

ISSN 2219-1038 (print)  
ISSN 2949-3757 (online)

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ**

Научный журнал

**Выпуск № 1 (48)**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж – 2026

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения – Российская Федерация.

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В. С.**, д-р техн. наук, профессор,

Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора: Козлов В. А.**, д-р физ.-мат. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е.**, канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Антонов В. М.**, канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;

**Беляева С. Ю.**, канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Буренин А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;

**Гриднев С. Ю.**, д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Зверев В. В.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Липецкий государственный технический университет;

**Ефрюшин С. В.**, канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Кирсанов М. Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;

**Колчунов В. И.**, д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;

**Коробко А. В.**, д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;

**Михайлов В. В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;

**Нугужинов Ж. С.**, д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития  
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;

**Овчинников И. Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;

**Пшеничкина В. А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;

**Свентиков А. А.**, д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Трещев А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;

**Турищев Л. С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;

**Шимановский А. О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;

**Шитикова М. В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки – А. Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,  
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Подписной индекс в электронном каталоге Почты России – ПД038

Дата выхода в свет 25.03.2026. Усл. печ. л. 13,8. Формат 60×84/8. Тираж 29 экз. Заказ № 28.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Регистрационный номер ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018

Цена свободная

Адрес редакции и издателя: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
(строительный факультет, кафедра строительной механики),  
тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»  
394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

12+

ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2026

ISSN 2219-1038 (print)  
ISSN 2949-3757 (online)

# **STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES**

Scientific Journal

**Issue № 1 (48)**

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh – 2026

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.

Territory of distribution — Russian Federation.

The journal «Structural mechanics and structures» is included into the List of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof.,

Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Kozlov V. A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G. E.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

**Antonov V. M.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

**Belyaeva S. Yu.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Burenin A. A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

**Gridnev S. Yu.**, Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Zverev V. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Lipetsk State Technical University;

**Efryushin S. V.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Kirsanov M. N.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

**Kolchunov V. I.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

**Korobko A. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenev;

**Mikhailov V. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

**Nguyen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

**Nuguxhinov Zh. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

**Ovchinnikov I. G.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

**Pshenichkina V. A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

**Sventikov A. A.**, Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Trechshev A. A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

**Turichshev L. S.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

**Shimanovsky A. O.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

**Shitikova M. V.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A. R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Subscription index in the electronic catalog of the Russian Post – ПД038

Publication date 25.03.2026. Conventional printed sheets 13.8. Format 60×84/8. Numbers of copies 29. Order № 28.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 – 72895 dated 22.05.2018

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation

(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics),

tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>7</b>
<i>Бакушев С. В.</i> Касательные напряжения в многослойном неоднородном упругом стержне.....	7
<i>Муртазалиев Г. М., Пайзулаев М. М.</i> Расчёт цилиндрической оболочки при коррозии методами теории катастроф .....	22
<i>Саиян С. Г.</i> Теоретическое исследование ограничений специальной пассивной сейсмической защиты зданий и сооружений при воздействии поверхностных волн. Часть 1: динамический гаситель колебаний .....	31
<i>Саиян С. Г.</i> Теоретическое исследование ограничений специальной пассивной сейсмической защиты зданий и сооружений при воздействии поверхностных волн. Часть 2: сейсмоизоляция .....	44
<i>Dai Qiao</i> Вывод формулы для расчета первой частоты собственных колебаний трапецевидной фермы.....	55
<b>ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>63</b>
<i>Решетов А. А., Диомидов Е. Д.</i> Влияние жесткого железобетонного барьера в грунте на затухание вибрационных волн от подвижного состава метрополитена к подземной части проектируемого здания.....	63
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ .....</b>	<b>72</b>
<i>Мищенко А. В., Тасова А. А.</i> Оптимизация параметров комбинированной балочно-вантовой системы.....	72
<i>Туснин А. Р., Грачева Е. К.</i> Численный расчёт мембранных конструкций с использованием современных вычислительных комплексов.....	82
<i>Черняев А. А., Марфин К. В.</i> Оценка влияния сейсмического воздействия на напряженное состояние опорного узла стального каркаса здания .....	97
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ .....</b>	<b>103</b>
<i>Мкртычев О. В., Айтян С. А.</i> Расчет фундамента турбоагрегата на сейсмическое воздействие в нелинейной динамической постановке .....	103
<b>ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>109</b>
<i>Беляева С. Ю., Рубцова Е. Г., Сизинцев С. В., Ожерельев А. И.</i> Исследование дефектов сварных прямошовных труб большого диаметра .....	109
<b>ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ .....</b>	<b>119</b>

## CONTENTS

<b>STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS .....</b>	<b>7</b>
<i>Bakushev S. V.</i>	
Shear Stresses in a Multilayer Inhomogeneous Elastic Member.....	7
<i>Murtazaliev G. M., Paizulaev M. M.</i>	
Calculation of a Cylindrical Shell During Corrosion Using Catastrophe Theory Methods .....	22
<i>Saiyan S. G.</i>	
Theoretical Study of the Limitations of Special Passive Seismic Protection of Buildings and Structures Under the Action of Surface Waves. Part 1: Tuned Mass Damper .....	31
<i>Saiyan S. G.</i>	
Theoretical Study of the Limitations of Special Passive Seismic Protection of Buildings and Structures Under the Action of Surface Waves. Part 2: Seismic Isolation.....	44
<i>Dai Qiao</i>	
Derivation of a Formula for the First Frequency Trapezoid Truss Natural Oscillations.....	55
<b>MOBILE LOAD DYNAMIC EFFECT ON ELASTIC SYSTEMS .....</b>	<b>63</b>
<i>Reshetov A. A., Diomidov E. D.</i>	
The Influence of a Rigid Reinforced Concrete Barrier in Soil on the Attenuation of Vibration Waves From Metro Rolling Stock to the Underground Part of a Designed Building .....	63
<b>CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES .....</b>	<b>72</b>
<i>Mishchenko A. V., Tasova A. A.</i>	
Optimization of the Parameters of a Combined Beam-Cable System .....	72
<i>Tusnin A. R., Gracheva E. K.</i>	
Numerical Analysis of Membrane Structures Using Modern Computational Software .....	82
<i>Chernyaev A. A., Marfin K. V.</i>	
Assessment of the Influence of Seismic Effect on the Stress State of the Support Unit of a Steel Frame Building.....	97
<b>CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES .....</b>	<b>103</b>
<i>Mkrtichev O. V., Aityan S. A.</i>	
Calculation of a Turbo Unit Foundation for Seismic Effects in a Nonlinear Dynamic Formulation.....	103
<b>PILOT AND FIELD OBSERVATIONS OF STRUCTURES AND MATERIALS .....</b>	<b>109</b>
<i>Belyaeva S. Yu., Rubtsova E. G., Sizintsev S. V., Ozherelyev A. I.</i>	
Study of Defects in Large-Diameter Welded Straight-Seam Pipes .....	109
<b>RULES OF PREPARATION OF ARTICLES .....</b>	<b>119</b>

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.2

DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.001

## КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНОМ НЕОДНОРОДНОМ УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

С. В. Бакушев<sup>1</sup>

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства<sup>1</sup>  
Россия, г. Пенза

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры механики, тел.: 8-906-395-07-54, e-mail: bakuchsv@mail.ru

**Постановка задачи.** Рассматривается задача определения касательных напряжений в многослойном (со слоями, параллельными между собой и продольной оси стержня), разнородном, упругом стержне, находящемся в условиях плоского поперечного изгиба.

**Результаты.** Решение, аналогичное решению Журавского, строится на основании гипотезы плоских сечений и предположения об отсутствии сдвигов между слоями. Получены формулы для вычисления касательных напряжений в поперечных сечениях многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба. Рассмотрен числовой пример построения эпюры касательных напряжений в поперечном сечении шестислойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба.

**Выводы.** Полученные в статье результаты могут быть использованы при вычислении касательных напряжений в изгибаемых неоднородных многослойных упругих стержнях при оценке их прочности.

**Ключевые слова:** стержень, неоднородность, упругость, касательные напряжения.

**Введение.** Многослойные и разнородные упругие и упругопластические стержни и балки зачастую не только являются более экономичными и обладают повышенной несущей способностью, но и более рационально используют материал как по площади поперечного сечения, так и по длине стержня [1]. Ввиду этого разработка методов и методик определения напряжённого и деформированного состояния многослойных и разнородных упругих и упругопластических стержней является одной из приоритетных задач механики деформируемого твёрдого тела.

Вопросы исследования многослойных и разнородных упругих стержней рассматривались во многих работах отечественных учёных. основополагающей работой в области расчёта многослойных конструкций является монография [2]. Подробный обзор, современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней даются в статье [3]. Применение метода конечных элементов для расчёта многослойных балок показано в работе [4]. В статье [5] даётся общее решение задачи об изгибе балки в рядах Фурье. В работе [6] предложена численная методика расчёта многослойных балок на упругом основании. В статье [7] предложена численная методика определения нормальных и касательных напряжений в многослойных балках, работа которых моделируется теорией составных стержней А. Р. Ржаницына [8]. В работе [9] приводится система разрешающих уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние многослойной балки и позволяющая решать широкий ряд задач, таких как сдвиг, изгиб, нормальный отрыв для любого числа слоев.

В данной работе рассматривается задача определения касательных напряжений в многослойном, разнородном, упругом стержне, находящемся в условиях плоского поперечного изгиба. При этом предполагается отсутствие сдвигов между слоями, а гипотеза плоских сечений считается справедливой.

**Теоретические основы.** Рассмотрим многослойный упругий стержень, слои которого параллельны его продольной оси  $OZ$  и одной из главных осей инерции поперечного сечения, например оси  $OX$ . Каждый  $i$ -й слой стержня характеризуется геометрическими размерами своего поперечного сечения  $b_i \times h_i$  и модулем упругости  $E_i$  материала слоя. Пусть всего слоёв будет  $n$ . Из них выше нейтральной линии находится  $n_B$  слоёв, ниже нейтральной линии находится  $n_H$  слоёв. Так что  $n = n_B + n_H + 1$ .

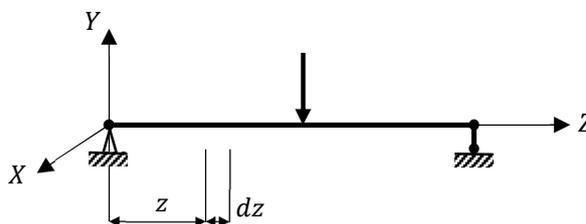


Рис. 1. Расчётная схема

Пусть стержень испытывает плоский поперечный изгиб в направлении оси  $OY$  под действием сосредоточенной силы  $F$  (рис. 1).

На расстоянии  $z$  от левого конца стержня выделим участок стержня длиной  $dz$  и рассмотрим равновесие отсечённой верхней части этого участка. При этом горизонтальное сечение проведём в пределах  $k$ -го слоя, считая от слоя, в котором проходит нейтральная линия (нулевого слоя) (рис. 2).

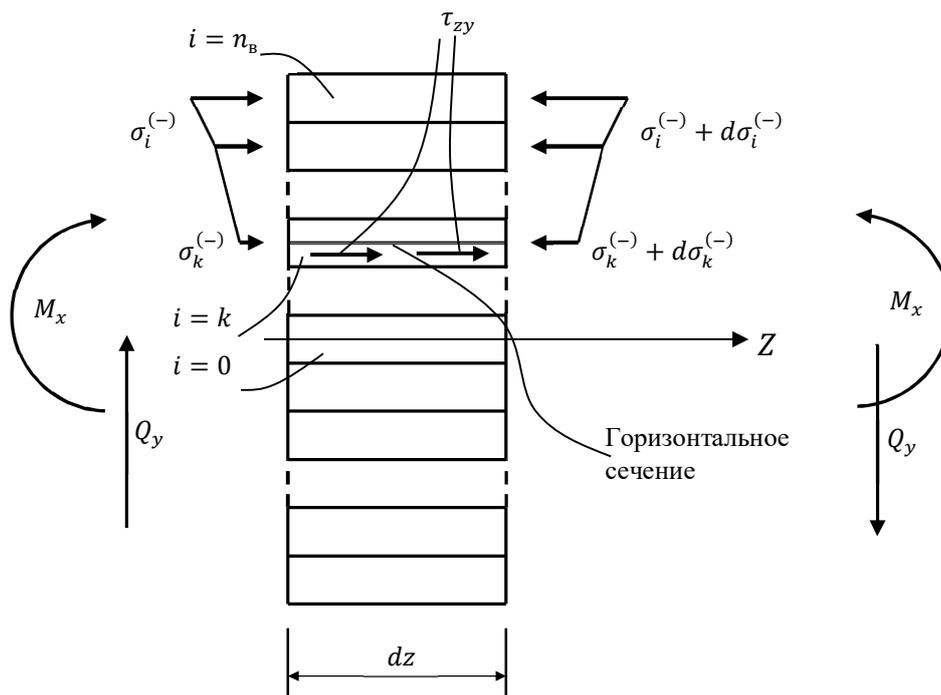


Рис. 2. Отсечённая часть стержня выше нейтральной линии

На выделенный элемент стержня, полагая, что он находится в сжатой зоне поперечного сечения, в пределах  $n_B - k$  + часть  $k$ -го слоя, действует следующая система нормальных напряжений  $\sigma_z$ :

– на левую боковую грань:

$$\sigma_k^{(-)} = E_k^{(-)} \frac{y_k^{(-)}}{\rho};$$

$$\sigma_i^{(-)} = E_i^{(-)} \frac{\tilde{h}_k^{(-)} + \sum_{j=k+1}^i h_j^{(-)} + y_i}{\rho}, \quad i = k+1, k+2, \dots, n_B; \quad (1)$$

– на правую боковую грань:

$$\sigma_k^{(-)} + d\sigma_k^{(-)}; \quad \sigma_i^{(-)} + d\sigma_i^{(-)}. \quad (2)$$

По нижней грани длиной  $dz$  выделенного элемента для его уравновешивания приложим систему касательных напряжений  $\tau_{zy}$ . В силу малости длины  $dz$  распределение касательных напряжений  $\tau_{zy}$  по длине  $dz$  будем считать равномерным. Далее примем допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине поперечного сечения стержня (по ширине  $k$ -го слоя), как и в теории Журавского.

Запишем уравнение равновесия выделенного элемента стержня в проекции на горизонтальную ось  $Z$ :

$$\int_{A_k^{(-)}} \sigma_k^{(-)} dA + \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} \sigma_i^{(-)} dA - \int_{A_k^{(-)}} [\sigma_k^{(-)} + d\sigma_k^{(-)}] dA - \\ - \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} [\sigma_i^{(-)} + d\sigma_i^{(-)}] dA + \tau_{zy} b_k dz = 0.$$

Или, раскрывая квадратные скобки, получаем:

$$\int_{A_k^{(-)}} \sigma_k^{(-)} dA + \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} \sigma_i^{(-)} dA - \int_{A_k^{(-)}} \sigma_k^{(-)} dA - \int_{A_k^{(-)}} d\sigma_k^{(-)} dA - \\ - \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} \sigma_i^{(-)} dA - \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} d\sigma_i^{(-)} dA + \tau_{zy} b_k dz = 0.$$

Приводим подобные слагаемые:

$$- \int_{A_k^{(-)}} d\sigma_k^{(-)} dA - \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} d\sigma_i^{(-)} dA + \tau_{zy} b_k dz = 0. \quad (3)$$

Учитывая формулы (1), получим:

$$- \int_{A_k^{(-)}} d \left( E_k^{(-)} \frac{y_k^{(-)}}{\rho} \right) dA - \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} d \left( E_i^{(-)} \frac{\tilde{h}_k^{(-)} + \sum_{j=k+1}^i h_j^{(-)} + y_i}{\rho} \right) dA + \tau_{zy} b_k dz = 0. \quad (4)$$

Поскольку [10]

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI}, \quad (5)$$

где

$$EI = E_{n_B}^{(-)} I_x^{(n_B)^{(-)}} + E_{n_B-1}^{(-)} I_x^{(n_B-1)^{(-)}} + \dots + E_1^{(-)} I_x^{(1)^{(-)}} + E_0 I_x^{(0)^{(-)}} + \\ + E_0 I_x^{(0)^{(+)}} + E_1^{(+)} I_x^{(1)^{(+)}} + E_2^{(+)} I_x^{(2)^{(+)}} + \dots + E_{n_H}^{(+)} I_x^{(n_H)^{(+)}}, \quad (6)$$

то формула (4) получает вид:

$$\int_{A_k^{(-)}} d \left( E_k^{(-)} \frac{M_x}{EI} y_k^{(-)} \right) dA + \\ + \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} d \left( E_i^{(-)} \frac{M_x}{EI} \left( \tilde{h}_k^{(-)} + \sum_{j=k+1}^i h_j^{(-)} + y_i \right) \right) dA = \tau_{zy} b_k dz. \quad (7)$$

Так как приращение нормальных напряжений связано только с приращением изгибающего момента, то формула (7) преобразуется к форме:

$$dM_x \frac{E_k^{(-)}}{EI} \int_{A_k^{(-)}} y_k^{(-)} dA + \\ + dM_x \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \frac{E_i^{(-)}}{EI} \int_{A_i^{(-)}} \left( \tilde{h}_k^{(-)} + \sum_{j=k+1}^i h_j^{(-)} + y_i \right) dA = \tau_{zy} b_k dz. \quad (8)$$

Поскольку в формуле (8) интегралы представляют собой статические моменты площадей поперечных сечений слоёв стержня, входящих в отсечённую часть, относительно нейтральной оси, то формула (8) получает вид:

$$dM_x \frac{E_k^{(-)}}{EI} \tilde{S}_x^{k(-)} + dM_x \sum_{i=k+1}^{i=n_B} \frac{E_i^{(-)}}{EI} S_x^{i(-)} = \tau_{zy} b_k dz. \quad (9)$$

Здесь 
$$\tilde{S}_x^{k(-)} = \int_{A_k^{(-)}} y_k^{(-)} dA -$$

статический момент отсеченной части  $k$ -го слоя относительно нейтральной оси  $X$ ;

$$S_x^{i(-)} = \int_{A_i^{(-)}} \left( \tilde{h}_k^{(-)} + \sum_{j=k+1}^i h_j^{(-)} + y_i \right) dA -$$

статический момент  $i$ -го слоя относительно нейтральной оси  $X$ ;  $\tilde{h}_k^{(-)}$  — часть высоты  $k$ -го слоя от горизонтального сечения до  $k + 1$  слоя.

Из формулы (9) определяем касательное напряжение, действующее в поперечном сечении (в соответствии с законом парности касательных напряжений) многослойного стержня в сжатой его части:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y E_k^{(-)}}{b_k EI} \tilde{S}_x^{k(-)} + \frac{Q_y \sum_{i=k+1}^{i=n_B} E_i^{(-)}}{b_k EI} S_x^{i(-)}.$$

Или 
$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_k EI} \left( E_k^{(-)} \tilde{S}_x^{k(-)} + \sum_{i=k+1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right). \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда в отсечённую горизонтальным сечением часть стержня попадает слой с нейтральной линией (рис. 3). В этом случае система напряжений, действующих по левой боковой грани отсечённой части, будет иметь вид:

$$\sigma_0^{(-)} = E_0^{(-)} \frac{y_0^{(-)}}{\rho}; \quad \sigma_i^{(-)} = E_i^{(-)} \frac{\tilde{h}_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(-)} + y_i}{\rho}, \quad i = 1, 2, \dots, n_B; \\ \sigma_0^{(+)} = E_0^{(+)} \frac{y_0^{(+)}}{\rho}; \quad \sigma_i^{(+)} = E_i^{(+)} \frac{\tilde{h}_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(+)} + y_i}{\rho}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1; \quad (11) \\ \sigma_m^{(+)} = E_m^{(+)} \frac{y_m^{(+)}}{\rho}.$$

На правую боковую грань выделенного элемента будет действовать система напряжений

$$\sigma_0^{(-)} + d\sigma_0^{(-)}; \quad \sigma_i^{(-)} + d\sigma_i^{(-)}; \\ \sigma_0^{(+)} + d\sigma_0^{(0)}; \quad \sigma_i^{(+)} + d\sigma_i^{(+)}; \quad \sigma_m^{(+)} + d\sigma_m^{(+)}. \quad (12)$$

Уравнение равновесия выделенного элемента стержня в проекции на горизонтальную ось  $Z$  запишется так:

$$\int_{A_0^{(-)}} \sigma_0^{(-)} dA + \sum_{i=1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} \sigma_i^{(-)} dA + \int_{A_0^{(+)}} \sigma_0^{(+)} dA +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{A_i^{(+)}} \sigma_i^{(+)} dA + \int_{A_m^{(+)}} \sigma_m^{(+)} dA - \int_{A_0^{(-)}} [\sigma_0^{(-)} + d\sigma_0^{(-)}] dA - \\
 & - \sum_{i=1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} [\sigma_i^{(-)} + d\sigma_i^{(-)}] dA - \int_{A_0^{(+)}} [\sigma_0^{(+)} + d\sigma_0^{(+)}] dA - \\
 & - \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{A_i^{(+)}} [\sigma_i^{(+)} + d\sigma_i^{(+)}] dA - \int_{A_m^{(+)}} [\sigma_m^{(+)} + d\sigma_m^{(+)}] dA + \tau_{zy} b_m dz = 0.
 \end{aligned}$$

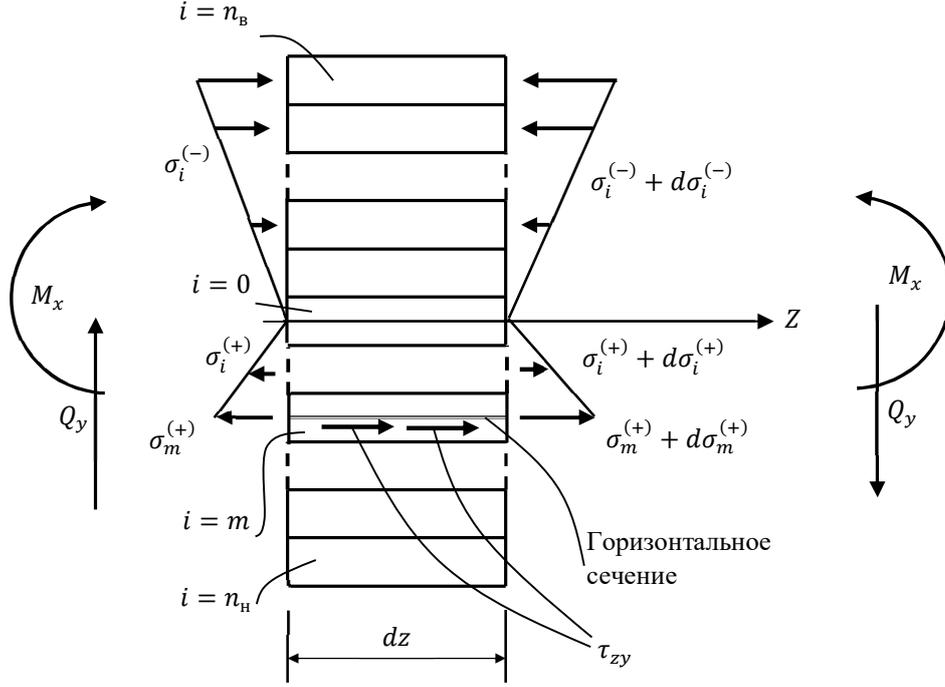


Рис. 3. Отсечённая часть стержня ниже нейтральной линии

После элементарных преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{A_0^{(-)}} d\sigma_0^{(-)} dA - \sum_{i=1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} d\sigma_i^{(-)} dA - \int_{A_0^{(+)}} d\sigma_0^{(+)} dA - \\
 & - \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{A_i^{(+)}} d\sigma_i^{(+)} dA - \int_{A_m^{(+)}} d\sigma_m^{(+)} dA + \tau_{zy} b_m dz = 0.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая формулы (11), будем иметь:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{A_0^{(-)}} d \left[ E_0^{(-)} \frac{y_0^{(-)}}{\rho} \right] dA - \sum_{i=1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} d \left[ E_i^{(-)} \frac{\tilde{h}_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(-)} + y_i}{\rho} \right] dA - \\
 & - \int_{A_0^{(+)}} d \left[ E_0^{(+)} \frac{y_0^{(+)}}{\rho} \right] dA - \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{A_i^{(+)}} d \left[ E_i^{(+)} \frac{\tilde{h}_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(+)} + y_i}{\rho} \right] dA - \\
 & - \int_{A_m^{(+)}} d \left[ E_m^{(+)} \frac{y_m^{(+)}}{\rho} \right] dA + \tau_{zy} b_m dz = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Принимая во внимание соотношение (5), формула (14) получает вид:

$$\begin{aligned} & - \int_{A_0^{(-)}} d \left[ E_0^{(-)} \frac{M_x}{EI} y_0^{(-)} \right] dA - \sum_{i=1}^{i=n_B} \int_{A_i^{(-)}} d \left[ E_i^{(-)} \frac{M_x}{EI} \left( \tilde{h}_0^{(-)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(-)} + y_i \right) \right] dA - \\ & - \int_{A_0^{(+)}} d \left[ E_0^{(+)} \frac{M_x}{EI} y_0^{(+)} \right] dA - \sum_{i=1}^{i=m-1} \int_{A_i^{(+)}} d \left[ E_i^{(+)} \frac{M_x}{EI} \left( \tilde{h}_0^{(+)} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j^{(+)} + y_i \right) \right] dA - \\ & - \int_{A_m^{(+)}} d \left[ E_m^{(+)} \frac{M_x}{EI} y_m^{(+)} \right] dA + \tau_{zy} b_m dz = 0. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} & -dM_x \frac{E_0^{(-)}}{EI} \int_{A_0^{(-)}} [y_0^{(-)}] dA - dM_x \sum_{i=1}^{i=n_B} \frac{E_i^{(-)}}{EI} \int_{A_i^{(-)}} \left[ \left( \sum_{j=0}^i h_j^{(-)} + y_i \right) \right] dA - \\ & -dM_x \frac{E_0^{(+)}}{EI} \int_{A_0^{(+)}} [y_0^{(+)}] dA - dM_x \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{E_i^{(+)}}{EI} \int_{A_i^{(+)}} \left[ \left( \sum_{j=1}^i h_j^{(+)} + y_i \right) \right] dA - \\ & -dM_x \frac{E_m^{(+)}}{EI} \int_{A_m^{(+)}} [y_m^{(+)}] dA + \tau_{zy} b_m dz = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Принимая во внимание значение интегралов в выражении (15), получим формулу, аналогичную формуле (9):

$$\begin{aligned} & -dM_x \frac{E_0^{(-)}}{EI} S_x^{0(-)} - dM_x \sum_{i=1}^{i=n_B} \frac{E_i^{(-)}}{EI} S_x^{i(-)} - dM_x \frac{E_0^{(+)}}{EI} S_x^{0(+)} - \\ & -dM_x \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{E_i^{(+)}}{EI} S_x^{i(+)} - dM_x \frac{E_m^{(+)}}{EI} S_x^{m(+)} + \tau_{zy} b_m dz = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} S_x^{0(-)} &= \int_{A_0^{(-)}} [y_0^{(-)}] dA; \quad S_x^{0(+)} = \int_{A_0^{(+)}} [y_0^{(+)}] dA; \\ S_x^{i(-)} &= \int_{A_i^{(-)}} \left[ \frac{E_i^{(-)}}{EI} \left( \sum_{j=0}^i h_j^{(-)} + y_i \right) \right] dA; \\ S_x^{i(+)} &= \int_{A_i^{(+)}} \left[ \frac{E_i^{(+)}}{EI} \left( \sum_{j=1}^i h_j^{(+)} + y_i \right) \right] dA; \quad S_x^{m(+)} = \int_{A_m^{(+)}} \left[ \frac{E_m^{(+)}}{EI} y_m^{(+)} \right] dA. \end{aligned}$$

Из формулы (16) определяем касательное напряжение, действующее в поперечном сечении (в соответствии с законом парности касательных напряжений) многослойного стержня в его сжатой и растянутой частях:

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= \frac{Q_y}{b_m} \frac{E_0^{(-)}}{EI} S_x^{0(-)} + \frac{Q_y}{b_m} \sum_{i=1}^{i=n_B} \frac{E_i^{(-)}}{EI} S_x^{i(-)} + \\ & + \frac{Q_y}{b_m} \frac{E_0^{(+)}}{EI} S_x^{0(+)} + \frac{Q_y}{b_m} \sum_{i=1}^{i=m-1} \frac{E_i^{(+)}}{EI} S_x^{i(+)} + \frac{Q_y}{b_m} \frac{E_m^{(+)}}{EI} S_x^{m(+)}. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} \tau_{zy} &= \frac{Q_y}{b_m EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + \right. \\ & \left. + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \sum_{i=1}^{i=m-1} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_m^{(+)} S_x^{m(+)} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Для определения положения нейтральной линии воспользуемся условием, что при плоском изгибе балки продольная сила равна нулю [10]:

$$\begin{aligned}
 & -E_{n_b}^{(-)} S_x^{(n_b)(-)} - E_{n_b-1}^{(-)} S_x^{(n_b-1)(-)} - \dots - E_1^{(-)} S_x^{(1)(-)} - E_0 S_x^{(0)(-)} + \\
 & + E_0 S_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} S_x^{(1)(+)} + E_2^{(+)} S_x^{(2)(+)} + \dots + E_{n_H}^{(+)} S_x^{(n_H)(+)} = 0.
 \end{aligned} \quad (18)$$

**Пример.** В качестве примера рассмотрим шестислойный стержень, находящийся в условиях плоского поперечного изгиба. Поперечное сечение стержня показано на рис. 4.

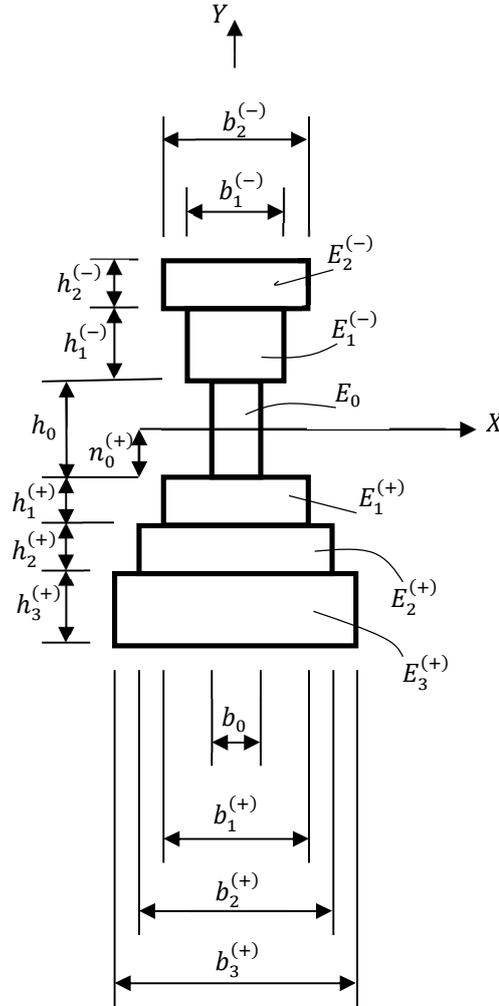


Рис. 4. Поперечное сечение стержня

В сечении действует поперечная сила  $Q_y = 100$  кН. Статические моменты площадей поперечных сечений слоёв стержня относительно нейтральной оси  $X$  будут вычисляться так:

$$\begin{aligned}
 S_x^{(0)(+)} &= -b_0 n_0^{(+)} \frac{n_0^{(+)}}{2}; \quad S_x^{(1)(+)} = -b_1^{(+)} h_1^{(+)} \left( n_0^{(+)} + \frac{h_1^{(+)}}{2} \right); \\
 S_x^{(2)(+)} &= -b_2^{(+)} h_2^{(+)} \left( n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + \frac{h_2^{(+)}}{2} \right); \\
 S_x^{(3)(+)} &= -b_3^{(+)} h_3^{(+)} \left( n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)} + \frac{h_3^{(+)}}{2} \right); \\
 S_x^{(0)(-)} &= b_0 \frac{(h_0 - n_0^{(+)})^2}{2}; \quad S_x^{(1)(-)} = b_1^{(-)} h_1^{(-)} \left[ (h_0 - n_0^{(+)}) + \frac{h_1^{(-)}}{2} \right];
 \end{aligned}$$

$$S_x^{(2)(-)} = b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left[ (h_0 - n_0^{(+)}) + h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right].$$

При этом соотношение (18) получит вид:

$$\begin{aligned} & -E_2^{(-)} b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left[ (h_0 - n_0^{(+)}) + h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right] - E_1^{(-)} b_1^{(-)} h_1^{(-)} \left[ (h_0 - n_0^{(+)}) + \frac{h_1^{(-)}}{2} \right] - \\ & -E_0 b_0 \frac{(h_0 - n_0^{(+)})^2}{2} + E_0 b_0 y_0^{(+)} \frac{n_0^{(+)}}{2} + E_1^{(+)} b_1^{(+)} h_1^{(+)} \left( n_0^{(+)} + \frac{h_1^{(+)}}{2} \right) + E_2^{(+)} b_2^{(+)} h_2^{(+)} \times \\ & \times \left( n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + \frac{h_2^{(+)}}{2} \right) + E_3^{(+)} b_3^{(+)} h_3^{(+)} \left( n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)} + \frac{h_3^{(+)}}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда определяем положение нейтральной линии:

$$n_0^{(+)} = \frac{S_{np}}{A_{np}}. \quad (19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_{np} &= E_2^{(-)} b_2^{(-)} h_2^{(-)} + E_1^{(-)} b_1^{(-)} h_1^{(-)} + E_0 b_0 h_0 + \\ & + E_1^{(+)} b_1^{(+)} h_1^{(+)} + E_2^{(+)} b_2^{(+)} h_2^{(+)} + E_3^{(+)} b_3^{(+)} h_3^{(+)}; \\ S_{np} &= E_2^{(-)} b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left( h_0 + h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right) + E_1^{(-)} b_1^{(-)} h_1^{(-)} \left( h_0 + \frac{h_1^{(-)}}{2} \right) + \\ & + E_0 b_0 h_0 \frac{h_0}{2} - E_1^{(+)} b_1^{(+)} h_1^{(+)} \frac{h_1^{(+)}}{2} - E_2^{(+)} b_2^{(+)} h_2^{(+)} \left( h_1^{(+)} + \frac{h_2^{(+)}}{2} \right) - \\ & - E_3^{(+)} b_3^{(+)} h_3^{(+)} \left( h_1^{(+)} + h_2^{(+)} + \frac{h_3^{(+)}}{2} \right). \end{aligned}$$

Формула (6) получает вид:

$$\begin{aligned} EI &= E_2^{(-)} I_x^{(2)(-)} + E_1^{(-)} I_x^{(1)(-)} + E_0 I_x^{(0)(-)} + \\ & + E_0 I_x^{(0)(+)} + E_1^{(+)} I_x^{(1)(+)} + E_2^{(+)} I_x^{(2)(+)} + E_3^{(+)} I_x^{(3)(+)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь в соответствии с рис. 3

$$\begin{aligned} I_x^{(2)(-)} &= \frac{b_2^{(-)} [h_2^{(-)}]^3}{12} + b_2^{(-)} h_2^{(-)} \left[ h_0 - n_0^{(+)} + h_1^{(-)} + \frac{h_2^{(-)}}{2} \right]^2; \\ I_x^{(1)(-)} &= \frac{b_1^{(-)} [h_1^{(-)}]^3}{12} + b_1^{(-)} h_1^{(-)} \left[ h_0 - n_0^{(+)} + \frac{h_1^{(-)}}{2} \right]^2; \\ I_x^{(0)(-)} &= \frac{b_0 [h_0 - n_0^{(+)}]^3}{12} + b_0 (h_0 - n_0^{(+)}) \left[ \frac{h_0 - n_0^{(+)}}{2} \right]^2; \\ I_x^{(0)(+)} &= \frac{b_0 [n_0^{(+)}]^3}{12} + b_0 n_0^{(+)} \left[ \frac{n_0^{(+)}}{2} \right]^2; \\ I_x^{(1)(+)} &= \frac{b_1^{(+)} [h_1^{(+)}]^3}{12} + b_1^{(+)} h_1^{(+)} \left[ n_0^{(+)} + \frac{h_1^{(+)}}{2} \right]^2; \\ I_x^{(2)(+)} &= \frac{b_2^{(+)} [h_2^{(+)}]^3}{12} + b_2^{(+)} h_2^{(+)} \left[ n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + \frac{h_2^{(+)}}{2} \right]^2; \end{aligned}$$

$$I_x^{(3)(+)} = \frac{b_3^{(+)} [h_3^{(+)}]^3}{12} + b_3^{(+)} h_3^{(+)} \left[ n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)} + \frac{h_3^{(+)}}{2} \right]^2.$$

Рассмотрим исходные данные для численных расчётов.

Случай I.

$$E_3^{(+)} = 250000 \text{ МПа}, \quad E_2^{(+)} = 200000, \quad E_1^{(+)} = 150000 \text{ МПа},$$

$$E_0 = 300000 \text{ МПа}, \quad E_1^{(-)} = 125000 \text{ МПа}, \quad E_2^{(-)} = 275000 \text{ МПа};$$

$$b_3^{(+)} = 9 \text{ см}, \quad b_2^{(+)} = 7 \text{ см}, \quad b_1^{(+)} = 5 \text{ см}, \quad b_0 = 4 \text{ см}, \quad b_1^{(-)} = 6 \text{ см}, \quad b_2^{(-)} = 8 \text{ см};$$

$$h_3^{(+)} = 7 \text{ см}, \quad h_2^{(+)} = 5 \text{ см}, \quad h_1^{(+)} = 3 \text{ см}, \quad h_0 = 12 \text{ см}, \quad h_1^{(-)} = 6 \text{ см}, \quad h_2^{(-)} = 4 \text{ см}.$$

Результаты расчётов:

$$A_{\text{нр}} = 5270000 \text{ кН}; \quad S_{\text{нр}} = 10690000 \text{ кН} \cdot \text{см}; \quad n_0^{(+)} = 2,028 \text{ см};$$

$$EI = 7,300180139152436 \cdot 10^8 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

Расчёт по формуле (10):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_k EI} \left( E_k^{(-)} \tilde{S}_x^{k(-)} + \sum_{i=k+1}^{i=n_b} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right);$$

$$k = 2; \quad y = h_0 - n_0^{(+)} + h_1^{(-)} + h_2^{(-)}; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = 0;$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(-)} EI} \left( E_2^{(-)} \cdot 0 \right) = 0,0 \text{ кН};$$

$$k = 1; \quad y = h_0 - n_0^{(+)} + h_1^{(-)}; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{2(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(-)} EI} \left( E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,271 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(-)} EI} \left( E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,361 \text{ кН};$$

$$k = 0; \quad y = h_0 - n_0^{(+)}; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{1(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(-)} EI} \left( E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,494 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(-)} EI} \left( E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,742 \text{ кН};$$

$$k = 0; \quad y = 0; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{0(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(-)} EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,946 \text{ кН}.$$

Расчёт по формуле (17):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_m EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_b} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \sum_{i=1}^{i=m-1} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_m^{(+)} \tilde{S}_x^{m(+)} \right);$$

$$m = 0; \quad y = 0; \quad \tilde{S}_x^{m(+)} = 0;$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(+)} EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,946 \text{ кН};$$

$$m = 0; \quad y = n_0^{(+)}; \quad \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{0(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right) = 0,937 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right) = 0,750 \text{ кН};$$

$$m = 1; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{1(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} \right) = 0,728 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} \right) = 0,520 \text{ кН};$$

$$m = 2; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{2(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + \right. \\ \left. + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} \right) = 0,417 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_3^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + \right. \\ \left. + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} \right) = 0,324 \text{ кН};$$

$$m = 3; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)} + h_3^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{3(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_3^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + \right. \\ \left. + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} + E_3^{(+)} S_x^{3(+)} \right) = 0,0 \text{ кН}.$$

Случай II.

$$E_3^{(+)} = 250000 \text{ МПа}, E_2^{(+)} = 200000, E_1^{(+)} = 150000 \text{ МПа},$$

$$E_0 = 300000 \text{ МПа}, E_1^{(-)} = 125000 \text{ МПа}, E_2^{(-)} = 275000 \text{ МПа};$$

$$b_3^{(+)} = 4 \text{ см}, b_2^{(+)} = 4 \text{ см}, b_1^{(+)} = 4 \text{ см}, b_0 = 4 \text{ см}, b_1^{(-)} = 4 \text{ см}, b_2^{(-)} = 4 \text{ см};$$

$$h_3^{(+)} = 7 \text{ см}, h_2^{(+)} = 5 \text{ см}, h_1^{(+)} = 3 \text{ см}, h_0 = 12 \text{ см}, h_1^{(-)} = 6 \text{ см}, h_2^{(-)} = 4 \text{ см}.$$

Результаты расчётов:

$$A_{\text{нр}} = 3460000 \text{ кН}; S_{\text{нр}} = 11420000 \text{ кН} \cdot \text{см}; n_0^{(+)} = 3,301 \text{ см};$$

$$EI = 3,786010789980732 \cdot 10^8 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

Расчёт по формуле (10):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_k EI} \left( E_k^{(-)} \tilde{S}_x^{k(-)} + \sum_{i=k+1}^{i=n_B} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right);$$

$$k = 2; y = h_0 - n_0^{(+)} + h_1^{(-)} + h_2^{(-)}; \tilde{S}_x^{k(-)} = 0;$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(-)} EI} \left( E_2^{(-)} \cdot 0 \right) = 0,0 \text{ кН};$$

$$k = 1; y = h_0 - n_0^{(+)} + h_1^{(-)}; \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{2(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(-)}EI} \left( E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,485 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(-)}EI} \left( E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,485 \text{ кН};$$

$$k = 0; y = h_0 - n_0^{(+)}; \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{1(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(-)}EI} \left( E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,717 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(-)}EI} \left( E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,717 \text{ кН};$$

$$k = 0; y = 0; \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{0(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(-)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 1,017 \text{ кН}.$$

Расчёт по формуле (17):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_m EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_b} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \sum_{i=1}^{i=m-1} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_m^{(+)} \tilde{S}_x^{m(+)} \right);$$

$$m = 0; y = 0; \tilde{S}_x^{m(+)} = 0;$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 1,017 \text{ кН};$$

$$m = 0; y = n_0^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{0(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right) = 0,974 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right) = 0,974 \text{ кН};$$

$$m = 1; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{1(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} \right) = 0,917 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} \right) = 0,917 \text{ кН};$$

$$m = 2; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{2(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + \right. \\ \left. + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} \right) = 0,684 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_3^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + \right. \\ \left. + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} \right) = 0,684 \text{ кН};$$

$$m = 3; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)} + h_3^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{3(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_3^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + \right. \\ \left. + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} + E_3^{(+)} S_x^{3(+)} \right) = 0,0 \text{ кН}.$$

Случай III.

$$E_3^{(+)} = 300000 \text{ МПа}, \quad E_2^{(+)} = 300000, \quad E_1^{(+)} = 300000 \text{ МПа},$$

$$E_0 = 300000 \text{ МПа}, \quad E_1^{(-)} = 300000 \text{ МПа}, \quad E_2^{(-)} = 300000 \text{ МПа};$$

$$b_3^{(+)} = 4 \text{ см}, \quad b_2^{(+)} = 4 \text{ см}, \quad b_1^{(+)} = 4 \text{ см}, \quad b_0 = 4 \text{ см}, \quad b_1^{(-)} = 4 \text{ см}, \quad b_2^{(-)} = 4 \text{ см};$$

$$h_3^{(+)} = 7 \text{ см}, \quad h_2^{(+)} = 5 \text{ см}, \quad h_1^{(+)} = 3 \text{ см}, \quad h_0 = 12 \text{ см}, \quad h_1^{(-)} = 6 \text{ см}, \quad h_2^{(-)} = 4 \text{ см}.$$

Результаты расчётов:

$$A_{\text{пр}} = 4440000 \text{ кН}; \quad S_{\text{пр}} = 15540000 \text{ кН} \cdot \text{см}; \quad n_0^{(+)} = 3,5 \text{ см};$$

$$EI = 4,9069 \cdot 10^8 \text{ кН} \cdot \text{см}^2.$$

Расчёт по формуле (10):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_k EI} \left( E_k^{(-)} \tilde{S}_x^{k(-)} + \sum_{i=k+1}^{i=n_b} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} \right);$$

$$k = 2; \quad y = h_0 - n_0^{(+)} + h_1^{(-)} + h_2^{(-)}; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = 0;$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(-)} EI} \left( E_2^{(-)} \cdot 0 \right) = 0,0 \text{ кН};$$

$$k = 1; \quad y = h_0 - n_0^{(+)} + h_1^{(-)}; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{2(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(-)} EI} \left( E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,404 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(-)} EI} \left( E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,404 \text{ кН};$$

$$k = 0; \quad y = h_0 - n_0^{(+)}; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{1(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(-)} EI} \left( E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,825 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(-)} EI} \left( E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 0,825 \text{ кН};$$

$$k = 0; \quad y = 0; \quad \tilde{S}_x^{k(-)} = S_x^{0(-)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(-)} EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 1,046 \text{ кН}.$$

Расчёт по формуле (17):

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_m EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + \sum_{i=1}^{i=n_b} E_i^{(-)} S_x^{i(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + \sum_{i=1}^{i=m-1} E_i^{(+)} S_x^{i(+)} + E_m^{(+)} \tilde{S}_x^{m(+)} \right);$$

$$m = 0; \quad y = 0; \quad \tilde{S}_x^{m(+)} = 0;$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(+)} EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} \right) = 1,046 \text{ кН};$$

$$m = 0; \quad y = n_0^{(+)}; \quad \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{0(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_0^{(+)} EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right) = 1,009 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} \right) = 1,009 \text{ кН};$$

$$m = 1; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{1(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_1^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} \right) = 0,917 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} \right) = 0,917 \text{ кН};$$

$$m = 2; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{2(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_2^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} \right) = 0,642 \text{ кН};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_3^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} \right) = 0,642 \text{ кН};$$

$$m = 3; y = n_0^{(+)} + h_1^{(+)} + h_2^{(+)} + h_3^{(+)}; \tilde{S}_x^{m(+)} = S_x^{3(+)};$$

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y}{b_3^{(+)}EI} \left( E_0^{(-)} S_x^{0(-)} + E_1^{(-)} S_x^{1(-)} + E_2^{(-)} S_x^{2(-)} + E_0^{(+)} S_x^{0(+)} + E_1^{(+)} S_x^{1(+)} + E_2^{(+)} S_x^{2(+)} + E_3^{(+)} S_x^{3(+)} \right) = 0,0 \text{ кН}.$$

На рис. 5 показаны эпюры касательных напряжений по высоте рассматриваемого сечения (значения ординат эпюр касательных напряжений даны в кН).

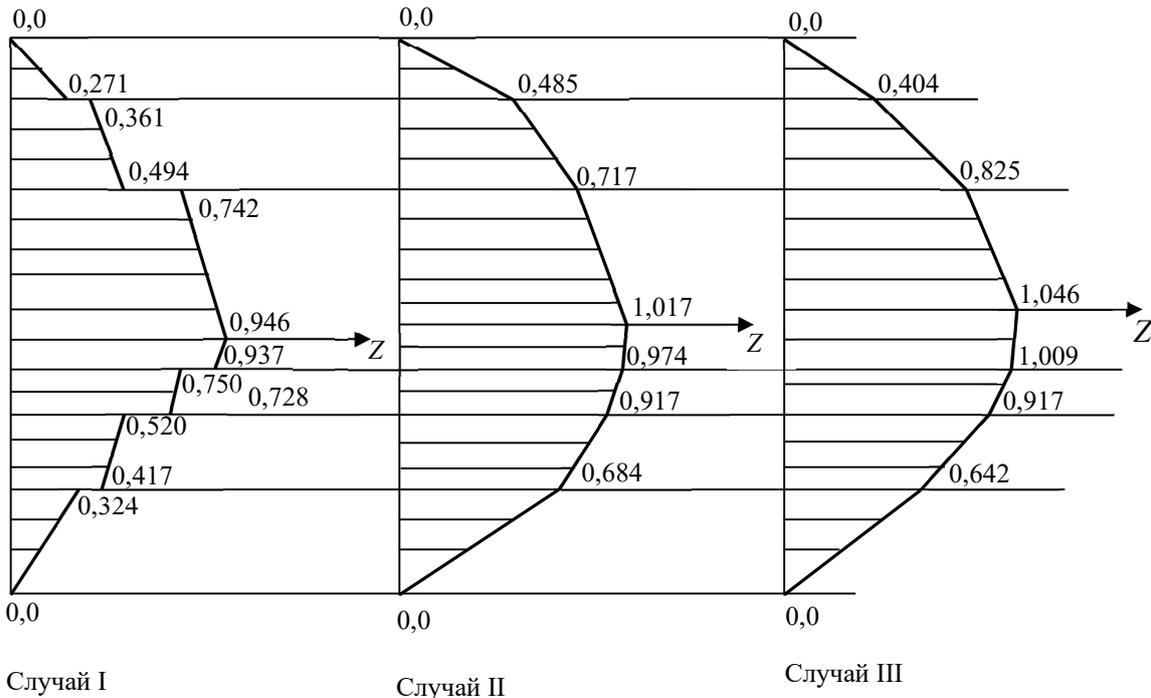


Рис. 5. Эпюры касательных напряжений по высоте поперечного сечения

### Выводы

1. Получены формулы для вычисления касательных напряжений в поперечных сечениях многослойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба.

2. Рассмотрен числовой пример построения эпюры касательных напряжений в поперечном сечении шестислойного неоднородного упругого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба.

Полученные в статье результаты могут быть использованы при вычислении касательных напряжений в изгибаемых неоднородных многослойных упругих стержнях при оценке их прочности.

### Библиографический список

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопrotивление материалов: учеб для вузов / под ред. А. В. Александрова. М.: Высш. шк., 2008. 560 с.
2. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
3. Анарова Ш. А., Шокиров Д. А., Исмоилов Ш. М. Современное состояние и постановка задачи исследования трёхслойных стержней // Проблемы вычислительной и прикладной математики. 2022. № 4 (42). С. 54–78.
4. Чепурненко А. С., Тюрина В. С. Применение метода конечных элементов в сочетании с методом контактного слоя для определения напряженно-деформированного состояния многослойных балок // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2023. № 4. С. 130–139.
5. Турусов Р. А., Андреев В. И., Цыбин Н. Ю. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 34–42.
6. Филатов В. В., Кужин Б. Ф. Расчет многослойных балок, взаимодействующих с однопараметрическим упругим основанием // Инновации и инвестиции. 2024. № 11. С. 604–608.
7. Тхи Л. К. Х., Филатов В. В. Численная методика определения напряжений в составных балках // Инновации и инвестиции. 2024. № 12. С. 416–418.
8. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластины. М.: Стройиздат, 1986. 316 с.
9. Андреев В. И., Цыбин Н. Ю., Турусов Р. А. Анализ краевого эффекта касательных напряжений при сдвиге двухслойной балки // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2018. Т. 14, № 3. С. 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.
10. Бакушев С. В., Ахмедханов Х. Р. Прогибы в многослойных балках [электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2025. № 22. [http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no22-noyabr-2025-g/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya/22-7-bakushev-s-v-ahmedhanov-h-r-progiby-v-mnogoslnoyh-balkah-elektronnyi-resurs/at\\_download/file](http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no22-noyabr-2025-g/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya/22-7-bakushev-s-v-ahmedhanov-h-r-progiby-v-mnogoslnoyh-balkah-elektronnyi-resurs/at_download/file).

