах севера и северо-востока России связана с освоением богатых залежей полезных ископаемых.

Одной из проблем, имеющих важное научно-техническое и прикладное значение, является возведение фундаментов и конструкций сооружений в промерзающих и пучащих грунтах с целью разработки приемов управления процессами пучения и эффективных мер борьбы с ними. В области экспериментальных и теоретических исследований проблемы морозного пучения накоплен значительный материал, который нашел отражение в работах [1–4]. При этом большое значение имеет разработка методов снижения давления пучения на фундаменты сооружений [5–7].

Однако натурные исследования, направленные на изучение силовых воздействий пучинистых грунтов на сооружения, не теряют своей актуальности.

Целью и задачами данного исследования являются установление в натуральных условиях закономерностей развития давления морозного пучения грунтов под подошвой фундамента и на их основе разработка методов расчета этого давления применительно к возводимым сооружениям.

**Изучение давления пучения с помощью полевой установки.** В натуральных условиях исследования давления и сил морозного пучения, действующих под подошвой и на боковую поверхность моделей фундаментов, проводились на опытной площадке в Московской

области. Грунты площадки сложены пылеватыми суглинками, обладающими высокой интенсивностью пучения. Гранулометрический состав и физические свойства исследуемых грунтов в соответствии с [8] приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1  
Гранулометрический состав исследуемых грунтов

Глубина отбора проб, м	Содержание фракций, %						
	>0,5 мм	0,5–0,25 мм	0,25–0,1 мм	0,1–0,05 мм	0,05–0,01 мм	0,01–0,005 мм	<0,005 мм
0,5	-	-	1,0	0,8	56	13,7	21,3
1,0	-	0,5	1,0	5,9	52,7	12,8	27,1
1,5	-	0,1	0,4	7,0	55,4	12,0	25,1

Таблица 2  
Физические характеристики исследуемых грунтов

Глубина отбора проб, м	Плотность грунта $\rho$ , г/см <sup>3</sup>	Плотность частиц грунта $\rho_s$ , г/см <sup>3</sup>	Влажность грунта $W$ , %	Влажность на границе текучести $W_L$ , %	Влажность на границе раскатывания (пластичности) $W_P$ , %	Число пластичности $I_P$ , %	Степень водонасыщения грунта $S_r$ , %
0,2	1,95	2,71	26,8	34	20	14	95
0,5	2,02	2,71	24,0	36	36	16	98
1,0	2,2	2,71	25,2	35	18	17	100
1,5	-	2,71	31,2	36	19	17	-
2,0	-	2,71	28,4	34	19	15	-

Полевая установка для изучения давления и сил пучения, формирующихся под подошвой незаглубленного фундамента, состояла из трех опытных фундаментов-штампов, анкерных опор и силоизмерительных устройств. В качестве силоизмерительного устройства применялись пружинные динамометры типа ДОСМ-3-5 (рис. 1).

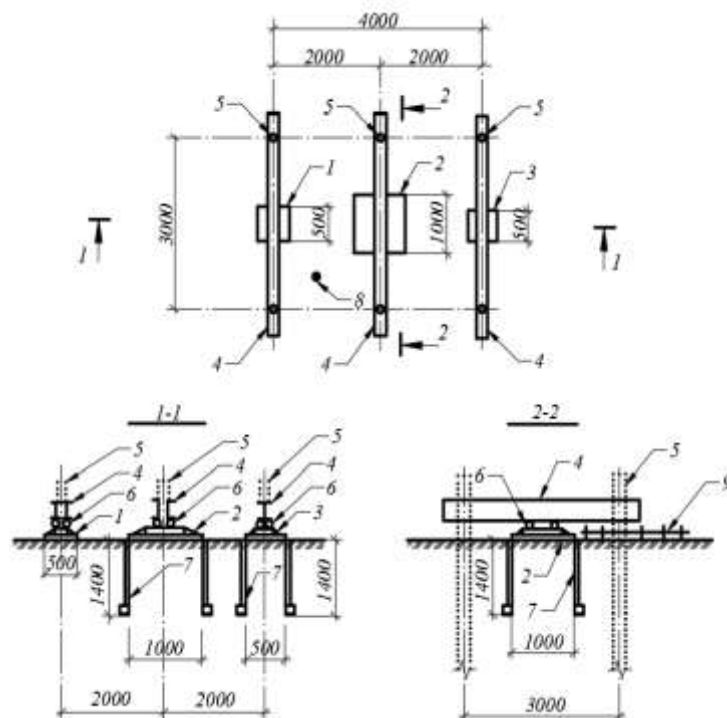


Рис. 1. Схема экспериментальной установки для изучения давления морозного пучения, действующего на подошву фундамента, в натуральных условиях:  
1, 2, 3 – фундаменты (металлические штампы);  
4, 5, 6 – упорные балки;  
7 – анкерное устройство;  
8 – динамометры сжатия ДОСМ;  
9 – экран по контуру штампов;  
10 – термометрическая скважина;  
11 – поверхностные марки (пучиномеры)

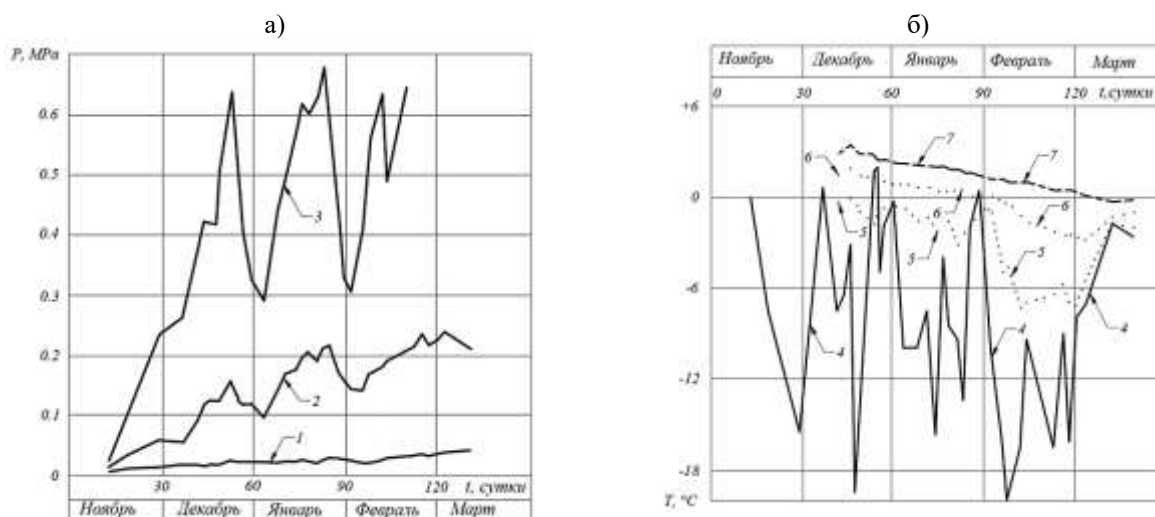
Кроме изучения динамики развития давления морозного пучения на подошву фундаментов в течение холодного периода, была поставлена задача исследовать влияние прочности структурных связей мерзлого грунта на развитие давления пучения. Для этого на двух фундаментах-штампах площадью  $(0,5 \times 0,5)$  и  $(1 \times 1)$  м<sup>2</sup> по контуру подошвы фундамента до глубины сезонного промерзания (1,4 м) был устроен вертикальный экран, отделяющий грунт под фундаментом от остального массива и позволяющий устранить влияние прочности структурных связей мерзлого грунта на развитие давления пучения.

