

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ**

Научный журнал

**Выпуск № 4 (47)**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научный журнал

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения – Российская Федерация.

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В. С.,** д-р техн. наук, профессор,

Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора: Козлов В. А.,** д-р физ.-мат. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е.,** канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Антонов В. М.,** канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;

**Беляева С. Ю.,** канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Буренин А. А.,** д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии  
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;

**Гриднев С. Ю.,** д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Зверев В. В.,** д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Липецкий государственный технический университет;

**Ефремов С. В.,** канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Кирсанов М. Н.,** д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;

**Колчунов В. И.,** д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;

**Коробко А. В.,** д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;

**Михайлов В. В.,** д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

**Нгуен Динь Хоа,** канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;

**Нугужинов Ж. С.,** д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития  
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;

**Овчинников И. Г.,** д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;

**Пшеничкина В. А.,** д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;

**Свентиков А. А.,** д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

**Трещев А. А.,** д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;

**Турищев Л. С.,** канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;

**Шимановский А. О.,** д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;

**Шитикова М. В.,** д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки – А. Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,  
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Подписной индекс в электронном каталоге Почты России – ПД038

Оформить подписку можно на сайте <https://www.pressa-rf.ru>

Дата выхода в свет 25.12.2025. Усл. печ. л. 16,9. Формат 60×84/8. Тираж 29 экз. Заказ № 278.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Регистрационный номер ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018

Цена свободная

Адрес редакции и издателя: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
(строительный факультет, кафедра строительной механики),  
тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»  
394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

ISSN 2219-1038 (print)  
ISSN 2949-3757(online)

# **STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES**

Scientific Journal

**Issue № 4 (47)**

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh – 2025

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.

Territory of distribution — Russian Federation.

The journal «Structural mechanics and structures» is included into the List of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.,** Dr. of Tech. Sc., Prof.,

Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Kozlov V. A.,** Dr. of Physical and Mathematical Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G. E.,** PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

**Antonov V. M.,** PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

**Belyaeva S. Yu.,** PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Burenin A. A.,** Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

**Gridnev S. Yu.,** Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Zverev V. V.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Lipetsk State Technical University;

**Efryushin S. V.,** PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Kirsanov M. N.,** Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

**Kolchunov V. I.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

**Korobko A. V.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenev;

**Mikhailov V. V.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

**Nguyen Dinh Hoa,** PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

**Nuguxhinov Zh. S.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

**Ovchinnikov I. G.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

**Pshenichkina V. A.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

**Sventikov A. A.,** Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

**Trechshev A. A.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

**Turichshev L. S.,** PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

**Shimanovsky A. O.,** Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

**Shitikova M. V.,** Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A. R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Subscription index in the electronic catalog of the Russian Post – ПД038

You can subscribe on the website [www.press-rf.ru](http://www.press-rf.ru)

Publication date 25.12.2025. Conventional printed sheets 16.9. Format 60×84/8. Numbers of copies 29. Order № 278.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration number PI № FS 77 – 72895 dated 22.05.2018

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation

(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics),

tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>7</b>
<i>Козлов В. А., Габриелян Г. Е., Барченкова Н. А.</i>	
К 85-летию профессора В. С. Сафронова – руководителя воронежской научной школы по строительной механике, главного редактора научного журнала «Строительная механика и конструкции» .....	7
<i>Кирсанов М. Н.</i>	
Аналитический расчет прогиба плоской фермы с произвольным числом панелей.....	16
<i>Пахомова Л. В., Бутузов А. А., Инкижинов Н. С., Щербакова О. В.</i>	
Построение ядра сечения для поперечного сечения, ограниченного окружностью и параболой .....	24
<i>Концедаева Ж. Г., Хомякова И. В., Кузин Г. Д.</i>	
Методика расчёта плоских элементов с незакреплённой кромкой методом конечных разностей .....	40
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ .....</b>	<b>52</b>
<i>Варнавский В. С., Конов А. В., Мухтаров Р. А.</i>	
Исследование упругопластического деформирования пространственного стального каркаса при постоянной и технологической нагрузке.....	52
<i>Кравчук Е. В., Кравчук В. А.</i>	
Обоснование применения стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки в системе городских надземных мостовых переходов .....	63
<i>Савич В. Л., Яшин Л. В., Габова М. Н., Хламов В. А.</i>	
Прочностная оценка остаточного ресурса консервативных систем с учетом коррозии .....	73
<b>ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ .....</b>	<b>86</b>
<i>Зверев В. В., Римшин В. И., Анпилов С. М., Жидков К. Е., Маркович А. Ж.</i>	
Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния стальных гнутых профилей с трапециевидными гофрами.....	86
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ .....</b>	<b>98</b>
<i>Савенков А. Ю., Фомин П. В.</i>	
Распространение воздушных ударных волн по каналам сооружений .....	98
<i>Черняев А. А., Марфин К. В.</i>	
Моделирование и оценка напряженного состояния конструкций сводов здания православного храма .....	113
<b>ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ .....</b>	<b>119</b>
<i>Гриднев С. Ю., Сафронов В. С., Дятлов В. В.</i>	
Оценка динамического воздействия автомобильного потока на здания рамно-связевых систем вблизи транспортных артерий (обзор и постановка задачи).....	119
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ .....</b>	<b>131</b>
<i>Некрасова Н. Н.</i>	
Численно-аналитическая методика построения контактных моделей для неоднородного основания с переменным модулем деформации .....	131
<b>ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ.....</b>	<b>144</b>

## CONTENTS

<b>STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS .....</b>	<b>7</b>
<i>Kozlov V. A., Gabrielyan G. E., Barchenkova N. A.</i>	
On The 85 <sup>th</sup> Anniversary of Professor V. S. Safronov – Head of Voronezh Scientific School of Structural Mechanics, Editor-In-Chief of The Scientific Journal "Structural Mechanics and Constructions" .....	7
<i>Kirsanov M. N.</i>	
Analytical Calculation of a Planar Truss Deflection with an Arbitrary Number of Panels.....	16
<i>Pahomova L. V., Butuzov A. A., Inkizhinov N. S., Shcherbakova O. V.</i>	
Constructing a Cross-Section Core for a Cross-Section Bounded by a Circle and a Parabola .....	24
<i>Kontsevaeva Z. G., Khomyakova I. V., Kuzin G. D.</i>	
Finite Difference Method for Calculation of Plane Elements with Unfixed Edges .....	40
<b>CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES .....</b>	<b>52</b>
<i>Varnavsky V. S., Konov A. V., Mukhtarov R. A.</i>	
Investigation of Elastic-Plastic Deformation Spatial Steel Frame Under Constant and Technological Load .....	52
<i>Kravchuk E. V., Kravchuk V. A.</i>	
Rationale for the Use of Steel Beams Prestressed by Wall Drawing in the System of Overground Town Bridges.....	63
<i>Savich V. L., Yashin L. V., Gabova M. N., Hlamov V. A.</i>	
Strength Assessment of The Residual Life of Conservative Systems Taking into Account Corrosion.....	73
<b>PILOT AND FIELD OBSERVATIONS OF STRUCTURES AND MATERIALS .....</b>	<b>86</b>
<i>Zverev V. V., Rimshin V. I., Anpilov S. M., Zhidkov K. E., Markovich A. Zh.</i>	
Experimental Studies of the Stress-Strain State of Steel Roll-Formed Sections with Trapezoidal Corrugations.....	86
<b>CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES .....</b>	<b>98</b>
<i>Savenkov A. Yu., Fomin P. V.</i>	
Propagation of Air Shock Waves Through Structure Channels .....	98
<i>Chernyaev A. A., Marfin K. V.</i>	
Modeling and Assessment of the Stress State of Orthodox Church Vault Structures.....	113
<b>MOBILE LOAD DYNAMIC EFFECT ON ELASTIC SYSTEMS .....</b>	<b>119</b>
<i>Gridnev S. Y., Safronov V. S., Dyatlov V. V.</i>	
Assessment of the Dynamic Impact of Automobile Traffic on Buildings of Frame Communication Systems Near Transport Arteries (Overview and Problem Statement).....	119
<b>CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES .....</b>	<b>131</b>
<i>Nekrasova N. N.</i>	
A Numerical and Analytical Method for Constructing Contact Models for a Heterogeneous Foundation with a Variable Modulus of Deformation .....	131
<b>RULES OF PREPARATION OF ARTICLES .....</b>	<b>144</b>

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.01

DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.001

### К 85-ЛЕТИЮ ПРОФЕССОРА В. С. САФРОНОВА – РУКОВОДИТЕЛЯ ВОРОНЕЖСКОЙ НАУЧНОЙ ШКОЛЫ ПО СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ, ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА НАУЧНОГО ЖУРНАЛА «СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ»

В. А. Козлов<sup>1</sup>, Г. Е. Габриелян<sup>2</sup>, Н. А. Барченкова<sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: grayr2010@rambler.ru

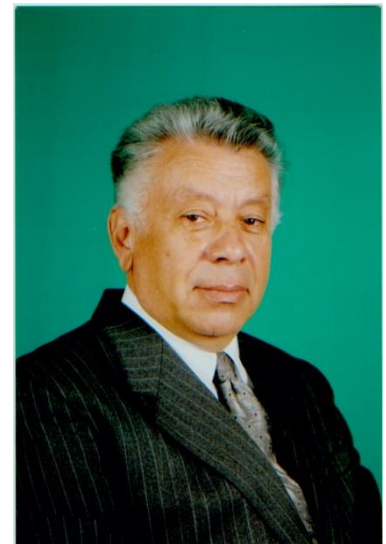
<sup>3</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: barch\_na@vgasu.vrn.ru

Статья посвящена 85-летию руководителя Воронежской научной школы по строительной механике, главного редактора научного журнала «Строительная механика и конструкции», крупного ученого в области динамики и надежности строительных конструкций, доктора технических наук, профессора Владимира Сергеевича Сафронова, длительное время заведовавшего кафедрой строительной механики ВГТУ (ВИСИ, ВГАСА, ВГАСУ) и внесшего большой вклад в развитие кафедры. Приводятся краткие биографические сведения, дается анализ основных направлений деятельности, приводится перечень наиболее значимых научных и учебных публикаций.

**Ключевые слова:** строительная механика, персоналия, динамика мостов, подвижная нагрузка.

Владимир Сергеевич Сафронов родился 4 октября 1940 года в г. Ельце Липецкой области. После семи классов средней школы поступил в Елецкий техникум МПС. Закончив его с отличием, был направлен для дальнейшего обучения на строительный факультет Воронежского инженерно-строительного института, который также с отличием закончил в 1963 году.

После завершения обучения всю свою дальнейшую жизнь Владимир Сергеевич связал с родным вузом ВИСИ – ВГАСА – ВГАСУ – ВГТУ, пройдя путь от ассистента до профессора (1963–1984) и заведующего сначала кафедрой теоретической механики (1981–1987), а затем – кафедрой строительной механики (1987–2009). В последующем он неизменно был самым активным сотрудником кафедры в качестве профессора, руководителя магистерского направления, аспирантуры, члена ГЭКа и ряда диссертационных советов по защите кандидатских и докторских диссертаций, руководителя обширного научно-практического направления работы кафедры, организатора многочисленных научных конференций разного уровня, автора большого числа научных и методических публикаций. С 2010 года и по настоящее время профессор В. С. Сафронов является главным редактором научного журнала «Строительная механика и конструкции».



Владимир Сергеевич за годы своей активной профессиональной деятельности прошел большой путь, опираясь на достижения и традиции кафедры теоретической механики и кафедры строительной механики, созданные его предшественниками В. С. Костроминым, А. И. Оселедько, Я. Б. Львиным, А. Г. Барченковым, Н. М. Кирсановым [1, 2], что в дальнейшем способствовало его плодотворной работе в течение почти 45 лет в статусе руководителя как педагогического, так и научного и научно-практического направлений работы коллективов сначала кафедры теоретической механики, а затем кафедры строительной механики.

В преподавательской деятельности Владимир Сергеевич зарекомендовал себя блестящим педагогом, логично, понятно, доступно объясняющим сложные учебные дисциплины, такие как теоретическая механика, сопротивление материалов, строительная механика, динамика сооружений, теория надежности и риска, механика разрушения и основы долговечности строительных конструкций, расчет зданий на сейсмические воздействия.

В 2003 году (при переходе на трехступенчатую систему высшего образования) Владимир Сергеевич организовал программу магистерского обучения на кафедре строительной механики по программе «Теория и проектирование зданий и сооружений» (направление 08.04.01 «Строительство»). Он руководил её образовательной частью и научным содержанием вплоть до 2025 года. Для кафедры строительной механики работа с магистрантами стала важным этапом в применении и дальнейшем обогащении накопленного педагогического и научного опыта. За сравнительно небольшой срок была подготовлена большая группа молодых высокообразованных и востребованных строительной отраслью специалистов – проектировщиков и исследователей. О поддержании неизменно высокого уровня профессиональной подготовки свидетельствует факт защиты в разные годы одиннадцати кандидатских диссертаций ее выпускниками, которые достойно дополнили и усилили инженерный корпус Воронежа. Некоторые из них по совместительству с основной руководящей деятельностью стали преподавателями вузов.

В начале научной карьеры при выборе направления исследований ассистента В. С. Сафронова определяющую роль сыграл его научный руководитель А. Г. Барченков, который с 1957 года увлечено работал над новым, практически важным научным направлением, посвященным исследованию динамики и надежности несущих конструкций мостов [3, 4]. В ВИСИ он стал основоположником этого направления, создав научную школу из своих учеников и последователей. В. С. Сафронов стал самым успешным из них.

Наиболее практически значимые результаты исследований по динамике автодорожных мостов, совместно полученные А. Г. Барченковым, А. И. Ананьиним и В. С. Сафроновым, были представлены в одной из глав известного в РФ и за рубежом справочника по динамическому расчету специальных инженерных сооружений и конструкций, изданного в 1986 году под редакцией проф. Б. Г. Коренева [8].

За время своей научной деятельности по результатам выполненных исследований Владимир Сергеевич защитил сначала в 1970 году кандидатскую диссертацию [5], а затем, в 1984 году, докторскую [6]. К настоящему времени им опубликовано более 250 научных работ: статей, учебных пособий, докладов на конференциях, монографий, в том числе [7]. В. С. Сафроновым в соавторстве с коллегами разработаны и развиты методы вероятностного расчета в линейной и нелинейной постановках случайных колебаний автодорожных мостов различных систем (балочных, плитных, рамных, висячих, вантовых и др.) при движении транспортных потоков: метод числовых характеристик, метод сопряженных импульсных функций, метод статистических испытаний. Эти методы позволяют достоверно оценить колебания мостовых конструкций при проезде одиночных и колонн автомобилей с учетом флуктуации неровностей дорожного покрытия, скоростей движения, интервалов движения, жесткостных характеристик подвески и загруженности транспортных средств. В итоге это привело к созданию В. С. Сафроновым нового научного направления по методам динамического расчета висячих и вантовых систем на подвижную нагрузку.



Развивая выбранное научное направление, много и успешно работая с молодыми исследователями – своими аспирантами, В. С. Сафронов основал научную школу, в которой главными стали два взаимосвязанных направления:

- вероятностный анализ колебаний мостов различных систем при движении транспортных потоков;
- развитие теории надежности и риска для оценки работоспособности строительных конструкций при критических нагружениях и сейсмических воздействиях.

Под руководством В. С. Сафронова подготовлены и защищены 18 кандидатских и 1 докторская диссертация. Его ученики являются основной частью нынешнего состава кафедры строительной механики, а кандидаты наук, бывшие аспиранты Владимира Сергеевича, – граждане Алжира, Вьетнама, Сирии – успешно работают в своих странах. Тематика выполненных под руководством В. С. Сафронова кандидатских диссертаций неразрывно связана с его научными интересами:

1. Ефрюшин С. В. Развитие метода расчленения для расчета динамического воздействия подвижных нагрузок на комбинированные системы (Воронеж, 1987);
2. Шитикова М. В. Пространственные колебания висячих комбинированных систем с тонкостенной балкой жесткости (Воронеж, 1988);
3. Барченкова Н. А., Воздействие подвижной нагрузки на балочные системы с нелинейно деформируемыми элементами (Воронеж, 1989);
4. Петранин А. А. Расчет тонкостенных систем на импульсивные воздействия (Воронеж, 1989);
5. Галаиини Ш. Взаимодействие балочных систем с движущимися по неровному пути грузами, моделирующими специализированные автотранспортные средства (Воронеж, 1991);
6. Джахра А. Взаимодействие вантово-балочных систем с движущимися по неровному пути грузами, моделирующими сочлененные автобусы (Воронеж, 1992);
7. Петреня Е. Н. Колебания комбинированных стержневых систем при кратковременных воздействиях (Воронеж, 1992);
8. Гриднев С. Ю. Колебания опирающихся на гидроупругое основание конструкций при подвижной нагрузке (Воронеж, 1993);
9. Свентиков А. А. Обеспечение жесткости висячих многопролетных пространственных покрытий производственных зданий (Воронеж, 1994);
10. Варнавский В. С. Расчет балочных и стержневых систем на подвижную нагрузку с учетом пластических деформаций материала (Воронеж, 1994);
11. Габриелян Г. Е. Расчет замкнутой цилиндрической оболочки в упругой среде с учетом односторонних связей (Воронеж, 1998);
12. Степанов С. Д. Напряженно-деформированное состояние составной плитно-балочной системы (Воронеж, 2005);
13. Косенко М. В. Нелинейный деформационный расчет прочности и живучести применяемых в мостостроении железобетонных плитно-балочных систем с дефектами и повреждениями (Воронеж, 2006);
14. Нгуен Х. К. Расчет и анализ сейсмического риска применяемых в мостостроении плитно-балочных систем из железобетона (Воронеж, 2009);
15. Нгуен Д. Х. Применение теории риска для вероятностной оценки работоспособности балочных систем из железобетона, используемых в мостостроении (Воронеж, 2010);
16. Зазвонов В. В. Развитие конструктивных форм и методов статического и динамического расчета грунтозасыпных мостовых сооружений (Воронеж, 2015);
17. Доманова Ю. А. Нелинейное деформирование и гидравлический удар в висячих трубопроводных переходах (Воронеж, 2016);
18. Доманов Д. И. Вероятностный анализ риска возникновения катастрофического состояния применяемых в мостостроении косо опертых плитно-балочных систем из железобетона при воздействии подвижной нагрузки (Воронеж, 2016).

С. Ю. Гридневым в продолжение ранее сделанных исследований была выполнена и защищена в 2013 году докторская диссертация на тему «Развитие теории расчета автодорожных мостов на подвижную нагрузку».

Своими усилиями профессор В. С. Сафронов повлиял на качество образования не только прошедших его школу студентов, магистрантов, аспирантов, но и будущих поколений выпускников нашего университета.

Начиная с 1992 г. профессор В. С. Сафронов был активным членом специализированного диссертационного докторского (позднее кандидатского) совета по строительным специальностям, где возглавлял направление научной аттестации по строительной механике. О его признании как специалиста самого высокого уровня свидетельствует утверждение в качестве заместителя председателя специализированного совета по присуждению ученых степеней при ВГТУ.

Важной и неотделимой от научных изысканий для профессора В. С. Сафронова всегда была практическая деятельность. В 1983 году для закрепления официального статуса и расширения области инженерно-экспертной деятельности основанная А. Г. Барченковым научно-испытательная лаборатория была расширена и преобразована В. С. Сафроновым в научно-испытательный центр «Дормост». Под руководством Владимира Сергеевича по заказам различных строительных, дорожных и мостостроительных организаций в течение многих лет выполнялся большой объем исследований на строящихся и эксплуатируемых мостах и сооружениях в разных регионах России – от Калининграда до Сахалина. Его личное участие в мониторинге, диагностике, паспортизации, обследовании технического состояния, разработке способов усиления и испытаниях сотен мостовых сооружений (в том числе через крупные водные преграды: Волгу, Дон, Днепр, Ворону, Воронеж, Суру и др.) является большим вкладом в стабильность работы дорожной сети и конструкций промышленного и гражданского назначения.

Накопленный Владимиром Сергеевичем обширный опыт по обследованию технического состояния инженерных сооружений был востребован при назначении его руководителем федерального специализированного базового экспертного центра (ФСБЭЦ) по проверке технической оснащенности проектных и исследовательских организаций Центрально-Черноземных областей, организованного Правительством Воронежской области. Возглавляя около десяти лет работу ФСБЭЦ, он многократно лично инспектировал работу профильных организаций в различных регионах Центрального Черноземья.

Профессор В. С. Сафронов был организатором и активным участником многочисленных семинаров, симпозиумов, конференций и совещаний различного уровня. По самым разным профессиональным вопросам ему приходилось выступать как перед коллегами, так и перед руководством области. Его активная позиция, уникальные знания, опыт, открытость способствовали принятию верных решений и снискали уважение среди учёных-исследователей, практических инженеров и хозяйственных руководителей.

С 2010 года по инициативе В. С. Сафронова вузом был учрежден и начал издаваться научно-технический журнал «Строительная механика и конструкции», главным редактором которого он является более 15 лет. Впоследствии статус журнала был изменен на научный, его тематика была расширена с пяти разделов до семи. Благодаря требовательности к уровню и актуальности отбираемых научных статей журнал приобрел известность и авторитет, в нем наряду с сотрудниками вуза публикуются авторы из различных крупных научных центров страны. В 2020 году журнал был включен в Перечень ВАК (квартиль 2), а в 2025 году – в «Белый список» РЦНИ (уровень 3).

В знак признания научной и инженерной общественностью заслуг Владимира Сергеевича в разные годы он был награжден медалью «За доблестный труд», почетными знаками Минвуза РСФСР, избран членом-корреспондентом Российской академии естествознания, получил звания заслуженного работника высшей школы РФ, почетного дорожника РФ, почетного члена Российского общества инженеров строительства.

Ниже приводятся наиболее значимые научные публикации доктора технических наук, профессора Владимира Сергеевича Сафронова:

1. Барченков А. Г., Котуков А. Н., Сафронов В. С. Применение корреляционной теории для динамического расчета мостов // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1970. № 4. С. 43–48.
2. Барченков А. Г., Мальцев Р. И., Котуков А. Н., Сафронов В. С. Колебания упругих систем под действием подвижной нагрузки как случайный процесс // *Теория и испытание сооружений: сб. тр. / Воронежский инженерно-строительный институт*. Воронеж, 1970. С. 62–79.
3. Сафронов В. С. Исследование колебаний конструктивно-ортотропных плит под действием движущихся по неровному пути механических систем, моделирующих автомобиль: дис. ... канд. техн. наук / Воронежский инженерно-строительный институт. Воронеж, 1970.
4. Барченков А. Г., Мальцев Р. И., Котуков А. Н., Сафронов В. С. Вынужденные колебания автодорожных мостов как случайный процесс // *Прикладная механика*. 1971. Т. 7, № 3. С. 92–98.
5. Ананьин А. И., Баранов В. А., Сафронов В. С., Черемский Б. А. К вопросу определения предварительного напряжения арматуры динамическим способом // *Организация контроля за степенью натяжения арматуры при изготовлении предварительно напряженных железобетонных конструкций: сб. ст. Воронеж, 1971. С. 113–133.*
6. Ананьин А. И., Барченков А. Г., Сафронов В. С. О свободных и вынужденных колебаниях комбинированных систем // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1972. № 4. С. 42–45.
7. Сафронов В. С. Расчет на ЭВМ корреляционной функции случайного нестационарного процесса колебаний автомобиля // *Теория и испытание сооружений: сб. ст. Воронеж, 1975. С. 49–57.*
8. Сафронов В. С. Алгоритм расчета оптимальных размеров несущих конструкций кабельных однопролетных мостов // *Исследования висячих комбинированных конструкций: сб. ст. Воронеж, 1979. С. 40–45.*
9. Сафронов В. С. Колебания висячего моста при движении автомобиля // *Строительная механика и расчет сооружений*. 1980. № 5. С. 45–48.
10. Сафронов В. С. Алгоритм расчета нелинейных колебаний висячего моста совместно с движущейся нагрузкой // *Исследования висячих конструкций покрытий и мостов: сб. ст. Воронеж, 1982. С. 3–9.*
11. Сафронов В. С., Рыдченко Д. Г. Динамическое давление подвижной нагрузки на вантово-балочные мосты // *Исследования висячих конструкций покрытий и мостов: сб. ст. Воронеж, 1982. С. 10–18.*
12. Сафронов В. С. Колебания автопоезда при перевозках крупноразмерных строительных конструкций // *Исследования по статике и динамике стержневых и тонкостенных систем: межвуз. сб. науч. тр. Воронеж, 1983. С. 12–19.*
13. Сафронов В. С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж, 1983. 194 с.
14. Сафронов В. С. Актуальные задачи статике и динамики современных автодорожных мостов: дис. ... д-ра техн. наук / Московский государственный университет путей сообщения. М., 1984.
15. Сафронов В. С. Расчет колебаний висячих мостов при движении колонн автомобилей // *Висячие покрытия и мосты: межвуз. сб. науч. тр. Воронеж, 1986. С. 9–14.*
16. Ананьин А. И., Барченков А. Г., Сафронов В. С. Динамика автодорожных мостов // *Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций. Справочник проектировщика / Под ред. Б. Г. Коренева, А. Ф. Смирнова. М., 1986. С. 327–349.*
17. Сафронов В. С., Шаранин А. И. К расчету колебаний длинномерных и тонкостенных железобетонных конструкций при перевозках по автодороге // *Прикладные задачи статике и динамики мостов: сб. ст. Воронеж, 1988. С. 102–110.*

18. Сафронов В. С., Галайни Ш., Джахра А. Расчет случайных колебаний висячих и вантовых мостов при движении многоосных автомобилей // Исследование висячих конструкций: межвуз. сб. науч. тр. Воронеж, 1989. С. 42–49.
19. Джахра А., Рыдченко Д. Г., Сафронов В. С. Расчет колебаний вантово-балочных систем при подвижной нагрузке с учетом выключения вант // Расчет прочности, устойчивости и колебаний сооружений: межвуз. сб. науч. тр. / Воронежский инженерно-строительный институт. Воронеж, 1990. С. 50–59.
20. Сафронов В. С., Барченкова Н. А. Расчет конструкций временного усиления балочных пролетных строений мостов для пропуска сверхпроектной нагрузки // Методы и алгоритмы расчета сооружений и конструкций: сб. ст. Воронеж, 1990. С. 127–135.
21. Горячев В. Н., Ефрюшин С. В., Сафронов В. С. Расчет колебаний вантового моста при движении пешеходов // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: межвуз. сб. науч. тр. Воронеж, 1992. С. 99–111.
22. Сафронов В. С., Синозерский А. Н., Шитикова М. В. [и др.]. Сборник расчетных работ по сопротивлению материалов на базе персональных ЭВМ. Воронеж, 1995.
23. Сафронов В. С., Петранин А. А., Петреня Е. Н. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных мостов, имеющих дефекты и повреждения // Известия вузов. Строительство. 1996. № 6. С. 103–109.
24. Сафронов В. С., Петреня Е. Н., Петранин А. А., Степанов С. Д. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой // Известия вузов. Строительство. 1998. № 11–12 (479–480). С. 31–35.
25. Глушков А. В., Сафронов В. С. Исследование несущей способности барьерных ограждений облегченной конструкции // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: межвуз. сб. науч. тр. Воронеж, 1998. С. 165–179.
26. Сафронов В. С., Петранин А. А., Петреня Е. Н., Косенко М. В. Детерминированные и вероятностные алгоритмы расчета живучести железобетонных пролетных строений автодорожных мостов // Прикладные задачи механики и тепломассообмена в авиастроении: сб. тр. 2-й всерос. науч.-техн. конф. 2001. С. 208–211.
27. Сафронов В. С., Ходарев А. С. Расчет уровня полигармонической вибрации в помещениях жилых домов, расположенных вблизи проезжей части эксплуатируемых автомобильных дорог // Научный вестник ВГАСУ. Серия: Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений. 2004. № 1. С. 66–71.
28. Сафронов В. С., Петранин А. А., Петреня Е. Н. Натурные испытания трещиностойкости составных предварительно напряженных железобетонных мостовых балок // Научный вестник ВГАСУ. Серия: Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений. 2004. № 1. С. 137–145.
29. Сафронов В. С., Косенко М. В. Стохастическая оценка живучести дефектных железобетонных балочных пролетных строений автодорожных мостов // Оценка риска и безопасность строительных конструкций: тезисы докладов. 2006. С. 61–63.
30. Сафронов В. С., Горячев В. Н., Нгуен Х. К. Методика расчета риска возникновения предельных состояний в железобетонных пролетных строениях автодорожных мостов при землетрясениях // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2008. № 3 (11). С. 36–43.
31. Сафронов В. С., Нгуен Д. Х. Вероятностная оценка риска разрушения по нормальному сечению железобетонных балок // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сб. материалов IX Междунар. науч.-техн. конф. 2008. С. 56–57.
32. Сафронов В. С., Зазвонов В. В. Натурные статические испытания грунтозасыпного автодорожного моста со сводчатым пролетным строением из монолитного железобетона // Строительная механика и конструкции. 2010. № 1 (1). С. 31–40.

33. Ефрюшин С. В., Сафронов В. С. Исследования по механике строящихся, реконструируемых и эксплуатируемых мостовых сооружений // Промышленное и гражданское строительство. 2010. № 9. С. 13–14.
34. Суханова Ю. А., Сафронов В. С. Динамический расчет висячего трубопровода при гидравлическом ударе // Строительная механика и конструкции. 2011. № 1 (2). С. 68–78.
35. Сафронов В. С., Зазвонов В. В. Динамический анализ НДС в грунтозасыпных мостах с железобетонными сводчатыми пролетными строениями при землетрясении // Вестник МГСУ. 2011. № 7. С. 564–569.
36. Сафронов В. С., Доманов Д. И. Оценка влияния косины пролетных строений железобетонных мостов на риск разрушения нормальных сечений балок с ненапрягаемым армированием от изгибающего момента // Строительная механика и конструкции. 2012. № 1 (4). С. 85–91.
37. Сафронов В. С., Антипов А. В. Колебания и прочность современных несущих конструкций зданий при проведении массовых развлекательных мероприятий // Строительная механика и конструкции. 2013. № 2 (7). С. 44–55.
38. Сафронов В. С., Антипов А. В. Современные конечно-элементные модели балочных бездиафрагменных пролетных строений автодорожных мостов // Строительная механика и конструкции. 2013. № 1 (6). С. 93–103.
39. Сафронов В. С., Доманов Д. И. Динамические модели и параметры свободных колебаний косых разрезных пролетных строений железобетонных мостов // Строительная механика и конструкции. 2013. № 1 (6). С. 110–118.
40. Сафронов В. С., Доманова Ю. А. Предотвращение разрушения висячих трубопроводных переходов при внезапной остановке насоса // Механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов: сб. ст по материалам 7-й междунар. науч. конф.: в 2 т. 2013. С. 39–46.
41. Сафронов В. С., Антипов А. В. Анализ современного состояния развития теории динамического воздействия от танцующих групп людей на строительные конструкции зданий и сооружений // Строительная механика и конструкции. 2014. № 1 (8). С. 5–15.
42. Катембо А. Л., Сафронов В. С. Расчетная оценка вероятности разрушения внецентренно сжатой железобетонной колонны // Научный вестник ВГАСУ. Серия: Студент и наука. 2015. № 8. С. 256–260.
43. Сафронов В. С., Катембо А. Л. Расчет несущей способности внецентренно сжатого стержня из железобетона с использованием деформационной модели // Строительная механика и конструкции. 2016. № 1 (12). С. 64–74.
44. Сафронов В. С., Черников А. В., Антипов А. В. [и др.]. Надёжность усиленного накладной плитой плитного пролётного строения автодорожного моста // Строительная механика и конструкции. 2017. № 2 (15). С. 85–94.
45. Сафронов В. С., Антипов А. В., Барченкова Н. А. Натурные измерения и расчетный анализ колебаний железобетонного перекрытия в развлекательном центре при проведении дискотеки // Вестник евразийской науки. 2018. Т. 10. № 1. С. 46.
46. Сафронов В. С., Суханова Ю. А., Барченкова Н. А. Моделирование напряженно-деформированного состояния висячего трубопровода при гидравлическом ударе // Транспортные сооружения. 2018. Т. 5. № 1. С. 9.
47. Сафронов В. С., Антипов А. В. Современные алгоритмы динамического расчета стержневых систем на подвижную подрессоренную нагрузку // Строительная механика и конструкции. 2019. № 1 (20). С. 30–40.
48. Сафронов В. С. Развитие научных исследований по проблемам строительной механики и механики грунтов // Нелинейная механика грунтов и численные методы расчетов в геотехнике и фундаментостроении: материалы науч.-техн. конф. с иностран. участием. 2019. С. 8–22.

49. Сафронов В. С., Антипов А. В. Оценка динамических качеств металлического автодорожного моста по данным натурных испытаний и поверочных расчетов // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 39–53.

50. Сафронов В. С., Антипов А. В. Разработка и апробация методики оценки динамических качеств автодорожного моста // Строительная механика и конструкции. 2021. № 4 (31). С. 40–55.

51. Сафронов В. С., Киселев Д. А. Вероятностная оценка надежности нормального сечения изгибаемой железобетонной балки со стальной фиброй // Строительная механика и конструкции. 2023. №1 (36). С. 93–105.

*Выражаем Владимиру Сергеевичу своё глубокое уважение и признательность за многолетнее сотрудничество и руководство, желаем здоровья, дальнейшей активной педагогической и научной деятельности, долгой счастливой жизни.*

### Библиографический список

1. Сафронов В. С., Ефрюшин С. В., Барченкова Н. А. А. Г. Барченков – основатель Воронежской научной школы по динамике автодорожных мостов // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 7–17.
2. Сафронов В. С., Ефрюшин С. В., Габриелян Г. Е. Я. Б. Львин: выдающийся ученый и талантливый педагог // Строительная механика и конструкции. 2015. № 1 (10). С. 5–14.
3. Барченков А. Г. Динамический расчет автодорожных мостов. М.: Транспорт. 1976. 199 с.
4. Барченков Александр Григорьевич: биобиблиографическое пособие / сост. Т. С. Хуторная; авт. вступит статьи Н. А. Барченкова, В. С. Сафронов. Воронеж, 2011. 42 с. (Ученые Воронежского государственного архитектурно-строительного университета).
5. Сафронов В. С. Исследование колебаний конструктивно-ортотропных плит под действием движущихся по неровному пути механических систем, моделирующих автомобиль: дис. ... канд. техн. наук / Воронежский инженерно-строительный институт. Воронеж, 1970.
6. Сафронов В. С. Актуальные задачи статики и динамики современных автодорожных мостов: дис. ... д-ра техн. наук / Московский государственный университет путей сообщения. М., 1984.
7. Сафронов В. С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж, 1983. 194 с.
8. Ананьин А. И., Барченков А. Г., Сафронов В. С. Динамика автодорожных мостов // Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций. Справочник проектировщика / Под ред. Б. Г. Коренева, А. Ф. Смирнова. М., 1986. С. 327–349.

### References

1. Safronov V. S., Efryushin S. V., Barchenkova N. A. A. G. Barchenkov – the founder of the Voronezh scientific school on the dynamics of highway bridges. Structural Mechanics and Structures. No. 2(17). 2018. Pp. 7–17.
2. Safronov V. S., Efryushin S. V., Gabrielyan G. E. Ya. B. Lvin: an outstanding scientist and talented teacher. Structural Mechanics and Structures. No. 1(10). 2015. Pp. 5–14.
3. Barchenkov A. G. Dynamic calculation of highway bridges. Moscow: Transport, 1976. 199 p.
4. Barchenkov Aleksandr Grigorievich: biographical manual. Compiled by T. S. Khutor-naya; auth. The articles by N. A. Barchenkov and V. S. Safronov will be included. Voronezh, 2011. 42 p. (Scientists from the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering).

5. Safronov V. S. Study of Oscillations of Structural-Orthotropic Slabs Under the Action of Mechanical Systems Moving Along an Uneven Track, Simulating a Car: Diss. ... Cand. Sci. Voronezh Civil Engineering Institute. Voronezh, 1970.
6. Safronov V. S. Actual Problems of Statics and Dynamics of Modern Highway Bridges: Diss. ... Doctor of Engineering Sciences. Moscow State University of Railway Engineering. Moscow, 1984.
7. Safronov V. S. Calculation of Suspension and Cable-Stayed Bridges for Moving Loads. Voronezh, 1983. 194 p.
8. Ananyin A. I., Barchenkov A. G., Safronov V. S. Dynamics of Highway Bridges. Dynamic Calculation of Special Engineering Structures and Constructions. Designer's Handbook. Ed. B. G. Korenev, A. F. Smirnov. Moscow, 1986. Pp. 327–349.

**ON THE 85<sup>TH</sup> ANNIVERSARY OF PROFESSOR V. S. SAFRONOV –  
HEAD OF VORONEZH SCIENTIFIC SCHOOL OF STRUCTURAL MECHANICS,  
EDITOR-IN-CHIEF OF THE SCIENTIFIC JOURNAL  
"STRUCTURAL MECHANICS AND CONSTRUCTIONS"**

V. A. Kozlov <sup>1</sup>, G. E. Gabrielyan <sup>2</sup>, N. A. Barchenkova <sup>3</sup>

Voronezh State Technical University <sup>1, 2, 3</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7 (473)271-52-30, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, email: grayr2010@rambler.ru

<sup>3</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, email: barch\_na@vgasu.vrn.ru

---

This article is dedicated to the 85th birthday of Vladimir Sergeevich Safronov, Doctor of Engineering, Professor, head of the Voronezh Scientific School of Structural Mechanics, Editor-in-Chief of the scientific journal "Structural Mechanics and Constructions," a leading scholar in the field of structural dynamics and reliability, who for many years headed the Department of Structural Mechanics at VSTU (VISI, VGASA, VGASU) and made a significant contribution to the department's development. A brief biographical summary is provided, an analysis of his main areas of work is provided, and a list of his most significant scientific and educational publications is provided.

**Keywords:** structural mechanics, personality, bridge dynamics, mobile load.

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов <sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет «МЭИ» <sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup> Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

---

Предлагается схема статически определимой балочной фермы регулярного типа. Симметричная ферма имеет треугольную решетку с раскосами разной длины и две опоры, одна из которых – неподвижный шарнир, другая – подвижный шарнир. Выводится формула зависимости прогиба фермы от числа панелей при воздействии на ее узлы равномерно распределенной нагрузки. Используется формула Максвелла – Мора в предположении, что жесткость стержней на продольные деформации одинаковая. Обобщение результата на случай произвольного числа панелей производится методом индукции. Аналитические преобразования выполняются в системе компьютерной математики «Maple». Разыскивается асимптотика решения и формула для расчета смещения подвижной опоры. Выведены зависимости усилий в характерных стержнях поясов от числа панелей.