### References

1. Aleksandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. Strength of Materials: A Textbook for Universities. Ed. by A. V. Aleksandrov. Moscow: High School, 2008. 560 p.
2. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. Mechanics of Multilayer Structures. Moscow: Mashinostroenie, 1980. 376 p.
3. Anarova Sh. A., Shokirov D. A., Ismoilov Sh. M. Current state and statement of the problem of studying three-layer rods. Problems of Computational and Applied Mathematics. No. 4 (42). 2022. Pp. 54–78.

4. Chepurnenko A. S., Tyurina V. S. Application of the finite element method in combination with the contact layer method to determine the stress-strain state of multilayer beams. Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics. No. 4. 2023. Pp. 130–139.
5. Turusov R. A., Andreev V. I., Tsybin N. Yu. General solution of the problem of bending of a multilayer beam in Fourier series. Structural mechanics of engineering structures and constructions. No. 4. 2017. Pp. 34–42.
6. Filatov V. V., Kuzhin B. F. Calculation of multilayer beams interacting with a one-parameter elastic foundation. Innovations and Investments. No. 11. 2024. Pp. 604–608.
7. Thi L. K. Kh., Filatov V. V. Numerical method for determining stresses in composite beams. Innovations and Investments. No. 12. 2024. Pp. 416–418.
8. Rzhantsyn A. R. Composite Rods and Plates. Moscow: Stroyizdat, 1986. 316 p.
9. Andreev V. I., Tsybin N. Yu., Turusov R. A. Analysis of the boundary effect of shear stresses in a two-layer beam. Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions. Vol. 14. No. 3. 2018. Pp. 180–186. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-3-180-186.
10. Bakushev S. V., Akhmedhanov H. R. Deflections in multilayer beams [electronic resource]. Modeling and mechanics of structures. No. 22. 2025. URL: [http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no22-noyabr-2025-g/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya/22-7-bakushev-s-v-ahmedhanov-h-r-progiby-v-mnogosloynh-balkah-elektronnyi-resurs/at\\_download/file](http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no22-noyabr-2025-g/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya/22-7-bakushev-s-v-ahmedhanov-h-r-progiby-v-mnogosloynh-balkah-elektronnyi-resurs/at_download/file).

## SHEAR STRESSES IN A MULTILAYER INHOMOGENEOUS ELASTIC MEMBER

S. V. Bakushev <sup>1</sup>

Penza State University of Architecture and Construction <sup>1</sup>  
Russia, Penza

---

<sup>1</sup> Dr. of Technical Sciences, Professor of Mechanics Department, tel.: 89063950754, e-mail: bakuchsv@mail.ru

---

**Problem statement.** The problem of determining shear stresses in a multilayer, heterogeneous, elastic member located under conditions of plane transverse bending is considered.

**Results.** A solution similar to Zhuravsky's solution is based on the hypothesis of plane sections and the assumption that there are no shifts between layers. Formulas are obtained for calculating shear stresses in cross-sections of a multilayer inhomogeneous elastic rod located under conditions of plane transverse bending. A numerical example of constructing a diagram of shear stresses in the cross-section of a six-layer inhomogeneous elastic rod located under conditions of plane transverse bending is considered.

**Conclusions.** The results obtained in the article can be used in calculating shear stresses in bending inhomogeneous multilayer elastic bars when assessing their strength.

**Keywords:** rod, heterogeneity, elasticity, shear stresses.

УДК 539.3:624.04

DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.002

## РАСЧЁТ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ КОРРОЗИИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ КАТАСТРОФ

Г. М. Муртазалиев<sup>1</sup>, М. М. Пайзулаев<sup>2</sup>Дагестанский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Махачкала

---

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф., проф. кафедры строительных конструкций и гидротехнических сооружений<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций и гидротехнических сооружений,  
тел.: +7(960)421-72-75, e-mail: smdstu@mail.ru

---

Предлагается новый подход к оценке прочности и прогнозированию предельного состояния цилиндрических оболочек (трубопроводов, резервуаров, аппаратов давления), подверженных коррозионному износу, на основе методов теории катастроф – раздела математики, изучающего скачкообразные изменения состояний систем при плавном варьировании параметров. Актуальность исследования обусловлена высокой аварийностью конструкций, эксплуатируемых в коррозионно-активных средах; ограниченностью традиционных методов расчёта, не учитывающих нелинейный характер потери устойчивости при локальном утонении стенки; необходимостью выявления критических точек перехода от работоспособного к предельному состоянию.

**Цель работы** – разработать методологию расчёта цилиндрических оболочек с коррозионными повреждениями, позволяющую выявлять бифуркационные точки и зоны неустойчивости, прогнозировать момент катастрофического разрушения при достижении критических параметров износа, строить карты устойчивости в пространстве параметров коррозии. Методология базируется на аппарате теории катастроф (классификации особенностей, анализе потенциальных функций, построении диаграмм устойчивости), нелинейном моделировании деформирования оболочки с локальными утонениями, статистической обработке данных толщинометрии для определения вероятностных характеристик глубины и площади коррозионных повреждений.

**Основные результаты:** сформулирована математическая модель устойчивости цилиндрической оболочки с учётом коррозионного износа как системы с особенностями типа «сборка» и «ласточкин хвост»; определены критические значения глубины и площади коррозионных пятен, соответствующие точкам бифуркации; построены области устойчивости в координатах «глубина износа – радиус повреждения – внутреннее давление»; разработан алгоритм прогнозирования момента катастрофического разрушения на основе анализа потенциальной функции системы.

**Практическая значимость:** повышение точности прогноза остаточного ресурса за счёт учёта нелинейных эффектов потери устойчивости; выявление «предкатастрофических» состояний, что позволяет своевременно выводить конструкцию из эксплуатации; оптимизация графиков диагностического контроля на основе карт устойчивости.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, коррозия, теория катастроф, бифуркация, потенциальная функция, область устойчивости, критическое повреждение, остаточный ресурс, нелинейный анализ, предельное состояние.

Цилиндрические оболочки широко применяются в строительстве, машиностроении, энергетике и других отраслях благодаря прочности, экономичности и возможности перекрытия больших пролётов без промежуточных опор.

Расчёт цилиндрических оболочек с учётом коррозии требует комплексного подхода, учитывающего изменение геометрических параметров, механических свойств материала и напряжённо-деформированного состояния конструкции. Коррозия приводит к уменьшению толщины стенки, снижению прочности и пластичности материала, а также к концентрации напряжений в зонах локальных повреждений.

В научной и технической литературе коррозия рассматривается как многофакторный физико-химический процесс разрушения металлов, требующий системного подхода к диагностике,

прогнозированию и защите. Акцент делается на прогнозировании сроков службы и экономически обоснованных методах защиты [1–11].

В качестве примера рассмотрим расчет полой цилиндрической оболочки переменной толщины (рис. 1).

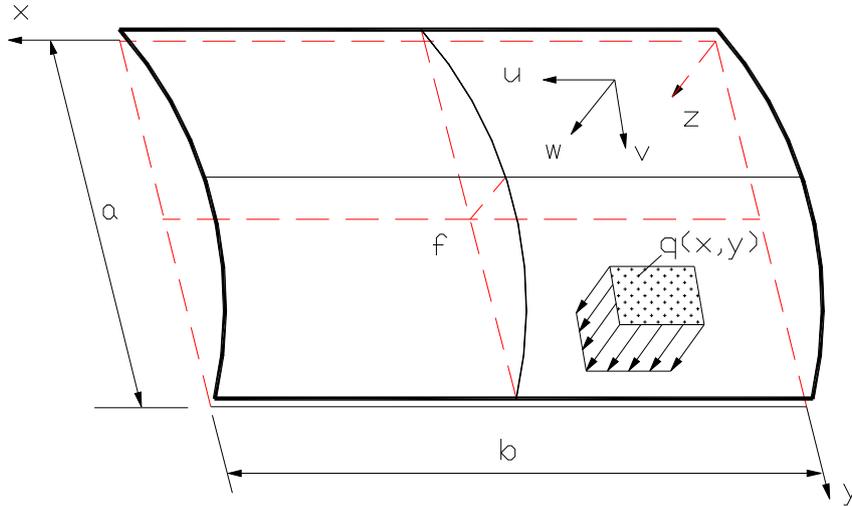


Рис. 1. Геометрия и схема нагружения цилиндрической панели

Исходные уравнения смешанного типа имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{cases} D\nabla^4 W - \nabla_k^2 F - L(W, F) = q; \\ \frac{1}{Eh} \nabla^4 F - \nabla_k^2 W + \frac{1}{2} L(W, W) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^4 W &= \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}; & \nabla_k^2 F &= k_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}; \\ L(W, F) &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}; & \nabla^4 F &= \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}; \\ \nabla_k^2 W &= k_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; & L(W, W) &= 2 \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

В системе первое из уравнений (1) представляет собой уравнение равновесия всех приложенных к панели сил на вертикальную ось Z (рис. 1), а второе – уравнение совместности деформаций.

Переменность толщины оболочки обусловлена односторонним коррозионным износом, происходящим во времени по определенному закону. Поскольку система состоит из дифференциальных уравнений в частных производных, при их интегрировании следует использовать соответствующие граничные условия.

Для описания коррозионного уменьшения толщины панели примем следующую модель [2–7]:

$$h(x, y, t) = h_0 - \varphi(t) \cdot \omega(x, y), \quad (2)$$

где  $\varphi(t)$  – функция времени, определяющая общую глубину износа;  $\omega(x, y)$  описывает, как этот износ распределен по координатам поверхности.

Функция  $\varphi(t)$  описывает кинетику коррозии, задавая глубину износа как функцию исключительно от времени и не зависящую от координат на поверхности. Это означает, что в любой момент времени толщина оболочки равномерно уменьшается на одну и ту же величину по всей своей площади, что соответствует модели равномерного износа.

Неравномерный износ, проявляющийся в виде язв, питтингов или точек, приводит к локальным дефектам, что нарушает геометрию и форму поверхности оболочки, а следовательно, приводит к изменению величины толщины отдельных участков оболочки от первоначальной, принятой в расчетах, теоретической величины. В таком случае в каждый момент времени неравномерный износ может быть представлен как поле начальных несовершенств.

На основании теоретических исследований описания полей начальных несовершенств функцию  $\omega(x,y)$  в выражении (2) можно аппроксимировать двойными тригонометрическими рядами в направлении обоих координат. Примем эту функцию в виде двойного ряда синусов:

$$\omega(x,y) = \delta_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right), \quad (3)$$

где  $\delta_{mn}$  – безразмерный (или размерный) коэффициент, который определяется экспериментально и характеризует глубину коррозионного поражения;  $m = n = 0, 1, 3, 5, \dots, 2j-1$ ; ( $j$  – целое число).

Отметим, что выражение (3) при  $m = 3$  и  $x = a/2$ , а также при  $n = 3$  и  $y = b/2$  принимает отрицательное значение. В этом случае следует взять сумму нескольких слагаемых ряда.

Для описания равномерной коррозии достаточно принять функцию

$$\omega(x,y) = \delta_0 = const. \quad (4)$$

Произведение функций  $\varphi(t) \cdot \omega(x,y)$  представляет собой величину глубины проникновения коррозии или толщину прокорродированного слоя оболочки.

При постоянном значении функции  $\omega(x,y)$  указанное произведение дает равномерную в каждый данный момент времени по поверхности оболочки коррозию. Поскольку, как показывают натурные обследования, глубина прокорродированного слоя по поверхности бывает не одинаковой, то под  $\delta_0$  подразумевается усредненная величина глубины проникновения коррозии.

Произведение функций  $\varphi(t) \cdot \omega(x,y)$  определяет локальную глубину коррозии (толщину прокорродированного слоя) в конкретной точке оболочки в момент времени  $t$ .

Если функция  $\omega(x,y) = const$ , эта модель описывает равномерную коррозию, при которой в каждый момент времени толщина износа одинакова по всей поверхности. Однако, как показывают натурные обследования, коррозия часто распределена неравномерно. Поэтому под величиной  $\delta_0$  подразумевается усреднённая по поверхности глубина проникновения коррозии.

Определение величин  $\delta_0$  и  $\delta_{mn}$  должно опираться на экспериментальные данные. В условиях отсутствия репрезентативной базы данных эти параметры устанавливаются эмпирическим путём как некоторая часть от исходной толщины  $h_0$ :

$$\delta_0 = \delta_{mn} = \beta \cdot h_0, \quad 0 < \beta < 1. \quad (5)$$

Параметр  $\delta_0$  ( $\delta_{mn}$ ) определяет глубину проникновения коррозии (толщину прокорродированного слоя) за один год.

На основании экспериментальных данных для изношенных и сильно изношенных металлических пластин установлен диапазон значений безразмерного коэффициента  $\beta = 0 \div 0,5$ .

Следовательно, при равномерном износе уменьшение толщины оболочки во времени представляется в виде:

$$h = h_0 [1 - \beta \varphi(t)]. \quad (6)$$

В случае одностороннего коррозионного износа

$$h = h_0 - \delta_i \quad \text{или} \quad h = h_0 - \delta_0 \varphi(t), \quad (7)$$

где  $\delta_i$  – глубина проникновения коррозии за  $i$  лет.

Решение разрешающих уравнений (1) может быть осуществлено различными приближенными методами. Для решения задачи воспользуемся методом Бубнова – Галеркина. Будем

искать решение задачи в виде двойных тригонометрических рядов, удовлетворяющих граничным условиям шарнирно-подвижного опирания контура цилиндрической панели:

$$\begin{aligned} W &= \sum_m \sum_n W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right); \\ F &= \sum_m \sum_n F_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (8)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;  $W_{mn}$  и  $F_{mn}$  – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Для практических расчетов нет необходимости удерживать в (8) большое количество слагаемых, поэтому проинтегрируем систему (1) ограничившись в аппроксимирующих функциях (8) первыми членами рядов, то есть приняв

$$\begin{aligned} W &= W_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right); \\ F &= F_{11} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Интегрирование системы уравнений (1) с учётом соотношений (9) приводит к системе двух нелинейных алгебраических уравнений относительно параметров  $W_{11}$  и  $F_{11}$ . В частном случае равномерного одностороннего износа эта система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 3\pi^3 D(\zeta^2 + 1)^2 W_{11} = \pi^4 \zeta^2 F_{11} (32W_{11} - 3k_y b^2) + 48a^4 q; \\ 3\pi^2 (\zeta^2 + 1)^2 \frac{F_{11}}{Eh} = \zeta^2 W_{11} (3k_y b^2 - 16W_{11}), \end{cases} \quad (10)$$

где  $\zeta = a/b$  параметр, характеризующий удлинение оболочки.

Система уравнений (10) методом исключения неизвестных сводится к одному кубическому уравнению относительно амплитуды прогиба  $W_{11}$ .

В рассматриваемом случае равномерного износа  $h = h(t)$ ,  $D = D(t)$ , т. е. они являются только функциями времени, не зависящими от координат точек срединной поверхности  $x$ ,  $y$ ; разрешающая система уравнений для каждого конкретного промежутка времени полностью совпадает с исходной системой нелинейных уравнений для цилиндрических панелей постоянной толщины.

В случае равномерного износа толщина и цилиндрическая жесткость становятся функциями только времени  $h = h(t)$ ,  $D = D(t)$ , то есть не зависят от координат срединной поверхности. Следовательно, для любого фиксированного момента времени разрешающая система уравнений полностью совпадает с исходной нелинейной системой для цилиндрической панели постоянной толщины.

Для случая квадратной в плане оболочки ( $\zeta = a/b = 1$ ) и при значении  $\nu = 0,3$  из системы (10) получим уравнение, связывающее параметр нагрузки  $q$  и параметр  $W_{11}$ :

$$\{8,773u^3 - 2,467u^2 + [22,01s^2(t) + 0,1542k^2]u\}s(t) = q^*, \quad (11)$$

где  $u = \frac{W_{11}}{h_0}$ ;  $k = \frac{k_y b^2}{h_0}$ ;  $q^* = \frac{qa^4}{Eh_0^4}$ ;  $s(t) = 1 - \mu t$ .

Отметим, что уравнение (11) может быть получено и из условия стационарности полной потенциальной энергии рассчитываемой пологой цилиндрической панели на основе процедуры Ритца – Папковича. В данном случае оба подхода приводят к одному и тому же уравнению (11).

Установим связь математического описания решаемой задачи с определенной задачей универсального характера, хорошо изученной в теории катастроф, для чего следует провести идентификацию выражений, уравнений и параметров, описывающих поведение панели с канонической катастрофой из списка семи элементарных катастроф.

В качестве внешних (управляющих) параметров примем параметры внешней нагрузки  $q$  и параметр кривизны панели  $k$ . Внутренним (поведенческим) параметром является величина  $u$  – параметр прогиба середины панели.

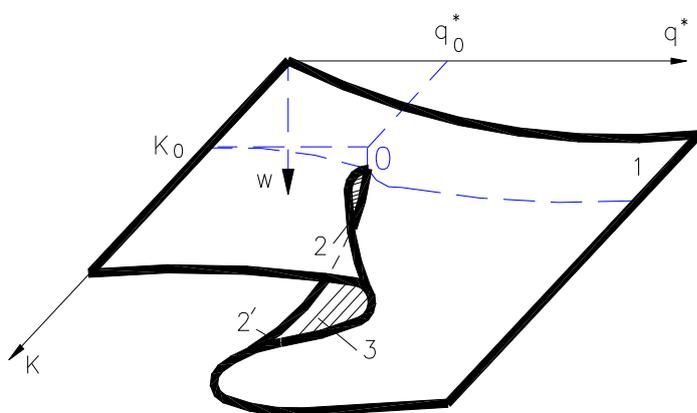
Преобразуем уравнение (11) к каноническому виду разделив его на  $8,773 \cdot s(t)$  и заменив и другой неизвестной  $v$ :

$$u = v + \frac{2,467k}{3 \cdot 8,773}. \quad (12)$$

Окончательно уравнение (11) примет вид:

$$v^3 - [0,00878k^2 - 2,5088 \cdot s^2(t)] \cdot v + 0,2351k \cdot s^2(t) - 0,114 \frac{q^*}{s(t)} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) в трехмерном пространстве обобщенных координат – двух управляющих параметров  $q^*$  и  $k$  и переменной состояния  $u$  – представляет двумерное многообразие канонической катастрофы сборки и может быть изображено единой геометрической картиной (рис. 2), являющейся поверхностью равновесных состояний целого класса пологих цилиндрических панелей.



**Рис. 2.** Многообразие катастрофы сборки – поверхность равновесных состояний панели при  $S = S_i(t)$

Вычислим координаты точки  $O$  – начала сборки, для чего продифференцируем (13) два раза по  $v$ :

$$3v^2 - 0,00878k^2 + 2,5088 \cdot s^2(t) = 0, \quad (14)$$

$$6v = 0. \quad (15)$$

Решая уравнения (13)–(15) в обратном порядке получим следующие значения координат точки  $O$ :

$$v_0 = 0; \quad k_0 = 16,9038 \cdot s(t); \quad q_0^* = 2,0623k_0 \cdot s(t). \quad (16)$$

При  $v_0 = 0$  из (12) получим:

$$u_0 = 0,0937k_0 \cdot s(t). \quad (17)$$

По полученным значениям (16)–(17) и по уравнениям (13)–(15) для различных моментов времени  $t = t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$  лет) в выбранном масштабе строим соответствующие равновесные поверхности (рис. 2), из которых и определяются нужные параметры состояния панели.

В таблице приводятся некоторые результаты, полученные из анализа приведенных соотношений для различных значений  $s(t)$ , т. е. для различных моментов времени  $t$ .

Таблица

$s(t)$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$u_0$	1,5844	1,426	1,2676	1,109	0,951	0,791
$k_0$	16,9	15,213	13,52	11,832	10,142	8,45
$q_{ов}^*$	34,86	22,86	14,26	8,37	4,158	2,178

На рис. 3. показано отображение катастрофы сборки на плоскость внешних параметров  $q$  и  $k$ . Уравнения кривых 2 и 2', в которых поверхность равновесия «складывается», определяются из совместного решения уравнений (13) и (14) и имеют вид:

$$q_{min}^* = 2,0623 \cdot s^3(t) \cdot k \pm 0,002778 \cdot [k^2 - 285,72 \cdot s^2(t)]^{\frac{3}{2}}. \quad (18)$$

Как следует из (18), при  $k < 16,98 \cdot s(t)$  на соответствующих равновесных кривых будут отсутствовать предельные точки.

На рис. 4 и 5 показаны зависимости «верхняя критическая нагрузка ( $q^*$ ) – время ( $t$ )» и «прогиб в середине панели ( $w$ ) – время ( $t$ )» для различных значений параметров кривизны  $k$  при различных степенях износа толщины оболочки  $h$  во времени  $t$ .

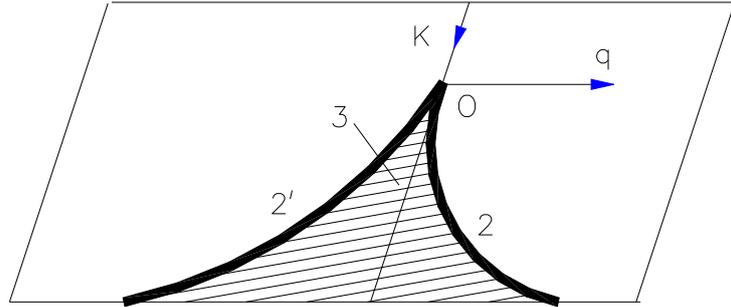


Рис. 3. Отображение катастрофы сборки на плоскость управляющих параметров  $K$  и  $q^*$

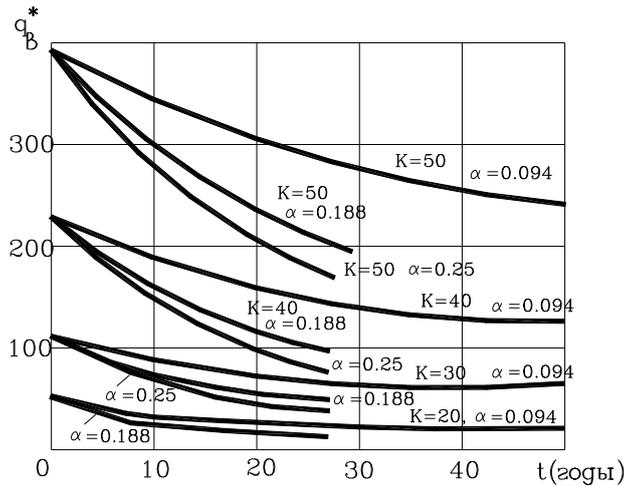


Рис. 4. Изменение верхней критической нагрузки  $q_b^*$  при различных степенях износа толщины  $\alpha$

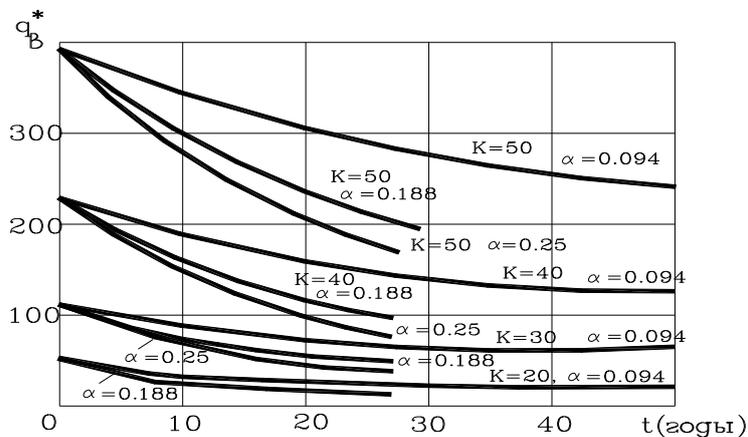


Рис. 5. Изменение прогиба  $W$  во времени

На рис. 6 показан изменение параметра кривизны  $K$  во времени при равномерном износе, а на рис. 7 зависимость между параметрами верхних ( $q^*_в$ ), нижних ( $q^*_н$ ) критических нагрузок и параметром кривизны  $K$ .

Полученные результаты хорошо согласуются с известными в литературе данными [1, 2].

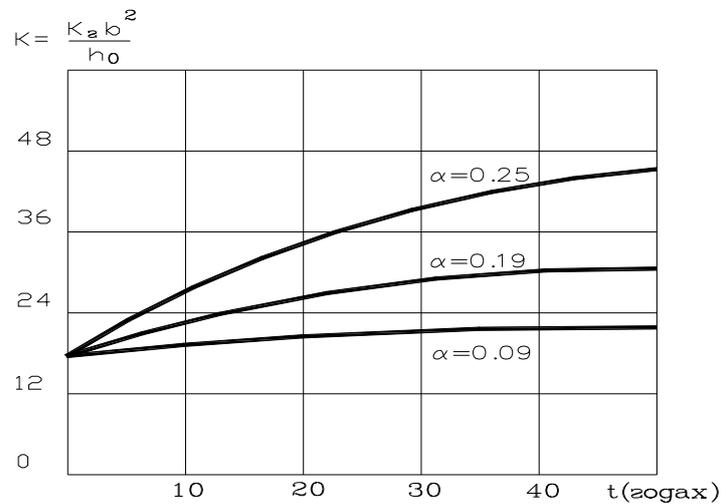


Рис. 6. Изменение параметра кривизны  $K$  во времени при равномерном износе

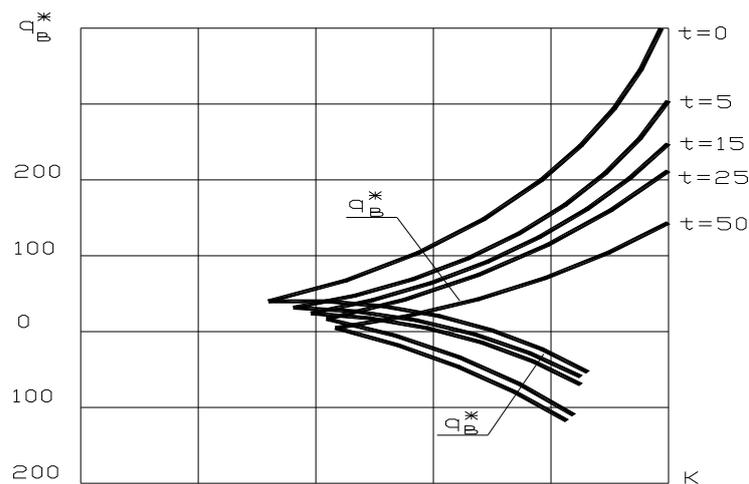


Рис. 7. Зависимость между параметрами верхних ( $q^*_в$ ), нижних ( $q^*_н$ ) критических нагрузок и параметром кривизны  $K$

**Выводы.** В работе рассмотрены вопросы расчёта тонкостенных конструкций, склонных к потере устойчивости, поведение которых под статической нагрузкой связано с разрывными (скачкообразными) явлениями, возникающими при определённых значениях управляющих параметров системы. Такие явления плохо поддаются анализу и решению как аналитическими, так и стандартными численными методами, что привело к появлению множества специализированных подходов в каждой узкой области, где они наблюдаются.

Для решения поставленной задачи применялись алгебраические методы и геометрические представления теории катастроф. Это позволило без сложных вычислений и непосредственного интегрирования систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка получить важную, достаточно полную и надёжную качественную и количественную информацию о поведении различных систем под нагрузкой в широком диапазоне изменений их параметров.

Разработанная методика применения теории катастроф к нелинейным краевым задачам расчёта тонкостенных конструкций с разрывными явлениями формирует единый подход к

анализу систем, склонных к потере устойчивости. Она позволяет получать необходимую качественную и количественную информацию о поведении целых классов конструкций под нагрузкой при широком диапазоне изменения как их собственных параметров, так и внешних воздействий.

Алгебраические приёмы и геометрические представления теории катастроф дают возможность оформить, визуализировать и интерпретировать ключевые результаты единообразно, наглядно и компактно. Благодаря этому удаётся получить целостную картину сложного нелинейного поведения различных типов оболочек, которые обычно изучаются фрагментарно и требуют обработки больших массивов численных данных.

#### Библиографический список

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М: Наука, 1967. 984 с.
2. Райзер В. Д., Магомедов Р. М. Надежность и долговечность пространственных конструкций при износе // Международный конгресс ИАСС «Теория и экспериментальные исследования пространственных конструкций. Применение оболочек в инженерных сооружениях»: доклады. Т. 1. М.: ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко, 1985. С. 656–666.
3. Муртазалиев Г. М. Методы теории катастроф в задачах устойчивости оболочек. Махачкала: ДГТУ, 2004. 200 с.
4. Magomedov R. M., Paizulaev M. M., Gebel E. S. Reliability evaluation of oil pipelines operating in aggressive environment // AIP Conference Proceedings. 2017. P. 020084.
5. Муртазалиев Г. М., Пайзулаев М. М. Математическое моделирование процесса нелинейного деформирования тонкостенных конструкций // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2024. № 51 (4). С. 209–216.
6. Аль Малюль Р. М. Надежность тонкостенных металлических конструкций при коррозионном износе: дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17. М., 1997. 313 с.
7. Магомедов Р. М. Некоторые задачи расчета стержней и пластинок на прочность, подвергающихся коррозионному износу // Приоритеты развития автотранспортного и дорожного комплекса: сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф. М., 2021. С. 62–69.
8. Ким А. Ю., Топорищев С. А. Коррозия в стальных канатах, усиливающих мягкую оболочку пневматических сооружений // Новая наука: Современное состояние и пути развития. 2016. № 4–3. С. 127–129.
9. Овчинников И. Г., Хвалько Т. А. Работоспособность конструкций в условиях высокотемпературной водородной коррозии. Саратов, 2003. 176 с.
10. Белов А. В., Поливанов А. А., Попов А. Г. Длительная прочность составной оболочки с учетом повреждаемости материала при ползучести и высокотемпературной водородной коррозии // Фундаментальные исследования. 2011. № 8–1. С. 103–105.
11. Седова О. С. Новая модель механохимической коррозии тонкостенных оболочек // Процессы управления и устойчивость. 2016. Т. 3, № 1. С. 265–269.

#### References

1. Volmir A.S. Stability of Deformable Systems. Moscow: Nauka, 1967. 984 p.
2. Raiser V.D., Magomedov R.M. Reliability and Durability of Spatial Structures under Wear. International Congress of the Institute of Assemblies of the Russian Academy of Sciences “Theory and Experimental Studies of Spatial Structures. Application of Shells in Engineering Structures.” Vol. 1. Moscow: Kucherenko Central Research Institute of Steel Structures, 1985. Pp. 656–666.
3. Murtazaliev G.M. Methods of Catastrophe Theory in Shell Stability Problems. Makhachkala: DSTU, 2004. 200 p.
4. Magomedov R.M., Paizulaev M.M., Gebel E.S. Reliability Evaluation of Oil Pipelines Operating in Aggressive Environments. AIP Conference Proceedings. 2017. R. 020084.

5. Murtazaliev G.M., Paizulaev M.M. Mathematical modeling of the process of nonlinear deformation of thin-walled structures. Bulletin of the Dagestan State Technical University. Technical Sciences. No. 51(4). 2024. Pp. 209–216.
6. Al' Malul R.M. Reliability of Thin-Walled Metal Structures Under Corrosive Wear: Diss. ... Doctor of Engineering Sciences: 05.23.17. Moscow, 1997. 313 p.
7. Magomedov R.M. Some Problems of Calculating the Strength of Rods and Plates Subjected to Corrosive Wear. Priorities for The Development of the Motor Transport and Road Complex: Coll. of Scientific Papers of the Int. Scientific and Practical Conf. Moscow, 2021. Pp. 62–69.
8. Kim A.Yu., Toporishchev S.A. Corrosion in steel ropes reinforcing the soft shell of pneumatic structures. New Science: Current Status and Development Paths. No. 4–3. 2016. Pp. 127–129.
9. Ovchinnikov I.G., Khvalko T.A. Performance of Structures Under High-Temperature Hydrogen Corrosion. Saratov, 2003. 176 p.
10. Belov A.V., Polivanov A.A., Popov A.G. Long-term strength of a composite shell taking into account material damage during creep and high-temperature hydrogen corrosion. Fundamental Research. No. 8–1. 2011. Pp. 103–105.
11. Sedova O.S. New model of mechanochemical corrosion of thin-walled shells. Control Processes and Stability. Vol. 3. No. 1. 2016. Pp. 265–269.

## CALCULATION OF A CYLINDRICAL SHELL DURING CORROSION USING CATASTROPHE THEORY METHODS

G. M. Murtazaliev <sup>1</sup>, M. M. Paizulaev <sup>2</sup>

Dagestan State Technical University <sup>1,2</sup>  
Russia, Makhachkala

---

<sup>1</sup> Dr of Technical Sciences, Professor of the Department of Civil Engineering and Hydraulic Structures

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering and Hydraulic Engineering, tel.: +7(960)421-72-75, e-mail: smdstu@mail.ru

---

This paper proposes a new approach to assessing the strength and predicting the ultimate limit state of cylindrical shells (pipelines, tanks, pressure vessels) subject to corrosive wear. This approach is based on methods of catastrophe theory – a branch of mathematics that studies abrupt changes in system states with smooth variations in parameters. The relevance of this study is due to the high accident rate of structures operating in corrosive environments; the limitations of traditional calculation methods, which do not take into account the nonlinear nature of buckling due to localized wall thinning; and the need to identify critical transition points from the operational to the ultimate limit state.

**The objective of this study** is to develop a methodology for calculating cylindrical shells with corrosion damage. This methodology allows for the identification of bifurcation points and instability zones, the prediction of the moment of catastrophic failure upon reaching critical wear parameters, and the construction of stability maps in the corrosion parameter space. The methodology is based on the apparatus of catastrophe theory (classification of features, analysis of potential functions, construction of stability diagrams), nonlinear modeling of shell deformation with local refinements, and statistical processing of thickness measurement data to determine the probabilistic characteristics of the depth and area of corrosion damage.

**Main results:** a mathematical model of the stability of a cylindrical shell, taking into account corrosion wear as a system with "assembly" and "dovetail" features, was formulated; critical values of the depth and area of corrosion spots corresponding to bifurcation points were determined; stability regions were constructed in the coordinates "wear depth - damage radius – internal pressure"; an algorithm for predicting the moment of catastrophic failure was developed based on the analysis of the system's potential function.

**Practical significance:** improving the accuracy of residual life prediction by taking into account nonlinear effects of buckling; identifying "pre-catastrophic" conditions, enabling timely decommissioning of the structure; optimizing diagnostic monitoring schedules based on stability maps.

**Keywords:** cylindrical shell, corrosion, catastrophe theory, bifurcation, potential function, stability region, critical damage, residual life, nonlinear analysis, limit state.

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПАССИВНОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН. ЧАСТЬ 1: ДИНАМИЧЕСКИЙ ГАСИТЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ

С. Г. Саиян<sup>1</sup>

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет<sup>1</sup>

Россия, г. Москва

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук<sup>1</sup>

Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Науч. сотр. Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов им. А. Б. Золотова, e-mail: Verformert@gmail.com

Статья посвящена теоретическому анализу предельной эффективности специальной пассивной сейсмозащиты зданий с использованием динамического гасителя колебаний (ДГК) при воздействии поверхностных волн. Принята линейная двухмассовая система «здание + ДГК» при базовом возбуждении, моделируемом суперпозицией гармоник перемещения основания, соответствующих спектрам поверхностных волн Рэлея и Лява. Для полученной системы выведена передаточная функция от перемещения основания к относительному перемещению здания, доказано существование единственного ненулевого антирезонанса и показано, что частота подавления зависит только от параметров ДГК и массы здания. Асимптотический анализ установил ухудшение квазистатической реакции в низкочастотной области и отсутствие эффекта подавления колебаний на высоких частотах. Сформулированы интегральные ограничения Боде для отношения передаточных функций, из которых следует невозможность «универсальной» пассивной сейсмозащиты для произвольных спектров поверхностных волн, поскольку ДГК неизбежно перераспределяет спектр, подавляя отклик в узкой полосе и усиливая его вне зоны его настройки. Предложены практические рекомендации по выбору параметров ДГК и обоснована целесообразность многоэтапной сейсмической защиты (комбинации ДГК / сейсмоизоляции с сейсмическими барьерами) при широкополосных и низкочастотных воздействиях.

**Ключевые слова:** сейсмостойкость, сейсмозащита, динамический гаситель колебаний, поверхностные волны, волны Рэлея.

**Введение.** В настоящее время в России выпущены десятки монографий и диссертаций ученых, а также сотни статей по вопросам сейсмозащиты зданий и сооружений. Детальная классификация, а также методы сейсмической защиты даны в работах Н. П. Абовского, Я. М. Айзенберга, Т. А. Белаш, А. Н. Бирбраера, А. А. Бубиса, И. Г. Горовица, Г. А. Джинчвелашвили, А. В. Дукарта, Т. Ж. Жунусова, В. Б. Заалишвили, Л. Ш. Килимника, И. О. Кузнецовой, О. В. Мкртычева, В. Л. Мондруса, Г. Мцверри, А. И. Олейника, В. С. Полякова, Ю. Л. Рутмана, О. А. Савинова, Т. А. Сандовича, Р. Скиннера, В. И. Смирнова, А. М. Уздина, И. В. Уждилова, З. Г. Хучбарова, Ю. Д. Черепинского, А. В. Черкашина, В. Г. Яременко и многих других.

Наиболее часто применяемая в России система классификации сейсмической защиты была предложена А. М. Уздиным в 1993 году [1] и в дальнейшем расширена Н. П. Абовским в монографии [2]. Согласно схеме А. М. Уздина среди специальной пассивной сейсмозащиты выделяют 2 класса: сейсмогашение (посредством динамических гасителей колебаний или демпфированием) и сейсмоизоляция, которая разделяется на подвиды [3].

Динамические гасители колебаний (ДГК) остаются одним из самых распространенных решений для снижения реакций зданий и сооружений при динамических воздействиях, которые в основном чаще используются в зарубежной практике, чем в отечественной. Так, в обзорах, проведенных в предыдущих работах автора [4, 5], показаны примеры применения ДГК в

высотных зданиях, а также приведены ссылки на работы, в которых изучалась эффективность ДГК (с подтверждением уменьшения амплитуд вплоть до 70 %). В отечественной литературе особый вклад в развитие исследований гасителей колебаний внесли А. В. Дукарт, А. И. Олейник, Б. Г. Коренев и Б. В. Остроумов [6–9]. В зарубежной литературе особое место занимает вклад Den Hartog, чьи работы сыграли ключевую роль в становлении и развитии теории ДГК. В книге «Mechanical Vibrations» [10] он впервые представил строгий аналитический подход к синтезу динамического гасителя, основанный на минимизации амплитуды вынужденных колебаний основной системы.

За последние пять лет международные исследования гасителей колебаний сместились от классических линейных настроек к поиску широкополосной и робастной (устойчивой к случайным отклонениям) эффективности [11–14]: обзорные работы фиксируют высокую результативность ДГК в узких диапазонах частот и одновременно подчеркивают их уязвимость к рассогласованию настройки и изменчивым спектрам воздействия. На этом фоне активно развиваются модификации с инерционными элементами, нелинейные и двойные / многократно настроенные схемы, а также различные методы оптимизации, включающие в себя эволюционные алгоритмы, нацеленные на устойчивость к неопределенности свойств конструкции.

В отечественной научно-проектной практике интерес к ДГК также заметно вырос. Публикации последних лет показывают: внедрение ДГК в высотных ствольно-подвесных системах, где подвесные объемы могут выступать «гасящей массой»; пересмотр проектных приемов с «гибким этажом» как функциональным аналогом гасителя; методические уточнения по подбору параметров ДГК [15–19]. Эти результаты одновременно демонстрируют потенциальное преимущество данных решений в задачах гашения колебаний, вызванных различными внешними воздействиями (в частности, ветровыми и сейсмическими).

Несмотря на то, что ДГК нацеливаются в основном на собственные частоты и формы колебаний сооружения, а не на определенные типы волн напрямую, в инженерной практике они надежно работают при типовых (часто реализуемых) возбуждениях, ассоциируемых с Р- и S-волнами (объемными волнами), пришедшими на основание. Их эффективность при воздействии конкретного класса поверхностных волн до конца не изучена. Ключевым для задач сейсмической защиты является тот факт, что в реальных землетрясениях существенную долю энергии несут поверхностные волны Рэля и Лява, причем формируются преимущественно длительные низкочастотные импульсы. Современные исследования сейсмической защиты от направляемых метаповерхностей и сейсморазрывов для гашения энергии поверхностных волн [20–22] до натурных замеров [23] и численного моделирования подтверждают, что именно поверхностные волны способны задавать спектры возбуждения, неудобные для узкополосных пассивных устройств [24, 25]. Это ставит перед ДГК задачу работы в условиях, где частоты возбуждения в низкочастотной области, а их длительность и дисперсия волн возрастают.

В рамках данного исследования, которое разделено на 2 части (часть 1 – динамический гаситель колебаний, и часть 2 – сейсмоизоляция), будет оценена эффективность наиболее распространенных методов специальной пассивной сейсмической защиты зданий и сооружений при воздействии широкого класса поверхностных волн (различных видов и набора гармоник). Настоящая работа фокусируется именно на пассивной сейсмозащите зданий и сооружений в виде сейсмогашения с помощью ДГК при возбуждении основания, вызванном поверхностными волнами.

Теоретическое исследование формируется в виде теорем со строгим математическим доказательством, а также рядом следствий, которые позволяют сформулировать строгие выводы о предельных возможностях ДГК и ограничениях в частотной области, когда воздействие моделируется суперпозицией гармоник, репрезентирующих поверхностную волну в основании здания. Такая постановка позволяет: отделить общесистемные закономерности от частных параметров конкретного здания и формализовать оценку пассивного подавления для реальных спектров поверхностных волн.

Таким образом, цель настоящего исследования формируется следующим образом: теоретически описать и количественно оценить пределы эффективности специальной пассивной сейсмозащиты на основе ДГК для зданий и сооружений при воздействии поверхностных сейсмических волн, вывести проверяемые критерии эффективности в терминах передаточных функций и спектров воздействия, а также доказать (или опровергнуть) возможность «универсальной» пассивной защиты по всему классу таких воздействий.

**Теорема о подавлении** системы «здание + ДГК» при базовом возбуждении, вызванном сейсмическими поверхностными волнами.

*Утверждение.* В линейной системе «здание + ДГК», подвергаемой базовому возбуждению из-за сейсмических поверхностных волн (моделью которых на фундаменте служит суперпозиция гармоник с частотами  $\omega$ , создающая перемещение основания

$$u_g(t) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \hat{U}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \text{ существует подавление системы } \ddot{u}_g \rightarrow x_1 \text{ (передаточной функции),}$$

где  $x_1$  – относительное перемещение системы «здание + основание».

Рассматривается классическая линейная 2-массовая модель в одной горизонтальной плоскости. Для простейшей системы «здание + ДГК» при базовом возбуждении уравнения движения в координатах  $x_1$  и  $x_2$  имеют вид:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_2 &= -m_1 \ddot{u}_g; \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 \dot{x}_2 + k_2 x_2 &= -m_2 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{u}_g, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x_1(t) \equiv u_1(t) - u_g(t)$  – относительное перемещение системы «здание + основание»;  $x_2(t) \equiv u_2(t) - u_1(t)$  – относительное перемещение «ДГК – здание»;  $m_1$  – приведенная масса здания по рассматриваемой форме колебаний;  $k_1$  – эффективная жёсткость;  $c_1$  – вязкое демпфирование;  $u_g(t)$  – горизонтальное перемещение основания из-за поверхностной волны;  $u_1(t)$  – абсолютное перемещение массы  $m_1$ ;  $u_2(t)$  – абсолютное перемещение массы  $m_2$ ;  $m_2$ ,  $k_2$ ,  $c_2$  – масса, жесткость и демпфирование ДГК соответственно.

Выполним преобразование Лапласа. Обозначим  $X_1(s) = \mathcal{L}\{x_1(t)\}$ ,  $X_2(s) = \mathcal{L}\{x_2(t)\}$ ,  $U_g(s) = \mathcal{L}\{u_g(t)\}$ . Тогда  $\mathcal{L}\{\dot{(\cdot)}\} = s(\cdot)$ ,  $\mathcal{L}\{\ddot{(\cdot)}\} = s^2(\cdot)$ ,  $s = i\omega$ . Система (1) преобразуется в следующий вид:

$$\begin{aligned} (m_1 s^2 + c_1 s + k_1) X_1 - (c_2 s + k_2) X_2 &= -m_1 s^2 U_g; \\ m_2 s^2 X_2 + (c_2 s + k_2) X_2 + m_2 s^2 X_1 &= -m_2 s^2 U_g. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая данную систему с помощью системы компьютерной алгебры в «Maple», получим, что передаточная функция  $H(s) = \frac{X_1(s)}{U_g(s)}$  (из перемещений основания) равна:

$$H(s) = -s^2 \frac{m_1 m_2 s^2 + (m_1 + m_2) c_2 s + (m_1 + m_2) k_2}{m_1 m_2 s^4 + (m_2 c_1 + m_1 c_2 + m_2 c_2) s^3 + (m_2 k_1 + c_1 c_2 + m_1 k_2 + m_2 k_2) s^2 + (c_2 k_1 + c_1 k_2) s + k_1 k_2}, \quad (3)$$

и, следовательно, для гармоника  $u_g(t) = \operatorname{Re}\{U_0 e^{i\omega t}\}$  амплитуда  $|x_1| = |H(i\omega)| |U_0|$ . Данная функция имеет ровно один ненулевой антирезонанс. Данный факт описан в книге «Mechanical vibrations» Дена Гартога [10], однако далее для доказательств будут важны некоторые следствия из данной теоремы.

При  $c_2 = 0$  числитель обращается в 0 на частоте:

$$\omega_z^2 = \frac{(m_1 + m_2)k_2}{m_1 m_2} = \frac{k_2}{m_2} \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right), \quad (4)$$

давая подавление в амплитудно-частотных характеристиках (АЧХ). При  $c_2 > 0$  ноль смещается в левой комплексной полуплоскости  $s_{0,1} = -\sigma \pm i\sqrt{\omega_z^2 - \sigma^2}$  (сохраняя подавление системы):

$$s_{0,1} = -\frac{(m_1 + m_2)c_2}{2m_1 m_2} \pm i\sqrt{\frac{(m_1 + m_2)k_2}{m_1 m_2} - \left(\frac{(m_1 + m_2)c_2}{2m_1 m_2}\right)^2}, \quad (5)$$

при котором на оси  $i\omega$  точного нуля уже нет, но имеется минимум в окрестности частоты  $\omega_z$ . Важным выводом является то, что положение частоты подавления не зависит от  $k_1$  и  $c_1$ , а определяется исключительно параметрами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k_2$  и  $c_2$ .

Теорема дает явную АЧХ, наличие подавления означает, что ДГК узкой полосой уменьшает отклик  $x_1$  в окрестности собственной частоты ДГК (откорректированный массой  $m_1$ ). Данный факт описывает механизм работы ДГК на гармонических / узкополосных воздействиях (включая компоненты поверхностной сейсмической волны).

*Следствие 1:* узкополосная эффективность монохроматической поверхностной волны. Пусть  $u_g(t) = U_0 \cos(\omega t)$  – гармоническая компонента поверхностной волны. Тогда существует окрестность частоты  $\omega_z$ , такая что:

$$|H_{\text{ДГК}}(i\omega)| < |H_0(i\omega)|, \quad (6)$$

где  $H_0(i\omega) = -\frac{m_1 \omega^2}{\sqrt{(k_1 - m_1 \omega^2)^2 + (c_1 \omega)^2}}$  – АЧХ без ДГК.

Доказательство следует из рассмотрения  $c_2 \geq 0$ , при котором модуль числителя  $H(i\omega)$  имеет локальный минимум вблизи  $\omega_z$ . Поскольку знаменатель непрерывен и ограничен вдали от собственных частот системы, отношение модулей с ДГК и без него вблизи  $\omega_z$  меньше 1. Таким образом, для волны с частотой, попадающей в настроенные частоты, ДГК дает снижение отклика в узкой полосе частот.

*Следствие 2:* критерий интегральной эффективности под заданный спектр. Для стационарного возбуждения с заданной спектральной плотностью  $S_{u_g}(\omega)$  ДГК уменьшает среднеквадратичное значение  $x_1$  по сравнению с базовой системой (без ДГК) тогда и только тогда, когда:

$$\int_0^{\infty} \left( |H_{\text{ДГК}}(i\omega)|^2 - |H_0(i\omega)|^2 \right) S_{u_g}(\omega) d\omega < 0. \quad (7)$$

Данный критерий показывает, что ДГК дает подавление колебаний, если спектр сосредоточен вблизи  $\omega_z$  (при этом значение интеграла отрицательное). Преобладание низких частот ведет к ухудшению защиты.

**Теорема об асимптотике ДГК:** ухудшение подавления на низких частотах и отсутствие эффекта на высоких частотах. Для любого ДГК с параметрами  $m_2 > 0, k_2 > 0, c_2 \geq 0$  существует низкочастотный предел:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{|H_{\text{ДГК}}(i\omega)|}{\omega^2} = \frac{m_1 + m_2}{k_1} > \frac{m_1}{k_1} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{|H_0(i\omega)|}{\omega^2}, \quad (8)$$

т. е. при достаточно малых частотах ДГК усиливает квазистатическую реакцию системы; высокочастотный предел:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H_{\text{ДГК}}(i\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H_0(i\omega)| = 1. \quad (9)$$

Доказательство для низкочастотного предела строится исходя из разложения передаточной функции (3) при  $\omega \rightarrow 0$ . Числитель  $N(i\omega) = \underbrace{(m_1 + m_2)k_2}_{\text{const}} \omega^2 + O(\omega^3)$ , знаменатель

$D(i\omega) = k_1 k_2 + O(\omega)$ . Для высокочастотного предела возьмем старшие степени  $s$ , которые дают  $H(s) \sim -s^2 \frac{m_1 m_2 s^2}{m_1 m_2 s^4} = -1$  при  $|s| \rightarrow \infty$ .