На третьем фундаменте-штампе площадью  $(0,5 \times 0,5)$  м<sup>2</sup> проводился контрольный опыт по определению нормальных сил пучения в обычных условиях.

Эксперимент проводился в течение одного зимнего периода.

**Результаты полевых опытов.** Проведенные в натуральных условиях исследования позволили рассмотреть динамику развития давления морозного пучения на подошву фундаментов в зависимости от глубины промерзания грунта и температуры наружного воздуха. Как известно [9], увеличение толщины слоя промерзшего грунта под подошвой фундамента ведет к возрастанию нормальных сил пучения. Однако развитие давления пучения на подошву фундаментов в течение холодного периода происходит неравномерно. При повышении температуры воздуха до положительных значений наблюдаются периоды значительного понижения давления пучения грунта (рис. 2а). Так, например, в начале зимы, когда грунт промерз на глубину более 0,6 м (рис. 3), во время оттепели, когда температура воздуха повысилась до плюсовой (рис. 2б), давление от действия нормальных сил пучения на штамп с площадью подошвы  $(0,5 \times 0,5)$  м<sup>2</sup> без экрана снизилось от 0,6 до 0,29 МПа, а давление на штамп такой же площадью подошвы с экраном – от 0,16 до 0,10 МПа (рис. 2а). В следующем месяце температура воздуха стабильно держалась на отрицательных значениях, и давление пучения на штамп без экрана увеличилось до 0,69 МПа, а на штамп с экраном – до 0,22 МПа.

Через месяц во время оттепели температура наружного воздуха опять повысилась до положительных значений (рис. 2б), и давление на контрольный штамп снизилось с 0,69 до 0,31 МПа. Давление на штамп с размерами подошвы  $(0,5 \times 0,5)$  м, по контуру которого был установлен экран, также понизилось от 0,22 до 0,14 МПа. Давление на штамп с экраном площадью  $(1 \times 1)$  м<sup>2</sup> было более стабильным, и таких резких скачков не наблюдалось.



**Рис. 2.** Результаты испытаний незаглубленных фундаментов-штампов:

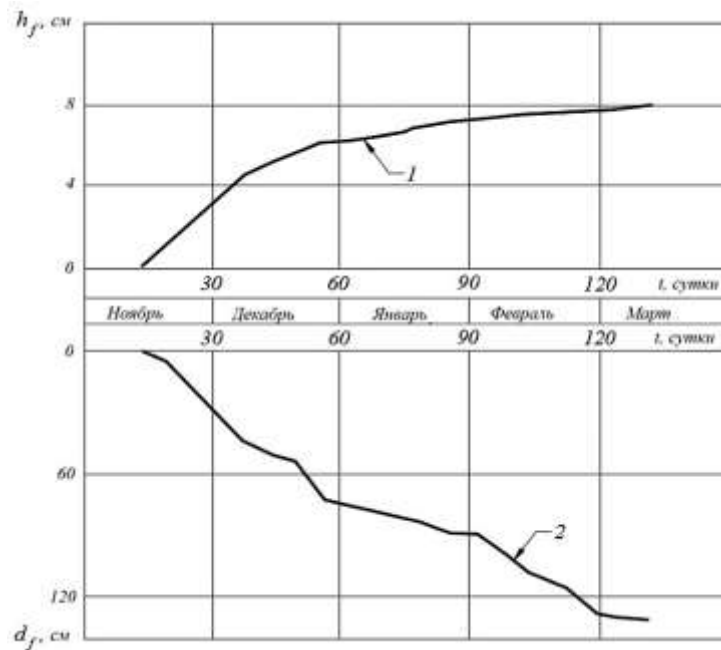
а) изменение давления пучения на подошву фундамента в зимний период:

1 – штамп размером  $(1 \times 1)$  м с экраном; 2 – то же размером  $(0,5 \times 0,5)$  м с экраном;

3 – то же размером  $(0,5 \times 0,5)$  м без экрана;

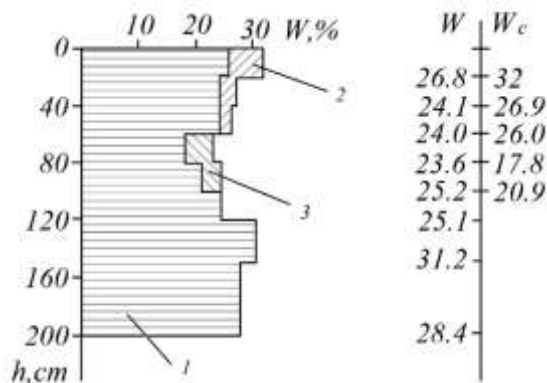
б) изменение температуры воздуха и грунта за тот же период:

4 – температура на поверхности грунта; 5, 6, 7 – температура грунта на глубине 0,5; 1,0 и 1,5 м



**Рис. 3.** Деформация пучения и глубина промерзания грунта за зимний период:  
1 – перемещения поверхности грунта; 2 – глубина промерзания

Глубина промерзания грунта в это время составляла 0,85 м. Снижение давления на 1–2 дня отставало от повышения температуры. Промерзание грунта на глубину 130 см сопровождалось изменением влажности грунта по сравнению с исходной (рис. 4). На глубине от 0 до 60 см наблюдалось повышение влажности, на глубине от 60 до 100 см – снижение, а глубже влажность оставалась постоянной.



**Рис. 4.** Эпюра изменения влажности грунта до и после заморозания:  
1 – исходная влажность;  
2 – увеличение влажности;  
3 – уменьшение влажности;  
W – влажность до заморозания;  
W<sub>c</sub> – влажность после заморозания

**Анализ результатов полевых опытов.** Результаты полевых опытов показывают, что в течение всего периода промерзания грунта давление пучения на подошву контрольного штампа примерно в 3 раза превышает давление на подошву штампа такого же размера, имеющего экран по контуру подошвы.

Максимальное давление на подошву штампа без экрана от действия нормальных сил пучения в течение зимнего периода составило 0,69 МПа. Для штампов с экранами по периметру подошвы максимальное давление на подошву было существенно ниже и составило 0,24 МПа.

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Если объем грунта при кристаллизации влаги увеличивается свободно и равномерно, то внутренние усилия в грунте не возникают. Имеет место лишь простое расширение грунта,

преодолевающее вес вышележащего слоя. При ограничении свободного расширения или недопущения деформаций в промерзающем грунте формируются силы пучения.

В природных условиях деформации и силы пучения развиваются в зоне промерзания, находящейся между слоями твердомерзлого и талого грунта [9–10]. Возникающие напряжения в этой зоне передаются на твердомерзлый слой, находящийся сверху, и на нижний буферный слой талого грунта. Эти напряжения возникают в промерзающих грунтах только при наличии сопротивления расширению переходящей в лед воды, численно равны этому сопротивлению и изменяются от нуля (в случае отсутствия сопротивления) до некоторой величины, определяемой деформационными свойствами среды и условиями теплообмена.