**Ключевые слова:** плоская ферма, индукция, «Maple», формула Максвелла – Мора, прогиб, асимптотика, смещение опоры.

**Введение.** Расчет прогиба стержневых систем на практике выполняется, как правило, численными методами на основе метода конечных элементов [1–3]. В справочнике [4] приведены формулы для расчета прогиба плоских ферм, полученные методом индукции в системе компьютерной математики «Maple». В настоящей работе предлагается новая схема плоской фермы с раскосной регулярной решеткой. Особенность решетки – разный наклон нисходящих и восходящих раскосов. Ставится задача определения зависимости прогиба от числа панелей и размеров конструкции. Используется алгоритм [4].

Ранее аналитическими решениями для регулярных стержневых систем занимались В. А. Игнатьев [3], R. G. Hutchinson и N. A. Fleck [5, 6]. Были рассмотрены проблемы расчета и существования регулярных конструкций. В ранних работах [2, 3] системы компьютерной математики не использовались. Системы компьютерной математики для расчета широко используют также А. В. Матросов и Д. П. Голоскоков. В [7, 8] для расчета строительных конструкций они применяли систему «Maple». В [9] численно-аналитическим методом с применением системы компьютерной математики исследовано напряженно-деформированное состояние тонкой однородной изотропной пластины в форме сектора. Аналитический расчет статического прогиба внешне статически неопределимой плоской фермы с параметрически заданным числом панелей выполнили Е. В. Комерзан и О. В. Свириденко [10].

Формулы для расчета статических деформаций составной пространственной фермы методом индукции в системе «Maple» выведены в [11]. А. Д. Иваницкий [12] привел простые формулы для расчета деформаций плоской рамы с произвольным числом панелей. Аналитический расчет первой собственной частоты регулярной решетчатой рамы выполнен в [13]. Деформации плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей рассчитаны в [14]. В работе [15] В. М. Овсянникова найдена аналитическую зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей. Аналитическая оценка прогиба пространственной фермы четырехскатного покрытия с произвольным числом периодических структур конструкции получена в [16].



В настоящей работе предлагается схема плоской раскосной фермы регулярного типа и алгоритм расчета ее прогиба под действием равномерной узловой нагрузки.

**Конструкция фермы.** Статически определимая ферма с параллельными поясами имеет две опоры, одна из которых – неподвижный шарнир, другая – горизонтально подвижный шарнир. Всего ферма состоит из  $2n$  одинаковых панелей в средней ее части. Две боковые (опорные) панели укорочены и составлены из четырех стержней каждая. Длина панели –  $3a$ . Высота фермы –  $2h$ . Предполагается, что все стержни фермы имеют одинаковую жесткость на растяжение-сжатие (рис. 1). Рассматривается равномерная нагрузка на узлы нижнего пояса.

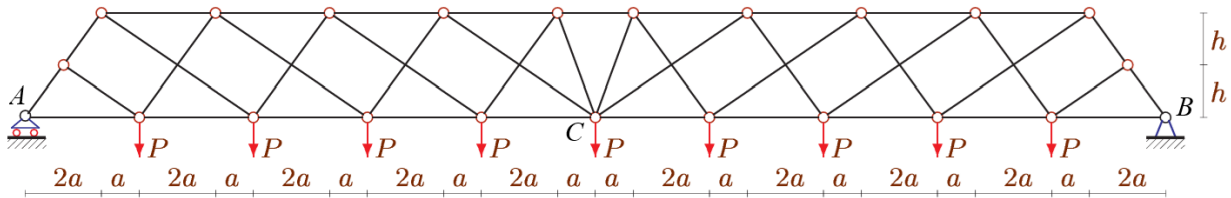


Рис. 1. Схема фермы с нагрузкой по нижнему поясу,  $n = 4$

Число внутренних узлов фермы  $4n + 7$ . Общее число стержней  $\nu = 8n + 11$ , не включая три стержня, моделирующие опоры.

**Расчет усилий в стержнях.** Прогиб фермы определяется по формуле Максвелла – Мора. В формулу входят усилия в стержнях, найти которые можно из условия равновесия узлов. В системе компьютерной математики «Maple» составляется система уравнений равновесия узлов конструкции. Матрица системы состоит из направляющих косинусов усилий, которые определяются в аналитической форме по данным о структуре соединения отдельных стержней в узлы. Для расчетов требуются координаты узлов. Узлы и стержни фермы нумеруются (рис. 2). Длина пролет фермы  $AB = L = 6(n + 1)a$ . В левой подвижной опоре A размещается начало координат:

$$\begin{aligned} x_i &= 3a(i - 1), \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2n + 3, \\ x_{2n+4} &= a, \quad y_{2n+4} = h, \\ x_{i+2n+4} &= 3ai - a, \quad y_{i+2n+4} = 2h, \\ x_{i+3n+5} &= 3a(i + n) + a, \quad y_{i+3n+5} = 2h, \quad i = 1, \dots, n + 1, \\ x_{4n+7} &= L_0 - a, \quad y_{4n+7} = h. \end{aligned}$$

Структура соединения отдельных стержней в узлы кодируется условными списками, содержащими номера концов этих стержней. Например, стержни нижнего пояса кодируются списком:  $\Phi_i = [i, i + 1]$ ,  $i = 1, \dots, 2n + 2$ . Система уравнений равновесия узлов записывается для некоторого порядка  $n$  фермы в матричной форме:  $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$ . Здесь  $\mathbf{R}$  – вектор узловых вертикальных нагрузок,  $\mathbf{G}$  – прямоугольная матрица, составленная из направляющих косинусов размером  $\nu \times \nu$ , вектор  $\mathbf{S}$  – вектор искомых усилий в стержнях, включая три опорные реакции.

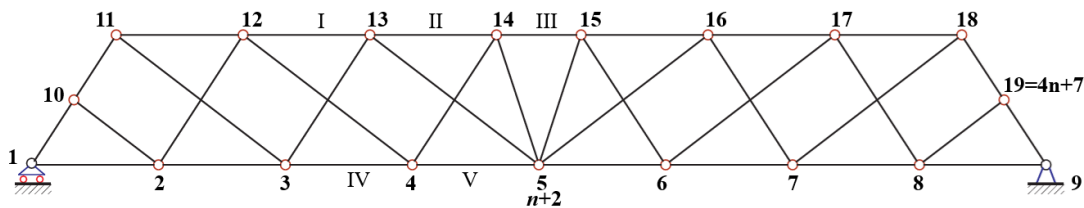


Рис. 2. Номера узлов фермы,  $n = 3$

**Прогиб.** При действии распределенной нагрузки интенсивностью  $P$  на узлы нижнего пояса элементы вектора в правой части системы уравнений равновесия, отличные от нуля, имеют вид:  $R_{2i} = P$ ,  $i = 2, \dots, 2n + 2$ . В четные элементы вектора нагрузок вводятся вертикальные нагрузки, в нечетные – горизонтальные. Схема распределения усилий в стержнях от действия безразмерной нагрузки  $P = 1$  при  $a = h = 2$  м показана на рис. 3 для  $n = 3$ . Сжатые стержни обозначены синим цветом, растянутые – красным. Безразмерные значения усилий приведены с точностью до трех значащих цифр.

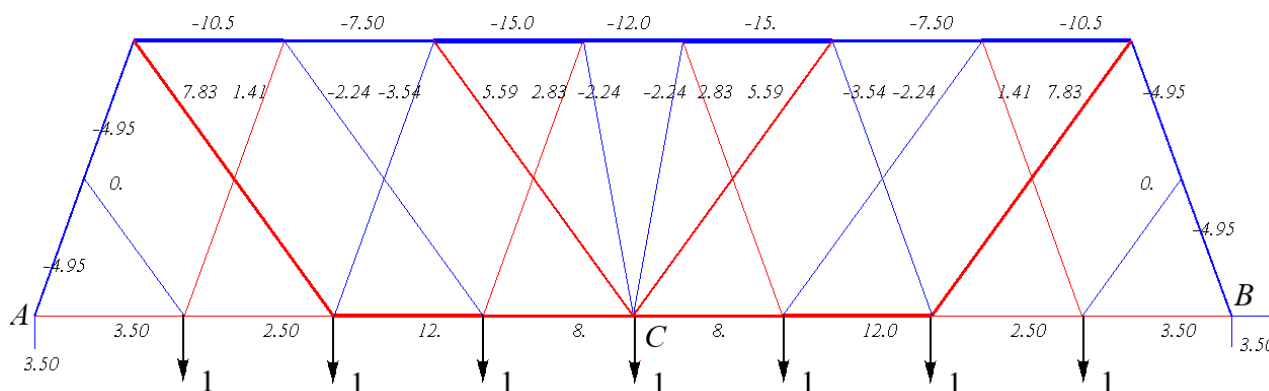


Рис. 3. Нагрузка и распределение усилий,  $n = 3$

Верхний пояс от такой нагрузки сжат, нижний растянут. Картина распределения усилий существенно зависит от четности числа панелей. При  $n = 2$  (рис. 4) усилия в средних стержнях нижнего пояса имеют максимальное значение, а при  $n = 3$  в нижнем поясе усилия наибольшие в четверти пролета (рис. 3). Еще большее различие имеют усилия в двух средних раскосах решетки, образующих букву «V». В одном случае они сжаты, в другом растянуты. Эти же закономерности в распределении усилий существуют и для других чисел панелей.

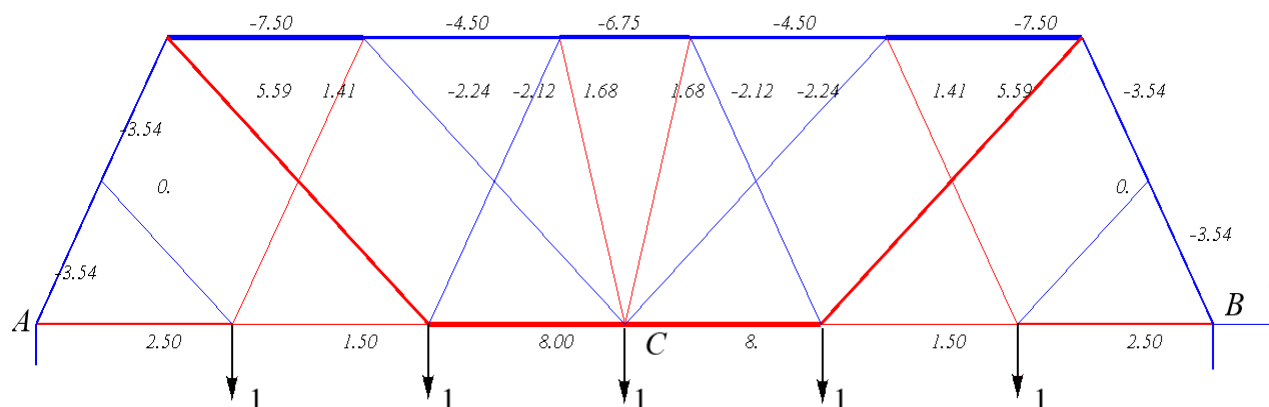


Рис. 4. Нагрузка и распределение усилий,  $n = 2$

Зависимости усилий в некоторых стержнях от числа панелей можно получить аналитически как обобщение ряда частных решений, рассчитанных для определенного числа панелей. Определим усилия в стержнях I, II и III верхнего пояса и стержнях IV, V нижнего пояса фермы (рис. 2). Особенность решетки фермы не позволяет найти эти усилия методом сечений. Последовательно рассчитывая ферму на нагрузку по нижнему поясу при  $n = 2, 3, 4, \dots$ , получаем последовательность значений, например, в стержне I:

$$S_I = -15Pa / (2h), -15Pa / (2h), -21Pa / h, -21Pa / h, -81Pa / (2h), \dots$$

Аналогично получаются последовательности усилий и для других стержней. Индуктивное обобщение этих последовательностей методами «Maple» дает следующие решения для усилий:

$$\begin{aligned} S_I &= -P(3an^2 + 3((-1)^n + 2)an + 3((-1)^n - 1)a) / (4h), \\ S_{II} &= -3P(n + 1)(n - (-1)^n + 1)a / (4h), \\ S_{III} &= -3P(n + 1)^2 a / (4h), \\ S_{IV} &= P(3an^2 - 3((-1)^n - 2)an - 3((-1)^n + 3)a) / (4h), \\ S_V &= P(3an^2 + 3((-1)^n + 2)an + (3(-1)^n - 1)a) / (4h). \end{aligned}$$

График зависимостей выделенных усилий, отнесенных к нагрузке  $P$ , от числа панелей представлен на рис. 5. Эти кривые имеют квадратичные асимптоты, вычисленные с помощью предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_K / (Pn^2) = -3a / (4h)$ ,  $K = I, II, III$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_K / (Pn^2) = 3a / (4h)$ ,  $K = IV, V$ .

Эти асимптоты на рис. 4 отмечены пунктиром.

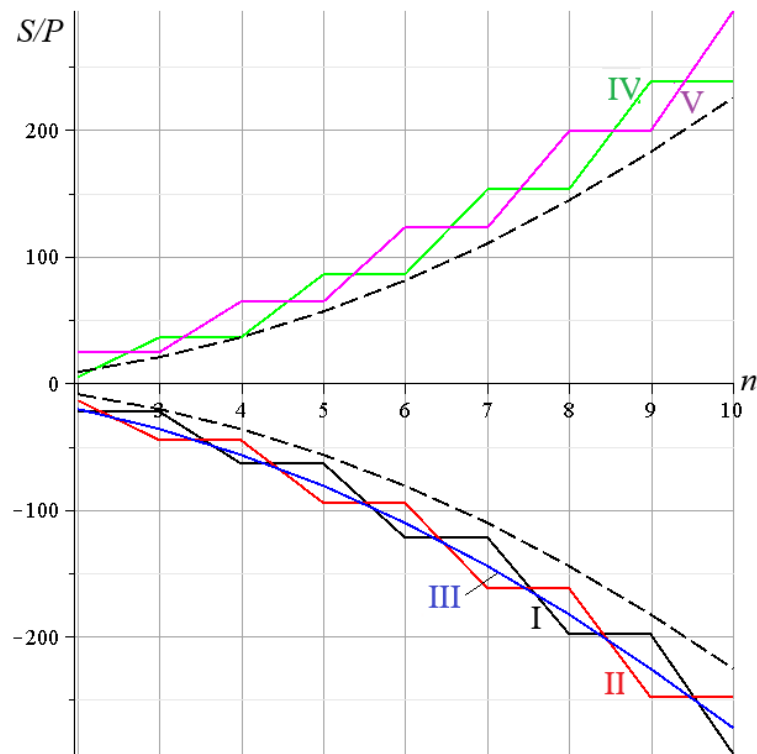


Рис. 5. Усилия в отдельных стержнях нижнего и верхнего пояса

Прогиб конструкции измеряется вертикальным смещением среднего узла  $C$ . Вычисления производятся по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_E = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_{\alpha}^{(p)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF),$$

где  $S_{\alpha}^{(p)}$  — усилие в стержне с номером  $\alpha$  от действия на ферму распределенной нагрузки;  $S_{\alpha}^{(1)}$  — усилие при действии единичной вертикальной силы на узел  $C$ ;  $l_{\alpha}$  — длина стержня  $\alpha$ . Продольная жесткость  $EF$  стержней для всей фермы одинаковая. При выводе формулы зависимости прогиба от числа панелей рассчитывается последовательность решений для ферм с числом панелей  $n = 1, 2, \dots, 10$ :

$$\begin{aligned}
\Delta_{C,1} &= P(888a^3 + 48c^3 + 48f^3 + 24h^3) / (16h^2EF), \\
\Delta_{C,2} &= P(3942a^3 + 128c^3 + 6d^3 + 80f^3 + 40h^3) / (16h^2EF), \\
\Delta_{C,3} &= P(12192a^3 + 192c^3 + 192f^3 + 56h^3) / (16h^2EF), \\
\Delta_{C,4} &= P(29058a^3 + 336c^3 + 10d^3 + 256f^3 + 72h^3) / (16h^2EF), \\
\Delta_{C,5} &= P(59832a^3 + 432c^3 + 432f^3 + 88h^3) / (16h^2EF), \dots,
\end{aligned}$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ ,  $f = \sqrt{4a^2 + h^2}$ . Общие члены последовательностей коэффициентов при кубических степенях размеров находятся методами системы «Maple» из решения однородных линейных рекуррентных уравнений:

$$\Delta_{C,n} = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3d^3 + C_4f^3 + C_5h^3) / (h^2EF). \quad (1)$$

Коэффициенты представляют собой полиномы по числу панелей:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (90n^4 + 360n^3 + 624n^2 + 6(3(-1)^{(n+1)} + 85)n + 45(-1)^{(n+1)} + 129) / 32, \\
C_2 &= (6n^2 + 2((-1)^n + 7)n + (-1)^n + 7) / 8, \\
C_3 &= (n + 1)((-1)^n + 1) / 16, \\
C_4 &= (6n^2 + 2((-1)^{(n+1)} + 5)n + 3(-1)^{(n+1)} + 3) / 8, \\
C_5 &= n + 1 / 2.
\end{aligned}$$

Аналогично прогиб фермы от действия одной сосредоточенной силы в середине пролета имеет тот же вид (1), но с более простыми коэффициентами:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (36n^3 + 108n^2 + 132n - 9(-1)^n + 51) / 16, \\
C_2 &= (2n + (-1)^n + 3) / 4, \\
C_3 &= ((-1)^n + 1) / 16, \\
C_4 &= (2n - (-1)^n + 1) / 4, \\
C_5 &= 1 / 2.
\end{aligned} \quad (2)$$

На рис. 6 представлены кривые зависимости относительного прогиба от числа панелей:

$$\Delta' = EF\Delta_{C,n} / (LP_{sum}), \quad (3)$$

где  $P_{sum} = (2n + 1)P$  – общая (суммарная) нагрузка на узлы нижнего пояса фермы. Кривые обнаруживают нелинейные асимптоты. Кривая роста прогиба при увеличении числа панелей имеет вид квадратной параболы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = 15a^2 / (64h^2).$$

Асимптотика прогиба (1) фермы от действия сосредоточенной силы с коэффициентами (2) имеет вид

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = 3a^2 / (8h^2).$$

В этом случае в формуле (3) следует брать  $P_{sum} = P$ .

От действия вертикальной нагрузки левая подвижная опора смещается. По формуле Максвелла – Мора можно определить величину этого смещения. В качестве единичной силы

берется горизонтальная сила, приложенная к опоре А. После индуктивного обобщения серии решений получается следующая зависимость:

$$\delta_A = 3P(n+1)(4n^2 + 6n + 3(-1)^n + 1)a^2 / (4hEF).$$

Для относительного сдвига  $\delta' = EF\delta_A / (LP_{sum})$  в системе «Maple» вычисляется предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta' / n = a / (4h)$ . В пределе зависимость относительного сдвига от числа панелей линейная.

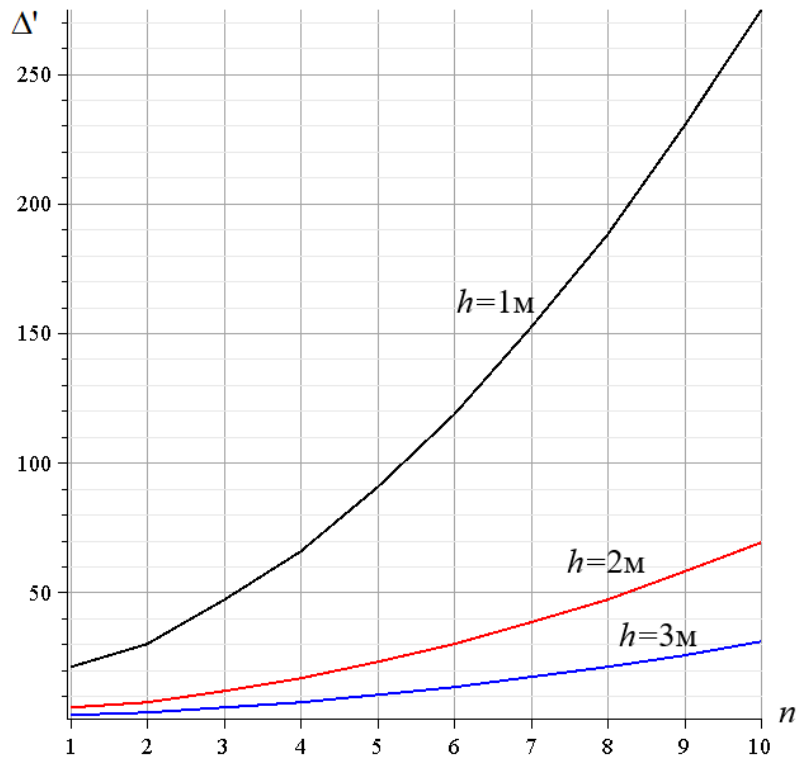


Рис. 6. Зависимость относительного прогиба от числа панелей

**Заключение.** Рассмотрена новая схема раскосной статически определимой балочной фермы. В системе компьютерной математики выведены формулы зависимости прогиба и сдвига подвижной опоры от числа панелей. Найлены асимптоты для прогиба и усилий в характерных стержнях. В решении задачи о прогибе фермы под действием распределенной узловой нагрузки найдена квадратичная асимптотика.

#### Библиографический список

1. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method // Computers & Structures. 2024. V. 305. Pp. 107570. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.
2. Wang Q. [et al.]. Reinforcement design and structural performance for the topology optimized 3D printed concrete truss beams // Engineering Structures. 2025. V. 332. Pp. 120064. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120064>.
3. Игнатьев В. А., Игнатьев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: АСВ, 2022. 306 с.
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, Newcastle upon Tyne, UK, 2024. 186 p.

5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. No. 4 (54). Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.
6. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. No. 9 (85). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.
7. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. No. 1 (36). Pp. 137–141. DOI: 10.18720/MPM.3612018\_15.
8. Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Изгиб секторальной пластины: использование систем компьютерной алгебры // *Известия Петербургского университета путей сообщения*. 2023. № 2. С. 376–384. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-2-376-384.
9. Goloskokov D. P. Analyzing simply supported plates using Maple system // *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014: Proceedings*, 2014. Pp. 55–56. DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273.
10. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. № 2 (29). С. 29–37.
11. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // *Строительная механика и конструкции*. 2022. № 4 (35). С. 40–48. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
12. Иваницкий А. Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // *Строительная механика и конструкции*. 2022. № 3 (34). С. 90–98.
13. Kirsanov M. N., Gribova O. V. Formula for the lattice truss fundamental frequency vibration // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2025. 115 Article. No 11505. DOI: 10.4123/CUBS.115.5.
14. Комерзан Е. В., Лушнов Н. А., Осипова Т. С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2022. № 2 (33). С. 17–25. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002.
15. Овсянникова В. М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 4 (27). С. 16–25.
16. Астахов С. В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // *Строительная механика и конструкции*. 2024. № 4 (43). С. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003.

## References

1. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method // *Computers & Structures*. 2024. V. 305. P. 107570. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.
2. Wang Q. [et al.]. Reinforcement design and structural performance for the topology optimized 3D printed concrete truss beams // *Engineering Structures*. 2025. V. 332. P. 120064. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120064>.
3. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing, Newcastle upon Tyne, UK, 2024. 186 p.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. No. 4 (54). Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.

6. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. No. 9 (85). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.
7. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // Materials Physics and Mechanics. 2018. No. 1 (36). Pp. 137–141. DOI: 10.18720/MPM.3612018\_15.
8. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Bending of a sector plate: using computer algebra systems // Bulletin of the St. Petersburg State University of Railway Engineering. 2023. No. 2. Pp. 376–384. DOI: 10.20295/1815-588X-2023-2-376-384.
9. Goloskokov D. P. Analyzing simply supported plates using Maple system // 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014 – Proceedings, 2014. Pp. 55–56. DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273.
10. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels // Structural Mechanics and Structures. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–30.
11. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Static deformations of a composite spatial frame truss. Analytical solutions // Structural mechanics and structures. 2022. No. 4 (35). Pp. 40–48. DOI: 10.36622 / VSTU.2022.35.4.005.
12. Ivanitsky A. D. Formulas for calculating deformations of a flat frame // Structural Mechanics and Structures. 2022. No. 3 (34). Pp. 90–98.
13. Kirsanov M. N., Gribova O. V. Formula for the lattice truss fundamental frequency vibration // Construction of Unique Buildings and Structures. 2025. 115 Article. No 11505. DOI: 10.4123/CUBS.115.5
14. Komerzan E. V., Lushnov N. A., Osipova T. S. Analytical calculation of the deflection of a planar truss with an arbitrary number of panels // Structural mechanics and structures. 2022. No. 2(33). Pp. 17–25. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002.
15. Ovsyannikova V. M. Dependence of the deflection of a planar external statically undetermined truss on the number of panels // Structural mechanics and structures. 2020. No. 4 (27). Pp. 16–25.
16. Astakhov S. V. Analytical assessment of the deflection of a rod model of a hipped roof frame // Structural Mechanics and Structures. 2024. No. 4 (43). Pp. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003.

## ANALYTICAL CALCULATION OF A PLANAR TRUSS DEFLECTION WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov <sup>1</sup>

National Research University "MPEI" <sup>1</sup>  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup> Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

---

A design for a statically determinate regular beam truss is proposed. This symmetrical truss has a triangular lattice with diagonals of unequal lengths and two supports, one of which is a fixed hinge, the other a movable hinge. A formula is derived for the truss deflection as a function of the number of panels when a uniformly distributed load is applied to its nodes. The Maxwell – Mohr’s formula is used under the assumption that the rods have equal longitudinal stiffness. The result is generalized to an arbitrary number of panels using induction. Analytical transformations are performed in the Maple computer mathematics system. An asymptotic solution and a formula for calculating the displacement of the movable support are sought.

**Keywords:** planar truss, induction, Maple, Maxwell – Mohr formula, deflection, asymptotics, support displacement.

УДК 539.3/6

DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.003

## ПОСТРОЕНИЕ ЯДРА СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ, ОГРАНИЧЕННОГО ОКРУЖНОСТЬЮ И ПАРАБОЛОЙ

Л. В. Пахомова<sup>1</sup>, А. А. Бутузов<sup>2</sup>, Н. С. Инкижинов<sup>3</sup>, О. В. Щербакова<sup>4</sup>Сибирский государственный университет водного транспорта<sup>1, 2, 3, 4</sup>  
Россия, Новосибирск<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой технической механики и подъемно-транспортных машин, тел.: +7(913)904-00-57, e-mail: Pahomova\_l\_v@mail.ru<sup>2</sup> Аспирант, тел.: +7(983)322-58-01, e-mail: artembutuzv2@gmail.com<sup>3</sup> Ст. преп. кафедры технической механики и подъемно-транспортных машин, тел.: +7(913)799-81-52, e-mail: inkizhinov47@bk.ru<sup>4</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры технической механики и подъемно-транспортных машин, тел.: +7(913)925-84-39, e-mail: fisher-54@yandex.ru

Рассмотрено построение ядра сечения для поперечного сечения, ограниченного двумя математическими кривыми: одной из кривых является дуга окружности, а другой – квадратная парабола. Перед определением геометрических характеристик поперечного сечения была найдена точка, соединяющая окружность с параболой, при условии плавного соединения обеих кривых. Поперечное сечение имеет одну ось симметрии, в связи с чем при вычислении геометрических характеристик были рассмотрены только верхние половины трех эллипсов поперечного сечения. Этими элементами являются полукруг и часть полукруга, граничащая с параболой. При вычислении геометрических характеристик были использованы интегральные зависимости. Проведены главные центральные оси  $u, v$ , записаны уравнения связи между исходными осями  $x, y$  и осями  $u, v$ . С помощью общих уравнений координат  $u_{я}, v_{я}$  ядра сечения, взятых из непрерывного способа, применительно к заданному поперечному сечению составлены таблицы для каждой кривой. Нанеся на поперечное сечение координаты  $u_{я}, v_{я}$  в осях  $u, v$ , строим ядро сечения и заштриховываем его. Рассмотрены два случая относительной координаты  $x_c / r$  центра окружности в главных центральных осях  $u, v$  и построены два ядра сечения для этих случаев.

**Ключевые слова:** геометрические характеристики, эллипс, гипербола, квадраты радиусов инерции, главные центральные оси, ядро сечения, поперечное сечение.

В качестве поперечного сечения примем сечение, изображенное на рис. 1. Оно ограничено двумя кривыми: окружностью и квадратной параболой. Для построения ядра сечения применим непрерывный способ, приведенный в работе [3].

Предварительно нужно найти положение точки К – точки перехода окружности в параболу. Как видно из рис. 1, центром окружности является точка О.

Уравнение окружности:

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (1)$$

Уравнение квадратной параболы:

$$y^2 = b^2 - a(x - a_1); \quad (2)$$

$$H = \frac{b^2}{a}, \quad (3)$$

где  $b = O_1K$  – основание параболы;  $H$  – высота параболы;  $a$  – параметр параболы.

Поставим задачу: исходные данные –  $r$  и  $H$ . Требуется найти  $a_1$  и  $a$ .



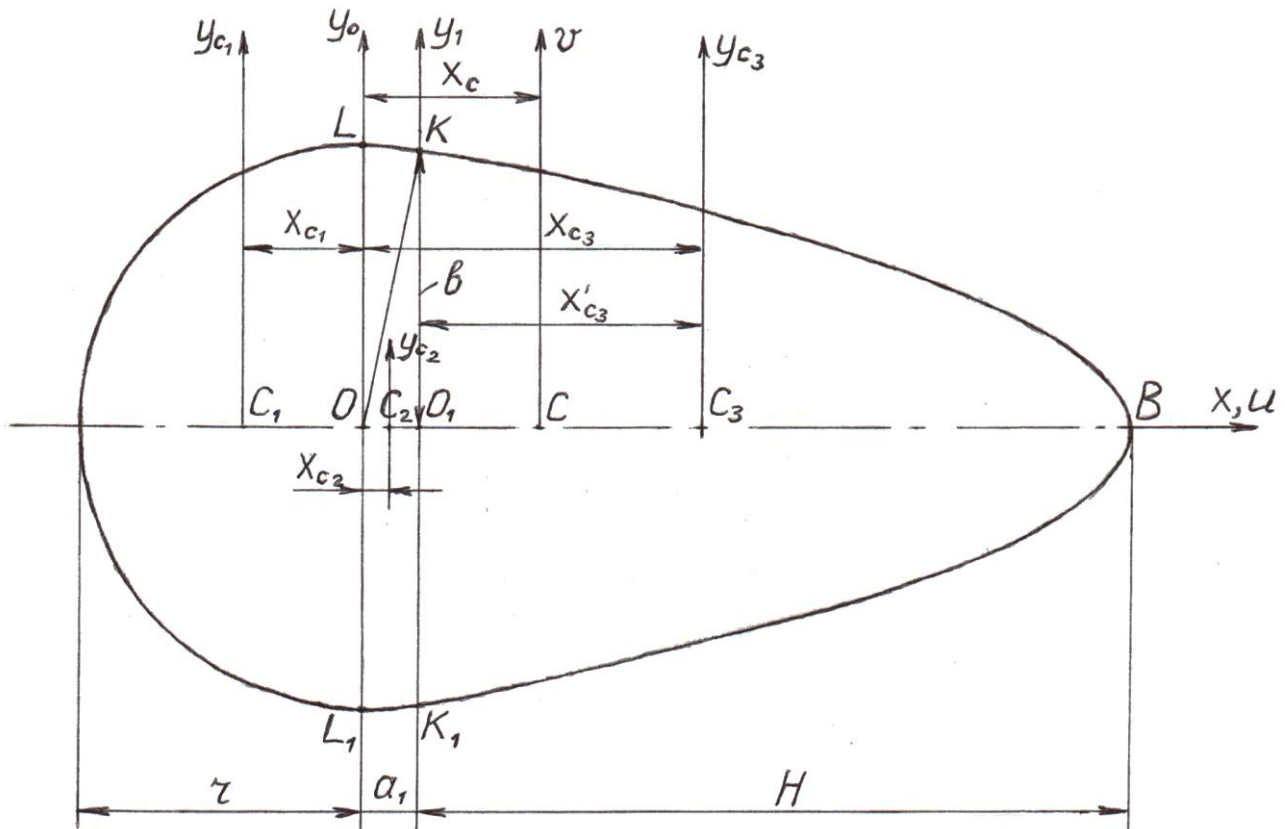


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

В этой задаче две неизвестных величины:  $a_1$  и  $a$ . В точке  $K$  переход окружности в параболу задан плавно, то есть углы наклона касательной одинаковы. Запишем уравнения производных этих кривых, считая окружность первой кривой, а параболу – второй:

$$y_1' = -\frac{x}{y}; \quad (4)$$

$$y_2' = -\frac{a}{2y}. \quad (5)$$

В точке  $K$   $x = a_1$ ,  $y = b$ . Подставим координаты точки  $K$  в уравнения (4)–(5):

$$y_1' = -\frac{a_1}{b}; \quad (6)$$

$$y_2' = -\frac{a}{2b}. \quad (7)$$

При плавном переходе кривых в точке  $K$ :

$$y_1' = y_2'. \quad (8)$$

Тогда

$$-\frac{a_1}{b} = -\frac{a}{2b}. \quad (9)$$

Отсюда

$$a = 2a_1. \quad (10)$$

Получена связь между неизвестными величинами  $a_1$  и  $a$ . Подставим в уравнение (9) величину  $a$  из уравнения (3):

$$a = \frac{b^2}{H}. \quad (11)$$

В результате получим:  $-\frac{a_1}{b} = -\frac{\left(\frac{b^2}{H}\right)}{2b}$ , или короче:

$$a_1 = \frac{b^2}{2H}. \quad (12)$$

Выразим величину  $b^2$  из  $\triangle OO_1K$ :  $b^2 = r^2 - a_1^2$ , и подставим ее в уравнение (12):

$$a_1 = \frac{r^2 - a_1^2}{2H}. \quad (13)$$

Преобразуем уравнение (13) с целью получения  $a_1$ .

$$2Ha_1 = r^2 - a_1^2; a_1^2 + 2Ha_1 - r^2 = 0; a_{1,2} = -H \pm \sqrt{(-H)^2 + r^2}.$$

Но  $a_1 > 0$ , значит,  $a_1 = \sqrt{H^2 + r^2} - H$ . Итак, задача решена. Получены:

$$a_1 = \sqrt{H^2 + r^2} - H, \quad (14)$$

$$a = 2a_1. \quad (15)$$

**Определение геометрических характеристик.** Разделим поперечное сечение на 3 части.

1. Полукруг:

$$x_{c1} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}; A_1 = \frac{\pi r^2}{2}; I_{1x} = \frac{\pi r^4}{8}; I_{1y0} = \frac{\pi r^4}{8}; I_{yc1} \approx 0,109756r^4.$$

При  $r = 2$  см  $x_{c1} = -0,848826$  см,  $A_1 = 6,283185$  см<sup>2</sup>,  $I_{1x} = I_{1y0} = 6,283185$  см<sup>4</sup>,  $I_{yc1} \approx 1,756111$  см<sup>4</sup>.

2. Фигура  $OO_1KL$  (рис. 2).

Определение площади  $A_2$ :

$$\begin{aligned} dA &= y \cdot dx; y = \sqrt{r^2 - x^2}; A_2 = \int_A dA = \int_0^{a_1} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx = \\ &= \left| \begin{aligned} x &= r \cos \alpha, dx = -r \sin \alpha \cdot d\alpha, \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin \alpha; \\ 0 &= r \cos \alpha_1, \cos \alpha_1 = 0, \alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \\ a_1 &= r \cos \alpha_2, \cos \alpha_2 = \frac{a_1}{r}, \alpha_2 = \arccos \frac{a_1}{r}. \end{aligned} \right| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos \frac{a_1}{r}} -r^2 \sin^2 \alpha \cdot d\alpha = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos \frac{a_1}{r}} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \left( -\frac{r^2}{2} \cdot \alpha + \frac{r^2}{4} \cdot \sin 2\alpha \right) \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos \frac{a_1}{r}} = \\
 &= -\frac{r^2}{2} \cdot \arccos \frac{a_1}{r} + \frac{r^2}{4} \cdot \pi + \frac{r^2}{4} \cdot \sin \left( 2 \arccos \frac{a_1}{r} \right).
 \end{aligned}$$

Найдем  $a_1$  при  $r = 2$  см,  $H = 5$  см, используя уравнение (14):

$$a_1 = \sqrt{H^2 + r^2} - H = \sqrt{5^2 + 2^2} - 5 = 0,385165 \text{ см.}$$

Найдем также  $a$  и  $b$ :

$$a = 2a_1 = 2 \cdot 0,385165 = 0,770330 \text{ см; } b = \sqrt{aH} = \sqrt{0,770330 \cdot 5} = 1,962562 \text{ см.}$$

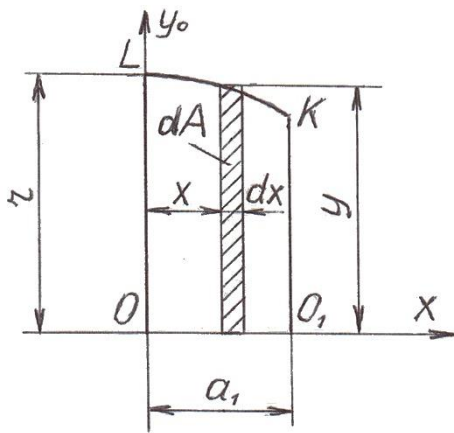


Рис. 2. Фигура  $OO_1KL$

Определение статического момента  $S_{y_0}$  фигуры  $OO_1KL$ :

$$\begin{aligned}
 dS_{y_0} &= x \cdot dA = xydx; S_{y_0} = \int_0^{a_1} xydx = \int_0^{a_1} x\sqrt{r^2 - x^2} dx = \left| x = r \cos \alpha, \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin \alpha, \right. \\
 &\quad \left. dx = r \sin \alpha (-d\alpha) \right|_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos \frac{a_1}{r}} r \cos \alpha \cdot r \sin \alpha \cdot r \sin \alpha \cdot d\alpha = r^3 \int_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \alpha \cdot d\sin \alpha = \frac{r^3}{3} \cdot \sin^3 \alpha \bigg|_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
 &= \frac{r^3}{3} \left( \sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 \left( \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right) = \frac{r^3}{3} \left( 1 - \sin^3 \left( \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Определение осевых моментов инерции фигуры  $OO_1KL$  относительно осей  $x$  и  $y_0$ :

$$\begin{aligned}
 I_{2x} &= \int_0^{a_1} \frac{y^3}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^{a_1} (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \left| x = r \cos \alpha, dx = -r \sin \alpha \cdot d\alpha, \right. \\
 &\quad \left. (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} = r^3 \sin^3 \alpha \right|_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\arccos \frac{a_1}{r}} = -\frac{r^4}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos \frac{a_1}{r}} \sin^4 \alpha \cdot d\alpha = \\
 &= \frac{r^4}{3} \int_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos 2\alpha)^2}{2} d\alpha = \frac{r^4}{12} \int_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) \cdot d\alpha = \frac{r^4}{12} (\alpha - \sin 2\alpha) \bigg|_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{r^4}{12} \int_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 4\alpha}{2} d\alpha = \frac{r^4}{12} \left( \frac{3}{2} \alpha - \sin 2\alpha + \frac{1}{8} \sin 4\alpha \right) \Bigg|_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} = \\
& = \frac{r^4}{12} \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \arccos \frac{a_1}{r} + \sin \left( 2 \arccos \frac{a_1}{r} \right) - \frac{1}{8} \sin \left( 4 \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right); \\
I_{2,y0} &= \int_0^{a_1} dA \cdot x^2 = \int_0^{a_1} x^2 y dx = \int_0^{a_1} x^2 \sqrt{r^2 - x^2} dx = \left[ x = r \cos \alpha, \sqrt{r^2 - x^2} = r \sin \alpha \right. \\
& \left. dx = -r \sin \alpha \cdot d\alpha, x^2 = r^2 \cos^2 \alpha \right] = \\
& = -r^4 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos \frac{a_1}{r}} \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \cdot d\alpha = \frac{r^4}{4} \int_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\alpha \cdot d\alpha = \frac{r^4}{4} \int_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4\alpha}{2} d\alpha = \\
& = \left( \frac{r^4}{8} \cdot \alpha - \frac{r^4}{32} \sin 4\alpha \right) \Bigg|_{\arccos \frac{a_1}{r}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^4}{16} - \frac{r^4}{8} \cdot \arccos \frac{a_1}{r} + \frac{r^4}{32} \sin \left( 4 \arccos \frac{a_1}{r} \right).
\end{aligned}$$

Запишем теперь геометрические характеристики фигуры  $L_1 K_1 KL$  (см. рис. 1), используя найденные характеристики половинной фигуры  $OO_1 KL$ :

$$\begin{aligned}
A_2 &= r^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arccos \frac{a_1}{r} \right) - \arccos \frac{a_1}{r} \right); \quad S_{2,y0} = \frac{2}{3} r^3 \left( 1 - \sin^3 \left( \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right); \\
I_{2,x} &= \frac{r^4}{12} \left( \frac{3\pi}{2} - 3 \arccos \frac{a_1}{r} + 2 \sin \left( 2 \arccos \frac{a_1}{r} \right) - \frac{1}{4} \sin \left( 4 \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right); \\
I_{2,y0} &= \frac{r^4}{16} \left( 2\pi - 4 \arccos \frac{a_1}{r} + \sin \left( 4 \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right).
\end{aligned}$$

Для заданного примера ( $r = 2$  см,  $H = 5$  см,  $a_1 = 0,385165$  см):

$$A_2 = 1,531082 \text{ см}^2; \quad S_{2,y0} = 0,293935 \text{ см}^3; \quad X_{c2} = \frac{S_{2,y0}}{A_0} = 0,191979 \text{ см};$$

$$I_{2,x} = 2,016332 \text{ см}^4; \quad I_{2,y0} = 0,075333 \text{ см}^4.$$

### 3. Парабола $K_1 BK$ .

Рассмотрим сначала верхнюю половину параболы –  $O_1 BK$ . Изобразим верхнюю половину на рис. 3.