Данная теорема доказывает, что для низких частот ДГК ухудшает (увеличивает) реакцию системы: коэффициент при  $\omega^2$  возрастает в  $\frac{m_1 + m_2}{m_1} > 1$  раз. Поверхностные волны часто содержат низкочастотные волны, для которых ДГК оказывается неэффективным. Для высокочастотного воздействия ДГК не дает защиты системе.

*Следствие 3:* невозможность универсальной защиты для поверхностных волн. Для любого набора параметров ДГК ( $m_2, k_2, c_2$ ) **не существует** числового  $\alpha < 1$ , такого что для всех возможных поверхностных волн  $u_g$  (произвольные спектры  $\hat{U}(\omega)$  с конечной энергией) выполняется

$$\int_0^{\infty} |H_{\text{ДГК}}(i\omega)|^2 |\hat{U}(\omega)|^2 d\omega \leq \alpha^2 \int_0^{\infty} |H_0(i\omega)|^2 |\hat{U}(\omega)|^2 d\omega. \quad (10)$$

Построим доказательство данного следствия. Из существования низкочастотного предела было получено, что:

$$W(i\omega) = \frac{|H_{\text{ДГК}}(i\omega)|}{|H_0(i\omega)|} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} W_0 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} > 1. \quad (11)$$

Функции  $H_{\text{ДГК}}$  и  $H_0$  непрерывны по  $\omega$ , следовательно, и  $W(i\omega)$  непрерывна. Тогда из (10) следует, что для любого числа  $\beta$  в диапазоне  $1 < \beta < W_0$  найдется такое  $\omega^* > 0$ , что  $W(i\omega) \geq \beta$  для всех  $\omega \in (0, \omega^*)$ . Это означает, что в достаточно малой окрестности нуля ДГК менее эффективен по сравнению с базовой системой как минимум в  $\beta$  раз.

Возьмем воздействие, чей спектр целиком лежит в рассматриваемом интервале. Простейший выбором является функция следующего вида (допускаются любые конечные по энергии спектры):

$$\hat{U}(\omega) = \begin{cases} C, & \omega \in (0, \omega^*); \\ 0, & \omega \notin (0, \omega^*), \end{cases} \quad (12)$$

где  $C \neq 0$  – константа.

Тогда энергия конечна:  $\int_0^{\infty} |\hat{U}|^2 d\omega = |C|^2 \omega^* < \infty$ .

Из условия  $W(i\omega) \geq \beta$  для всех  $\omega \in (0, \omega^*)$  следует, что

$$|H_{\text{ДГК}}(i\omega)|^2 \geq \beta^2 |H_0(i\omega)|^2, \quad (\omega \in (0, \omega^*)). \quad (13)$$

Умножив на  $|\hat{U}|^2$  и интегрируя по  $d\omega$ , получим:

$$\int_0^{\infty} |H_{\text{ДГК}}|^2 |\hat{U}|^2 d\omega = \int_0^{\omega^*} |H_{\text{ДГК}}|^2 |C|^2 d\omega \geq \beta^2 \int_0^{\omega^*} |H_0|^2 |C|^2 d\omega = \beta^2 \int_0^{\infty} |H_0|^2 |\hat{U}|^2 d\omega. \quad (14)$$

Пусть существует  $\alpha < 1$ , удовлетворяющая условию (10) для всех  $\hat{U}$ . Тогда для  $\hat{U}(\omega)$  из (10) и (13) получим:

$$\beta^2 \int_0^{\infty} |H_0|^2 |\hat{U}|^2 d\omega \leq \int_0^{\infty} |H_{\text{ДГК}}|^2 |\hat{U}|^2 d\omega \leq \alpha^2 \int_0^{\infty} |H_0|^2 |\hat{U}|^2 d\omega. \quad (15)$$

Так как интеграл справа положителен ( $C \neq 0$ ), его можно сократить, получая условие  $\beta^2 \leq \alpha^2$ . Поскольку  $\beta \in (1, W_0)$ , то всегда можно взять такое  $\beta$ , чтобы  $\alpha < \beta < W_0$ . Данное условие представляет собой противоречие, следовательно, никакого  $\alpha < 1$  с требуемым свойством *не существует*.

Никакая пассивная система ДГК не обеспечит гарантированного снижения отклика для всех возможных поверхностных сейсмических волн: всегда можно подобрать спектр, где наличие ДГК приводит к более неблагоприятному отклику системы.

**Теорема о логарифмическом интегральном ограничении системы «здание + ДГК»:** при физических параметрах  $(m_1, k_1, c_1, m_2, k_2, c_2)$  система устойчива (в смысле Ляпунова) [26] и минимально-фазовая (все полюса и нули ее передаточной функции лежат в левой полуплоскости) [27]. Тогда отношение этих передаточных функций  $W(i\omega) = \frac{|H_{\text{ДГК}}(i\omega)|}{|H_0(i\omega)|}$  также является устойчивой минимально-фазовой рациональной функцией. При этом ранее было показано, что  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W(i\omega) = 1$ . Для такой функции выполняется логарифмическое интегральное ограничение Боде [28, 29]:

$$\int_0^{\infty} \ln |W(i\omega)| w(\omega) d\omega = 0, \quad (16)$$

где  $w(\omega) > 0$  – положительная весовая функция, полностью определяемая расположением полюсов у  $s = 0$  и  $s = \infty$ . В рассматриваемом случае – это компенсирующий вес, делающий интеграл конечным при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  (из-за конечности предела (9)).

Суть теоремы заключена в следующем факте: подавление отклика системы в каком-то локальном диапазоне частот обязано сопровождаться усилением на других частотах (в том числе там, где спектр поверхностной волны тоже может оказаться значительным), который можно в целом охарактеризовать как «закон сохранения подавления колебаний».

*Следствие 4:* при положительных частотах обязательно существуют участки, где  $W(i\omega) < 1$  (чтобы скомпенсировать область, где отношение передаточных функций больше 1), и участки, где  $W(i\omega) > 1$  (в частности, вблизи нуля (11) возникает значение строго больше 1).

*Следствие 5:* невозможность универсальной защиты от поверхностных волн на основе энергетического критерия. Пусть  $S_{u_g}(\omega) \geq 0$  – спектральная плотность перемещения основания от поверхностных волн (допускается узкополосный набор частот около любой  $\omega^*$ ). Энергетический критерий среднеквадратичного отклика:

$$E = \int_0^{\infty} |H_{ДГК}(i\omega)| S_{u_g}(\omega) d\omega; \quad E_0 = \int_0^{\infty} |H_0(i\omega)| S_{u_g}(\omega) d\omega. \quad (17)$$

Требование универсальной защиты означало бы существование  $\alpha < 1$ , такой что  $E \leq \alpha E_0$  для любого  $S_{u_g}(\omega)$ . Однако из теоремы о логарифмическом интегральном ограничении системы «здание + ДГК» существуют частоты, где  $|W(i\omega)| \geq 1$  (в частности, при  $\omega \rightarrow 0$ ). Выбирая  $S_{u_g}$  в окрестности такой частоты  $\omega^*$ , получаем:

$$E \approx |H_{ДГК}(i\omega^*)|^2 \int S_{u_g} d\omega \geq |H_0(i\omega^*)|^2 \int S_{u_g} d\omega = E_0, \quad (18)$$

т. е. не выполняется ни  $E \leq E_0$ , ни тем более  $E \leq \alpha E_0$  для всех допустимых  $S_{u_g}$ .

Таким образом, пассивная система ДГК принципиально не способна обеспечить робастную (нечувствительную к отклонениям системы) сейсмическую защиту по всему классу поверхностных волн. ДГК лишь перераспределяет частотный спектр, создавая подавление колебаний в окрестности определенной частоты, при этом сопровождается усилением на других частотах.

**Выводы.** В работе было проведено теоретическое исследование ограничений специальной пассивной сейсмической защиты зданий и сооружений в виде динамического гасителя колебаний при воздействии поверхностных волн. На основе проведенного исследования можно сформулировать следующие выводы:

1. Выявлены фундаментальные границы эффективности пассивного сейсмогашения зданий и сооружений с помощью динамических гасителей колебаний (ДГК) при воздействии поверхностных сейсмических волн. В рамках линейной двухмассовой модели «здание + ДГК» с базовым возбуждением, заданным суперпозицией гармоник, получена передаточная функция системы и доказано существование единственного ненулевого антирезонанса: в окрестности соответствующей частоты  $\omega_z$  реализуется локальное подавление отклика конструкции (формулы (3)–(6)). Принципиально важно, что положение частоты подавления не зависит от  $k_1$  и  $c_1$ , а определяется исключительно параметрами  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $k_2$  и  $c_2$ , что задает настройку исключительно через свойства ДГК;

2. Асимптотический анализ показал, что в низкочастотном пределе ДГК неизбежно увеличивает квазистатическую реакцию по сравнению с базовой системой, причём коэффициент усиления равен  $(m_1 + m_2)/m_1 > 1$ , в то время как в высокочастотном пределе влияние ДГК исчезает, и поведение совпадает с системой без ДГК (формулы (8)–(9)). Таким образом, ДГК принципиально эффективен как узкополосное устройство для подавления колебаний, но его действие оборачивается ухудшением вне зоны настройки, особенно в области низких частот, характерной для значительной части поверхностных волн;

3. Логарифмическое интегральное ограничение Боде для отношения передаточных функций  $W(i\omega) = \frac{|H_{ДГК}(i\omega)|}{|H_0(i\omega)|}$  устанавливает глобальный «закон сохранения подавления

колебаний»: интеграл  $\int_0^{\infty} \ln |W(i\omega)| |w(\omega)| d\omega = 0$ . Это означает, что локальное снижение отклика неизбежно «компенсируется» усилением на других частотах, в частности – вблизи нуля, где уже доказано значение  $W(i\omega) > 1$ . Следовательно, никакой выбор параметров ДГК не допускает универсальной (устойчивой к спектральной неопределенности) пассивной защиты по всему классу поверхностных волн (следствия 3, 4 и 5);

4. Для любого набора параметров ДГК ( $m_2, k_2, c_2$ ) *не существует* числового  $\alpha < 1$ , такого что для всех возможных поверхностных волн  $u_g$  (произвольные спектры  $\hat{U}(\omega)$  с конечной энергией) выполняется интегральное условие  $\int_0^{\infty} |H_{\text{ДГК}}(i\omega)|^2 |\hat{U}(\omega)|^2 d\omega \leq \alpha^2 \int_0^{\infty} |H_0(i\omega)|^2 |\hat{U}(\omega)|^2 d\omega$ ,

это означает, что никакая пассивная система ДГК не обеспечит гарантированного снижения отклика для всех возможных поверхностных сейсмических волн: всегда можно подобрать спектр, где наличие ДГК приводит к более неблагоприятному отклику системы.

Из изложенного выше следуют практические рекомендации:

1. Если ожидаемые воздействия содержат выраженные узкополосные компоненты, попадающие в настраиваемую область, ДГК может обеспечить заметное подавление отклика. При широкополосных и/или низкочастотных воздействиях полагаться на ДГК как на базовое средство сейсмозащиты нельзя. В таких случаях наиболее рекомендуемыми являются варианты *многоэшелонной сейсмической защиты*, при котором система технических и инженерных решений, где здания, сооружения или целые комплексы защищаются от землетрясений не одной технологией (например, динамическим гасителем колебаний или сейсмоизоляцией основания, как это принимается в большинстве проектов), а целым набором последовательно расположенных «эшелонов» защиты. Каждый эшелон снижает воздействие сейсмических волн, и если один уровень не сработает или перегрузится, следующие берут на себя часть воздействия. К таким системам можно отнести, например, комбинации динамического гасителя колебаний (или сейсмоизоляции) и сейсмических барьеров (ослабляющих и перенаправляющих поверхностные сейсмические волны) или любых других;

2. Увеличение массового отношения  $\mu = m_2/m_1$  дает подавление АЧХ в районе частоты подавления  $\omega_z$ , но одновременно повышает отклик на самых низких частотах: при  $\omega \rightarrow 0$  усиление становится  $1 + \mu$ . К тому же увеличивается чувствительность к рассогласованию: если пиковая частота не совпадает с  $\omega_z$ , то эффект подавления быстро теряется. Чрезмерное демпфирование  $c_2$  сдвигает ноль в комплексную плоскость, «размазывая» подавление (провал по АЧХ становится шире и мельче) и снижая пик эффективности. Следовательно, оптимальная настройка – это компромисс между тем, чтобы сделать подавление системы в окрестности  $\omega_z$  достаточно сильным, при этом не увеличивая реакцию системы вне этой зоны (особенно на низких частотах). Необходимо выбирать минимальное отношение  $\mu$  и выбирать частоту  $\omega_z$  по максимуму спектра  $S_{u_g}(\omega)$ , а  $c_2$  увеличивать настолько, чтобы расширить полосу частот без значительной потери подавления АЧХ;

3. Проектное решение следует принимать не по одному «типовому» спектру, а по ансамблю сценариев, отражающему неизбежную неопределенность спектрального состава поверхностных волн на площадке.

**Сведения о финансировании:** работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 24-49-02002.

Библиографический список

1. Уздин А. М. Основы теории сейсмостойкости и сейсмостойкого строительства зданий и сооружений. СПб.: Изд-во ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева, 1993. 176 с.
2. Абовский Н. П., Инжутов И. С., Сибгатулин В. Г. [и др.] Сейсмозащитные устройства: актуальные проблемы сейсmobезопасности / под ред. Н. П. Абовского. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2013. 98 с.
3. Литвинова Э. В., Литвинов Б. А. Инновационные системы сейсмозащиты зданий и сооружений за рубежом // Строительство и техногенная безопасность. 2013. № 47. С. 69–78.
4. Саиян С. Г., Шитикова М. В. Анализ ветровых нагрузок и воздействий на высотные здания и сооружения. Обзор современного состояния, проблемы и перспективы. Ч. 1. Ветровые нагрузки и методы их определения // Известия вузов. Строительство. 2025. № 4 (796). С. 5–19. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-796-4-5-19.
5. Саиян С. Г., Шитикова М. В. Анализ ветровых нагрузок и воздействий на высотные здания и сооружения. Обзор современного состояния, проблемы и перспективы. Ч. 2. Динамический отклик при ветровых воздействиях // Известия вузов. Строительство. 2025. № 6 (798). С. 124–139. DOI: 10.32683/0536-1052-2025-798-6-124-139.
6. Дукарт А. В., Олейник А. И. Динамические гасители колебаний конструкций. М.: АСВ, 2015. 248 с.
7. Коренев Б. Г., Резников Л. М. Динамические гасители колебаний: теория и технические приложения. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 303 с.
8. Коренев Б. Г., Олейник А. И. Эффективность многомассовых динамических гасителей колебаний при гармонических внешних воздействиях // Строительная механика и расчет сооружений. 1984. № 5. С. 39–43.
9. Остроумов Б. В. Особенности «работы» высотных сооружений с установленными на них динамическими гасителями колебаний // Строительная механика и расчет сооружений. 2013. № 4. С. 56–57.
10. Den Hartog J. P. Mechanical vibrations. New York: Courier Corporation, 1985. 436 p.
11. Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E. Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: a state-of-the-art review // Journal of Vibration and Control. 2022. Vol. 28, no. 7–8. Pp. 812–836. DOI: 10.1177/1077546320984305.
12. Xu K. F., Zhang Y. W., Niu M. Q., Chen L. Q. Dynamics analysis of a variable stiffness tuned mass damper enhanced by an inerter // Applied Sciences. 2023. Vol. 13, no. 3. P. 1404. <https://doi.org/10.3390/app13031404>.
13. Konar T., Ghosh A. D. Tuned mass damper inerter for seismic control of multi-story buildings: Ten years since inception // Structures. Elsevier. 2024. Vol. 63. P. 106459. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106459>.
14. Patsialis D., Taflanidis A. A., Giaralis A. Tuned-mass-damper-inerter optimal design and performance assessment for multi-storey hysteretic buildings under seismic excitation // Bulletin of Earthquake Engineering. 2023. Vol. 21, no. 3. P. 1541–1576. <https://doi.org/10.1007/s10518-021-01236-4>.
15. Свитлик И. В., Белаш Т. А. Динамическое гашение колебаний конструкций высотных зданий ствольного-подвесного типа при сейсмических воздействиях // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20, № 7. С. 1017–1029. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2025.7.1017-1029>.
16. Нестерова О. П., Уздин А. М., Федорова М. Ю., Хонг Л. Влияние способа учета демпфирования на оптимизацию параметров динамического гасителя колебаний // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2021. № 6. С. 29–44.
17. Себешев В. Г., Люфт Н. А., Гербер Ю. А. Метод расчета параметров комплексов динамических гасителей колебаний как регуляторов напряженно-деформированного состояния сооружений и конструкций при полигармонических воздействиях // Строительство и реконструкция. 2025. № 3. С. 45–59.

18. Нестерова О. П. Особенности подбора параметров динамических гасителей сейсмических колебаний в зависимости от модели учета демпфирования // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2022. № 4. С. 8–22. DOI: 10.37153/2618-9283-2022-4-8-22.
19. Саиян С. Г., Маркова С. А. Расчетные исследования мер снижения ветровых воздействий на высотные здания и сооружения // Системные технологии. 2024. № 4 (53). С. 122–134. DOI: 10.48612/dnitii/2024\_53\_122-134.
20. Brûlé S., Javelaud E. H., Enoch S., Guenneau S. Experiments on seismic metamaterials: molding surface waves // Physical review letters. 2014. Vol. 112, no. 13. P. 133901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.133901>.
21. Саиян С. Г. Использование интегро-дифференциальных уравнений для моделирования распространения сейсмических волн через барьер с эффектом памяти // Вестник МГСУ. 2025. Т. 20, № 10. С. 1495–1507. DOI: 10.22227/1997-0935.2025.10.1495-1507.
22. Саиян С. Г. Моделирование распространения дельта-импульса через сейсмический барьер из бимодульного материала // Научный журнал строительства и архитектуры. 2025. № 4 (80). С. 91–103. DOI: 10.36622/2541-7592.2025.80.4.009.
23. Yu W., Zhou L. Seismic metamaterial surface for broadband Rayleigh waves attenuation // Materials & Design. 2023. Vol. 225. P. 111509. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.111509>.
24. Bonner J. L., Stroujkova A., Anderson D. Determination of Love-and Rayleigh-wave magnitudes for earthquakes and explosions // Bulletin of the Seismological Society of America. 2011. Vol. 101, no. 6. Pp. 3096–3104. <https://doi.org/10.1785/0120110131>.
25. Rahman M. M., Nahar T. T., Kim D. Effect of frequency characteristics of ground motion on response of tuned mass damper controlled inelastic concrete frame // Buildings. 2021. Vol. 11, no. 2. P. 74. <https://doi.org/10.3390/buildings11020074>.
26. Ляпунов А. М. Избранные труды: работы по теории устойчивости / отв. ред. Д. В. Трещев; Математ. ин-т им. В. А. Стеклова РАН. М.: Наука, 2007. 574 с.
27. Щербаков В. С., Лазута И. В. Теория автоматического управления. Линейные непрерывные системы. Омск: Сибирская государственная автомобильно-дорожная академия (СибАДИ), 2013. 142 с.
28. Трунтягин И. М. Анализ устойчивости систем автоматического управления с запаздыванием при помощи интеграла Боде // Синергия Наук. 2017. № 18. С. 888–899.
29. Hong J., Bernstein D. S. Bode integral constraints, collocation, and spillover in active noise and vibration control // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 1998. Vol. 6, no. 1. Pp. 111–120. DOI: 10.1109/87.654881.

#### Reference

1. Uzdin A. M. Osnovy teorii sejsmostojkosti i sejsmostojkogo stroitel'stva zdaniy i sooruzhenij [Fundamentals of the theory of seismic resistance and earthquake-resistant construction of buildings and structures]. SPb.: Izd-vo VNIIG im. B. E. Vedeneeva, 1993. 176 p. (In Russ.).
2. Abovskij N. P., Inzhutov I. S., Sibgatulin V. G., Deordiev S. V., i dr.; pod red. N. P. Abovskogo. Sejsmozashchitnye ustrojstva: aktual'nye problemy sejsmbezopasnosti [Seismic protection devices: current issues of seismic safety]. Monografiya [Monograph]. Krasnoyarsk: Sibirskij federal'nyj universitet, 2013. 98 p. (In Russ.).
3. Litvinova E. V., Litvinov B. A. Innovatsionnye sistemy sejsmozashchity zdaniy i sooruzhenij za rubezhom [Innovative seismic protection systems for buildings and structures abroad] // Stroitel'stvo i tekhnogennaya bezopasnost' [Construction and Technogenic Safety]. 2013. No. 47. Pp. 69–78 (In Russ.).
4. Saiyan S. G., Shitikova M. V. Analiz vetrovykh nagruzok i vozdeystvij na vysotnye zdaniya i sooruzheniya. Obzor sovremennogo sostoyaniya, problemy i perspektivy. Chast' 1. Vetrovye nagruzki i metody ikh opredeleniya [Analysis of wind loads and effects on high-rise

buildings and structures. State-of-the-art review, challenges and prospects. Part 1. Wind loads and their determination methods] // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Stroitel'stvo* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Construction]. 2025. No. 4 (796). Pp. 5–19. DOI 10.32683/0536-1052-2025-796-4-5-19 (In Russ.).

5. Saiyan S. G., Shitikova M. V. Analiz vetrovykh nagruzok i vozdeystvij na vysotnye zdaniya i sooruzheniya. Obzor sovremennogo sostoyaniya, problemy i perspektivy. Chast' 2. Dinamicheskij otklik pri vetrovykh vozdeystviyakh [Analysis of wind loads and effects on high-rise buildings and structures. State-of-the-art review, challenges and prospects. Part 2. Dynamic response under wind actions] // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenij. Stroitel'stvo* [Proceedings of Higher Educational Institutions. Construction]. 2025. No. 6 (798). Pp. 124–139. DOI 10.32683/0536-1052-2025-798-6-124-139 (In Russ.).

6. Dukart A. V., Oleinik A. I. Dinamicheskie gasiteli kolebanij konstruksij [Dynamic vibration absorbers of structures]. M.: ASV, 2015. 248 p. (In Russ.).

7. Korenev B. G., Reznikov L. M. Dinamicheskie gasiteli kolebanij: teoriya i tekhnicheskie prilozheniya [Dynamic vibration absorbers: theory and technical applications], M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1988. 303 p. (In Russ.).

8. Korenev B. G., Oleinik A. I. Effektivnost' mnogomassovykh dinamicheskikh gasitelej kolebanij pri garmonicheskikh vneshnikh vozdeystviyakh [Efficiency of multi-mass dynamic vibration absorbers under harmonic external actions] // *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij* [Structural Mechanics and Calculation of Structures]. 1984. No. 5. Pp. 39–43 (In Russ.).

9. Ostroumov B. V. Osobennosti “raboty” vysotnykh sooruzhenij s ustanovlennymi na nikh dinamicheskimi gasitelyami kolebanij [Features of the “operation” of high-rise structures with dynamic vibration absorbers installed on them] // *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij* [Structural Mechanics and Calculation of Structures]. 2013. No. 4. Pp. 56–57 (In Russ.).

10. Den Hartog J. P. Mechanical vibrations. New York: Courier Corporation, 1985. 436 p.

11. Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E. Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: A state-of-the-art review // *Journal of Vibration and Control*. 2022. Vol. 28, no. 7–8. Pp. 812–836. DOI:10.1177/1077546320984305.

12. Xu K. F., Zhang Y. W., Niu M. Q., Chen L. Q. Dynamics analysis of a variable stiffness tuned mass damper enhanced by an inerter // *Applied Sciences*. 2023. Vol. 13, no. 3. P. 1404. <https://doi.org/10.3390/app13031404>.

13. Konar T., Ghosh A. D. Tuned mass damper inerter for seismic control of multi-story buildings: Ten years since inception // *Structures*. Elsevier. 2024. Vol. 63. P. 106459. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106459>.

14. Patsialis D., Taflanidis A. A., Giaralis A. Tuned-mass-damper-inerter optimal design and performance assessment for multi-storey hysteretic buildings under seismic excitation // *Bulletin of Earthquake Engineering*. 2023. Vol. 21, no. 3. Pp. 1541–1576. <https://doi.org/10.1007/s10518-021-01236-4>.

15. Svitlik I. V., Belash T. A. Dinamicheskoe gashenie kolebanij konstruksij vysotnykh zdaniy stvol'no-podvesnogo tipa pri seismicheskikh vozdeystviyakh [Dynamic vibration attenuation of trunk-suspended-type high-rise building structures under seismic actions] // *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2025. Vol. 20, no. 7. Pp. 1017–1029. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2025.7.1017-1029> (In Russ.).

16. Nesterova O. P., Uzdin A. M., Fedorova M. Yu., Khong L. Vliyanie sposoba ucheta dempfirovaniya na optimizatsiyu parametrov dinamicheskogo gasitelya kolebanij [Effect of damping modeling approach on optimization of dynamic vibration absorber parameters] // *Sejismostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij* [Seismic-Resistant Construction. Safety of Structures]. 2021. No. 6. Pp. 29–44 (In Russ.).

17. Sebeshev V. G., Lyuft N. A., Gerber Yu. A. Metod rascheta parametrov kompleksov dinamicheskikh gasitelej kolebanij kak regulyatorov napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya

sooruzhenij i konstruktsij pri poligarmonicheskikh vozdeystviyakh [Method for calculating parameters of complexes of dynamic vibration absorbers as regulators of the stress-strain state of structures and constructions under polyharmonic actions] // *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* [Construction and Reconstruction]. 2025. No. 3. Pp. 45–59 (In Russ.).

18. Nesterova O. P. Osobennosti podbora parametrov dinamicheskikh gasitelej sejsmicheskikh kolebanij v zavisimosti ot modeli ucheta dempfirovaniya [Features of selecting parameters of dynamic absorbers of seismic vibrations depending on the damping model] // *Sejsmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij* [Seismic-Resistant Construction. Safety of Structures]. 2022. No. 4. Pp. 8–22. DOI 10.37153/2618-9283-2022-4-8-22 (In Russ.).

19. Saiyan S. G., Markova S. A. Raschetnye issledovaniya mer snizheniya vetrovykh vozdeystvij na vysotnye zdaniya i sooruzheniya [Computational studies of measures to reduce wind effects on high-rise buildings and structures] // *Sistemnye tekhnologii* [System Technologies]. 2024. No. 4 (53). Pp. 122–134. DOI 10.48612/dnitii/2024\_53\_122-134 (In Russ.).

20. Brûlé S., Javelaud E. H., Enoch S., Guenneau S. Experiments on seismic metamaterials: molding surface waves // *Physical review letters*. 2014. Vol. 112. no. 13. P. 133901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.133901>.

21. Saiyan S.G. Ispol'zovanie integro-differencial'nyh uravnenij dlya modelirovaniya rasprostraneniya sejsmicheskikh voln cherez bar'er s efektom pamyati [Using Integro-Differential Equations to Model the Propagation of Seismic Waves Through a Barrier with a Memory Effect] // *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2025. Vol. 20, no. 10. Pp. 1495–1507. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2025.10.1495-1507> (In Russ.).

22. Saiyan S.G. Modelirovanie rasprostraneniya del'ta-impul'sa cherez sejsmicheskij bar'er iz bimodul'nogo materiala Modeling the propagation of a delta pulse through a seismic barrier made of a bimodular material // *Nauchnyj zhurnal stroitel'stva i arhitektury* [Russian Journal of Building Construction and Architecture]. 2025. No. 4 (80). Pp. 91–103. DOI 10.36622/2541-7592.2025.80.4.009 (In Russ.).

23. Yu W., Zhou L. Seismic metamaterial surface for broadband Rayleigh waves attenuation // *Materials & Design*. 2023. Vol. 225. P. 111509. <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.111509>.

24. Bonner J. L., Stroujkova A., Anderson D. Determination of Love-and Rayleigh-wave magnitudes for earthquakes and explosions // *Bulletin of the Seismological Society of America*. 2011. Vol. 101, no. 6. Pp. 3096–3104. <https://doi.org/10.1785/0120110131>.

25. Rahman M. M., Nahar T. T., Kim D. Effect of frequency characteristics of ground motion on response of tuned mass damper controlled inelastic concrete frame // *Buildings*. 2021. Vol. 11, no. 2. P. 74. <https://doi.org/10.3390/buildings11020074>.

26. Lyapunov A. M. Izbrannye trudy: raboty po teorii ustojchivosti [Selected works: papers on stability theory] / A. M. Lyapunov; [otv. red. D. V. Treshchev]; *Matemat. in-t im. V. A. Steklova RAN. M.: Nauka*, 2007. 574 p. (In Russ.).

27. Shcherbakov V. S., Lazuta I. V. Teoriya avtomaticheskogo upravleniya. Linejnye nepre-ryvnye sistemy [Theory of automatic control. Linear continuous systems], *Uchebnoe posobie* [Text-book]. Omsk: Sibirskaya gosudarstvennaya avtomobil'no-dorozhnaya akademiya (SibADI), 2013. 142 p. (In Russ.).

28. Truntyagin I. M. Analiz ustojchivosti sistem avtomaticheskogo upravleniya s zapazyvaniem pri pomoshchi integrala Bode [Stability analysis of automatic control systems with delay using the Bode integral] // *Sinergiya Nauk* [Synergy of Sciences]. 2017. No. 18. Pp. 888–899 (In Russ.).

29. Hong J., Bernstein D. S. Bode integral constraints, collocation, and spillover in active noise and vibration control // *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 1998. Vol. 6, no. 1. Pp. 111–120. DOI: 10.1109/87.654881.

**THEORETICAL STUDY OF THE LIMITATIONS  
OF SPECIAL PASSIVE SEISMIC PROTECTION OF BUILDINGS AND STRUCTURES  
UNDER THE ACTION OF SURFACE WAVES.  
PART 1: TUNED MASS DAMPER**

S. G. Saiyan <sup>1</sup>

National Research Moscow State University of Civil Engineering <sup>1</sup>  
Russia, Moscow

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences <sup>1</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Research Associate at the A.B. Zolotov Research Center, PhD Student at the Department of Structural and Theoretical Mechanics, e-mail: Berformert@gmail.com

---

The paper presents a theoretical analysis of the ultimate effectiveness of special passive seismic protection of buildings using a tuned mass damper (TMD) under surface-wave excitation. A linear two-mass system «building + TMD» is adopted with base excitation modeled as a superposition of base-displacement harmonics consistent with the spectra of Rayleigh and Love surface waves. For the resulting system, the transfer function from base displacement to the building's relative displacement is derived; the existence of a single nonzero antiresonance is proved, and it is shown that the suppression (notch) frequency depends only on the TMD parameters and the building mass. Asymptotic analysis establishes degradation of the quasi-static response in the low-frequency range and the disappearance of the suppression effect at high frequencies. Bode integral constraints are formulated for the ratio of transfer functions, from which it follows that «universal» passive seismic protection is impossible for arbitrary surface-wave spectra, since a TMD inevitably redistributes the spectrum, suppressing the response in a narrow band while amplifying it outside the tuning range. Practical recommendations are proposed for selecting TMD parameters, and the advisability of multi-tier seismic protection (a combination of TMD/seismic isolation with seismic barriers) under broadband and low-frequency inputs is substantiated.

**Keywords:** seismic resistance, seismic protection, tuned mass damper, surface waves, Rayleigh waves.

УДК 699.841

DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.004

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПАССИВНОЙ СЕЙСМИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН. ЧАСТЬ 2: СЕЙСМОИЗОЛЯЦИЯ

С. Г. Саиян<sup>1</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет<sup>1</sup>  
Россия, г. МоскваИнститут проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук<sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Науч. сотр. Научно-образовательного центра компьютерного моделирования уникальных зданий, сооружений и комплексов им. А. Б. Золотова, e-mail: Verformert@gmail.com

Статья посвящена теоретическому анализу предельной эффективности специальной пассивной сейсмозащиты зданий с использованием сейсмоизоляции в виде сейсмоопор при воздействии поверхностных волн. На основе модели «масса  $m + N$  сейсмоизоляторов» с заданием многоточечного возбуждения от гармонических волн с конечными волновым числом  $k$  и эллиптической поляризацией рассмотрены горизонтальные и вертикальные отклики. В частотной области получены передаточные функции абсолютных перемещений и выведены четыре ключевых результата: (i) при малых, но ненулевых частотах  $\omega$  абсолютное перемещение стремится к среднему перемещению основания; по горизонтали модуль передаточной функции превышает 1 на величину  $O(\omega^2)$ , что исключает универсальное подавление; (ii) в окрестности собственной частоты сейсмоизолятора  $\omega_b$  возникает неустрашимый пик отклика, сохраняющийся при любом конечном демпфировании; (iii) вертикальная составляющая рэлеевской волны практически не фильтруется стандартными сейсмоизоляторами из-за их высокой вертикальной жесткости; (iv) при многоточечном возбуждении из-за фазового рассогласования под опорами существует геометрический нижний предел относительных перемещений, пропорциональный  $\sin(kL/2)$  (для крайних опор, разнесенных на расстоянии  $L$ ). Обобщенная теорема показывает: для класса всех поверхностных волн не существует константы  $M < 1$ , одновременно ограничивающей горизонтальные и вертикальные абсолютные перемещения. Практические рекомендации: применять пассивную сейсмоизоляцию при узкополосных и устойчивых спектрах, удаленных от  $\omega_b$ ; учитывать параметр  $kL$  при назначении ширины сейсмических швов и настройке ограничителей перемещений; подавлять поверхностные компоненты сейсмических воздействий с помощью сейсмических барьеров.

**Ключевые слова:** сейсмостойкость, сейсмозащита, сейсмоизоляция, поверхностные волны, волны Рэлея.

**Введение.** Сейсмоизоляция основания остается одним из наиболее распространенных инженерным решением по специальной сейсмической защите. В традиционном понимании данное техническое решение изолирует надземную часть от движения грунта за счет введения гибкого промежуточного слоя – системы опор или скользящих элементов, способных уменьшать передачу сейсмических колебаний на надземную часть здания за счет деформации, скольжения и демпфирования энергии колебаний.

За последние годы опубликовано множество обстоятельных обзоров и прикладных исследований, систематизирующих развитие эластомерных и резинометаллических опор, маятников трения (фрикционно-подвижных опорных элементов), опор кинематического типа в различном исполнении, пружинных опор, сейсмоизолирующих этажей, а также многоуровневой изоляции и т. п. [1–8]. Они подчеркивают высокую эффективность при преобладании узкополосных низкочастотных и длительных колебаний, при которых сейсмоизолирующие системы способны существенно снижать ускорения надземной части и ограничивать относительные перемещения конструкций. Одновременно с этим отмечают уязвимость при широкополосных или

импульсных сейсмических воздействиях, при рассогласовании собственных и изоляционных частот, а также при воздействии когерентных низкочастотных волн [9, 10].

Недавний отечественный обзор реализации систем сейсмоизоляции в проектной практике подчеркивает ключевые инженерные концепции: большие взаимные смещения сейсмоизолированных частей сооружения, требовательность к корректной постановке длительных низкочастотных воздействий и необходимость ограничителей / демпферов перемещений [1]. Стоит отметить, что на данный момент в отечественной практике сейсмостойкого строительства среди специальных методов сейсмозащиты преобладают решения, основанные именно на сейсмоизоляции, что подтверждается рядом обзорных работ [1, 11–13], а также практикой расчетных исследований самого автора статьи, встречавшегося преимущественно с резинометаллической сейсмоизоляцией.

Мировые обзорные работы аккумулировали тысячи внедрений сейсмоизоляции и показали её высокую эффективность для широкого класса сценариев [1, 6, 7, 14–16], однако объективно меньше внимания уделялось строгому теоретическому анализу предельных возможностей пассивной сейсмоизоляции именно при действии поверхностных волн, когда: воздействие формируется суперпозицией гармоник с конечным волновым числом  $k$  (следовательно, опоры получают разные во времени перемещения); в спектре доминируют низкие частоты (квазистатика / низкочастотные воздействия); вертикальная составляющая рэлеевских волн в принципе почти не фильтруется традиционными горизонтально-податливыми опорами.

Одновременно с этим в последнее время активно развивается «территориальная» сейсмозащита (сейсмические барьеры / метаповерхности / метабарьеры) [17–19], но эти решения проектируются вдоль пути волны, тогда как сейсмоизоляция – на границе системы «грунт – здание»; согласование двух подходов требует понимания фундаментальных ограничений каждого звена. Комбинация таких решений дает многошелонную сейсмическую защиту, рекомендации по которым даны в первой части работы (часть 1: динамический гаситель колебаний).

Целью исследований, проведенных в части 2, является теоретическое описание и количественная оценка пределов эффективности пассивной сейсмоизоляции зданий и сооружений при воздействии широкого класса поверхностных волн с горизонтальными и вертикальными компонентами, учетом конечного волнового числа  $k$  и многоточечного возбуждения опор. Данная работа направлена на теоретическое доказательство (или опровержение) возможности «универсальной» пассивной сейсмозащиты посредством сейсмоизоляции по всему классу таких воздействий.

**Постановка задачи.** Пусть здание имеет  $N$  опор с координатами  $x_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, N$ ) вдоль направления распространения волны. Поле перемещений грунта от поверхностной волны представим как гармоническое воздействие следующего вида:

$$y_h(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{U}_h e^{i(\omega t - kx)} \right\}, \quad y_v(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{U}_v e^{i(\omega t - kx + \varphi)} \right\}, \quad (19)$$

где  $y_h$  – горизонтальная,  $y_v$  – вертикальная компоненты (для поверхностных волн Лява  $\hat{U}_v = 0$ ,  $\hat{U}_h \neq 0$ );  $\omega > 0$ ;  $k > 0$  – волновое число;  $\varphi$  – фазовый сдвиг эллиптической поляризации рэлеевской волны.

На каждой опоре установлен горизонтальный сейсмоизолятор жесткостью  $k_{h,j} > 0$  и демпфированием  $c_{h,j} \geq 0$ . Вертикальная жесткость  $k_{v,j} \gg k_{h,j}$  (как правило, сейсмические опоры, например резинометаллические, имеют вертикальную жесткость, намного превосходящую горизонтальную) и вертикальное демпфирование  $c_{v,j} \geq 0$ .

Рассмотрим колебание для сейсмоизолированного здания, в котором система движется как почти жесткое тело массой  $m > 0$ . Его абсолютные перемещения центра масс по горизонтали  $X(t)$ , а по вертикали  $Z(t)$ . Гармоническое возбуждение каждой из опор:

$$Y_{h,j}(t) = y_h(x_j, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{U}_h e^{i(\omega t - kx_j)} \right\}, \quad Y_{v,j}(t) = y_v(x_j, t) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{U}_v e^{i(\omega t - kx_j + \phi)} \right\}. \quad (20)$$

В частотной области ( $e^{i\omega t}$ ) введем суммарные комплексные жесткости:

$$\alpha_{h,j}(\omega) = k_{h,j} + i\omega c_{h,j}, \quad \alpha_{v,j}(\omega) = k_{v,j} + i\omega c_{v,j}, \quad \Sigma_h(\omega) = \sum_{j=1}^N \alpha_{h,j}(\omega), \quad \Sigma_v(\omega) = \sum_{j=1}^N \alpha_{v,j}(\omega). \quad (21)$$

Приведенное воздействие основания:

$$\bar{Y}_h(\omega, k) = \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{h,j}(\omega) \hat{U}_h e^{-ikx_j}}{\Sigma_h(\omega)}, \quad \bar{Y}_v(\omega, k) = \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{v,j}(\omega) \hat{U}_v e^{-ikx_j + i\phi}}{\Sigma_v(\omega)}. \quad (22)$$

Будем говорить, что сейсмоизоляция защищает от поверхностных сейсмических волн в строгом (универсальном) смысле, если существует число  $M < 1$ , такое что для всех  $\omega > 0$  и  $k > 0$  выполняются одновременные неравенства:

$$\left| \frac{\hat{X}(\omega, k)}{\bar{Y}_h(\omega, k)} \right| \leq M; \quad \left| \frac{\hat{Z}(\omega, k)}{\bar{Y}_v(\omega, k)} \right| \leq M, \quad (23)$$

где  $\hat{X}$  и  $\hat{Z}$  – Фурье-образы  $X$  и  $Z$  соответственно. То есть абсолютное движение системы (а значит, и инерционные усилия) строго ограничены долей от воздействия для всего спектра поверхностных сейсмических волн. Далее будет доказано, что для пассивных сейсмоизоляторов  $M < 1$  *не существует*.

Пусть собственная круговая частота первой изгибной формы колебаний фиксированного основания  $\omega_s$  намного больше частоты сейсмоизолятора  $\omega_b$ . Тогда для  $\omega \lesssim O(\omega_b)$  (лежит в диапазоне порядка частоты сейсмоизолятора, но несущественно выше ее) модальный вклад относительных перемещений системы масштабно мал  $O\left((\omega/\omega_s)^2\right)$ . Следовательно, в этом диапазоне корректно рассматривать систему как сосредоточенную массу  $m$  на «этажерке» из  $N$  сейсмоизоляторов, поскольку стандартное редуцирование упругой системы методом собственных форм [20] дает амплитуду  $k$ -го модального отклика  $\propto \frac{1}{\left| -\omega^2 + \omega_k^2 + i2\zeta_k \omega \omega_k \right|}$ .

Для  $\omega \ll \omega_s = \omega_2$  вклад форм  $k \geq 2$  подавляется как  $O\left((\omega/\omega_s)^2\right)$ .

**Теорема об асимптотике сейсмоизоляции при малых  $\omega$ .** Рассмотрим горизонтальное движение системы. Для пассивной системы «масса  $m$  +  $N$  сейсмоизоляторов» уравнение в частотной области:

$$\left( -m\omega^2 + \Sigma_h(\omega) \right) \hat{X}(\omega, k) = \sum_{j=1}^N \alpha_{h,j}(\omega) \hat{U}_h e^{-ikx_j}. \quad (24)$$

Тогда справедливо следующее:

$$\frac{\hat{X}(\omega, k)}{\bar{Y}_h(\omega, k)} = \frac{\Sigma_h(\omega)}{\Sigma_h(\omega) - m\omega^2} = \frac{1}{1 - \frac{m\omega^2}{\Sigma_h(\omega)}}. \quad (25)$$

Отсюда следует, что:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} = 1, \quad \frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} = 1 + \frac{m}{\sum_{j=1}^N k_{h,j}} \omega^2 + O(\omega^3), \quad (26)$$

т. е. для малых, но ненулевых  $\omega$  модуль передаточной функции строго больше 1 на величину  $O(\omega^2)$ .

В квазистатическом пределе система не может двигаться меньше, чем среднее перемещение грунта под ней, поскольку она повторяет его (предел стремиться к 1), а при конечной  $\omega$  наблюдается даже небольшое усиление. Это сразу исключает существование единого  $M < 1$  для всех  $\omega$  и  $k$ .

Доказательство строится при устремлении  $\omega \rightarrow 0$  в отношении (25), где  $\Sigma_h(\omega) = \sum k_{h,j} + O(\omega)$ . Разложение в ряд Тейлора дает следующее:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots, \quad z = \frac{m\omega^2}{\Sigma_h(\omega)}. \quad (27)$$

Сохраняя нетривиальные члены до  $O(\omega^2)$ , получим:

$$\frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} = 1 + \frac{m}{\sum k_{h,j}} \omega^2 + O(\omega^3), \quad (28)$$

что подтверждает предел при  $\omega \rightarrow 0$ , равный 1.

*Следствие 1:* существование неизолированных низкочастотных компонент. Для любой пассивной конфигурации сейсмоизоляции и любого  $k$  существуют достаточно малые  $\omega < 0$ , при которых

$$\left| \frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} \right| > 1, \quad (29)$$

что означает отсутствие универсального  $M < 1$ .

**Теорема о неустранимом пике в окрестности собственной частоты сейсмоизолятора.** Пусть все сейсмоизоляторы одинаковы:  $k_{h,j} = k_h$ ,  $c_{h,j} = c_h$ . Тогда передаточная функция абсолютных перемещений к приведенному основанию:

$$\left| \frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} \right|^2 = \frac{k_h^2 + (\omega c_h)^2}{(k_h - m\omega^2)^2 + (\omega c_h)^2}. \quad (30)$$

Обозначим  $\omega_b = \sqrt{k_h/m}$ ,  $\zeta = \frac{c_h}{2\sqrt{k_h m}}$ . На частоте  $\omega = \omega_b$ :

$$\left| \frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} \right|_{\omega=\omega_b}^2 = 1 + \frac{k_h^2}{(\omega_b c_h)^2} = 1 + \frac{1}{4\zeta^2} > 1. \quad (31)$$

Следовательно, для любого конечного  $\zeta$  выполняется условие:

$$\sup_{\omega > 0} \left| \frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} \right| \geq \sqrt{1 + \frac{1}{4\zeta^2}} > 1. \quad (32)$$

Каким бы ни был пассивный сейсмоизолятор, всегда существует окрестность собственной частоты, где абсолютное движение системы усилено по сравнению с неизолированной системой. Поверхностные волны с частотным содержанием в этой зоне не могут быть подавлены.

Доказательство строится исходя из прямой подстановки в (24) и (25) для передаточной функции  $N$  одинаковых  $\alpha_{h,j}$ . Подстановка  $\omega = \omega_b$  дает  $(k_h - m\omega^2) = 0$ , отсюда знаменатель  $(\omega c_h)^2$ , а числитель  $k_h^2 + (\omega c_h)^2$ , что и приводит к выражению (31).

**Теорема о неизоллируемой вертикальной составляющей рэлеевской волны.** Для вертикальной составляющей рэлеевской волны уравнение в частотной области аналогично (24) с заменой горизонтальных компонент на вертикальные:

$$(-m\omega^2 + \Sigma_v(\omega))\hat{Z}(\omega, k) = \sum_{j=1}^N \alpha_{v,j}(\omega)\hat{U}_v e^{-ikx_j + i\varphi}, \quad \frac{\hat{Z}}{\bar{Y}_v} = \frac{\Sigma_v(\omega)}{\Sigma_v(\omega) - m\omega^2}. \quad (33)$$

Пусть  $\omega_v = \sqrt{\sum k_{v,j}/m}$  – вертикальная собственная частота изолированного жесткого тела. Для сейсмоизоляторов  $\omega_v$  обычно выше частот поверхностных волн [21]. Тогда для всех  $\omega$  из интересующего диапазона (до 3–5 Гц):

$$\frac{\hat{Z}}{\bar{Y}_v} = 1 + \frac{m}{\sum k_{v,j}}\omega^2 + O(\omega^3) = 1 + O\left(\frac{\omega^2}{\omega_v^2}\right), \quad (34)$$

т. е.  $|\hat{Z}/\bar{Y}_v| \approx 1$ .

Стандартная сейсмоизоляция более податливая в горизонтальном направлении, чем в вертикальном и поэтому почти полностью передает вертикальную компоненту рэлеевских волн (универсальное подавление отсутствует).

Доказательство строится аналогично теореме об асимптотике сейсмоизоляции при малых  $\omega$ , рассматривая, что  $\sum k_{v,j}$  велико, а  $\omega \ll \omega_v$ .

*Следствие 2:* даже идеальная сейсмоизоляция в горизонтальном направлении не может «защитить» от вертикальных составляющих поверхностных волн. Потребуется специальная, более податливая в вертикальном направлении, сейсмоизоляция (редко применяемая и технологически сложна), и даже подобный подход подпадает под ограничения вышеуказанных теорем.

**Теорема о геометрическом нижнем пределе относительных перемещений при многоточечном возбуждении.** Пусть масса опирается на  $N$  сейсмоизолированных опор. В квазистатическом пределе ( $\omega \rightarrow 0$ ) абсолютное движение системы стремится к среднему  $\bar{Y}_h$ . Относительные перемещения сейсмоизоляторов:

$$\delta_j(\omega, k) = \hat{X}(\omega, k) - \hat{Y}_{h,j}(\omega) = \hat{X} - \hat{U}_h e^{-ikx_j}. \quad (35)$$

Тогда существует нижняя оценка, не зависящая от параметров сейсмоизоляторов:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \max_{1 \leq j \leq N} |\delta_j| \geq \frac{1}{2} \Delta(k), \quad (36)$$

где  $\Delta(k) = \max_{j,l} |\hat{U}_h e^{-ikx_j} - \hat{U}_h e^{-ikx_l}|$ . В частности, для двух крайних опор на расстоянии  $L = \max_{j,l} |x_j - x_l|$ :

$$\Delta(k) = 2|\hat{U}_h| \left| \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \right| \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} \max_j |\delta_j| \geq |\hat{U}_h| \left| \sin\left(\frac{kL}{2}\right) \right|. \quad (37)$$

При  $kL \ll 1$  предел сводится к  $\max_j |\delta_j| \gtrsim |\hat{U}_h| \frac{kL}{2}$ . Суть данной теоремы сводится к тому, что поверхностные сейсмические волны неодинаково сдвигают грунт под разными опорами (из-за конечного  $k$ ). Эти относительные перемещения невозможно занулить никакими пассивными горизонтальными сейсмоизоляторами: даже в пределе  $\omega \rightarrow 0$  остается неизбежный геометрический вклад порядка  $\frac{kL}{2}$ .

Доказательство данной теоремы заключается в том, для любой конфигурации сейсмоопоры  $x_j$  и любой выбранной комплексной амплитуды движения  $X$  выполняется:

$$\max_j |X - Y_j| \geq \frac{1}{2} \max_{j,l} |Y_j - Y_l|. \quad (38)$$

Это прямое следствие неравенства треугольника и представляет собой классический факт о радиусе наименьшей окружности [22], покрывающей множество точек  $\{Y_j\}$  на комплексной плоскости. При поверхностной волне  $Y_j = \hat{U}_h e^{-ikx_j}$  получаем:

$$\max_j |\delta_j| \geq |\hat{U}_h| \max_{j,l} \left| \sin \left( \frac{k(x_j - x_l)}{2} \right) \right| \geq |\hat{U}_h| \left| \sin \left( \frac{kL}{2} \right) \right|. \quad (39)$$

Нижняя оценка зависит только от геометрии  $\{x_j\}$  и фазового сдвига  $k(x_j - x_l)$ , т. е. имеет только геометрический характер и не может быть устранена подбором параметром сейсмоизоляции.

*Следствие 3:* даже если сейсмоизоляция способна идеально сглаживать высокочастотные колебания и стремится подстроить движение системы под «среднее» движение основания, полностью подавить колебания нельзя. Причина в том, что основание под разными опорами колеблется неодинаково: в одних точках волна приходит раньше, в других – позже. В результате для системы это выглядит как несогласованное (несинхронное) возбуждение: каждая опора в разные моменты времени получает разные перемещения (в основном это справедливо для большепролетных сооружений). Именно эта несогласованность и приводит к тому, что в сейсмоизоляторах всегда остаются остаточные перемещения, поскольку оно определяется не величиной самих колебаний, а разностью сигналов между опорами.