При промерзании пучинистого грунта ниже подошвы фундамента последний оказывается как бы стоящим на плите из мерзлого грунта, размеры которой значительно превышают площадь подошвы фундамента. При этом чем ниже температура воздуха, тем выше жесткость мерзлого грунта, находящегося в твердомерзлом состоянии. Поэтому в этом случае нормальные силы пучения будут определяться не развитием напряжений в зоне промерзания, а прочностью структурных связей мерзлого грунта, т. е. сопротивлением промерзшего слоя грунта. Промерзание грунта под подошвой фундамента в объеме, изолированном от остальной части массива, например, вертикальным экраном, установленным по периметру подошвы, вызывает иное развитие напряжений пучения. В этом случае в течение всего периода промерзания площадь плиты из твердомерзлого грунта будет ограниченной и равной площади подошвы фундамента. При этом давление пучения на подошву фундамента будет определяться напряжениями пучения, возникающими в зоне промерзания на площади, соответствующей площади подошвы фундамента. Поэтому давление пучения на подошву фундамента без экрана заметно превышает давление на подошву фундамента, по контуру подошвы которого установлен экран.

Таким образом, установку экрана, позволяющего устранить влияние прочности структурных связей мерзлого грунта на развитие давления пучения, следует рассматривать как одно из мероприятий по снижению воздействия пучения на фундаменты.

**Выводы.** Результаты проведенных исследований по определению давления морозного пучения при промерзании грунта под подошвой фундамента позволяют сделать следующие основные выводы:

1. Давление морозного пучения зависит от теплового режима промерзания. Понижение температуры наружного воздуха способствует увеличению давления пучения, в то время как повышение температуры значительно его снижает независимо от глубины промерзания;
2. Механизмы формирования давления морозного пучения на подошву штампа, экранированного по контуру на глубину промерзания, и штампа, не имеющего такого экрана, принципиально различны;
3. Величина давления морозного пучения на экранированный штамп примерно в три раза ниже величины давления на штамп без экрана;
4. Установку экрана для устранения влияния прочности структурных связей мерзлого грунта на развитие давления пучения следует рассматривать как одну из мер по снижению воздействия пучения на фундаменты.

#### Библиографический список

1. Ершов Э. Д. Общая геокриология: учеб. М.: изд-во МГУ, 2002. 682 с.
2. Орлов В. О., Ёлгин Б. Б., Железняк И. И. Морозное пучение грунтов в расчетах оснований сооружений. Новосибирск: Наука, 1987. 133 с.
3. Орлов В. О., Железняк И. И., Филиппов В. Д., Фурсов В. В. Пучинистые грунты как основания сооружений. Новосибирск: Наука, 1991. 130 с.

4. Орлов В. О., Бондаренко Г. И., Алексеев А. Г. Полевые исследования горизонтальных сил давления морозного пучения грунта, действующего на подпорные стены // Объединенный научный журнал. 2006. № 7. С. 75–78.
5. Железняк И. И. Устройства и способы защиты сооружений от опасных криогенных процессов в грунтах // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: сб. ст. XV Междунар. науч.-практ. конф., 30 ноября – 2 декабря 2015 г., г. Чита. Чита: Забайкал. гос. ун-т, 2015. С. 272–276.
6. Лукьянов П. Ю., Железняк И. И., Гурулев А. А. Устройство для послойного измерения физических свойств ледяного массива в условиях естественного залегания // Приборы и техника эксперимента. 2017. № 6. С. 90–93.
7. Железняк И. И. О технике и технологиях обеспечения устойчивости сооружений на мёрзлых грунтах в геокриологических условиях Восточной Сибири // Кулагинские чтения: техника и технологии производственных процессов: сб. ст. XVI Междунар. науч.-практ. конф., 28–30 ноября 2016 г., г. Чита. Чита: Забайкал. гос. ун-т, 2016. С. 250–254.
8. ГОСТ 25100-2020. Грунты. Классификация. М.: изд-во стандартов, 2020. 43 с.
9. Орлов В. О. Криогенное пучение тонкодисперсных грунтов. М.: изд-во АН СССР, 1962. 177 с.
10. Kim V., Kim M. Method of evaluation of ground frost heaving pressure on ice-ground barrier of an underground construction and well strengthening walls // Int. Sci. Conf. Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing / Ed. V. Murgul, Z. Popovic. Springer, Cham., 2017. Vol 692. Pp. 998–1008.

#### References

1. Ershov E. D. General Geocryology: Textbook. Moscow: Moscow State University Press, 2002. 682 p.
2. Orlov V. O., Yolgin B. B., Zheleznyak I. I. Frost Heaving of Soils in Calculations of Structural Foundations. Novosibirsk: Nauka, 1987. 133 p.
3. Orlov V. O., Zheleznyak I. I., Filippov V. D., Fursov V. V. Heaving Soils as Structural Foundations. Novosibirsk: Nauka, 1991. 130 p.
4. Orlov V. O., Bondarenko G. I., Alekseev A. G. Field studies of horizontal pressure forces of frost heaving of soil acting on retaining walls // Combined Scientific Journal. No. 7. 2006. Pp. 75–78.
5. Zheleznyak I. I. Devices and methods for protecting structures from hazardous cryogenic processes in soils // Kulagin Readings: Engineering and Technologies of Production Processes: Coll. Art. XV Int. Res. and Pract. Conf., November 30 December 2, 2015. Chita. Chita: Transbaikal State University. 2015. Pp. 272–276.
6. Lukyanov P. Yu., Zheleznyak I. I., Gurulev A. A. Device for layer-by-layer measurement of physical properties of an ice massif in natural occurrence conditions // Experimental Instruments and Techniques. No. 6. 2017. Pp. 90–93.
7. Zheleznyak I. I. On the engineering and technologies for ensuring the stability of structures on frozen soils under the permafrost conditions of Eastern Siberia // Kulagin Readings: Engineering and Technologies of Production Processes: Coll. Articles of the XVI Int. Scientific and Practical Conf., November 28–30, 2016. Chita. Chita: Transbaikal State University. 2016. Pp. 250–254.
8. Federal Standard 25100-2020. Soils. Classification. Moscow: Publishing House of Standards, 2020. 43 p.
9. Orlov V. O. Cryogenic Heaving of Fine Soils. Moscow: Publishing House of the USSR Academy of Sciences, 1962. 177 p.
10. Kim V., Kim M. Method of evaluation of ground frost heaving pressure on ice-ground barrier of an underground construction and well strengthening walls // Int. Sci. Conf. Energy

Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. Advances in Intelligent Systems and Computing. Ed. V. Murgul, Z. Popovic. Springer, Cham. Vol 692. 2017. Pp. 998–1008.

## **STUDY OF FROST HEAVE PRESSURE DURING SOIL FREEZING UNDER THE FOUNDATION IN NATURAL CONDITIONS**

V. Kh. Kim <sup>1</sup>, M. S. Kim <sup>2</sup>

Voronezh State Technical University <sup>1,2</sup>  
Voronezh, Russia

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Prof. of the Dept. of Building Structures and Foundations,  
tel.: +7(920) 423-90-78, e-mail: vyachhkim@yandex.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Prof. of the Dept. of Building Structures and Foundations,  
tel.: +7(920) 468-91-36, e-mail: marskim@yandex.ru

---

This article describes the results of field experimental studies of frost heave pressure development during soil freezing beneath a foundation base. Research devoted to the study of the forces exerted by heaving soils on structures is currently of particular importance due to the intensive development of northern and northeastern Russia. The conducted studies revealed the specific features of frost heave pressure development in clayey soils during soil freezing beneath a foundation base, depending on the soil freezing conditions. It was found that the pressure development depends largely on the location of the frozen zone of the freezing soil and the compressibility of the thawed zone of the soil.