Определение площади  $A_3$ :

$$\begin{aligned}
dA_3 &= y dx; \quad A_3 = \int dA_3 = \int_0^H y dx = \int_0^{\frac{b^2}{a}} \sqrt{b^2 - ax} \cdot dx = -\frac{1}{a} \int_0^{\frac{b^2}{a}} \sqrt{b^2 - ax} \cdot d(b^2 - ax) = \\
& = -\frac{2}{3a} (b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^{\frac{b^2}{a}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{b^3}{a}.
\end{aligned}$$

Статический момент площади  $S_{3y1}$ :

$$\begin{aligned}
 dS_{3y1} &= xydx; S_{3y1} = \int dS_{3y1} = \int_0^H xydx = \int_0^{\frac{b^2}{a}} x\sqrt{b^2 - ax} \cdot dx = \left[ u = x; dv = \sqrt{b^2 - ax} \cdot dx; \right. \\
 &\quad \left. du = dx; v = -\frac{2}{3a}(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} \right] = \\
 &= -\frac{2}{3a}x(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3a} \int_0^{\frac{b^2}{a}} (b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3a}x(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} \Big|_{\frac{b^2}{a}}^0 + \frac{2}{3a^2} \int_0^{\frac{b^2}{a}} (b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} \cdot d(b^2 - ax) = \\
 &= \left[ \frac{2}{3a}x(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{15a^2}(b^2 - ax)^{\frac{5}{2}} \right] \Big|_{\frac{b^2}{a}}^0 = \frac{4}{15} \cdot \frac{b^5}{a^2}.
 \end{aligned}$$

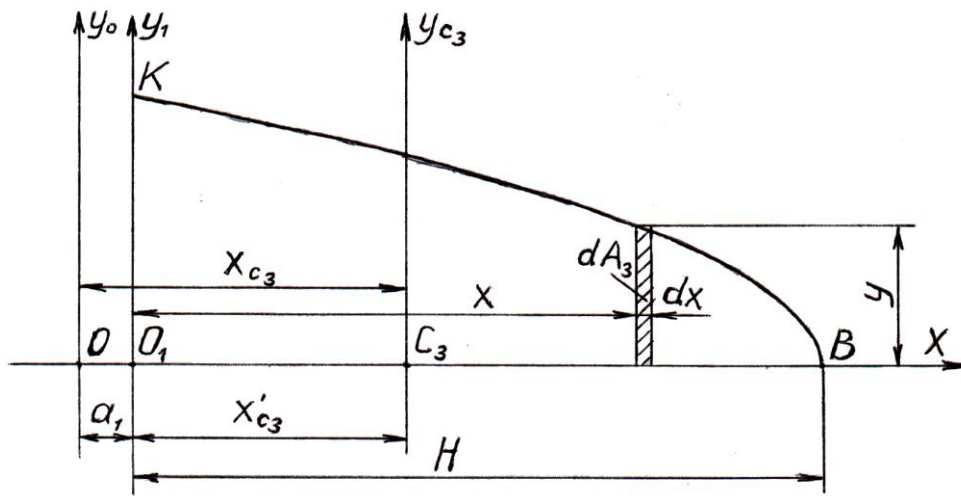


Рис. 3. Парабола

Координата центра площади в осях  $xO_1y_1$ :

$$X'_{c3} = \frac{dS_{3y1}}{A_3} = \frac{4}{15} \cdot \frac{b^5}{a^2} : \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{b^3}{a} \right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{b^2}{a} = \frac{2}{5} H.$$

Осевые моменты инерции:

$$\begin{aligned}
 I_{3x} &= \int \frac{y^3}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{b^2}{a}} (b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} dx = \left[ -\frac{1}{3a}(b^2 - ax)^{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{5} \right] \Big|_0^{\frac{b^2}{a}} = \frac{2}{15} \cdot \frac{b^5}{a^2}; \\
 I_{3y1} &= \int_0^H dA \cdot x^2 = \int_0^{\frac{b^2}{a}} x^2 y dx = \int_0^{\frac{b^2}{a}} x^2 \cdot \sqrt{b^2 - ax} \cdot dx = \left[ u = x^2; dv = \sqrt{b^2 - ax} \cdot dx; \right. \\
 &\quad \left. du = 2x \cdot dx; v = -\frac{2}{3a}(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} \right] = \\
 &= -\frac{2}{3a}x^2(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{b^2}{a}} x(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} dx = \left[ u = x; dv = (b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} \cdot dx; \right. \\
 &\quad \left. du = dx; v = -\frac{2}{5a}(b^2 - ax)^{\frac{5}{2}} \right] = -\frac{2}{3a}x^2(b^2 - ax)^{\frac{3}{2}} -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{8}{15a^2}x(b^2-ax)^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{15a^2}\int_0^{\frac{b^2}{a}}(b^2-ax)^{\frac{5}{2}}dx=\left[\frac{2}{3a}x^2(b^2-ax)^{\frac{3}{2}}+\frac{8}{15a^2}x(b^2-ax)^{\frac{5}{2}}\right]\bigg|_{\frac{b^2}{a}}^0+\\+\frac{16}{105a^3}(b^2-ax)^{\frac{7}{2}}\bigg|_{\frac{b^2}{a}}^0=\frac{16b^7}{105a^3}.$$

Координата центра площади  $A_3$  в осях  $xOy_0$ :

$$X_{c3}=a_1+x'_{c3}.$$

Запишем геометрические характеристики параболы  $K_1BK$  (см. рис. 1), используя найденные характеристики верхней половины параболы  $O_1BK$ :

$$A_3=\frac{4}{3}\cdot\frac{b^3}{a}; X_{c3}=a_1+\frac{2}{5}H; I_{3x}=\frac{4}{15}\cdot\frac{b^5}{a}; I_{3y1}=\frac{32}{105}\cdot\frac{b^7}{a^3}.$$

Для заданного примера  $A_3=13,083744 \text{ см}^2$ ;  $X_{c3}=2,385165 \text{ см}$ ;  $I_{3x}=10,078796 \text{ см}^4$ ;  $I_{3y1}=74,764252 \text{ см}^4$ .

Площадь поперечного сечения:

$$A=A_1+A_2+A_3=6,283185+1,531082+13,083744=20,898011 \text{ см}^2.$$

Положение центра  $C$  площади поперечного сечения:

$$X_c=\frac{\sum A_i x_{ci}}{A}=\\=\frac{6,283185\cdot(-0,848826)+1,531082\cdot0,191979+13,083744\cdot2,385165}{20,898011}=1,252152 \text{ см}.$$

Собственные моменты инерции фигур 2 и 3 относительно вертикальных центральных осей  $Y_{c2}$  и  $Y_{c3}$ :

$$I_{yc2}=I_{2y0}-A_2\cdot X_{c2}^2=0,075333-1,531082\cdot0,191979^2=0,018904 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc3}=I_{2y1}-A_3\cdot(x'_{c3})^2=74,764252-13,083744\cdot\left(\frac{2}{5}\cdot5\right)^2=22,429276 \text{ см}^4.$$

Главные центральные моменты инерции поперечного сечения

$$I_u=\sum I_{ix}=6,283185+2,016332+10,078796=18,378313 \text{ см}^4;$$

$$I_v=\sum I_{yic}+\sum A_i(x_{ci}-x_c)^2=1,756111+0,018904+22,429276+6,283185\times\\ \times(-0,848826-1,252152)^2+1,531082\cdot(0,191979-1,252152)^2+\\+13,083744\cdot(2,385165-1,252152)^2=70,455681 \text{ см}^4.$$

Квадраты радиусов инерции:

$$i_u^2=\frac{I_u}{A}; \quad (16)$$

$$i_v^2 = \frac{I_v}{A}. \quad (17)$$

$$i_u^2 = \frac{I_u}{A} = \frac{18,378313}{20,898011} = 0,879429 \text{ см}^2; \quad i_v^2 = \frac{I_v}{A} = \frac{70,455681}{20,898011} = 3,371406 \text{ см}^2.$$

Координаты ядра сечения:

$$u_{\text{я}} = i_v^2 \cdot \frac{v'}{v - uv'}; \quad v_{\text{я}} = -i_u^2 \cdot \frac{1}{v - uv'}; \quad \frac{dv_{\text{я}}}{du_{\text{я}}} = -\frac{i_u^2}{i_v^2} \cdot \frac{u}{v}. \quad (18)$$

Запишем связь между старыми осями  $x$ ,  $y$  и новыми  $u$ ,  $v$ . Эта связь основана на следующем: ось  $u$  скользит по оси  $x$ , ось  $v$  перемещается вправо от начальной оси  $y_0$  для окружности на величину  $x_c$  и также вправо от начальной оси  $y_1$  для параболы на величину  $x_c - a_1$ .

На основании такого параллельного переноса осей запишем:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{— для окружности:} & u = x - x_c \quad \text{или} \quad x = u + x_c; \\ \text{— для параболы:} & u = x - x_c \quad \text{или} \quad x = u + x_c; \\ \text{— для обеих кривых:} & v = y. \end{array} \right\} \quad (19)$$

В соответствии с указанной связью координат запишем уравнения кривых в главных центральных осях  $uSv$ :

$$\left. \begin{array}{ll} \text{— для окружности:} & (u + x_c)^2 + v^2 = r^2; \\ \text{— для параболы:} & v^2 = b^2 - a(u + x_c - a_1). \end{array} \right\} \quad (20)$$

Запишем выражения для  $v$  и  $v' = \frac{dv}{du}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{— для окружности:} \\ v = \pm \sqrt{r^2 - (u + x_c)^2}; \\ 2(u + x_c) + 2v \cdot v' = 0, v' = -\frac{u + x_c}{v}. \end{array} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{— для параболы:} \\ v = \pm \sqrt{b^2 - a(u + x_c - a_1)}; \\ 2v \cdot v' = -a; v' = -\frac{a}{2v}. \end{array} \right\} \quad (22)$$

После подстановки  $v$  и  $v'$  из уравнений (21) и (22) в уравнения (18) получим координаты  $u_{\text{я}}$ ,  $v_{\text{я}}$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{— для окружности:} \\ u_{\text{я}} = i_v^2 \cdot \frac{\pm \frac{u + x_c}{\sqrt{r^2 - (u + x_c)^2}}}{\pm \sqrt{r^2 - (u + x_c)^2} \pm u \cdot \frac{u + x_c}{\sqrt{r^2 - (u + x_c)^2}}} = -i_v^2 \cdot \frac{u + x_c}{r^2 - (u + x_c)^2 + u(u + x_c)}; \end{array} \right\} \quad (23)$$

$$u_{\text{я}} = -i_v^2 \cdot \frac{u + x_c}{r^2 - x_c(u + x_c)};$$

$$v_{\text{я}} = -i_u^2 \cdot \frac{1}{\pm \sqrt{r^2 - (u + x_c)^2} \pm u \cdot \frac{u + x_c}{\sqrt{r^2 - (u + x_c)^2}}} = \pm i_v^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - (u + x_c)^2}}{r^2 - (u + x_c)^2 + u(u + x_c)};$$

$$v_{\text{я}} = \pm i_u^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - (u + x_c)^2}}{r^2 - x_c(u + x_c)};$$

– для параболы:

$$u_{\text{я}} = i_v^2 \cdot \frac{-\frac{a}{2v}}{v + u \cdot \frac{a}{2v}} = i_v^2 \cdot \frac{\pm \frac{a}{2\sqrt{b^2 - a(u + x_c - a_1)}}}{\pm \sqrt{b^2 - a(u + x_c - a_1)} \pm \frac{au}{2\sqrt{b^2 - a(u + x_c - a_1)}}} =$$

$$= -i_v^2 \cdot \frac{a}{2[b^2 - a(u + x_c - a_1)] + au};$$

$$v_{\text{я}} = -i_u^2 \cdot \frac{1}{\pm \sqrt{b^2 - a(u + x_c - a_1)} \pm \frac{au}{2\sqrt{b^2 - a(u + x_c - a_1)}}} = \pm i_u^2 \cdot \frac{2\sqrt{b^2 - a(u + x_c - a_1)}}{2[b^2 - a(u + x_c - a_1)] + au}. \quad (26)$$

Координаты ядра сечения в старых координатах:

– для окружности:

$$u_{\text{я}} = -i_v^2 \cdot \frac{x}{r^2 - x_c \cdot x};$$

$$v_{\text{я}} = \pm i_u^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2 - x^2 + x(x - x_c)} = \pm i_v^2 \cdot \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2 - x_c \cdot x};$$

– для параболы:

$$u_{\text{я}} = -i_v^2 \cdot \frac{a}{2[b^2 - a(x - a_1)] + a(x - x_c)};$$

$$v_{\text{я}} = \pm i_u^2 \cdot \frac{2\sqrt{b^2 - a(x - a_1)}}{2[b^2 - a(x - a_1)] + a(x - x_c)}.$$

Для определения координат ядра сечения составим таблицы для каждой кривой (табл. 1, 2).  
Выпишем постоянные величины, входящие в уравнения:

$$i_u^2 = 0,879429 \text{ см}^2; \quad i_v^2 = 3,371406 \text{ см}^2; \quad r = 2 \text{ см};$$

$$x_c = 1,252152 \text{ см}; \quad b = 1,962562 \text{ см};$$

$$a_1 = 0,385165 \text{ см}; \quad a = 0,770330 \text{ см}.$$



Полудуга окружности разбита на части по  $22,5^\circ$ . Для окружности и параболы:  $u_i = x_i - x_c$ ; для окружности:  $v_i = y_i = \sqrt{r^2 - x_i^2}$ ; для параболы:  $v_i = y_i = \sqrt{b^2 - a(x_i - a_1)^2}$ .

Таблица 1

$i$	$x_i$	$u_i = x_i - x_c$	$v_i = y_i = \sqrt{r^2 - x_i^2}$	$r^2 - x_c \cdot x_i$	$u_{яi}$	$v_{яi}$	$\frac{dv_{яi}}{du_{яi}}$
0	-2	-3,252152	0	6,504304	1,036669	0	$\infty$
1	-1,847759	-3,099911	0,765367	6,313675	0,986675	-0,106608	1,056500
2	-1,414214	-2,666366	1,414214	5,770810	0,826208	-0,215516	0,571773
3	-0,765367	-2,017519	1,847759	4,958356	0,520407	-0,327724	0,284814
4	0	-1,252152	2	4	0	-0,439715	0,163312
5	0,385165	-0,866987	1,962562	3,517715	-0,369145	-0,490641	0,115234

Таблица 2

$i$	$x_i$	$u_i = x_i - x_c$	$v_i = y_i = \sqrt{b^2 - a(x_i - a_1)^2}$	$2y_i^2 + a(x_i - x_c)$	$u_{яi}$	$v_{яi}$	$\frac{dv_{яi}}{du_{яi}}$
5	0,385165	-0,866987	1,962562	7,035433	-0,369145	-0,490641	0,115234
6	1,252152	0	1,784316	6,361564	-0,407863	-0,492866	0
7	2,385165	1,133013	1,520194	5,494771	-0,472648	-0,486609	-0,194413
8	3,385165	2,133013	1,241233	4,724441	-0,549714	-0,462097	-0,448260
9	4,385165	3,133013	0,877684	3,954112	-0,656808	-0,390409	-0,931137
10	5,385165	4,133013	0	3,183782	-0,815726	0	$-\infty$

Из этих таблиц видно, что для точки  $K$ , где окружность плавно переходит в параболу, координаты ядра сечения одинаковы, что указывает на правильность выведенных уравнений.

Используя полученные координаты ядра сечения, изобразим на рис. 4 поперечное сечение вместе с ядром сечения. Ядро сечения заштриховано. Контур ядра сечения представлен сплошной линией, состоящей из двух частей, принадлежащих эллипсу от окружности и эллипсу от параболы. Каждый эллипс состоит из двух линий: сплошной и штриховой. Сплошные линии ядра сечения соответствуют сплошным линиям поперечного сечения. Штриховые линии ядра сечения соответствуют штриховым линиям окружности и ветвей параболы, уходящих в бесконечность.

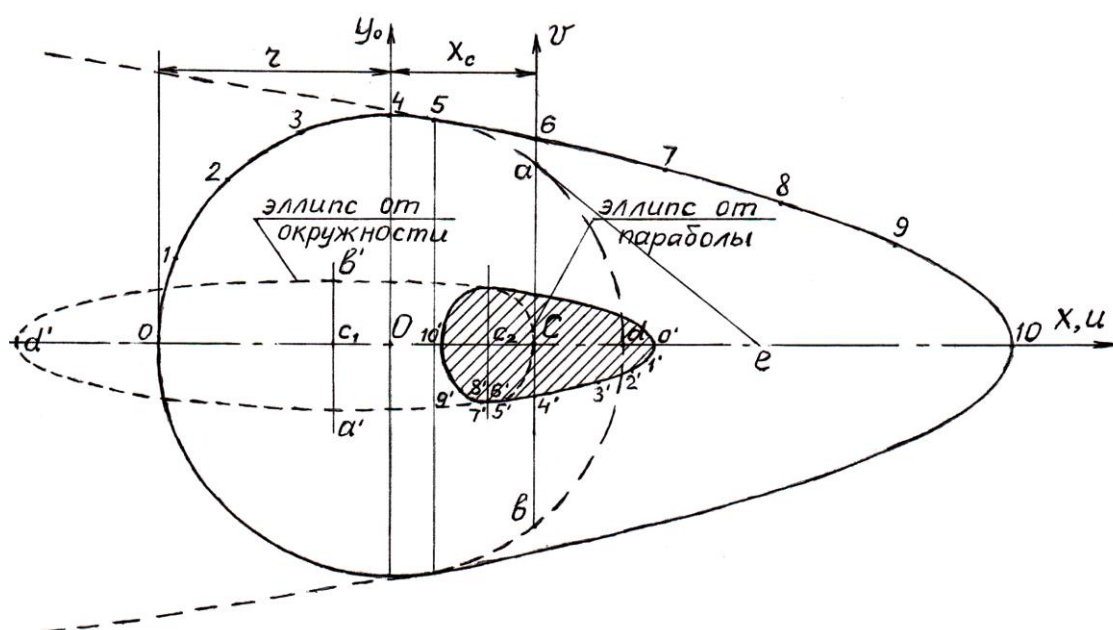


Рис. 4. Ядро сечения

В монографии [1] доказано, что для симметричных сечений, ограниченных дугой окружности, часть ядра сечения, соответствующая дуге окружности, имеет форму либо эллипса, либо гиперболы. Величиной, определяющей ту или иную форму кривой ядра сечения, является относительная координата  $\alpha = \frac{x_c}{r}$  центра окружности в главных центральных осях.

Если эта координата  $< 1$ , то ядро сечения имеет форму эллипса, если же  $\alpha > 1$ , то ядро сечения имеет форму гиперболы. Также доказано, что если симметричное сечение ограничено квадратной параболой, то ядро сечения, соответствующее этой параболе, имеет форму эллипса.

Построения ядра сечения непрерывным способом с помощью уравнений (18) закончено.

Рассмотрим другой способ построения ядра сечения для этого же примера. Для определения координат ядра сечения воспользуемся формулами сопротивления материалов [4]:

$$u_{я} = -\frac{i_v^2}{a_u}; \quad v_{я} = -\frac{i_u^2}{a_v}, \quad (29)$$

где  $a_u, a_v$  – отрезки главных центральных осей  $u, v$  отсекаемые касательной к поперечному сечению в какой-либо точке.

Такой способ построения ядра сечения можно назвать дискретным.

Сначала строится в масштабе поперечное сечение, как показано на рис. 4. Затем надо построить два эллипса: один, соответствующий окружности, другой – параболе. Каждый эллипс строится по четырем экстремальным точкам. Для их нахождения к двум формулам (29) добавляется третья формула из уравнений (18):

$$\frac{dv_{я}}{du_{я}} = -\frac{i_u^2}{i_v^2} \cdot \frac{u}{v}, \quad (30)$$

позволяющая определять тангенс угла наклона касательной к ядру сечения, а значит, и к эллипсу. Как видно из этой формулы, если  $u = 0$ , то угол наклона касательной равен нулю, а если  $v = 0$ , то угол наклона касательной равен  $90^\circ$ .

Рассмотрим сначала окружность. Окружность пересекает ось  $v$  в точках  $a$  и  $b$ , где  $u = 0$ . Значит, точки  $a'$  и  $b'$  эллипса являются соответственно нижней и верхней. Проведем касательную  $ae$  к точке  $a$  окружности. Эта касательная отсекает на главных центральных осях отрезки  $Se = a_u$  и  $Ca = a_v$ .

Тогда по формулам (29):

$$u_{яa} = -\frac{i_v^2}{a_u} = -\frac{i_v^2}{Se} = C_{c1}; \quad v_{яa} = c_1 a' = -\frac{i_u^2}{a_v} = \frac{i_u^2}{Ca}.$$

Следующие две характерные точки окружности –  $o$  и  $d$ , где она пересекает ось  $u$ ,  $v = 0$ . Опуская дальнейшее выкладки, считая их общеизвестными из курса «Сопротивление материалов», строим эллипс от окружности. Полуоси эллипса:  $a_{o0} = c_1 d'$ ,  $b_{o0} = c_1 a'$ . Строим этот эллипс по известному центру и полуосям.

Также координату центра и полуоси этого эллипса можно вычислить по известным формулам из источника [1]:

$$u_{c_1} = \frac{i_v^2 \cdot x_c}{r^2 - x_c^2} = \frac{3,371406 \cdot (-1,252152)}{2^2 - (-1,252152)^2} = -1,735737 \text{ см};$$

$$a_{o0} = \frac{i_v^2 \cdot r}{r^2 - x_c^2} = \frac{3,371406 \cdot 2}{2^2 - (-1,252152)^2} = 2,772406 \text{ см};$$

$$b_{y0} = \frac{i_u^2}{\sqrt{r^2 - x_c^2}} = \frac{0,879429}{\sqrt{2^2 - (-1,252152)^2}} = 0,563909 \text{ см.}$$

Переходим к эллипсу ядра сечения, соответствующему квадратной параболе. Он строится также по формулам (29) и (30). Представляет интерес получение правой точки эллипса, соответствующей ветвям параболы, уходящими в бесконечность. Для этого необходимо воспользоваться уравнениями (25), (26), (28) координат ядра сечения в старых или новых координатах  $x$  или  $u$  для параболы. Подставив в эти уравнения переменные  $u = x \rightarrow -\infty$ , используем теорию пределов из высшей математики. Опуская выкладки, получим  $u_y = v_y = 0$ .

Это означает, что правая точка эллипса от параболы совпадает с центром тяжести  $C$  поперечного сечения, как показано на рис. 4.

Осталось обвести сплошными линиями части обоих эллипсов, соответствующие действительному контуру поперечного сечения. Остальные части эллипсов, соответствующие мнимым частям обеих кривых, изображаем штриховыми линиями. Ядро сечения, полученное между сплошными линиями эллипсов, заштриховываем.

Координаты ядра сечения можно получить иначе, воспользовавшись уравнением эллипса:

$$\frac{(u_y - u_{cy})^2}{a_y^2} + \frac{v_y^2}{b_y^2} = 1, \quad (31)$$

где  $u_{cy}$  – абсцисса центра эллипса;  $a_y$ ,  $b_y$  – полуоси эллипса, соответственно горизонтальная и вертикальная.

Величины  $u_y$ ,  $u_{cy}$  берутся со своими знаками в осях  $uCy$ . Задавая величину  $u_y$ , получаем ординату  $v_y$  из уравнения (31):

$$v_y = \pm \frac{b_y}{a_y} \cdot \sqrt{a_y^2 - (u_y - u_{cy})^2}. \quad (32)$$

Рассмотрим такое же поперечное сечение, приняв  $r = 2$  см,  $H = 10$  см. Определим координату центра тяжести поперечного сечения по выведенным ранее формулам. Вычисляем геометрические характеристики поперечного сечения:

$$a_1 = \sqrt{H^2 + r^2} - H = \sqrt{10^2 + 2^2} - 10 = 0,198039 \text{ см;}$$

$$a = 2a_1 = 2 \cdot 0,198039 = 0,396078 \text{ см; } b = \sqrt{r^2 + a_1^2} = \sqrt{2^2 + 0,198039^2} = 1,990171 \text{ см;}$$

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 6,283185 \text{ см}^2; \quad X_{c1} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{\pi} = -0,848826 \text{ см;}$$

$$A_2 = r^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arccos \frac{a_1}{r} \right) - \arccos \frac{a_1}{r} \right) =$$

$$= 2^2 \left( \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin \left( 2 \arccos \frac{0,198039}{2} \right) - \arccos \frac{0,198039}{2} \right) = 0,790860 \text{ см}^2;$$

$$S_{2y0} = \frac{2}{3} r^3 \left( 1 - \sin^3 \left( \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right) = \frac{2}{3} 2^3 \left( 1 - \sin^3 \left( \arccos \frac{0,198039}{2} \right) \right) = 0,078246 \text{ см}^3;$$

$$X_{c2} = \frac{S_{2y0}}{A_2} = \frac{0,078246}{0,790860} = 0,098938 \text{ см; } A_3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{b^3}{a} = \frac{4}{3} bH = \frac{4}{3} \cdot 1,990171 \cdot 10 = 26,535613 \text{ см}^2;$$

$$X_{c3} = a_1 + \frac{2}{5}H = 0,198039 + \frac{2}{5} \cdot 10 = 4,198039 \text{ см};$$

$$A = \sum A_i = 6,283185 + 0,790860 + 26,535613 = 33,609658 \text{ см}^2;$$

$$X_c = \frac{\sum A_i X_{ci}}{A} = \frac{6,283185 \cdot (-0,848826) + 0,078246 + 26,535613 \cdot 4,198039}{33,609658} = 3,158094 \text{ см}.$$

Тогда  $\frac{x_c}{r} = \frac{3,158094}{2} = 1,579047 > 1$ , значит, контур ядра сечения, соответствующий дуге окружности, является гиперболой.

Осевые моменты инерции элементов:

$$I_{1x} = I_{1y0} = \frac{\pi r^4}{8} = \frac{\pi 2^4}{8} = 6,283185 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc1} = 0,109756 \cdot r^4 = 0,109756 \cdot 2^4 = 1,756111 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_{2x} &= \frac{r^4}{12} \cdot \left( \frac{3}{2} \pi - 3 \arccos \frac{a_1}{r} + 2 \sin \left( 2 \arccos \frac{a_1}{r} \right) - \frac{1}{4} \sin \left( 4 \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right) = \\ &= \frac{2^4}{12} \cdot \left( \frac{3}{2} \pi - 3 \arccos \frac{0,198039}{2} + 2 \sin \left( 2 \arccos \frac{0,198039}{2} \right) - \frac{1}{4} \sin \left( 4 \arccos \frac{0,198039}{2} \right) \right) = \\ &= 1,051038 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{2y0} &= \frac{r^4}{16} \cdot \left( 2\pi - 4 \arccos \frac{a_1}{r} + \sin \left( 4 \arccos \frac{a_1}{r} \right) \right) = \\ &= \frac{2^4}{16} \cdot \left( 2\pi - 4 \arccos \frac{0,198039}{2} + \sin \left( 4 \arccos \frac{0,198039}{2} \right) \right) = 0,010325 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$I_{yc2} = I_{2y0} - A_2 x_{c2}^2 = 0,010325 - 0,790860 \cdot 0,098938^2 = 0,002584 \text{ см}^4;$$

$$I_{3x} = \frac{4}{15} \cdot \frac{b^5}{a} = \frac{4}{15} \cdot b^3 H = \frac{4}{15} \cdot 1,990171^3 \cdot 10 = 21,020349 \text{ см}^4;$$

$$I_{yc3} = I_{3y1} - A_3 \cdot (x_{c3}')^2 = \frac{32}{105} b H^3 - \frac{4}{3} b H \left( \frac{2}{5} H \right)^2 = \frac{16}{175} b H^3 = \frac{16}{175} \cdot 1,990171 \cdot 10^3 = 181,958491 \text{ см}^4.$$

Главные центральные моменты инерции поперечного сечения:

$$I_u = I_x = \sum I_{ix} = 6,283185 + 1,051038 + 21,020349 = 28,354572 \text{ см}^4;$$

$$\begin{aligned} I_v &= \sum I_{yci} + \sum \left[ A_i (X_{ci} - x_c)^2 \right] = 1,756111 + 0,002584 + 181,958491 + \\ &+ 6,283185 \cdot (-0,848826 - 3,158094)^2 + 0,790860 \cdot (0,098938 - 3,158094)^2 + \\ &+ 26,535613 \cdot (4,198039 - 3,158094)^2 = 320,695380 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Квадраты радиусов инерции

$$i_u^2 = \frac{I_u}{A} = \frac{28,354572}{33,609658} = 0,843644 \text{ см}^2;$$

$$i_v^2 = \frac{I_v}{A} = \frac{320,695380}{33,609658} = 9,541763 \text{ см}^2.$$

Этот случай отличается от предыдущего только размером  $H$  параболы. Для определения координат ядра сечения составим еще две таблицы, аналогичные двум предыдущим (табл. 3, 4). Выпишем постоянные величины, входящие в уравнения.

$$i_u^2 = 0,843644 \text{ см}^2; i_v^2 = 9,541763 \text{ см}^2; r = 2 \text{ см}; x_c = 3,158094 \text{ см}; b = 1,990171 \text{ см};$$

$$a_1 = 0,198039 \text{ см}; a = 0,396078 \text{ см}.$$

Таблица 3

$i$	$x_i$	$u_i = x_i - x_c$	$v_i = y_i = \sqrt{r^2 - x_i^2}$	$r^2 - x_c \cdot x_i$	$u_{yi}$	$v_{yi}$	$\frac{dv_{yi}}{du_{yi}}$
0	-2	-5,158094	0	10,316188	1,849862	0	$\infty$
1	-1,847759	-5,005853	0,765367	9,835397	1,792594	-0,065650	0,578281
2	-1,414214	-4,572308	1,414214	8,466219	1,593875	-0,140924	0,285858
3	-0,765367	-3,923461	1,847759	6,417101	1,533875	-0,242921	0,187739
4	0	-3,153094	2	4	0	-0,421822	0,139613
5	0,198039	-2,960055	1,990171	3,374574	-0,559954	-0,497543	0,131504

Таблица 4

$i$	$x_i$	$u_i = x_i - x_c$	$v_i = y_i = \sqrt{b^2 - a(x_i - a_1)}$	$2y_i^2 + a(x_i - x_c)$	$u_{yi}$	$v_{yi}$	$\frac{dv_{yi}}{du_{yi}}$
5	0,198039	-2,960055	1,990171	6,749149	-0,559964	-0,497543	0,131504
6	3,158094	0	1,669841	5,576738	-0,677687	-0,505224	0
7	5,198039	2,039945	1,407264	4,768761	-0,792508	-0,497920	- 0,128166
8	7,198039	4,039945	1,090062	3,976604	-0,950379	-0,462517	- 0,327684
9	9,198039	6,039945	0,629348	3,184447	-1,186794	-0,333462	- 0,848541
10	10,198039	7,039945	0	2,788367	-1,355375	0	$-\infty$

На рис. 5 изображено поперечное сечение для этого случая с ядром сечения. Координаты ядра сечения взяты из табл. 3 и 4. Контур ядра сечения состоит из двух кривых. Кривая, соответствующая дуге окружности, является гиперболой 0'1'2'3'4'5', а вторая кривая, соответствующая квадратной параболы, является эллипсом 5'6'7'8'9'10'. Вычислим величины, относящиеся к гиперболе.

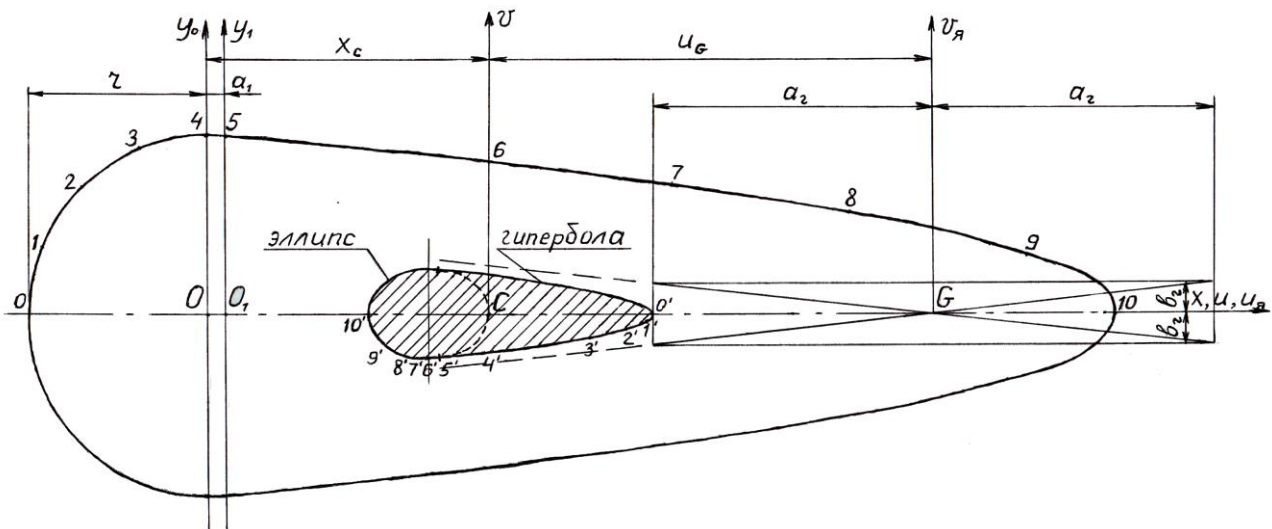
Абсцисса центра  $G$  симметрии гиперболы:

$$u_G = -\frac{i_v^2 \cdot x_c}{x_c^2 - r^2} = -\frac{9,541763 \cdot (-3,158094)}{(-3,158094)^2 - 2^2} = 5,044529 \text{ см}.$$

Полуоси гиперболы:

$$a_2 = \frac{i_v^2 \cdot r}{x_c^2 - r^2} = \frac{9,541763 \cdot 2}{(-3,158094)^2 - 2^2} = 3,194667 \text{ см};$$

$$b_2 = \frac{i_u^2}{\sqrt{x_c^2 - r^2}} = \frac{0,843644}{\sqrt{(-3,158094)^2 - 2^2}} = 0,345178 \text{ см}.$$



**Рис. 5.** Ядра сечения с эллипсом и гиперболой

Координаты ядра сечения можно получить, воспользовавшись уравнением гиперболы:

$$\frac{(u_{\text{Я}} - u_{\text{Г}})^2}{a_{\text{Г}}^2} - \frac{v_{\text{Я}}^2}{b_{\text{Г}}^2} = 1. \quad (33)$$

Величины  $u_{я}$ ,  $u_G$  берутся со своими знаками в осях  $uCv$ . Задавая величину  $u_{я}$ , получаем ординату  $v_{я}$  из уравнения (33):

$$v_s = \pm \frac{b_s}{a_s} \cdot \sqrt{(u_s - u_G)^2 - a_s^2}. \quad (34)$$

## Библиографический список

1. Инкижинов Н. С. Особенности построения ядра сечения. Новосибирск: Изд-во Сиб. гос. ун-та водн. трансп., 2016. 80 с.
2. Инкижинов Н. С. О построении ядра сечения для стрежней с криволинейной частью поперечного сечения // Сибирский научный вестник. 2018. Вып. XXII. С. 16–18.
3. Викулов С. В., Пахомова Л. В., Инкижинов Н. С. Сопоставление двух способов построения ядра сечения: дискретного и непрерывного // Строительная механика и конструкции. 2023. № 1 (36). С. 38–41.
4. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. М.: Высш. шк., 2009. 559 с.