Таким образом, обобщая приведенные выше теоретические выкладки об эффективности сейсмоизоляции при действии поверхностных сейсмических волн, можно сформулировать итоговую **теорему об обобщенной невозможности универсальной защиты**. Рассмотрим класс всех поверхностных волн  $\mathcal{W} = \{(\omega, k) : \omega > 0, k > 0\}$ :

$$\sup_{(\omega, k) \in \mathcal{W}} \max \left\{ \left| \frac{\hat{X}(\omega, k)}{\hat{Y}_h(\omega, k)} \right|, \left| \frac{\hat{Z}(\omega, k)}{\hat{Y}_v(\omega, k)} \right| \right\} \geq 1, \quad (40)$$

т. е. не существует  $M < 1$ , удовлетворяющего определению универсальной сейсмической защиты от поверхностных волн.

Доказательство строится на основе обобщенного рассмотрения всех предыдущих теорем о сейсмоизоляции:

– из теоремы об асимптотике сейсмоизоляции при малых  $\omega$  следует, что для любого

$\forall k$  выполняется условие  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \left| \frac{\hat{X}}{\hat{Y}_h} \right| = 1$ , следовательно,  $\sup_{\omega > 0} \left| \frac{\hat{X}}{\hat{Y}_h} \right| \geq 1$ ;

– из теоремы о неустранимом пике в окрестности собственной частоты сейсмоизолятора следует, что  $\sup_{\omega>0} \left| \frac{\hat{X}}{\bar{Y}_h} \right| \geq \sqrt{1 + \frac{1}{4\zeta^2}} > 1$ ;

– из теоремы о неизоллируемой вертикальной составляющей рэлеевской волны следует, что  $\left| \frac{\hat{Z}}{\bar{Y}_v} \right| \approx 1$  для широкого диапазона  $\omega$ .

Любое  $M < 1$  противоречит хотя бы одному из вышеуказанных утверждений.

**Выводы.** В работе было проведено теоретическое исследование ограничений специальной пассивной сейсмической защиты зданий и сооружений в виде сейсмоизоляции (сейсмоопор) при воздействии поверхностных волн. На основе проведенного исследования можно сформулировать следующие выводы:

1. Доказано, что в пределе малых, но ненулевых частот абсолютное движение системы стремится к среднему перемещению основания под опорами, причем передаточная функция по горизонтали становится строго больше 1 на величину порядка  $O(\omega^2)$ . Следовательно, не существует константы  $M < 1$ , обеспечивающей одновременно  $\left| \hat{X} \right| \leq M \left| \hat{Y}_h \right|$  и  $\left| \hat{Z} \right| \leq M \left| \hat{Y}_v \right|$  для всех  $\omega, k$ . Квазистатические и близко к квазистатическим составляющим поверхностные волны не могут быть подавлены пассивной сейсмоизоляцией в строгом (универсальном) смысле;

2. Неустраняемая область усиления отклика системы вблизи собственной частоты сейсмоизолятора. Для системы «масса  $m + N$  сейсмоизоляторов» получено аналитическое выражение передаточной функции, показывающее, что в окрестности частоты  $\omega_b$  неизбежно возникает усиление абсолютных перемещений по горизонтали; при любом конечном демпфировании  $\zeta$  сохраняется нижняя оценка усиления (передаточная функция  $> 1$ ). Если спектр поверхностной волны содержит энергию вблизи  $\omega_b$ , сейсмоизоляция способна ухудшить отклик системы по сравнению с системой без сейсмозащиты. Этот результат носит универсальный характер для пассивной сейсмозащиты;

3. Вертикальная составляющая рэлеевской волны практически не фильтруется стандартной сейсмоизоляцией. При типичных соотношениях жесткостей (вертикальная жесткость опор  $\gg$  горизонтальной) вертикальный отклик системы по модулю практически совпадает с вертикальным перемещением основания в широком диапазоне частот ( $\left| \frac{\hat{Z}}{\bar{Y}_v} \right| \approx 1$ ). Это означает, что традиционная (горизонтально-податливая) сейсмоопора не обеспечивает защиты от вертикальной компоненты поверхностных волн и требует специальных технических решений (например, сейсдобарьеров), если вертикальная компонента волны значительна;

4. Из-за конечного волнового числа  $k$  фазы колебаний под опорами различны, что порождает неустранимые остаточные относительные перемещения в опорах даже в квазистатическом пределе. Выведена нижняя оценка, независимая от параметров опор. Для двух крайних опор, находящихся на расстоянии  $L$ , получено  $\Delta(k) = 2 \left| \hat{U}_h \right| \left| \sin \left( \frac{kL}{2} \right) \right|$ , означающее, что даже

настроенная сейсмоизоляция не способна привести все опоры к одинаковому перемещению. Это предоставляет прямой инженерный критерий для расчета сейсмических швов и настройки ограничителей перемещений с учетом  $kL$ ;

5. Обобщенная теорема о невозможности универсальной пассивной защиты. Объединяя низкочастотную асимптотику, пик вблизи  $\omega_b$  и неэффективность сейсмозащиты по вертикали, получено строгое утверждение: для класса всех поверхностных волн (по  $\omega, k$ ) не существует  $M < 1$ , ограничивающего абсолютные перемещения системы по горизонтали и вертикали долей от базовых перемещений основания.

Из изложенного выше следуют практические рекомендации:

1. Пассивная сейсмоизоляция целесообразна при сценариях с узкополосным и устойчивым (неизменчивым) спектром частот, удаленных от  $\omega_b$ ; при широкополосных, импульсных и когерентных низкочастотных воздействиях опираться на неё как на единственный эшелон сейсмозащиты нельзя;

2. При ожидаемой заметной вертикальной компоненте поверхностных волн необходимы либо сейсмоизоляция с пониженной вертикальной жесткостью и направленным демпфированием, либо вынесение функции подавления вертикальных компонент на «территориальный» эшелон защиты (сейсмобарьеры).

**Сведения о финансировании:** работа выполнена при поддержке гранта РФФ № 24-49-02002.

#### Библиографический список

1. Белаш Т. А., Бубис А. А., Смирнова Л. Н., Звездов А. И. О реализации систем сейсмоизоляции в сейсмостойком строительстве зданий и сооружений в Российской Федерации // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2024. № 2. С. 8–19. DOI: 10.37153/2618-9283-2024-2-8-19.
2. Апсаметов М. Ч., Айдаралиев А. Е., Шекербек У. Т., Курманбек уулу Н. Сейсмозащита и сейсмоизоляция зданий и сооружений // Constructions. 2024. № 1. С. 31–48.
3. Гизятуллин И. Р., Фаттахова А. И., Петросян И. А., Бутикова Т. Е. Практическая эффективность систем сейсмоизоляции зданий: эмпирические данные и уроки разрушительных землетрясений XXI века // Вестник НИЦ «Строительство». 2025. Т. 45, № 2. С. 20–43.
4. Мондрус В. Л., Сизов Д. К., Хуэн Л. Т. Т. Снижение уровня сейсмического воздействия при движении грунта основания с использованием сейсмоизоляторов // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2011. № 1. С. 48–49.
5. Patel D., Mourya V. K., Pandey G., Kumar R. Advancements in base isolation for seismic mitigation: Perspectives on elastomeric and lead rubber bearings // Res. Eng. Struct. Mater. 2024. Pp. 1–33. <http://dx.doi.org/10.17515/resm2024.15ma0927rv>.
6. Avinash G. C., Lingeshwaran N. Review on base and inter storey seismic isolation systems for high rise buildings // Res. Eng. Struct. Mater. 2025. Vol. 11, no. 1. Pp. 231–271. <http://dx.doi.org/10.17515/resm2024.156st0117rv>.
7. Ghafar W. A., Zhong T., Lai Z., Pingle Z., Yang Y., Hasan M. M. Seismic isolation for existing structures: a review of retrofitting techniques, case studies, and trends // Discover Civil Engineering. 2025. Vol. 2, no. 1. Article number. 137. <https://doi.org/10.1007/s44290-025-00300-1>.
8. Sapountzakis E., Florakis G., Kapasakalis K. Design and performance assessment of base isolated structures supplemented with vibration control systems // Buildings. 2024. Vol. 14, no. 4. PaperID 955. <https://doi.org/10.3390/buildings14040955>.
9. Lu L. Y., Shih M. H., Tzeng S. W., Chien C. C. Experiment of a sliding isolated structure subjected to near-fault ground motion // Proceedings of the 7th pacific conference on earthquake engineering. 2003. Vol. 13. PaperID 121.
10. Ramallo J. C., Johnson E. A., Spencer Jr B. F. “Smart” base isolation systems // Journal of Engineering Mechanics. 2002. Vol. 128, no. 10. Pp. 1088–1099. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:10\(1088\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:10(1088)).
11. Белаш Т. А., Бубис А. А., Игнатов К. Э. О перспективах применения сейсмоизоляции в сейсмостойком строительстве на территории Российской Федерации // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2023. № 5. Pp. 106–114. DOI: 10.37153/2618-9283-2023-5-106-114.
12. Смирнов В. И. Сейсмоизоляция – современная антисейсмическая защита зданий в России // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2013. № 4. Pp. 41–54.

13. Тарасов В. А., Барановский М. Ю., Редькин А. В., Соколов Е. А., Степанов А. С. Системы сейсмоизоляции // *Строительство уникальных зданий и сооружений*. 2016. № 4 (43). С. 117–140.
14. Yang Y., Li T., Dai K., Xu J., Ge Q., Ikago K. Vertical stiffness reduction of rubber bearings under lateral displacement considering different shape factors // *Construction and Building Materials*. 2024. Vol. 426. PaperID. 136168. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.136168>.
15. Ates S., Bayraktar A., Dumanoglu A. A. The effect of spatially varying earthquake ground motions on the stochastic response of bridges isolated with friction pendulum systems // *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2006. Vol. 26. Pp. 31–44. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2005.08.002>.
16. He W., Qiao J., Xu H., Huang J. Experiment investigation and dynamic responses of three-dimensional isolation system with high-static-low-dynamic stiffness // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2023. Vol. 165. PaperID. 107679. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2022.107679>.
17. Kuznetsov S. V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoustical Physics*. 2011. Vol. 57, no. 3. Pp. 420–426. <https://doi.org/10.1134/S1063771011030109>.
18. Митрошин В. А. Сейсмическая защита зданий и сооружений с применением метаматериалов: текущее состояние и перспективы развития // *Архитектура, строительство, транспорт*. 2024. № 2. С. 67–83.
19. Daradkeh A. M., Jalali H. H. Large-scale engineered meta-barriers for attenuation of seismic surface waves // *Structures*. 2024. Vol. 64. PaperID. 106542. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106542>.
20. Банах Л. Я. Методы декомпозиции и редукции динамических моделей при колебаниях механических систем // *Вестник научно-технического развития*. 2012. № 6. С. 3–8.
21. Дубянский А. И., Зайцев С. В., Силкин К. Ю. Поверхностные волны сейсмических событий в условиях Воронежского кристаллического массива // *Вестник Воронежского государственного университета*. Серия: Геология. 2005. № 1. С. 221–225.
22. Гибадуллин А. А. Минимальная охватывающая окружность // *Научные исследования*. 2015. № 1 С. 6–7.

#### Reference

1. Belash T. A., Bubis A. A., Smirnova L. N., Zvezdov A. I. O realizatsii sistem seysmoizolyatsii v seysmostoykom stroitel'stve zdaniy i sooruzheniy v Rossiyskoy Federatsii [On the implementation of seismic isolation systems in earthquake-resistant construction of buildings and structures in the Russian Federation] // *Seysmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij* [Seismic-Resistant Construction. Safety of Structures]. 2024. No. 2. Pp. 8–19. DOI 10.37153/2618-9283-2024-2-8-19 (In Russ.).
2. Apsemetov M. Ch., Aydaraliev A. E., Shekerbekov U. T., Kurmanbek uulu N. Seysmouzashchita i seysmoizolyatsiya zdaniy i sooruzheniy [Seismic protection and seismic isolation of buildings and structures] // *Constructions*. 2024. No. 1. Pp. 31–48 (In Russ.).
3. Gizyatullin I. R., Fattakhova A. I., Petrosyan I. A., Butikova T. E. Prakticheskaya effektivnost' sistem seysmoizolyatsii zdaniy: empiricheskie dannye i uroki razrushitel'nykh zemletryaseniy XXI veka [Practical efficiency of building seismic isolation systems: empirical data and lessons from destructive earthquakes of the 21st century] // *Vestnik NIC «Stroitel'stvo»* [Bulletin of the Research Center “Construction”]. 2025. Vol. 45, no. 2. Pp. 20–43 (In Russ.).
4. Mondrus V. L., Sizov D. K., Khuen L. T. T. Snizhenie urovnya seysmicheskogo vozdeystviya pri dvizhenii grunta osnovaniya s ispol'zovaniem seysmoizolyatorov [Reduction of seismic impact during ground motion using seismic isolators] // *Stroitel'nye materialy, oborudovanie, tehnologii XXI veka* [Construction Materials, Equipment, and Technologies of the 21st Century]. 2011. No. 1. Pp. 48–49 (In Russ.).

5. Patel D., Mourya V. K., Pandey G., Kumar R. Advancements in base isolation for seismic mitigation: Perspectives on elastomeric and lead rubber bearings // *Res. Eng. Struct. Mater.* 2024. Pp. 1–33. <http://dx.doi.org/10.17515/resm2024.15ma0927rv>.
6. Avinash G.C., Lingeshwaran N. Review on base and inter storey seismic isolation systems for high rise buildings // *Res. Eng. Struct. Mater.* 2025. Vol. 11, no. 1. Pp. 231–271. <http://dx.doi.org/10.17515/resm2024.156st0117rv>.
7. Ghafar W. A., Zhong T., Lai Z., Pingle Z., Yang Y., Hasan M. M. Seismic isolation for existing structures: a review of retrofitting techniques, case studies, and trends // *Discover Civil Engineering.* 2025. Vol. 2, no. 1. P. 137. <https://doi.org/10.1007/s44290-025-00300-1>.
8. Sapountzakis E., Florakis G., Kapasakalis K. Design and performance assessment of base isolated structures supplemented with vibration control systems // *Buildings.* 2024. Vol. 14, no. 4. P. 955. <https://doi.org/10.3390/buildings14040955>.
9. Lu L. Y., Shih M. H., Tzeng S. W., Chien C. C. Experiment of a sliding isolated structure subjected to near-fault ground motion // *Proceedings of the 7th pacific conference on earthquake engineering.* 2003. Vol. 13. P.121.
10. Ramallo J. C., Johnson E. A., Spencer Jr B. F. “Smart” base isolation systems // *Journal of Engineering Mechanics.* 2002. Vol. 128, no. 10. Pp. 1088–1099. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:10\(1088\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:10(1088)).
11. Belash T. A., Bubis A. A., Ignatov K. E. O perspektivakh primeneniya seysmoizolyatsii v seysmostoykom stroitel'stve na territorii Rossiyskoy Federatsii [On the prospects for the use of seismic isolation in earthquake-resistant construction in the Russian Federation] // *Seysmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij* [Seismic-Resistant Construction. Safety of Structures]. 2023. No. 5. Pp. 106–114. DOI 10.37153/2618-9283-2023-5-106-114 (In Russ.).
12. Smirnov V. I. Seysmoizolyatsiya – sovremennaya antiseysmicheskaya zashchita zdaniy v Rossii [Seismic isolation – a modern earthquake protection method for buildings in Russia] // *Seysmostojkoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzhenij* [Seismic-Resistant Construction. Safety of Structures]. 2013. No. 4. Pp. 41–54 (In Russ.).
13. Tarasov V. A., Baranovskiy M. Yu., Redkin A. V., Sokolov E. A., Stepanov A. S. Sistemy seysmoizolyatsii [Seismic isolation systems] // *Stroitel'stvo unikal'nyh zdaniy i sooruzhenij* [Construction of Unique Buildings and Structures]. 2016. No. 4 (43). Pp. 117–140 (In Russ.).
14. Yang Y., Li T., Dai K., Xu J., Ge Q., Ikago K. Vertical stiffness reduction of rubber bearings under lateral displacement considering different shape factors // *Construction and Building Materials.* 2024. Vol. 426. P. 136168. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2024.136168>.
15. Ates S., Bayraktar A., Dumanoglu A. A. The effect of spatially varying earthquake ground motions on the stochastic response of bridges isolated with friction pendulum systems // *Soil Dyn Earthq Eng.* 2006. Vol. 26. Pp. 31–44. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2005.08.002>.
16. He W., Qiao J., Xu H., Huang J. Experiment investigation and dynamic responses of three-dimensional isolation system with high-static-low-dynamic stiffness // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* 2023. Vol. 165. P. 107679. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2022.107679>.
17. Kuznetsov S. V. Seismic waves and seismic barriers // *Acoustical Physics.* 2011. Vol. 57, no. 3. Pp. 420–426. <https://doi.org/10.1134/S1063771011030109>.
18. Mitroshin V. A. Seysmicheskaya zashchita zdaniy i sooruzheniy s primeneniem metamaterialov: tekushchee sostoyanie i perspektivy razvitiya [Seismic protection of buildings and structures using metamaterials: current state and development prospects] // *Arhitektura, stroitel'stvo, transport* [Architecture, Construction, Transport]. 2024. No. 2. Pp. 67–83 (In Russ.).
19. Daradkeh A. M., Jalali H. H. Large-scale engineered meta-barriers for attenuation of seismic surface waves // *Structures.* Elsevier. 2024. Vol. 64. P. 106542. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106542>.
20. Banakh L. Ya Metody dekompozitsii i reduktsii dinamicheskikh modeley pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem [Decomposition and reduction methods for dynamic models of

mechanical system vibrations] // Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitija [Bulletin of Scientific and Technical Development]. 2012. No. 6. Pp. 3–8 (In Russ.).

21. DUBYANSKIY A. I., ZAITSEV S. V., SILKIN K. YU Poverkhnostnye volny seismicheskikh sobytij v usloviyakh Voronezhskogo kristallicheskogo massiva [Surface waves of seismic events in the conditions of the Voronezh crystalline massif] // Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Geologiya [Proceedings of Voronezh State University. Series: Geology]. 2005. No. 1. Pp. 221–225 (In Russ.).

22. GIBADULLIN A. A. Minimal'naya okhvatyvayushchaya okruzhnost' [Minimum enclosing circle] // Nauchnye issledovaniya [Scientific Research]. 2015. No. 1. Pp. 6–7 (In Russ.).

**THEORETICAL STUDY OF THE LIMITATIONS  
OF SPECIAL PASSIVE SEISMIC PROTECTION OF BUILDINGS AND STRUCTURES  
UNDER THE ACTION OF SURFACE WAVES.  
PART 2: SEISMIC ISOLATION**

S. G. Saiyan <sup>1</sup>

National Research Moscow State University of Civil Engineering <sup>1</sup>  
Russia, Moscow

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences <sup>1</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Research Associate at the A.B. Zolotov Research Center, PhD Student at the Department of Structural and Theoretical Mechanics, e-mail: Berformert@gmail.com

---

The paper presents a theoretical analysis of the ultimate efficiency of specialized passive seismic protection of buildings using seismic isolation in the form of seismic bearings under surface-wave excitation. Based on a “mass  $m + N$  isolators” model with multi-point excitation by harmonic waves having finite wavenumbers  $k$  and elliptical polarization, horizontal and vertical responses are examined. In the frequency domain, transfer functions of absolute displacements are obtained, leading to four key results: (i) at low but nonzero frequencies  $\omega$ , the absolute displacement tends to the mean base motion; in the horizontal direction the magnitude of the transfer function exceeds 1 by  $O(\omega^3)$ , which rules out universal suppression; (ii) in the vicinity of the isolator’s natural frequency  $\omega_b$  an irreducible response peak arises that persists for any finite damping; (iii) the vertical component of the Rayleigh wave is scarcely filtered by standard isolators due to their high vertical stiffness; (iv) under multi-point excitation, phase mismatch beneath the supports produces a geometric lower bound for relative displacements proportional to  $\sin(kL/2)$  (for the edge supports separated by distance  $L$ ). A generalized theorem shows that for the class of all surface waves there is no constant  $M < 1$  that simultaneously bounds the horizontal and vertical absolute displacements. Practical recommendations: employ passive seismic isolation for narrowband, stable spectra sufficiently removed from  $\omega_b$ ; account for the parameter  $kL$  when specifying the width of seismic joints and tuning displacement stops; suppress surface components of seismic input using seismic barriers.

**Keywords:** seismic resistance, seismic protection, seismic isolation, surface waves, Rayleigh waves.

## ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРАПЕЦИЕВИДНОЙ ФЕРМЫ

Dai Qiao <sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет «МЭИ» <sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Аспирант кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(919)990-97-59, e-mail: 228441531@qq.com

Рассматривается схема плоской фермы с раскосной решеткой. Приводится алгоритм вывода приближенного аналитического решения задачи о собственных колебаниях фермы. Используется упрощенный вариант метода Донкерлея. Отмечается высокая точность предложенной формулы. Анализируется спектр собственных частот семейства регулярных ферм различного порядка. Отмечаются некоторые особенности картины распределения частот. Численно находятся спектральные изолинии и спектральные константы задачи.

**Ключевые слова:** плоская ферма, собственная частота, метод Донкерлея, индукция, «Marple», приближенный метод, формула Максвелла – Мора, спектральные изолинии, спектральные константы.

**Введение.** На практике для расчета собственных частот колебаний инженерных сооружений и конструктивных элементов широко применяются численные методы, в частности метод конечных элементов [1–3]. При динамическом анализе особый интерес представляет первая частота колебаний статически определимых систем. Для получения аналитических зависимостей частоты от распределения масс по узлам, геометрических параметров, свойств материала и количества панелей традиционно используются методы Донкерлея (дающего нижнюю оценку) и Рэля (обеспечивающего верхнюю оценку) [4–7]. Это значительно расширяет область применения аналитических формул. Исследования первых частот собственных колебаний регулярных плоских и пространственных статически определимых ферм представлены в работах [8–11]. В таких задачах, как правило, применяется подход парциальных частот Донкерлея, который дает более простое решение по сравнению с энергетическим методом Рэля [11–13]. Однако точность этих методов варьируется в пределах 8–40 %. В работе [14] для решения данной задачи используется метод динамической жесткости, а в [15] предлагается новый подход к выводу аналитических выражений для первой частоты колебаний регулярных систем с множеством степеней свободы.

**Конструкция фермы.** Симметричная статически определимая плоская трапециевидная ферма имеет треугольную решетку и две опоры. Левая подвижная опора моделируется одним вертикальным стержнем, правая неподвижная – двумя стержнями. Ферма состоит из  $n$  панелей по верхнему поясу длиной  $4a$  каждая. Высота фермы равна  $h$ . Масса фермы условно распределена по узлам равными массами  $m$  (рис. 1).

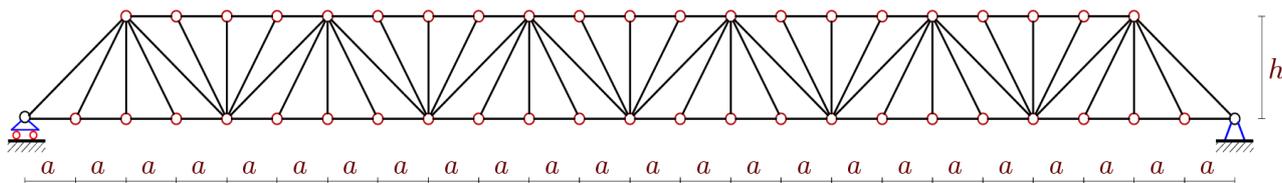


Рис. 1. Схема фермы,  $n = 5$

Число степеней свободы системы равно числу узлов конструкции:  $K = 8n + 9$ . В ферме содержится  $\nu = 16n + 12$  стержней, включая и три опорных стержня.

**Расчет усилий в стержнях.** Для определения жесткости статически определимой системы необходимо рассчитать усилия в стержнях из условий равновесия узлов. Матрица системы уравнений равновесия формируется на основе направляющих косинусов усилий, вычисляемых по геометрическим параметрам системы: схеме соединения стержней в узлах и координатам узлов. При этом осуществляется нумерация всех узлов и стержневых элементов ферменной конструкции (рис. 2). Фрагмент программного кода, реализующий ввод координат в систему «Maple», представлен следующим образом:

```
L0:=16*n*a+7*a;
x[1]:=0:    y[1]:=0:
x[2]:=a:    y[2]:=0:
for i to 4*n+1 do x[i+2]:=a*i+a: y[i+2]:=0: end:
x[4*n+4]:=(4*n+3)*a:    y[4*n+4]:=0:
x[4*n+5]:=(4*n+4)*a: y[4*n+5]:=0:
for i to 4*n+1 do x[i+4*n+5]:=i*a+a: y[i+4*n+5]:=h: end:
x[nu-2]:=0:    y[nu-2]:=-h:
x[nu-1]:=x[4*n+5]+a: y[nu-1]:=0:
x[nu]:=x[4*n+5]: y[nu]:=-h:
```

Здесь  $nu$  – число стержней. Уравнения равновесия узлов – это система уравнений в векторном виде:  $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$ , где  $\mathbf{R}$  – вектор узловых нагрузок;  $\mathbf{G}$  – матрица направляющих косинусов размером  $\nu \times \nu$ ;  $\mathbf{S}$  – вектор неизвестных усилий в стержнях. В число неизвестных включаются и три опорные реакции. Элементы матрицы  $\mathbf{G}$  рассчитываются по координатам концов стержней, соединенных в соответствующих узлах.

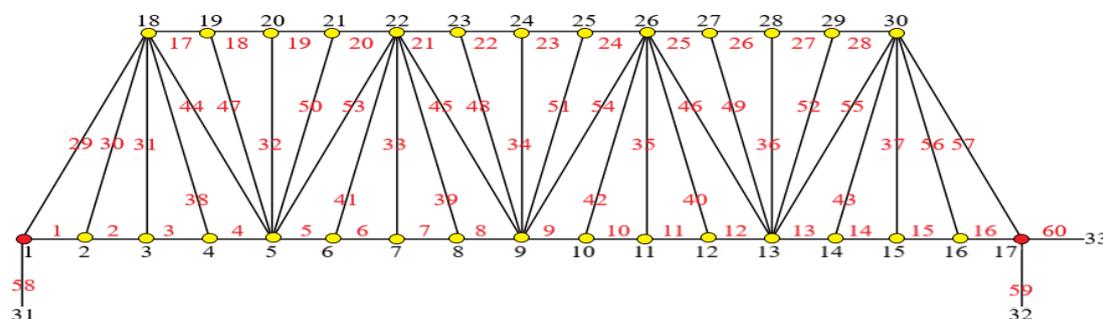


Рис. 2. Номера узлов и стержней,  $n = 3$

**Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея.** Расчет первой собственной частоты  $\omega_D$  производится по приближенной формуле [9–13]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где  $\omega_p$  – частота колебаний одной массы  $m$  в узле с номером  $p$ , которая вычисляется из уравнения движения масс в узлах:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент  $D_p$  рассчитывается с помощью формулы Максвелла – Мора суммированием по всем усилиям в стержнях конструкции:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (3)$$

где  $S_{\alpha}^{(p)}$  – усилие в стержне  $\alpha$  при действии на узел  $p$  единичной вертикальной силы;  $l_{\alpha}$  – длина этого стержня. Жесткость  $EF$  стержней считается для всей фермы одинаковой. Из (3) следует формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Расчет сумм  $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF)$  для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (3216a^3 + 96c^3 + 166d^3 + 195h^3) / (16h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (34952a^3 + 360c^3 + 855d^3 + 697h^3) / (144h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (192416a^3 + 896c^3 + 2716d^3 + 1703h^3) / (576h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (726360a^3 + 1800c^3 + 6645d^3 + 3389h^3) / (1600h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (718608a^3 + 1056c^3 + 4598d^3 + 1977h^3) / (1200h^2 EF), \dots, \end{aligned}$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{4a^2 + h^2}$ . Таким образом, решение линейных однородных рекуррентных уравнений, полученных с помощью оператора `rgf_findrecur` в пакете `genfunc` для системы «Maple», дает требуемую формулу:

$$\Delta_n = \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{h^2 EF}.$$

Выводим полиномиальные коэффициенты по числу панелей:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2(2n + 1)(128n^4 + 576n^3 + 1072n^2 + 924n + 315)/(n+1)/45; \\ C_2 &= 4n + 2, \\ C_3 &= ((2n + 1)(16n^2 + 40n + 27))/12/(n+1); \\ C_4 &= (88n^3 + 228n^2 + 206n + 63)/12/(n+1)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно формула для определения оценки нижней границы первой частоты методом Донкерлея имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3)}}. \quad (6)$$

**Упрощенный вариант метода Донкерлея.** В работе [15] рассматривается вариант метода Донкерлея для получения аналитической зависимости первой частоты колебаний от числа панелей. В этом методе не требуется сложный этап аналитического преобразования суммирования парциальных частотных выражений по числу степеней свободы. Если это сложение не представляет трудностей при численном решении, то вычисление слагаемых в символической форме не очевидно и часто даже недостижимо. Метод [15] значительно упрощает процесс решения. Согласно этому методу, расчетная формула для первой частоты собственных колебаний узлов фермы имеет следующий вид:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \Delta_n^*, \quad (7)$$

где  $\delta^{\max}$  – наибольшее по всем узлам значение прогиба  $\delta_p$ ,  $p = 1, \dots, K$  от действия вертикальной единичной силы на один из узлов фермы. Расчет коэффициента  $\Delta_n^*$  для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= 7(48a^3 + 2d^3 + h^3) / (2h^2EF), \\ \Delta_2^* &= 11(152a^3 + 3d^3 + 3h^3) / (8h^2EF), \\ \Delta_3^* &= 5(352a^3 + 4d^3 + h^3) / (6h^2EF), \\ \Delta_4^* &= 19(680a^3 + 5d^3 + 3h^3) / (32h^2EF), \\ \Delta_5^* &= 23(1168a^3 + 6d^3 + h^3) / (50h^2EF), \dots \end{aligned}$$

С помощью операторов системы «Maple» методом индукции можно получить общее представление об элементах этой последовательности в виде:

$$\Delta_n^* = (4n + 3)(B_1a^3 + B_2c^3 + B_3d^3 + B_4h^3) / (h^2EF),$$

где коэффициенты проще, чем (5):

$$\begin{aligned} B_1 &= 4(n + 1)(2n^2 + 4n + 3) / 3, \quad B_2 = 0, \\ B_3 &= (n + 1) / 2, \quad B_4 = ((-1)^n + 2) / 2. \end{aligned}$$

В результате получается формула:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{6EF}{m(4n + 3)(16n^3 + 36n^2 + 32n + 6)a^3 + (18n + 59)c^3 + 3d^3 + (3(-1)^n + 6)h^3}}. \quad (8)$$

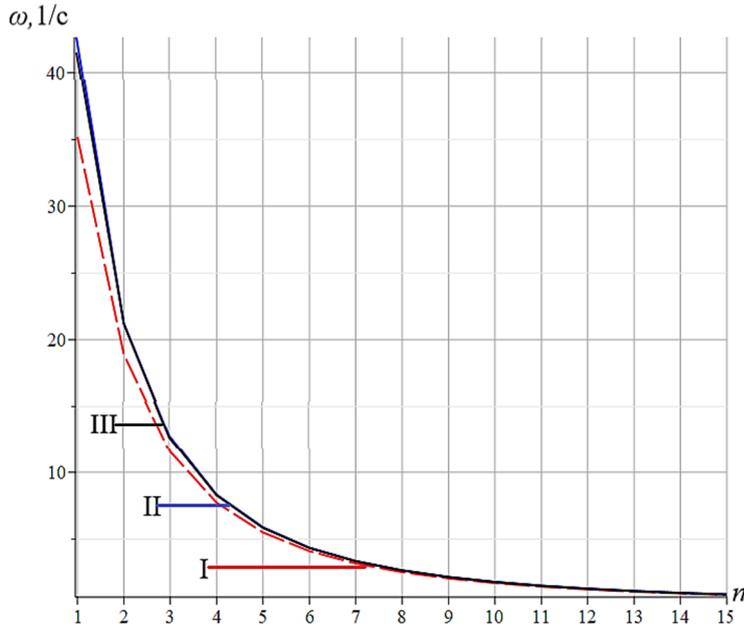
По сравнению с уравнением (6) и с коэффициентами (5) уравнение (8) значительно лаконичнее. На конкретном примере можно сравнить степень приближения полученных формул с численными методами, которые не были упрощены по Донкерлею.

**Численное решение.** Принимаются следующие размеры панели фермы:  $a = 3$  м,  $h = 4$  м. Материал стержней – сталь, модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа, площадь поперечного сечения стержней  $F = 4$  см<sup>2</sup>, в узлах расположены массы  $m = 100$  кг. На графике 3 кривые зависимости частот  $\omega_D$  и  $\omega_*$  от числа панелей по формулам (6) и (8) сопоставлены с первой частотой спектра  $\omega_1$ , полученной численно. С увеличением числа панелей все три решения сближаются, а частота уменьшается, стремясь асимптотически к нулю. Кривые II и III практически сливаются. Решение по методу Донкерлея (пунктир на рис. 3), как и ожидалось, ограничивает численное решение снизу. Однако при этом приближенное аналитическое решение (8) не только проще, чем по методу Донкерлея (6), но и ближе к численному решению.

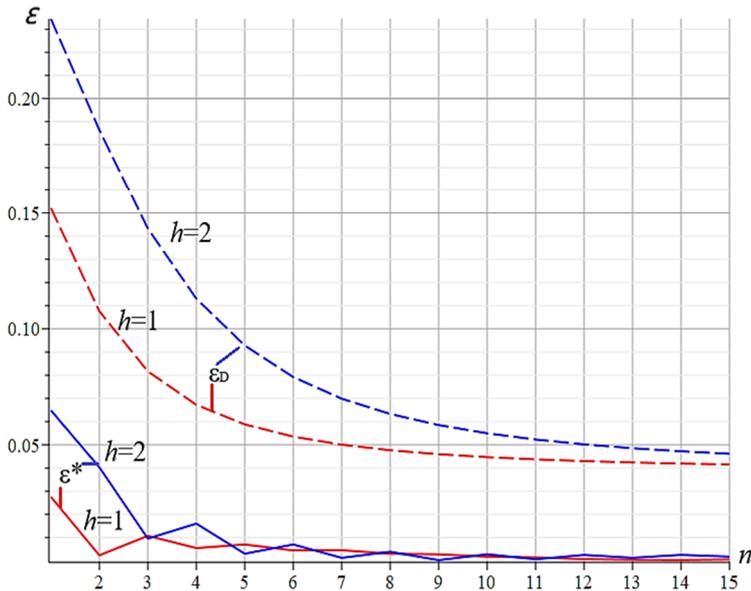
Для более точной оценки погрешностей методов введем относительные величины:

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1, \quad \varepsilon_* = (\omega_* - \omega_1) / \omega_1.$$

На рис. 4 показана зависимость погрешности от количества панелей при  $a = 3$  м для различных значений высоты  $h$ . Погрешность упрощенного решения в несколько раз меньше погрешности метода Донкерлея и зависит от высоты фермы  $h$ . Это особенно заметно, когда число панелей невелико. С увеличением числа панелей кривые сближаются.



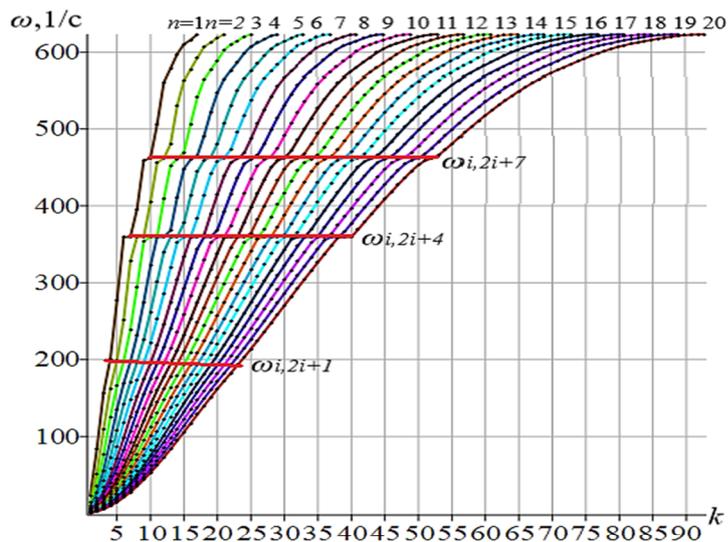
**Рис. 3.** Сравнение аналитических решений с численным: I – нижняя оценка  $\omega_D$  по Донкерлею (6); II – приближенный метод  $\omega^*$  (8); III – первая частота спектра  $\omega_1$



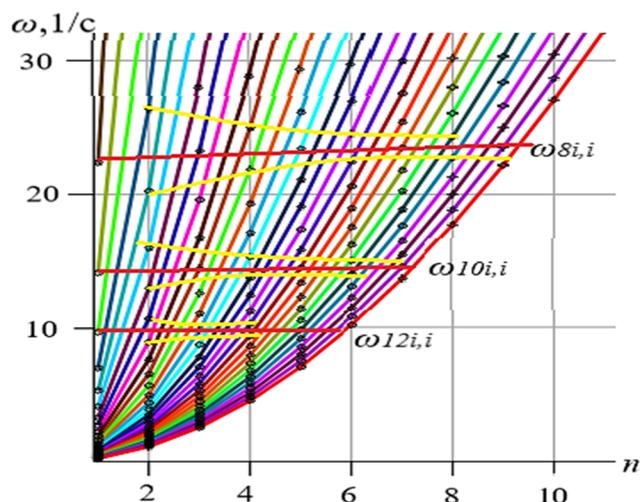
**Рис. 4.** Погрешность оценки основной частоты по Донкерлею  $\varepsilon_D$  и приближенному методу  $\varepsilon^*$

**Спектр регулярных ферм.** На рис. 5 точками обозначены частоты спектров собственных колебаний ферм разных порядков, рассчитанные для случаев  $a = 3$  м и  $h = 1$  м. С применением математического аппарата, используемого для нахождения первой частоты в режиме численного расчета, на графике показывается распределение частот ферм разных порядков. Это позволяет выявить некоторые свойства распределения спектральных множеств. Каждая кривая соответствует ферме определенного порядка. Ординаты точек на ней – это частоты. Горизонтальная ось представляет номера собственных частот в упорядоченном спектре. Вышние частоты ферм порядков  $n = 1, n = 2, \dots$ , лишь немного отличаются от высших частот ферм порядка  $n = 19, n = 20, \dots$ . Это дает возможность, ориентируясь на расчет ферм с 1–2 панелями, сравнительно легко оценить границы изменений собственных частот ферм большого порядка, для анализа которых требуются существенные вычислительные ресурсы и время.

Спектральные изолинии для низких частот показаны на рис. 6. Прослеживаются и спектральные константы  $\omega_{8i,i}, \omega_{10i,i}, \omega_{12i,i}, i = 1, 2, 3, \dots$ . Изолинии асимптотически стремятся к спектральным константам.



**Рис. 5.** Спектры семейства регулярных ферм порядков  $n = 1 - 20$



**Рис. 6.** Низкочастотные спектральные константы и изолинии семейства регулярных ферм порядков  $n = 1 - 20$

**Заключение.** В работе рассмотрена новая схема плоской трапециевидной фермы. Различными методами получены две аналитические формулы для зависимости основной частоты собственных колебаний плоской фермы от количества панелей. Замечено, что точность формул увеличивается с ростом числа панелей. Результаты показывают, что формула, альтернативная формуле Донкерлею, не только проще, но и точнее. На графиках распределения собственных частот семейств регулярных ферм разных порядков выявлены спектральные изолинии и спектральные константы, что позволяет получить решения для регулярных ферм высоких порядковых номеров из расчетных данных ферм с малым количеством панелей.

#### Библиографический список

1. Агапов В. П., Айдемиров К. Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. № 11. С. 4–7.
2. Игнатьев В. А., Игнатьев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: АСВ, 2022. 306 с.
3. Vatin N. I., Sinelnikov A. S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. № 3 (3). Pp. 39–51. DOI: 10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021).

4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No. 9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4.
5. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. № 2 (29). С. 29–37.
6. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 4 (39). С. 27–34.
7. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. 2023. 29. Article No. 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.
10. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. No. 111 (3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109. Article No. 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
12. Щиголь Е. Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // *Строительная механика и конструкции*. 2023. № 2 (37). С. 46–53. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.005.
13. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. 17. Article No 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1.
14. Liu X., Zhao Y., Zhou W., Banerjee J. R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // *Applied Mathematical Modelling*. 2022. 104. Pp. 401–420. DOI: 10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

#### References

1. Agapov V. P., Aydemirov K. R. Calculation of trusses using the finite element method taking into account geometric nonlinearity // *Industrial and Civil Construction*. 2016. 11. Pp. 4–7.
2. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
3. Vatin N. I., Sinelnikov A. S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2012. No. 3 (3). Pp. 39–51. DOI: 10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021).
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No. 9204. DOI: 10.18720/CUBS.92.4.
5. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels // *Structural Mechanics and Structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–30.

6. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural vibrations of a plane model of a composite truss // *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). Pp. 27–34.
7. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. No. 101. Article No. 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. 2023. 29. Article No. 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.
10. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. No. 111 (3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109. Article No. 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
12. Щиголь Е. Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // *Строительная механика и конструкции*. 2023. No. 2 (37). Pp. 46–53. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.005.
13. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. No. 17. Article No. 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1.
14. Liu X., Zhao Y., Zhou W., Banerjee J. R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // *Applied Mathematical Modelling*. 2022. No. 104. Pp. 401–420. DOI: 10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. No. 108. Article No. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

## DERIVATION OF A FORMULA FOR THE FIRST FREQUENCY TRAPEZOID TRUSS NATURAL OSCILLATIONS

Dai Qiao <sup>1</sup>

National Research University "MPEI" <sup>1</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Graduate student of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(919)990-97-59, e-mail: 228441531@qq.com

---

A planar truss with a diagonal lattice is considered. An algorithm for deriving an approximate analytical solution to the problem of the truss's natural vibrations is presented. A simplified version of the Dunkerley method is used. The high accuracy of the proposed formula is noted. The spectrum of natural frequencies of a family of regular trusses of varying order is analyzed. Some features of the frequency distribution are noted. Spectral isolines and spectral constants of the problem are numerically determined.

**Keywords:** planar truss, natural frequency, Dunkerley method, induction, Maple, approximate method, Maxwell – Mohr formula, spectral isolines, spectral constants.

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

УДК 624.04

DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.006

## ВЛИЯНИЕ ЖЕСТКОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО БАРЬЕРА В ГРУНТЕ НА ЗАТУХАНИЕ ВИБРАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ПОДВИЖНОГО СОСТАВА МЕТРОПОЛИТЕНА К ПОДЗЕМНОЙ ЧАСТИ ПРОЕКТИРУЕМОГО ЗДАНИЯ

А. А. Решетов<sup>1</sup>, Е. Д. Диомидов<sup>2</sup>

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры сопротивления материалов, тел.: +7(916)829-95-43, e-mail: andrew331@bk.ru

<sup>2</sup> Аспирант кафедры сопротивления материалов, тел.: +7(901)748-05-11, e-mail: ediomidov56@gmail.ru

Рассматривается влияние железобетонного барьера, выполненного по технологии «стена в грунте», на затухание вибрационных волн, исходящих от подвижного состава метрополитена, передаваемых через грунт к подземной части проектируемого здания. Представлены результаты экспериментальных и расчетных исследований, выполненных на реальном объекте – жилом комплексе с подземным паркингом, расположенном в непосредственной близости от тоннеля московского метрополитена. Проведён анализ изменений уровней виброускорения до и после возведения барьера, выявлены особенности экранирующего эффекта железобетонной конструкции в зависимости от частотного состава динамических нагрузок. Экспериментальные данные свидетельствуют о значительном снижении вертикальной составляющей вибрационных воздействий на фундамент, однако уровень горизонтальных вибраций по-прежнему требует дополнительных мероприятий по виброзащите. Обсуждаются факторы, влияющие на эффективность барьера, а также необходимость совершенствования нормативной базы по учёту подобных конструкций в расчетах вибрационного воздействия.

**Ключевые слова:** вибрация, динамическое воздействие, виброизоляция, подземное строительство, защита зданий, экспериментальные измерения.

**Введение. Исходные данные.** В настоящее время ведется активное строительство зданий и сооружений с развитой подземной частью на территории г. Москвы. В связи с развитой инфраструктурой метрополитена все чаще участки под строительство располагаются в зоне потенциального вибрационного воздействия.

Основным источником динамического воздействия являются участки метрополитена мелкого и среднего заложения [6–9, 14]. Вибрации, исходящие от подвижного состава, передаваясь через грунт на конструкции здания, могут достигать значений, превышающих предельно допустимые для жилых или общественных помещений.

Для проектирования зданий вблизи источников вибрации от метрополитена разработан свод правил 465.1325800.2019 [1]. Данный нормативный документ устанавливает требования к прогнозированию, оценке и разработке мероприятий по снижению динамического воздействия от движения поездов метрополитена. Однако свод правил не дает рекомендаций по особенностям прогнозирования вибрационного воздействия при наличии неизвлекаемого ограждения котлована (например, «стена в грунте», шпунт Ларсена или иные). Данные конструкции будут являться барьером на пути распространения вибрации от подвижного состава метрополитена.

В условиях тесной городской застройки устройство подземной части зданий не обходится без устройства ограждения котлована, минимизирующего влияние как от строительства, так и от технологического устройства. Это в первую очередь касается строительства в непосредственной близости от объектов метрополитена, которые имеют строгие требования в части влияния на конструкции от нового строительства.

Объектом исследования является жилой комплекс с подземным 2-этажным паркингом. Глубина заложения фундамента составляет 10 метров. Проектируемое здание располагается в 27 метрах от тоннеля одной из линий московского метрополитена. Глубина заложения тоннеля составляет 8,5 метров (рис. 1).

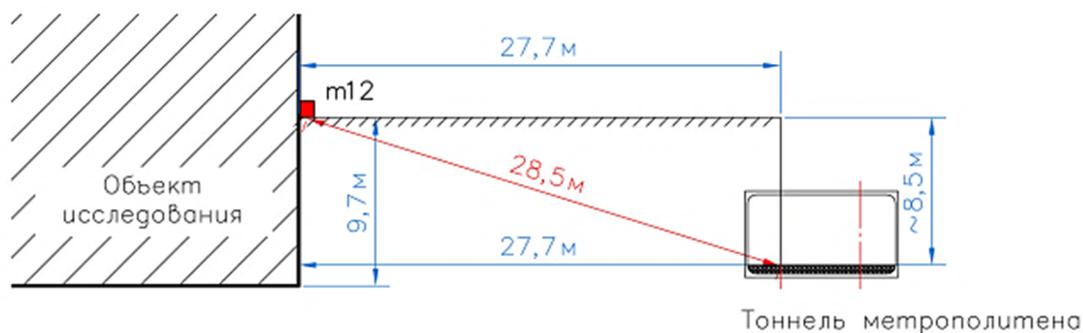


Рис. 1. Взаимное расположение проектируемого объекта и тоннеля метрополитена

Ограждение котлована (рис. 2) представлено стеной в грунте траншейного типа толщиной 600 мм, длиной 14 метров, заделка ниже дна котлована – 4,35 м.

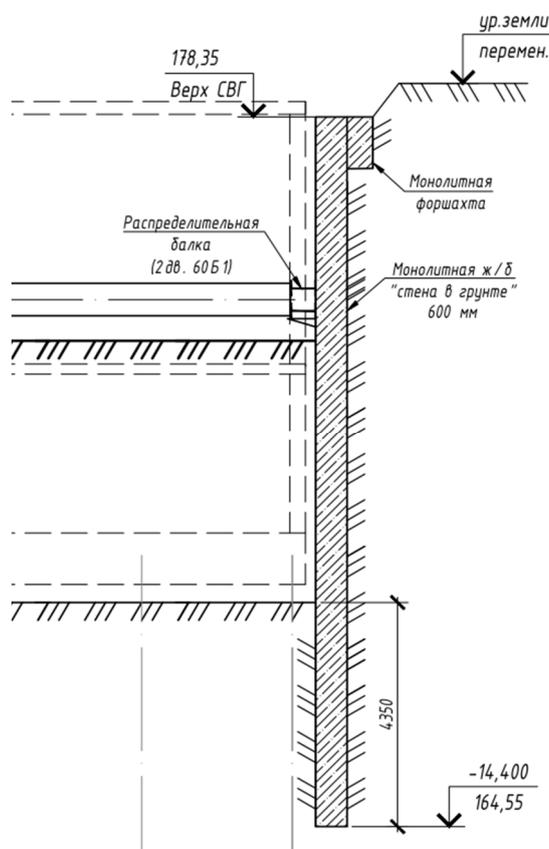


Рис. 2. Железобетонный барьер, представленный ограждением котлована, выполненный по технологии «стена в грунте»

**Экспериментальные данные.** Перед проектированием объекта строительства проводились натурные измерения вибраций *до возведения стены в грунте и разработки котлована* при движении поездов по линии московского метрополитена. Измерения проводились в 12-ти точках на поверхности грунта. Регистрировались среднеквадратические уровни виброускорения в октавных полосах частот в диапазоне 0,8–160 Гц по трем взаимно перпендикулярным направлениям (табл. 1).

Таблица 1

Максимальные уровни виброускорения от прохода поездов метрополитена

Точка	Максимальные уровни виброускорений, дБ отн. 1 мкм/с <sup>2</sup>						
	2 Гц	4 Гц	8 Гц	16 Гц	31,5 Гц	63 Гц	125 Гц
г1 грунт	<45,0	<45,0	59,3	69,9	76,4	75,5	60,6
г2 грунт	<45,0	<45,0	54,2	59,4	64,4	67,6	48,2
г3 грунт	<45,0	<45,0	<45,0	63,3	71,6	72,1	61,3
г4 грунт	<45,0	<45,0	56,6	65,0	74,5	71,0	65,0
г5 грунт	<45,0	<45,0	53,1	65,0	69,6	65,6	47,4
г6 плитка	<45,0	<45,0	59,2	74,5	82,2	76,6	58,3
г7 грунт*	<45,0	<45,0	62,1	75,2	86,2	84,0	65,7
г8 грунт	<45,0	<45,0	54,4	61,3	68,3	65,6	<45,0
г9 плитка	<45,0	<45,0	<45,0	68,3	78,1	68,3	58,4
г10 плитка	<45,0	<45,0	58,8	74,6	84,0	82,3	62,8
г11 плитка	<45,0	<45,0	57,0	66,7	79,2	74,4	<45,0
г12 плитка	<45,0	<45,0	59,0	77,4	84,1	80,4	62,7

В соответствии с [1] были проведены вычисления виброскорости  $v$ , м/с, несущих и ограждающих конструкций зданий. Измерения проводились на абрисе фундамента здания, расчет проводился по формуле:

$$v = v_{u(p)} \cdot k_{soil} \cdot k_{fund} \cdot k_{rez} \cdot k_h,$$

где  $v_{u(p)}$  – измеренный (рассчитанный) третьоктавный (октавный) спектр вертикальной и горизонтальных составляющих скорости колебаний лотковой части тоннельной обделки, м/с;  $k_{soil}$  – частотно-зависимая функция, характеризующая распространение колебательной энергии от тоннельной обделки до поверхности грунта;  $k_{fund}$  – частотно-зависимая функция, характеризующая передачу вибрации с грунта на фундамент здания;  $k_{rez}$  – частотно-зависимая функция, соответствующая резонансному увеличению колебаний ограждающими поверхностями помещений;  $k_h$  – частотно-зависимая функция, учитывающая изменение колебаний по высоте здания.