**Keywords:** freezing soil, frost heave pressure, field studies.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.074.43:69.058:528.8

DOI 10.36622/2219-1038.2026.49.2.011

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВИСЯЧЕЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ОБОЛОЧКИ ТИПА «ГИПАР» НА ОСНОВАНИИ ДАННЫХ ЛАЗЕРНОГО СКАНИРОВАНИЯ

Д. С. Глазков<sup>1</sup>, В. А. Козлов<sup>2</sup>Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж<sup>1</sup> Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(915)542-17-05, e-mail: glazckov.mitia@yandex.ru<sup>2</sup> Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

Статья посвящена вопросам мониторинга технического состояния и экспериментального определения напряженно-деформированного состояния большепролетных конструкций, в частности висячей железобетонной оболочки. В качестве основного геодезического метода использовано наземное лазерное сканирование.

Поставлена и решена комплексная задача – от получения и регистрации облака точек до численного определения напряженно-деформированного состояния исследуемой оболочки.

Разработана общая методологическая схема обработки облака точек в условиях шума и помех, обеспечивающая восстановление фактической геометрии висячего покрытия на различных этапах нагружения. На основании полученных данных проведен анализ отклонения геометрии оболочки при статическом нагружении постоянными и временными длительными нагрузками от ее исходного преднапряженного состояния.

Определено напряженно-деформированное состояние исследуемого объекта методом конечных элементов путем решения задачи интеграции данных лазерного сканирования в расчетный комплекс в виде поля перемещений.

По результатам исследования сделаны выводы о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемой висячей оболочки, а также приведены выводы по мониторингу большепролетных конструкций с помощью лазерного сканирования.

**Ключевые слова:** висячие оболочки, наземное лазерное сканирование, аппроксимация облака точек, поле перемещений, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, мониторинг технического состояния.

**Введение.** Задача определения напряженно-деформированного состояния (НДС) зданий и сооружений в целом, а также их конструкций, помимо случая проектирования, возникает при обследовании технического состояния уже построенных объектов, а также в процессе мониторинга строящихся.

Одной из проблем, возникающей в данных случаях, является получение фактических сведений об объекте, так как применение идеализированных расчетных схем на основании проектных данных часто не отражает реальное состояние таких зданий и сооружений. К таким сведениям, например, могут относиться геометрические параметры конструкций с отклонениями и дефектами, фактические свойства материалов, грунтовые условия и нагрузки.

Для большепролетных конструкций актуальной является проблематика определения перемещений и деформаций ввиду их чувствительности к отклонениям и дефектам геометрии

(например, в опорных узлах), возможности потери устойчивости, а также вследствие сложных явлений, возникающих при неравномерных статических, температурных и динамических воздействиях [1–4].

Основным геодезическим методом при обследовании и мониторинге зданий и сооружений является нивелирование на основании сформированной сети из деформационных марок [5, 6]. Данный подход отличается высокой точностью, однако имеет большую трудоемкость как при создании сети на объекте и сборе данных, так и при их дальнейшей обработке для формирования представления о геометрических отклонениях конструкций.

В связи с обозначенными трудностями при нивелировании перспективным направлением геодезического мониторинга представляется наземное лазерное сканирование [7–10], которое позволяет оперативно получать большой массив данных об объекте целиком в виде некоторой трехмерной совокупности точек, называемой облаком точек. Данный метод исключает необходимость закрепления большого количества марок на объекте, сокращает время полевых работ и быстро дает представление об отклонениях конструкций. Однако ввиду особенностей обработки полученного облака, а также корректного преобразования массивов точек в вид, пригодный для использования в конечно-элементных комплексах, требуется дальнейшее изучение данных вопросов и совершенствование соответствующей методики.

**Постановка задачи и объект исследования.** Основной задачей исследования является разработка алгоритма обработки данных лазерного сканирования большепролетных зданий для получения фактической геометрии нагруженного покрытия в условиях зашумленности облака точек многочисленными конструкциями, не входящими в область интереса (подвесным оборудованием, инженерными коммуникациями и др.). Также в работе обсуждается апробация методики определения НДС объекта путем задания в качестве входных параметров расчета поля перемещений, полученного на основании сравнения конфигураций покрытия в нагруженном и ненагруженном состояниях.

Объектом исследования, представленным на рис. 1, является железобетонная висячая предварительно напряженная оболочка отрицательной гауссовой кривизны диаметром 48 м, покоящаяся на омоноличенных спаренных канатах, являющихся растянутой арматурой оболочки.



Рис. 1. Исследуемое висячее покрытие в форме гиперболического параболоида

Геометрия оболочки описывается уравнением гиперболического параболоида [11]:

$$z = 15,5 + \frac{1}{200} \cdot x^2 - \frac{1}{800} \cdot y^2. \quad (1)$$

В таблице, а также на рис. 2–5 представлены элементы, из которых состоит рассматриваемая оболочка, и приведена их краткая характеристика.

Таблица

Основные элементы исследуемой оболочки

Элемент	Сечение	Материал
Оболочка	63 мм	Бетон В25
Опорный контур	Основное сечение 1500×800	Бетон В50
Балки омоноличивания стягивающих канатов	300×90	Бетон В50
Балки омоноличивания рабочих канатов	300×150	Бетон В50
Канаты	52,5 мм	Тех. условия ВТУ-196-67 Разрывное усилие 197000 кгс



Рис. 2. Железобетонная оболочка

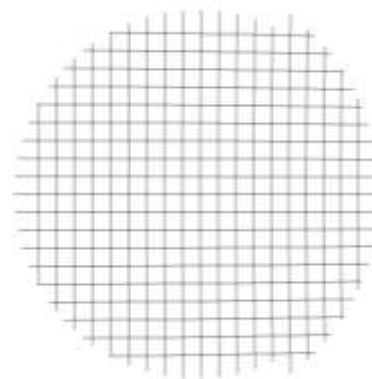


Рис. 3. Несущие и стягивающие канаты

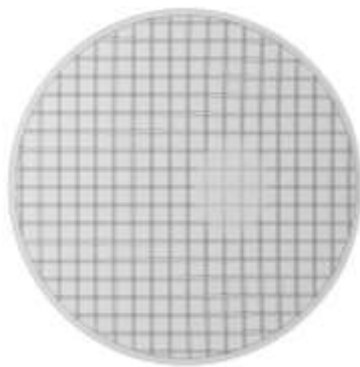


Рис. 4. Балки омоноличивания канатов



Рис. 5. Депланированный в пространстве опорный контур

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач использовался комплексный подход, который включает в себя 3 направления.

**1 направление.** Экспериментальный метод получения пространственных данных – геодезический мониторинг с помощью наземного лазерного сканирования.