## References

1. Inkizhinov N. S. Features of Constructing the Cross-Section Core. Novosibirsk: Publishing House of the Siberian State University of Water Transport, 2016. 80 p.
2. Inkizhinov N. S. On constructing the cross-section core for bars with a curved part of the cross-section. Siberian Scientific Bulletin. Issue XXII. 2018. Pp. 16–18.
3. Vikulov S. V., Pakhomova L. V., Inkizhinov N. S. Comparison of two methods for constructing the cross-section core: discrete and continuous. Structural Mechanics and Structures. No. 1(36). 2023. Pp. 38–41.
4. Aleksandrov A. V., Potapov V. D., Derzhavin B. P. Strength of Materials. Moscow: Vyssh. shk., 2009. 559 p.

## CONSTRUCTING A CROSS-SECTION CORE FOR A CROSS-SECTION BOUNDED BY A CIRCLE AND A PARABOLA

L. V. Pahomova<sup>1</sup>, A. A. Butuzov<sup>2</sup>, N. S. Inkizhinov<sup>3</sup>, O. V. Shcherbakova<sup>4</sup>

Siberian State University of Water Transport<sup>1, 2, 3, 4</sup>  
Novosibirsk, Russia

---

<sup>1</sup> PhD in Engineering, Associate Professor, Head of the Department of Technical Mechanics and Lifting and Transport Machines, tel.: +7(913)904-00-57, e-mail: Pahomova\_l\_v@mail.ru

<sup>2</sup> Postgraduate Student, tel.: +7(983)322-58-01, e-mail: artembutuzv2@gmail.com

<sup>3</sup> Assistant Professor of the Department of Technical Mechanics and Lifting and Transport Machines, tel.: +7(913)799-81-52, e-mail: inkizhinov47@bk.ru

<sup>4</sup> PhD in Engineering, Associate Professor of the Department of Technical Mechanics and Lifting and Transport Machines, tel.: +7(913)925-84-39, e-mail: fisher-54@yandex.ru

---

This article discusses the construction of a cross-section core for a cross-section bounded by two mathematical curves: one of the curves is an arc of a circle, and another is a square parabola. Before determining the cross section geometric characteristics, a point connecting the circle to the parabola was found, provided that both curves were smoothly connected. The cross section has a single axis of symmetry, therefore, only the upper halves of the three ellipses of the cross section were considered when calculating the geometric characteristics. These elements are the semicircle and the part of the semicircle bordering the parabola. Integral dependencies were used to calculate geometric characteristics. The main central axes  $uCv$  are drawn, and the equations of the relationship between the original axes  $x, y$  and the  $u, v$  axes are written. Using the general equations of the coordinates  $u_{ж}, v_{ж}$  of the cross-section core, taken from the continuous method, applied to a given cross-section, tables for each curve are compiled. By plotting the coordinates  $u_{ж}, v_{ж}$  in the  $uCv$  axes to the cross-section, we construct the cross-section core and shade it. Two cases of the relative coordinates  $x_c / r$  of the center of a circle in the main central  $u, v$  axes are considered and two cross-section kernels are constructed for these cases.

**Keywords:** geometric characteristics, ellipse, hyperbola, squares of the radii of inertia, main central axes, core section, cross section.

## МЕТОДИКА РАСЧЁТА ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ С НЕЗАКРЕПЛЁННОЙ КРОМКОЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Ж. Г. Концедаева<sup>1</sup>, И. В. Хомякова<sup>2</sup>, Г. Д. Кузин<sup>3</sup>

Калининградский государственный технический университет<sup>1, 2, 3</sup>  
Россия, г. Калининград

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительства, тел.: +7(906)236-23-33, e-mail: zhanna.kontsedaeva@klgtu.ru

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительства, тел.: +7(921)105-33-81, e-mail: irina.khomyakova@klgtu.ru

<sup>3</sup> Магистрант кафедры строительства, тел.: +7(981)457-58-50, e-mail: georgiy\_kuzin@mail.ru

**Постановка задачи.** Разработать методику расчета плоских элементов для строительной конструкции, имеющую свободную кромку, методом конечных разностей.

**Результаты.** Представлена методика расчёта элемента, расчетная схема которого представляет собой пластину, жестко защемлённую по трём кромкам. Действующая на пластину нагрузка – равномерно распределенная. Определены величины прогибов элемента от действующей нагрузки и выполнена проверка полученных значений с данными в программе «CAEFidesys».

**Выводы.** Получены результаты численно-теоретического исследования рассматриваемого элемента. Описанную в работе методику можно применять для выполнения расчетов плоских строительных конструкций, а также возможен учёт сосредоточенных нагрузок и распределённых на части элемента.

Метод конечных разностей является перспективной альтернативой другим численным методам, таким как метод конечных элементов, метод граничных элементов, метод дискретных элементов, применяемых в строительной механике. Несмотря на гораздо меньшее количество неизвестных при сохранении удовлетворительной точности результата, методика является серьёзной инженерной задачей. Появление численных методов, позволяющих упростить классические расчеты, по-прежнему связано с определёнными трудностями, особенно для пластин более сложного очертания в плане, действия прерывных нагрузок, особых граничных условий.

Приводится численное решение задачи изгиба пластины прямоугольного очертания со свободной кромкой методом конечных разностей. В результате получены уравнения в конечно-разностном виде для третьего вида граничных условий (свободная кромка), который практически не описывался данным методом ранее. Проведено сравнение результатов расчета методом конечных разностей с методом конечных элементов. Таким образом, предлагается математическое моделирование работы на изгиб пластин, имеющих свободную кромку, как элемента строительной конструкции.

**Ключевые слова:** метод конечных разностей, плоский элемент прямоугольного очертания, расчет, граничные условия, свободная кромка.

**Введение.** На сегодняшний день существует ряд численных методов, которые применяются в строительной механике и позволяют с некоторым успехом рассчитывать плоские и пространственные конструкции. Особенно выделяется метод конечных элементов, который прочно вошел в инженерную среду. Он внедрен в алгоритмы современных программных комплексов («CAEFidesys», «Ansys», «LiraSap» и др.). Тем не менее метод конечных элементов математически сложен, имеет большое количество неизвестных, программные алгоритмы трудоемки. Затруднительным представляется расчет элементов сложного очертания (пластин). В процессе расчета затрачивается дополнительная вычислительная мощность операционной системы.

Альтернативой методу конечных элементов служит метод конечных разностей (МКР). МКР считается приближенным численным методом, который активно развивается в настоящее время. Он сравнительно прост в понимании и реализации. Ввиду того, что расчетный элемент разбивается сеткой на узлы, сокращается количество неизвестных и уменьшается нагрузка на устройство. Более того, МКР удобно использовать для решения задач теории



упругости как плоских (в частности, пластинчатых элементов), так и пространственных конструкций, поскольку обработка вычислений не требует больших затрат производительности ПК. Более того, основа МКР и принцип его реализации осваиваются сравнительно просто. Поэтому данный метод освещается многими исследователями.

Так, в труде В. В. Петрова приводятся наиболее известные численные методы, среди которых и МКР, с разбором некоторых расчетных ситуаций [1].

Г. О. Хазамов в своей статье [2] анализирует пластину, которая имеет очертание, близкое к прямоугольному, с противоположными свободными краями. Здесь автор предварительно преобразует бигармоническое уравнение в уравнение конечных разностей. В статье [3] представлен расчет кольцеобразной пластины по МКР. Автор замечает, что в случае несимметричной задачи и при большом количестве неизвестных нахождение решения матриц становится затруднительным.

Вариационные методы (метод Ритца, метод Бубнова – Галеркина, метод прямых) хорошо зарекомендовали себя для получения приближенных решений более сложных элементов, но остаются достаточно трудоемкими для практического применения.

Тем более в МКР требуется более детальное рассмотрение случая свободного края пластинчатого элемента, который рассматривается в настоящем исследовании.

**Методика расчета.** Метод позволяет оценить напряженно-деформированное состояние строительных конструкций (как плоских, так и пространственных). В МКР определяются прогибы и внутренние усилия, значения которых могут быть определены математически.

В качестве иллюстративного примера МКР принят плоский элемент прямоугольного очертания, в котором три стороны жестко зашлемлены, а четвертая имеет свободную кромку по всей своей длине (рис. 1).

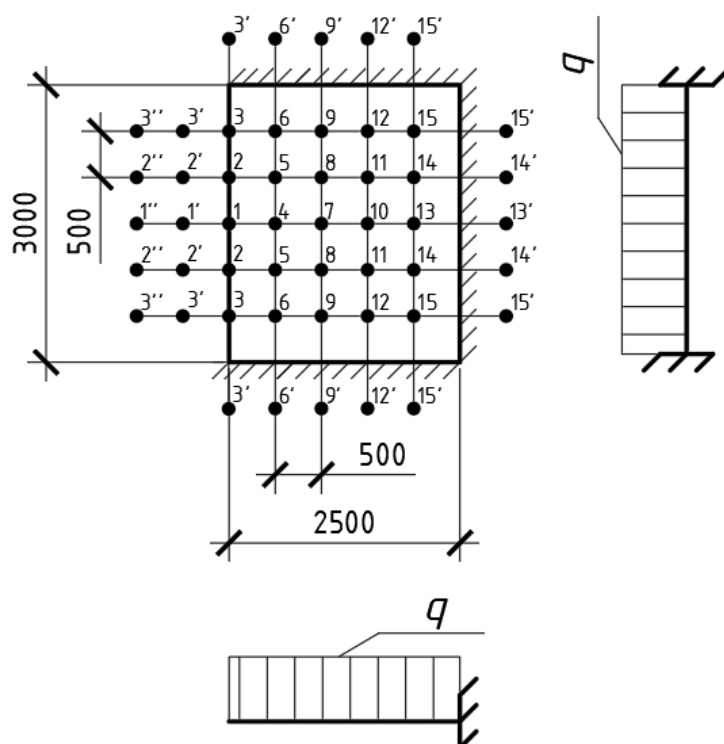


Рис. 1. Расчетная схема листового элемента

Элемент, представленный на рис. 1, принят толщиной  $h = 0,06$  м под действием равномерно-распределённой нагрузки  $q = 21,88$  кН/м, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,2$ . Данный элемент имеет цилиндрическую жесткость  $D$ :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad (1)$$

где  $h$  – толщина элемента, м;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль упругости, кН/м<sup>2</sup>.

В качестве материала элемента принят тяжелый бетон класса В20. Для расчета данного элемента используется уравнение изгиба срединной поверхностей декартовых координатах для рассматриваемого случая загрузки:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 2 \frac{d^4 w}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 w}{dy^4} = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (2)$$

Алгоритм расчёта решения данной задачи по МКР:

1. На элемент накладывается сетка, имеющая шаг  $\lambda$  по осям  $x$  и  $y$ . В пересечениях сетки образуются узлы (рис. 1);

2. Назначаются граничные условия. Определяются коэффициенты при неизвестных прогибах в каждом узле. Для этого бигармонический оператор Лапласа накладывается на каждый узел элемента (рис. 2). При этом значения коэффициентов зависят от шага сетки  $\lambda$  по осям  $x$  и  $y$ . Данный оператор в формульном представлении имеет вид:

$$\begin{aligned} & (w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{i,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}) + \\ & + 2c \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} - 2w_{i+1,j} - 2w_{i,j+1} + \\ & + 4w_{i,j} - 2w_{i,j-1} - 2w_{i-1,j} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) + \\ & + c^2 \cdot (w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{i,j} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}) = (\nabla^2 \nabla^2 w)_i, \end{aligned} \quad (3)$$

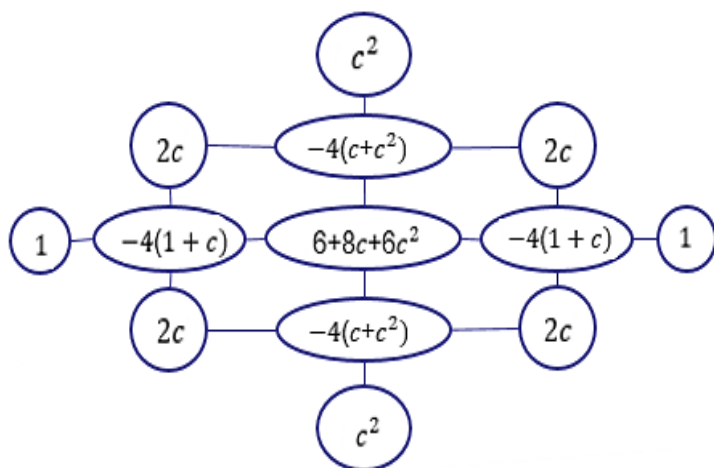
где

$$c = \frac{\lambda_x^2}{\lambda_y^2}.$$

3. На основе уравнения изгиба составляется система алгебраических уравнений по количеству неизвестных;

4. При решении такой системы находятся искомые прогибы;

5. По полученным прогибам определяются внутренние усилия в листовом элементе.



**Рис. 2.** Графическое представление бигармонического оператора Лапласа

Для проверки результатов в исследовании используется «CAEFidesys».

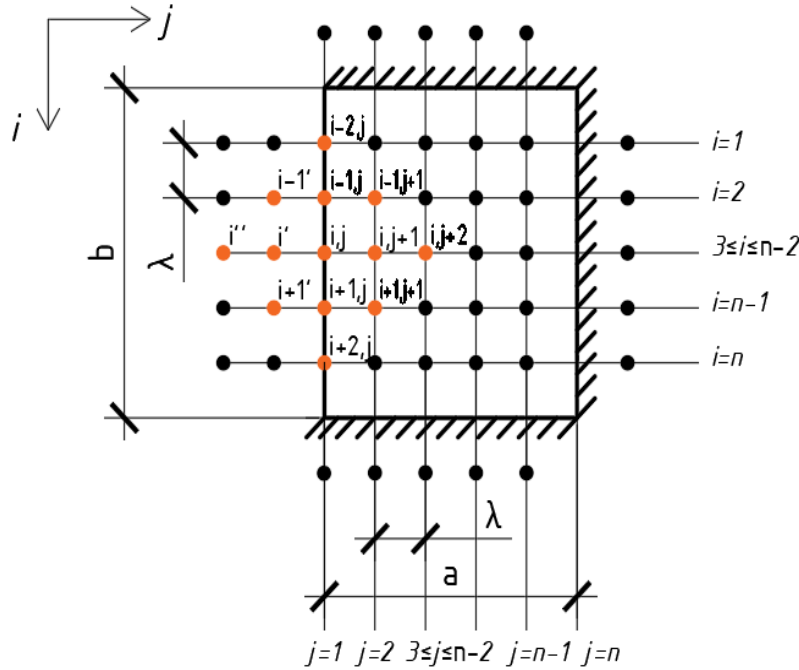
**Результаты.** Используя общее выражения для определения законтурных точек первого ряда  $w'_i$ :

$$w'_i = 2 \cdot (1 + \mu) \cdot w_{i,j} - w_{i,j+1} - \mu \cdot w_{i-1,j} - \mu \cdot w_{i+1,j}, \quad (4)$$

и точек второго ряда  $w''_i$  (расчетная схема представлена на рис. 3):

$$w_i'' = -2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + (2 - \mu) \cdot (w_{i+1,j+1} - w'_{i+1} + w_{i-1,j+1} - w'_{i-1}), \quad (5)$$

которые получены из заданных граничных условий для свободной кромки при расчете МКР, можно записать формулы для определения значений прогибов в узлах сетки, наложенной на пластину.



**Рис. 3.** Расчетная схема листового элемента со свободной кромкой

При использовании оператора Лапласа, в общем случае описываемого уравнением

$$20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j-1} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}) + w_{i-2,j} + w_{i,j-2} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} = C_{i,j}, \quad (6)$$

для точек первой, второй строки, а также для предпоследней и последней строк следует учесть, что прогибы в точках, попадающие на границы пластины, обращаются в ноль. Прогибы законтурных точек либо равны значениям в точках строки, ближайших к контуру (для жестко заделанных кромок), либо берутся с отрицательным знаком (если они шарнирно оперты).

Учитывая выше изложенное, получим в общем виде выражения для определения значений прогибов в точках первого законтурного ряда у свободной кромки пластины:

$i = 1$ :

$$w'_i = 2 \cdot (1 + \mu) \cdot w_{i,j} - w_{i,j+1} - \mu \cdot w_{i+1,j}, \quad (7)$$

$2 \leq i \leq n - 1$ :

$$w'_i = 2 \cdot (1 + \mu) \cdot w_{i,j} - w_{i,j+1} - \mu \cdot w_{i-1,j} - \mu \cdot w_{i+1,j}, \quad (8)$$

$i = n$ :

$$w'_i = 2 \cdot (1 + \mu) \cdot w_{i,j} - w_{i,j+1} - \mu \cdot w_{i-1,j}, \quad (9)$$

а также выражения для определения значений прогибов в точках второго законтурного ряда:

$i = 1$ :

$$w_i'' = -2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + (2 - \mu) \cdot (w_{i+1,j+1} - w'_{i+1}), \quad (10)$$

$2 \leq i \leq n - 1$ :

$$w_i'' = -2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + (2 - \mu) \cdot (w_{i+1,j+1} - w'_{i+1} + w_{i-1,j+1} - w'_{i-1}), \quad (11)$$

$i = n$ :

$$w_i'' = -2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + (2 - \mu) \cdot (w_{i-1,j+1} - w'_{i-1}). \quad (12)$$

Далее составим уравнения для определения прогибов пластины МКР в узловых точках первого ряда  $j = 1$  (рис. 4):

$i = 1$ :

$$20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j}) + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w'_{i+1}) + w_{i,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} + w_i'' = C_{i,j}, \quad (13)$$

$i = 2$ :

$$20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w'_{i-1} + w'_{i+1}) + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} + w_i'' = C_{i,j}, \quad (14)$$

$3 \leq i \leq n - 2$ :

$$20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w'_{i-1} + w'_{i+1}) + w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} + w_i'' = C_{i,j}, \quad (15)$$

$i = n - 1$ :

$$20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w'_{i-1} + w'_{i+1}) + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_i'' = C_{i,j}, \quad (16)$$

$i = n$ :

$$20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i-1,j}) + 2 \cdot (w_{i-1,j+1} + w'_{i-1}) + w_{i,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_i'' = C_{i,j}. \quad (17)$$

Поскольку выражения для законтурных точек второго ряда содержат значения законтурных точек первого ряда, подставим их в уравнения (13)–(17) для определения прогибов свободной кромки:

$i = 1$ :

$$20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j}) + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w'_{i+1}) + w_{i,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} - 2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + (2 - \mu) \cdot (w_{i+1,j+1} - w'_{i+1}) = C_{i,j}, \quad (18)$$

$i = 2$ :

$$\begin{aligned}
 & 20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + \\
 & + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w'_{i-1} + w'_{i+1}) + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} - \\
 & - 2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + \\
 & + (2 - \mu) \cdot (w_{i+1,j+1} - w'_{i+1} + w_{i-1,j+1} - w'_{i-1}) = C_{i,j},
 \end{aligned} \tag{19}$$

$3 \leq i \leq n-2$ :

$$\begin{aligned}
 & 20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + \\
 & 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w'_{i-1} + w'_{i+1}) + \\
 & + w_{i-2,j} + w_{i+2,j} + w_{i,j+2} - 2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + \\
 & + (2 - \mu) \cdot (w_{i+1,j+1} - w'_{i+1} + w_{i-1,j+1} - w'_{i-1}) = C_{i,j},
 \end{aligned} \tag{20}$$

$i = n-1$ :

$$\begin{aligned}
 & 20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i+1,j} + w_{i-1,j}) + \\
 & + 2 \cdot (w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w'_{i-1} + w'_{i+1}) + \\
 & + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} - 2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + \\
 & + (2 - \mu) \cdot (w_{i+1,j+1} - w'_{i+1} + w_{i-1,j+1} - w'_{i-1}) = C_{i,j},
 \end{aligned} \tag{21}$$

$i = n$ :

$$\begin{aligned}
 & 20 \cdot w_{i,j} - 8 \cdot (w_{i,j+1} + w'_i + w_{i-1,j}) + 2 \cdot (w_{i-1,j+1} + w'_{i-1}) + \\
 & + w_{i,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} - 2 \cdot (3 + \mu) \cdot (w_{i,j+1} - w'_i) + w_{i,j+2} + \\
 & + (2 - \mu) \cdot (w_{i-1,j+1} - w'_{i-1}) = C_{i,j}.
 \end{aligned} \tag{22}$$

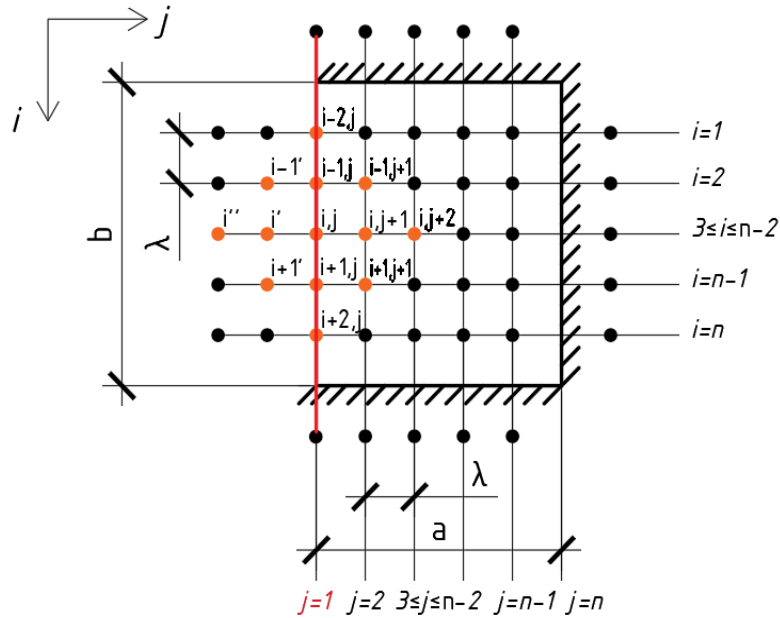


Рис. 4. Расчетная схема с обозначением столбца  $j = 1$

Чтобы упростить преобразования, введем обозначения:

$$\begin{aligned}
 s &= 2 \cdot (1 + \mu), \\
 d &= 2 \cdot (3 + \mu), \quad f = 2 - \mu.
 \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда уравнение окончательно будет представлено в виде

$$[21 + (d - 8) \cdot s] w_{i,j} - 2 \cdot d \cdot w_{i,j+1} + 2 \cdot w_{i,j+2} + (\mu \cdot s - 8) \cdot w_{i+1,j} + (1 - \mu^2) \cdot w_{i+2,j} + 2 \cdot f \cdot w_{i+1,j+1} = C_{i,j}, \quad (24)$$

Уравнение (19) при  $i = 2, j = 1$  имеет вид:

$$[20 + (d - 8) \cdot s - \mu^2] \cdot w_{i,j} - 2 \cdot d \cdot w_{i,j+1} + 2 \cdot w_{i,j+2} - 4 \cdot f \cdot w_{i+1,j} + (1 - \mu^2) \cdot w_{i+2,j} + 2 \cdot f \cdot w_{i+1,j+1} + 2 \cdot f \cdot w_{i-1,j+1} - 4 \cdot f \cdot w_{i-1,j} - \mu^2 \cdot w_{i-2,j} = C_{i,j}, \quad (25)$$

Если индексы прогибов находятся в интервале  $3 \leq i \leq n - 2, j = 1$ , общий вид уравнения (20) примет вид:

$$[20 + (d - 8) \cdot s - \mu^2] \cdot w_{i,j} - 2 \cdot d \cdot w_{i,j+1} + 2 \cdot w_{i,j+2} - 4 \cdot f \cdot w_{i+1,j} + (1 - \mu^2) \cdot w_{i+2,j} + 2 \cdot f \cdot w_{i+1,j+1} + 2 \cdot f \cdot w_{i-1,j+1} - 4 \cdot f \cdot w_{i-1,j} - \mu^2 \cdot w_{i-2,j} = C_{i,j}, \quad (26)$$

Для предпоследнего ряда  $i = n - 1, j = 1$ :

$$[20 + (d - 8) \cdot s - \mu^2] \cdot w_{i,j} - 2 \cdot d \cdot w_{i,j+1} + 2 \cdot w_{i,j+2} - 4 \cdot f \cdot w_{i+1,j} + (1 - \mu^2) \cdot w_{i+2,j} + 2 \cdot f \cdot w_{i+1,j+1} + 2 \cdot f \cdot w_{i-1,j+1} - 4 \cdot f \cdot w_{i-1,j} - \mu^2 \cdot w_{i-2,j} = C_{i,j}, \quad (27)$$

Для последнего ряда  $i = n, j = 1$ :

$$[21 + (d - 8) \cdot s] \cdot w_{i,j} - 2 \cdot d \cdot w_{i,j+1} + 2 \cdot w_{i,j+2} + (\mu \cdot s - 8) \cdot w_{i-1,j} + (1 - \mu^2) \cdot w_{i-2,j} + 2 \cdot f \cdot w_{i+1,j+1} = C_{i,j}. \quad (28)$$

Рассмотрим уравнения для определения прогибов  $j = 2$  второго столбца (рис. 5):  
 $i = 1, j = 2$ :

$$-8 \cdot w_{i,j-1} + (21 + s) \cdot w_{i,j} - 9 \cdot w_{i,j+1} + w_{i,j+2} + 2 \cdot w_{i+1,j-1} + 2 \cdot w_{i+1,j+1} - (8 + \mu) \cdot w_{i+1,j} + w_{i+2,j} = C_{i,j}, \quad (29)$$

$i = 2, j = 2$ :

$$-8 \cdot w_{i,j-1} + (20 + s) \cdot w_{i,j} - 9 \cdot w_{i,j+1} + w_{i,j+2} - (8 + \mu) \cdot w_{i-1,j} - (8 + \mu) \cdot w_{i+1,j} + w_{i+2,j} + 2 \cdot w_{i-1,j-1} + 2 \cdot w_{i-1,j+1} + 2 \cdot w_{i+1,j-1} + 2 \cdot w_{i+1,j+1} = C_{i,j}, \quad (30)$$

$3 \leq i \leq n - 2, j = 2$ :

$$-8 \cdot w_{i,j-1} + (20 + s) \cdot w_{i,j} - 9 \cdot w_{i,j+1} + w_{i,j+2} - (8 + \mu) \cdot w_{i-1,j} - (8 + \mu) \cdot w_{i+1,j} + w_{i+2,j} + 2 \cdot w_{i-1,j-1} + 2 \cdot w_{i-1,j+1} + 2 \cdot w_{i+1,j-1} + 2 \cdot w_{i+1,j+1} + w_{i-2,j} = C_{i,j}, \quad (31)$$

$i = n - 1, j = 2$ :

$$-8 \cdot w_{i,j-1} + (20 + s) \cdot w_{i,j} - 9 \cdot w_{i,j+1} + w_{i,j+2} - (8 + \mu) \cdot w_{i-1,j} - (8 + \mu) \cdot w_{i+1,j} + 2 \cdot w_{i-1,j-1} + 2 \cdot w_{i-1,j+1} + 2 \cdot w_{i+1,j-1} + 2 \cdot w_{i+1,j+1} + w_{i-2,j} = C_{i,j}, \quad (32)$$

$i = n, j = 2$ :

$$-8 \cdot w_{i,j-1} + (21 + s) \cdot w_{i,j} - 9 \cdot w_{i,j+1} + w_{i,j+2} + 2 \cdot w_{i+1,j-1} + 2 \cdot w_{i+1,j+1} - (8 + \mu) \cdot w_{i-1,j} + w_{i-2,j} = C_{i,j}, \quad (33)$$

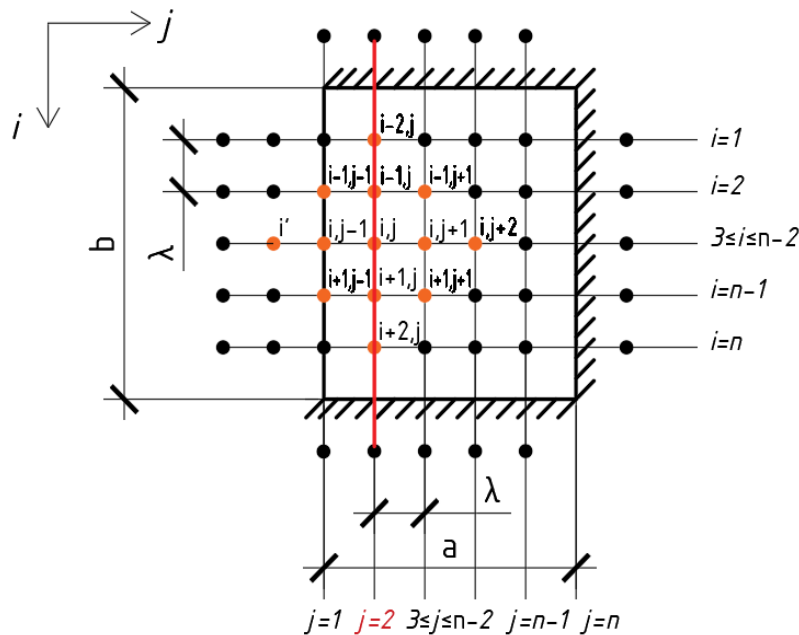


Рис. 5. Расчетная схема с обозначением столбца  $j = 2$

Таким образом, уравнения (7)–(12) описывают условные прогибы пластины в законтурных узловых точках  $w'_i, w''_i$ , уравнения (13)–(17) – прогибы узловых точек свободной кромки ( $j = 1$ ), уравнения (18)–(22) – прогибы точек второго ряда пластины ( $j = 2$ ), остальные уравнения не имеют особых точек и составляются согласно оператору МКР для расчета прямоугольных пластин.

Результаты ручного расчета прошли апробацию в программе «CAEFidesys. 6.1». Была составлена расчетная схема, все геометрические параметры элемента, характеристики материала, значение приложенной нагрузки и условия закрепления полностью совпадают. В «CAEFidesys» для данного элемента использовалась сетка типа «многогранная» с автоматическим построением, поэтому шаг сетки был более частым. В итоге максимальное перемещение вдоль оси Z составило 9,12 мм (рис. 6). Для сравнения: согласно ручному расчету максимальное значение прогиба – 9,62 мм, что превышает результат, полученный в САЕ-системе, на 5 %.

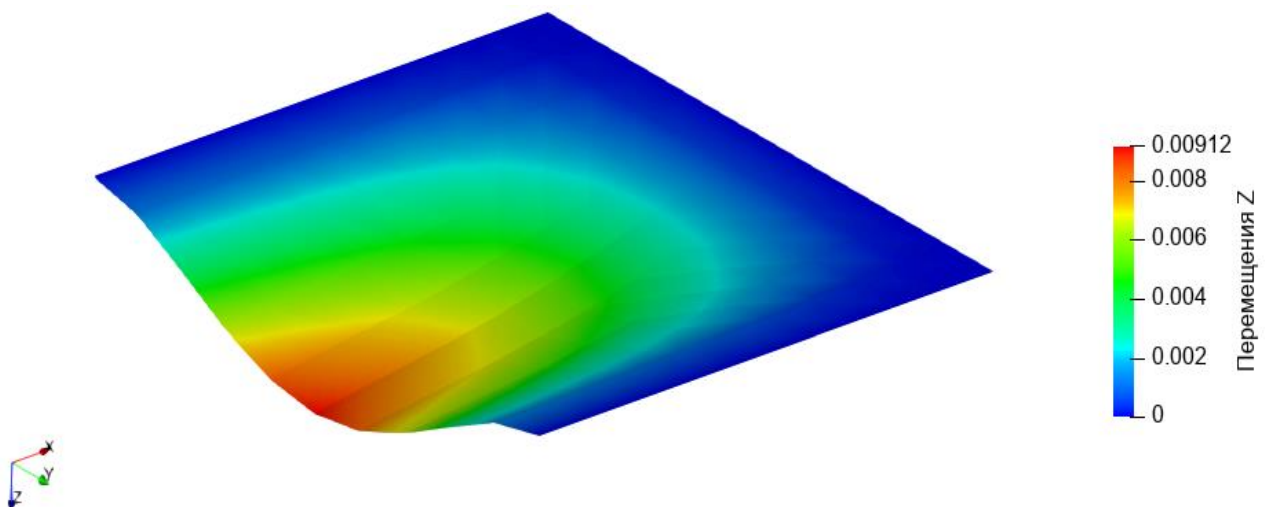


Рис. 6. Графическое представление прогибов в виде мозаики («CAEFidesys»)

Кроме этого, была предпринята попытка установить зависимость значений прогибов пластины от шага дискретизации. Для уточнения результатов расчёта по данной методике

была принята пластина размерами  $a \times b = 2000 \times 2000$  мм (рис. 7). Рассматривался шаг сетки 0,2, 0,4 и 0,5 м (в «ручном» и программном комплексе «CAEFidesys»). Значения нагрузок, прочность бетона и толщина пластины приняты, как в предыдущем расчёте.

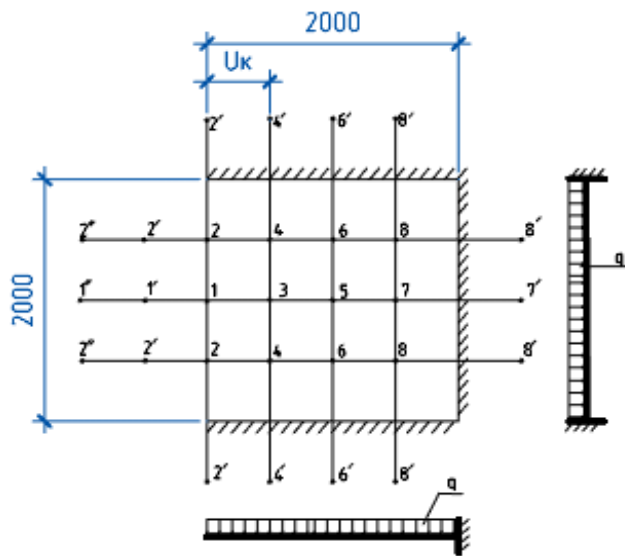


Рис. 7. Расчётная схема пластины

Анализ результатов расчётов показал, что в исследуемом диапазоне шагов дискретизации сетки явной зависимости и однозначной закономерности не наблюдается. На рис. 8 представлены данные расчётов «ручного» и в программном комплексе «CAEFidesys».

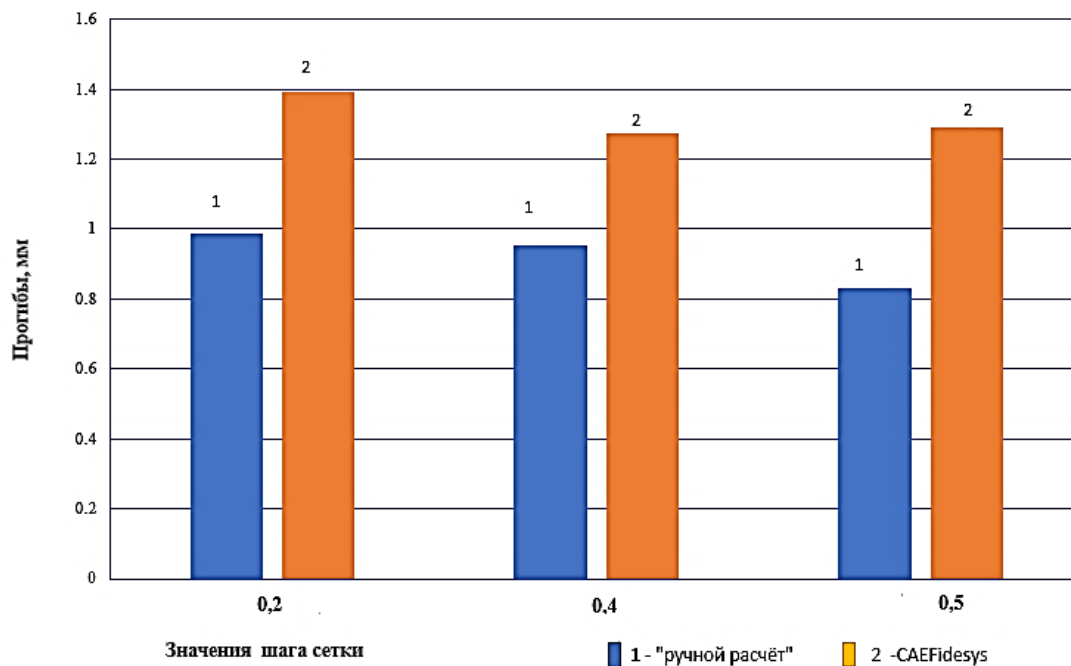


Рис. 8. Значения прогибов в зависимости от шага сетки, м

## Выводы

1. Методика по расчету плоских элементов с одной свободной кромкой, разработанная на базе МКР, позволяет определять прогибы пластины и для других граничных условий. Также получены уравнения для вычисления законтурных точек. Методика позволяет учесть другие формы приложения нагрузок. Полученные результаты были верифицированы в программном комплексе «CAEFidesys».



2. Для данной модели (пластина  $2 \times 2$  м) авторы предполагают, что решение является достаточно устойчивым и не требует более мелкой дискретизации.

3. Для более точной оценки определения прогибов методом МКР в связи с громоздкостью расчётов необходимы дополнительные исследования с помощью составления алгоритма на одном из языков программирования.