На основе исходных данных объекта и проведенных расчетов была составлена таблица максимальных ожидаемых уровней виброускорения. В табл. 2 также представлено сравнение полученных значений с предельно допустимыми нормативными уровнями согласно [2].

По результатам выполненного расчета превышения вибраций от линии метрополитена ожидаются для жилых и общественных помещений жилого комплекса. Для снижения вибраций в жилых помещениях до нормативных значений необходимо выполнить мероприятия по виброзащите [10–11].

При расчетах прогнозируемых уровней вибрации никаким образом не учитывается наличие неизвлекаемого железобетонного ограждения котлована, изготавливаемого по технологии «стена в грунте». Траншея, заполненная бетоном, обладает большей акустической жесткостью, чем грунт, значительно снижает динамическое и вибрационное влияние. Существуют исследования [3, 7] о применении вертикальных стен как метода снижения вибрационного воздействия, помещенных в грунт с упругими характеристиками материала. Научная работа [3] в одной из глав рассматривает расчет дифракции волны, попадающей на стену в теле грунта.

Автор диссертации пришел к выводу, что не в каждой постановке бетонная стена между источником вибрации и проектируемым объектом приводит к снижению динамического влияния. Специалисту требуется тонкий анализ дифракционной картины, так как в определенных обстоятельствах «стена в грунте» может выступать в роли собирающей линзы, увеличивая уровень вибрации в уровне фундамента.

Таблица 2

Сравнение максимальных уровней виброускорения с нормативными значениями

Точки пересчета	Максимальные уровни виброускорений, дБ отн. 1 мкм/с <sup>2</sup>							Коррект. уровень, дБ
	2 Гц	4 Гц	8 Гц	16 Гц	31,5 Гц	63 Гц	125 Гц	
<b>Вертикальная составляющая, передающаяся через фундаментную плиту</b>								
t1 грунт	42,0	42,8	56,0	77,6	74,9	71,0	62,1	68,9
t2 грунт	42,0	42,8	50,9	67,1	62,9	63,1	49,7	58,6
t3 грунт	42,0	42,8	41,7	71,0	70,1	67,6	62,8	62,6
t4 грунт	42,0	42,8	53,3	72,7	73,0	66,5	66,5	64,6
t5 грунт	42,0	42,8	49,8	72,7	68,1	61,1	48,9	63,8
t6 плитка	42,0	42,8	55,9	82,2	80,7	72,1	59,8	73,6
t8 грунт	42,0	42,8	51,1	69,0	66,8	61,1	46,5	60,5
t9 плитка	42,0	42,8	41,7	76,0	76,6	63,8	59,9	67,8
t10 плитка	42,0	42,8	55,5	82,3	82,5	77,8	64,3	74,0
t11 плитка	42,0	42,8	53,7	74,4	77,7	69,9	46,5	67,1
t12 плитка	42,0	42,8	55,7	85,1	82,6	75,9	64,2	76,3
<b>Горизонтальная составляющая, передающаяся через ограждение котлована</b>								
t1 грунт	44,0	44,8	58,0	79,6	76,9	73,0	64,1	70,9
t2 грунт	44,0	44,8	52,9	69,1	64,9	65,1	51,7	60,6
t3 грунт	44,0	44,8	43,7	73,0	72,1	69,6	64,8	64,6
t4 грунт	44,0	44,8	55,3	74,7	75,0	68,5	68,5	66,6
t5 грунт	44,0	44,8	51,8	74,7	70,1	63,1	50,9	65,8
t6 плитка	44,0	44,8	57,9	84,2	82,7	74,1	61,8	75,6
t8 грунт	44,0	44,8	53,1	71,0	68,8	63,1	48,5	62,5
t9 плитка	44,0	44,8	43,7	78,0	78,6	65,8	61,9	69,8
t10 плитка	44,0	44,8	57,5	84,3	84,5	79,8	66,3	76,0
t11 плитка	44,0	44,8	55,7	76,4	79,7	71,9	48,5	69,1
t12 плитка	44,0	44,8	57,7	87,1	84,6	77,9	66,2	78,3
Нормативные уровни по СанПиН 1.2.3685-21: Помещения жилых зданий (ночь)	72	73	75	81	87	93	-	72
Помещения общественных зданий*	80	81	83	89	95	101	-	80
Превышения в жилых помещениях:								
-вертикальные	-	-	-	4,1	-	-	-	4,3
-горизонтальные	-	-	-	6,1	-	-	-	6,3
Превышения в общественных помещениях*	-	-	-	-	-	-	-	-
* – прогнозируемые уровни в общественных помещениях на 1 дБ больше, чем для жилых помещений, приведенных в таблице, а нормативные на 8 дБ выше, поэтому сравнение ведется по жилым помещениям.								

Не существует в текущей практике однозначного ответа, будет ли оказывать «положительное» или «отрицательное» влияние. В ходе проектных работ было принято решение о проведении дополнительных замеров после устройства «стены в грунте», а также после откопки котлована до проектных отметок. Таким образом, появилась возможность оценить влияние ограждающей конструкции в теле грунта, а также оценить фактические уровни виброускорения в уровне фундаментной плиты без использования переходных коэффициентов (по глубине, по типу грунта и т. д.) (табл. 3).

Контрольные измерения вибраций на площадке строительства проводились после возведения «стены в грунте» и разработки котлована. Измерения проведены в двух точках на поверхности «стены в грунте» и в 10 точках на поверхности грунта, 8 из которых в котловане

проектируемого объекта. Датчик устанавливался в грунт на металлический кольшдек длиной 20 см или на металлическую платформу, на бетон и поверхность стены в грунте устанавливался на металлическую платформу (табл. 4, рис. 3).

Таблица 3

Максимальные уровни виброускорения от прохода поездов метрополитена после возведения «стены в грунте»

Точка	Максимальные уровни виброускорений, дБ отн. 1 мкм/с <sup>2</sup>						
	2 Гц	4 Гц	8 Гц	16 Гц	31,5 Гц	63 Гц	125 Гц
t1 грунт	<45,0	<45,0	52,4	61,0	73,3	69,3	54,0
t2 бетон	<45,0	<45,0	61,6	69,6	81,5	75,8	63,7
t3 грунт	<45,0	<45,0	<45,0	64,8	72,7	70,6	55,5
t4 грунт	<45,0	<45,0	53,6	67,9	81,1	76,6	56,7
t5 грунт	<45,0	<45,0	56,4	72,4	81,3	75,7	52,6
t6 бетон	<45,0	<45,0	<45,0	75,8	87,1	79,7	54,8
t7 грунт	<45,0	<45,0	54,6	70,8	75,5	77,0	56,6
t8 грунт	<45,0	<45,0	59,5	74,1	83,0	82,0	61,0
t9 грунт	<45,0	<45,0	<45,0	65,1	71,3	65,3	50,8
t10 грунт	<45,0	<45,0	53,1	64,6	70,6	69,7	49,8
t11 грунт	<45,0	<45,0	54,5	70,0	73,2	70,9	56,2
t12 бетон	<45,0	<45,0	<45,0	71,9	79,9	73,1	54,6

Примечание: t2 приводится информационно и не будет учитываться для оценки допустимых уровней вибраций, т.к. измерения выполнены на остатках ж.б. конструкции после демонтажа

Таблица 4

Сравнение максимальных уровней виброускорения с нормативными значениями после возведения «стены в грунте»

Точки пересчета	Максимальные уровни виброускорений, дБ отн. 1 мкм/с <sup>2</sup>							Коррект. уровень, дБ
	2 Гц	4 Гц	8 Гц	16 Гц	31,5 Гц	63 Гц	125 Гц	
<b>Вертикальная составляющая, передающаяся через фундаментную плиту</b>								
t1 грунт	42,0	42,8	49,1	68,7	71,8	64,8	55,5	61,4
t3 грунт	42,0	42,8	41,7	72,5	71,2	66,1	57,0	64,0
t4 грунт	42,0	42,8	50,3	75,6	79,6	72,1	58,2	68,5
t5 грунт	42,0	42,8	53,1	80,1	79,8	71,2	54,1	71,7
t7 грунт	42,0	42,8	51,3	78,5	74,0	72,5	58,1	69,6
t9 грунт	42,0	42,8	41,7	72,8	69,8	60,8	52,3	64,0
t10 грунт	42,0	42,8	49,8	72,3	69,1	65,2	51,3	63,6
t11 грунт	42,0	42,8	51,2	77,7	71,7	66,4	57,7	68,6
<b>Горизонтальная составляющая, передающаяся через ограждение котлована</b>								
t2 бетон	44,0	44,8	60,3	79,3	82,0	73,3	67,2	71,8
t6 бетон	44,0	44,8	43,7	85,5	87,6	77,2	58,3	77,7
t8 грунт	44,0	44,8	58,2	83,8	83,5	79,5	64,5	75,5
t12 бетон	44,0	44,8	43,7	81,6	80,4	70,6	58,1	73,0
Нормативные уровни по СанПиН 1.2.3685-21: Помещения жилых зданий (ночь)	72	73	75	81	87	93	-	72
Помещения общественных зданий*	80	81	83	89	95	101	-	80
Превышения в жилых помещениях:								
-вертикальные	-	-	-	-	-	-	-	-
-горизонтальные	-	-	-	4,5	-	-	-	5,7
Превышения в общественных помещениях*	-	-	-	-	-	-	-	-

\* – прогнозируемые уровни в общественных помещениях на 1 дБ больше, чем для жилых помещений, приведенных в таблице, а нормативные на 8 дБ выше, поэтому сравнение ведется по жилым помещениям.

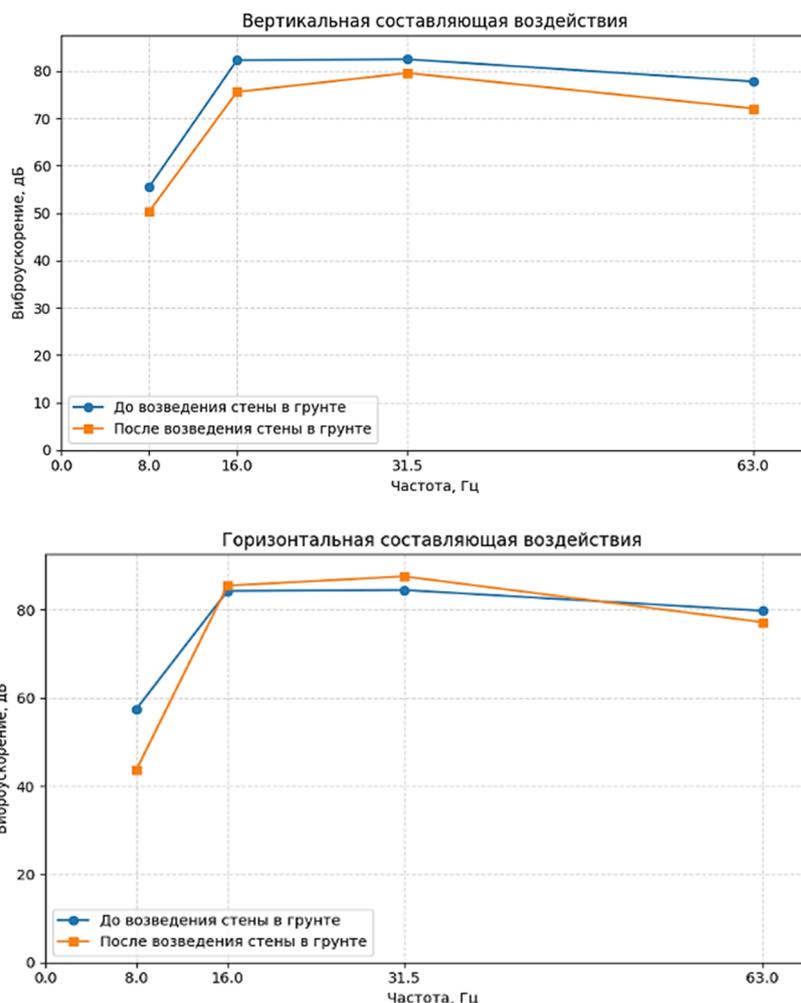


Рис. 3

После проведения расчетов аналогичных ситуаций до возведения «стены в грунте» были получены ожидаемые максимальные уровни виброускорений. Проведено сравнение полученных показателей с нормативными допустимыми по СанПин [2] (табл. 5).

Таблица 5

Сравнение прогнозируемых уровней вибрации до и после взведения «стены в грунте»

Место передачи вибраций	Превышения максимальных уровней вибраций, дБ			
	16 Гц	31,5 Гц	63 Гц	$L_{Акор}$
Прогнозируемые превышения по натурным измерениям <i>до возведения стены в грунте</i>				
Вертикальная составляющая, через фундаментальную плиту	4,1	–	–	4,3
Горизонтальная составляющая, через ограждение котлована	6,1	–	–	6,3
Прогнозируемые превышения по контрольным натурным измерениям <i>после возведения стены в грунте</i>				
Вертикальная составляющая, через фундаментальную плиту	–	–	–	–
Горизонтальная составляющая, через ограждение котлована	4,5	–	–	5,7

Как видно из табл. 5, в обоих случаях ожидаются превышения горизонтальных составляющих вибрационного воздействия, передаваемого через ограждение котлована, которые имеют близкие значения. Как следствие, требуется выполнить виброизоляционные мероприятия по

защите боковой поверхности подземной части здания. Прогнозируемые превышения вертикальной составляющей вибрационного воздействия по контрольным измерениям в котловане после возведения «стены в грунте» отсутствуют. Данное обстоятельство дает возможность исключить виброзащитные мероприятия под фундаментной плитой.

**Выводы.** На основании выполненного анализа и экспериментальных данных можно сформулировать следующие основные выводы:

1. В условиях плотной городской застройки при строительстве зданий с подземными частями вблизи объектов метрополитена наличие железобетонного ограждения котлована, выполненного по технологии «стена в грунте», оказывает значимое влияние на передачу динамических воздействий от движущихся поездов через грунтовый массив. Эффективность снижения вибраций обусловлена как геометрическими параметрами стены, так и физико-механическими свойствами самого барьера и окружающего грунта, а также особенностями контакта между бетонной конструкцией и грунтом;

2. Результаты натурных измерений свидетельствуют о том, что динамическое воздействие транспортного источника характеризуется широкой полосой частот – от 2 до 125 Гц, при этом основной вклад в уровни вибраций на фундаменте проектируемого здания вносят колебания в диапазоне 16–63 Гц. В проектных расчетах рекомендуется учитывать именно этот спектр, как наиболее существенный с позиции потенциального воздействия на конструкции;

3. Экспериментальные данные показывают, что железобетонный барьер способен существенно снижать амплитуду вибрационных воздействий, однако выраженность экранирующего эффекта зависит от соотношения основных размеров стены с длиной волны возбуждения, а также от частотного состава динамической нагрузки;

4. В современных проектах и нормативных документах отсутствуют подробные рекомендации по учету влияния неизвлекаемых железобетонных ограждений котлована на распространение вибраций; данный аспект требует дальнейших исследований и разработки специализированных подходов к расчёту.

#### Библиографический список

1. СП 465.1325800.2019. Здания и сооружения. Защита от вибрации метрополитена. Правила проектирования. М.: Стандартинформ, 2020. 45 с.
2. СанПиН 1.2.3685-21. Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания. М., 2021. 469 с.
3. Костырев С. А. Анализ вибраций, генерируемых линиями метрополитена, и разработка комплекса мероприятий по их снижению: дис. ... д-ра техн. наук: 01.02.06. М., 2004. 270 с.
4. Колотовичев Ю. А. Задача прогноза колебаний поверхности грунта при движении поездов метрополитена в тоннелях неглубокого заложения: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17. М., 2010. 128 с.
5. Мирсаяпов И. Т., Хасанов Р. Р., Сафин Д. Р., Нуриева Д. М. Влияние конструкции фундамента и грунтового основания на снижение уровня вибраций, возникающих от движения поездов метрополитена // Известия КГАСУ. 2024. № 1 (67). С. 96–106.
6. Мондрус В. Л., Митрошин В. А. Воздействие движения поездов метрополитена неглубокого заложения на городскую застройку // Промышленное гражданское строительство. 2020. № 9. С. 14–20.
7. Абрамова Т. Т. Защита грунтовых массивов от динамических и сейсмических воздействий // Международный научный журнал «Символ науки». 2016. № 4. С. 41–48.
8. Востриков К. В., Смолин Ю. П. К вопросу о границе санитарно-защитной зоны от вибрационного воздействия транспорта // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 1. С. 163–172.

9. Титов Е. Ю. Оценка эффективности виброизоляции здания, расположенного вблизи железнодорожной линии // Вестник МИИТа. 2006. Вып. 14. С. 62–68.
10. Курбацкий Е. Н., Титов Е. Ю. Экспериментально теоретическая оценка колебаний грунта вблизи железнодорожных трасс // Вестник МИИТа. 2006. Вып. 14. С. 57–62.
11. Повколас К. Э. Оценка эффективности некоторых способов виброизоляции существующих зданий и сооружений от вибродинамических воздействий, распространяющихся в грунтовой среде // Наука и техника. 2023. Т. 22, № 2. С. 131–140.
12. Srivastav S., Chawla S., Mishra S. Numerical analysis of moving train induced vibrations on tunnel, surrounding ground and structure // Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2024. No. 23. Pp. 179–192.
13. Курбацкий Е. Н., Голосова О. А. Особенности распространения волн напряжений в природных и искусственных гранулированных средах // Строительная механика и расчёт сооружений. 2011. № 2 (235). С. 45–50.
14. Уздин А. М., Елизаров С. В., Белаш Т. А. Сейсмостойкие конструкции транспортных зданий и сооружений: учеб. пособие. М.: УМЦ ЖДТ, 2012. 501 с.

#### References

1. SP 465.1325800.2019. Buildings and Structures. Protection against Vibrations from the Subway. Design Guidelines. Moscow: Standartinform, 2020. 45 p.
2. SanPiN 1.2.3685-21. Hygienic norms and requirements for ensuring the safety and/or harmlessness of environmental factors for humans. Moscow, 2021. 469 p.
3. Kostyrev S. A. Analysis of Vibrations Generated by Subway Lines and Development of a Complex of Mitigation Measures: dissertation of the Doctor of Technical Sciences: 01.02.06. Moscow, 2004. 270 p.
4. Kolotovichev Yu. A. The Problem of Predicting Ground Surface Vibrations Caused by Subway Trains in Shallow Tunnels: dissertation of the Candidate of Technical Sciences: 05.23.17. Moscow, 2010. 128 p.
5. Mirsayapov I. T., Khasanov R. R., Safin D. R., Nurieva D. M. The Influence of Foundation and Subsoil Structure on Reducing the Level of Vibrations Caused by Subway Trains // Izvestiya KGASU. 2024. No. 1 (67). Pp. 96–106.
6. Mondrus V. L., Mitroshin V. A. The Impact of Subway Train Movements in Shallow Tunnels on Urban Development // Industrial and Civil Engineering Construction. 2020. No. 9. Pp. 14–20.
7. Abramova T. T. Protection of Soil Massifs from Dynamic and Seismic Impacts // The international scientific journal «Symbol of Science». 2016. No. 4. Pp. 41–48.
8. Vostrikov K. V., Smolin Yu. P. On the Sanitary Protection Zone Border for Vibrational Impact of Transport // Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2016. No. 1. Pp. 163–172.
9. Titov E. Y. Assessment of the Efficiency of Vibration Isolation of a Building Located Near a Railway Line // Bulletin of МИИТа. 2006. No. 14. Pp. 62–68.
10. Kurbatsky E. N., Titov E. Yu. Experimental and Theoretical Assessment of Ground Vibrations Near Railway Tracks // Bulletin of МИИТа. 2006. No. 14. Pp. 57–62.
11. Povolas K. E. Assessment of the Effectiveness of Some Methods of Vibration Isolation of Existing Buildings and Structures from Vibrational Dynamic Impacts Propagated in Soil Medium // Science and Technology. 2023. Vol. 22, No. 2. Pp. 131–140.
12. Srivastav S., Chawla S., Mishra S. Numerical analysis of moving train induced vibrations on tunnel, surrounding ground and structure // Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2024. No. 23. Pp. 179–192.

13. Kurbatsky E. N., Golosova O. A. Features of Stress Wave Propagation in Natural and Artificial Granular Media // Structural Mechanics and Analysis of Constructions. 2011. No. 2 (235). Pp. 45–50.

14. Uzdin A.M., Elizarov S. V., Belash T. A. Seismic-Resistant Structures of Transport Buildings and Facilities: textbook. Moscow: UMTS ZhDT, 2012. 501 p.

## THE INFLUENCE OF A RIGID REINFORCED CONCRETE BARRIER IN SOIL ON THE ATTENUATION OF VIBRATION WAVES FROM METRO ROLLING STOCK TO THE UNDERGROUND PART OF A DESIGNED BUILDING

A. A. Reshetov <sup>1</sup>, E. D. Diomidov <sup>2</sup>

National Research Moscow State University of Civil Engineering <sup>1,2</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, tel.: +7(916)829-95-43, e-mail: andrew331@bk.ru

<sup>2</sup> Postgraduate Student, Department of Strength of Materials, tel.: +7(901)748-05-11, e-mail: ediomidov56@gmail.ru

---

This article investigates the influence of a reinforced concrete diaphragm wall constructed by the "slurry wall" technique on the attenuation of vibration waves originating from subway trains and transmitted through the soil to the underground part of a new building. Experimental and analytical studies were conducted on a real-life site – a residential complex with an underground parking structure located in close proximity to a Moscow Metro tunnel. Vibration measurements were performed before and after the installation of the diaphragm wall, enabling a comparative analysis. The results demonstrate that the reinforced concrete barrier reduces the amplitude of vertical vibrational impacts at the foundation level to within permissible limits. However, the horizontal component of vibration remains above regulatory thresholds, suggesting the need for additional vibration protection measures at the building's lateral surfaces. The effectiveness of the barrier depends on its geometric parameters, the physical and mechanical properties of both the wall and surrounding soil, and the frequency content of the dynamic load. The study highlights the absence of detailed guidance in current standards for accounting for such permanent retaining structures in vibration impact predictions and underscores the need for further research and regulatory development in this field.

**Keywords:** vibration, dynamic impact, vibration isolation, underground construction, building protection, experimental measurements.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.04+624.07:681.5.015  
DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.007

## ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ КОМБИНИРОВАННОЙ БАЛОЧНО-ВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ

А. В. Мищенко<sup>1</sup>, А. А. Тасова<sup>2</sup>

Новосибирское высшее военное командное ордена Жукова училище<sup>1</sup>  
Россия, г. Новосибирск  
Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Новосибирск

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, зав. кафедрой общепрофессиональных дисциплин НВВКУ;  
проф. кафедры строительной механики НГАСУ, тел.: +7(383)266-33-80, e-mail: mishchenko.av59@yandex.ru

<sup>2</sup> Студентка строительного факультета, тел.: +7(983)582-53-40, e-mail: a.tasova@sibstrin.ru

Рассматривается задача оптимизации параметров неоднородной балочно-вантовой комбинированной системы с использованием критерия минимума потенциальной энергии упругой деформации. В расчетный набор варьируемых параметров включены регулируемое отношение изгибной жесткости балки и жесткостей растянутых вант, что является основным фактором, влияющим на распределение усилий и деформаций в системе. Дополнительно варьируются углы наклона двух групп вантовых элементов. Запись основных соотношений и постановка оптимизационной задачи выполнены в относительных безразмерных величинах с использованием в качестве ограничения-равенства изопериметрического условия для жесткостных характеристик системы. Графически показаны зависимости энергии деформации системы при изменении трех параметров, управляющих распределением жесткостей и наклоном вант. Оптимальным значениям варьируемых параметров отвечают точки минимума энергетической поверхности.

**Ключевые слова:** балочно-вантовая система, оптимальная конфигурация системы, энергетический критерий, минимум потенциальной энергии деформации, прочность комбинированной системы.

**Введение.** Комбинированные неоднородные несущие конструкции, образованные объединением в единую систему различных конструктивных элементов, отличающихся по структуре и характеру деформирования (изгибу, растяжению / сжатию и др.), позволяют кардинально повысить эффективность восприятия системой внешних воздействий путем правильного выбора конфигурации системы, ее топологии, структуры и рационального назначения комплекса расчетных параметров [1–6]. Среди них широко распространенными в большепролетных конструкциях являются балочно-вантовые системы, характеризующиеся большим разнообразием конструктивных решений и архитектурных форм [1, 2]. Они обладают высокой несущей способностью, возможностью создания больших пролетов, эффективностью восприятия нагрузок, экономичностью, но вместе с тем им свойственна и повышенная чувствительность к распределению жесткостных характеристик элементов. Ситуация осложняется еще и тем, что данные характеристики в силу различного характера работы элементов (изгиба, кручения, растяжения) и возможной физической неоднородности отличаются друг от друга по физическому смыслу и размерности. Указанные особенности работы комбинированных неоднородных систем определяют особую ответственность к выбору метода и критерия их оптимизации. При отклонении от рационального отношения жесткостей в сторону уменьшения

жесткости вант наблюдается перерасход материала на балку, а в противном случае балка становится недогруженной.

В данной статье рассматривается методика решения оптимизационной задачи с нахождением *общих параметров конфигурации системы* на основе энергетического подхода. Далее – на проектном этапе – организуется процедура варьирования остальных (свободных) параметров системы с применением проектных ограничений по прочности, жесткости, устойчивости, выносливости и др.

Выделение дополнительных этапов, повышающих эффективность оптимизационной процедуры в целом, выполнялось в ряде работ [7–10]. Для комплексной оценки возникающих в конструкции полей внутренних усилий и деформаций примем интегральный энергетический критерий минимума потенциальной энергии деформации (ПЭД):

$$W(\mathbf{P}) \rightarrow \min .$$

Согласно ему, качество системы, ее эффективность сопротивления заданным внешним воздействиям связываются с величиной потенциальной энергии деформации системы при постоянстве ее массозатратных характеристик. Данный критерий широко применяется в задачах оптимального проектирования [10–14] и позволяет выявлять рациональные геометрические формы и топологию конструкции, величины относительных геометрических и физических параметров соединительных устройств и другие параметры, сгруппированные в вектор варьируемых параметров:

$$\mathbf{P} = [p_1, \dots, p_c] . \quad (1)$$

Ценность энергетического критерия заключается в возможности выполнения интегральной оценки состояния всей системы на основе анализа функций распределения усилий и деформаций. В работах [15–17] для некоторых частных случаев деформирования была показана связь энергетического критерия с требованием минимума объема материала системы.

**Постановка задачи.** Балочно-вантовая система, показанная на рис. 1, содержит двухпролетную разрезную балку и две системы параллельных вант. Будем считать, что элементы составной балки и ванты выполнены из различных материалов с модулями упругости  $E_j$ ,  $G_j$ , плотностью  $\rho_j$  и удельным весом  $\gamma_j$ .

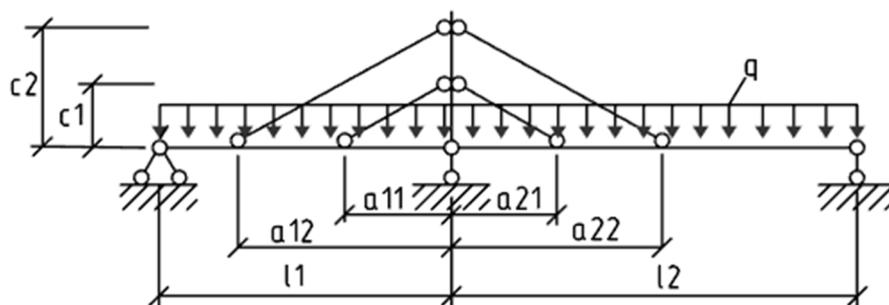


Рис. 1. Расчетная схема балочно-вантовой системы

Для регулирования жесткостей элементов системы разделим их на  $m$  групп, в которые могут входить характеристики пролетов балки, вантовых систем, жесткостных характеристик соединительных и опорных устройств и т. п. Составим условие баланса жесткостей  $D_i$  элементов комбинированной системы

$$\sum_{i=1}^m D_i = D \quad (2)$$

с введением величины  $D$  – обобщенной суммарной жесткости сечений элементов системы.

Задав жесткости каждой группы при помощи безразмерного управляющего параметра  $\xi_i \in [0; 1]$  в виде

$$D_i = \xi_i D, \quad (3)$$

после подстановки (3) в (2) получим условие связи управляющих параметров:

$$\sum_{i=1}^m \xi_i = 1. \quad (4)$$

Согласно (3), (4) варьирование жесткости  $D_i$  каждой группы выполняется в интервале между двумя предельными состояниями. В одном из них ( $\xi_i = 0$ ) имеем нулевую жесткость  $D_i = 0$ , а значит, вырождение элементов данной группы. В другом ( $\xi_i = 1$ ) – жесткость становится максимальной:  $D_i = D$ , что приводит к вырождению элементов всех других групп.

Таким образом, условия (2), (3), (4) описывают полный диапазон изменения жесткостей каждой из варьируемых групп элементов, начиная от ее отсутствия до ситуации полного восприятия всех воздействий только этой группой. В зависимости от конструктивных особенностей системы условия на границах интервала в виде равенств  $\xi_i \in [0; 1]$  могут быть изменены на условие  $\xi_i \in (0; 1)$ .

В пределах каждой группы жесткость сечения, соответствующая определенному виду деформации (изгибу, растяжению-сжатию, кручению) определяется по формулам

$$D_{ij} = D_i g_{ij},$$

где  $j \in [A, I, Q]$  обозначают принадлежность жесткости к конкретному виду деформации (растяжению –  $D_A$ , изгибу –  $D_I$  и сдвигу –  $D_Q$ ), а  $g_{ij}$  – геометрический параметр, применяемый для согласования размерностей.

При наличии двух варьируемых групп условие связи (4) принимает вид  $\xi_1 + \xi_2 = 1$ . Принятие в этом случае  $\xi_1 = p_1$ ,  $\xi_2 = 1 - p_1$  дает однопараметрические зависимости для жесткостей сечений балки и вант:

$$D_{I_1} = D_I = p_1 D, \quad D_{A_2} = D_A = \frac{(1-p_1)D}{h^2}. \quad (5)$$

Здесь  $h$  – согласующий параметр – высота сечения балки.

Кроме параметра  $p_1$  в вектор (1) включим параметры, регулирующие углы наклона двух вантовых систем в пролетах балки (рис. 1):

$$p_2 = \frac{a_{11}}{l}, \quad p_2 = \frac{a_{21}}{l}.$$

Энергию деформации балочно-вантовой системы, содержащей набор усилий  $\mathbf{X} = [x_i]$  в лишних связях, запишем в виде

$$W(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = W_b(\mathbf{P}, \mathbf{X}) + W_v(\mathbf{P}, \mathbf{X}), \quad (6)$$

где

$$W_b(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} M_j \kappa_j dx_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} N_j \varepsilon_{0j} dx_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_{l_j} Q_j \gamma_{0j} dx_j, \quad (7)$$

$$W_v(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \int_{l_j} N_j \varepsilon_{0j} dx_j - \quad (8)$$

компоненты энергии на  $n$  участках балки и  $k$  вант соответственно, записанные с использованием обобщенных деформаций осевой линии: кривизны  $\kappa_j$ , продольной деформации  $\varepsilon_{0j}$ , осредненного поперечного сдвига  $\gamma_{0j}$  на  $j$ -м участке. Обобщенные усилия и деформации в подинтегральных выражениях (7), (8) являются функциями варьируемых параметров  $\mathbf{P}$  и усилий  $\mathbf{X}$ . В общем случае структурно неоднородного стержня сложной конфигурации обобщенные деформации могут быть найдены по соотношениям, приведенным в [18]. В частном случае при использовании центральных осей жесткости компоненты энергии деформации системы записывается в виде

$$W_b(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int \frac{M_{b,j}^2}{D_{I_b}} dx_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int \frac{N_{b,j}^2}{D_{A_b}} dx_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int k_\tau \frac{Q_{b,j}^2}{D_{Q_b}} dx_j, \quad (9)$$

$$W_v(\mathbf{P}, \mathbf{X}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{N_{v,j}^2 l_{v,j}}{D_v}. \quad (10)$$

Здесь  $D_{I_b}$ ,  $D_{A_b}$ ,  $D_{Q_b}$  – жесткости сечений балки;  $D_v$  – жесткость сечений вант;  $k_\tau$  – коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений;  $l_{v,j}$  – длина  $j$ -го ванта.

Основные неизвестные целесообразно определить из уравнений совместности деформаций, записанных с использованием теоремы Кастильяно:

$$\Delta_j = \frac{\partial W(\mathbf{P}, \mathbf{X})}{\partial X_j} = 0. \quad (11)$$

Окончательное выражение энергии деформации получим после подстановки в (6), (9), (10) усилий  $\mathbf{X}$ , найденных по условию (11).

**Численное исследование.** Рассмотрим комбинированную балочно-вантовую систему (рис. 1), нагруженную равномерно распределенной вертикальной нагрузкой  $q$ , и ее основную систему (рис. 2).

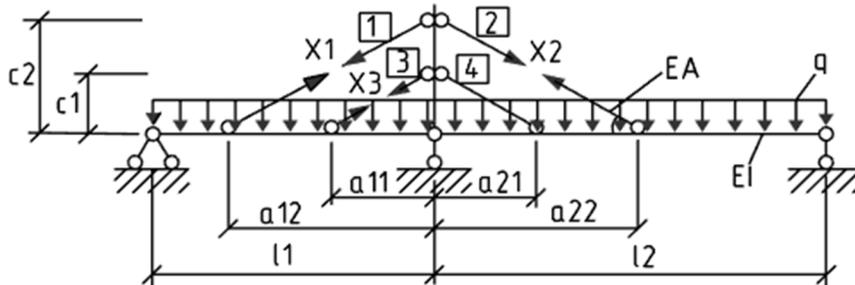


Рис. 2. Основная система балочно-вантовой системы

Для удобства анализа результатов перейдем к безразмерным относительным величинам размеров, координат, усилий и энергии деформации. Обозначим их с помощью верхнего начерка над символом исходной размерной величины:

$$\bar{x}_j = \frac{x_j}{l}, \quad [\bar{M}, \bar{N}, \bar{Q}] = \left[ \frac{M}{ql^2}, \frac{N}{ql}, \frac{Q}{ql} \right], \quad \bar{W} = \frac{D}{q^2 l^5} W.$$

Кроме них используем: относительную высоту сечения балки  $k_h = h/l$ , отношение длин пролетов  $k_l = l_2/l_1$ . Варьирование основного фактора – отношения жесткостей балки и вант выполним на основе соотношений (5):  $D_b = p_1 D$ ,  $D_v = (1 - p_1) D / h^2$ .

С учетом введенных параметров выражения (6), (9), (10) примут вид

$$W = \frac{q^2 l^5}{D} (\bar{W}_b + \bar{W}_v), \quad \bar{W}_v = \frac{1}{2} \sum_{j \in J_v} \frac{\bar{N}_j^2 l_v \cdot k_h^2}{1 - p_1},$$

$$\bar{W}_b = \frac{1}{2 p_1} \sum_{j \in J_b} \left( \int_{l_j} \bar{M}_j^2 d\bar{x}_j + \frac{k_\tau}{k_G} k_i^2 k_h^2 \int_{l_j} \bar{Q}_j^2 d\bar{x}_j + k_i^2 k_h^2 \int_{l_j} \bar{N}_j^2 d\bar{x}_j \right).$$

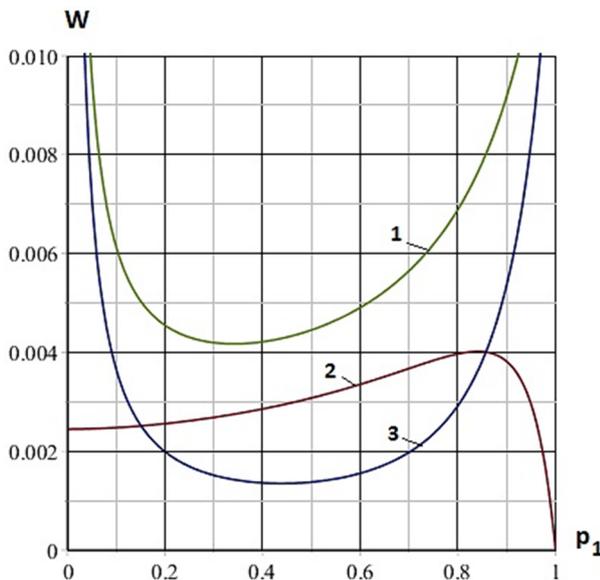
Здесь  $J_b, J_v$  – группы номеров участков балки и вант соответственно.

Пренебрегая в балке деформациями сдвига и сжатия получено следующее выражение ПЭД:

$$\bar{W}(P) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \int_{l_j} \frac{\bar{M}_{b,j}^2}{p_1} d\bar{x} + \frac{1}{2} k_h^2 \sum_{j=1}^4 \frac{\bar{N}_{v,j}^2 \bar{l}_{v,j}^2}{1 - p_1}.$$

Дальнейшее исследование выполнено в среде *Maple*. Ниже представлены сечения поверхности  $\bar{W}(p_1, p_2, p_3)$  гиперплоскостями  $\bar{W}(p_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) при варьировании одного параметра и фиксации двух других  $p_j, p_k$  ( $j \neq 1, k \neq 1$ ).

Графики на рис. 3 отражают зависимости от параметра  $p_1$  компонент энергии деформации изгиба балки  $\bar{W}_b(p_1)$ , растяжения вант  $\bar{W}_v(p_1)$  и их сумму  $\bar{W}(p_1)$  – при постоянных значениях  $p_2 = 0,3; p_3 = 0,4$ . В случаях приближения к границам допустимого интервала  $p_1 \in [0, 1]$  значения энергий  $\bar{W}_b, \bar{W}$  значительно возрастают в силу нерациональности распределения усилий и деформаций в системе, причем в первом случае это происходит в силу больших деформаций балки, а во втором – из-за больших изгибающих моментов, возникающих при вырождении вант. Оптимальным значением управляющего параметра является  $p_1 = 0,341$ , доставляющее суммарной энергии минимальное значение.



**Рис. 3.** Графики компонент энергетической функции при фиксации параметров  $p_2 = 0,3, p_3 = 0,4$ :  
 1 – суммарная энергия  $\bar{W}(p_1)$ ;  
 2 – энергия деформации изгиба балки  $\bar{W}_b(p_1)$ ,  
 3 – энергия растяжения вант  $\bar{W}_v(p_1)$

Частное влияние углов наклона вант в левом и правом пролетах показано на графиках  $\bar{W}(p_2), \bar{W}(p_3)$  (рис. 4) при фиксации двух других параметров  $p_j$ . При этом максимальные значения варьируемых параметров  $p_2, p_3$  следует подчинить условиям  $a_{12} \leq l_1, a_{21} \leq l_2$  – невыхода

точек крепления наружных (верхних) вант за пределы левого и правого пролетов соответственно. Учитывая геометрию расчетной схемы (рис. 1), получим верхние границы интервалов варьирования параметров  $p_2, p_3$ :

$$p_{2,\max} = \frac{c_1}{c_2}, \quad p_{3,\max} = k_l \frac{c_1}{c_2}.$$

С учетом принятых исходных данных имеем  $p_{2,\max} = 0,5$ ,  $p_{3,\max} = 0,7$ . Так же, как и график  $\bar{W}(p_1)$ , оба показанных на рис. 4 графика имеют выраженные минимумы при оптимальных значениях параметров наклона вант  $p_2 = 0,37$ ,  $p_3 = 0,3$ .

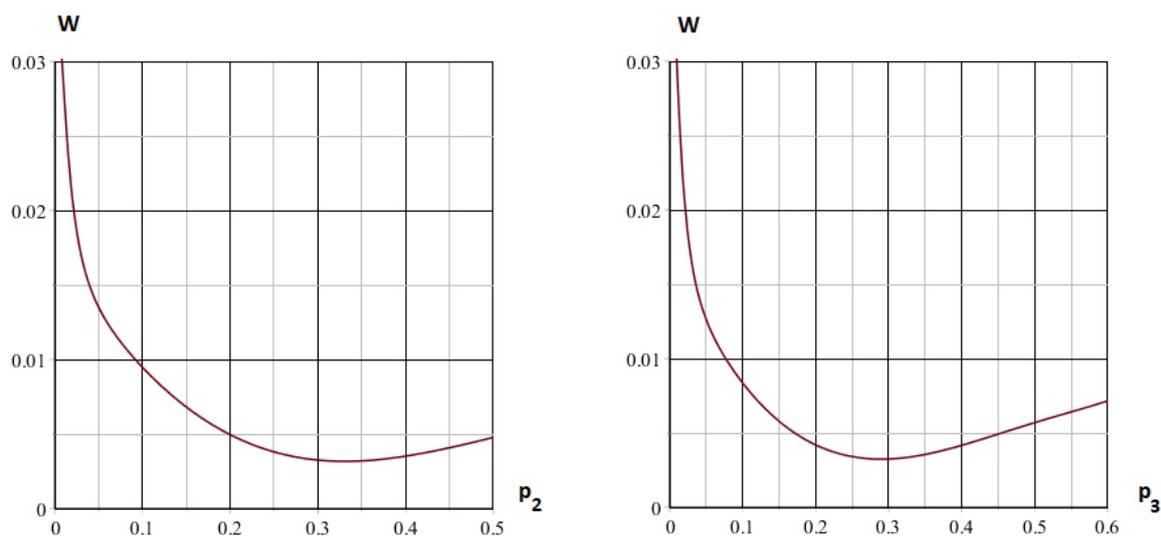


Рис. 4. Графики функции  $\bar{W}(p_2)$ ,  $\bar{W}(p_3)$  при фиксации других параметров

На рис. 5 показано влияние параметра  $p_1$  на продольные силы в четырех вантах системы. Усилия в вантах  $\bar{N}_j(p_1)$  характеризуются сложными нелинейными немонотонными зависимостями. При  $p_1 = 1$  ванты теряют жесткость – вырождаются. Полученные выше оптимальные значения варьируемых параметров, соответствующие минимумам энергии деформации, принадлежат допустимым областям.

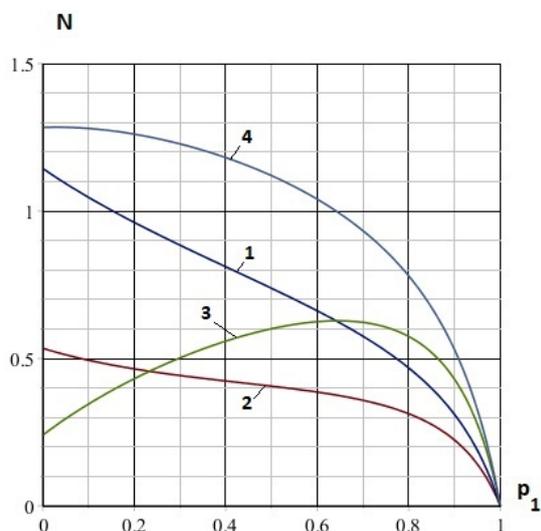
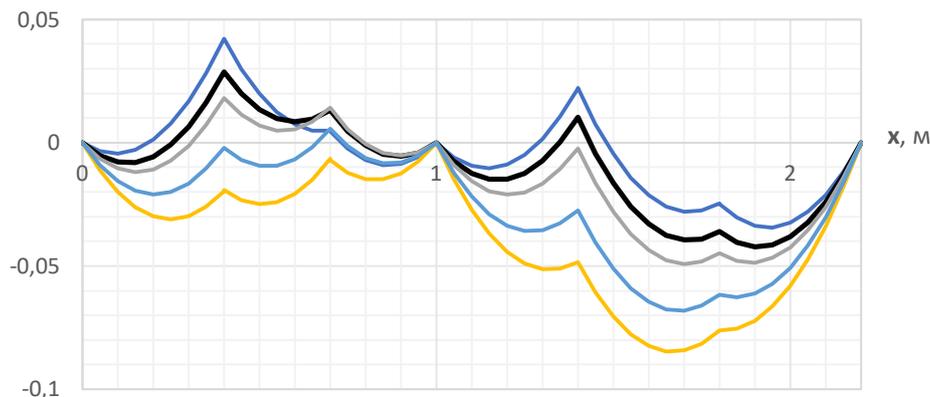


Рис. 5. Графики функций изменения усилий  $\bar{N}_j(p_1)$  в четырех вантах системы ( $j = 1, 2, 3, 4$ )

На рис. 6 показаны эпюры изгибающих моментов в балках при изменении жесткостных характеристик системы (параметра  $p_1$ ).



**Рис. 6.** Эпюры безразмерных изгибающих моментов  $\bar{M}$  в двухпролетной балке, полученные при значениях  $p_1 = 0, 1; 0,341; 0,5; 0,7; 0,8$  соответственно сверху вниз

При  $p_1 \rightarrow 1$  ванты вырождаются и балка работает без промежуточных податливых опор. Максимальные пролетные моменты определяются известными выражениями  $M_j = ql_j^2 / 8$ . По мере уменьшения  $p_1$  увеличивается жесткость вант (промежуточных опор), что приводит к появлению изломов на внутренних границах участков балки и уменьшению в ней моментов.

Спецификой рассматриваемой схемы двухпролетной балки с шарнирно закрепленным на средней опоре пилоном является отсутствие в предельном состоянии при  $p_1 \rightarrow 0$  реализации жестких промежуточных опор в точках крепления вант. Система крепления вант имеет одну степень свободы (вращение пилон), что позволяет записать условия связи между перемещениями точек крепления вант нижнего и верхнего ярусов:

$$v_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} v_{22}, \quad v_{11} = -\frac{a_{11}}{a_{21}} v_{21}.$$

По этой причине в эпюре моментов по мере приближения к состоянию  $p_1 \rightarrow 0$  присутствует асимметричная составляющая. Степень ее проявления зависит от различия длин пролетов (параметр  $k_l$ ) и интенсивности их загрузки. Энергетически оптимальному состоянию системы при интегральной оценке усилий и деформаций всех элементов системы соответствует значение параметра  $p_1 = 0,341$ . Эпюра моментов для него показана жирной линией.

Подбор требуемых значений структурных элементов выполняется по нормативным критериям прочности, жесткости и др. При этом найденные значения свободных параметров должны обеспечивать расчетные соотношения, полученные на оптимизационном этапе. В работе [19] на примере шпренгельной балки было показано, что энергетически оптимальная комбинированная система дает минимум расхода материалов (или их стоимости в неоднородной системе).

**Выводы.** Энергетический интегральный критерий минимума энергии деформации позволяет эффективно учитывать сложные эффекты связанности усилий и деформаций в изгибаемых и растянутых элементах комбинированной системы при варьировании жесткостей и геометрических параметров. Найденная оптимальная конфигурация расчетной схемы выявляет комплекс параметров системы, обеспечивающих ее высокие качественные показатели: несущую способность, прочность и жесткость при сокращении стоимости материалов.

Библиографический список

1. Амосков М. М. Перспективы развития вантовых мостов // Перспективы науки. 2010. № 7 (6). С. 24–31.
2. Васильева А. М., Малкова А. С., Сергеев А. С. Преимущества вантовых конструкций в строительстве мостовых сооружений // Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе. 2024. Т. 1. С. 123–126.
3. Перельмутер А. В. Задачи синтеза в теории сооружений (краткий исторический обзор) // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 1. С. 70–106.
4. Ляхович Л. С., Перельмутер А. В. Некоторые вопросы оптимального проектирования строительных конструкций // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2014. Т. 10, № 2. С. 14–23.
5. Журавлев А. А., Журавлев Д. А., Корнет Д. А. К вопросу о расчете конструкции призматической балки с многостоечным шпренгелем // Инженерный вестник Дона. 2022. № 7 (91). С. 280–292.
6. Волоткович Д. А., Кучеренко И. В., Мищенко А. В. Оптимизация мачтовых конструкций антенных устройств на основе энергетического критерия // Труды Военно-космической академии им. А. Ф. Можайского. 2022. № 684. С. 325–333.
7. Гребенюк Г. И., Дмитриев П. А., Стрижаков Ю. Д., Кучеренко И. В. Оптимизация параметров деревянных рамных конструкций с узловыми соединениями на нагелях // Известия вузов. Строительство. 1999. № 11 (491). С. 4–9.
8. Гребенюк Г. И., Яньков Е. В., Кучеренко И. В. Оптимизация элементов и узловых соединений рамных конструкций // Проблемы оптимального проектирования сооружений: доклады Всерос. семинара. 1997. С. 76–84.
9. Мищенко А. В., Немировский Ю. В. Оптимизация слоисто-неоднородных рам на основе кусочно-непрерывных условий прочности // Актуальные вопросы строительства: материалы V Всерос. науч.-техн. конф. 2012. С. 69–74.
10. Мищенко А. В. Энергетическая оптимизация структурно-неоднородной двухшарнирной рамы // Строительная механика и конструкции. 2022. № 3 (34). С. 71–81. DOI: 10.36622/VSTU.2022.34.3.005.
11. Юрьев А. Г. Естественный фактор оптимизации топологии конструкций // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. 2013. № 5. С. 46–48.
12. Юрьев А. Г., Панченко Л. А., Зинькова В. А. Структурный синтез стержневых систем // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. 2022. № 10. С. 34–40.
13. Зинькова В. А. Оптимизация топологии металлических ферм // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. 2015. № 2. С. 37–40.
14. Лоцманова В. С., Владимирова Е. А. Оптимизация опорных устройств рамных систем на основе энергетического критерия // Традиции, современные проблемы и перспективы развития строительства: сб. науч. ст. Гродно: Гродненский гос. ун-т им. Я. Купалы, 2021. С. 141–145.
15. Юрьев А. Г., Панченко Л. А. Энергетическое начало в теории синтеза конструкций // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухова. 2023. № 10. С. 35–41.
16. Wasiutynski Z. On the congruency of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength // Bull. Acad. Pol. Sci. Tech. 1960. V. 8, no. 6. Pp. 259–268.
17. Мищенко А. В., Кучеренко И. В. О соответствии общефизических и технико-экономических критериев оптимизации механических систем // Материалы Всерос. науч.-практ.