На рис. 6, 7 представлены соответственно место, где происходила съемка оболочки, а также лазерный сканер Leica BLK360, использованный при мониторинге. Из рис. 6 видно, что сканирование покрытия производилось в условиях загруженности помещения технологическими конструкциями. Полнота сбора пространственных данных достигается за счет перемещения сканера по отдельным остановкам, целое облако собиралось из массивов точек, полученных с 15 различных позиций.

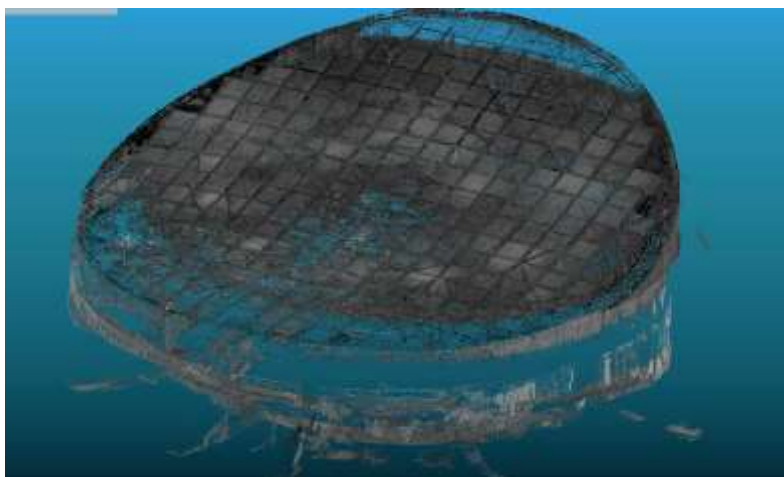


**Рис. 6.** Пространство под оболочкой, где происходило лазерное сканирование



**Рис. 7.** Лазерный 3D-сканер Leica BLK360

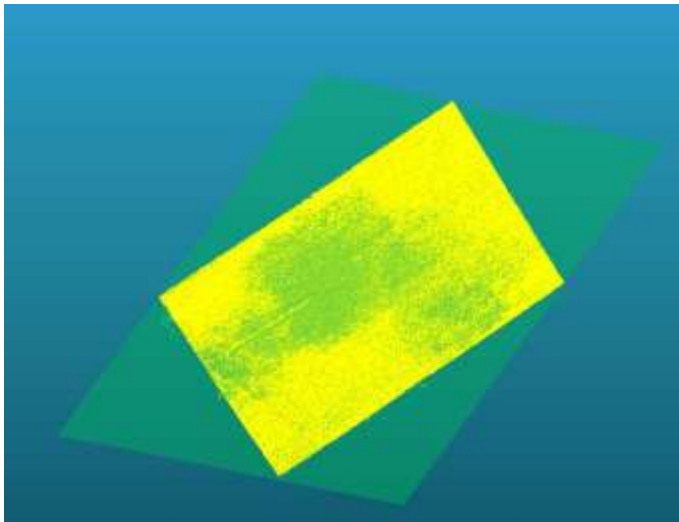
Точность сканера по паспортным данным – 6 мм на расстоянии до 10 м и 8 мм на расстоянии до 20 м. Однако благодаря большому количеству испускаемых лучей (360 000 в сек), отснятое облако, представленное на рис. 8, содержит порядка 0,5 млрд точек, приходящихся на оболочку диаметром 48 м, что приводит в конечном счете к избыточной плотности точек. Согласно закону больших чисел математическое ожидание функции распределения точек при большом количестве измерений будет стремиться к искомой средней поверхности оболочки.



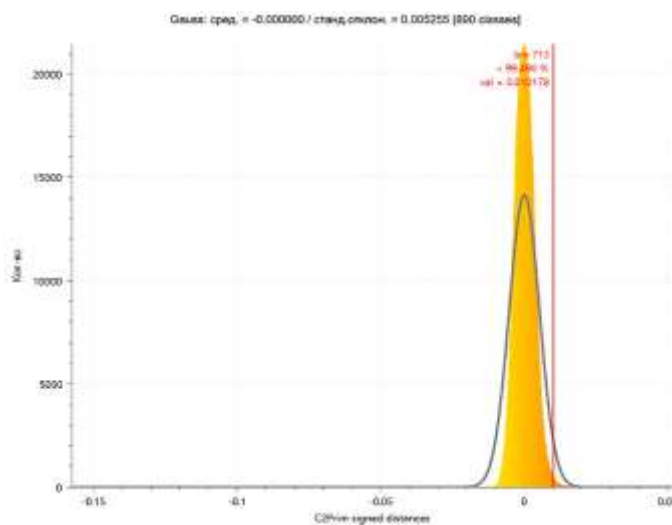
**Рис. 8.** Полученное по итогам лазерного сканирования облако точек. Места, окрашенные темным цветом, соответствуют большей плотности точек

Данное замечание проиллюстрировано примером выделения массива точек отдельной сборной плиты висячего покрытия, для которой была построена аппроксимирующая плоскость по методу наименьших квадратов (рис. 9).

Анализ гистограммы отклонений (рис. 10) показал, что стандартное (среднеквадратическое) отклонение составляет  $\sigma = 5,3$  мм, что соответствует точности лазерного сканера. При этом 99,5 % массива точек укладывается в доверительный интервал  $\pm 2\sigma$ . Также стоит заметить, что на функции распределения явно выражен положительный эксцесс относительно теоретической кривой Гаусса. Данный факт говорит о том, что большинство точек сгруппировано в окрестности среднего значения, а смещение  $\sigma$  до значения 5,3 мм может быть обусловлено не только точностью сканера, но и шероховатостью бетонной поверхности, частицами пыли и прочими посторонними шумами.



**Рис. 9.** Выборка точек отдельной сборной плиты висячей оболочки и аппроксимирующая ее плоскость



**Рис. 10.** Функция распределения отклонений точек плиты от аппроксимирующей плоскости

2 направление. Применялись методы цифровой обработки и фильтрации полученных данных для выделения целевого объекта – геометрии оболочки под действием постоянных и временных длительных нагрузок, а также для получения поля перемещений при переходе покрытия из ненагруженного в нагруженное состояние.

Ввиду отсутствия цифровых данных, характеризующих процесс строительства объекта, ненагруженное (преднапряженное) состояние оболочки определялось на основании предварительного численного анализа.

Разработанный алгоритм обработки пространственных данных (рис. 11) производит геометрическую реконструкцию искомой поверхности оболочки в 2 этапа. На первом этапе предварительно подготовленный массив точек аппроксимируется квадратичной поверхностью по методу наименьших квадратов. Полученная идеализированная поверхность не может в полной мере отразить сложные перемещения исследуемой оболочки, поэтому используется только в качестве ориентира. Вычисление отклонений разреженного облака точек от данной поверхности позволяет, используя заданную выборку расстояний, отсеять случайные выбросы, шумы и объекты [12], не входящие в область интереса (коммуникации, технологическое оборудование), а также сформировать более полный массив точек, описывающих оболочку. На втором этапе полученная выборка (рис. 12) аппроксимируется NURBS-поверхностью [13, 14], которая позволяет учесть локальные несовершенства и сложные перемещения реального покрытия, формируя точную геометрию нагруженной оболочки, необходимую для этапа численных исследований.