### Библиографический список

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки / под ред. Г. С. Шапиро. М.: Физматлит, 1966. 635 с.
2. Никифоров С. Н. Теория упругости и пластичности: учеб. для инж.-строит. вузов. М.: Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1955. 284 с.
3. Рожков П. В., Пурикова И. А., Тertiца С. В., Димитрюк Ю. С. Перспективные методы решения задач изгиба пластин при расчете строительных конструкций // Научный вестник государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Невинномысский государственный гуманитарно-технический институт». 2021. № 1. С. 11–16.
4. Петров В. В. Теория расчета пластин и оболочек: учеб. М.: АСВ, 2022. 448 с.
5. Хазамов Г. О. Метод конечных разностей для расчета изотропной пластины с контуром, близким к прямоугольному // Сб. науч. тр. 10-й Междунар. науч.-практ. конф. М.: Перо, 2024. С. 149–155.
6. Хазамов Г. О. Метод конечных разностей для задачи изгиба кольцеобразной изотропной пластины // Сб. науч. тр. 10-й Междунар. науч.-практ. конф. М.: Перо, 2024. С. 155–159.
7. Бойцов Г. В., Палий О. М., Постнов В. А., Чувиковский В. С. Пластины. Теория упругости, пластичности и ползучести. Численные методы: справ. по строит. мех. корабля. В 3 т. Т. 2. Л.: Судостроение, 1982. 464 с.
8. Gabbasov R., Filatov V., Dao N. K. Numerical Research of Bending Flexible Plates // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 661, no. 1. 2019. Pp. 1–8. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/661/1/012006>.
9. Мансур А. Э. Модальный анализ круглых симметрических пластин с помощью обобщённого метода конечных разностей // Мир транспорта. 2019. Вып. 17, № 3. С. 88–98. URL: <https://doi.org/10.30932/1992-3252-2019-17-3-88-98>.
10. Соловейчик Ю. Г., Рояк М. Э., Персова М. Г. Метод конечных элементов для скалярных и векторных задач. Новосибирск: НГТУ, 2007. 896 с.
11. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979.
12. Александров А. В., Потапов В. Д. Основы теории упругости и пластичности. М.: Высш. шк., 1990. 400 с.
13. Варвак П. М., Рябов А. Ф. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей). М., 1971. 399 с.
14. Стренг Г., Фикс Дж. Основы метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 351 с.
15. Ржаницын А. Р. Строительная механика: учебник для вузов. М.: Высш. шк., 1982. 448 с.
16. Головачев В. П. Применение метода конечных разностей к расчету пластин и оболочек // Прикладная механика. 1968. Т. 4, № 3. С. 120–127.
17. Метод конечных элементов (МКЭ) – Иннер Инжиниринг [Электронный ресурс]. URL: <https://inner.su/services/metod-konechnykh-elementov> (дата обращения: 29.10.2025).
18. Веретимус Д. К. Основы теории упругости. Ч. I. Теория напряжений: методическое пособие по курсу «Основы теории упругости и пластичности». М., 2005. 37 с.
19. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.

21. Веретимус Д. К. Основы теории упругости. Ч. II. Теория деформаций. Связь между напряженным и деформированным состоянием: методическое пособие по курсу «Основы теории упругости и пластичности». М., 2005. 53 с.

## References

1. Timoshenko S. P., Voynovsky-Krieger S. Plates and Shells. Edited by G. S. Shapiro. Moscow: Fizmatlit, 1966. 635 p.
2. Nikiforov S. N. Theory of Elasticity and Plasticity: Textbook for Civil Engineering Universities. Moscow: State Publishing House of Literature on Construction and Architecture, 1955. 284 p.
3. Rozhkov P. V., Purikova I. A., Tertitsa S. V., Dimitryuk Yu. S. Promising methods for solving plate bending problems in the calculation of building structures. Scientific Bulletin of the State Autonomous Educational Institution of Higher Education "Nevinnomyssk State Humanitarian and Technical Institute". No. 1. 2021. Pp. 11–16.
4. Petrov V. V. Theory of Calculation of Plates and Shells: textbook. Moscow: ASV, 2022. 448 p.
5. Khazamov G. O. Finite difference method for calculating an isotropic plate with a close-to-rectangular contour. Coll. of Scientific Papers of the 10th Int. Scientific and Practical Conf. Moscow: Pero, 2024. Pp. 149–155.
6. Khazamov G. O. Finite difference method for the problem of bending of an annular isotropic plate. Coll. of Scientific Papers of the 10th Int. Scientific and Practical Conf. Moscow: Pero, 2024. Pp. 155–159.
7. Boytsov G. V., Paliy O. M., Postnov V. A., Chuvikovskiy V. S. Plates. Theory of elasticity, plasticity, and creep. Numerical methods: reference for ship construction. Vol. 2. Leningrad: Sudostroenie, 1982. 464 p.
8. Gabbasov R., Filatov V., Dao N.K. Numerical research of bending flexible plates. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. Vol. 661. No. 1. 2019. Pp. 1–8. URL: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/661/1/012006>.
9. Mansur A. E. Modal analysis of circular symmetric plates using the generalized finite difference method. World of Transport. 2019. Issue 17. No. 3. Pp. 88–98. URL: <https://doi.org/10.30932/1992-3252-2019-17-3-88-98>.
10. Soloveychik Yu. G., Royak M. E., Persova M. G. Finite Element Method for Scalar and Vector Problems. Novosibirsk: NSTU, 2007. 896 p.
11. Timoshchenko S. P., Goodier J. Theory of Elasticity. Moscow: Nauka, Ed. in Chief of Phys.-Math. Literature, 1979.
12. Aleksandrov A. V., Potapov V. D. Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: Vyssh. shk., 1990. 400 p.
13. Varvak P. M., Ryabov A. F. Handbook of Elasticity Theory (for Civil Engineers). Moscow, 1971. 399 p.
14. Strang G., Fix J. Fundamentals of the Finite Element Method. Moscow: Mir, 1977. 351 p.
15. Rzhantsyn A. R. Structural Mechanics: A Textbook for Universities. Moscow: Higher School, 1982. 448 p.
16. Golovachev V. P. Application of the finite difference method to the analysis of plates and shells. Applied Mechanics. Vol. 4. No. 3. 1968. Pp. 120–127.
17. Finite Element Method (FEM) – Inner Engineering [Electronic resource]. URL: <https://inner.su/services/metod-konechnykh-elementov> (accessed: 10/29/2025).
18. Veretimus D. K. Fundamentals of Elasticity Theory. Part I. Stress Theory: A Methodological Handbook for the Course "Fundamentals of Elasticity and Plasticity Theory". Moscow, 2005. 37 p.

19. Zenkevich O. S. Finite Element Method in Engineering. Moscow: Mir, 1975. 541 p.
20. Veretimus D. K. Fundamentals of Elasticity Theory. Part II. Deformation Theory. The Relationship Between the Stressed and Strained States: A Methodological Handbook for the Course "Fundamentals of Elasticity and Plasticity Theory". Moscow, 2005. 53 p.

## FINITE DIFFERENCE METHOD FOR CALCULATION OF PLANE ELEMENTS WITH UNFIXED EDGES

Z. G. Kontsedaeva <sup>1</sup>, I. V. Khomyakova <sup>2</sup>, G. D. Kuzin <sup>3</sup>

Kaliningrad State Technical University <sup>1, 2, 3</sup>  
Russia, Kaliningrad

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, tel.: +7(906)236-23-33, e-mail: zhanna.kontsedaeva@klgtu.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Civil Engineering, tel.: +7(921) 105-33-81, e-mail: irina.khomyakova@klgtu.ru

<sup>3</sup> Master's Student of the Department of Civil Engineering, tel.: +7(981) 457-58-50, e-mail: georgiy\_kuzin@mail.ru

---

**Problem Statement.** This work is aimed to develop a finite difference method for calculating flat elements for a building structure with a free edge.

**Results.** A method for calculating an element, which design model is a plate rigidly clamped along three edges, is presented. The load acting on the plate is uniformly distributed. The element deflections due to the applied load are determined and the obtained values are verified with data in the CAEFidesys software.

**Conclusions.** The results of a numerical and theoretical study of the element under consideration are obtained. The methodology described in this paper can be applied to the calculations of flat building structures, and can also account for concentrated loads and those distributed over parts of an element.

The finite difference method is a promising alternative to other numerical methods, such as the finite element method, boundary element method, and discrete element method, used in structural mechanics. Despite significantly fewer unknowns while maintaining satisfactory accuracy, this method remains a challenging engineering challenge. The development of numerical methods to simplify classical calculations still presents certain difficulties, particularly for plates with more complex planforms, discontinuous loads, and special boundary conditions.

This paper presents a numerical solution for the bending problem of a rectangular plate with a free edge using the finite difference method. As a result, finite difference equations are obtained for the third type of boundary condition (free edge), which has been virtually never described by this method previously. The results of the finite difference method are compared with the finite element method. Thus, we propose a mathematical modeling of the bending behavior of plates with a free edge as structural elements.

**Keywords:** finite difference method, rectangular plane element, calculation, boundary conditions, free edge.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.042+624.072

DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.005

## ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТАЛЬНОГО КАРКАСА ПРИ ПОСТОЯННОЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ

В. С. Варнавский<sup>1</sup>, А. В. Конов<sup>2</sup>, Р. А. Мухтаров<sup>3</sup>Воронежский государственный технический университет<sup>1, 2, 3</sup>  
Россия, г. Воронеж<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: mailVVS@inbox.ru<sup>2</sup> Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(953)719-28-81, e-mail: kav.9@mail.ru<sup>3</sup> Ст. преп. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: rinat19611@yandex.ru

Рассматривается деформирование и определяется несущая способность стального пространственного каркаса с учётом образования пластических шарниров при совместном действии постоянной и технологической нагрузки. Исследованы методы увеличения пластического резерва прочности сооружения при действии сверхнормативной технологической нагрузки. Дается подтверждение достоверности методики расчёта. Расчёты выполнены с использованием ПК «ЛИРА».

**Ключевые слова:** стальной пространственный каркас, упругопластическое деформирование, пластический шарнир, предельная нагрузка, ПК «ЛИРА».

**Введение.** Данная работа является совершенствованием методики расчёта стальных каркасов на основе принципа предельного равновесия [1, 2] с применением программно-вычислительного комплекса «ЛИРА», но уже для пространственного каркаса [3–9]. Здесь приводятся результаты, которые продолжают ранее выполненное авторами исследование упругопластического деформирования представленного пространственного стального каркаса на сверхнормативную ветровую нагрузку [10]. Целью работы является исследование поэтапного характера разрушения сооружения при возрастающей технологической нагрузке и вычисление соответствующих предельных нагрузок. Дополнительно исследуется возможность совершенствования конструкции для повышения её пластического резерва.

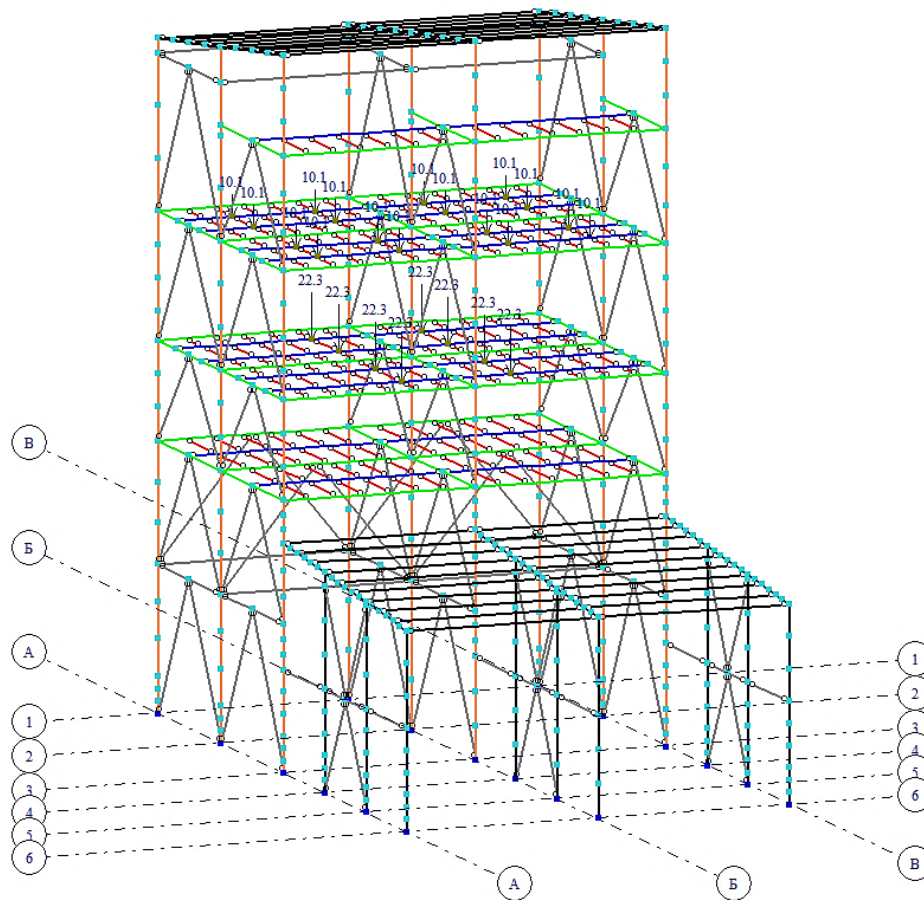
**Исследование упругопластического деформирования стального каркаса на рост технологической нагрузки.** Для ознакомления с описанием объекта расчёта, действующими нагрузками и общими положениями методики расчёта рекомендуется обратиться к предыдущей работе [10].

Расчет в линейно-упругой постановке показал, что наиболее нагруженным участком конструкции является конструкция перекрытия второго этажа.

В данном расчёте считается, что в ходе нагружения возрастает только технологическая нагрузка от оборудования на втором этаже, а вся остальная постоянная и временная нагрузка, действующая на каркас, не меняется. Для оценки воздействия именно технологической нагрузки ветровая и снеговая нагрузки здесь не учитываются.

На рис. 1 изображена нагрузка от технологического оборудования на втором и третьем этажах и отмечены цветом основные узлы конечно-элементного разбиения каркаса для

применяемой наименее плотной конечно-элементной сетки (КЭ-сетки № 1). С целью обеспечения наибольшей наглядности на рис. 1 часть второстепенных элементов схемы не показана.



**Рис. 1.** Конечно-элементная схема каркаса (КЭ-сетка № 1) и нагрузка, кН, от технологического оборудования

Стержневая расчётная схема несущей конструкции площадки второго этажа изображена на рис. 2. В табл. 1 представлены спецификации поперечных сечений стержневых элементов системы. Расчётные схемы остальных этажей имеют аналогичную структуру.

Таблица 1

Поперечные сечения элементов стального каркаса

Вид элемента	Сечения элемента
Колонна	Двутавр 30К1
Главная балка	Двутавр 30Б1
Второстепенная балка	Двутавр 30Ш1
Балка настила	Швеллер 6.5П

В конструкции горизонтальных площадок второстепенные балки (показаны синим цветом) шарнирно опираются на продольные главные балки (показаны зелёным цветом). Опирающие балки настила (показаны красным цветом) на главные и второстепенные балки также шарнирные.

Для удобства условно называем:

- ригели № 1 – продольные главные балки (показаны зелёным цветом);
- ригели № 2 – второстепенные балки (показаны синим цветом);
- ригели № 3 – балки настила (показаны красным цветом).

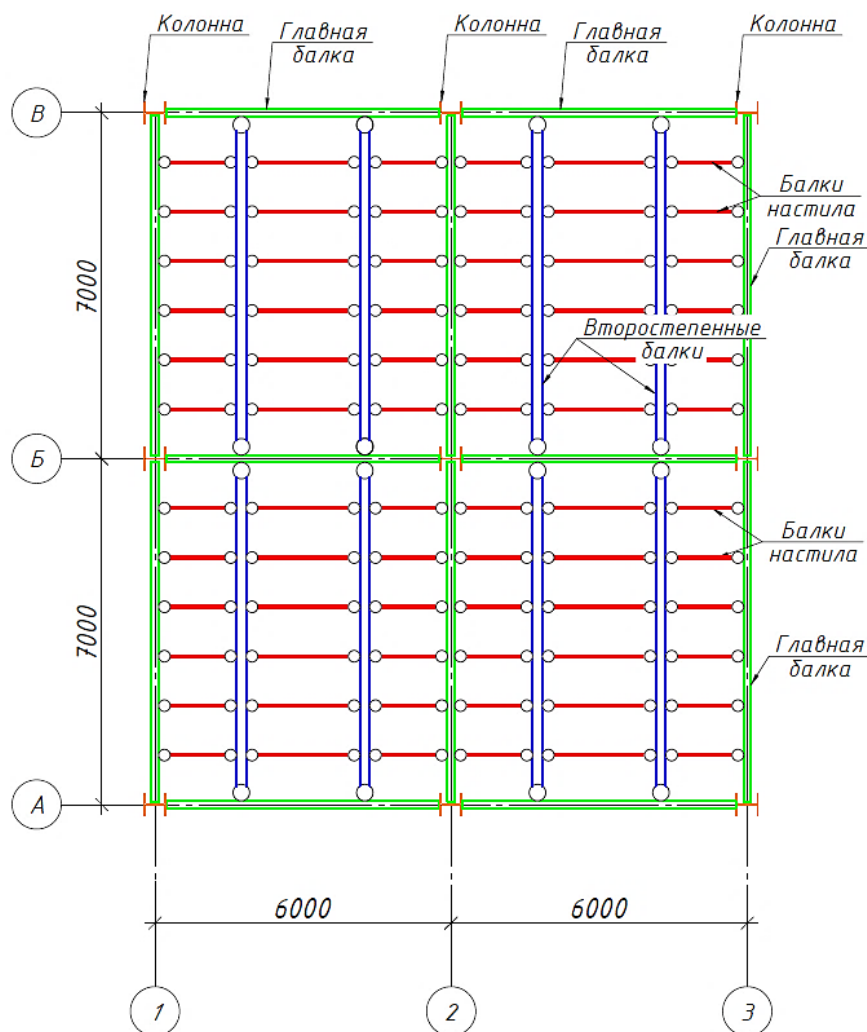


Рис. 2. Расчетная схема конструкции второго этажа

Величина предельной технологической нагрузки на втором этаже для удобства оценивается коэффициентом  $k$ , где  $P = kP_0$ . Здесь под  $P_0$  понимается нормативная (проектная) нагрузка. Этот коэффициент показывает, насколько возможно увеличить нагрузку  $P$  по сравнению с нормативной за счет использования пластического резерва. Таким образом, коэффициент характеризует величину пластического резерва конструкции.

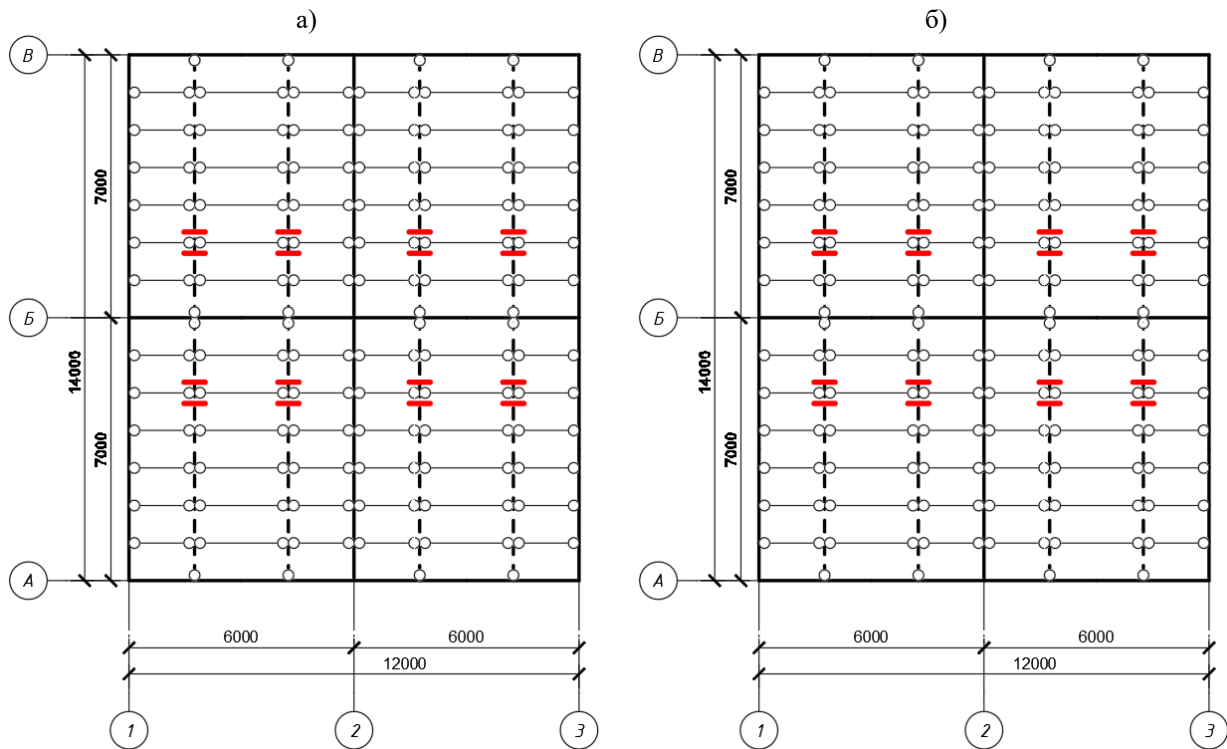
**Расчет для схемы опирания ШрШр.** Исходную расчётную схему конструкции этажа условно обозначим ШрШр. Это означает, что опирание ригелей № 3 и № 2 шарнирное.

Для доказательства достоверности численной схемы решения по данной методике было проведено исследование сходимости к результату при различных конечно-элементных сетках и шагах приращения нагрузки.

Всего в данной работе для подтверждения сходимости и достоверности численной схемы решения были подобраны три вложенных различных КЭ-сетки. Условно им присваиваются номера: КЭ-сетка № 1, КЭ-сетка № 2 и КЭ-сетка № 3. Во всех этих КЭ-сетках колонны и ригели разбивались на различное число стержневых КЭ. На рис. 1 представлена расчётная схема каркаса для КЭ-сетки № 1. Для каждой КЭ-сетки были выполнены расчёты для трёх шагов приращения по нагрузке  $\Delta P$ , равных  $0,1P_0$ ,  $0,05P_0$ ,  $0,01P_0$ , где  $P_0$  – нормативная технологическая временная нагрузка, совпадающая с наибольшей из линейно-упругого расчета.

В случае схемы опирания ШрШр для всех трёх КЭ-сеток и трёх шагов приращения нагрузки была получена одинаковая локализация образования пластических шарниров (ПШ)

в балочной клетке, которая проиллюстрирована на рис. 3 для двух шагов приращения нагрузки  $\Delta P$ , соответственно равных  $0,05P_0$ ,  $0,01P_0$ . В табл. 2 даны значения предельных нагрузок для всех трёх шагов  $\Delta P$ , равных  $0,1P_0$ ,  $0,05P_0$ ,  $0,01P_0$ . Наблюдается полное совпадение локализаций пластических шарниров и предельных нагрузок для подобранных трёх КЭ-сеток и трёх шагов  $\Delta P$ . Аналогичное хорошее совпадение результатов имело место и для других схем опирания ригелей, рассмотренных ниже. Следовательно, можно сделать вывод, что обеспечена сходимость результатов расчёта к решению.



**Рис. 3.** Локализация образования пластических шарниров для схемы ШрШр: шаг приращения нагрузки –  $\Delta P = 0,05P_0$  (а) и  $\Delta P = 0,01P_0$  (б)

Из табл. 2 видно, что для схемы опирания ШрШр была получена предельная нагрузка с коэффициентом, приблизительно равным  $k = 5$ . Это означает, что конструкция обрушается при увеличении нормативной нагрузки в 5 раз.

Таблица 2

Предельные нагрузки на стадиях разрушения (коэффициент  $k$ )

Номер стадии разрушения	Цвет ПШ на рисунке	$\Delta P = 0,1P_0$	$\Delta P = 0,05P_0$	$\Delta P = 0,01P_0$
1	<span style="color: red;">—</span>	5,00	4,95	4,92

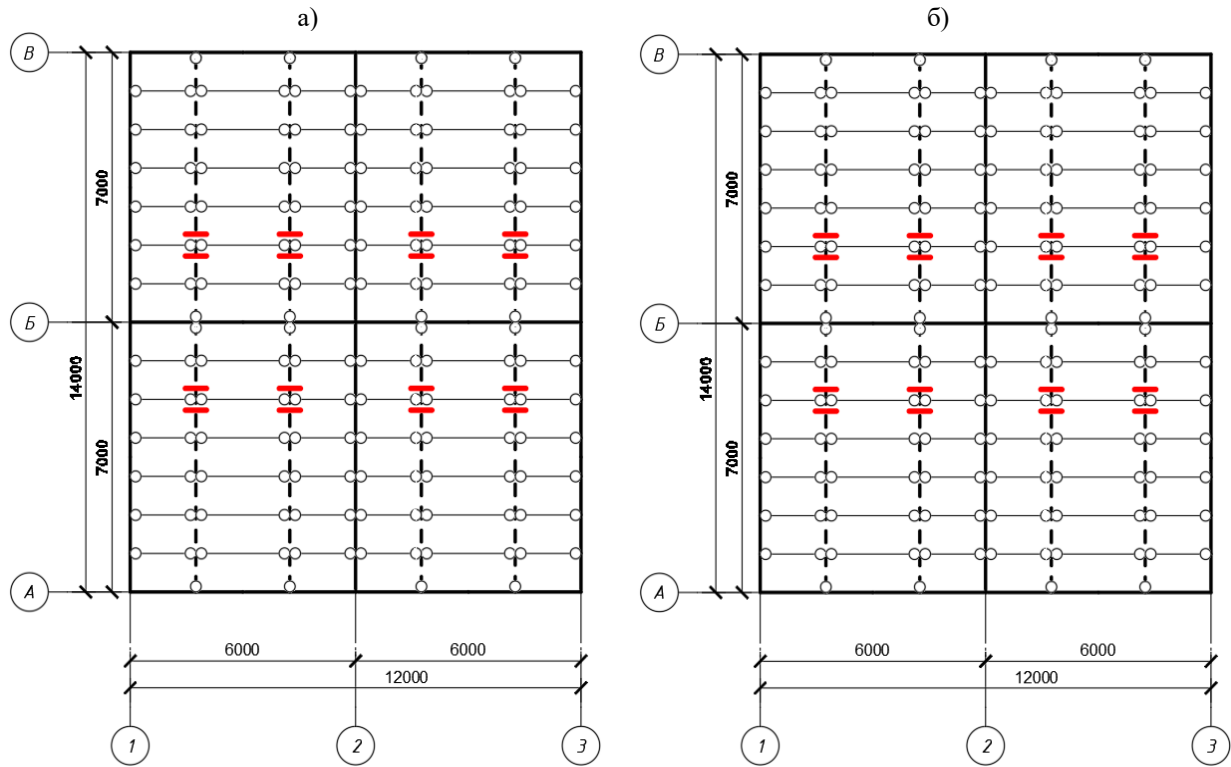
При предельной нагрузке образуются пластические шарниры в ригелях № 2 (отмечено красными штрихами). Так как способ крепления ригелей № 2 в этой схеме шарнирный, то добавление еще одного шарнира превращает ригель № 2 в механизм. В результате он разрушается и это влечет обрушение опертых на него ригелей № 3. При этом ригели № 1 остаются не разрушенными. Таким образом, в первой схеме ШрШр разрушается внутренняя часть балочной клетки.

Одной из задач этого исследования являлось нахождение способа увеличения пластического резерва конструкции.

Было рассмотрено 3 варианта:

- 1. Увеличение сечения ригелей № 3;
- 2. Изменение способа крепления ригелей № 2 и № 3 с шарнирного на жесткий;
- 3. Комбинированный способ, когда одновременно изменяются условия опирания и увеличиваются сечения элементов.


На рис. 4 показана локализация образования пластических шарниров в балочной клетке для двух типов сечений ригелей № 3: 1) исходное – С6.5П; 2) усиленное – С14П (жесткость увеличена в 10 раз по сравнению с исходным). В табл. 3 даны значения предельных нагрузок для этих двух типов сечений.



**Рис. 4.** Локализация образования пластических шарниров для схемы ШрШр при вариации сечений ригелей № 3: а) сечение ригелей № 3 – 6.5П(ШрШр0); б) сечение ригелей № 3 – 14П (ШрШр1)

Таблица 3

Предельные нагрузки на стадиях разрушения (коэффициент  $k$ ) для схемы ШрШр

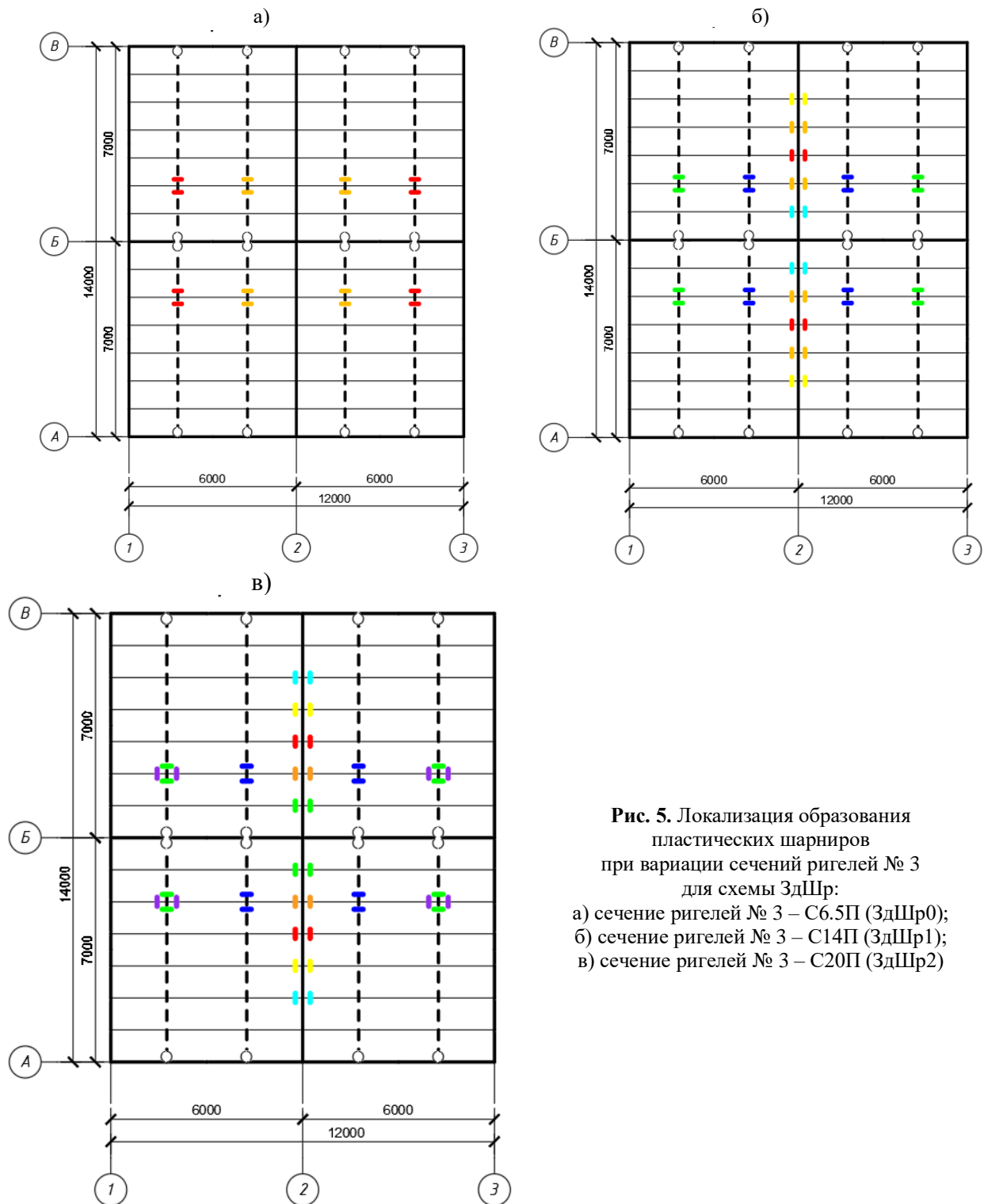
Номер стадии разрушения	Цвет ПШ на рисунке	ШрШр0	ШрШр1
1		5,00	5,00

Местоположение пластических шарниров и коэффициент предельной нагрузки усиленной схемы по сравнению с исходной, неусиленной, не изменились. Вывод: при схеме опирания ригелей ШрШр увеличение прочности и жесткости ригелей № 3 не повышает пластический резерв конструкции второго этажа.

**Расчет для схемы опирания 3дШр.** Далее была рассмотрена вторая схема опирания ригелей 3дШр (т. е. ригели № 3 опираются жёстко, а ригели № 2 шарнирно). При этом были выполнены три расчета для разных сечений ригелей № 3: 1) исходное – С6.5П; 2) усиленное – С14П; 3) усиленное – С20П.

На рис. 5 показана локализация образования пластических шарниров.












**Рис. 5.** Локализация образования пластических шарниров при вариации сечений ригелей № 3 для схемы ЗдШр:  
а) сечение ригелей № 3 – С6.5П (ЗдШр0);  
б) сечение ригелей № 3 – С14П (ЗдШр1);  
в) сечение ригелей № 3 – С20П (ЗдШр2)

С целью облегчения понимания последовательности возникновения пластических шарниров они разбиваются на несколько групп. Каждая группа шарниров образуется на определённом этапе нагружения (или разрушения) при соответствующей нагрузке, т. е. почти одновременно. В табл. 4 приведены значения коэффициента  $k$ , характеризующие величину нагрузки на каждом этапе разрушения. Указанный коэффициент  $k$  позволяет оценить величину технологической нагрузки, вызывающей появление группы пластических шарниров на каждой стадии разрушения. Этап образования пластических шарниров иллюстрируется соответствующим цветом на рисунках и в таблицах.

Таблица 4

Предельные нагрузки на стадиях разрушения (коэффициент  $k$ ) для схемы ЗдШр

Номер стадии разрушения	Цвет ПШ на рисунке	ЗдШр0	ЗдШр1	ЗдШр2
1		5,1	4,5	6,4
2		5,4	5,0	6,9
3		-	6,2	7,2
4		-	6,5	8,7
5		-	6,6	8,9
6		-	6,8	9,1
7		-	—	9,1

Выводы:

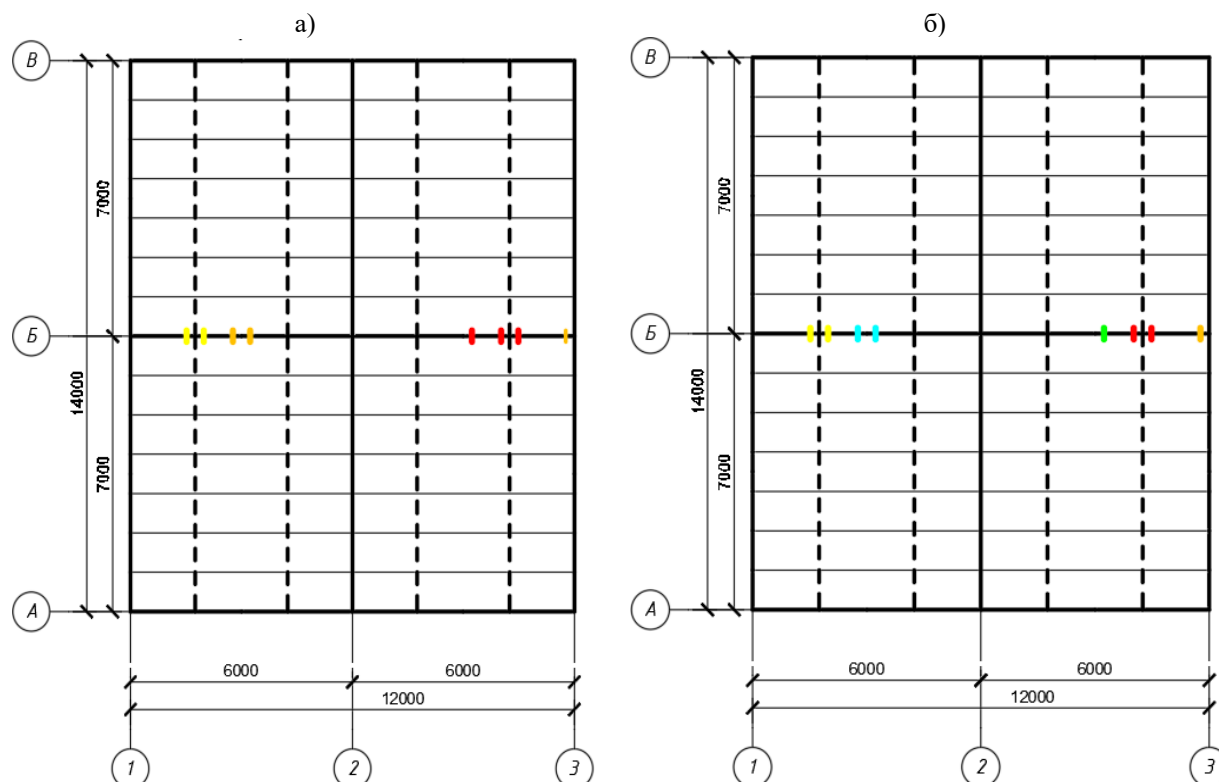
1. Теперь как в ригелях № 2, так и в ригелях № 3 также появляются пластические шарниры;
2. Ригели № 3 берут на себя часть нагрузки, и это позволяет всей конструкции второго этажа выдерживать более высокую нагрузку;
3. Чем прочнее ригели № 3, тем выше предельная нагрузка.

Таким образом, введение жесткого опирания ригелей № 3 и дополнительное увеличение сечения дало увеличение пластического резерва конструкции.

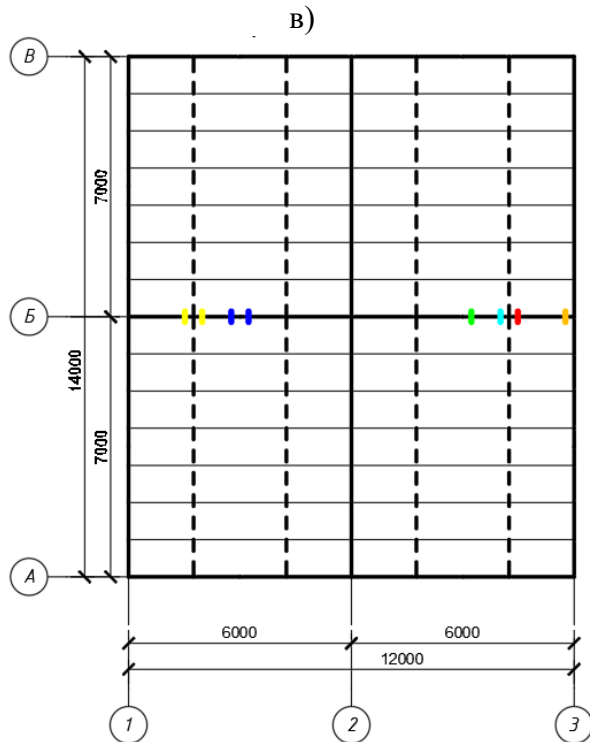
**Расчет для схемы опирания ЗдЗд.** Была рассмотрена третья схема ЗдЗд с жёстким опиранием ригелей № 2 и ригелей № 3. Для неё также были выполнены три расчета для разных сечений ригелей № 3: 1) исходное – С6.5П; 2) усиленное – С14П; 3) усиленное – С20П.

На рис. 6 показана локализация образования пластических шарниров.

В табл. 5 приведены значения коэффициента  $k$ , характеризующие величину нагрузки на каждом этапе разрушения.