конф. «Инновационные технологии укрепления грунтовых массивов на транспортных коммуникациях в сложных геологических условиях» (17 июня 2025 г.). СПб, Петергоф: ВИ (ЖДВ и ВОСО), 2025. С. 183-191.

18. Мищенко А. В. Напряженное состояние структурно-неоднородных стержней из разномодульных материалов при термосиловом воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2016. № 4. С. 43–52. <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/10984>.

19. Мищенко А. В., Потапова С. А. Рациональная конфигурация двухстоечной шпренгельной балки // Строительная механика и конструкции. 2023. № 3 (38). С. 117–127.

## References

1. Amoskov M.M. Prospects for the development of cable-stayed bridges. *Perspectives of Science*. No. 7(6). 2010. Pp. 24–31.
2. Vasilyeva A.M., Malkova A.S., Sergeev A.S. Advantages of cable-stayed structures in bridge construction. *Modernization and Scientific Research in the Transport Sector*. Vol. 1. 2024. Pp. 123–126.
3. Perelmuter A.V. Problems of synthesis in the theory of structures (a brief historical review). *Bulletin of Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering*. No. 1. 2016. Pp. 70–106.
4. Lyakhovich L.S., Perelmuter A.V. Some issues of optimal design of building structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Vol. 10. No. 2. 2014. Pp. 14–23.
5. Zhuravlev A.A., Zhuravlev D.A., Kornet D.A. On the calculation of the design of a prismatic beam with a multi-column truss. *Engineering Bulletin of the Don*. No. 7(91). 2022. Pp. 280–292.
6. Volotkovich D.A., Kucherenko I.V., Mishchenko A.V. Optimization of mast structures of antenna devices based on the energy criterion. *Proceedings of the A. F. Mozhaisky Military Space Academy*. No. 684. 2022. Pp. 325–333.
7. Grebenyuk G.I., Dmitriev P.A., Strizhakov Yu.D., Kucherenko I.V. Optimization of the parameters of wooden frame structures with nodal connections on dowels. *News of Universities. Construction*. No. 11(491). 1999. Pp. 4–9.
8. Grebenyuk G.I., Yankov E.V., Kucherenko I.V. Optimization of elements and nodal connections of frame structures. *Problems of optimal design of structures: reports of the All-Russian seminar*. 1997. Pp. 76–84.
9. Mishchenko A.V., Nemirovsky Yu.V. Optimization of layered heterogeneous frames based on piecewise continuous strength conditions. *Actual Issues in Construction: Materials of the V All-Russian Scientific and Technical Conf*. 2012. Pp. 69–74.
10. Mishchenko A.V. Energy optimization of a structurally heterogeneous double-hinged frame. *Structural Mechanics and Structures*. No. 3(34). 2022. Pp. 71–81. DOI: 10.36622/VSTU.2022.34.3.005.
11. Yuryev A.G. Natural factor of structural topology optimization. *Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov*. No. 5. 2013. Pp. 46–48.
12. Yuryev A.G., Panchenko L.A., Zinkova V.A. Structural synthesis of beam systems. *Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov*. No. 10. 2022. Pp. 34–40.
13. Zin'kova V.A. Optimization of the topology of metal trusses. *Bulletin of the Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov*. No. 2. 2015. Pp. 37–40.
14. Lotsmanova V.S., Vladimirova E.A. Optimization of supporting devices of frame systems based on the energy criterion. *Traditions, Modern Problems and Prospects for the Development*

of Construction: Collection of Scientific Articles. Grodno: Grodno State University named after Yanka Kupala. 2021. Pp. 141–145.

15. Yuryev A.G., Panchenko L.A. Energy principle in the theory of synthesis of structures. Bulletin of the BSTU named after V. G. Shukhov. No. 10. 2023. Pp. 35–41.

16. Wasiutynski Z. On the congruence of the forming according to the minimum potential energy with that according to the equal strength. Bull. Acad. Pol. Sci. Tech. 1960. Vol. 8. No. 6. Pp. 259–268.

17. Mishchenko A.V., Kucherenko I.V. On the correspondence of general physical and technical-economic criteria for optimizing mechanical systems. Proc. All-Russian Scientific-Practical Conference "Innovative Technologies for Strengthening Soil Massifs on Transport Communications in Complex Geological Conditions" (June 17, 2025). St. Petersburg, Peterhof: VI (ZhDV i VOSO). 2025. Pp. 183–191.

18. Mishchenko A.V. Stress state of structurally inhomogeneous rods made of materials with different modulus under thermal and force action. Structural Mechanics of Engineering Structures and Buildings. No. 4. 2016. Pp. 43–52. <http://journals.rudn.ru/structural-mechanics/article/view/10984>.

19. Mishchenko A.V., Potapova S.A. Rational configuration of a two-column truss beam. Structural Mechanics and Structures. No. 3(38). 2023. Pp. 117–127.

## OPTIMIZATION OF THE PARAMETERS OF A COMBINED BEAM-CABLE SYSTEM

A. V. Mishchenko <sup>1</sup>, A. A. Tasova <sup>2</sup>

Novosibirsk Higher Military Command School Order of Zhukov <sup>1</sup>  
Russia, Novosibirsk

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) <sup>1,2</sup>  
Russia, Novosibirsk

---

<sup>1</sup> Dr. of Technical Sciences, Head of the Department of General Professional Disciplines,  
Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(383)266-33-80, e-mail: [mishchenko.av59@yandex.ru](mailto:mishchenko.av59@yandex.ru)

<sup>2</sup> Student of the Faculty of Civil Engineering, tel.: +7(983)582-53-40, e-mail: [a.tasova@sibstrin.ru](mailto:a.tasova@sibstrin.ru)

---

This paper considers the optimization problem of a heterogeneous beam-cable-stayed combined system using the criterion of minimum elastic potential energy. The set of variable parameters includes an adjustable ratio of the bending stiffness of the beam and the stiffness of the stretched cables, which is the main factor influencing the distribution of forces and deformations in the system. Additionally, the inclination angles of the two groups of cable-stayed elements are varied. The basic relations and the optimization problem are written in relative dimensionless quantities using an isoperimetric condition for the system's rigidity characteristics as an equality constraint. The graph shows the dependence of the system's strain energy upon varying three parameters controlling the stiffness distribution and cable inclination. The optimal values of the varied parameters correspond to the minimum points on the energy surface.

**Keywords:** beam-cable system, optimal system configuration, energy criterion, minimum potential strain energy, strength of the combined system.

УДК 69.07

DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.008

## ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ МЕМБРАННЫХ КОНСТРУКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

А. Р. Туснин<sup>1</sup>, Е. К. Грачева<sup>2</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой металлических и деревянных конструкций, директор ИПГС, тел.: +7(916)115-14-21, e-mail: tusninar@mgsu.ru

<sup>2</sup> Аспирант кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7(903)863-73-88, e-mail: ketrincat1@yandex.ru

**Введение.** Мембранные покрытия широко применяются в строительстве в качестве эффективных конструктивных решений для возведения большепролётных сооружений. Их используют при проектировании крытых спортивных комплексов, выставочных павильонов, аквапарков и др. Мембранные системы совмещают несущие и ограждающие функции, позволяют перекрывать большие пролёты, что делает их востребованными в современном строительстве.

**Материалы и методы.** Рассмотрена возможность применения вычислительных комплексов «Лира 9.6», «Лира САПР» 2022», «Лира 10.10», «SCAD Office 21.1.9.9», «NASTRAN», «ANSYS», «STK» для расчета мембранных конструкций. Достоверность получаемых численных результатов оценена при проведении тестовых расчётов плоских мембранных покрытий квадратных в плане с размерами 30×30 метров с абсолютно жёстким и податливым опорным контуром. Расчёты выполнены с учётом геометрической нелинейности системы. Рассмотрено влияние податливости опорного контура на распределение усилий в мембране и опорном контуре.

**Результаты.** Приведены результаты численных исследований мембранного покрытия с абсолютно жестким и податливым контуром. Проведено сравнение результатов в программных комплексах «ANSYS» и «Лира 9.6» при различных вариантах сетки разбиения: 30×30, 60×60, 80×80, 100×100. По результатам численного анализа сформулированы рекомендации по применимости рассматриваемых вычислительных комплексов для расчёта мембранных систем.

**Выводы.** При моделировании мембранных покрытий с податливым контуром наиболее точные и достоверные результаты были получены с помощью программных комплексов «Лира 9.6», «Лира 10.10», «Лира САПР», «ANSYS», «STK». Оптимальным размером сетки разбиения для расчета мембранного покрытия оказалась сетка 100×100.

**Ключевые слова:** мембрана, опорный контур, сетка разбиения, геометрическая нелинейность, метод конечных элементов, метод стержневой аппроксимации.

**Введение.** Мембранное покрытие представляет собой висячую конструкцию, пролётная часть которой выполнена в виде тонколистовой стальной оболочки — мембраны, работающей преимущественно на растяжение. Для восприятия распора мембраны часто используется замкнутый опорный контур [1]. Мембрана по периметру покрытия крепится к опорному контуру и передаёт на него цепные усилия, возникающие в ней при загрузке покрытия поперечной нагрузкой. В качестве мембраны используются металлические листы из стали или алюминиевых сплавов. Наиболее широко применяются мембраны из углеродистых или низколегированных сталей. Перспективным материалом для мембранных систем являются нержавеющие стали за счёт своей высокой коррозионной стойкости. В качестве примера мембранных систем с замкнутым опорным контуром можно упомянуть спортивные сооружения, построенные в нашей стране к Олимпиаде-80 [2]. Для повышения жёсткости и несущей способности, стабилизации формы оболочки в составе покрытия может предусматриваться дополнительный жёсткий элемент — монолитная железобетонная плита [3–6].

Оптимальной в плане формой мембранного покрытия считается круглая или овальная, но в некоторых случаях применяется прямоугольная [7]. Помимо жёстких металлических оболочек, в строительстве широко применяются и гибкие мембранные материалы – тканевые или полимерные тенты, работающие на растяжение [8–10].

В работе [11] представлены результаты испытаний строительной конструкции с покрытием из технической ткани, нагруженной равномерно распределённой нагрузкой на половину конструкции. В работе [12] П. Г. Еремеев рассматривает вопросы применения мембранных конструкций в составе ограждающих систем покрытий стадионных трибун.

Мембранные покрытия находят применение в архитектуре и строительстве при проектировании крытых спортивных арен, павильонов, бассейнов и временных сооружений [13–17]. Примеры современных сооружений с мембранными покрытиями:

1. Конькобежный центр в Коломне, построенный в 2006 году (рис. 1). Мембрана толщиной 4 мм выполнена из стального листа. Опорный контур прямоугольного сечения –  $1.2 \times 1.5$  м, выполненный из стального короба, заполненного бетоном. Покрытие в плане имеет эллипсоидную форму размерами  $200 \times 110$  м, что оказалось наиболее экономичным по расходу стали и сокращению отапливаемого объема здания вариантом. Расчет производился в программных комплексах «Лира 9.2» (модуль «Монтаж+») и «ABAQUS» в геометрически нелинейной постановке [18];



**Рис. 1.** Конькобежный центр в г. Коломне

2. Хоккейный стадион в Ангарске, построенный в 2007 году (рис. 2). Был применен новый тип мембранной оболочки на прямоугольном плане с размерами  $90 \times 87$  м. Мембрана толщиной 4 мм выполнена из стального листа. Опорный контур оболочки имеет прямоугольное сечение размерами  $1.2 \times 1.5$  м, выполнен в виде заполненного бетоном стального короба с уложенной внутри арматурой [18];



**Рис. 2.** Хоккейный стадион в г. Ангарске

3. «Expo Axis» в Шанхае. Сооружение состоит из непрерывных мембранных элементов треугольной формы, выполненных из двухслойной мембраны из стали и стекла. Результаты расчёта показывают, что несущая способность двухслойной мембранной конструкции в 1.8 раза выше, чем у однослойной [19].

При устройстве на мембране монолитной железобетонной плиты существенно повышается жёсткость и несущая способность покрытия. Мембрана в такой конструкции является не только важным несущим элементом, но и одновременно служит несъемной опалубкой. В [20] приведены результаты теоретических, численных и экспериментальных исследований мембранных систем. Численные исследования выполнены в программном комплексе «Ли́ра САПР» с учётом конструктивной, геометрической и физической нелинейности.

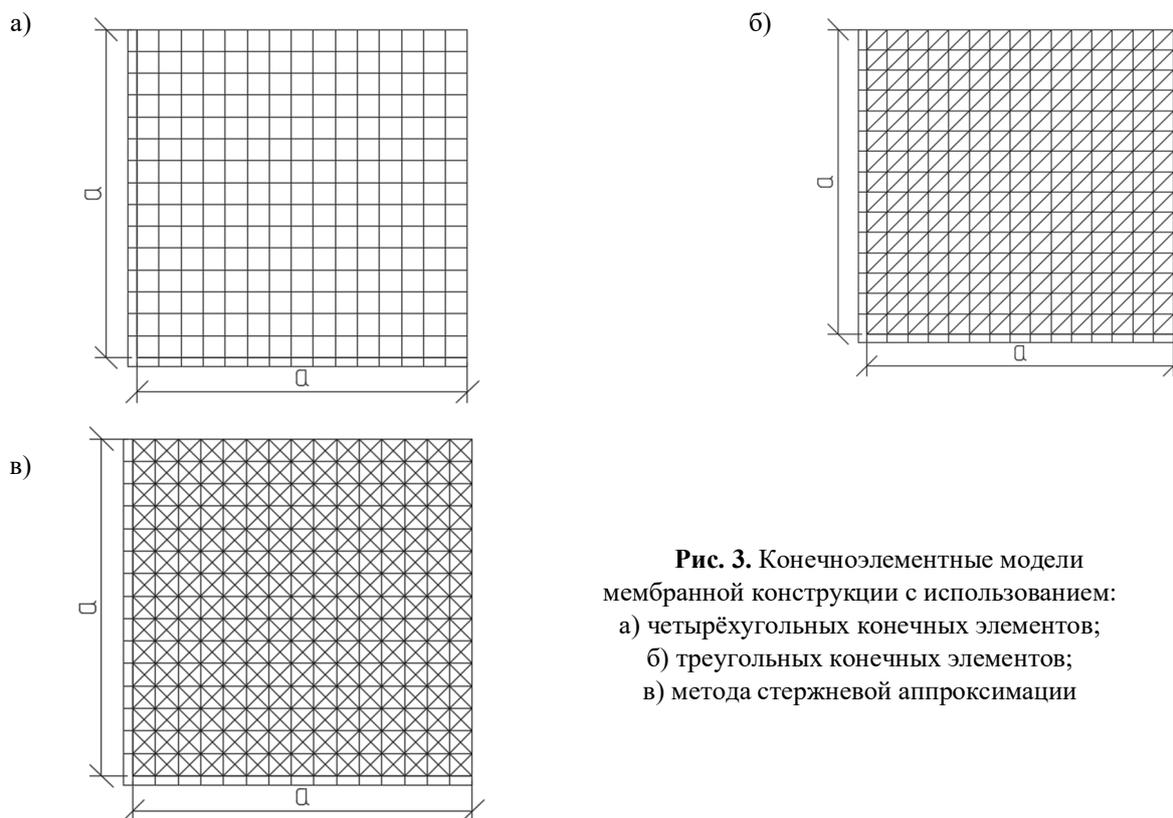
**Материалы и методы.** Расчёт мембранных конструкций следует выполнять с учётом их геометрической нелинейности, т. е. учитывать влияние на распределение усилий и перемещений деформаций системы и накопленных усилий в процессе нагружения. Возможность расчёта геометрически нелинейных систем заявлена во всех современных вычислительных комплексах. В Российской Федерации широко применяются в научных исследованиях и проектных работах такие вычислительные комплексы, как «Ли́ра 9.6», «Ли́ра САПР 2022», «Ли́ра 10.10», «SCAD Office 21.1.9.9», «NASTRAN», «ANSYS». Несмотря на заявленную возможность расчёта геометрически нелинейных систем, необходимо проверять возможность получения достоверных численных результатов при расчёте конкретных нелинейных строительных конструкций. Ранее [21] такой анализ указанных комплексов уже был выполнен и показал возможность применения некоторых из них для расчёта мембранных систем. Появление новых версий вычислительных комплексов, в которые включены дополнительные возможности, реализованы усовершенствованные вычислительные процедуры, требует всесторонней оценки их способности рассчитать мембранные конструкции с достаточной точностью.

Для оценки достоверности численных расчётов с применением современных вычислительных комплексов проведены тестовые расчёты мембранного покрытия, квадратного в плане, размерами  $30 \times 30$  м с плоским замкнутым опорным контуром. Мембранная оболочка первоначально плоская, стальная, толщиной 1.5 мм. На покрытие действуют: постоянная нагрузка  $q_p = 0.6$  кПа и снеговая нагрузка  $q_{sn} = 1.8$  кПа, суммарная нагрузка – 2.4 кПа.

На основании предварительного анализа возможностей вычислительных комплексов для моделирования мембраны рассматривалась возможность использования четырёхугольных и треугольных конечных элементов оболочки. Опорный контур моделировался стержневыми конечными элементами. Во всех рассмотренных вычислительных комплексах вышеперечисленные конечные элементы используются. В некоторых комплексах необходимо выбирать такие конечные элементы, которые могут использоваться при расчёте геометрически нелинейных систем. С учётом ранее полученных результатов [21] и анализа возможностей современных версий комплексов при использовании вычислительных систем «Ли́ра», «SCAD» и «NASTRAN» были использованы четырёхугольные конечные элементы оболочки. Комплекс «ANSYS» показал возможность расчёта мембранных конструкций при использовании треугольных конечных элементов. В программных комплексах «Ли́ра» и «NASTRAN» треугольные конечные элементы не рассматривались, т. к. ранее полученные результаты [21] дали существенное отличие от других способов расчёта. Вычислительный комплекс «STK», разработанный на кафедре металлических и деревянных конструкций НИУ МГСУ, для моделирования мембранных оболочек использует метод стержневой аппроксимации (МСА), апробированный для расчёта мембранных конструкций [2, 22]. Также расчёт мембраны методом стержневой аппроксимации выполнялся в программных комплексах «Ли́ра 9.6» и «Ли́ра САПР».

При проведении расчётов сетка конечных элементов накладывалась на всё покрытие. С учётом симметрии конструкции для уменьшения времени счёта рассматривалась четверть покрытия размерами  $15 \times 15$  м. На оси симметрии накладывались связи, моделирующие наличие примыкающих участков конструкции. На рис. 3 представлены конечноэлементные модели

с использованием четырёхугольных и треугольных конечных элементов, а также с применением метода стержневой аппроксимации.



**Рис. 3.** Конечноэлементные модели мембранной конструкции с использованием:  
 а) четырёхугольных конечных элементов;  
 б) треугольных конечных элементов;  
 в) метода стержневой аппроксимации

Для оценки работоспособности вычислительных комплексов сначала были выполнены расчёты квадратных мембранных покрытий с абсолютно жёстким опорным контуром. Теоретические значения прогибов и напряжений в мембране при несмещаемых краях мембраны (абсолютно-жёсткий контур) [22] составляют:

- прогиб в центре мембраны:

$$w_o = 0.724 \sqrt[3]{\frac{qa^4}{Et}} = 0.530 \text{ м}, \quad (1)$$

где  $q = 2.4$  кПа,  $a = 15$  м,  $E = 2.06 \cdot 10^8$  кПа;

- напряжения в центре мембраны:

$$\sigma_{ц} = 0.432 \sqrt[3]{\frac{q^2 a^2 E}{t^2}} = 21.2 \text{ кН/см}^2; \quad (2)$$

- напряжения в месте примыкания мембраны к середине опорного контура:

$$\sigma_{к} = 0.503 \sqrt[3]{\frac{q^2 a^2 E}{t^2}} = 24.7 \text{ кН/см}^2. \quad (3)$$

- изгибающие моменты в горизонтальной плоскости контура:

- в пролете:

$$M_{1X} = 0.076 a^2 \sqrt[3]{q^2 a^2 E t} = 12604 \text{ кНм};$$

- на опоре:

$$M_{2X} = 0.132 a^2 \sqrt[3]{q^2 a^2 E t} = 21892 \text{ кНм};$$

- усилия сжатия в контуре:

$$N_k = 0.032 a^3 \sqrt{q^2 a^2 E t} = 3538 \text{ кНм.}$$

Мембранное покрытие при использовании МСА аппроксимируется шарнирно-стержневой системой, продольные жесткости элементов которой определяются исходя из эквивалентности деформаций и усилий стержневой модели и элемента мембраны. Типовую ячейку шарнирно-стержневой модели рекомендуется принимать с двумя диагональными связями [22].

Для квадратной ячейки стержневой модели при  $\Delta x = \Delta y$  площади сечения элементов определяются по формулам:

$$F_1 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \Delta x t;$$

$$F_2 = F_3 = \frac{3}{8} \Delta x t,$$

где  $t$  – толщина мембраны;  $\Delta x$  – размер стороны ячейки стержневой модели.

Расчёты мембранного покрытия с абсолютно жёстким контуром дополнялись расчётом этого покрытия с контуром конечной жёсткости. Это обусловлено тем, что на практике чаще всего используются мембранные системы с податливым опорным контуром. При загрузке конструкции опорный контур деформируется, и соединённая с ним кромка мембраны перемещается, что существенно влияет на работу конструкции. Перемещение кромки мембраны повышает нелинейность системы и усложняет работу вычислительных комплексов. Это требует дополнительного изучения расчёта мембранных систем с податливым на изгиб и сжатие опорным контуром конкретным вычислительным комплексом.

Для оценки податливости контура используются относительные жёсткости опорного контура – продольная и изгибная [22]. Известно, что из-за податливости контура напряжения в квадратной мембране распределяются крайне неравномерно. Напряжённо-деформированное состояние конструкции зависит от начального провиса мембраны. Наиболее сложно рассчитать систему, в которой нагрузка прикладывается к первоначально плоской мембране, закреплённой на податливом контуре. Расчёты выполнены для мембранной системы, использованной выше при тестовом расчёте конструкции с абсолютно жёстким контуром. Для оценки жесткостных параметров контура используются его относительные жёсткости:

- относительная продольная жёсткость  $k$ :

$$\bar{k} = \frac{(EA)_k}{E t a};$$

- относительная изгибная жёсткость  $n$ :

$$\bar{n} = \frac{(EI)_k}{E t a^3},$$

где  $(EI)_k$  и  $(EA)_k$  – изгибная и продольная жесткости контура;  $E$  и  $t$  – модуль упругости и толщина мембраны;  $a$  – половина пролёта квадратного мембранного покрытия (рис. 3).

С учётом ранее проведённых исследований рассмотрена работа мембранного покрытия при трёх вариантах жесткостей опорного контура:

- 1 вариант:  $\bar{k} = 0.5$ ,  $\bar{n} = 0.000025$ ;
- 2 вариант:  $\bar{k} = 1$ ,  $\bar{n} = 0.00005$ ;
- 3 вариант:  $\bar{k} = 2$ ,  $\bar{n} = 0.0001$ .

Выбранные для исследования варианты жесткостей изменяются в практическом диапазоне используемых опорных контуров. В табл. 1 представлены жесткостные параметры опорного контура для трёх рассмотренных вариантов.

Важным аспектом расчёта геометрически нелинейных систем является выбор способа приложения нагрузки. В комплексах «NASTRAN» и «ANSYS» применяются заложенные в

них алгоритмы. В комплексах «Ли́ра», «СКАД» и «STK» используется шаговый метод с разбивкой нагрузки на 20 шагов в соответствии с известными рекомендациями [22] и определением доли нагрузки на каждом шаге по формуле:

$$\Delta q_i = q \frac{3i^2 - 3i + 1}{N^3},$$

где  $q$  – суммарная расчетная нагрузка на мембранное покрытие;  $N$  – количество ступеней нагружения.

Таблица 1

Жесткостные параметры опорного контура

Параметры покрытия	Тип контура		
	1	2	3
Пролёт, м	30	30	30
Толщина мембраны, мм	1.5	1.5	1.5
Относительная продольная жёсткость	0.5	1	2
Относительная изгибная жёсткость	0.000025	0.00005	0.0001
Модуль упругости, кПа	206000000	206000000	206000000
Продольная жёсткость, кН	2317500	4635000	9270000
Изгибная жёсткость, кН/м <sup>2</sup>	26072	52144	104288
Площадь сечения, м <sup>2</sup>	0.01125	0.02250	0.04500
Момент инерции, м <sup>4</sup>	0.0001266	0.0002531	0.0005063

На результаты численных расчётов мембранных конструкций значительное влияние оказывает сетка разбиения на конечные элементы. Первоначально была принята сетка разбиения покрытия 30×30 (15×15 на четверти покрытия), что позволяет, как показали ранее проведённые исследования [2], получать достаточно достоверные данные о напряжённо-деформированном состоянии мембранных систем. Далее для более глубокого исследования влияния сетки разбиения на результаты были использованы сетки 60×60, 80×80 и 100×100. С учётом симметрии системы для уменьшения размерности конечно-элементной модели и сокращения времени расчёта рассматривалась четверть конструкции с наложением по осям симметрии соответствующих связей, учитывающих отсутствующие части конструкции. Опорный контур закреплялся во всех узлах в вертикальном направлении.

**Результаты расчета мембранного покрытия с абсолютно жестким контуром.** В табл. 2 представлены результаты численных расчётов и их сравнение с теоретическим решением.

Таблица 2

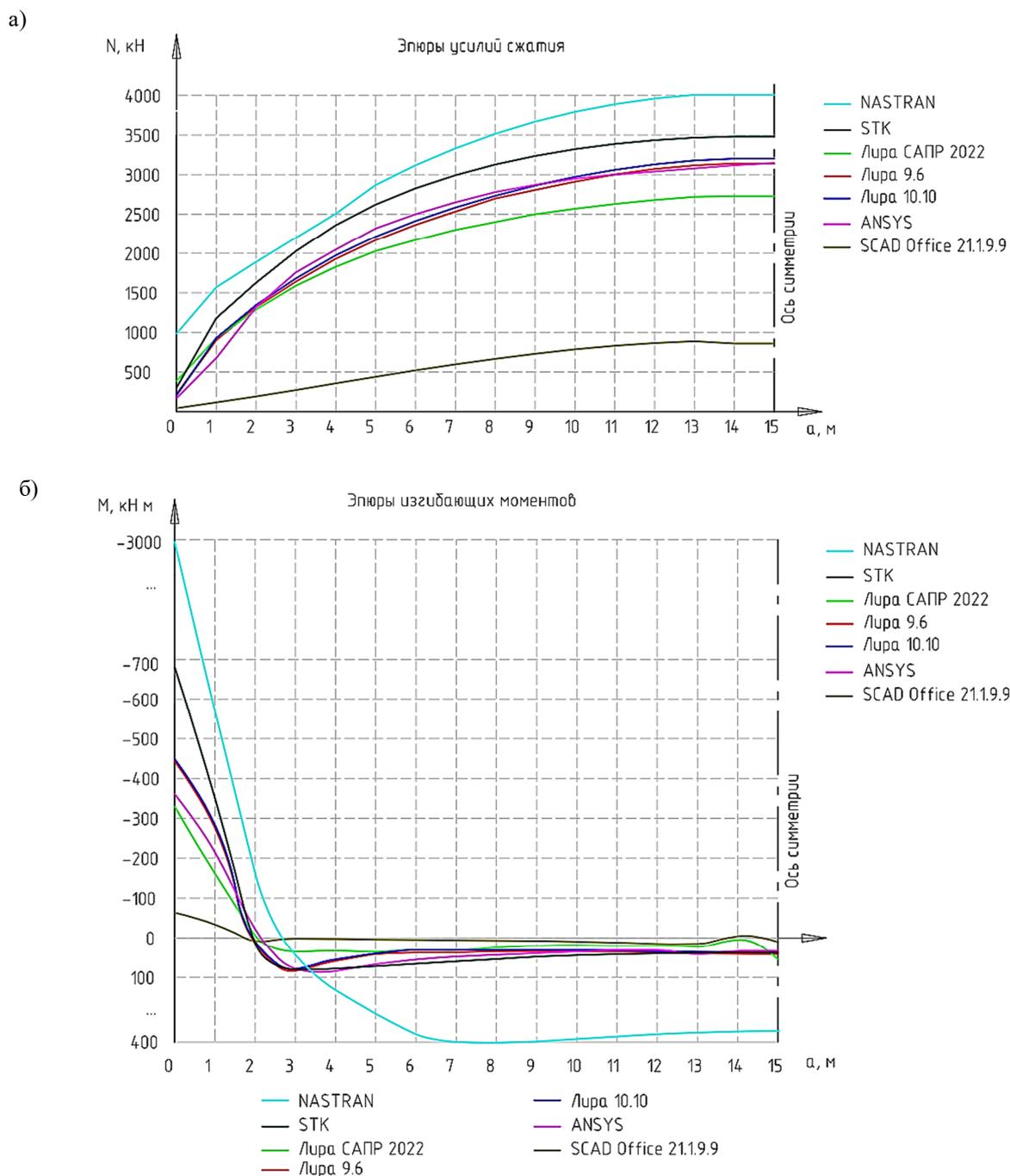
Результаты расчёта первоначально плоского мембранного покрытия с абсолютно жёстким контуром на сетке 30×30

Расчётные параметры	Теория	«Ли́ра 9.6»	«Ли́ра САПР 2022»	«Ли́ра 10.10»	«SCAD Office 21.1.9.9»	«NASTRAN»	«ANSYS»
$w$ , мм / %	530/100	539/101.7	538/101.5	548.8/103.5	595/112.5	530/100	546/103
$\sigma_{iy}$ , МПа / %	212/100	209/98.6	211/99.5	192/90.6	93/43.9	212/100	218/103
$\sigma_{kz}$ , МПа / %	247/100	245/99.2	241/97.6	252/102	157/63.5	265/107.3	244/98.8
$M_{1x}$ , кНм / %	12604/100	12723/100.9	12500/99.2	12810/101.6	8743/69.4	11942/94.7	11800/93.6
$M_{2x}$ , кНм / %	21892/100	22446/102.5	22300/101.9	22600/103.2	15460/70.6	21046/96.1	20000/91.4
$N_k$ , кНм / %	3538/100	3661/103.5	3680/104	3685/104.2	2520/71.2	3282/92.8	3350/94.7

Анализ результатов тестовых численных расчетов, выполненных с использованием различных программных комплексов, показал, что большинство из них пригодны для расчета мембранных конструкций с абсолютно жёстким контуром. Исключение составляют расчеты, выполненные в «SCAD Office 21.1.9.9». При использовании этого комплекса прогиб центра мембраны оказался на 12.5 % больше, напряжения в центре мембраны на 56.1 % меньше, напряжения в месте примыкания мембраны к середине опорного контура на 36.5 % меньше,

усилия и изгибающие моменты в пролете и на опоре в контуре меньше на 28.8–30.4 % теоретических значений. Все остальные комплексы показали значения, близкие к теоретическим, отличие в прогибе составило до 3.5 %, напряжения в центре мембраны по оси симметрии – до 9.4 %, напряжения в месте примыкания мембраны к середине опорного контура – до 7.3 %, изгибающие моменты в горизонтальной плоскости контура в пролете – до 6.4 %, на опоре – до 8.6 %, усилия в контуре – до 5.3 %.

**Результаты расчета мембранного покрытия с податливым контуром.** На рис. 4 представлены эпюры изгибающих моментов в горизонтальной плоскости продольных сил в опорном контуре с относительными жёсткостями  $k = 1.0$ ,  $n = 0.0005$ , полученные на сетке  $30 \times 30$ .



**Рис. 4.** Эпюры в опорном контуре в программных комплексах: «NASTRAN», «ANSYS», «STK», «Ли́ра 9.6», «Ли́ра САПР» 2022, «Ли́ра 10.10», «SCAD Office 21.19.9»: а) эпюры усилий сжатия; б) эпюры изгибающих моментов

На основании анализа распределения усилий в опорном контуре можно сделать вывод, что комплексы «Ли́ра 9.6», «Ли́ра САПР 2022», «Ли́ра 10.10», «ANSYS», «STK» дают возможность определения усилий в опорном контуре, качественно наиболее близких к ранее выявленному характеру работы мембранных систем.

Результаты численных расчётов мембранного покрытия с тремя вариантами опорного контура на сетке разбиения 30×30 представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты расчёта первоначально плоского мембранного покрытия с податливым опорным контуром без распорок на сетке 30×30

Расчётные параметры	«Ли́ра 9.6»		«Ли́ра САПР 2022»		«NASTRAN»	«Ли́ра 10.10»	«SCAD Office 21.1.9.9»	«ANSYS»	«STK»
	МКЭ	МСА	МКЭ	МСА	МКЭ	МКЭ	МКЭ	МКЭ	МСА
Тип контура 1									
<i>w</i> , мм	1131	1140	1090	1110	980	1163	595	1112	1170
<i>u</i> , мм	83.6	83	57.8	77.8	74	98	13.3	85.6	120
<i>N<sub>np</sub></i> , кН	-2721	-2503	-2190	-2370	-3980	-2774	-686	-2650	-3000
<i>N<sub>on</sub></i> , кН	-20.6	-106	-261	-86.6	-722	-10	-17.5	-31.2	-64.2
<i>M<sub>np</sub></i> , кН м	23.8	12	31.2	9.92	172	23.8	6.8	18.7	5.89
<i>M<sub>on</sub></i> , кН м	-212	-282	-161	-256	-1868	-212	-21.5	-193	-237
<i>σ<sub>max</sub></i> , МПа	445	410	454	339	669	445	144	715	660
Тип контура 2									
<i>w</i> , мм	1062	1070	1040	1040	940	1091	587	1039	1080
<i>u</i> , мм	69.7	73.1	53.4	68.9	65	78	12.8	70	101
<i>N<sub>np</sub></i> , кН	-3141	-3080	-2730	-2930	-4031	-3203	-860	-3130	-3480
<i>N<sub>on</sub></i> , кН	-213	-285	-385	-252	-984	-205	-44	-171	-303
<i>M<sub>np</sub></i> , кН м	37.9	28	55.2	27.7	338	37	53	34	37.1
<i>M<sub>on</sub></i> , кН м	-447	-518	-330	-474	-2736	-449	-8.5	-361	-351
<i>σ<sub>max</sub></i> , МПа	483	420	494	267	561	486	144	715	647
Тип контура 3									
<i>w</i> , мм	1011	1010	992	986	898	1037	580	985	1020
<i>u</i> , мм	60.6	64.9	49.7	61.3	55	66.2	12.5	60	84.3
<i>N<sub>np</sub></i> , кН	-3445	-3470	-3180	-3300	-4007	-3513	-1025	-3460	-3810
<i>N<sub>on</sub></i> , кН	-422	-477	-205	-430	-1225	-418	-79	-345	-550
<i>M<sub>np</sub></i> , кН м	62.7	58	47.7	58.7	642	62.8	30	65.6	63.8
<i>M<sub>on</sub></i> , кН м	-809	-863	-605	-796	-3845	-812	-105	-661	-553
<i>σ<sub>max</sub></i> , МПа	479	401	501	193	452	483	422	674	590

Анализ результатов показал, что численные результаты, полученные комплексами «Ли́ра 9.6», «Ли́ра САПР», «Ли́ра 10.10», «NASTRAN», «ANSYS», «STK», качественно близки к ранее полученным параметрам напряжённо-деформированного состояния [22, 23]. Результаты расчётов с использованием «SCAD Office 21.1.9.9» совершенно не соответствуют ранее выявленному характеру распределения усилий и перемещениям в квадратной мембранной конструкции и в дальнейшем не использовались при проведении тестовых расчётов.

Прогибы центра мембраны, полученные при использовании программных комплексов «Ли́ра 9.6», «Ли́ра САПР», «Ли́ра 10.10», «STK», «NASTRAN» отличаются не более, чем на 11.8 %. Прогибы контура, полученные в программных комплексах «Ли́ра 9.6», «Ли́ра 10.10» и «NASTRAN», «ANSYS» отличаются до 14.5 %, а при использовании программных комплексов «Ли́ра САПР 2022» и «STK» разница увеличивается до 32–40 %.

Максимальные продольные усилия, действующие в середине опорного контура, при использовании программных комплексов «Ли́ра 9.6», «Ли́ра САПР», «Ли́ра 10.10», «STK», «ANSYS» отличались друг от друга от 1 до 17.3 %, а при использовании комплекса «NASTRAN» разница составляла 15–50 %. Максимальные изгибающие моменты в программных комплексах «Ли́ра 9.6» и «Ли́ра 10.10», «Ли́ра САПР 2022», «STK», «ANSYS» отличались от 19 до 36 %. При этом максимальные изгибающие моменты, полученные комплексом

«NASTRAN», превышали определённые другими комплексами значения изгибающего момента до 10 раз. Эквивалентные напряжения, полученные рассмотренными комплексами, отличались от 13 до 71 %.

Программный комплекс «Ли́ра 9.6» и «Ли́ра САПР» показали хорошее соответствие результатов с результатами программного комплекса «ANSYS». Вычислительный комплекс «NASTRAN» позволил получить качественно соответствующие действительной работе конструкции, однако в рамках рассматриваемой расчётной модели численные значения отдельных параметров существенно отличались от результатов, полученных в программном комплексе «ANSYS», – до 10 раз, что ограничивает возможность его применения для расчёта мембранных систем с податливым контуром. Вычислительный комплекс «SCAD» не позволил получить достоверные результаты при расчёте геометрически нелинейной мембранной конструкции и не может использоваться для расчёта подобных систем.

**Результаты расчета мембранного покрытия с податливым контуром на разных сетках разбиения.** На точность численного моделирования мембранных конструкций с податливым контуром большое влияние оказывает сетка разбиения. Для оценки чувствительности результатов к разбиению сетки конечных элементов, расчеты были проведены с различными сетками разбиения: 30×30, 60×60, 80×80 и 100×100. Анализ влияния сетки разбиения на точность численного решения выполнен для комплексов «ANSYS» и «Ли́ра 9.6», которые показали полное качественное соответствие ранее полученным данным о напряжённо-деформированном состоянии мембранных покрытий на прямоугольном плане с плоским опорным контуром и неплохое качественное совпадение с известными данными [22, 23]. Кроме того, оба эти комплекса позволяют моделировать системы с конструктивной нелинейностью, что необходимо для расчёта мембранных конструкций с формируемой на мембране железобетонной плитой. В табл. 4 и 5 представлены результаты численных расчётов на разных сетках разбиения. Кроме численных данных представлены экстраполяционные значения расчётных параметров [22, 24], определённых по результатам расчётов на сетках 60×60, 80×80 и 100×100. Экстраполяция выполняется с использованием известных рекомендаций [23].

Таблица 4

Результаты расчёта комплексом «ANSYS» первоначального плоского мембранного покрытия с податливым опорным контуром на сетках разбиения 30×30, 60×60, 80×80, 100×100

Тип контура	Расчётные параметры	«ANSYS» 30×30	«ANSYS» 60×60	«ANSYS» 80×80	«ANSYS» 100×100	Экстраполяция [22]
1	$w$ , мм	1112/81	1168/85	1219/89	1263/92	1373/100
	$u$ , мм	85.6/31	115/42	140/51	175/64	274/100
	$N_{np}$ , кН	-2650/86	-2900/94	-2980/96	-3020/98	-3096/100
	$Non$ , кН	-31.2/4	-148/18	-276/34	-420/52	-808/100
	$M_{np}$ , кН м	18.7/19	42.9/43	50.4/51	63/63	100/100
	$Mon$ , кН м	-193/23	-457/54	-567/67	-650/77	-848/100
	$\sigma_{max}$ , МПа	715/57	882/71	903/73	985/79	1244/100
2	$w$ , мм	1039/86	1084/90	1125/93	1150/96	1204/100
	$u$ , мм	70/38	90/49	110/61	130/72	182/100
	$N_{np}$ , кН	-3130/90	-3340/96	-3370/97	-3400/98	-3479/100
	$Non$ , кН	-171/19	-381/42	-552/62	-660/74	-897/100
	$M_{np}$ , кН м	34/29	54/46	70.9/60	84.7/71	119/100
	$Mon$ , кН м	-361/28	-739/57	-874/67	-994/77	-1297/100
	$\sigma_{max}$ , МПа	715/67	779/73	835/79	897/84	1064/100
3	$w$ , мм	985/90	1020/93	1050/96	1066/97	1098/100
	$u$ , мм	60/46	75.6/57	89.9/68	101.9/77	132/100
	$N_{np}$ , кН	-3460/93	-3650/98	-3660/98	-3680/98	-3740/100
	$Non$ , кН	-345/31	-631/56	-790/70	-893/80	-1122/100
	$M_{np}$ , кН м	65.6/37	91/51	112/63	130/74	177/100
	$Mon$ , кН м	-661/36	-1160/64	-1340/74	-1480/81	-1817/100
	$\sigma_{max}$ , МПа	674/78	677/79	747/87	785/91	861/100

Таблица 5

Результаты расчёта комплексом «Ли́ра 9.6» первоначального плоского мембранного покрытия с податливым опорным контуром на сетках разбиения 30×30, 60×60, 80×80, 100×100

Тип контура	Расчётные параметры	«Ли́ра 9.6» 30×30	«Ли́ра 9.6» 60×60	«Ли́ра 9.6» 80×80	«Ли́ра 9.6» 100×100	Экстраполяция [22]
1	$w$ , мм	1131/87	1210/93	1240/95	1260/97	1305/100
	$u$ , мм	83.6/48	119/68	134/76	146/83	175/100
	$N_{np}$ , кН	-2721/96	-2852/100	-2843/100	-2841/100	-2841/100
	$Non$ , кН	-20.6/3	-245/38	-378/58	-463/71	-649/100
	$M_{np}$ , кН м	23.8/39	32.5/53	39.8/65	46/75	61/100
	$Mon$ , кН м	-212/31	-466.4/69	-541/80	-585/86	-678/100
	$\sigma_{max}$ , МПа	445/63	546/77	624/88	657/92	711/100
2	$w$ , мм	1062/90	1130/96	1150/98	1160/98	1179/100
	$u$ , мм	69.7/57	89.5/74	98.2/81	105/86	121/100
	$N_{np}$ , кН	-3141/99	-3233/102	-3203/101	-3188/101	-3160/100
	$Non$ , кН	-213/25	-487.7/57	-609/71	-687/80	-860/100
	$M_{np}$ , кН м	37.9/49	48.5/63	55.9/73	62/80	77/100
	$Mon$ , кН м	-447/46	-756/77	-832/85	-879/90	-981/100
	$\sigma_{max}$ , МПа	483/70	561/81	620/90	646/94	690/100
3	$w$ , мм	1011/87	1070/92	1080/93	1100/95	1160/100
	$u$ , мм	60.6/63	74/77	79.9/83	84.6/88	96/100
	$N_{np}$ , кН	-3445/101	-3510/103	-3473/102	-3455/101	-3422/100
	$Non$ , кН	-422/40	-712/68	-819/78	-889/85	-1045/100
	$M_{np}$ , кН м	62.7/60	75.7/73	83.3/80	89.3/86	104/100
	$Mon$ , кН м	-809/57	-1145/81	-1225/87	-1282/91	-1415/100
	$\sigma_{max}$ , МПа	479/79	549/90	590/97	601/99	608/100

На рис. 5 представлена сходимость результатов к экстраполированным значениям для разных сеток разбиения.

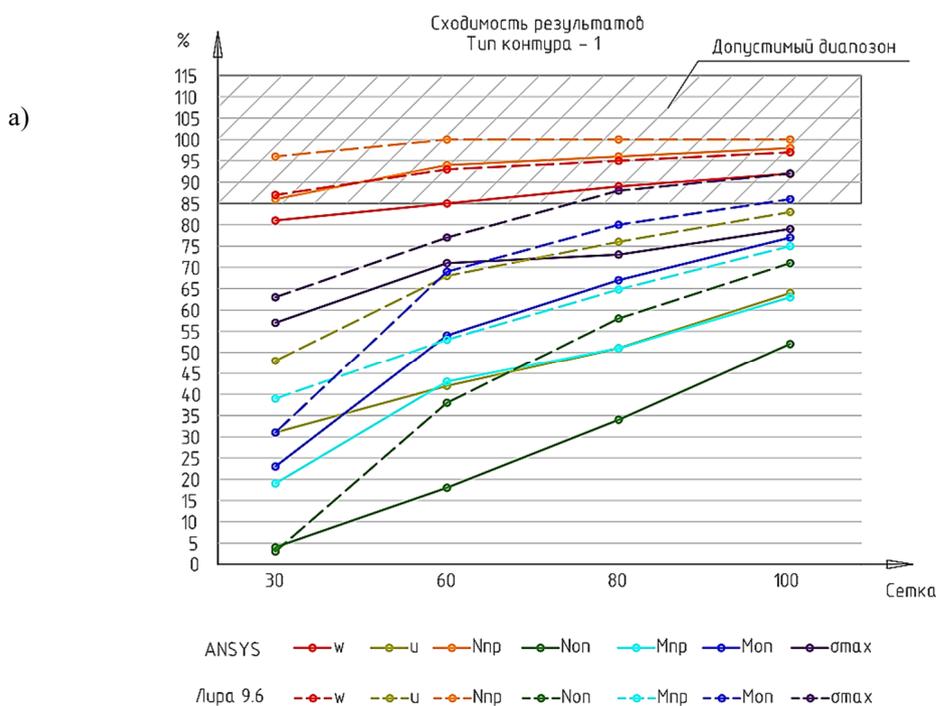
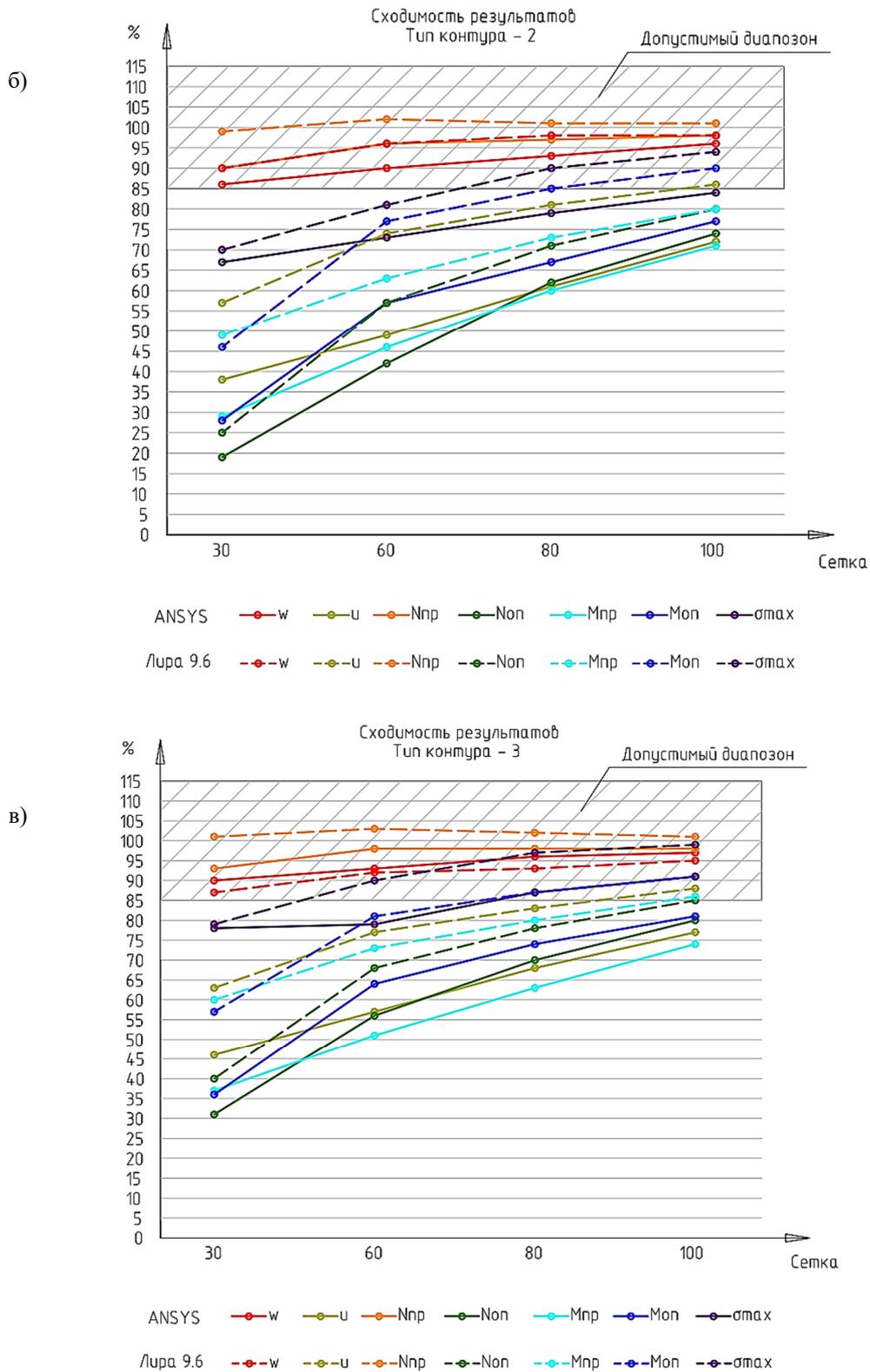


Рис. 5. Сходимость численных решений в зависимости от сетки разбиения при использовании комплексов «ANSYS» и «Ли́ра 9.6»: а) контур (1 вариант)



**Рис. 5 (окончание).** Сходимость численных решений в зависимости от сетки разбиения при использовании комплексов «ANSYS» и «Лира 9.6»: б) контур (2 вариант); в) контур (3 вариант)

Установлено, что все рассматриваемые параметры напряжённо-деформированного состояния для всех вариантов опорного контура с ростом густоты сетки разбиения увеличиваются,

однако при сетке  $80 \times 80$  и выше увеличение параметров становится менее значимым, что может свидетельствовать о достижении необходимого уровня точности расчётов. Уже на сетке  $80 \times 80$  получаются достаточно приемлемые результаты численного расчёта. Так, в программных комплексах «ANSYS» и «Ли́ра 9.6» для всех типов контура прогибы центра мембраны отличаются от экстраполированного значения до 11 %, продольная сила в середине – до 4 %. Эквивалентные напряжения в ПК «ANSYS» – до 27 %, в ПК «Ли́ра 9.6» – до 12 %. Остальные результаты в численном расчёте в комплексе «Ли́ра 9.6», такие как горизонтальные прогибы середины опорного контура, отличаются на 17–24 %, изгибающий момент – до 35 %, продольное усилие на опоре контура – до 42 %. Наиболее существенно отличаются при этой сетке в ПК «ANSYS» горизонтальные прогибы в середине опорного контура – 32–49 %, продольная сила на опорах контура – 30–66 %, изгибающие моменты в контуре отличаются на 26–49 %.