Рис. 11. Разработанный алгоритм обработки пространственных данных

3 направление. Применение методов вычислительной механики для определения напряженного состояния оболочки.

Перемещения и напряжения оболочки в начальной стадии (предварительного напряжения) возможно получить, решив основную систему уравнений метода конечных элементов в матричной форме [15]:

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\}, \quad (2)$$

где  $\{F\}$  – вектор узловых сил;  $[K]$  – глобальная матрица жесткости системы;  $\{U\}$  – вектор перемещений.

Задавшись известными начальными параметрами – силами и жесткостями, возможно найти перемещения.

Последовательно решая матричные уравнения (2) и (3), связывающие деформации и перемещения, а также напряжения и деформации, в конечном итоге находим напряженное состояние оболочки в начальной стадии.

Для нахождения напряженного состояния оболочки на стадии действия постоянных и временных длительных нагрузок сразу решаем систему уравнений (3) и (4), подставляя вместо  $U$  фактическое поле перемещений  $U_{\text{факт}}$ , определенное в ходе обработки пространственных данных:

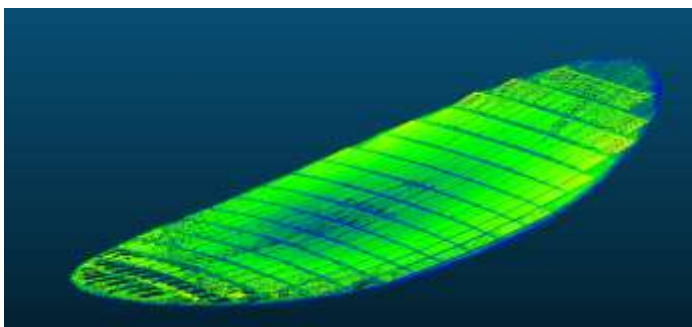
$$\{\varepsilon\} = [L] \cdot \{U\}, \quad (3)$$

где  $\{\varepsilon\}$  – вектор деформаций;  $[L]$  – дифференцирующая матрица;  $\{U\}$  – вектор перемещений;

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (4)$$

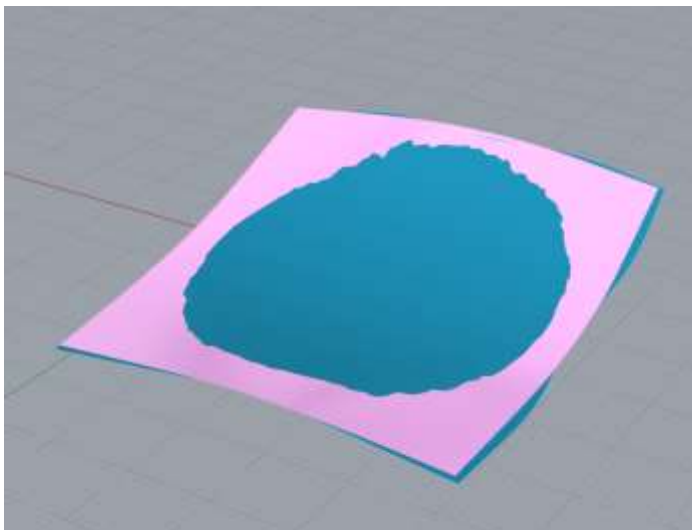
где  $\{\sigma\}$  – вектор напряжений;  $[D]$  – матрица Гука;  $\{\varepsilon\}$  – вектор деформаций.

**Результаты исследования.** На основе разработанного алгоритма обработки пространственных данных получен массив точек, принадлежащих оболочке и представляющих интерес для дальнейшего исследования (рис. 12). Сформированное облако характеризуется отсутствием посторонних шумов в виде оборудования и коммуникаций, подвешенных к оболочке.



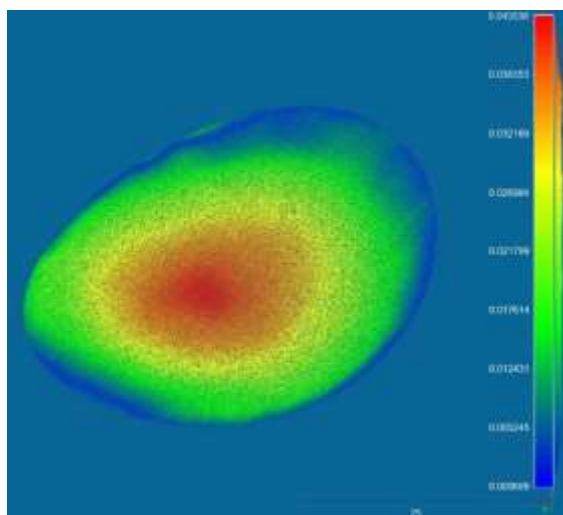
**Рис. 12.** Полученное в ходе выполнения алгоритма облако точек исследуемой оболочки

В дальнейшем полученное облако аппроксимировано NURBS-поверхностью, которая затем совмещена с другой поверхностью, характеризующей начальное преднапряженное состояние оболочки. Результат представлен на рис. 13.



**Рис. 13.** Аппроксимирующие NURBS-поверхности.  
Синий цвет – стадия преднапряжения оболочки.  
Розовый цвет – стадия постоянных и временных длительных нагрузок

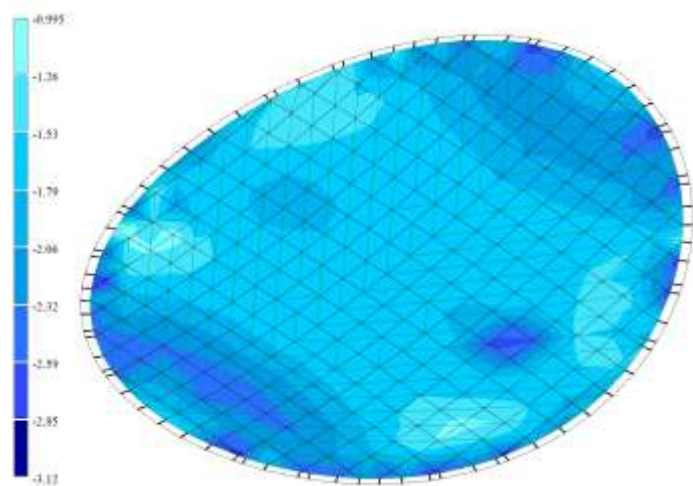
В результате сравнения двух поверхностей финальным этапом перед численным расчетом стало вычисление перемещений оболочки, находящейся на разных стадиях нагружения – в преднапряженном состоянии, а также под действием постоянных и временных длительных нагрузок. Как видно из рис. 14, максимальное перемещение оболочки под нагрузкой составляет 4,35 см, при этом распределение перемещений не строго симметрично, а имеет смещение максимума в сторону 3 четверти оболочки.