**Рис. 6.** Локализация образования пластических шарниров для схемы ЗдЗд при вариации сечений ригелей № 3:  
а) сечение ригелей № 3 – С6.5П (ЗдЗд0); б) сечение ригелей № 3 – С14П (ЗдЗд1)



**Рис. 6 (окончание).** Локализация образования пластических шарниров для схемы 3д3д при вариации сечений ригелей № 3:  
в) сечение ригелей № 3 – С20П (3д3д2)

Таблица 5

Предельные нагрузки на стадиях разрушения (коэффициент  $k$ ) для схемы 3д3д

Номер стадии разрушения	Цвет ПШ на рисунке	3д3д0	3д3д1	3д3д2
1	—	5,1	6,4	8,2
2	—	5,6	6,5	8,4
3	—	5,7	6,6	8,5
4	—	-	6,7	8,6
5	—	-	6,9	8,7
6	—	-	-	8,9

Здесь пластические шарниры образуются только в ригелях № 1 основных несущих рам, что приводит к разрушению всего этажа. Аналогично предыдущей схеме опирания ригелей 3дШр в схеме 3д3д чем прочнее ригели № 3, тем выше предельная нагрузка.

**Итоговый анализ по упругопластическому расчёту.** На основе анализа результатов расчётов получены зависимости коэффициента предельной нагрузки от жесткости (прочности) ригелей № 3 для разных типов схем опирания. Эти зависимости изображены в виде графиков на рис. 7 и отражены в коэффициентах предельных нагрузок в табл. 6.

Таблица 6

Предельные нагрузки (коэффициент  $k$ )

Сечения ригеля № 3	Жесткость ригеля № 3, $\text{см}^4$	Тип схемы опирания		
		ШрШр	3дШр	3д3д
С6.5П	48,8	5,0	5,4	5,7
С14П	493	4,9	6,8	6,9
С20П	1530	—	9,3	8,9
Цвет на графике		—	—	—

На графиках по оси абсцисс откладывается величина момента инерции ригеля № 3 относительно главной центральной оси изгиба, а по оси ординат – полученные коэффициенты предельной нагрузки.

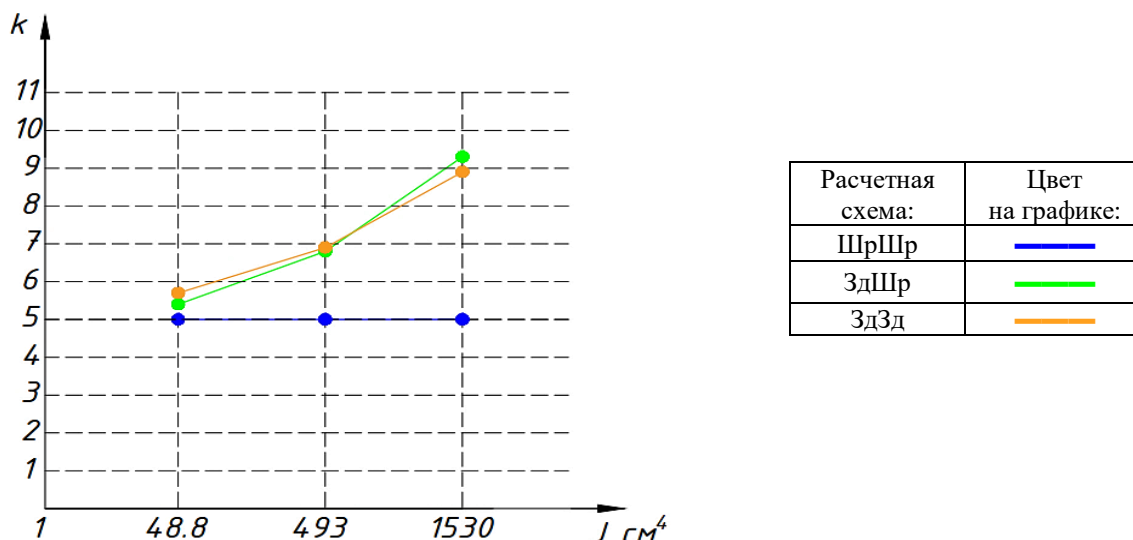


Рис. 7. График зависимости коэффициента предельной нагрузки для всей конструкции от жесткости ригелей № 3

При использовании исходной схемы опирания ригелей ШрШр (синий график) по сравнению с другими схемами конструкция второго этажа имеет наименьший пластический резерв для сопротивления увеличению технологической нагрузки, т. е. предельная нагрузка, вызывающая пластическое разрушение, минимальная. Причём этот резерв никак не зависит от прочности (и жёсткости) ригелей № 3. Заметно больший пластический резерв получается для схем опирания ригелей ЗдШр и ЗдЗд. Наблюдается близость предельных нагрузок независимо от типов сечений ригеля № 3 для этих двух схем ЗдШр и ЗдЗд, несмотря на разный характер разрушения конструкции.

#### Общие выводы

1. Были получены схемы разрушения конструкции, т. е. установлены локализация и последовательность образования пластических шарниров и вычислены предельные нагрузки для данной конструкции.
2. Были предложены и изучены варианты повышения предельной нагрузки, т. е. увеличения пластического резерва конструкции.
3. Установлена зависимость между способом опирания и жесткостью отдельных элементов системы и величиной предельной нагрузки.

#### Библиографический список

1. Ржаницын А. Р. Строительная механика: учеб. пособие для вузов. М.: Высш. шк., 1982. 400 с.
2. Каркаускас Р. П., Критинис А. А., Атокчюнас Ю. Ю. [и др.]. Строительная механика: программы и решения задач на ЭВМ: учеб. пособие для вузов / под общ. ред. А. А. Чираса. М.: Стройиздат, 1990. 360 с.
3. Варнавский В. С., Поворин А. С. Определение несущей способности металлического рамного каркаса с применением программного комплекса Ли́ра // Строительная механика и конструкции. 2011. Т. 2, № 3. С. 113–121.
4. Варнавский В. С., Болотов А. О. Численное исследование несущей способности металлической рамы на основе программного комплекса Ли́ра // Строительная механика и конструкции. 2014. Т. 1, № 8. С. 117–125.

5. Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Мартынова М. М. Расчёт плоского стального каркаса на статическую нагрузку с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 3, № 18. С. 51–60.
6. Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Востриков В. В. Расчёт плоского стального каркаса на постоянную и временную нагрузку с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 3, № 22. С. 76–86.
7. Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Востриков В. В. Расчётный анализ распределения усилий в металлическом рамном каркасе с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. 2021. Т. 1, № 28. С. 76–86.
8. Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Малыхина А. С. Определение несущей способности железобетонной стоечно-ригельной опоры путепровода с учётом неупругих деформаций материала // Строительная механика и конструкции. 2021. № 4 (31). С. 56–69.
9. Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Ненашев Д. С. Исследование упругопластического деформирования плоского стального каркаса при постоянной и крановой нагрузке // Строительная механика и конструкции. 2022. № 2 (33). С. 110–122.
10. Варнавский В. С., Конов А. В., Варнавская Е. В. Исследование упругопластического деформирования пространственного стального каркаса при постоянной и ветровой нагрузке // Строительная механика и конструкции. 2023. № 4 (39). С. 64–74.

#### References

1. Rzhnitsyn A. R. Construction mechanics: textbook. manual for universities. M.: Higher. School, 1982. 400 p.
2. Karkauskas R. P., Cretinism A. A., Atkochiunas Yu. Yu. [et al.]. Construction mechanics: Computer programs and problem solving: Textbook for universities / Under the general editorship of A. A. Chiras. M.: Stroyizdat, 1990. 360 p.
3. Varnavsky V. S., Povorin A. S. Determination of the bearing capacity of a metal frame with the use of the Lira software package // Construction mechanics and structures. 2011. Vol. 2, no. 3. Pp. 113–121.
4. Varnavsky V. S., Bolotov A. O. Numerical study of the bearing capacity of a metal frame based on the Lira software package // Construction mechanics and structures. 2014. Vol. 1, no. 8. Pp. 117–125.
5. Varnavsky V. S., Gabrielyan G. E., Martynova M. M. Calculation of a flat steel frame for static load taking into account plastic deformations of the material // Construction mechanics and structures. 2018. Vol. 3, no. 18. Pp. 51–60.
6. Varnavsky V. S., Gabrielyan G. E., Vostrikov V. V. Calculation of a flat steel frame for a constant and temporary load taking into account plastic deformations of the material // Construction mechanics and structures. 2019. Vol. 3, no. 22. Pp. 76–86.
7. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Vostrikov V.V. Computational analysis of the distribution of forces in a metal frame taking into account plastic deformations of the material // Construction mechanics and structures. 2021. Vol. 1, no. 28. Pp. 76–86.
8. Varnavsky V. S., Gabrielyan G. E., Malykhina A. S. Determination of the bearing capacity of a reinforced concrete rack-and-crossbar support of an overpass, taking into account inelastic deformations of the material // Construction mechanics and structures. 2021. No. 4 (31). Pp. 56–69.
9. Varnavsky V. S., Gabrielyan G. E., Nenashev D. S. Investigation of elastic-plastic deformation of a flat steel frame under constant and crane load // Construction mechanics and constructions. 2022. No. 2 (33). Pp. 110–122.
10. Varnavskiy V. S., Konov A. V., Varnavskaya E. V. Investigation of the elastoplastic deformation of a spatial steel frame under constant and wind load // Construction mechanics and structures. 2023. № 4 (39). Pp. 64–74.

---

## INVESTIGATION OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION SPATIAL STEEL FRAME UNDER CONSTANT AND TECHNOLOGICAL LOAD

V. S. Varnavsky <sup>1</sup>, A. V. Konov <sup>2</sup>, R. A. Mukhtarov <sup>3</sup>

Voronezh State Technical University <sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD in Engineering, Assoc. Prof. of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30,  
e-mail: mailVVS@inbox.ru

<sup>2</sup> Postgraduate student of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(953)719-28-81, e-mail: kav.9@mail.ru

<sup>3</sup> Senior Lecturer of the Dept. of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: rinat19611@yandex.ru

---

The deformation is considered and the bearing capacity of a steel spatial frame is determined, taking into account the formation of plastic hinges under the combined action of a constant and technological load. Methods of increasing the plastic reserve strength of a structure under the action of excessive technological load are investigated. Confirmation of the reliability of the calculation method is given. The calculations were performed using a LIRA PC.

**Keywords:** steel spatial frame, elastoplastic deformation, plastic hinge, maximum load, design-computational complex LIRA.

УДК 624.072.14

DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.006

## ОБОСНОВАНИЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТАЛЬНЫХ БАЛОК, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВЫТЯЖКОЙ СТЕНКИ В СИСТЕМЕ ГОРОДСКИХ НАДЗЕМНЫХ МОСТОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Е. В. Кравчук <sup>1</sup>, В. А. Кравчук <sup>2</sup>

Дальневосточный государственный университет путей сообщения <sup>1</sup>

Россия, г. Хабаровск

Тихоокеанский государственный университет <sup>2</sup>

Россия, г. Хабаровск

---

<sup>1</sup> Ст. преп. кафедры строительства, тел.: 8(4212)40-75-78, e-mail: 004938@togudv.ru

<sup>2</sup> Д-р техн. наук, проф. высшей школы промышленного и гражданского строительства,  
тел.: 8(4212)97-98-11, e-mail: 000415@togudv.ru

---

**Постановка задачи.** Представлены аналитические зависимости, позволяющие обосновать целесообразность применения в наиболее напряженных участках стальных надземных мостовых переходов балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки. Предмет исследования – стальные строительные конструкции. Объектом исследования является мостовой надземный переход с вставкой из асимметричного двутаврового, предварительно напряженного элемента.

**Материалы и методы.** Исследование базируется на основах сопротивления материалов, позволяющих определить деформированное состояние отдельных участков консольной балки, и теории расчета стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки.

**Результаты.** Записаны аналитические выражения углов поворота и прогибов консолей и срединной части консольной балки с учетом их взаимовлияния, сформулирована максимальная несущая способность обычных и предварительно напряженных балок и требуемая площадь их поперечного сечения, а также высота поперечного сечения традиционных и предварительно напряженных конструкций. Предложено конструктивное решение стальной консольной балки со вставкой из предварительно напряженного элемента, расположенного в месте максимального изгибающего момента.

**Ключевые слова:** консольные стальные балки, деформированное состояние, предварительно напряженные стальные балки.

**Введение.** В городах, имеющих развитую транспортную инфраструктуру, парковые зоны, учебные заведения, сеть спортивных сооружений и места культурного назначения, крайне необходимо обеспечить безопасные подходы и переходы к жилому массиву, местам работы, учебы и отдыха.

Решение проблемы безопасности пешеходов и комфортного их перемещения к местам объектов жизнедеятельности связано с созданием архитектурно выразительных, прочных и устойчивых надземных пешеходных переходов.

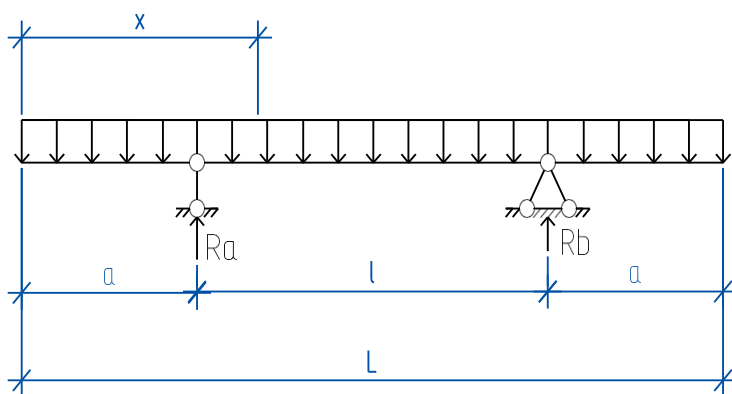
ФАУ «РОСДОРНИИ» разработан национальный стандарт РФ ГОСТ Р 70716-2023 «Дороги автомобильные и улицы. Безопасность движения пешеходов. Общие требования» [3], регламентирующий требования к размещению и расположению переходов на улицах. Министерством строительства и жилищно-коммунального хозяйства РФ в декабре 2020 г. утвержден СП 59.13330.2020 «Доступность зданий и сооружений для маломобильных групп населения» № 633/пр. [4]. Правительство Москвы в 2004 г. утвердило регламент «Пешеходные переходы вне проезжей части улиц», сформулировав нормы размещения в городах закрытых надземных переходов и основы планировочных решений [5].

Высшие учебные заведения России активно вносят свой вклад в изучение целесообразности применения различных материалов в конструкциях надземных пешеходных переходов.

В Санкт-Петербургском политехническом институте [6] рассмотрены методы моделирования расчетной схемы конструкций большепролетного надземного перехода из холодногнутых стальных профилей и влияние схемы на параметры сечения профилей. Пермский национальный исследовательский университет [7] рассмотрел применение стеклопластика в совокупности с металлом в конструкции надземного пешеходного перехода. Ученые Оренбургского государственного университета [8] выполнили анализ различных конструктивных решений надземных пешеходных переходов с позиции напряженного состояния опор, сложности проектирования и технологии возведения конструкций. В Саратовском государственном техническом университете [9] выполнен анализ работы надземного пешеходного перехода под действием ветровых нагрузок.

В работе «Архитектура современных пешеходных переходов из фиброармированных композитных материалов» [10] авторы выполнили анализ конструкций из указанного материала с предложениями о конструктивном и архитектурных решениях сооружений.

**Модели и методы.** Конструкции переходов в застройке городов чаще всего представляют собой балки с симметрично расположенными консолями, предназначенными для опирания на них лестничных маршей (рис. 1). Загружение лестниц, лестничных площадок и балок переходов внешней нагрузкой может быть различной интенсивности. Мы рассматриваем вариант, когда несущие балки нагружены равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , кН / см.



**Рис. 1.** Расчетная схема балки мостового перехода

Для решения задачи о целесообразности применения в таких конструкциях предварительно напряженных балок исследуем напряженно-деформированное состояние обычных балок и добавим к нему напряженное состояние, полученное балкой на стадии ее предварительного напряжения.

Текущий изгибающий момент внешних нагрузок представляется в виде:

$$M_x = \frac{qL}{2}(x-a) - \frac{qx^2}{2}. \quad (1)$$

На основании интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки  $d^2y/dx^2 = -M_x/EI_y$  [11] определяются:

– поворот поперечного сечения балки:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI_z} \left[ \frac{qL}{2}(x-a) - \frac{qx^3}{6} + \frac{qLa(L-a)}{4} - \frac{qL^3}{24} \right]; \quad (2)$$

– и ее прогиб:

$$y = -\frac{1}{EI_z} \left\{ \frac{qL}{12}(x-a)^3 - \frac{qx^4}{24} + x \left[ \frac{qLa(L-a)}{4} - \frac{qL^3}{24} \right] + \frac{qa^4}{24} + \frac{qaL^3}{24} - \frac{qLa^2(L-a)}{4} \right\}. \quad (3)$$



Максимальный прогиб консольной балки ( $x = L/2$ ):

$$y_{\max(x=L/2)} = -\frac{1}{EI_z} \left[ \frac{11 \cdot qL^4}{384} - \frac{qL^3 a}{48} + \frac{qL^2 a}{96} (12 + 24L - 24a) - \frac{8qLa^3}{96} \right]. \quad (4)$$

Прогиб на свободном конце консоли ( $x = 0$ ):

$$y_{(x=0)} = -\frac{1}{EI_z} \left[ -\frac{qLa^3}{12} - \frac{qL^3}{24} + \frac{qa^4}{24} + \frac{qaL^3}{24} - \frac{qLa^2(L-a)}{4} \right]. \quad (5)$$

В частности, когда  $a = 0$ , прогиб пролетного участка консольной балки на основании выражения (5) равен:

$$y_{(a=0)} = -\frac{1}{EI_z} \left[ \frac{qL}{12} x^3 - \frac{q}{24} x^4 - \frac{qL^3}{24} x \right] = -\frac{1}{EI_z} \left( \frac{qL^4}{96} - \frac{qL^4}{384} - \frac{qL^4}{48} \right) = -\frac{5}{384 \cdot EI_z} qL^4. \quad (6)$$

Изгибающий момент внешних нагрузок в середине консольной балки ( $x = L/2$ ):

$$M_{(x=L/2)} = \frac{qL}{2} \left( \frac{L}{2} - a \right) - \frac{q}{2} \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{qL}{8} (L - 4a). \quad (7)$$

«Нулевая» точка на графике моментов внешних нагрузок находится из условия, что текущий изгибающий момент  $M_x = 0$ , т. е.:

$$\frac{q}{2} x^2 - \frac{qL}{2} x + \frac{qLa}{2} = 0.$$

Из квадратного уравнения находим (рис. 2), что

$$x_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{L^2 - 4La}.$$

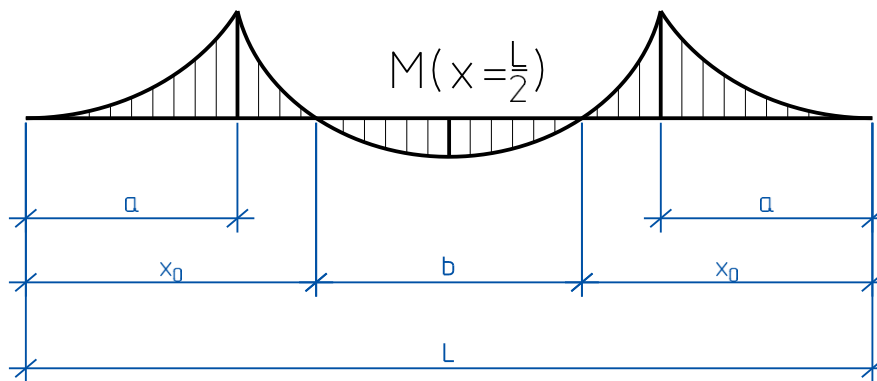


Рис. 2. График моментов внешних нагрузок в консольной балке

Введем коэффициент  $\xi = a/L$ . С учетом указанного коэффициента положение «нулевой» точки на графике моментов внешних нагрузок:

$$x_{1,2} = \frac{L}{2} \pm \frac{L}{2} \sqrt{1 - 4\xi} = \frac{L}{2} (1 \pm \sqrt{1 - 4\xi}). \quad (8)$$

Зависимость положения «нулевой» точки от коэффициента  $\xi = a/L$  представлена в таблице.

Таблица

$\xi = a / L$	$x_1 = \frac{L}{2}(1 - \sqrt{1 - 4\xi})$
0,1	$0,1127 \cdot L$
0,11	$0,1258 \cdot L$
0,12	$0,1386 \cdot L$
0,13	0,1535

Из таблицы следует, что вариация коэффициента  $\xi = a / L$  в диапазоне (0,1–0,11) мало влияет на положение «нулевой» точки.

В дальнейших расчетах примем, что  $a = 0,1 \cdot L$ .

Длина срединного участка балки между «нулевыми» точками:

$$b = (L - 2x_o). \quad (9)$$

Если  $a = 0,1L$ , то  $b = L - 2 \cdot 0,1L = 0,8L$ .

Нужно отметить, что на стадии изготовления предварительно напряженной балки, в ее торцевых участках, на расстоянии  $0,02L$  предварительные напряжения практически отсутствуют. Поэтому из соображений рационального использования материала предварительно напряженной балки ее длину между «нулевыми» точками на эпюре моментов внешних нагрузок (рис. 2) можно удлинить и принять равной

$$b_0 = 0,8L + 0,015L = 0,815L, \quad (10)$$

сократив длину отдельного консольного участка балки на  $0,0075L$ , т. е. принять

$$a = 0,0925L. \quad (11)$$

Изменение длин балки в окрестностях «нулевой» точки мало влияет на качество проектного решения.

Представленные арифметические вычисления приведены для определения возможной длины срединного пролета консольной балки, в пределах которой следует расположить вставку из предварительно напряженного элемента.

Предварительно напряженный элемент представляет собой балку с предварительными напряжениями и прогибами, вектор которых направлен в сторону, противоположную соответствующим параметрам несущей способности обычных балок.

В работе [1] установлено, что предварительно напряженный элемент способен выдерживать внешнюю нагрузку, момент которой определяется выражением:

$$M_{pr} = 0,427AR_y\sqrt{An_{w,pr}}, \quad (12)$$

где  $n_{w,pr}$  – гибкость стенки предварительно напряженного элемента ( $n_{w,pr} = 120 - 160$ );  $A$  – площадь поперечного сечения;  $R_y$  – расчетное сопротивление материала стенки элемента.

Соответствующий момент для обычной балки:

$$M_{ob} = 0,2357AR_y\sqrt{An_{w,ob}}. \quad (13)$$

Здесь  $n_{w,ob}$  – гибкость стенки обычной балки ( $n_{w,ob} = 80 - 90$ ).

Соотношение моментов:

$$\zeta = \frac{M_{pr}}{M_{ob}} = \frac{0,427A_{pr}^{3/2}n_{w,pr}^{1/2}}{0,2357A_{ob}^{3/2}n_{w,ob}^{1/2}} = 1,8 \frac{A_{pr}^{3/2}n_{w,pr}^{1/2}}{A_{ob}^{3/2}n_{w,ob}^{1/2}}. \quad (14)$$

Требуемые площади сечений соответствующих балок на основании зависимостей (12) и (13):

– предварительно напряженной:

$$A_{pr}^{tr} = \sqrt[3]{\frac{M_{pr}^2}{0,427^2 R_y^2 n_{w,pr}}}; \quad (15)$$

– обычной:

$$A_{ob}^{tr} = \sqrt[3]{\frac{M_{ob}^2}{0,2357^2 R_y^2 n_{w,ob}}}. \quad (16)$$

Соотношение площадей сопоставляемых балок:

$$\psi = \frac{A_{pr}^{tr}}{A_{ob}^{tr}} = 0,673 \frac{n_{w,ob}^{1/3}}{n_{w,pr}^{1/3}}. \quad (17)$$

Анализируя весовые показатели предварительно напряженной вставки в конструкцию консольной балки и обычный элемент того же пролета, можно утверждать, что массы сопоставляемых конструкций подчиняются закону соотношения площадей, т. е.:

$$\zeta = \frac{m_{pr}}{m_{ob}} = 0,673 \frac{n_{w,ob}^{1/3}}{n_{w,pr}^{1/3}}, \quad (18)$$

где  $n_{w,ob}^{1/3}$ ,  $n_{w,pr}^{1/3}$  – гибкость стенок соответственно обычного и предварительно напряженного элементов.

Конструктивное решение консольной балки с предварительно напряженной вставкой в зоне максимального изгибающего элемента можно рекомендовать следующим: на консольных участках применить монометаллические обычные балки переменного сечения с максимальной высотой сечения в опорных узлах, а в средней части балки рекомендуется установить предварительно напряженный элемент постоянного сечения (рис. 3).

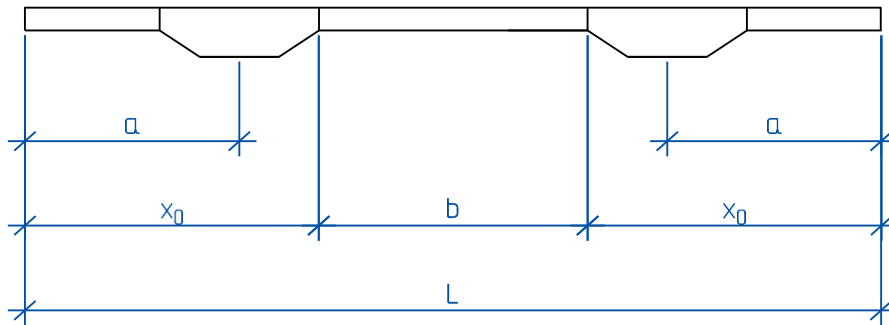


Рис. 3. Конструктивная схема консольной балки с вставкой из предварительно напряженного элемента

Для ответа на вопрос об эффективности применения в консольной балке предварительно напряженной вставки вернемся к аналитическому выражению суммарного прогиба по выражению (4). Указанный прогиб запишем в виде:

$$y_{(x=L/2)} = -\frac{1}{EI_z} \left[ \frac{11qL^4}{384} - \frac{qL^3 \cdot 0,0925L}{48} \cdot \frac{8}{8} + \frac{qL^2 \cdot 0,0925L}{96} \cdot \frac{0,0925L}{0,0925L} \cdot \frac{4}{4} \times \right. \\ \left. \times (12 + 24L - 24 \cdot 0,0925L) - \frac{8 \cdot qL \cdot (0,0925L)^3}{96} \cdot \frac{0,0925L}{0,0925L} \cdot \frac{4}{4} \right] =$$

$$= -\frac{1}{EI_z} \left[ \frac{qL^4}{384} \left[ [11 - 0,74 + \frac{0,034225}{0,0925L} (12 + 24L \cdot 0,9095) - \frac{0,0023427}{0,0925L}] \right] \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot \frac{L^2 B}{48} = 0,0208 \cdot \frac{qL^2}{8} \cdot \frac{BL^2}{EI_z}. \quad (19)$$

Здесь

$$B = [10,26 + \frac{0,034225}{0,0925L} (12 + 21,828L) - \frac{0,0023427}{0,0925L}]. \quad (20)$$

В обычных балках оптимального поперечного сечения, когда площадь сечения отдельного поясного листа  $A_f = 0,25A$ , а площадь стенки  $A_w = 0,5A$ , момент инерции сечения:

$$I_z = A_{ob} h^2 / 6.$$

Подставляя зависимость (20) в (19) получим:

$$y_{(x=L/2)} = \frac{0,0208 \cdot M_{ob} \cdot 6B}{EA h^2} = \frac{0,125 \cdot M_{ob} B}{EA h^2}. \quad (21)$$

В выражение (21) подставляем аналитическое выражение момента внешних нагрузок  $M_{ob}$  по зависимости (13):

$$y_{(x=L/2)} = \frac{0,1248 \cdot 0,2357 A_{ob}^{3/2} R_y n_{w,ob}^{1/2} L^2 B}{EA h^2} = 0,0294 \frac{A_{ob}^{1/2} n_{w,ob}^{1/2} B R_y L^2}{E h^2}. \quad (22)$$

Разделим выражение (22) на пролет балки  $L$  и из полученной зависимости определим высоту обычной балки:

$$h_{ob}^2 = 0,0294 \frac{A_{ob}^{1/2} R_y n_{w,ob}^{1/2} L}{E \left[ \frac{\sum y}{L} \right]} B. \quad (23)$$

Здесь  $\left[ \frac{\sum y}{L} \right]$  – относительный прогиб обычной балки,  $\left[ \frac{\sum y}{L} \right] = \frac{1}{250} = 0,004$  (см. СП 20.13330.2016, табл. Д.2.1).

С учетом относительного прогиба высота обычной балки:

$$h_{ob}^2 = 7,35 \frac{A_{ob}^{1/2} R_y n_{w,ob}^{1/2} L}{E} B. \quad (24)$$

Прогиб предварительно напряженной вставки определяется по тем же формулам, что и прогиб обычной балки, но при этом требуется уточнить момент инерции элемента. В работе [2] установлено, что он определяется зависимостью

$$I_{z.pr} = \frac{A_{pr} h^2 [6K - \gamma_w (K+1)^2]}{6(K+1)^2}. \quad (25)$$

Здесь  $K$  – коэффициент асимметрии поперечного сечения предварительно напряженной балки,  $K = 1,1754$ ;  $\gamma_w$  – коэффициент распределения материала по сечению стенки,  $\gamma_w = 0,496$ .

С учетом приведенных коэффициентов:

$$I_{z,pr} = 0,16575 \cdot A_{pr} h^2 \text{ см}^4. \quad (26)$$

На стадии изготовления предварительно напряженной балки она получает выгиб  $f_0$ , вектор которого направлен в сторону, противоположную прогибу  $y_{(x=L/2)}$ .

Следовательно, прогиб предварительно напряженного элемента необходимо определять с учетом выгиба  $f_0$  по зависимости

$$\sum y_{pr} = (y_{(x=L/2)} - f_0). \quad (27)$$

Из работы В. А. Кравчука [1] известно, что

$$f_0 = 0,022 \frac{R_y L^2 A_{pr}^{3/2} n_{w,pr}^{1/2}}{E \cdot 0,16575 A_{pr} h^2} = 0,132 \frac{R_y L^2 A_{pr}^{1/2} n_{w,pr}^{1/2}}{E h^2}.$$

Для рассматриваемого случая в выражение  $f_0$  вместо  $L$  необходимо подставить  $b$  и выгиб записать в виде:

$$f_{01} = 0,022 \frac{R_y b_o^2 A_{pr}^{3/2} n_{w,pr}^2}{E \cdot 0,1657 A_{pr} h^2} = 0,132 \frac{R_y b_o^2 A_{pr}^{1/2} n_{w,pr}^2}{E h^2}.$$

На этом этапе исследования следует учесть соотношение между площадью поперечного сечения обычной и предварительно напряженной балок. На основании зависимости (17):

$$A_{pr} = A \cdot 0,673 \frac{n_{w,ob}^{1/2}}{n_{w,pr}^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f_{01.1} &= 0,132 \frac{R_y b_o^2 (0,673 \cdot A \frac{n_{w,ob}^{1/2}}{n_{w,pr}^{1/2}})^{1/2} n_{w,pr}^{1/2}}{E h^2} = 0,132 \cdot 0,673^{1/2} \frac{R_y b_o^2 A^{1/2} \frac{n_{w,ob}^{1/4}}{n_{w,pr}^{1/4}} n_{w,pr}^{1/2}}{E h^2} = \\ &= 0,108 \frac{R_y b_o^2 A^{1/2} \frac{n_{w,ob}^{1/4}}{n_{w,pr}^{1/4}}}{E h^2}. \end{aligned}$$

Разделим полученную зависимость на пролет предварительно напряженного элемента  $b$  и с учетом относительного прогиба конструкции найдем высоту сечения, удовлетворяющую выгибу  $f_{01.1}$ :

$$h_{f01}^2 = 0,108 \frac{R_y b_o A^{1/2} \frac{n_{w,ob}^{1/4}}{n_{w,pr}^{1/4}}}{E \cdot \left( \frac{f_{01.1}}{b_0} \right)}. \quad (28)$$

Здесь  $\left( \frac{f_{01.1}}{b_0} \right)$  – относительный прогиб предварительно напряженного элемента, принимаемый по СП 20.13330.2016 (табл. Д.2.1) равным 1/250.

Окончательную высоту предварительно напряженной вставки в пролет консольной балки определим из выражения

$$\sum h_{pr}^2 = (h_{ob}^2 - h_{f01}^2) = 7,36 \frac{A^{1/2} R_y n_{w,ob}^{1/2} BL}{E} - 0,108 \frac{R_y b_o A^{1/2} \frac{n_{w,ob}^{1/4}}{n_{w,pr}^{1/4}}}{E \left( \frac{f_{01.1}}{b_o} \right)}. \quad (29)$$

Снижение высоты предварительно напряженного элемента приведет к снижению его массы и массы всей конструкции.

В консольной балке пролетом  $L=1800$  см высота предварительно напряженной вставки снижается на 18,2 %, а масса конструкции – на 14,7 %.

Е. И. Беленя в своей работе «Предварительно напряженные металлические несущие конструкции» (М.: Стройиздат, 1963) отмечает: «Предварительное напряжение позволяет повысить эффективность конструкций, т. е. увеличить их несущую способность и в ряде случаев и жесткость», а далее, на с. 7: «...созданием предварительного напряжения обратного знака можно повысить жесткость конструкции».

Общеизвестно, что изгибная жесткость любого стержня, нагруженного, например, равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , кН / см, может быть выражена зависимостью

$$EI_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{q^n l^4}{y}, \quad (30)$$

свидетельствующей о том, что чем меньше прогиб  $y$ , тем больше жесткость  $EI_x$  изгибаемого элемента.

Прогиб предварительно напряженной балки записываем в виде:

$$y_{pr} = \frac{5}{48} \cdot \frac{1}{\gamma_f} 0,427 R_y A^{3/2} \sqrt{n_{w,pr}} \frac{l^2}{EI_x} = 0,04448 \cdot R_y A^{3/2} \sqrt{n_{w,pr}}. \quad (31)$$

Выгиб балки на стадии изготовления конструкции [1]:

$$f_o = \frac{M_0 l^2}{8,3 EI_{xt}}; \quad (32)$$

$$M_0 = \frac{R_y A h K^2}{(K+1)^2 (K+2)} - \quad (33)$$

момент усилий предварительного напряжения;

$$I_{xt} = I_x \frac{(2K+1)}{2(K+1)} = \frac{I_x}{1,2985} - \quad (34)$$

момент инерции балки на стадии ее предварительного напряжения [2].

С учетом коэффициента асимметрии сечения предварительно напряженной балки  $K=1,1754$ , момент усилий предварительного напряжения:

$$M_o = 0,092 \cdot R_y A h. \quad (35)$$

Выгиб  $f_0$  с учетом зависимостей (33), (34):

$$f_0 = 0,119462 \cdot \frac{R_y A h l^2}{EI_x}. \quad (36)$$

Известно [1], что высоту поперечного сечения предварительно напряженной балки можно определить зависимостью

$$h = \sqrt{\gamma_{w.pr} A n_{w.pr}} = \sqrt{0,496 A n_{w.pr}} = 0,70423 A^{1/2} \sqrt{n_{w.pr}}. \quad (37)$$

В итоге выгиб предварительно напряженной балки на стадии ее изготовления:

$$f_0 = 0,119462 \frac{R_y A l^2 \cdot 0,70423 A^{1/2} \sqrt{n_{w.pr}}}{8,3 E I_x} = 0,0101 \frac{R_y A^{3/2} l^2 \sqrt{n_{w.pr}}}{E I_x}. \quad (38)$$

Результирующий прогиб предварительно напряженной балки:

$$\sum y = (y_g - f_0) = \frac{R_y A^{3/2} l^2 \sqrt{n_{w.pr}}}{E I_x} (0,04448 - 0,0101) = 0,03438 \frac{R_y A^{3/2} l^2 \sqrt{n_{w.pr}}}{E I_x}. \quad (39)$$

Соотношение прогиба  $y_{pr}$  и суммарного прогиба  $\sum y$  может быть характеристикой жесткости предварительно напряженного изгибаемого элемента:

$$\varphi = \frac{y}{\sum y} = \frac{0,04448}{0,03438} = 1,29377. \quad (40)$$

Это означает, что жесткость балки повышена в 1,29 раза.

**Выводы.** Вставка предварительно напряженного элемента в конструкцию стального надземного пешеходного перехода позволяет улучшить его технико-экономические показатели, связанные со снижением массы и стоимости и повышением несущей способности.

#### Библиографический список

1. Кравчук В. А. Стальные стержни, предварительно напряженные без затяжек. М.: АСВ, 2015. 548 с.
2. Кравчук Е. В., Иодчик А. А., Кравчук В. А. Теоретическое и экспериментальное обоснование параметров несущей способности стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки // Строительная механика и конструкции. 2025. Вып. 1 (44). С. 63–79.
3. ГОСТ Р 70716-2023. Дороги автомобильные и улицы. Безопасность движения пешеходов. Общие требования. М.: ФАУ «РОСДОРНИИ».
4. СП 59.13330.2020. Доступность зданий и сооружений для маломобильных групп населения. М.: Минстрой, 2020. № 633/пр.
5. МГСН 1.03-02. Пешеходные переходы вне проезжей части улиц. М., 2004.
6. Ватин Н. И., Синельников А. С. Большепролетные надземные пешеходные переходы из легкого холодногнутого стального профиля // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2012. № 1 (1). С. 47–53.
7. Остерман Е. Д., Шутова О. А., Клевако В. И. Анализ применения стеклопластика и металла для устройства пролета надземного пешеходного перехода // Современные технологии в строительстве. Теория и практика. 2017. Т. 1. С. 63–73.
8. Величко Т. С. Надземные пешеходные переходы: проблемы выбора конструкций // Шаг в науку. 2020. № 1. С. 9–14.
9. Валиев Ш. Н., Овчинников И. Г. и др. Анализ надземного пешеходного перехода с целью установления причин разрушения остекления пролетного строения // Интернет- журнал «Науковедение». 2015. Т. 7, № 6 (31). С. 139.
10. Стругач А. Г., Трифонов А. Г. Архитектура современных пешеходных переходов из фиброармированных композитных материалов // Транспортные сооружения. 2019. Т. 6, № 1. С. 14.
11. Тимошенко С. П. Соппротивление материалов. М.: Госиздат физ.-мат. лит., 1960. 379 с.