При сетке  $100 \times 100$ , в отличие от сетки  $80 \times 80$ , наблюдается заметное уменьшение отличий вычисленных значений от экстраполированных. Расчётные параметры, вертикальные перемещения мембраны и продольная сила в пролёте отличаются не более чем на 8 %. Остальные параметры составляют: продольная сила на опорах контура – до 48 %, изгибающий момент – до 37 %, горизонтальные перемещения опорного контура – до 36 %, а также эквивалентные напряжения – до 21 %.

Следует отметить, что экстраполированные значения параметров при использовании комплексов «ANSYS» и «Ли́ра 9.6» отличаются друг от друга не более чем на 19 %, что подтверждает равноценность получаемых этими комплексами результатов.

Оптимальным выбором для практических расчётов является сетка размером  $100 \times 100$ .

**Выводы.** На основании проведённых численных расчётов мембранных конструкций, было установлено:

1. Вычислительные комплексы «Ли́ра 9.6», «Ли́ра 10.10», «Ли́ра САПР», «NASTRAN», «ANSYS» демонстрируют высокую точность при расчёте мембранных конструкций с абсолютно жёстким контуром. Погрешности численных расчётов при использовании указанных комплексов не превышают 9.4 %. «SCAD Office 21.1.9.9» оказался мало применим для расчёта мембранных систем. При использовании этого комплекса прогиб центра мембраны оказался на 12.5 % больше, напряжения в центре мембраны на 56.1 % меньше, а в месте примыкания мембраны к середине опорного контура напряжения на 36.5 % меньше, усилия и изгибающие моменты в пролёте и на опоре в контуре меньше на 28.8–30.4 % теоретических значений;

2. При моделировании мембранных покрытий с податливым контуром наиболее качественно достоверные результаты были получены с помощью программных комплексов «Ли́ра 9.6», «Ли́ра 10.10», «Ли́ра САПР», «ANSYS», «STK»;

3. Программные комплексы «ANSYS», «Ли́ра 9.6», «Ли́ра САПР» позволяют моделировать процесс монтажа с учетом конструктивной нелинейности, включая поэтапное введение новых элементов;

4. При выборе сетки разбиения в программных комплексах «ANSYS» и «Ли́ра 9.6» наилучшие результаты достигаются при применении сетки  $100 \times 100$ .

Выбор оптимального размера сетки разбиения является ключевым фактором для обеспечения высокой точности и рационального использования вычислительных ресурсов при численном анализе подобных расчетных задач.

#### Библиографический список

1. Леденев В. В., Худяков А. В. Оболочечные конструкции в строительстве: теория, проектирование, конструкции, примеры расчета. Тамбов: ТГТУ, 2016. 271 с.
2. Еремеев П. Г. Пространственные тонколистовые металлические конструкции покрытий. М.: АСВ, 2006. 560 с.

3. Колесов А. И. Основы компоновки и расчетов стержневых, висячих и мембранных стальных конструкций покрытий большепролетных зданий. Н. Новгород: ННГАСУ, 2021. 159 с.
4. Bahrami A. Sustainable Structures and Buildings. University of Gävle, Sweden. 2024. 126 p.
5. Shen Y., Zhang J., Guo H. Deployment simulation of membrane structures based on elastic-plastic behavior parameterization of the crease // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021. Vol. 30–6. Pp. 2083–2095.
6. Zhang Y., Zhang Q. Load-Dependent Mechanical Behavior of Membrane Materials and Its Effect on the Static Behaviors of Membrane Structures // *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2015. No. 27 (11). 04015018. DOI: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0001273.
7. Фарфель М. И. Численные исследования работы прямоугольных мембранных панелей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2008. № 4. С. 53–62.
8. Чесноков А. В. Михайлов В. В. Методика определения требуемого соотношения мембранных напряжений в тентовой оболочке арочного типа // *Известия Юго-Западного государственного университета*. 2024. Т. 28, № 2. С. 37–55.
9. Chesnokov A. V., Mikhailov V. V., Dolmatov I. V. The influence of material aging on the structural behavior of a flexible roof with a polymer membrane shell // *Informatyka w Technologii Materiałów*. 2021. Vol. 21, no. 1.
10. Demchyshyn A., Smakovska G. Research of Geometric and Information Models for Awning Structures // *Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences*. 2022. Vol. 23. Pp. 36–44.
11. Ибрагимов А. М., Кустов А. А., Мокин Н. А. Экспериментальное и численное исследование напряженно-деформированного состояния технической ткани с покрытием, работающей в составе строительной конструкции в форме гиперболического параболоида // *Промышленное и гражданское строительство*. 2018. № 7. С. 35–43.
12. Еремеев П. Г. Тентовые мембраны для ограждающих конструкций покрытий над трибунами стадионов // *Промышленное и гражданское строительство*. 2015. № 4. С. 33–36.
13. Milošević V., Marchwiński J., Lucchi E. Strain Analysis of Membrane Structures for Photovoltaic Integration in Built Environment // *Sustainability*. 2025. No. 17 (3).
14. Hegyi D. Numerical stability analysis of arch-supported membrane roofs // *Structures*. Vol. 29. 2021. Pp. 785–795.
15. Dyuzhev N. A., Gusev E. E., Portnova E. O., Novikova O. V. Influence of Cyclic Loading on Physical and Mechanical Properties of Thin-Film Membrane Structures // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 2. Pp. 746–753.
16. Kustov A. A., Mokin N. A., Ibragimov A. M. Mechanical properties of technical coated fabrics under axial and off-axial tensile tests // *Structural Membranes 2017: 8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures* / eds. K.-U. Bletzinger, E. Oñate, B. Kröplin. München, Germany, 2017. Pp. 100–111.
17. Toso S., Chivante M. R. P., Moritz K. Importance of the Context for the Design of the Membrane Structures // *Structural Membranes 2017: 8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures* / eds. K.-U. Bletzinger, E. Oñate, B. Kröplin. München, Germany, 2017. Pp. 190–197.
18. Канчели Н. В., Батов П. А., Дробот Д. Ю. Реализованные мембранные оболочки: расчет, проектирование и возведение. М.: АСВ, 2009. 119 с.
19. Song H., Zhu H.B. Study on the Key Technology of Membrane Roof Structure of Expo Axis in 2010 Shanghai World Expo // *Advanced Materials Research*. 2013. Vol. 750–752. Pp. 1949–1953.
20. Туснин А. Р., Постарнак М. В. Мембранные конструкции: опыт применения и перспективы развития // *Вестник МГСУ*. 2023. Т. 18, № 3. С. 401–415.
21. Туснин А. Р., Туснина О. А. Численный расчет мембранных конструкций // *Интернет-вестник ВолгГАСУ*. 2012. № 3 (23). С. 15.

22. Рекомендации по проектированию мембранных покрытий на прямоугольном плане для реконструируемых зданий и сооружений. 2-е изд., испр. и доп. / ЦНИИСК им. В. А. Кучеренко. М., 1989.

23. Еремеев П. Г. Влияние податливости опорного контура мембраны на перераспределение в нем усилий // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1984. № 6. С. 71–75.

24. Сальводори М. Д Численные методы в технике. М.: Изд-во иностран. лит., 1955. 247 с.

#### References

1. Ledenev V. V., Khudyakov A. V. Shell structures in construction: theory, design, structures, calculation examples. Tambov: TSTU, 2016. 271 p.

2. Eremeev P. G. Spatial thin-sheet metal structures of coatings. Moscow: Publishing House of the Association of Construction Universities, 2006. 560 p.

3. Kolesov A. I. Fundamentals of the layout and calculations of rod, hanging and membrane steel structures for coatings of large-span buildings. Nizhny Novgorod: NGASU, 2021. 159 p.

4. Bahrami A. Sustainable Structures and Buildings. University of Gävle, Sweden. 2024. 126 p.

5. Shen Y., Zhang J., Guo H. Deployment simulation of membrane structures based on elastic-plastic behavior parameterization of the crease // *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021. Vol. 30–6. P. 2083–2095.

6. Zhang Y., Zhang Q. Load-Dependent Mechanical Behavior of Membrane Materials and Its Effect on the Static Behaviors of Membrane Structures // *Journal of Materials in Civil Engineering*. 2015. No. 27 (11). 04015018. DOI: 10.1061/(ASCE)MT.1943-5533.0001273.

7. Farfel M. I. Numerical studies of rectangular membrane panels // *Construction mechanics and calculation of structures*. 2008. No. 4. Pp. 53–62.

8. Chesnokov A. V., Mikhailov V. V. Methodology for determining the required ratio of membrane stresses in an arched type tent shell // *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta*. 2024. Vol. 28, no. 2. Pp. 37–55.

9. Chesnokov A. V., Mikhailov V. V., Dolmatov I. V. The influence of material aging on the structural behavior of a flexible roof with a polymer membrane shell // *Informatyka w Technologii Materiałów*. 2021. Vol. 21, no. 1.

10. Demchyshyn A., Smakovska G. Research of Geometric and Information Models for Awning Structures // *Mathematical and computer modelling. Series: Technical sciences*. 2022. Vol. 23. Pp. 36–44.

11. Ibragimov A. M., Kustov A. A., Mokin N. A. Experimental and numerical study of the stress-strain state of coated technical fabric operating as part of a building structure in the form of a hyperbolic paraboloid // *Industrial and civil Engineering*. 2018. No. 7. Pp. 35–43.

12. Eremeev P. G. Tent membranes for enclosing structures of coverings over stadium stands // *Industrial and civil engineering*. 2015. No. 4. Pp. 33–36.

13. Milošević V., Marchwiński J., Lucchi E. Strain Analysis of Membrane Structures for Photovoltaic Integration in Built Environment // *Sustainability*. 2025. No. 17 (3).

14. Hegyi D. Numerical stability analysis of arch-supported membrane roofs // *Structures*. 2021. Vol. 29. Pp. 785–795.

15. Dyuzhev N. A., Gusev E. E., Portnova E. O., Novikova O. V. Influence of Cyclic Loading on Physical and Mechanical Properties of Thin-Film Membrane Structures // *Mechanics of Solids*. 2024. Vol. 59, no. 2. Pp. 746–753.

16. Kustov A. A., Mokin N. A., Ibragimov A. M. Mechanical properties of technical coated fabrics under axial and off-axial tensile tests // *Structural Membranes 2017: 8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures* / eds. K.-U. Bletzinger, E. Oñate, B. Kröplin. München, Germany, 2017. Pp. 100–111.

17. Toso S., Chivante M. R. P., Moritz K. Importance of the Context for the Design of the Membrane Structures // *Structural Membranes 2017: 8th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures* / eds. K.-U. Bletzinger, E. Oñate, B. Kröplin. München, Germany, 2017. Pp. 190–197.
18. Kancheli N. V., Batov P. A., Drobot D. Y. Implemented membrane shells: calculation, design and construction. Moscow: Publishing House of the Assoc. builds. universities, 2009. 119 p.
19. Song H., Zhu H. B. Study on the Key Technology of Membrane Roof Structure of Expo Axis in 2010 Shanghai World Expo // *Advanced Materials Research*. 2013. Vol. 750–752. Pp. 1949–1953.
20. Tusnin A. R., Postarnak M. V. Membrane structures: application experience and development prospects // *Bulletin of MGSU*. 2023. Vol. 18, no. 3. Pp. 401–415.
21. Tusnin A. R., Tusnina O. A. Numerical calculation of membrane structures // *Online bulletin of VolgGASU*. 2012. No. 3 (23). P. 15.
22. Recommendations for the design of membrane coatings on a rectangular plan for reconstructed buildings and structures. 2nd ed., corrected and supplemented / V. A. Kucherenko Central Research Institute, Moscow, 1989.
23. Ereemeev P. G. Influence of the pliability of the membrane support contour on the redistribution of efforts in it // *Construction mechanics and calculation of structures*. 1984. No. 6. Pp. 71–75.
24. Salvador M. Numerical methods in engineering. Moscow: Publishing House of Foreign Literature, 1955. 247 p.

## NUMERICAL ANALYSIS OF MEMBRANE STRUCTURES USING MODERN COMPUTATIONAL SOFTWARE

A. R. Tusnin<sup>1</sup>, E. K. Gracheva<sup>2</sup>

Moscow State University of Civil Engineering<sup>1,2</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Doctor of Technical sciences, Prof., Head of the Department of Metal and Timber Structures, Director of the Institute of Industrial and Civil Engineering, tel.: +7 (916) 115-14-21, e-mail: tusninar@mgsu.ru

<sup>2</sup> Graduate student of the Department of Metallic and Timber Structures, tel.: +7 (903) 863-73-88, e-mail: ketrincat1@yandex.ru

---

**Introduction.** Membrane roofs are widely employed in civil engineering as efficient structural solutions for long-span buildings. They are commonly used in the design of covered sports complexes, exhibition pavilions, aqua parks, and other similar facilities. These systems offer high strength-to-weight ratios, making them highly attractive in contemporary construction practice.

**Materials and Methods.** This study investigates the applicability of the following computational software packages for the analysis of membrane structures: LIRA 9.6, LIRA-SAPR 2022, LIRA 10.10, SCAD Office 21.1.9.9, NASTRAN, ANSYS, and STK. The reliability of results obtained from these software tools was assessed through benchmark calculations of flat square-plan membrane roofs (30×30 m) with both perfectly rigid and flexible support boundaries. All analyses accounted for geometric nonlinearity. The influence of support boundary flexibility on the internal force distribution within the membrane and along the supporting contour was examined.

**Results.** Numerical simulation results are presented for membrane roofs with both rigid and flexible boundary conditions. A comparative study was conducted between ANSYS and LIRA 9.6 across different finite element mesh densities: 30×30, 60×60, 80×80, and 100×100. Based on the numerical findings, practical recommendations are formulated regarding the suitability of the investigated computational platforms for membrane structure analysis.

**Conclusions.** When modeling membrane roofs with flexible boundaries, the most accurate and reliable results were obtained using LIRA 9.6, LIRA 10.10, LIRA-SAPR, NASTRAN, ANSYS, and STK. The optimal finite element mesh density for this type of analysis was found to be 80×80.

**Keywords:** membrane, support boundary, finite element mesh, geometric nonlinearity, finite element method, the method of core approximation.

## ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СЕЙСМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОПОРНОГО УЗЛА СТАЛЬНОГО КАРКАСА ЗДАНИЯ

А. А. Черняев<sup>1</sup>, К. В. Марфин<sup>2</sup>

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Орел

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры промышленного и гражданского строительства,  
тел.: 8(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительных конструкций и материалов,  
тел.: +7(906)663-33-31, e-mail: marfinkirill@yandex.ru

Выполнено твердотельное в программе «Solidworks» и конечно-элементное моделирование в программе «Ansys» опорного узла колонны с фундаментом стального каркаса здания при сейсмическом воздействии, произведен расчет напряжений в узле по Мизесу. Объект исследования: несущий однопролетный стальной каркас с колоннами сплошного двутаврового сечения, фермами покрытия, жесткими узлами соединения колонн с фундаментом. Предмет исследования: напряженно-деформированное состояние конструкции опорного узла колонны с фундаментом стального каркаса при сейсмическом воздействии. Место проектирования – г. Адлер (Сочи); балльность по MSK-64 равна 9. Проведенное исследование позволило произвести численную оценку влияния сейсмического воздействия на напряжённое состояние опорного узла стального каркаса при его возникновении. Косвенно указано на известную проблему оценки результатов конечно-элементного моделирования и расчета в зонах концентраций напряжений.

**Ключевые слова:** опорный узел, твердотельное и конечно-элементное моделирование, сейсмическое воздействие, напряжения.

**Введение.** Сейсмическое воздействие в результате землетрясения является одним из особенно опасных явлений и оказывает сложное динамическое воздействие на здания и сооружения [1]. В последние годы в связи с сейсмической активностью во многих регионах внимание к данной теме повышено. Можно отметить учащение землетрясений на Камчатке (2025 г.) магнитудой 8,8 и Сахалине (2024 г.). Годом ранее – землетрясение в Турции в 2023 году с магнитудой 7,8 и Сирии с магнитудой самого сильного толчка 6,7 и др. случаи.

По нормам РФ [2, 3] расчет конструкций и оснований зданий и сооружений, проектируемых для строительства в сейсмических районах, должен выполняться на основные и особые сочетания нагрузок с учетом сейсмической нагрузки, где сейсмические воздействия входят в состав особых сочетаний нагрузок и воздействий, при расчете на которые исходной сейсмологической характеристикой района строительства при проектировании является сейсмичность, оцениваемая в баллах.

В научных публикациях последних лет по-прежнему рассматриваются различные вопросы, связанные с выполнением расчета на сейсмическое воздействие и сейсмостойкость. Рассматриваются различные подходы к описанию сейсмической нагрузки, моделированию работы конструкций и узлов, вопросы анализа конструктивных решений и т. д. [4–6 и др.].

Цель работы – на конкретном примере провести численное исследование влияния сейсмического воздействия на опорный узел стального каркаса здания.

**Постановка задачи.** Объект исследования: несущий однопролетный стальной каркас (рис. 1) с колоннами сплошного двутаврового сечения 40К2 по ГОСТ Р 57837-2017, фермами

покрытия по серии 1.460.3-23.98, жесткими узлами соединения колонн с фундаментом. Каркас однопролетный, шаг рам – 8 м, пролет – 30 м, высота колонн – 11 м. Место проектирования – г. Адлер (Сочи); балльность по MSK-64 равна 9 [2].

Данный каркас рассматривался в предыдущей работе [7], в которой проводилось исследование влияния сейсмического воздействия на элементы конструкций в стержневой конечно-элементной расчётной модели. Расчет выполнялся по нормативной методике линейно-спектральным методом, при котором расчетные значения усилий в конструкциях от сейсмической нагрузки вычисляются по соответствующим формам колебаний. В работе [7] было получено и дано сравнение возникающих коэффициентов использования в элементах по различным факторам [8], было установлено, что около 1/2 элементов, запроектированных на основное сочетание нагрузок, «не выдерживают» с превышением коэффициентов использования до  $K = 1,18-2,54$ . Оценка напряженного состояния опорных узлов не была произведена и рассматривается в настоящей работе в продолжение работы [7].

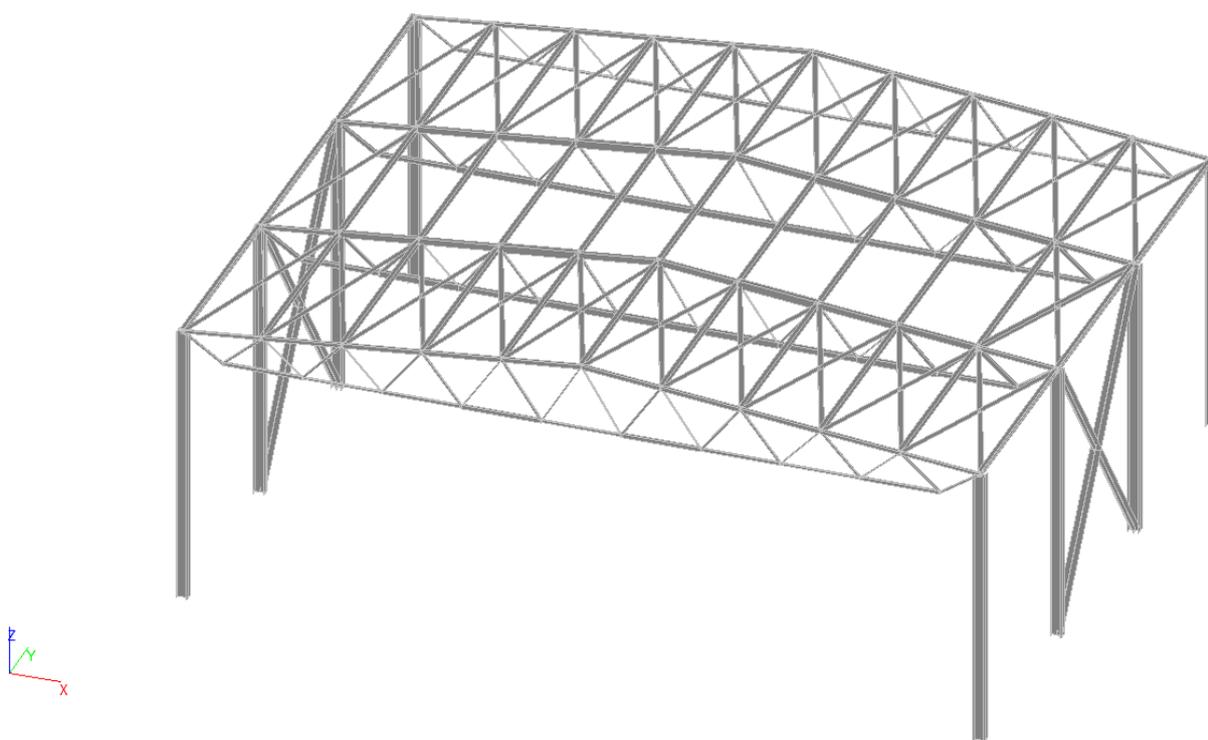


Рис. 1. Общий вид стального каркаса здания [8]

Предмет исследования: напряженно-деформированное состояние конструкции опорного узла колонны с фундаментом при сейсмическом воздействии.

База с траверсами, толщина траверс – 20 мм, высота – 300 мм. Толщина опорной плиты – 40 мм, плита выступает по 100 мм с одной стороны и по 200 мм с другой. Траверсы прижаты двумя накладками 100×500 мм толщиной 40 мм, в которых имеются 4 отверстия по 40 мм под анкерные фундаментные болты.

Материал всех элементов – сталь марки С255, модуль упругости –  $2,06 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона – 0,3, объёмный вес –  $77,0$  кН/м<sup>3</sup>, расчетные сопротивления согласно [8].

**Методы исследования.** Для решения задачи было применено твердотельное в программе «Solidworks» [9] и конечно-элементное моделирование в программе «Ansys» [10]. Твердотельная модель узла колонны с фундаментом приведена на рис. 2; экспортированная модель с отображением толщин приведена на рис. 3.

Закрепление А ( $y = 0$ ) устанавливаем по контуру отверстий в пластинах, и В ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ) – по нижнему контуру двутавра и траверс (рис. 4).

И работы [7] наиболее нагруженный опорный узел средней колонны с учётом сейсмического воздействия с расчетными усилиями особого сочетания:  $N = -380,13$  кН,  $Q_z = 109,74$  кН,  $M_y = 1256,48$  кНм (рис. 5–7). Остальными усилиями:  $M_z = 1,07$  кНм,  $Q_y = 0,13$  кН;  $M_k \approx 0$ , пренебрегаем из-за их малости.

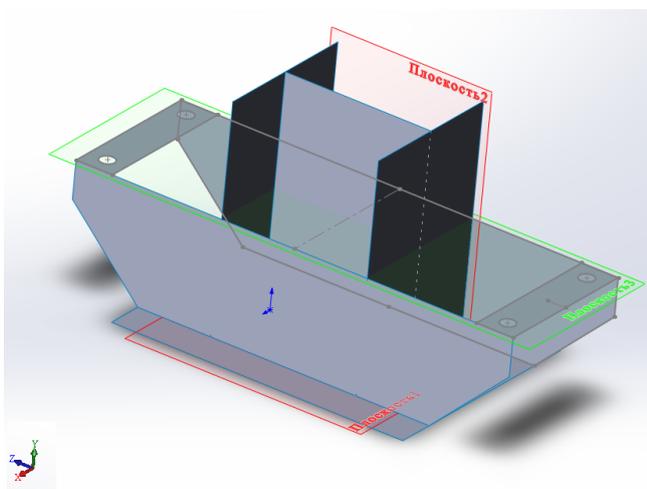


Рис. 2. Твёрдотельная модель узла колонны с фундаментом в «Solidworks»

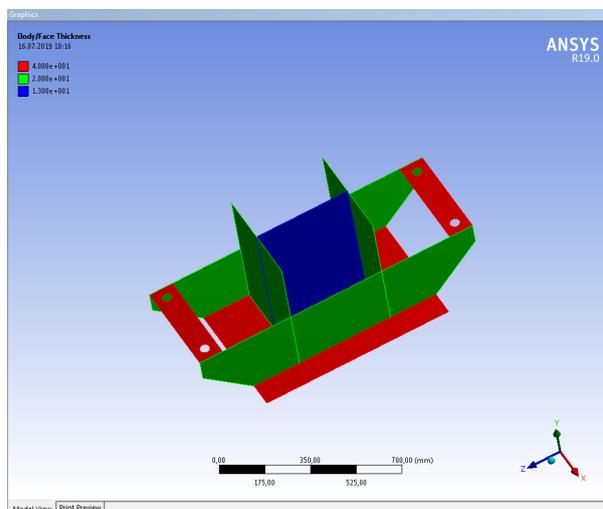


Рис. 3. Экспортированная модель узла колонны с фундаментом в «Ansys» с отображением толщин

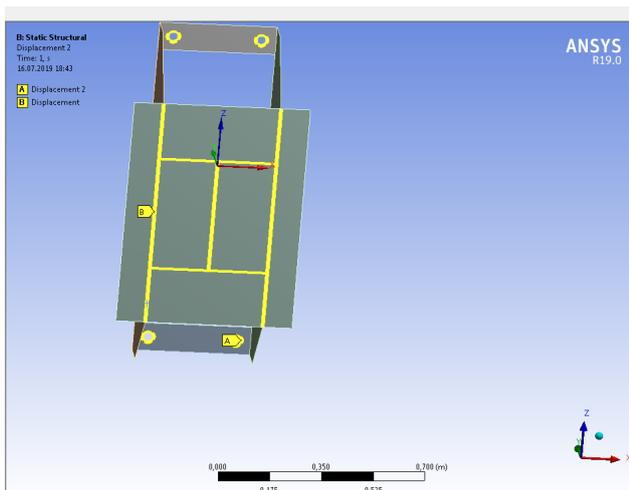


Рис. 4. Отображение закреплений в «Ansys»

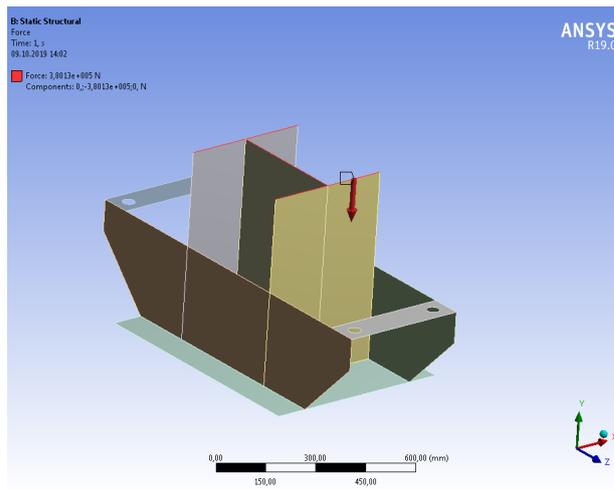


Рис. 5. Отображение продольной силы N в «Ansys»

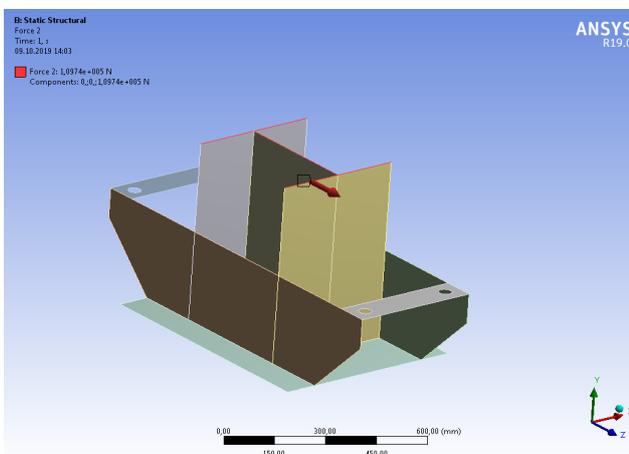


Рис. 6. Отображение поперечной силы  $Q_z$  в «Ansys»

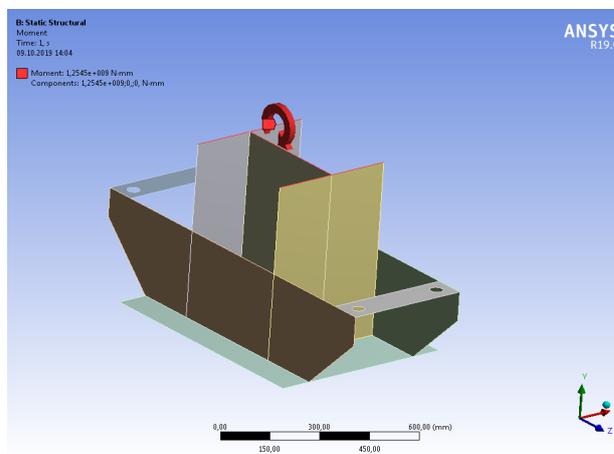
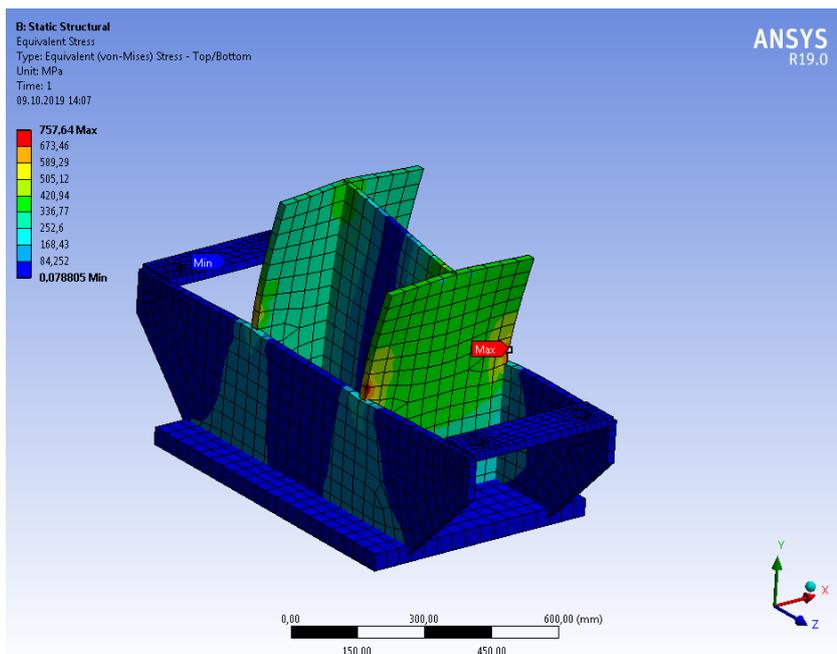


Рис. 7. Отображение момента  $M_y$  (в «Ansys» – ось x)

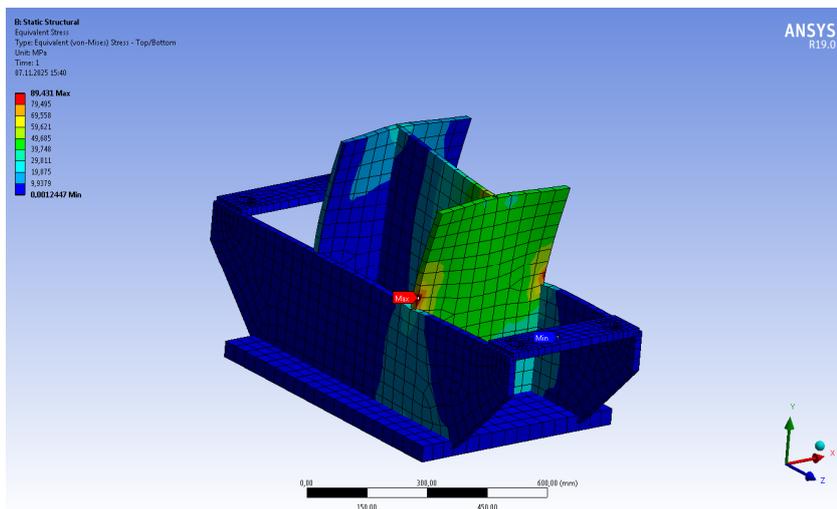
**Результаты.** С помощью инструмента «mesh» (сетки) в «Ansys» разбиваем узел на конечно-элементную модель, выполняем расчет. Напряжения определяем по Мизесу. На рис. 8 показана картина распределения напряжений с расчетными усилиями особого сочетания.

Для численной оценки влияния сейсмического воздействия на напряжённое состояние опорного узла стального каркаса при его возникновении для сравнения была также получена картина распределения напряжений с расчетными усилиями основного сочетания:  $N = -372,9$  кН,  $Q_z = 15,81$  кН,  $M_y = 93,55$  кНм (из результатов расчета каркаса [7]), малыми значениями величин усилий  $M_z$ ,  $Q_y$ ,  $M_k$  также пренебрегаем.

На рис. 9 показана картина распределения напряжений с расчетными усилиями основного сочетания.



**Рис. 8.** Результат расчета напряжений в «Ansys» по Мизесу с расчетными усилиями особого сочетания (с сейсмическим воздействием)



**Рис. 9.** Результат расчета напряжений в «Ansys» по Мизесу с расчетными усилиями основного сочетания (без сейсмического воздействия)

**Выводы.** Проведенное конечно-элементное моделирование опорного узла стального каркаса, выполненного с траверсами жестким, позволило получить сложные картины распределения напряжений в базе колонны.

Чтобы дать адекватную оценку полученным напряжениям, следует учитывать известные в конечно-элементных расчетах сложности оценки достоверности получаемых результатов в зонах концентраций напряжений [11]. На практике при выполнении инженерных расчетов и проектировании (при небольшом опыте выполнения подобных расчетов)

придерживаются различных приемов, один из которых – отступ на 1–2 конечных элемента этих зон при средней сетке разбиения и соизмеримости толщины размерам конечных элементов. Руководствуясь им (при отступе на 1 конечный элемент), можем указать следующие значения: результат расчета напряжений по Мизесу с расчетными усилиями особого сочетания (с сейсмическим воздействием) даёт максимальные напряжения порядка 452,25 МПа; то же, с расчетными усилиями основного сочетания (без сейсмического воздействия) даёт максимальные напряжения порядка 53,3 МПа.

Цифровые значения получены в программе «Ansys» при непосредственном наведении курсором мыши на цифровой индикатор значений «Probe».

В итоге, с указанным замечанием, можно заключить, что опорный узел колонны стального каркаса, запроектированный на основное сочетание нагрузок, в результате сейсмического воздействия получает значительное увеличение максимальных напряжений порядка в ~8 раз. А само максимальное напряжение при этом превышает расчетное сопротивление стали  $S255 R_y = 240$  МПа при толщине поясов сечения колонны 20 мм [8] с учетом коэффициента условия работы при расчетах на прочность для стальных конструкций  $m_{tr} = 1,3$  [12, табл. 5.4], предельное значение составит  $240 \cdot 1,3 = 312$  МПа; превышение порядка в ~1,4 раза.

Эти результаты для опорного узла совместно с полученными в [7] для стержневых элементов каркаса показывают значительное влияние сейсмического воздействия, которое оно может оказывать на их несущую способность.

Таким образом, проведенное исследование позволило произвести численную оценку влияния сейсмического воздействия на напряжённое состояние опорного узла рассмотренного стального каркаса при его возникновении, а полученные результаты использовать при расчетном обосновании возможных вариантов проектных решений опорных узлов.

#### Библиографический список

1. Шеин А. И. Динамика и устойчивость сооружений. Обеспечение сейсмостойкости зданий и сооружений: учеб. пособие. Пенза: ПГУАС, 2015. 108 с.
2. СП 14.13330.2018. Строительство в сейсмических районах. М.: Минстрой России. 122 с.
3. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. М.: Минстрой России. 95 с.
4. Ольфати Р. С. Анализ проектирования стальных конструкций малоэтажных промзданий в условиях сеймики // Инновации и инвестиции. 2019. № 4. С. 287–290.
5. Абдурахманов А. З. К вопросу о работе стальных каркасов многоэтажных зданий в сейсмоопасных условиях // Современное строительство и архитектура. 2022. № 1 (25). С. 4–13.
6. Белаш Т. А., Белашов М. С. Сейсмостойкость стального каркасного гражданского здания в зависимости от его конструктивных особенностей и наличия в основании многолетнемерзлых грунтов // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2025. № 4. С. 56–68.
7. Марфин К. В. Исследование влияния сейсмического воздействия на конструкции пространственного стального каркаса // Город XXI века: мировые тренды и региональные особенности: материалы Всерос. науч.-практ. конф. Орёл: ОГУ им. И. С. Тургенева, 2025. С. 683–691.
8. СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. М.: Минстрой России. 148 с.
9. Solidworks: официальный сайт разработчиков. URL: <https://www.solidworks.com> (дата обращения 04.11.2025).
10. Ansys: официальный сайт разработчиков. URL: <https://www.ansys.com/?d=pub.xxx&d=pub.xxx> (дата обращения 04.11.2025).
11. Доронин С. В., Рогалев А. Н., Рейзмунт Е. М. Анализ конечно-элементных оценок напряженного состояния силовых конструкций с концентраторами напряжений // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. 2015. № 2 (46). С. 26–31.
12. СП 14.13330.2018. Строительство в сейсмических районах. М.: Стандартинформ. 114 с.

## References

1. Shein A.I. Dynamics and Stability of Structures. Ensuring Seismic Resistance of Buildings and Structures: Textbook. Penza: PSUAS, 2015. 108 p.
2. Set of Rules 14.13330.2018. Construction in Seismic Areas. Moscow: Ministry of Construction of Russia. 122 p.
3. Set of Rules 20.13330.2016. Loads and Impacts. Moscow: Ministry of Construction of Russia. 95 p.
4. Olfati R.S. Analysis of the design of steel structures of low-rise industrial buildings under seismic conditions. Innovations and Investments. No. 4. 2019. Pp. 287–290.
5. Abdurakhmanov A.Z. On the performance of steel frames of multi-story buildings in seismic conditions. Modern Construction and Architecture. No. 1(25). 2022. Pp. 4–13.
6. Belash T.A., Belashov M.S. Seismic resistance of a steel-frame civil building depending on its structural features and the presence of permafrost soils in the foundation. Earthquake Engineering. Safety of Structures. No. 4. 2025. Pp. 56–68.
7. Marfin K.V. Study of the Influence of Seismic Impact on Spatial Steel Frame Structures. City of the 21st Century: Global Trends and Regional Features: Proc. of the All-Russian Scientific and Practical Conf. Orel: Orel State University named after I. S. Turgenev, 2025. Pp. 683–691.
8. Set of Rules 16.13330.2017. Steel Structures. Moscow: Ministry of Construction of the Russian Federation. 148 p.
9. Solidworks: official website of the developers. URL: <https://www.solidworks.com> (date of access 04.11.2025).
10. Ansys: official website of the developers. URL: <https://www.ansys.com/?d=pub.xxx&d=pub.xxx> (date of access 04.11.2025).
11. Doronin S.V., Rogalev A.N., Reyzmunt E.M. Analysis of finite element estimates of the stress state of load-bearing structures with stress concentrators. Modern Technologies. Systems Analysis. Modeling. No. 2(46). 2015. Pp. 26–31.
12. Set of Rules 14.13330.2018. Construction in seismic areas. Moscow: Standartinform. 114 p.

## ASSESSMENT OF THE INFLUENCE OF SEISMIC EFFECT ON THE STRESS STATE OF THE SUPPORT UNIT OF A STEEL FRAME BUILDING

A. A. Chernyaev<sup>1</sup>, K. V. Marfin<sup>2</sup>

Orel State University named after I. S. Turgenev<sup>1,2</sup>  
Russia, Orel

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial and Civil Construction, tel.: 8(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures and Materials, tel.: +7 (906) 663-33-31, e-mail: marfinkirill@yandex.ru

---

The paper presents solid-state modeling in Solidworks and finite element modeling in Ansys of a column support joint with a steel frame foundation under seismic action; stress calculations in the joint were performed according to Huber-Mises. The object of study is a load-bearing single-span steel frame with solid I-section columns, roof trusses, and rigid joints connecting columns to the foundation. The subject of study is the stress-strain state of the column support joint structure with a steel frame foundation under seismic action. The design location is Adler (Sochi); the stress intensity according to MSK-64 is 9. The conducted study made it possible to numerically assess the influence of seismic action on the stress state of the steel frame support joint when it occurs. The well-known problem of assessing the results of finite element modeling and calculations in stress concentration zones is indirectly pointed out.

**Keywords:** support node, solid and finite element modeling, seismic impact, stress.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.04

DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.010

## РАСЧЕТ ФУНДАМЕНТА ТУРБОАГРЕГАТА НА СЕЙСМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

О. В. Мкртычев<sup>1</sup>, С. А. Айтян<sup>2</sup>

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, зав. кафедрой сопротивления материалов, тел.: +7(499)183-34-83, e-mail: MkrtychevOV@mgsu.ru

<sup>2</sup> Магистрант, тел.: +7(968)552-77-61, e-mail: Serezhaaitian@mail.ru

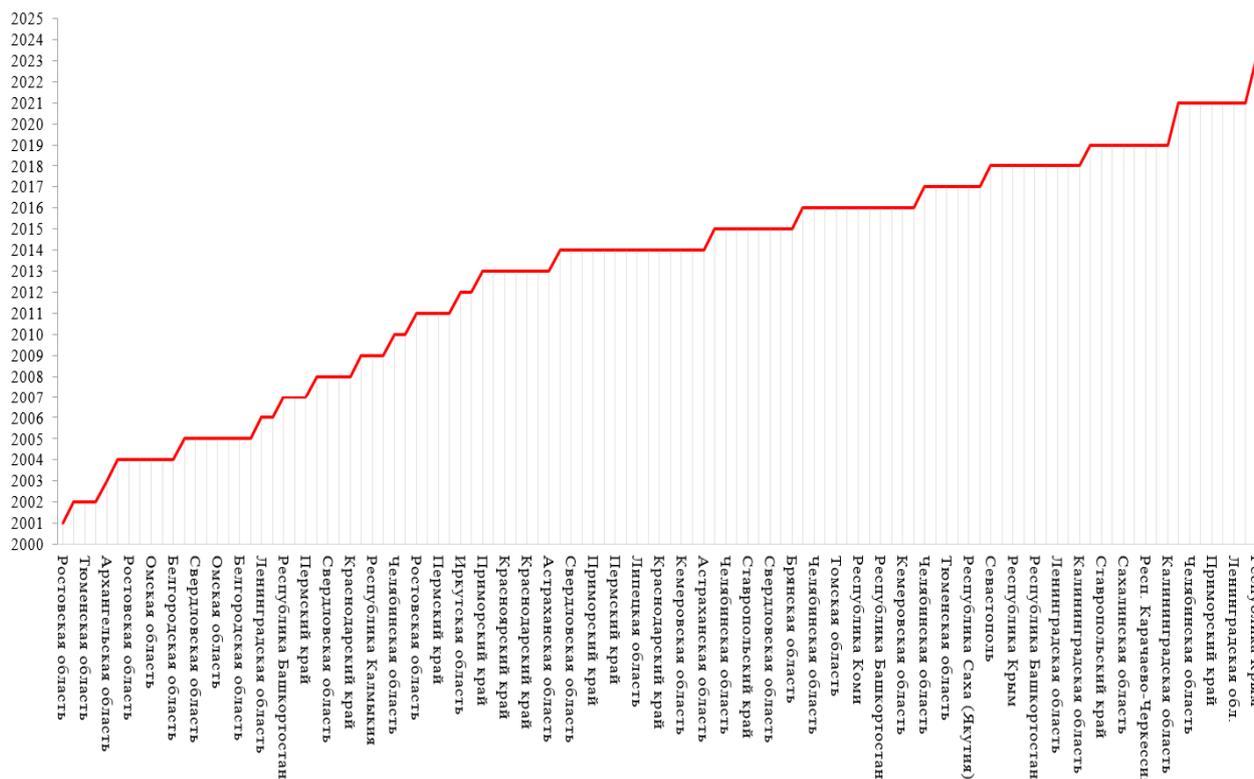
Представлена количественная оценка фактического уровня сейсмостойкости фундамента турбоагрегата тепловой/атомной электростанции при эксплуатационных нагрузках. Исследование выполнено с использованием прямого нелинейного динамического метода в программном комплексе «ANSYS/LS-DYNA». Пространственная железобетонная массивная конструкция фундамента моделировалась с применением нелинейных моделей материалов «Continuous Surface Cap Model» (CSCM) для бетона и идеально упругопластической модели для арматуры. В качестве расчетного воздействия использовались акселерограммы интенсивностью 6–8 баллов по шкале MSK-64. Результаты анализа показали значительное накопление повреждений и исчерпание несущей способности при воздействии 7–8 баллов, особенно в приопорных участках турбоагрегата. Установлено, что фактический запас прочности конструкции обеспечивает требуемый уровень безопасности лишь при сейсмичности до 6 включительно. Показана необходимость усиления конструкции или применения сейсмозащитных систем при расчете на сейсмическое воздействие выше 6 баллов. Исследование подтверждает важность применения нелинейных динамических методов при проектировании критически важных энергетических объектов в сейсмоопасных регионах.

**Ключевые слова:** фундамент турбоагрегата, сейсмостойкость, нелинейный динамический анализ, акселерограммы, сейсмические воздействия, критически важные объекты энергетики.

**Введение.** Тепловые и атомные электростанции являются критически важными объектами инфраструктуры, обеспечивающими энергоснабжение промышленных предприятий, жилых домов и социальных объектов. В условиях повышенной сейсмической активности такие объекты требуют особого внимания к расчетам конструкций и оборудования для минимизации рисков аварий и разрушений при землетрясениях.

Проектируемые фундаменты турбоагрегатов являются одними из наиболее ответственных конструкций ТЭС и АЭС, занимаемая центральное положение в машинном зале. Они воспринимают значительные статические и динамические нагрузки от собственного веса оборудования, центробежных и гироскопических сил вращающегося ротора, а также вибрационные воздействия в процессе эксплуатации [1].

На рис. 1 отражена тенденция строительства и эксплуатации энергетических объектов в сейсмоопасных субъектах и регионах Российской Федерации за последние 25 лет. В связи с этим особую актуальность приобретает вопрос обеспечения достаточного уровня сейсмостойкости фундаментов турбоагрегатов, поскольку в ряде регионов расчетная интенсивность сейсмических воздействий достигает 9 и более баллов по шкале MSK-64 [2, 3].



**Рис. 1.** Динамика строительства и ввода в эксплуатацию энергетических объектов в сейсмоопасных субъектах и регионах Российской Федерации за 2000–2025 гг.

Применение традиционного линейно-спектрального метода, предусмотренного действующими нормативными документами [2], при расчете фундаментов турбоагрегатов на интенсивные сейсмические воздействия приводит к существенным погрешностям и не дает адекватных результатов. Расчетные исследования подобных конструкций при сейсмических воздействиях должны производиться в нелинейной динамической постановке [4, 5].

Цель работы – определение действительного уровня сейсмостойкости фундаментов турбоагрегатов, запроектированных в несейсмических районах, и сейсмостойкости по критерию необрушения.

**Материалы и методы исследования.** Объектом исследования является фундамент турбоагрегата (рис. 2), выполненный в виде пространственной массивной железобетонной рамной конструкции. Плановые размеры сооружения составляют  $33,85 \times 10,5$  м, общая высота – 12,5 м. Несущая система представлена продольными и поперечными рамами. Колонны имеют постоянное квадратное сечение  $1,0 \times 1,0$  м. Ригели переменной высоты по длине пролёта при постоянной ширине – 1,0 м.

Задание эксплуатационных нагрузок на сооружение – согласно действующей нормативной документации [6, 7].

В расчетах используется нелинейная модель бетона «Continuous Surface Cap Model» (CSCM) [8].

Для рассматриваемого сооружения учитывалось фактическое армирование (рис. 3). Продольная арматура класса А500, поперечная – А240, диаграмма работы материала арматуры принята по модели идеально упругопластической (диаграмма Прандтля) с ограничением пластических деформаций [9].

В качестве расчетного сейсмического воздействия используются двухкомпонентные акселерограммы (рис. 4), нормированные на интенсивность сейсмического воздействия 6, 7 и 8 баллов.