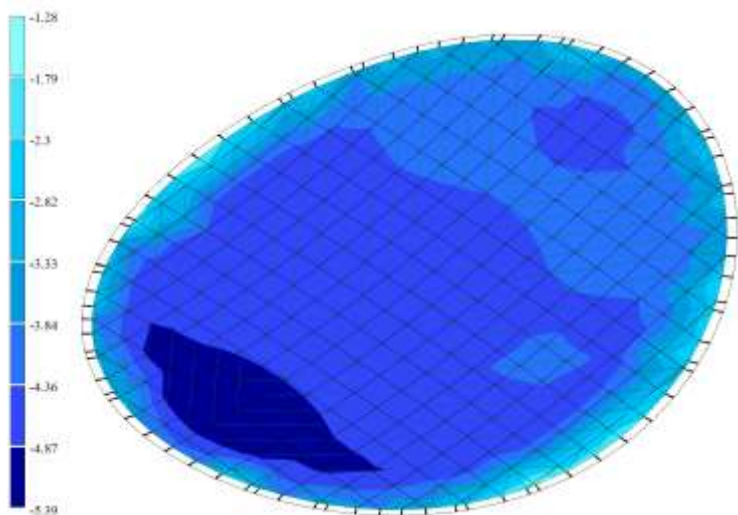
**Рис. 14.** Визуализация поля перемещений оболочки под нагрузкой относительно начального преднапряженного состояния

Полученное поле перемещений затем использовалось в качестве входных параметров численного расчета.

На рис. 15–16 изображены мембранные напряжения в оболочке по направлениям X и Y, полученные на стадии преднапряжения всياчего покрытия. Оболочка на этой стадии характеризуется обжатием по двум направлениям. Максимальные сжимающие напряжения  $N_x = 3,12$  МПа,  $N_y = 5,39$  МПа.



**Рис. 15.** Напряжения  $N_x$  оболочки в стадии преднапряжения, МПа



**Рис. 16.** Напряжения  $N_y$  оболочки в стадии преднапряжения, МПа

На рис. 17–18 представлены мембранные напряжения в оболочке по направлениям X и Y, полученные на стадии нагружения висячего покрытия постоянными и временными длительными нагрузками. Максимальные сжимающие напряжения  $N_x = 3,26$  МПа,  $N_y = 4,15$  МПа. Наиболее явное перераспределение характера и величины напряжений зафиксировано по направлению Y, по которому располагаются рабочие (несущие) ванты. Также стоит отметить, что полученные напряжения на данной стадии характеризуют снижение обжатия оболочки, что согласуется с принципом работы преднапряженных железобетонных висячих покрытий.

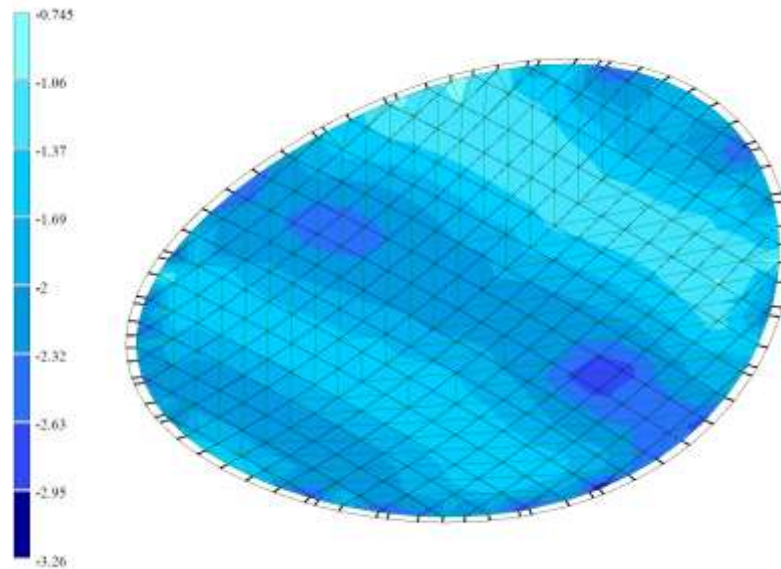


Рис. 17. Напряжения  $N_x$  оболочки в стадии постоянных и временных длительных нагрузок, МПа

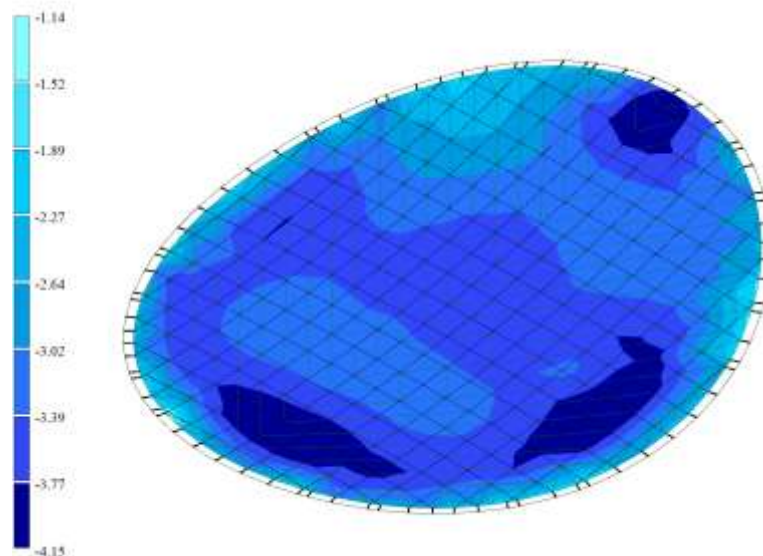


Рис. 18. Напряжения  $N_y$  оболочки в стадии постоянных и временных длительных нагрузок, МПа

### Выводы

1. Выявлена эффективность применения технологии наземного лазерного сканирования для оценки НДС большепролетных покрытий зданий на примере обследования висячей преднапряженной оболочки отрицательной гауссовой кривизны. В отличие от традиционного метода геодезического мониторинга – нивелирования по деформационным маркам –

предложенный подход позволяет в сжатые сроки получать полное детализированное представление об отклонениях исследуемого объекта.

2. Разработана и апробирована методика цифровой обработки пространственных данных, включающая этапы статистической фильтрации, разрежения облака точек на основе октодеревя и дискретизации облака точек сеткой в горизонтальной проекции с выделением локальных высотных максимумов. Методика также включает двухэтапную реконструкцию геометрии оболочки с использованием промежуточной квадратичной аппроксимации по методу наименьших квадратов и финального построения точных NURBS-поверхностей. Разработанный подход позволил получить геометрию всячего покрытия в условиях высокой зашумленности облака точек элементами подвесного оборудования и инженерных коммуникаций.

3. Показана возможность применения полученного в ходе обработки облака точек поля перемещений в качестве входных параметров при расчете в конечно-элементном комплексе, а также реализован сам численный расчет напряженного состояния оболочки в линейно-упругой постановке. Получены изополя мембранных напряжений  $N_x$  и  $N_y$  для стадии предварительного напряжения, а также для стадии действия постоянных и временных длительных нагрузок. Зафиксированный характер перераспределения напряжений показывает частичное снятие обжатия оболочки вдоль рабочих вант, что согласуется с принципами работы преднапряженных железобетонных всячих систем и верифицирует методику, рассмотренную в работе.