## References

1. Kravchuk V. A. Steel rods, prestressed without ties. Moscow: ASV, 2015. 548 p.
2. Kravchuk E. V., Iodchik A. A., Kravchuk V. A. Theoretical and experimental substantiation of the bearing capacity parameters of steel beams prestressed by wall stretching. *Structural Mechanics and Constructions*. Issue 1 (44). 2025. Pp. 63–79.
3. Federal Standard R 70716-2023. Roads and streets. Pedestrian safety. General requirements. Moscow: FAU "ROSDORNII".
4. Set of Rules 59.13330.2020. Accessibility of buildings and structures for people with disabilities. Moscow: Minstroy, 2020. No. 633/pr.
5. Moscow City Construction Code 1.03-02. Pedestrian Crossings Outside the Roadway of Streets. Moscow, 2004.
6. Vatin N. I., Sinelnikov A. S. Large-span overground pedestrian crossings made of lightweight cold-formed steel sections. *Construction of Unique Buildings and Structures*. No. 1(1). 2012. Pp. 47–53.
7. Osterman E. D., Shutova O. A., Klevako V. I. Analysis of the use of fiberglass and metal for the construction of an overground pedestrian crossing span. *Modern Technologies in Construction. Theory and Practice*. Vol. 1. 2017. Pp. 63–73.
8. Velichko T. S. Overground pedestrian crossings: problems of design selection. *Step into Science*. No. 1. 2020. Pp. 9–14.
9. Valiev Sh. N., Ovchinnikov I. G. Analysis of an overground pedestrian crossing in order to establish the causes of the destruction of the glazing of the superstructure. *Internet Journal "Science Studies"*. Vol. 7. No. 6(31). 2015. P. 139.
10. Strugach A. G., Trifonov A. G. Architecture of modern pedestrian crossings made of fiber-reinforced composite materials. *Transport Structures*. Vol. 6. No. 1. 2019. P. 14.
11. Timoshenko S. P. *Strength of materials*. Moscow: State Publishing House of Phys.-Math. Literature, 1960. 379 p.

## RATIONALE FOR THE USE OF STEEL BEAMS PRESTRESSED BY WALL DRAWING IN THE SYSTEM OF OVERGROUND TOWN BRIDGES

E. V. Kravchuk <sup>1</sup>, V. A. Kravchuk <sup>2</sup>

Far Eastern State Transport University <sup>1</sup>  
Khabarovsk, Russia  
Pacific National University <sup>2</sup>  
Khabarovsk, Russia

---

<sup>1</sup> Assistant Professor of the Department of Civil Engineering, tel.: 8(4212)40-75-78, e-mail: 004938@togudv.ru

<sup>2</sup> Dr. of Technical Sciences, Professor of Higher School of Industrial and Civil Engineering, tel.: 8(4212)97-98-11, e-mail: 000415@togudv.ru

---

**Problem Statement.** The article presents analytical dependencies that allow us to justify the feasibility of using beams prestressed by wall stretching in the most stressed sections of steel overground bridge crossings. The subject of the study is steel building structures. The object of the study is an overground bridge with an insert made of an asymmetric prestressed I-beam.

**Materials and Methods.** The study is based on the principles of strength of materials, allowing to determine the deformed state of individual sections of a cantilever beam and the theory of calculating steel beams prestressed by wall stretching.

**Results.** Analytical expressions for the rotation angles of and deflections of consoles and the middle part of the cantilever beam are written down, taking into account their mutual influence. The maximum bearing capacity of conventional and prestressed beams and the required cross-section area are formulated, as well as the cross-sectional height of conventional and prestressed structures. A design solution for a steel cantilever beam with an insert made of a prestressed element located at the point of maximum bending moment is proposed.

**Keywords:** cantilever steel beams, deformed state, prestressed steel beams.



## ПРОЧНОСТНАЯ ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО РЕСУРСА КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ КОРРОЗИИ

В. Л. Савич<sup>1</sup>, Л. В. Яшин<sup>2</sup>, М. Н. Габова<sup>3</sup>, В. А. Хламов<sup>4</sup>

Ухтинский государственный технический университет<sup>1, 2, 3, 4</sup>

Россия, г. Ухта

ООО «ЛУКОЙЛ-Пермь» ТПП «Ухтанефтегаз»<sup>2</sup>

Россия, г. Ухта

<sup>1</sup> Доц. кафедры механики, доц., канд. техн. наук, тел.: +7(922)596-81-01, e-mail: vsavich@ugtu.net

<sup>2</sup> Аспирант кафедры механики, геолог 1 категории ЦДНГ-1, тел.: +7(922)081-91-82,  
e-mail: leonid.yaschin@mail.ru

<sup>3</sup> Ст. преп. кафедры физики и высшей математики, аспирант кафедры механики, тел.: +7(904)226-74-38,  
e-mail: mgabova@ugtu.net

<sup>4</sup> Ассистент кафедры механики, аспирант кафедры механики, тел.: +7(911)652-91-87, e-mail: vhlamov@ugtu.net

В процессе эксплуатации различных механических систем, элементов конструкций происходят структурные изменения материала, причинами которых являются различные условия и режимы эксплуатации (вызывающие динамику напряженно-деформированного состояния рассматриваемого объекта), а также дополнительные факторы физической природы, к которым можно отнести явление коррозии. В статье предлагается методика определения остаточного ресурса для консервативной механической системы в виде трубопровода, в основе которой лежат энергетические критерии поведения материалов, находящихся в напряженно-деформированном состоянии, а также геометрическая техника определения текущего запаса прочности конструкции при наличии эксплуатационного дефекта с использованием понятия центра тяжести плоской фигуры.

**Ключевые слова:** остаточный ресурс, коэффициент запаса прочности, структурно-энергетическая теория, напряжение, коррозия, дефект, несплошная трещина, центр тяжести.

**Введение.** В процессе эксплуатации различных механических систем, элементов конструкций происходят структурные изменения материала, причинами которых являются различные условия и режимы эксплуатации (вызывающие динамику напряженно-деформированного состояния рассматриваемого объекта), а также дополнительные факторы физической природы, к которым можно отнести явление коррозии.

Данное явление оказывает серьезное влияние на физико-механические свойства материалов консервативных механических систем, к которым можно отнести трубопроводные системы, особенно находящиеся под землей.

**Постановка задачи.** Для оценки технического состояния проводятся плановые и неплановые мероприятия по диагностике, по результатам которой на основании разработанных методик оценивают остаточный ресурс рассматриваемого объекта или его элемента.

При рассмотрении трубопроводных систем оценку остаточного ресурса определяют по толщине стенки, которая испытывает местные остаточные напряжения.

Оценку остаточного ресурса с учетом коррозии рекомендуется по следующей формуле [1, 2]:

$$t_0 = t^* \exp \left[ \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\sigma_a}{n} \sigma_y} \right] - t_f, \quad (1)$$

где  $t^*$  – максимальное время до разрушения ненапряженного участка трубопровода, в годах, определяемое формулой (2);  $n$  – коэффициент запаса прочности по пределу текучести;  $\sigma_y$  – предел текучести стали, МПа;  $t_f$  – фактическое время эксплуатации объекта на момент

обследования его технического состояния;  $k$  – константа рабочей среды;  $\sigma_\alpha$  – фактические действующие кольцевые напряжения с учетом потери металла по толщине стенки, МПа, рассчитываемые по формуле (3).

$$t^* = \frac{h_0}{v} \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_y} n \right), \quad (2)$$

$$\sigma_\alpha = p \frac{d - 2h_0}{2h_t}. \quad (3)$$

Здесь  $\sigma$  – действующие кольцевые напряжения на начальном этапе ввода системы в эксплуатацию, МПа, определяемые выражением (4);  $h_0, h_t$  – толщина стенки трубопровода соответственно на начальном этапе ввода в эксплуатацию и на момент диагностирования технического состояния, мм;  $d$  – наружный диаметр трубы, мм;  $p$  – внутреннее давление сплошной среды, МПа;  $v$  – скорость коррозии, мм/год.

Скорость коррозии рассчитывается по формуле (5):

$$\sigma = p \frac{d - 2h_0}{2h_0}, \quad (4)$$

$$v = \frac{h_0 - h_t}{t_f}. \quad (5)$$

Константа рабочей среды рассчитывается по формуле:

$$k = \frac{V}{RT}, \quad (6)$$

где  $V$  – мольный объем стали,  $V = 7 \text{ см}^3/\text{моль}$ ;  $R$  – универсальная постоянная сплошной среды,  $R = 8,3 \text{ Дж/моль}$ ;  $T$  – температура, принимаем  $T = 293 \text{ К}$ .

Представленная методика прочностной оценки долговечности является достоверной, однако требуется учитывать физико-механические характеристики материала в процессе эксплуатации, тем более что они существенно влияют на активность развития коррозионных процессов в металле.

**Методы исследования.** Согласно [3, 4, 5, 8], систематическое внешнее воздействие на материал конструкции приводит к накоплению повреждений на различных масштабных уровнях, в результате которых развиваются процессы разрушения структуры материала, сопровождаемые коррозионными явлениями, которые проявляются в зависимости от напряженно-деформированного состояния с различной скоростью проникновения в структуру материала.

Для учета изменения свойств материала предлагается использовать в первом приближении методы структурно-энергетической теории при обработке экспериментальных данных, представленных в статье [6]. На основании разработанного метода установлена зависимость между запасом прочности и стадией разрушения структуры материала (рис. 1).

Согласно представленным на рис. 1 графикам, между сплошной линией (связанной с относительным коэффициентом упруго-пластических энергий  $[T^*]$ ) и пунктирной (связанной с комплексным критерием  $[K^*]$ ) существует область структурного коэффициента надежности  $n^*$  (рис. 2) [6], который представляет собой поправку для коэффициента запаса прочности с учетом накопления структурных повреждений.

На рис 1–2 под индексами «1», «2», «3» и «4» представлены критические области поведения материалов. Соответственно «1» представляет собой область действия закона Гука, в дальнейшем связана с напряжением пропорциональности  $\sigma_{nc}$ . Аналогично и для последующих областей поведения материала: «2» – это поведение материала в области текучести  $\sigma_m$ ; «3» представляет область упрочнения и достижения предела выносливости материала,

характеризующуюся преобразованием микротрещин в макротрещину,  $\sigma_6$ ; «4» – зона, в которой происходит интенсивное развитие магистралей макротрещин с последующим окончательным разрушением рассматриваемого объекта,  $\sigma_p$ .

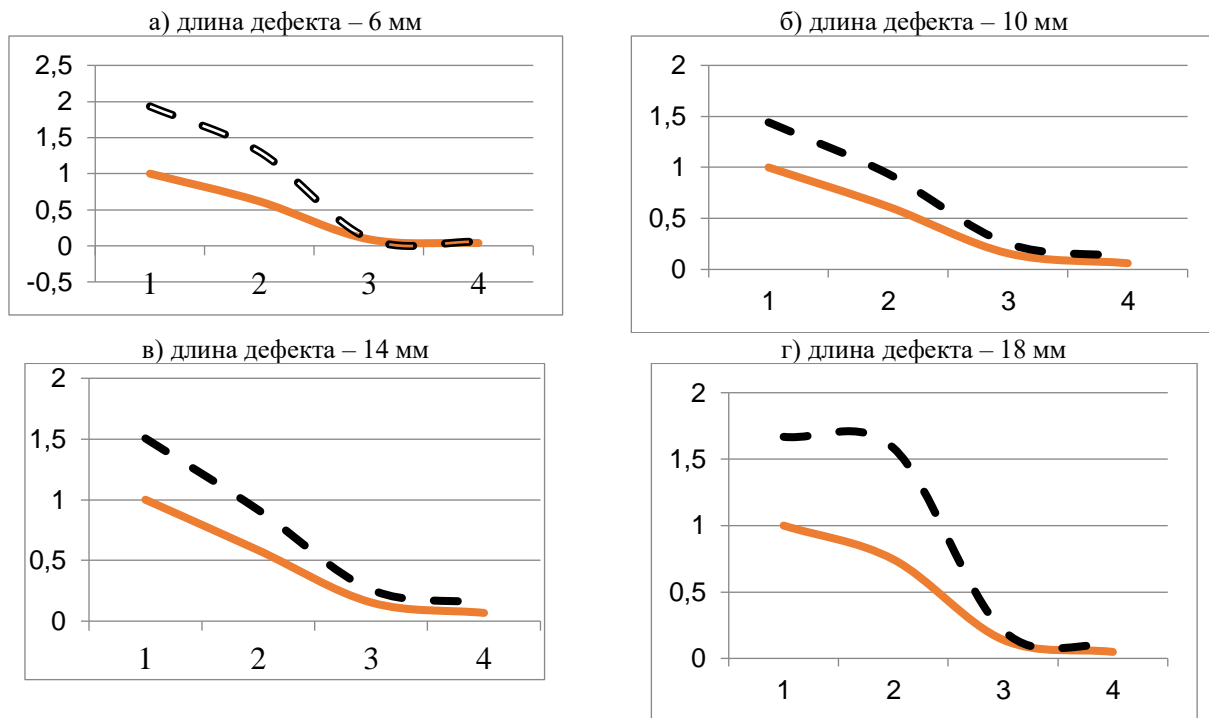


Рис. 1. Графики энергетических критериев для поперечно расположенных дефектов

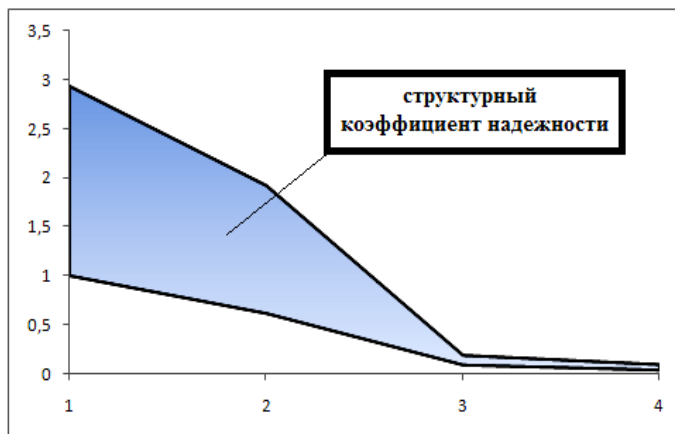


Рис. 2. Область структурного коэффициента надежности (на примере макроконцентратора с поперечным расположением длиной 6 мм)

Исходные данные из представленных схем (рис. 1) для корректировки коэффициента запаса прочности представлены в табл. 1.

Структурный коэффициент надежности определяется формулой (7):

$$n^* = \beta \cdot ([K^*] - [T^*]), \quad (7)$$

где  $\beta$  – коэффициент перехода абсолютных величин в относительные, если энергетические параметры определялись через характеристики изделий (например, по диаграмме испытаний  $P - \Delta l$ ).

Расчет коэффициента перехода абсолютных величин выполняется через соотношение объемов между образцами и изделиями стального объекта, общие данные для выполнения математических операций представлены на рис. 3.

Таблица 1

Формирование структурного коэффициента надежности  $n^*$  для изделий

Длина дефекта	Энергетический критерий	$\sigma_{nc}$	$\sigma_m$	$\sigma_v$	$\sigma_p$
6 мм	$[K^*]$	1,932	1,303	0,099	0,0563
	$[T^*]$	1	0,616	0,0905	0,039
	$[K^*] - [T^*]$	<b>0,932</b>	<b>0,687</b>	<b>0,0085</b>	<b>0,0173</b>
10 мм	$[K^*]$	1,442	0,937	0,254	0,128
	$[T^*]$	1	0,615	0,158	0,061
	$[K^*] - [T^*]$	<b>0,442</b>	<b>0,322</b>	<b>0,096</b>	<b>0,067</b>
14 мм	$[K^*]$	1,505	0,916	0,259	0,151
	$[T^*]$	1	0,584	0,154	0,068
	$[K^*] - [T^*]$	<b>0,505</b>	<b>0,332</b>	<b>0,105</b>	<b>0,083</b>
18 мм	$[K^*]$	1,668	1,584	0,210	0,096
	$[T^*]$	1	0,745	0,140	0,049
	$[K^*] - [T^*]$	<b>0,668</b>	<b>0,839</b>	<b>0,07</b>	<b>0,047</b>

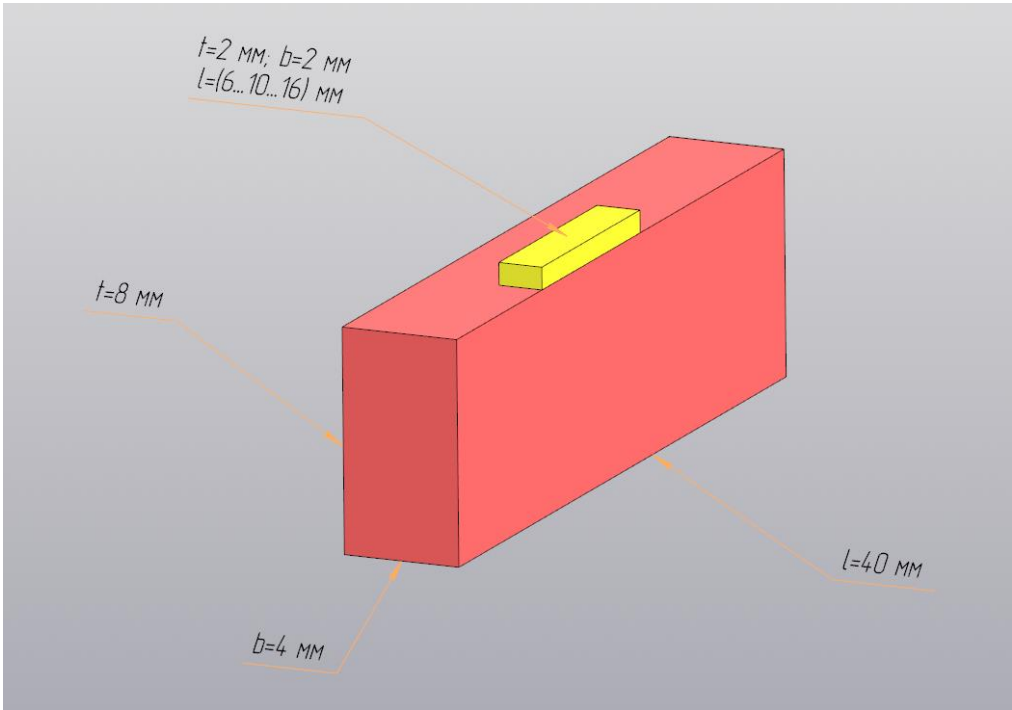


Рис. 3. Общая схема для расчета объемов

Расчет структурного коэффициента надежности для материала представлен в табл. 2 с учетом результатов, представленных в табл. 1.

Таблица 2

Расчет структурного коэффициента надежности  $n^*$  материала

Длина дефекта ( $d$ )	Объем, мм <sup>3</sup>		$\beta$ (б/а)	$n^*$ материала			
	образца 8×4×40 (V)	изделия V (2×2×d)		$\sigma_{nc}$	$\sigma_m$	$\sigma_v$	$\sigma_p$
	(а)	(б)					
6 мм	1280	1256	0,981	<b>0,914</b>	<b>0,674</b>	<b>0,0083</b>	<b>0,0170</b>
10 мм		1240	0,969	<b>0,428</b>	<b>0,312</b>	<b>0,093</b>	<b>0,065</b>
14 мм		1224	0,956	<b>0,483</b>	<b>0,317</b>	<b>0,100</b>	<b>0,079</b>
18 мм		1208	0,944	<b>0,631</b>	<b>0,792</b>	<b>0,066</b>	<b>0,044</b>

Переход от структурного коэффициента надежности  $n^*$  материала к коэффициенту запаса прочности конструкции рекомендуется выполнять по графической взаимосвязи между указанными параметрами, что представлено на рис. 4.

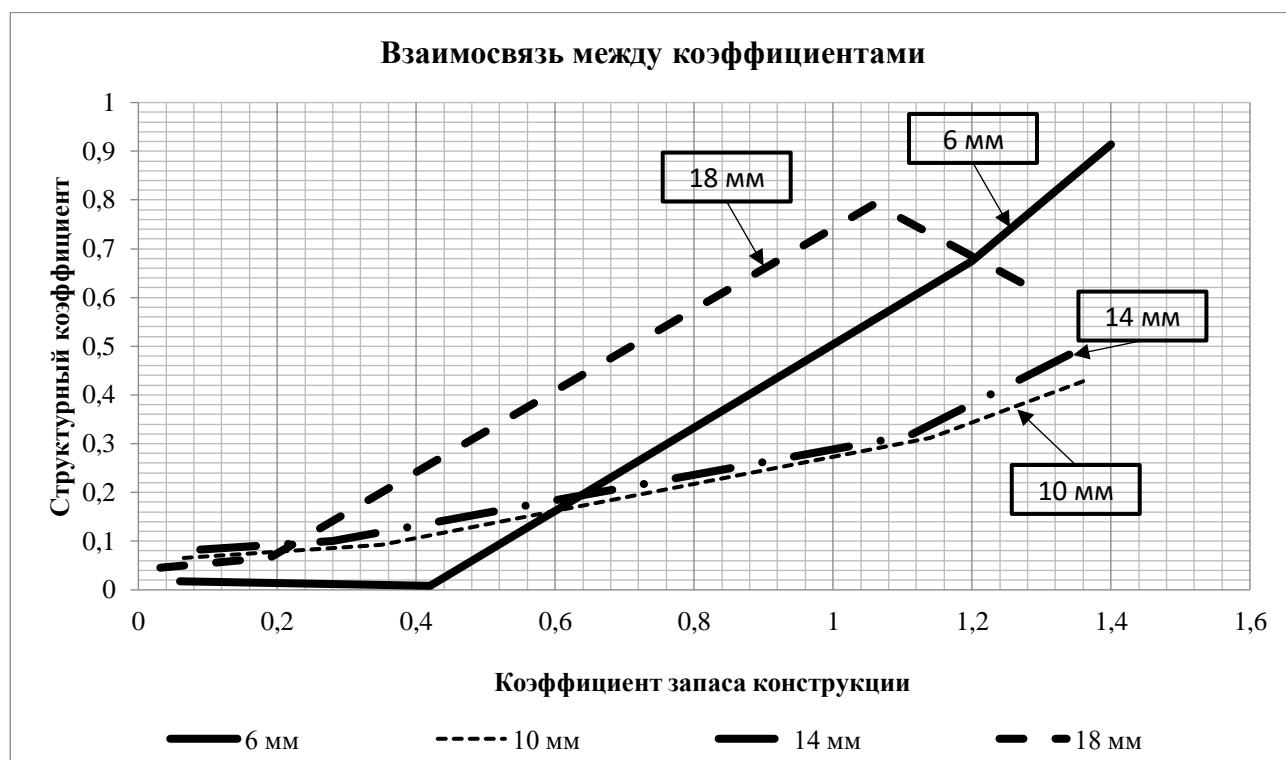


Рис. 4. Взаимосвязь между коэффициентами структурной надежности и запаса прочности конструкции

В соответствии с рис. 4 качественные структурные изменения ярко наблюдаются при 18 мм длины дефекта по испытываемому образцу; при 10 и 14 мм первоначально представлены процессы торможения развития структурных изменений; наиболее динамичным и влиятельным является достаточно незначительный дефект в 6 мм, который более ярко формирует динамику развития напряженно-деформированного состояния материала.

Последующим этапом выполняется расчет энергетического расхода ( $R_e$ ), с привязкой к инженерному коэффициенту запаса прочности ( $n_j$ ), а также производится расчет параметра структурных изменений ( $S_j$ ).

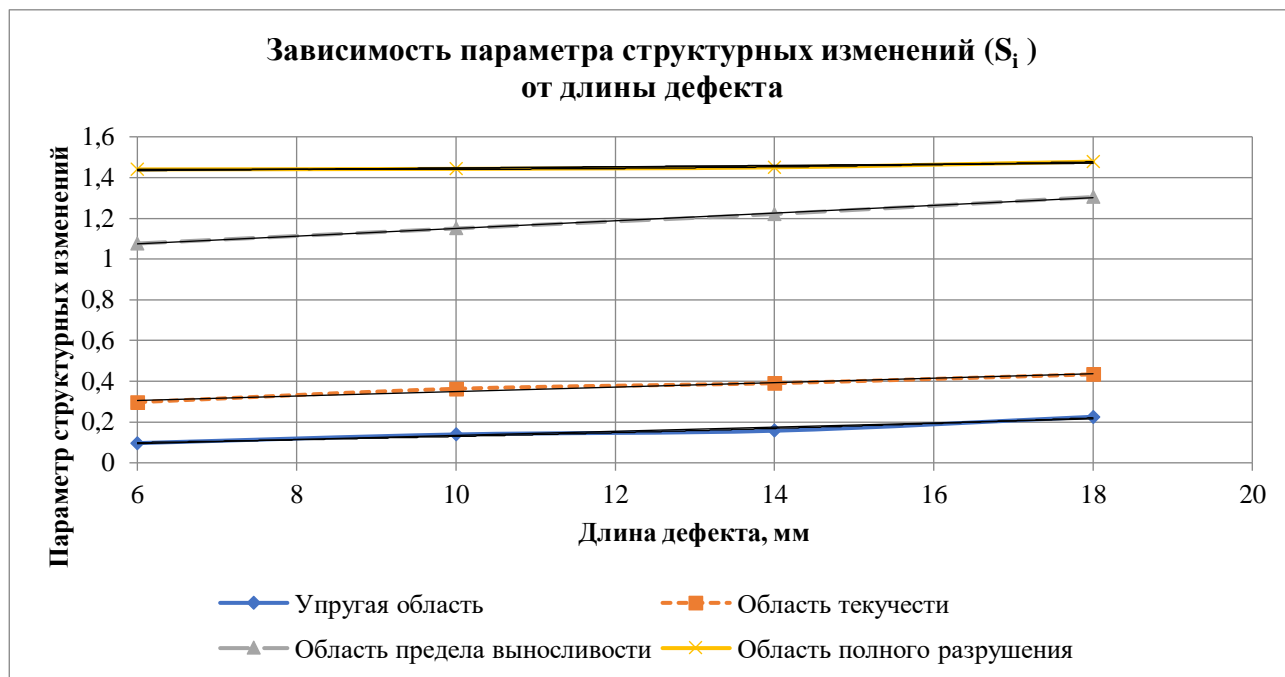
Результаты расчетов представлены на рис. 6–9.

Параметр структурных изменений можно определить по графику (рис. 5) для каждой области состояния материалов.

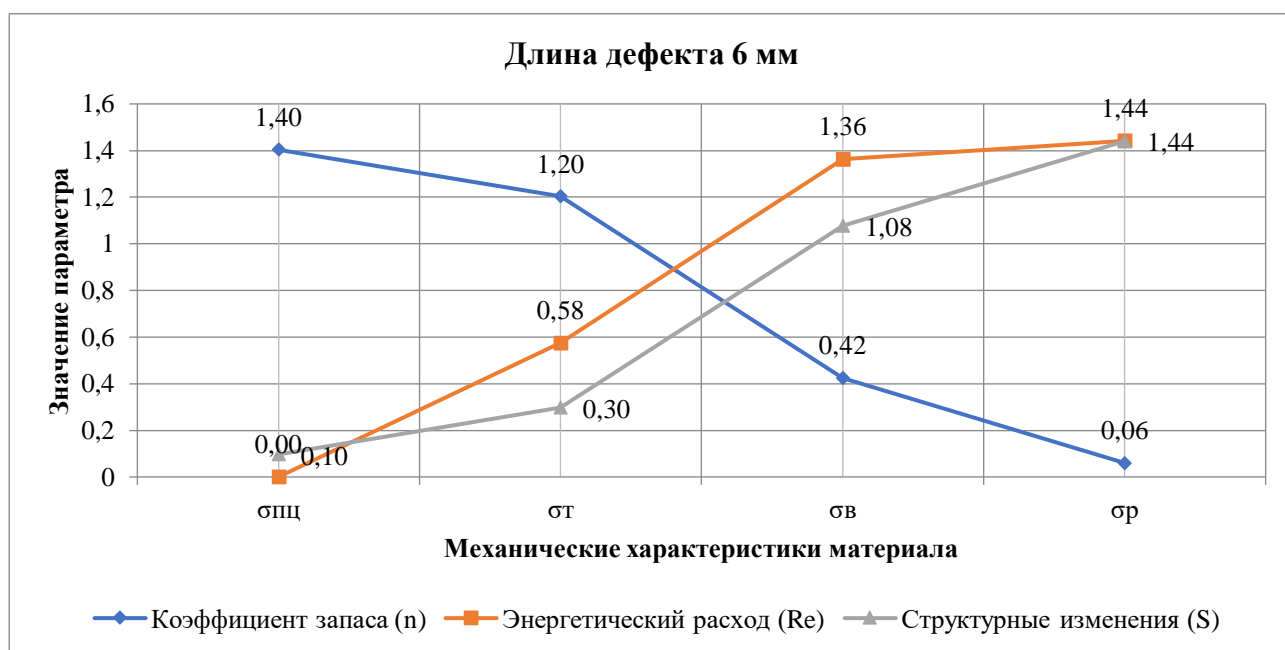
Анализируя полученные на рис. 6–9 результаты, можно отметить, что точки пересечения кривой коэффициента запаса (прочности конструкции) и кривых энергетического расхода с параметром структурных изменений устанавливают границы дальнейшей эксплуатации материалов или конструкций. На рис. 6–8 кривые энергетического расхода и параметра структурных изменений формируют своеобразный гистерезис изменения физико-механических свойств материалов.

Дальнейшее обоснование коэффициента запаса прочности конструкции будет выполняться геометрическими методами определения центра тяжести «внутренней» плоской фигуры между точками пределом пропорциональности и пределом текучести с учетом физико-механических характеристик материалов. При этом необходимо помнить, что предел текучести является параметром, при котором эксплуатация консервативных систем категорически

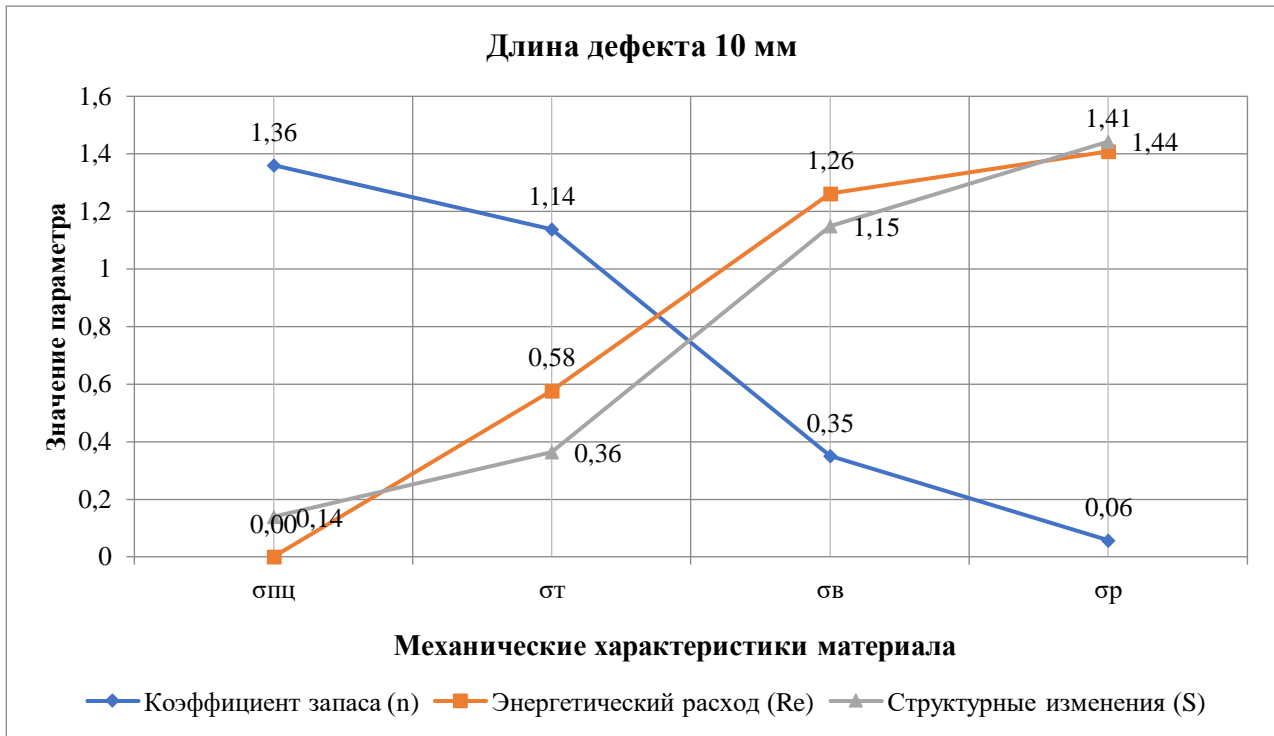
запрещена, следовательно, необходимо определить дополнительную границу предельно возможной эксплуатации. Это выполняется методом диагоналей для «внутренней» плоской фигуры между точками с указанными параметрами. В результате геометрических действий будет получена точка «У», соответствующая напряжению упругопластических деформаций, располагаемая между допусаемым пределом прочности (точкой «1») и пределом текучести. Точка «У» связана с диагональю «УА».



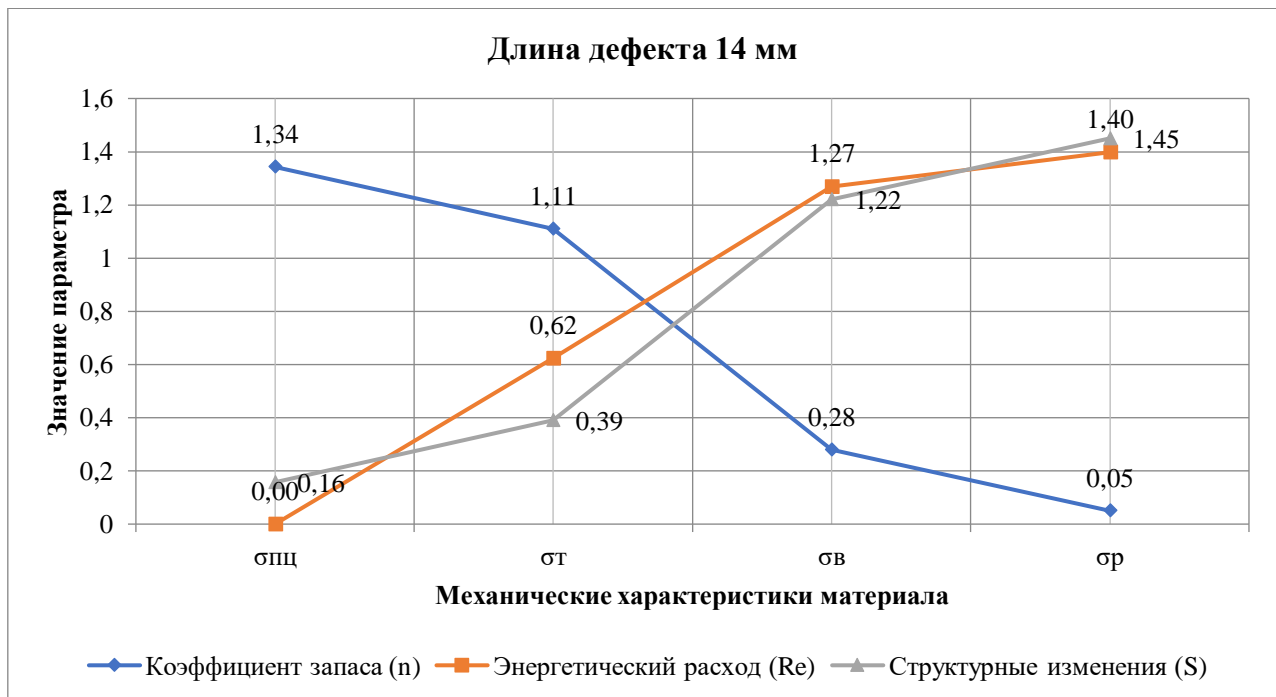
**Рис. 5.** Взаимосвязь параметра структурных изменений и дефектов с учетом состояния материала



**Рис. 6.** Результаты расчетов структурно-энергетических критериев при локальной длине дефекта в 6 мм



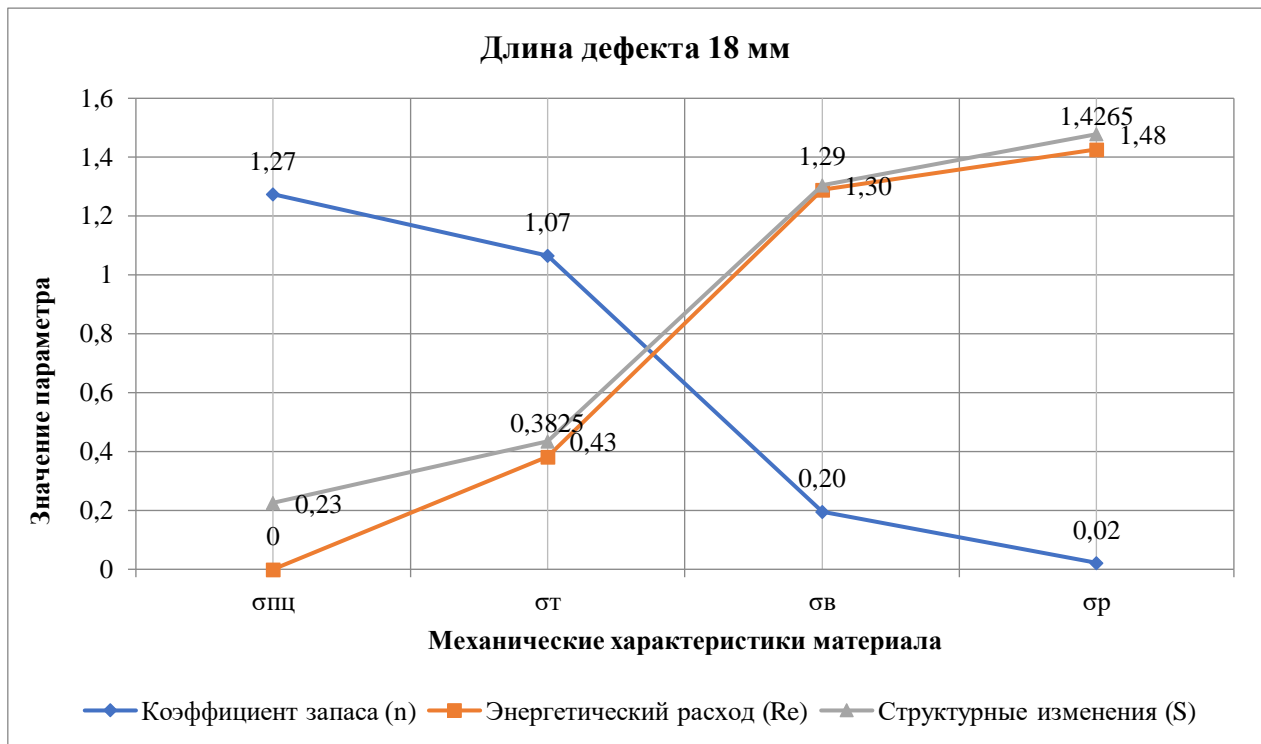
**Рис. 7.** Результаты расчетов структурно-энергетических критериев при локальной длине дефекта в 10 мм



**Рис. 8.** Результаты расчетов структурно-энергетических критериев при локальной длине дефекта в 14 мм

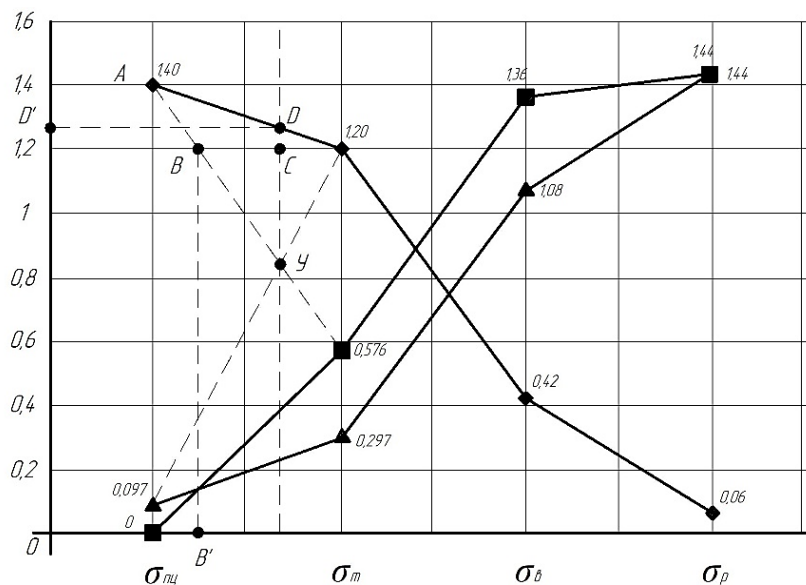
Далее влево проводится горизонт от вертикали предела текучести от кривой коэффициента запаса прочности конструкции. В результате формируются граничные точки В и С. По вертикали напряжения упругопластических деформаций при пересечении с кривой коэффициента запаса определяется точка D.