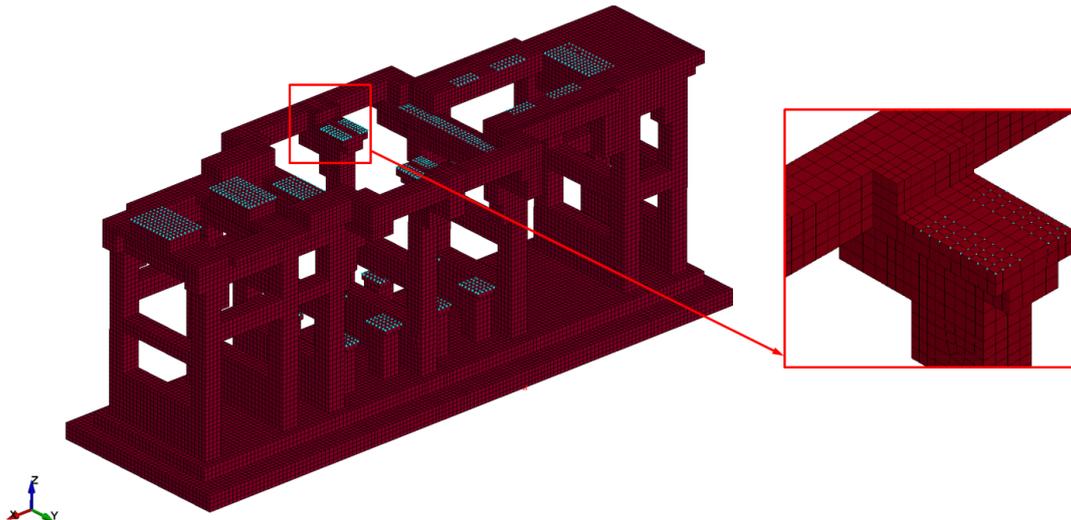


Рис. 2. Расчетная схема фундамента турбоагрегата. Общий вид

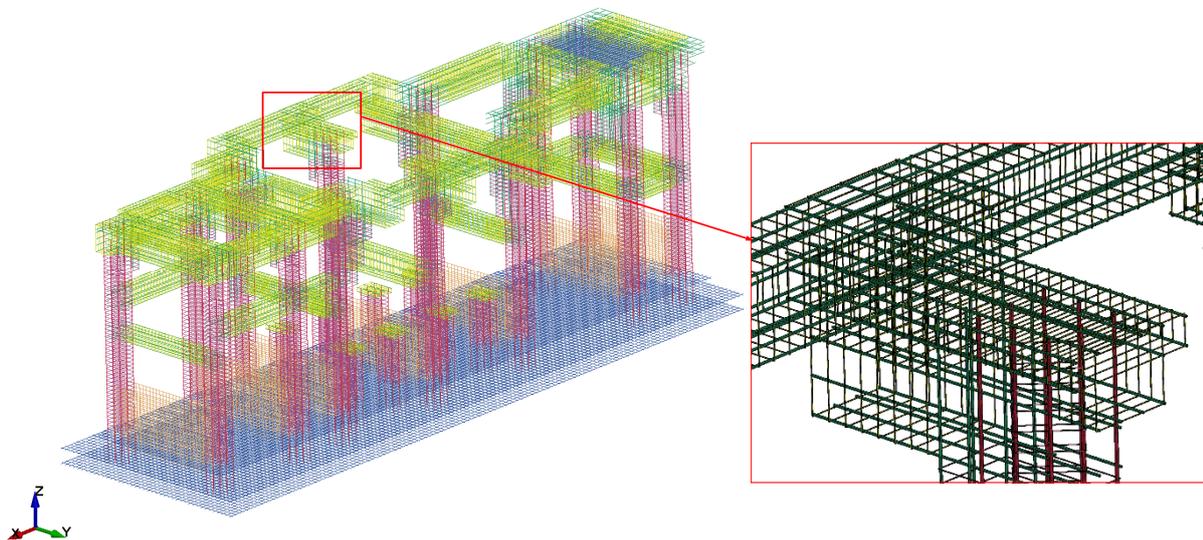


Рис. 3. Арматурный каркас

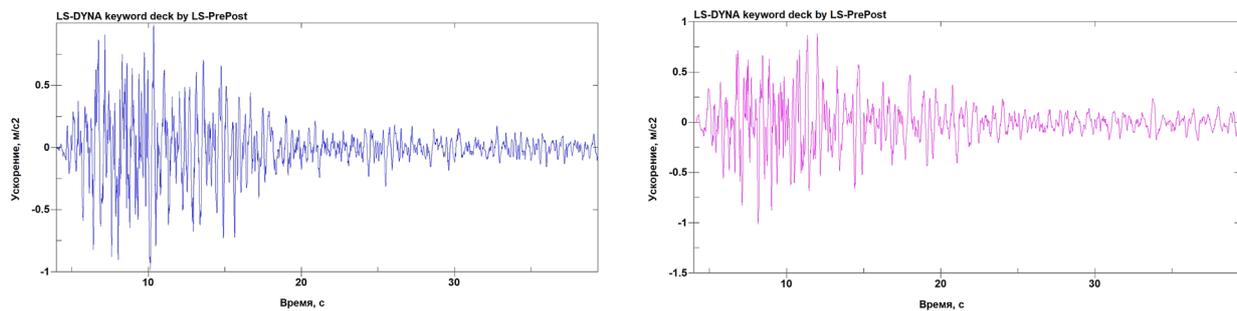


Рис. 4. Расчетные акселерограммы по направлениям X и Y интенсивностью 7 баллов по MSK-64

Расчет выполнен методом прямого интегрирования уравнений движения во временной области с использованием явной центрально-разностной схемы [10]:

$$M\ddot{u}_t + C\dot{u}_t + Ku_t = f_t^a, \quad (1)$$

где  $M$  – матрица масс;  $C$  – матрица диссипации;  $K$  – матрица жесткости;  $f$  – вектор нагрузок;  $u$  – вектор узловых перемещений.

В расчетах учитывалась физическая, геометрическая и конструктивная нелинейность. В условиях значительных перемещений и деформаций явные методы интегрирования уравнения движения демонстрируют наибольшую эффективность. Узловые ускорения и скорости вводятся напрямую как неизвестные величины, а не вычисляются численным дифференцированием перемещений.

Ускорения на  $n$ -м слое вычисляются через векторы внешних и внутренних сил  $f_i^{ext}$  и  $f_i^{int}$  следующим образом:

$$a_n = M_n^{-1}(f_n^{ext} + f_n^{int}), \quad (2)$$

где  $M_n$  – матрица масс соответствующего слоя. Основной сложностью при расчете является определение вектора внутренних сил  $f_i^{int}$ , поскольку именно в нём учитываются все виды нелинейностей материала и взаимодействия элементов.

На каждом шаге интегрирования векторы скоростей и перемещений определяются по формулам:

$$v_{t+\Delta t/2} = v_{t-\Delta t/2} + a_t \Delta t; \quad (3)$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + v_{t+\Delta t/2} \frac{\Delta t_t + \Delta t_{t+\Delta t}}{2}. \quad (4)$$

**Результаты и обсуждения.** На рис. 5 представлены функции накопления повреждений в бетоне для различных моментов времени в процессе сейсмического воздействия интенсивностью 7 баллов.

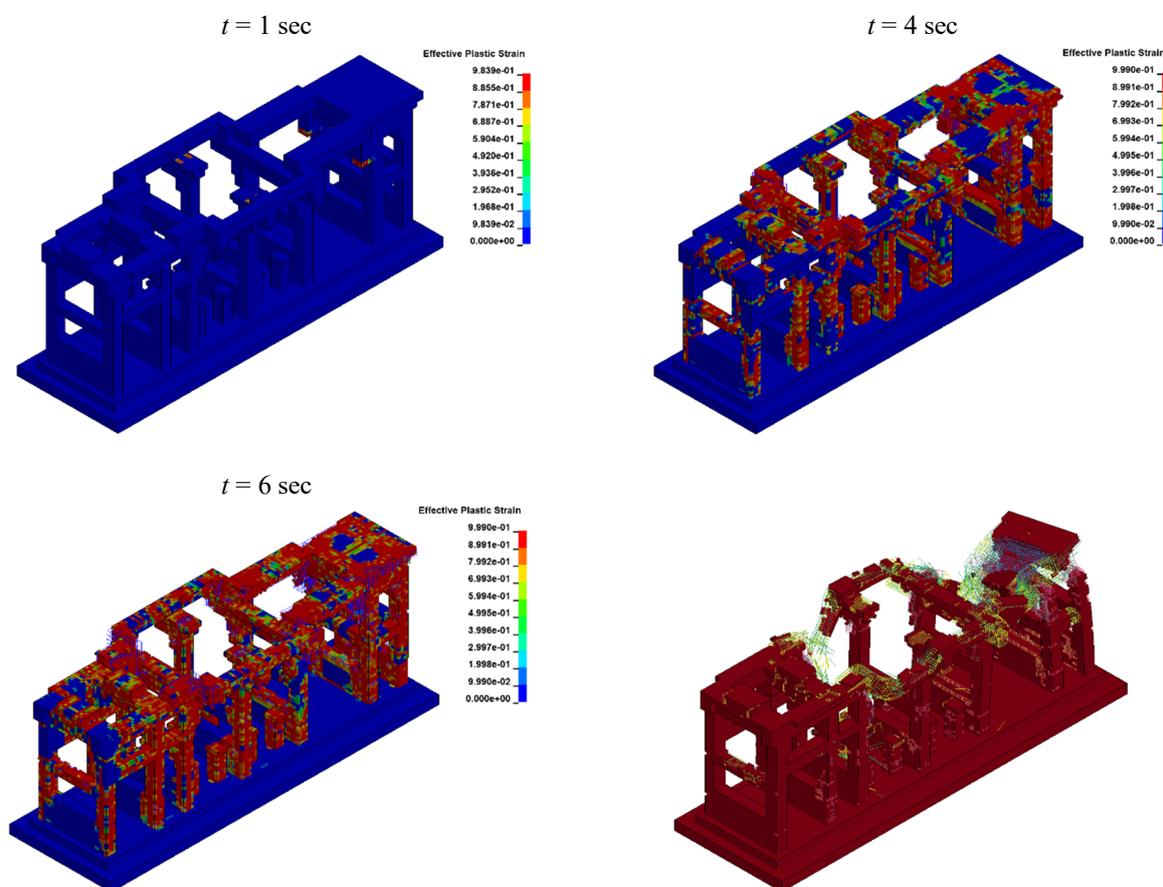


Рис. 5. Изополя функции накопления повреждения в бетоне

Анализ уровня накопления повреждения показывает, что при сейсмическом воздействии формируются зоны существенного снижения несущей способности в приопорных участках турбоагрегата. Эти зоны характеризуются интенсивным развитием неупругих остаточных деформаций.

Наблюдается фактическое исчерпание несущей способности отдельных элементов конструкции, что свидетельствует о выраженном дефиците сейсмостойкости при заданной интенсивности воздействия (7 баллов).

Исследование показывает, что при нормальных эксплуатационных нагрузках и существующей конструктивной схеме фундамент обладает достаточным запасом прочности, однако при использовании его в сейсмическом районе необходимо выполнить соответствующие конструктивные антисейсмические мероприятия.

**Выводы.** Проведенный нелинейный динамический анализ фундамента турбоагрегата на сейсмическое воздействие показал, что действительный уровень сейсмостойкости данной конструкции составляет 6 баллов. При землетрясении интенсивностью 7 баллов в конструкции наблюдается интересное накопление повреждений, приводящее к исчерпанию несущей способности элементов и последующем обрушении. Предлагаемый подход, основанный на прямом нелинейном динамическом методе, позволяет проектировать критические важные объекты энергетики с заданным уровнем сейсмостойкости.

#### Библиографический список

1. РД 34.15.078-91. Фундаменты турбоагрегатов. М.: Энергоатомиздат, 1991. 85 с.
2. СП 14.13330.2018. Строительство в сейсмических районах: свод правил: актуализированная редакция СНиП II-7-81\*: утв. приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 24 мая 2018 г. № 309/пр: введ. 25.11.2018 / Минстрой России. М., 2018. 122 с.
3. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 9 июня 2017 г. № 1209-р. Об утверждении Генеральной схемы размещения объектов электроэнергетики до 2035 года // Собрание законодательства Российской Федерации. 2017. № 26, ст. 3859.
4. Мкртычев О. В., Бунов А. А., Дорожинский В. Б. Сравнение линейно-спектрального и нелинейного динамического методов расчета на примере здания рамно-связевой конструктивной схемы при землетрясении // Вестник МГСУ. 2016. № 1. С. 57–67.
5. Mkrtychev O. V., Lokhova E. M. Accumulation of damage in reinforced concrete elements under cyclic loads [Накопление повреждений в железобетонных элементах при циклических воздействиях] // OP Conferece Series: Materials Science Engineering. 2021. Vol. 1015. Pp. 012038.
6. РТМ 108.021.102-85. Агрегаты паротурбинные энергетические. Требования к фундаментам: руководящий технический материал: утв. М-вом энерг. машиностроения СССР 29.10.85 № ВЛ-002/8579: введ. в действие 01.01.87 / разработ. НПО ЦКТИ им. И. И. Ползунова. Л.: НПО ЦКТИ, 1985. 16 с.
7. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия: свод правил: актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\*: утв. приказом Минстроя России от 03.12.2016 № 891/пр: введ. 04.06.2017 / Минстрой России. М., 2016. 96 с.
8. Murray Y. D. User's manual for LS-DYNA. Concrete material model 159 [Руководство пользователя LS-DYNA. 159-я модель материала бетона]. FHWA-HRT-05-062. 2007. 77 p.
9. Livermore Software Technology Corporation. LS-DYNA Keyword User's Manual Volume II: Material Models. Version 971 R6.1.0. Troy, MI: LSTC, 2012. 174 p.
10. Мкртычев О. В. Развитие прямых нелинейных динамических методов расчета на сейсмические воздействия // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 7. С. 12–16. DOI: 10.33622/0869-7019.2022.07.12-16.

## References

1. Working Documentation 34.15.078-91. Foundations of Turbounits. Moscow: Energoatomizdat, 1991. 85 p.
2. Set of Rules 14.13330.2018. Construction in Seismic Areas: Set of Rules: Updated Version of SNiP II-7-81\*: Approved by Order dated May 24, 2018 No. 309. Moscow, 2018. 122 p.
3. Order of the Government of the Russian Federation dated June 9, 2017 No. 1209-r. On Approval of the General Scheme for the Placement of Electric Power Facilities until 2035 // Collected Legislation of the Russian Federation. No. 26. 2017. P. 3859.
4. Mkrtychev O. V., Bunov A. A., Dorozhinsky V. B. Comparison of linear-spectral and nonlinear dynamic calculation methods using the example of a frame-braced building during an earthquake // Bulletin of MGSU. No. 1. 2016. Pp. 57–67.
5. Mkrtychev O. V., Lokhova E. M. Accumulation of damage in reinforced concrete elements under cyclic loads // OR Conference Series: Materials Science Engineering. Vol. 1015. 2021. Pp. 012038.
6. RTM 108.021.102-85. Steam turbine power units. Foundation Requirements: Guiding Technical Material: approved on 29.10.85 No. VL-002/8579: put into effect on 01.01.87. Leningrad: NPO TsKTI, 1985. 16 p.
7. Set of Rules 20.13330.2016. Loads and Impacts: updated version of SNiP 2.01.07-85\*: approved by Order of the Ministry of Construction of Russia dated 03.12.2016 No. 891/pr: introduced on 04.06.2017. Moscow, 2016. 96 p.
8. Murray Y. D. User's manual for LS-DYNA. Concrete material model 159 [LS-DYNA User's Manual. Concrete material model 159]. FHWA-HRT-05-062. 2007. 77 p.
9. Livermore Software Technology Corporation. LS DYNA Keyword User's Manual Volume II: Material Models. Version 971 R6.1.0. Troy, MI: LSTC, 2012. 174 p.
10. Mkrtychev O.V. Development of direct nonlinear dynamic methods for seismic analysis // Industrial and Civil Engineering. No. 7. 2022. Pp. 12–16. DOI: 10.33622/0869-7019.2022.07.12-16.

## CALCULATION OF A TURBO UNIT FOUNDATION FOR SEISMIC EFFECTS IN A NONLINEAR DYNAMIC FORMULATION

O. V. Mkrtychev <sup>1</sup>, S. A. Aityan <sup>2</sup>

National Research Moscow State University of Civil Engineering <sup>1,2</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup> Dr of Technical Sciences, Head of the Department of Strength of Materials, tel.: +7(499)183-34-83,  
e-mail: MkrtychevOV@mgsu.ru

<sup>2</sup> Master's Student, tel.: +7(968)552-77-61, e-mail: Serezhaaitian@mail.ru

---

The paper presents a quantitative assessment of the actual level of seismic resistance of the turbine unit foundation in thermal/nuclear power plants under operational loads. The study was conducted using the direct nonlinear dynamic method in the ANSYS/LS-DYNA software package. The spatial reinforced concrete massive foundation structure was modeled using nonlinear material models: the Continuous Surface Cap Model (CSCM) for concrete and a perfectly elastic-plastic model for reinforcement. Accelerograms with intensities of 6–8 points on the MSK-64 scale were used as the design input. The analysis results revealed significant accumulation of damage and exhaustion of load-bearing capacity under 7–8 point impacts, particularly in the near-support sections of the turbine unit. It was established that the actual strength reserve of the structure ensures the required safety level only for seismicity up to and including 6 points. The necessity of strengthening the structure or applying seismic protection systems is demonstrated for design under seismic impacts exceeding 6 points. The study confirms the importance of applying nonlinear dynamic methods in the design of critically important energy facilities in seismically hazardous regions.

**Keywords:** turbo-generator foundation, seismic resistance, nonlinear dynamic analysis, accelerograms, seismic impacts, critical energy infrastructure.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 621.791.011

DOI 10.36622/2219-1038.2026.48.1.011

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФЕКТОВ СВАРНЫХ ПРЯМОШОВНЫХ ТРУБ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА

С. Ю. Беляева<sup>1</sup>, Е. Г. Рубцова<sup>2</sup>, С. В. Сизинцев<sup>3</sup>, А. И. Ожерельев<sup>4</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,4</sup>  
Россия, г. Воронеж  
ООО «Головной аттестационно-сертификационный центр»<sup>3</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7(909)217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7(910)345-53-20, e-mail: erubzova@cchgeu.ru

<sup>3</sup> Ведущий инженер, тел.: +7(980)249-32-75, e-mail: sizincev.1991@mail.ru

<sup>4</sup> Студент, тел.: +7(910)345-81-76, e-mail: iozherelev@cchgeu.ru

**Постановка задачи.** Провести комплексный анализ дефектов сварных соединений прямошовных труб большого диаметра и установить причины их возникновения.

**Результаты.** Проведены исследования методами макроструктурного и микроструктурного анализа изготовленных шлифов, определен химический состав и проведены замеры твердости и микротвердости сварного соединения.

**Выводы.** Установлены причины возникновения дефектов сварных соединений в виде макро- и микро-трещин в сварном соединении прямошовной трубы большого диаметра.

**Ключевые слова:** дефекты сварных соединений, трещина, прямошовная труба, многодуговая сварка, макроструктура, микроструктура.

**Введение.** Стальные трубы широко применяются в основном в нефтегазодобывающей и перерабатывающей отраслях, строительстве, машиностроительном секторе, а также в энергетике и коммунальном хозяйстве. В настоящее время существует несколько способов изготовления труб: центробежное литье, обработка давлением (штамповка, прокатка, волочение – в основном трубы небольшого диаметра), контактная или дуговая сварка. Стальные трубы большого диаметра, наиболее востребованные при транспортировке газа, нефтепродуктов, воды, изготавливают преимущественно по сварочным технологиям из листового проката. Стальной горячекатаный или холоднокатаный лист сворачивают в трубу при помощи пошагового пресса, затем на специальном стане сваривают технологическим швом, выполняя сборку, а после автоматической сваркой под флюсом сваривают внутренним и наружными швами, переваривая технологический шов. Для значительного повышения производительности линии изготовления прямошовных труб большого диаметра применяют современные технологии многодуговой автоматической сварки под флюсом, в которой количество электродов одновременно в одной сварочной ванне может достигать шести.

Действуют сразу несколько отечественных нормативно-технических документов, регламентирующих основные параметры стальных электросварных труб: ГОСТ 10705-80,

ГОСТ 20295-85, ГОСТ 10706-76, ГОСТ 10704-91 [1–4]. Их применяют при производстве трубной продукции для внутреннего рынка нашей страны. Если трубы необходимы для международных или совместных проектов, используются европейские нормативные документы, такие как, например, ASTM A671. Норматив ASTM A671 регламентирует виды и нормы оценки контроля качества сварного шва и геометрических параметров труб. Обязательно вся изготавливаемая продукция подвергается неразрушающему контролю: визуально-измерительному, ультразвуковому и радиационному для выявления как внешних, так и внутренних недопустимых дефектов сварных швов и основной трубы. Также при помощи разрушающего контроля определяют комплекс механических свойств сварных соединений и основного металла.

Объектом исследования в работе являются дефектные участки образцов, вырезанные из сварных соединений труб с толщиной стенки 44,45 мм, которые изготовлены из проката (ст. Gr60) производства «Северсталь» по требованиям ASTM A671. Сварное соединение трубы большого диаметра получено при помощи технологического сварочного шва (проволока сплошного сечения Св-08ГНМ-О, защитный газ: смесь Ar (82 %) + CO<sub>2</sub> (18 %)), затем внутреннего сварочного шва (проволока сплошного сечения Св08ГНМ-О + сварочный флюс Esab ОК Flux 10.74) и наружного сварочного шва (проволока сплошного сечения ОК Autrod 13.27 + сварочный флюс Esab ОК Flux 10.74). При этом для наружного сварочного шва (заполнение и облицовка) использовали проволоку сплошного сечения ОК Autrod 13.27 совместно со сварочным флюсом Esab ОК Flux 10.74. При ультразвуковом и рентгеновском контроле сварных соединений труб обнаружены дефекты в виде продольных трещин в металле шва. Цель исследования – определение причин возникновения дефектов сварных соединений электросварных труб.

**Методика исследования.** Вначале был проведен ультразвуковой контроль и радиационный контроль сварных соединений согласно методикам ГОСТ Р 55724-2013 и ГОСТ 7512-82 соответственно. Обнаруженные дефектные участки вырезали для дальнейших исследований. Выявление макроструктуры исследуемой поверхности проводили методом травления в водном растворе азотной кислоты (в соотношении 3:1). При исследовании макроструктуры образцов использовали микроскоп Leica MZ 12.5 с увеличением 8 крат. Для изготовления микрошлифов применялся реактив для травления в 4-процентном спиртовом растворе азотной кислоты. Металлографический анализ макроструктуры сварного шва проводили на микроскопе Leica при увеличении 50–1000 крат. Определение химического состава основного металла и металла шва проводили методом спектрального анализа при помощи спектрометра оптико-эмиссионного РМI-Master. Определение твердости методом Виккерса производили на твердомере Durascan 70 по ГОСТ 2999-75 и ГОСТ 6966-66.

### **Результаты исследования**

1. Ультразвуковой контроль сварных швов соединений труб проводился с целью определения области залегания предполагаемых дефектов. В результате УЗ-контроля несплошности были выявлены только в одном сварном шве. Они располагались в металле шва на глубине 17+18 мм от наружной поверхности трубы. По координатам ручного УЗК из трубы были вырезаны 2 поперечных темплета из сварного соединения с последующей механической обработкой для получения образцов для исследования.

2. Исследование макроструктуры проводилось на поперечных макрообразцах, вырезанных из сварного соединения трубы, образцах поставщика, представленных без маркировки, условно пронумерованными 1 и 2, а также методом макрофрактографии по фото излома (рис. 1), сделанном на завод-изготовителе труб.

Для исследования поверхности разрушения (излома) образец доломали по границе дефекта (рис. 1). При исследовании поверхности излома поперечного образца было выявлено хрупкое межкристаллитное разрушение металла сварного шва. Поверхность излома темная окисленная, частично оплавленная, характеризующая высокотемпературное разрушение металла.

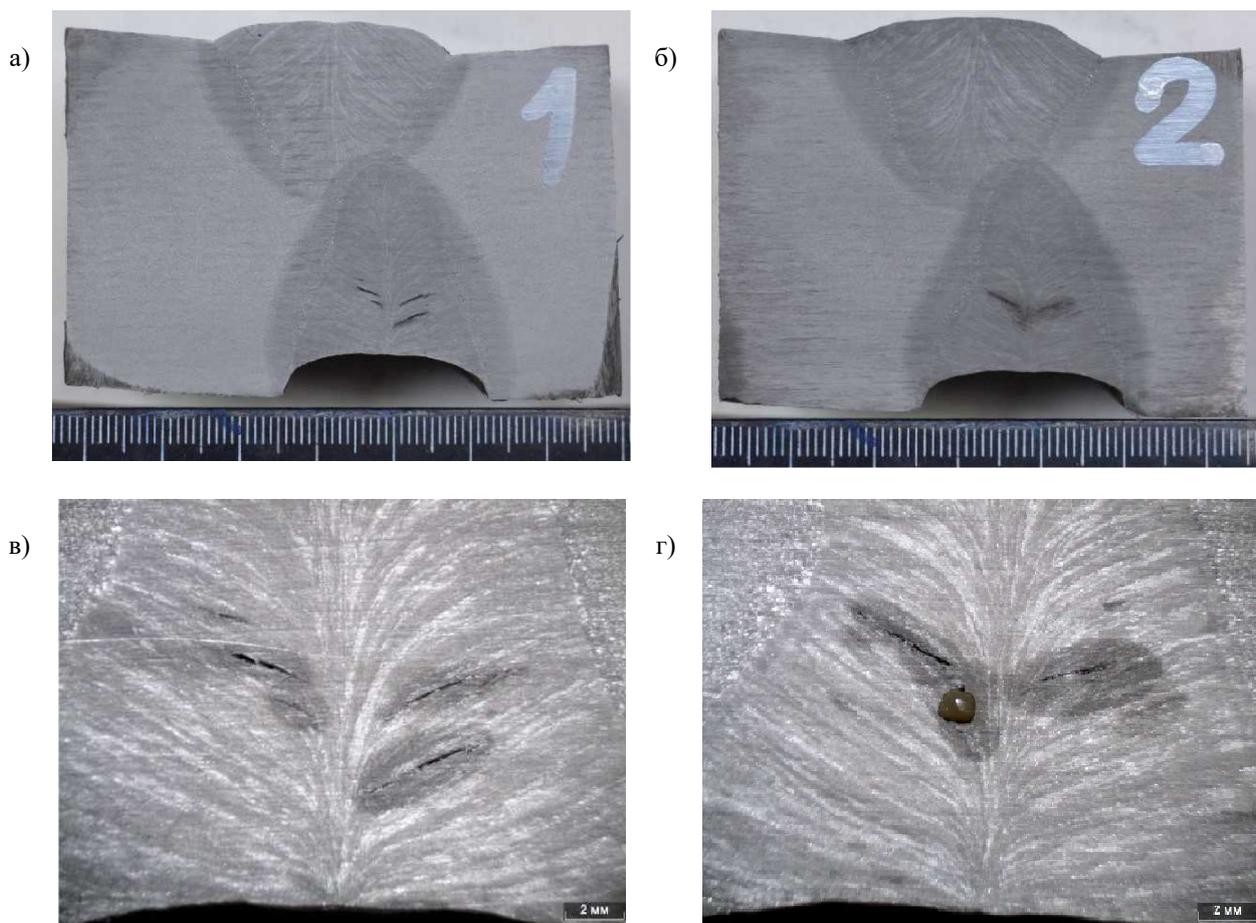
Фотографии макрообразцов 1 и 2 и макрообразцов трубы № 23.06287 представлены на рис. 2 и 3 соответственно.



**Рис. 1.** Фотография излома в дефектной зоне

На фото выявлена аналогичная макроструктура сварных соединений. В структуре наблюдается смещение осей, а также различие в параметрах наружного и внутреннего швов. Внутренний шов более широкий и выполнен с меньшей глубиной провара, в то время как наружный шов более узкий и проварен на большую глубину.

В макрообразцах трубы № 23.06287 наблюдается ремонтная заварка (рис. 3). Расположение дефектов во всех исследуемых макрообразцах схожее. Дефекты выявляются примерно в одной зоне наружного шва и представляют собой трещины разной степени раскрытия, ориентированные в направлении роста кристаллитов.



**Рис. 2.** Макроструктура поперечных образцов сварных соединений:  
а), в) образец 1; б), г) образец 2

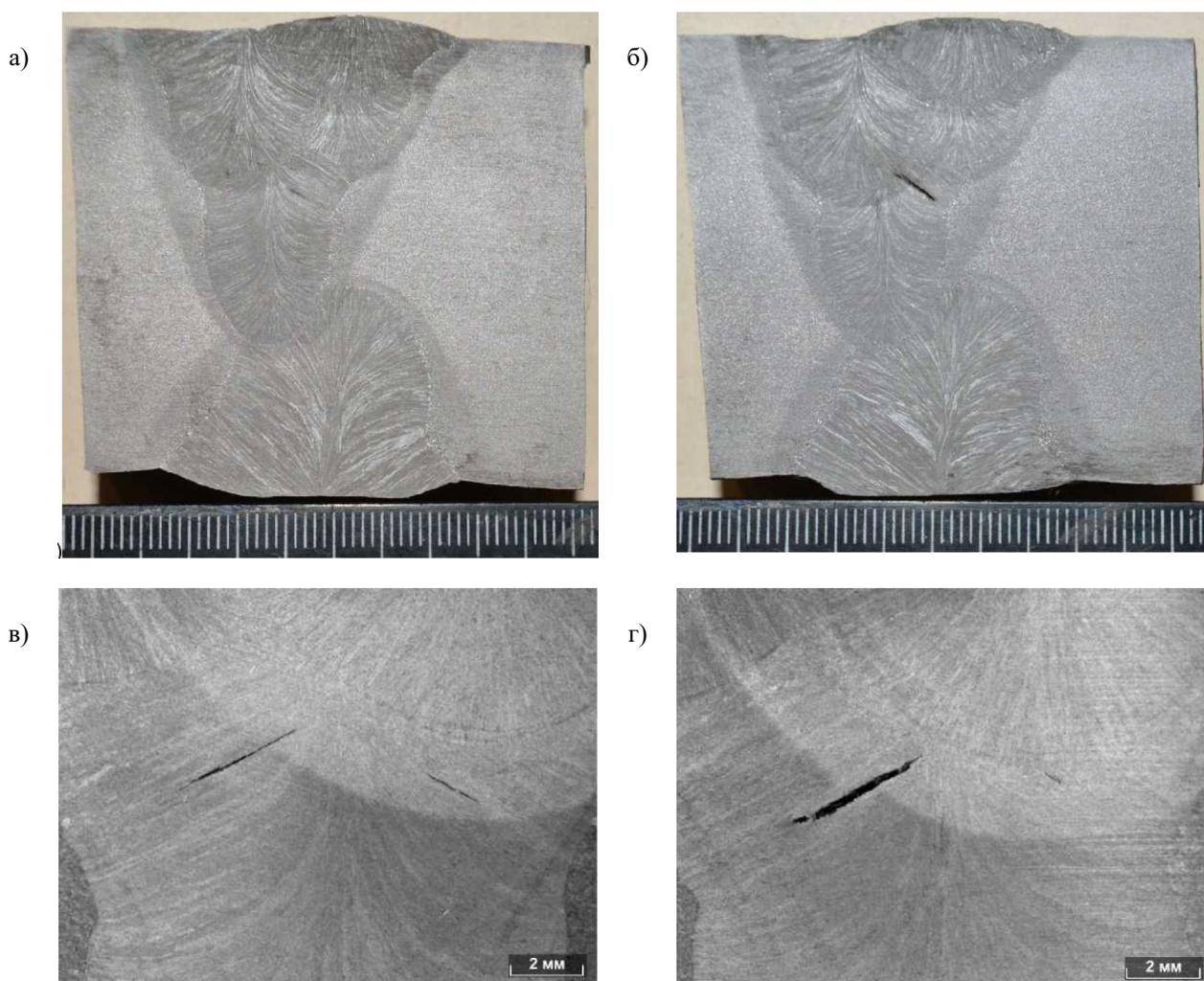
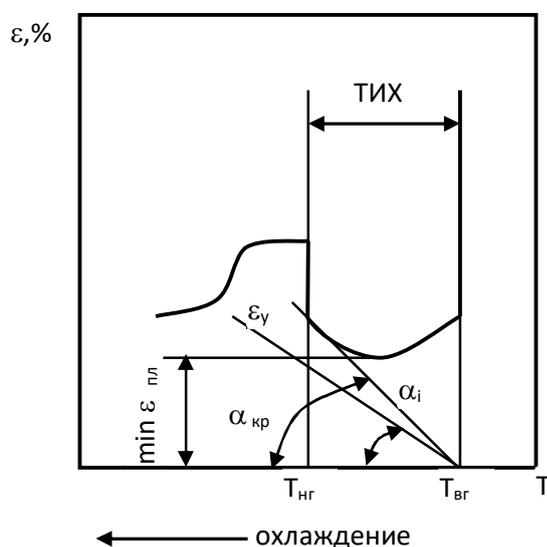


Рис. 3. Макроструктура поперечных образцов сварного соединения трубы № 23.06287

Расплавленный металл шва кристаллизуется в температурном интервале между температурой начала кристаллизации ( $T_L$  – температура ликвидус) и ее окончания ( $T_S$  – температура солидус):  $\Delta T_{кр} = T_L - T_S$ . Величина этого интервала зависит от химического состава расплава. Процесс фазового перехода стали из жидкого состояния в твердое условно разделяют на две стадии: *жидко-твердую*, когда в кристаллизующемся объеме преобладает жидкая фаза, и *твердо-жидкую*, когда преобладает твердая фаза. Деформационная способность сплава в интервале кристаллизации обусловлена в основном циркуляцией расплава между растущими кристаллами. По мере увеличения объема твердой фазы уменьшаются циркуляция расплава и толщина жидкой прослойки между кристаллами. Поэтому на стадии твердо-жидкого состояния деформационная способность и прочность, определяемая прочностью жидкой прослойки, резко падают. Если в этот момент растягивающие напряжения или деформации превысят минимальные деформационно-прочностные возможности сплава, происходит хрупкое разрушение по жидким прослойкам – образуется горячая трещина. В теорию образования горячих трещин, определяющих технологическую прочность, при литье и сварке большой вклад внесли советские исследователи А. А. Бочвар, Н. Н. Рыкалин, И. И. Новиков, Н. Н. Прохоров и др. [5–10]. Опасный температурный интервал, в котором сплав имеет минимальную пластичность, Н. Н. Прохоров назвал *температурным интервалом хрупкости (ТИХ)*, а сопротивляемость сплава образованию горячих трещин – *технологической прочностью*. Величину технологической прочности ( $\Delta$ ) кристаллизующегося сплава Н. Н. Прохоров предложил оценивать запасом пластичности сплава в ТИХ, который в соответствии с рис. 4 выражается разностью:

$$\Delta = \min \varepsilon_{nl} - \max \varepsilon_y, \quad (1)$$

где  $\min \varepsilon_{nl}$  – минимальная относительная деформация сплава в ТИХ;  $\max \varepsilon_y$  – максимальная относительная усадочная деформация сплава в ТИХ.



**Рис. 4.** Схема образования горячих трещин при кристаллизации сплавов в условиях затрудненной усадки:  $T_{вг}$  и  $T_{нг}$  – верхняя и нижняя границы ТИХ;  $\alpha_i$  и  $\alpha_{кр}$  – углы, характеризующие действующий и критический темпы деформации

Величина ТИХ в основном определяется химическим составом сплава. Для условий кристаллизации, близких к равновесным (например, при охлаждении расплава в печи), за ТИХ принимают половину интервала кристаллизации:  $ТИХ = \frac{(T_L - T_S)}{2}$ .

Минимальная пластичность сплава ( $\min \varepsilon_{nl}$ ) в ТИХ определяется структурой и свойствами металла в твердо-жидком состоянии: формой и размерами кристаллитов, количеством и распределением жидкой фазы в межкристаллитном пространстве, свойствами жидкости (жидкотекучестью, вязкостью, прочностью и др.). Для сталей структура и свойства в основном зависят от химического состава, содержания вредных и полезных примесей [11]. В интервале ТИХ происходит миграция примесей в межзеренное пространство, что снижает деформационную способность металла шва и околошовной зоны.

Темп нарастания деформаций – единственный параметр, поддающийся регулированию за счет изменения технологических параметров. Высокотемпературная усадочная деформация кристаллизующегося сплава  $\varepsilon_y$  получает развитие при достижении верхней границы ТИХ (на рис. 4 она обозначена как  $T_{вг}$ ). Если принять, что деформация в ТИХ нарастает прямолинейно, то критический темп нарастания деформации, при котором исчерпывается деформационная способность сплава, будет численно равен тангенсу критического угла  $\alpha_{кр}$ :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = \operatorname{tg} \alpha_{кр}. \quad (2)$$

Действительный темп деформации ( $\operatorname{tg} \alpha_i$ ) зависит от многих факторов, основными из которых являются форма, размеры и жесткость конструкции. Чем жестче форма и выше скорость охлаждения, тем выше темп деформации и тем вероятнее возникновение горячих трещин в шве.

Неблагоприятная форма наружного шва – малая ширина и глубокое проплавление – обеспечила большую скорость кристаллизации по сравнению с внутренним швом, имеющим наиболее благоприятные геометрические параметры, что также могло повлиять на появление кристаллизационных трещин.

3. Исследование химического состава производилось по данным, представленным поставщиком. Результаты спектрального анализа приведены в табл. 1.

Таблица 1

## Химический состав металла трубы с сварным швом (лист 44,45)

Место отбора пробы	Содержание элементов, %						
	C	Si	P	S	Mn	Ni	Mo
Лист 44,45	0,180	0,234	0,010	0,006	1,360	0,013	0,001
Лист 44,45	0,160	0,210	0,006	0,003	1,363	0,014	0,011
Сварной шов	<b>0,860</b>	0,293	0,006	0,006	1,348	<b>0,316</b>	<b>0,207</b>
Gr60	Не более или в пределах						
	0,27	0,13–0,45	0,035	0,035	0,56–1,60	-	-

Из данных табл. 1 следует, что состав основного металла по всем регламентированным показателям соответствует требованиям А5ТМ А516 к химсоставу стали Ст60. Химсостав сварного шва превышает верхний предел по содержанию углерода в 3.2 раза. Углерод способствует образованию горячих трещин за счет увеличения интервала ТИХ, что приводит к получению в шве крупнозернистой структуры первичной кристаллизации с большими внутренними напряжениями, а также провоцирует образование холодных трещин из-за формирования структур закалки в ЗТВ: напряженного мартенсита с высокой хрупкостью.

Анализируя содержание других, не регламентированных А5ТМ А516 химических элементов, прослеживается некоторая разница между основным металлом и металлом шва. Наибольшее расхождение значений наблюдается в содержании никеля и молибдена: металл шва более чем в 20 раз превосходит основной металл по содержанию этих химических элементов. Никель и молибден вводились в металл шва с помощью присадочной проволоки с целью повышения вязкости сварных швов.

При кристаллизации стали никель может образовывать дендритные ликвации в виде почти чистого металла [11, 12], а затем, при понижении температуры, эвтектики Ni-NiS с температурой плавления 644 °С. Эвтектика располагается по границам зерен в стали и способствует охрупчиванию аналогично красномломкости в железе с образованием кристаллизационных трещин. Молибден за счет образования соединений с низкой температурой затвердевания способствует образованию горячих трещин в металле шва и зоне термического влияния [13].

4. Исследование микроструктуры проводилось на поперечных образцах, вырезанных из дефектных зон макрообразцов. Фотографии дефектов в микроструктуре наружных швов представлены на рис. 5 и 6.



Рис. 5. Дефекты в микроструктуре образцов сварного шва

Выявленные дефекты представляют собой трещины, расположенные по границам кристаллитов. Отдельные широко раскрытые полости трещин иллюстрируют разрушение металла под действием больших растягивающих напряжений (рис. 5). В полости трещины, расположенной в корне, выявлены мелкие частицы темно серых глобулярных неметаллических включений, вытесненных фронтом кристаллизации к оси шва (рис. 6).

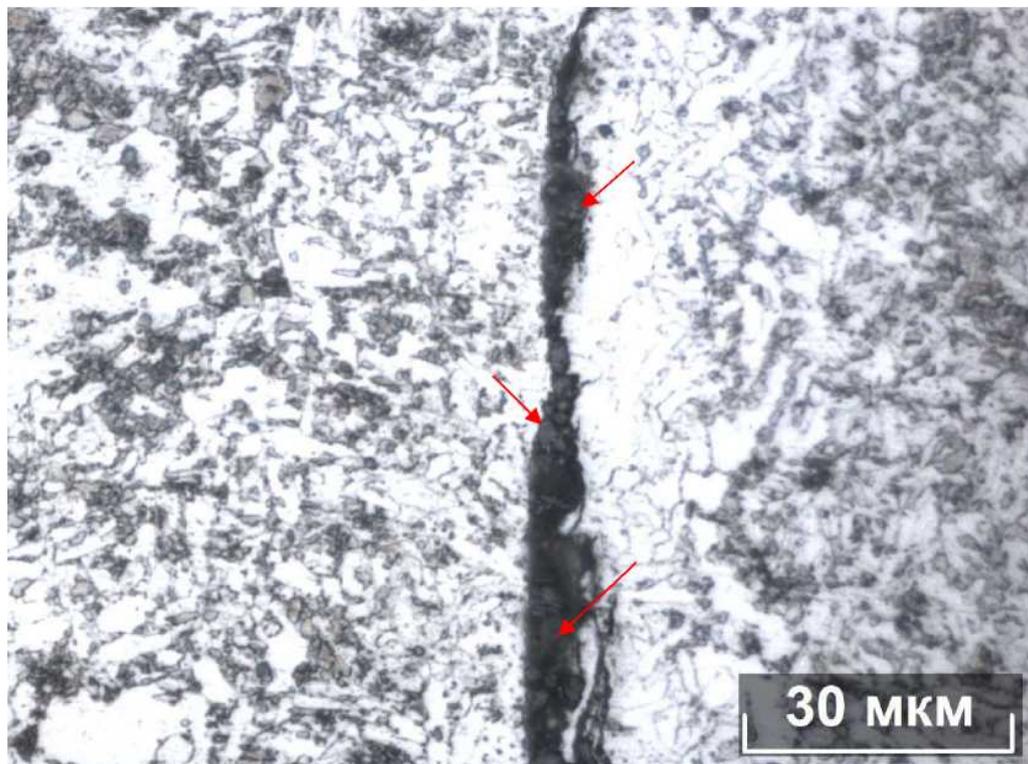


Рис. 6. Неметаллические включения в трещине в корне наружного шва

Микроструктура наружного шва представляет собой смесь игольчатого феррита и мелких мартенситных частиц.

Определение твердости проводили на поперечном образце сварного соединения. Определяли уровень твердости в основном металле свариваемой кромки (ОМ), в зоне термического влияния (ЗТВ) и наплавленном металле шва в сечениях наружного, корня и внутреннего швов (СШ). Результаты и схема расположения точек определения твердости представлена в табл. 2.



Таблица 2  
Распределение твердости в сварном соединении

Исследуемая зона	HV10		
	ОМ	ЗТВ	СШ
Наружный шов	181-174	177-195	220-217-225-230
Корень шва	180-183	189-195	231-210-219
Внутренний шов	186-184	176-192	219-229-220-210

Из данных таблицы видно, что твердость металла швов превосходит твердость основного металла свариваемых кромок на 40-50 HV10. Получение повышенной твердости сварного шва объясняется высоким содержанием углерода.

Как известно, для магистральных трубопроводов, находящихся под воздействием внутреннего давления, наличие дефектов, в том числе в виде трещин в стыковых сварных швах, является причиной внезапного разрушения и приводит к значительному снижению прочностных показателей трубопроводов в целом [14, 15]. Поэтому все большее значение в практике проектирования и строительства приобретает оценка резервов прочности трубопроводов, имеющих структурные нарушения однородности, с учетом прогнозирования развития микротрещины (устойчивого или неустойчивого) на основании методик и критериев механики разрушения твердых тел [14–18], в частности, с привлечением аппарата численного анализа, основанного на методе конечных элементов [14, 18]. Необходимо отметить, что моделирование разрушения сварного соединения с трещиной численными методами дает возможность учесть неоднородность механических свойств металла шва, металла околошовной зоны и наличие остаточных напряжений в основном металле, а также установить уровень критической нагрузки.

#### **Выводы:**

1. Выявленные дефекты в наружном шве сварных соединений представленных для исследования труб являются горячими трещинами кристаллизационного происхождения, на что указывает их топография, расположение по границам кристаллитов и вид излома – межкристаллитный с окисленной и частично оплавленной поверхностью;

2. Возникновению горячих трещин способствовало повышенное содержание углерода, никеля и молибдена в металле швов. Углерод понижает пластичность стали за счет образования неблагоприятных структур в процессе кристаллизации и при дальнейшем охлаждении металла шва и околошовной зоны. Сера образует с железом и никелем легкоплавкие эвтектики, располагающиеся по границам кристаллитов. Легкоплавкие прослойки остаются в жидком или полужидком состоянии между кристаллами шва до появления растягивающих напряжений линейной усадки металла в процессе первичной кристаллизации, что приводит к трещинообразованию. Молибден также образует соединения с низкой температурой затвердевания по границам зерен стали;

3. На образование трещин также повлияла неблагоприятная форма наружного шва: малая ширина и глубокое проплавление, – что обеспечило большую скорость кристаллизации по сравнению с внутренним швом, имеющим более благоприятные геометрические параметры;

4. Большая твердость наплавленного металла могла способствовать развитию дефекта (раскрытию трещин) в процессе холодного деформирования при окончательной калибровке (экспандировании) труб;

5. Оценку прочности электросварных труб с трещинами в стыковых сварных швах необходимо выполнять с использованием методик, разработанных в теории механики разрушения твердых тел, прогнозируя кинетику развития трещины в конкретных условиях эксплуатации трубопроводов.

#### **Библиографический список**

1. ГОСТ 10705-80. Трубы стальные электросварные. Технические условия. М.: Стандартинформ, 2005. 19 с.
2. ГОСТ 20295-85. Трубы стальные сварные для магистральных газонефтепроводов. М.: Изд-во стандартов, 2003. 67 с.
3. ГОСТ 10705-76. Трубы стальные электросварные прямошовные. Технические требования. М.: Изд-во стандартов, 1993. 18 с.
4. ГОСТ 10704-81. Трубы стальные электросварные прямошовные. Сортамент, М.: Стандартинформ, 2007. 36 с.

5. Прохоров Н. Н. Горячие трещины при сварке. М.: Машгиз, 1952. 224 с.
6. Бочвар А. А., Рыкалин Н. Н., Новиков И. И. К вопросу о горячих (кристаллизационных) трещинах при литье и сварке // Литейное производство. 1960. № 10. С. 47.
7. Прохоров Н. Н. Физические основы сварки. Т. 2. М.: Metallurgy, 1976. 562 с.
8. Баландин Г. Ф. Основы теории формирования отливок. Ч. 2. М.: Машиностроение, 1979. 335 с.
9. Каширцев Л. П. Анализ горячеломкости алюминий-кремниевых // Физика и химия неорганических материалов. 1977. № 1. С. 87–92.
10. Lee Eun U. Thermal stress and strain in metal matrix composite with a spherical reinforcement particle // Met. Trans. A. 1992. 23 № 8. P. 2205–2210.
11. Конищев К. Б., Конищев Б. П. Оценка сопротивляемости конструкционных и высоколегированных сталей образованию трещин при сварке // Машиностроение и автоматизация. Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева. 2015. № 2 (109). С. 98–103.
12. Махнева Т. М. Исследование химической неоднородности по никелю и хрому в структуре мартенситно-старееющей стали // Химическая физика и мезоскопия. 2013. Т. 15, № 1. С. 91–96.
13. Николаев А. С., Паршин С. Г., Коротеев А. О. Исследование микроструктурной и механической неоднородности при двухдуговой автоматической сварке магистральных газопроводов // Сварка и диагностика. 2025. № 4. С. 42–47.
14. Андронов И. Н., Гаврюшин С. С., Захаренков Д. В., Пронин А. И. Анализ влияния дефектов в зоне сварного шва на прочность трубопровода // Известия вузов. Машиностроение. 2011. № 1. С. 5–10.
15. Винокуров В. А., Куркин С. А., Николаев Г. А. Сварные конструкции: механика разрушения и критерии работоспособности / Под ред. Б. Е. Патона. М.: Машиностроение, 1996. 576 с.
16. Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения твердых тел: курс лекций. СПб.: Профессия, 2002. 320 с.
17. Партон В. З. Механика разрушения: от теории к практике. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит, 1990. 240 с.
18. Морозов Е. М., Никишков Г. П. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1980. 256 с.

#### References

1. Federal Standard 10705-80. Electric-welded steel pipes. Specifications. Moscow: Standartinform, 2005. 19 p.
2. Federal Standard 20295-85. Welded steel pipes for main gas and oil pipelines. Moscow: Publishing House of Standards, 2003. 67 p.
3. Federal Standard 10705-76. Straight-seam electric-welded steel pipes. Specifications. Moscow: Publishing House of Standards, 1993. 18 p.
4. Federal Standard 10704-81. Straight-seam electric-welded steel pipes. Assortment, Moscow: Standartinform, 2007. 36 p.
5. Prokhorov N. N. Hot cracks during welding. Moscow: Mashgiz, 1952. 224 p.
6. Bochvar A. A., Rykalin N. N., Novikov I. I. On the problem of hot (crystallization) cracks in casting and welding // Foundry Production. 1960. No. 10. P. 47.
7. Prokhorov N. N. Physical Principles of Welding. Vol. 2. Moscow: Metallurgy, 1976. 562 p.
8. Balandin G. F. Fundamentals of the Theory of Casting Formation. Part 2. Moscow: Mashinostroenie, 1979. 335 p.

9. Kashirtsev L. P. Analysis of hot brittleness of aluminum-silicon // *Physics and Chemistry of Inorganic Materials*. 1977. No. 1. Pp. 87–92.
10. Lee Eun U. Thermal stress and strain in a metal matrix composite with a spherical reinforcement particle // *Met. Trans. A*. 1992. 23. No. 8. Pp. 2205–2210.
11. Konishchev K. B., Konishchev B. P. Evaluation of resistance of structural and high-alloy steels to crack formation during welding // *Mechanical Engineering and Automation. Transactions of the R. E. Alekseev Nizhny Novgorod State Technical University*. 2015. No. 2(109). Pp. 98–103.
12. Makhneva T. M. Study of chemical heterogeneity in nickel and chromium in the structure of maraging steel // *Chemical Physics and Mesoscopy*. 2013. Vol. 15. No. 1. Pp. 91–96.
13. Nikolaev A. S., Parshin S. G., Koroteev A. O. Study of microstructural and mechanical heterogeneity in double-arc automatic welding of main gas pipelines // *Welding and Diagnostics*. 2025. No. 4. Pp. 42–47.
14. Andronov I. N., Gavryushin S. S., Zakharchenkov D. V., Pronin A. I. Analysis of the influence of defects in the weld zone on the strength of a pipeline // *Bulletin of Universities. Mechanical Engineering*. 2011. No. 1. Pp. 5–10.
15. Vinokurov V. A., Kurkin S. A., Nikolaev G. A. *Welded structures: fracture mechanics and performance criteria*. Ed. B. E. Paton. Moscow: Mechanical Engineering, 1996. 576 p.
16. Pestrikov V. M., Morozov E. M. *Fracture Mechanics of Solids: A Course of Lectures*. St. Petersburg: Profession, 2002. 320 p.
17. Parton V. Z. *Fracture Mechanics: From Theory to Practice*. Moscow: Nauka, Ed. in Chief of Phys. and Mathematics Literature, 1990. 240 p.
18. Morozov E. M., Nikishkov G. P. *Finite Element Method in Fracture Mechanics*. Moscow: Nauka, 1980. 256 p.

## STUDY OF DEFECTS IN LARGE-DIAMETER WELDED STRAIGHT-SEAM PIPES

S. Yu. Belyaeva<sup>1</sup>, E. G. Rubtsova<sup>2</sup>, S. V. Sizintsev<sup>3</sup>, A. I. Ozherelyev<sup>4</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2,4</sup>  
Russia, Voronezh  
LLC “Head Certification and Attestation Center”<sup>3</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal and Wooden Structures, tel.: +7(909)217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal and Wood Structures, tel.: +7 (910) 345-53-20, e-mail: erubzova@cchgeu.ru

<sup>3</sup> Lead Engineer, tel.: +7 (980) 249-32-75, e-mail: sizincev.1991@mail.ru

<sup>4</sup> Student, tel.: +7 (910) 345-81-76, e-mail: iozherelev@cchgeu.ru

---

**Problem Statement.** Conduct a comprehensive analysis of weld defects in large-diameter longitudinally welded pipes and determine their causes.

**Results.** Macrostructural and microstructural analysis of the prepared sections was performed, the chemical composition was determined, and the hardness and microhardness of the welded joint were measured.

**Conclusions.** The causes of weld defects in the form of macro- and microcracks in the welded joint of a large-diameter straight-seam pipe have been identified.

**Keywords:** weld defects, crack, straight-seam pipe, multi-arc welding, macrostructure, microstructure.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

---

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.  
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
  - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
  - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
  - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
  - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
  - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
  - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
  - 3.7. Текст статьи;
  - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
  - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
  - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]). Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,  
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, доц.,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доц.

Почтовый адрес редакции: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.