#### Библиографический список

1. Юсупов А. К., Муселемов Х. М., Вишталов Р. И. Пространственные большепролетные конструкции // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023. № 1 (50). С. 238–244.
2. Раззаков Н. С. Сборно-монолитные железобетонные большепролетные оболочки уникальных зданий из укрупненных элементов // Железобетонные конструкции. 2024. № 1 (5). С. 79–90.
3. Кужахметова Э. Р., Сутырин В. И. Влияние грунтового основания на напряженно-деформированное состояние большепролетного здания с цилиндро-плитным покрытием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2022. № 5 (18). С. 444–457.
4. Кужахметова Э. Р. Напряженно-деформированное состояние цилиндро-плитно-вантового покрытия здания (сооружения) с различными формами наружного опорного контура // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. № 2 (16). С. 95–110.
5. Методика геодезического мониторинга технического состояния высотных и уникальных зданий и сооружений. МДС 13-22.2009/000 «ТЕКТОПЛАН». М.: ОАО «ЦПП», 2010. 76 с.
6. Мирсаяпов И. Т., Хасанов Р. Р., Сафин Д. Р. Геотехнический мониторинг здания при реконструкции памятника истории и архитектуры // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 4 (38). С. 270–276.
7. Шоломицкий А. А., Кемербаев Н. Т., Могильный С. Г., Царенко С. Н. Анализ деформаций и напряжений оболочки вертикальных стальных резервуаров по данным лазерного сканирования // Вестник СГУГиТ. 2022. № 2 (27). С. 86–101.
8. Котельников С. И. Применение технологии лазерного сканирования для мониторинга нефтеналивных резервуаров // Маркшейдерский вестник. 2016. № 2. С. 36–40.
9. Кукарцев В. В., Антамошкин О. А. Аппроксимация данных поверхности растровых карт в геоинформационной системе // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М. Ф. Решетнева. 2012. № 3 (43). С. 29–32.
10. Епифанова Е. А., Строкова Л. А. Анализ деформаций прожекторной мачты при помощи наземного лазерного сканирования и метода конечных элементов // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2019. № 5 (330). С. 7–17.

11. Пояснительная записка по монтажу висячей оболочки цирка в г. Новосибирске. Министерство культуры СССР. Государственный проектный институт «ГИПРОТЕАТР», 1967.
12. Глумова Е. С., Серова М. А. Исследование алгоритмов фильтрации облаков точек для помехоустойчивости реконструкции поверхности // ГрафиКон. 2023. С. 988–998.
13. Deformation prediction model of large-span prestressed structure for health monitoring based on robust Gaussian process regression / Wenwei Fu [et al.] // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 318.
14. Shape imperfections of reinforced concrete shell roofs. / Elferink B. [et al.] // *Heron*. 2016. № 3 (61). Pp. 177–192.
15. Уланов А. М. Основы метода конечных элементов: учеб. пособие. Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2011. 20 с.

#### References

1. Yusupov A. K., Muselemov H. M., Vishtalov R. I. Large-span spatial structures // *Bulletin of the Dagestan State Technical University. Technical Sciences*. No. 1 (50). 2023. Pp. 238–244.
2. Razzakov N. S. Large-span precast-monolithic reinforced concrete shells of unique buildings from enlarged elements // *Reinforced Concrete Structures*. No. 1 (5). 2024. Pp. 79–90.
3. Kuzhakhmetova E. R., Sutyurin V. I. Influence of the soil base on the stress-strain state of a large-span building with a cylinder-slab roof // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No. 5 (18). 2022. Pp. 444–457.
4. Kuzhakhmetova E. R. Stress-strain state of the cylinder-slab-cabled roof of a building (structure) with different shapes of the external support contour // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. No. 2 (16). 2020. Pp. 95–110.
5. Methodology for geodetic monitoring of the technical condition of high-rise and unique buildings and structures. MDS 13-22.2009/000 "ТЕКТОПЛАН". Moscow: JSC "СРР", 2010. 76 p.
6. Mirsayapov I. T., Khasanov R. R., Safin D. R. Geotechnical monitoring of a building during the reconstruction of a historical and architectural monument // *Bulletin of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering*. No. 4 (38). 2016. Pp. 270–276.
7. Sholomitsky A. A., Kemerbaev N. T., Mogilny S. G., Tsarenko S. N. Analysis of deformations and stresses of the shell of vertical steel tanks based on laser scanning data // *Bulletin of SSUGiT*. No. 2 (27). 2022. Pp. 86–101.
8. Kotelnikov S. I. Application of laser scanning technology for monitoring oil tanks // *Mine Surveying Bulletin*. No. 2. 2016. Pp. 36–40.
9. Kukartsev V. V., Antamoshkin O. A. Approximation of raster map surface data in a geographic information system // *Bulletin of the Siberian State Aerospace University named after Academician M. F. Reshetnev*. No. 3(43). 2012. Pp. 29–32.
10. Epifanova E. A., Strokova L. A. Analysis of floodlight mast deformations using terrestrial laser scanning and the finite element method // *Bulletin of Tomsk Polytechnic University. Georesources Engineering*. No. 5 (330). 2019. Pp. 7–17.
11. Explanatory note on the installation of the hanging shell of the circus in Novosibirsk. USSR Ministry of Culture. State Design Institute "ГИПРОТЕАТР", 1967.
12. Glumova E. S., Serova M. A. Study of point cloud filtering algorithms for noise immunity of surface reconstruction. *GrafiKon*, 2023. Pp. 988–998.
13. Deformation prediction model of large-span prestressed structure for health monitoring based on robust Gaussian process regression / Wenwei Fu [et al.] // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 318.
14. Shape imperfections of reinforced concrete shell roofs. / Elferink B. [et al.] // *Heron*. 2016. № 3 (61). Pp. 177–192.
13. Ulanov A. M. Fundamentals of the finite element method: a tutorial. Samara: Samara State Aerospace University. 2011. 20 p.

**EXPERIMENTAL STUDY OF THE STRESS-STRAIN STATE  
OF A HANGING PRESTRESSED CONCRETE HYPERBOLIC PARABOLOID SHELL  
BASED ON LASER SCANNING DATA**

D. S. Glazkov <sup>1</sup>, V. A. Kozlov <sup>2</sup>

Voronezh State Technical University <sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> Postgraduate Student of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(915)542-17-05, e-mail: glazckov.mitia@yandex.ru

<sup>2</sup> Dr. of Physics and Mathematics Sciences, Head of the Dept. of Structural Mechanics, e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

---

The article is devoted to the issues of monitoring the technical condition and experimental determination of the stress-strain state of large-span structures, in particular hanging reinforced concrete shells. Ground-based laser scanning is used as the main geodetic method.

A complex task has been set and solved, from obtaining and registering a point cloud to numerically determining the stress-strain state of the shell under study.

A general methodological scheme for processing a point cloud in conditions of noise and interference has been developed, ensuring the restoration of the actual geometry of the suspended coating at various stages of loading. Based on the data obtained, the deviation of the shell geometry from its initial prestressed state during static loading by constant and temporary long-term loads is analyzed.

The stress-strain state of the object under study is determined by the finite element method by solving the problem of integrating laser scanning data into a computational complex in the form of a displacement field. Based on the results of the study, conclusions were drawn about the stress-strain state of the hanging shell in question, as well as conclusions on monitoring large-span structures using laser scanning.

**Keywords:** hanging shells, ground-based laser scanning, point cloud approximation, displacement field, finite element method, stress-strain state, technical condition monitoring.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

---

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.  
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
  - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
  - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
  - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
  - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
  - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
  - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
  - 3.7. Текст статьи;
  - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
  - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
  - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]). Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,  
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, доц.,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доц.

Почтовый адрес редакции: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.