После геометрической подготовки получается фигура ABCD, внутри которой формируется коэффициент запаса прочности при фиксируемом несовершенстве материала вследствие эксплуатации объекта.



**Рис. 9.** Результаты расчетов структурно-энергетических критериев при локальной длине дефекта в 18 мм

Техника геометрической подготовки представлена на рис. 10–13.



**Рис. 10.** Геометрическая подготовка фигуры ABCD при локальной длине дефекта в 6 мм

Энергетический расход ( $R_e$ ) определялся по формуле:

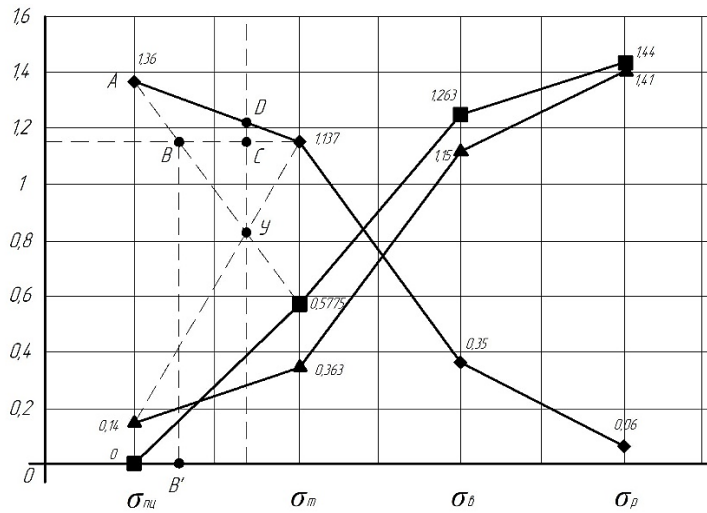
$$R_e = n_s(1 - [T^*]). \quad (8)$$

После геометрической подготовки выполняется определение центра тяжести фигуры ABCD по формуле (8) в соответствии с правилами теоретической механики [7]:

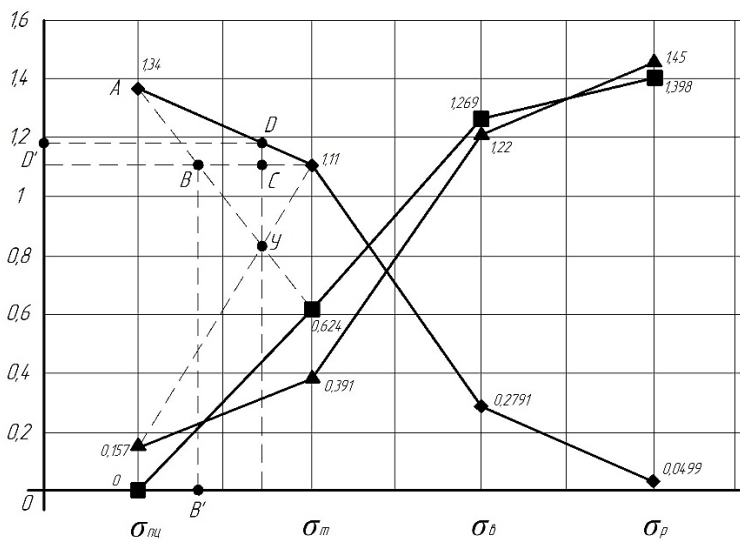
$$Y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i}. \quad (9)$$

Здесь  $A_i$  – площадь элементарной фигуры;  $y_i$  – центр тяжести элементарной фигуры.

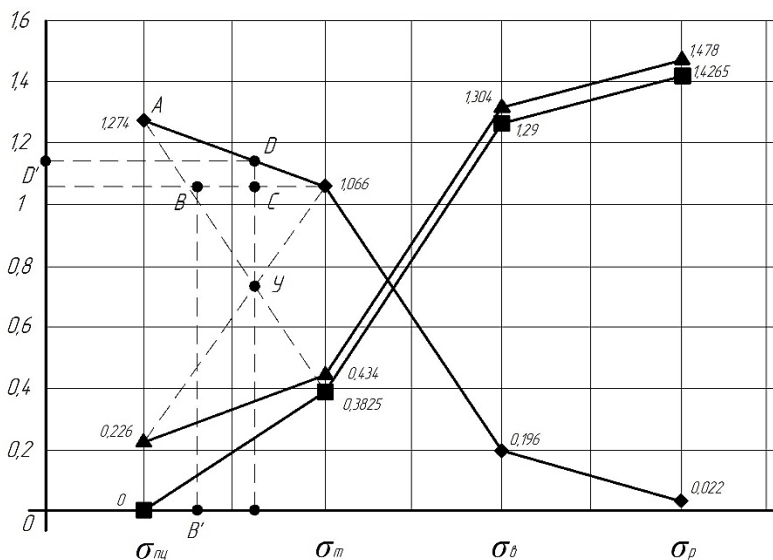




**Рис. 11.** Геометрическая подготовка фигуры ABCD при локальной длине дефекта в 10 мм



**Рис. 12.** Геометрическая подготовка фигуры ABCD при локальной длине дефекта в 14 мм



**Рис. 13.** Геометрическая подготовка фигуры ABCD при локальной длине дефекта в 18 мм

В качестве найденного центра тяжести представлен текущий коэффициент запаса прочности конструкции при наличии эксплуатационного дефекта.

Геометрическая подготовка и технический расчет центра тяжести представлены на рис. 14–15 и в табл. 3.

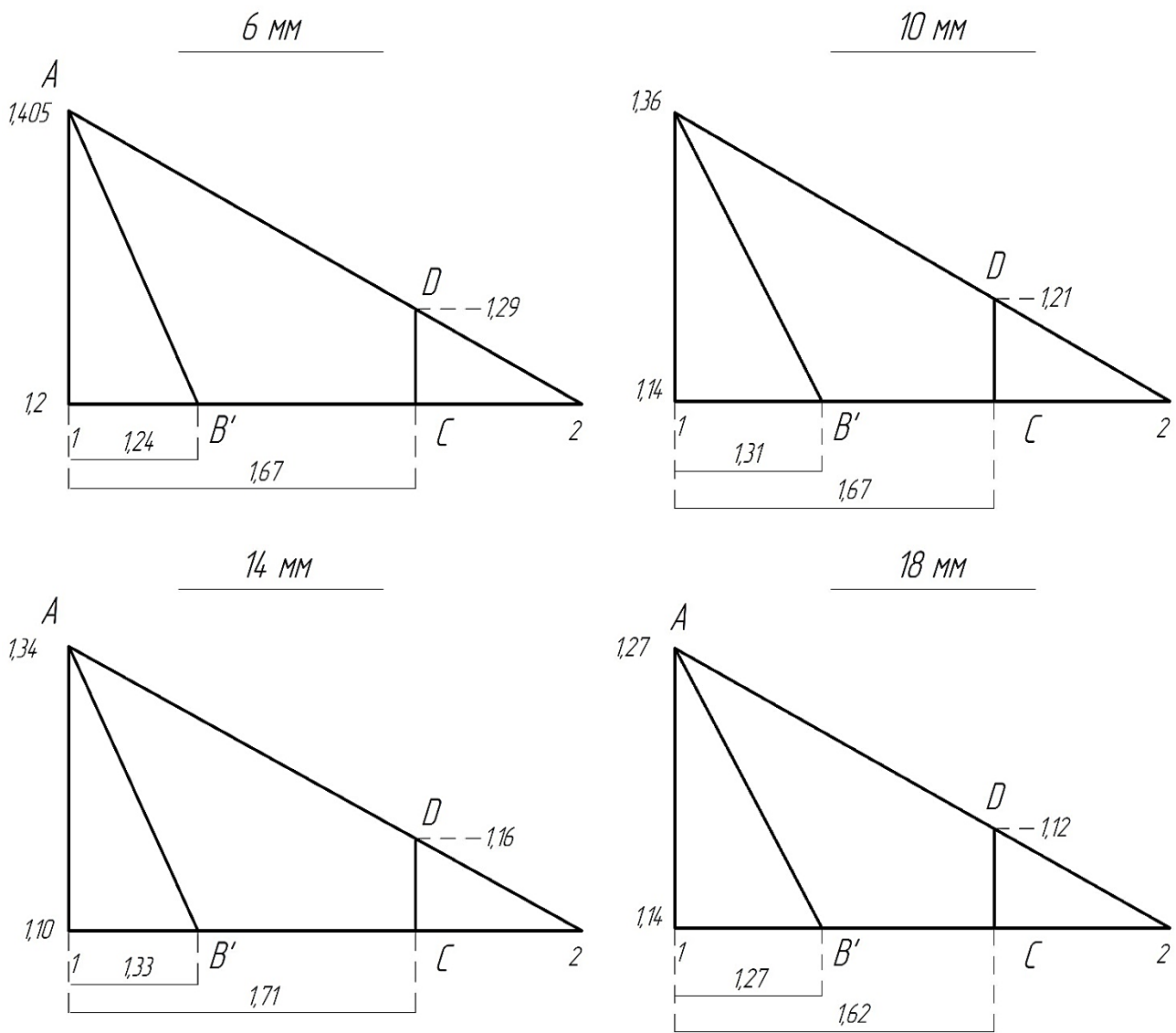


Рис. 14. Геометрическая подготовка для расчета центра тяжести

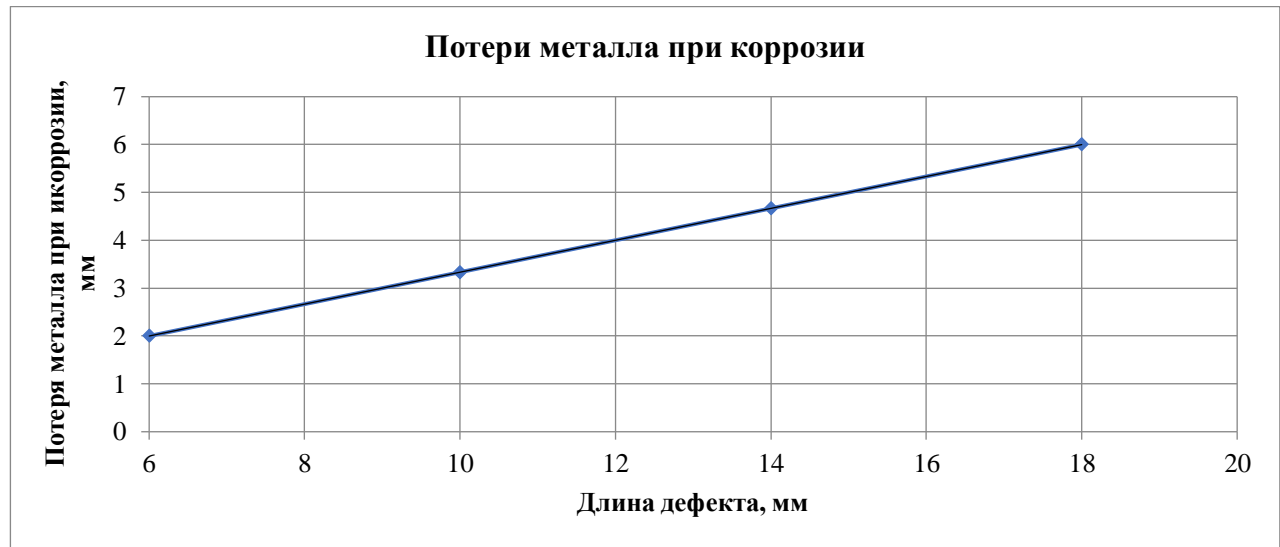


Рис. 15. Учет потери металла при коррозии

Поскольку рассматривается эксплуатационный дефект в виде коррозии, заменяемый в моделировании несплошной трещиной, необходимо это учесть при описании видов коррозионного повреждения. В данной работе предлагается рассматривать питтинговую коррозию, которую возможно при моделировании заменить несплошной трещиной. Отличительным моментом является линейная модель потери металла.

Последнее обстоятельство, связанное с уменьшением объема металла, зависит от многих внешних и внутренних факторов, к таким можно отнести режим эксплуатации, внешнее воздействие на материал, качество самого металла.

Таблица 3

Технический расчет центра тяжести

Дефект	Элементарные фигуры		$y_i$	$A_i$	$A_i y_i$	$Y_c$
6 мм	1	(A-1-2)	1,27	0,1015	0,128905	1,28
	2	(A-1-B')	1,27	-0,0244	-0,03099	
	3	(D-C-2)	1,23	-0,01485	-0,01827	
	Суммы			0,06225	0,079652	
10 мм	1	(A-1-2)	1,21	0,11	0,1331	1,22
	2	(A-1-B')	1,21	-0,0341	-0,04126	
	3	(D-C-2)	1,16	-0,01155	-0,0134	
	Суммы			0,06435	0,078441	
14 мм	1	(A-1-2)	1,18	0,12	0,1416	1,19
	2	(A-1-B')	1,18	-0,0396	-0,04673	
	3	(D-C-2)	1,12	-0,0087	-0,00974	
	Суммы			0,0717	0,085128	
18 мм	1	(A-1-2)	1,13	0,105	0,11865	1,14
	2	(A-1-B')	1,13	-0,02835	-0,03204	
	3	(D-C-2)	1,08	-0,0114	-0,01231	
	Суммы			0,06525	0,074303	

В рассматриваемой работе предлагается упрощенная линейная модель учета потери металла по толщине конструкции ( $t$ ) в зависимости от зафиксированной длины дефекта ( $l$ ), что представлено формулой [9] и рис. 15.

$$t = 0,333l. \quad (10)$$

Тогда толщина стенки в момент диагностирования определяется выражением:

$$h_t = h_0 - t. \quad (11)$$

Рассмотрим пример реализации остаточного ресурса трубопровода при следующих данных: материал – сталь 3, предел текучести  $\sigma_y = 210$  МПа, диаметр  $d = 1120$  мм, первоначальная толщина стенки  $h_0 = 12$  мм, фактический срок эксплуатации  $t_f = 30$  лет, рабочее давление при трех вариациях  $p_1 = 1,5$  МПа,  $p_2 = 2,0$  МПа,  $p_3 = 2,5$  МПа.

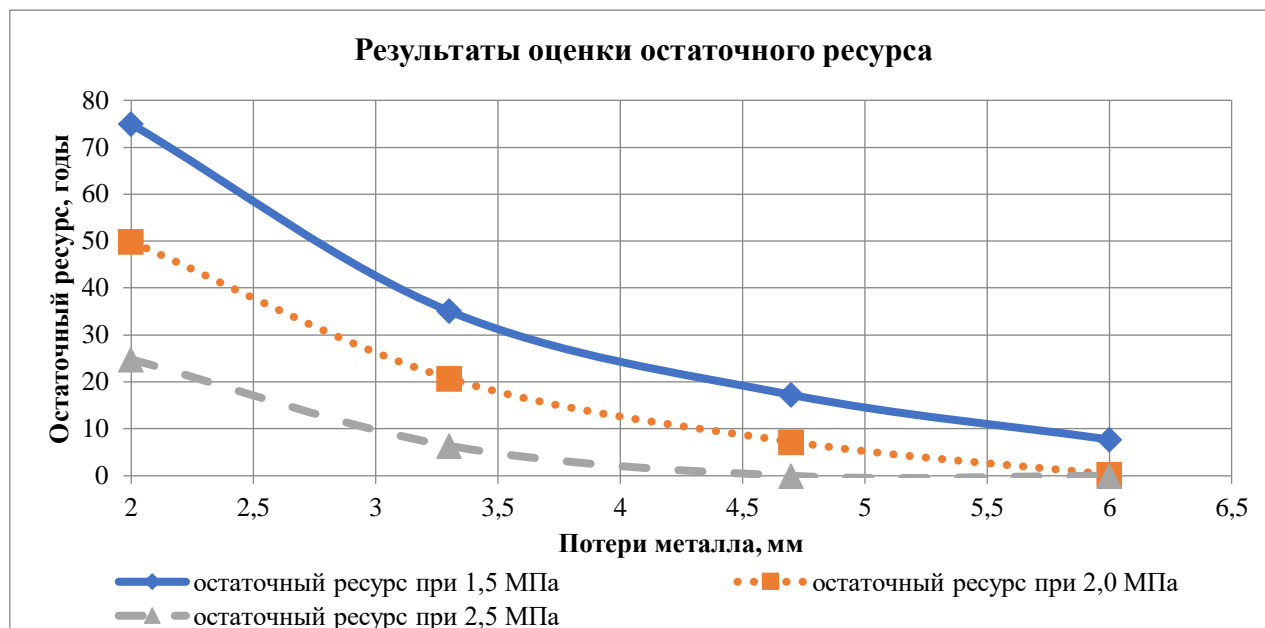
Математический расчет по формулам (1)–(11) произведен с применением пакета «Microsoft Office Excel – 2007».

Результаты расчета представлены в табл. 4 и на рис. 16.

Таблица 4

Оценка остаточного ресурса на основании структурно-энергетической теории

Номер	Давление, МПа	Длина дефекта, мм			
		6	10	14	18
		Остаточный ресурс, лет			
1	1,5	74,95	35,09	17,25	7,73
2	2,0	49,87	20,75	7,25	0,28
3	2,5	24,80	6,40	0	0
Коэффициент запаса прочности, $n$		1,28	1,22	1,19	1,14



**Рис. 16.** Результаты оценки остаточного ресурса при замене коррозии локальным дефектом в виде не сплошной трещины методами структурно-энергетической теории

**Выводы.** В результате моделирования эксплуатационного дефекта коррозии в виде несплошной трещины получена достаточная гибкая методика оценки остаточного ресурса, учитывающая изменчивость структуры материала, а также режим эксплуатации.

Также по результатам научных изысканий установлено, что снижение рабочего давления в трубопроводе для материала с коррозионным повреждением позволяет на определенном уровне поддерживать работоспособное состояние. В качестве примера представлены различные режимы эксплуатации по рабочему давлению, и в зависимости от потери металла для одного срока эксплуатации установлена живучесть конструкции. Так, при 2 и 2,5 МПа эксплуатация рассматриваемого объекта не предоставляется возможной. Следовательно, требуются ремонтные работы по замене критического участка трубопровода.

#### Библиографический список

1. Инструкция по диагностированию технического состояния подземных стальных газопроводов. Госгортехнадзор России. РД 12-411-01. СПб.: ДЕАН, 2002. 96 с.
2. Кучерявый В. И., Мильков С. Н. Статистическое моделирование остаточного ресурса газопроводов при сплошной коррозии // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. № 3. С. 105–109.
3. Проблемы старения сталей магистральных трубопроводов: сб. тр. науч.-практ. семинара / Под общ. ред. Б. В. Будзуляка и А. Д. Седых. Н. Новгород: Университетская книга, 2006. 220 с.
4. Малинин В. Г., Лихачев В. А. Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993.
5. Завойчинская Э. Б. Усталостное масштабное-структурное разрушение и долговечность конструкций при пропорциональных процессах нагружения: дис. ... д-ра техн. наук. М., 2018. 303 с.
6. Савич В. Л., Малинин В. Г., Отев К. С. Энергетический метод к прочностной оценке ресурса трубопровода при наличии макродефекта // Строительная механика и конструкции. 2023. № 1 (36). С. 42–54.

7. Старжинский В. М. Теоретическая механика. Краткий курс по полной программе втузов: учеб. М.: Наука; ГРФМЛ, 1980. 464 с.
8. Фридман Я. Б. Механические свойства металлов. М.: Оборонгиз, 1946.

## References

1. Instructions for Diagnostics of the Technical Condition of Underground Steel Gas Pipelines. Gosgortekhnadzor of Russia. RD 12-411-01. St. Petersburg: DEAN, 2002. 96 p.
2. Kucheryavy V. I., Milkov S. N. Statistical modeling of the residual life of gas pipelines with continuous corrosion. Problems of Mechanical Engineering and Machine Reliability. No. 3. 2006. Pp. 105–109.
3. Budzulyak B. V., Sedykh A. D. Problems of Aging of Steels in Main Pipelines: Collection of Papers from a Scientific and Practical Seminar. Nizhny Novgorod: University Book, 2006. 220 p.
4. Malinin V. G., Likhachev V. A. Structural-Analytical Theory of Strength. St. Petersburg: Nauka, 1993.
5. Zavoichinskaya E. B. Fatigue scale-structural failure and durability of structures under proportional loading processes: dis. ... Doctor of Engineering Sciences. Moscow, 2018. 303 p.
6. Savich V. L., Malinin V. G., Otev K. S. Energy method for strength assessment of a pipeline resource in the presence of a microdefect. Structural Mechanics and Constructions. No. 1(36). 2023. Pp. 42–54.
7. Starzhinsky V. M. Theoretical Mechanics. A Short Course on the Full Program of Higher Education Institutions: textbook. Moscow: Nauka; State University of Physical Culture and Mathematics, 1980. 464 p.
8. Fridman Ya. B. Mechanical Properties of Metals. Moscow: Oborongiz, 1946.

## STRENGTH ASSESSMENT OF THE RESIDUAL LIFE OF CONSERVATIVE SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT CORROSION

V. L. Savich<sup>1</sup>, L. V. Yashin<sup>2</sup>, M. N. Gabova<sup>3</sup>, V. A. Hlamov<sup>4</sup>

Ukhta State Technical University<sup>1, 2, 3, 4</sup>  
Russia, Ukhta

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanics, tel.: +7(922)596-81-01, e-mail: vsavich@ugtu.net

<sup>2</sup> Postgraduate Student of the Department of Mechanics, tel.: +7(922)081-91-82, e-mail: leonid.yaschin@mail.ru

<sup>3</sup> Assistant Professor of the Department of Physics and Higher Mathematics, Postgraduate Student of the Department of Mechanics, tel.: +7(904)226-74-38, e-mail: mgabova@ugtu.net

<sup>4</sup> Assistant of the Department of Mechanics, Postgraduate Student of the Department of Mechanics, tel.: +7(911)652-91-87, e-mail: vhlamov@ugtu.net

During operation of various mechanical systems and structural elements, structural changes in the material occur, the causes of which are various operating conditions and modes that cause the dynamics of the stress-strain state of the object under consideration, as well as additional factors of a physical nature, which include the phenomenon of corrosion. The article proposes a method for determining the residual life of a conservative mechanical system in the form of a pipeline, which is based on energy criteria for the behavior of materials in a stress-strain state, as well as a geometric technique for determining the current safety factor of a structure in the presence of an operational defect using the concept of the center of gravity of a flat figure.

**Keywords:** residual life, safety factor, structural-energy theory, stress, corrosion, defect, non-continuous crack, center of gravity.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.073.5

DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.008

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЬНЫХ ГНУТЫХ ПРОФИЛЕЙ С ТРАПЕЦИЕВИДНЫМИ ГОФРАМИ

В. В. Зверев<sup>1</sup>, В. И. Римшин<sup>2</sup>, С. М. Анпилов<sup>3</sup>, К. Е. Жидков<sup>4</sup>, А. Ж. Маркович<sup>5</sup>Липецкий государственный технический университет<sup>1, 4, 5</sup>

Россия, г. Липецк

Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН<sup>2</sup>

Россия, г. Москва

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин)<sup>3</sup>

Россия, г. Новосибирск

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, чл.-кор. РААСН, проф., зав. кафедрой металлических конструкций, тел.: +7(4742)32-80-79, e-mail: kaf-mk@bk.ru

<sup>2</sup> Д-р техн. наук, чл.-кор. РААСН, проф., зав. лабораторией мониторинга жилищно-коммунального хозяйства и радиационной безопасности в строительстве, e-mail: v.rimshin@niisf.ru

<sup>3</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры железобетонных конструкций, тел.: +7(987)974-85-55, e-mail: anpilovsm@yandex.ru

<sup>4</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических конструкций, тел.: +7(4742)32-80-79, e-mail: kaf-mk@bk.ru

<sup>5</sup> Ассистент кафедры металлических конструкций, тел.: +7(4742)32-80-79, e-mail: kaf-mk@bk.ru

Приведены результаты натурных испытаний стального настила из гнутых профилей с трапециевидными гофрами. Определены геометрические параметры испытанных профилей, схемы загрузки и расстановки приборов. Получены результаты экспериментальных исследований при загрузении равномерно распределенной нагрузкой. Определен характер деформирования и разрушения конструкций. Проанализировано напряженно-деформированное состояние на различных этапах испытания. На основании результатов проведенных исследований выполнено сравнение экспериментальных данных с теоретическими значениями.

**Ключевые слова:** тонколистовой прокат, гнутые профили с трапециевидными гофрами, натурные испытания, экспериментальные исследования, напряженно-деформированное состояние.

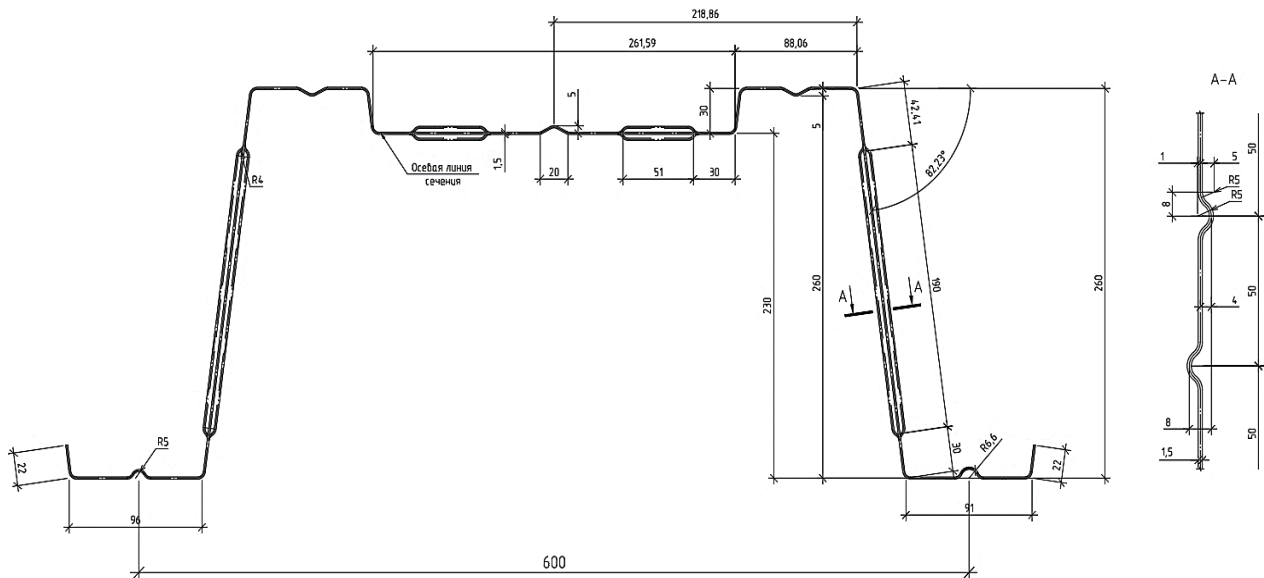
**Введение.** В повышении экономической эффективности строительства заметную роль играет широкое применение стального профилированного листа. Современные технологии холодного профилирования позволяют изготовить элементы наиболее эффективного поперечного сечения.

В настоящее время отмечается два направления применения профлиста: в качестве самостоятельного несущего или ограждающего элемента [1...3] и в качестве несъемной опалубки для монолитных железобетонных конструкций [4...7]. Железобетонные конструкции с несъемной опалубкой позволяют значительно ускорить процесс строительства, уменьшить стоимость, увеличить несущую способность конструкции.

Расчет тонколистовых конструкций в настоящее время нормирован СП 260.1325800.2023. Кроме того, большое количество современных программных комплексов позволяет получить

достаточно достоверные данные о напряженно-деформированном состоянии конструкции [8...15]. Однако наиболее эффективным способом подтверждения теоретических предпосылок расчета для тонколистовых конструкций в связи со сложным напряженным состоянием, характеризующимся потерей местной устойчивости с последующим перераспределением нагрузки, являются экспериментальные исследования [1...3, 16...19].

**Материалы и методы исследования.** Для получения эффективного конструктивного элемента, обладающего широкой областью применения, разработан линейный U-образный профиль [4...6, 20] высотой 260 мм, шириной 600 мм (по нижним полкам) из заготовки шириной 1250 мм (рис. 1). Для повышения несущей способности при смятии в опорных зонах установлены поперечные ребра жесткости.



**Рис. 1.** Линейный  $\mathcal{U}$ -образный элемент

Целью данного экспериментального исследования является подтверждение теоретических предпосылок расчета по первой и второй группам предельных состояний стальных гнутых профилей с трапециевидными гофрами.

Конструкция для проведения испытаний представляет собой фрагмент настила, состоящий из двух стальных гнутых профилей с трапециевидными гофрами (рис. 2). Профили соединены между собой по нижним полкам вдоль пролета самонарезающими самосверляющими винтами. В середине пролета и над опорами между стенками установлены ребра жесткости выше уровня нижних полок (рис. 3), крепление также осуществляется винтами. Все тонколистовые конструкции и элементы изготовлены из листового горячеоцинкованного проката по ГОСТ [21], толщина трапециевидных профилей составляет 1,5 мм, ребер жесткости – 1,2 мм (рис. 4). По результатам испытаний образцов по ГОСТ [22], отобранных из наименее нагруженной части (приопорной нижней полки) U-образного профиля, принят предел текучести – 308 МПа.

В соответствии с ГОСТ [23] испытания профиля / настила по однопролётной схеме выполняются как для балки, свободно опирающейся на подвижную и неподвижную опоры через деревянные бруски на всю контролируемую ширину опирания. Поскольку данный профиль может применяться для внешнего армирования и несъемной опалубки, для монолитной железобетонной плиты принято опирание по ГОСТ [24], т. е. непосредственно на стальную пластину без промежуточных деревянных элементов (рис 5). Такое решение опирания сопоставимо с реальными условиями эксплуатации композитной конструкции и требованиями к испытаниям железобетонных плит [24].



Вертикальные перемещения конструкции измерялись с помощью прогибомеров ПАО-6 с ценой деления 0,01 мм. Схема расстановки измерительных приборов приведена на рис. 6.



**Рис. 2.** Общий вид образца для испытаний



**Рис. 3.** Схема установки ребер жесткости над опорой





Рис. 4. Контрольные замеры толщин конструкции и элементов



Рис. 5. Опираение профилированного листа на шарнирно-подвижную опору стенда

Напряжения в элементах конструкции регистрировались с помощью многоканальной тензостанции для статического тензометрирования МС-185. Схема расстановки тензодатчиков представлена на рис. 7.

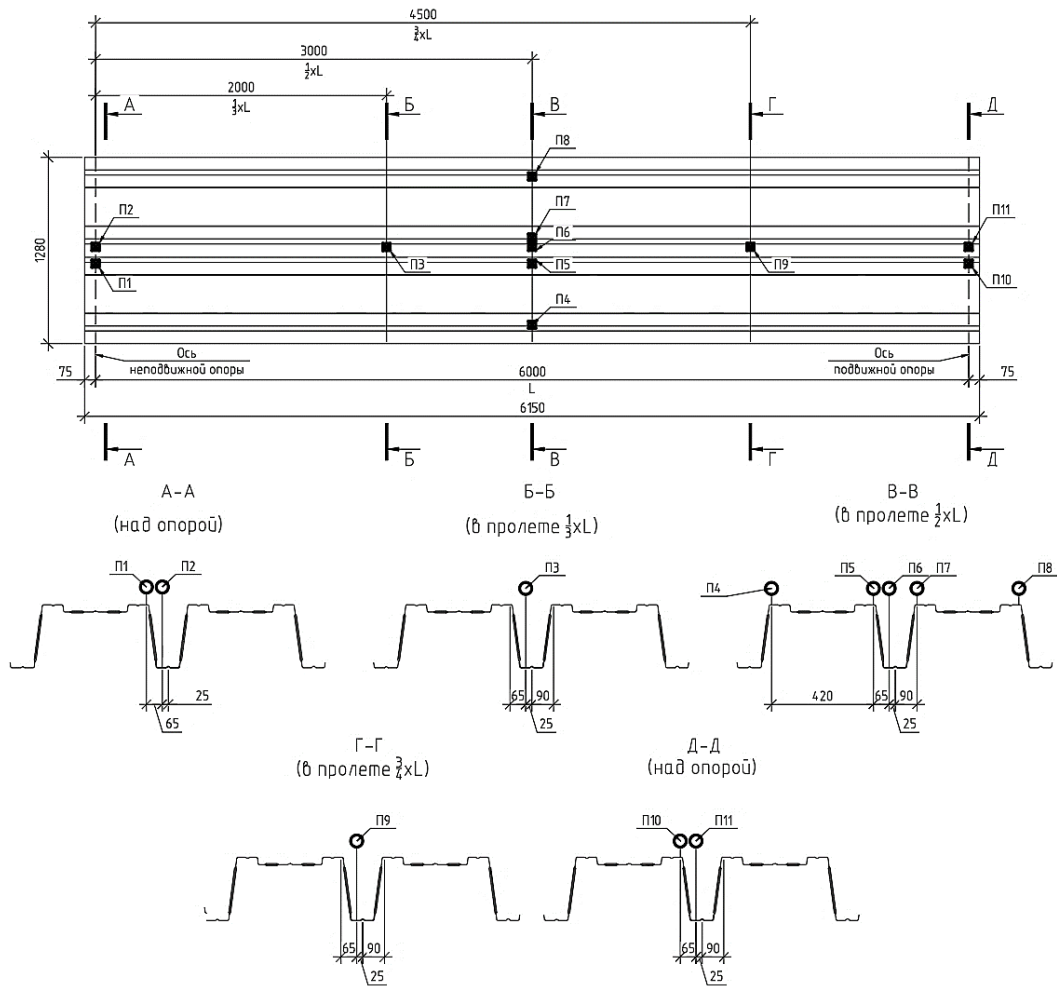


Рис. 6. Схема расстановки прогибомеров ПАО-6

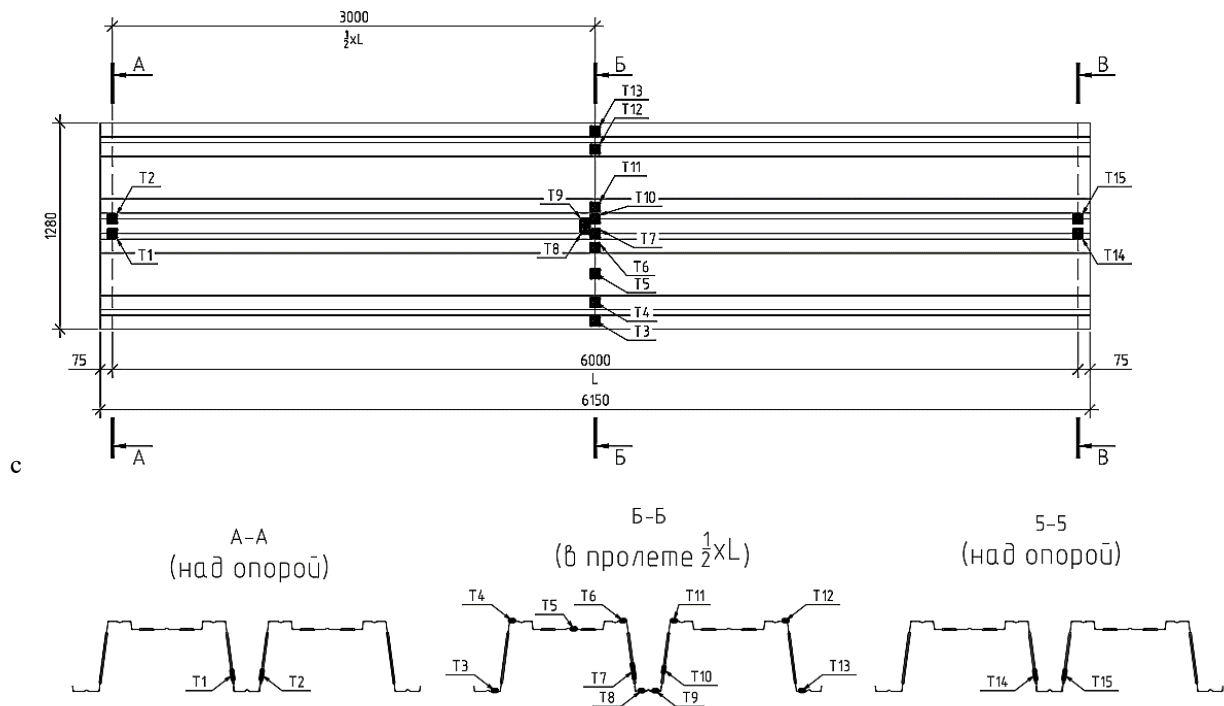


Рис. 7. Схема расстановки тензодатчиков



Нагружение настила производилось от опор к середине пролета с помощью тротуарных плиток размером  $60 \times 300 \times 6000$  мм с усредненным весом  $27,4$  кг (по результатам контрольных взвешиваний).

Нагружение выполнялось в два этапа – предварительный и основной. Предварительное нагружение конструкций выполнено для проверки корректной работы установленных приборов, выявления несовершенств и обмятия соединений. Пробная нагрузка составляла  $91,33$  кг/м<sup>2</sup> с последующей разгрузкой. По результатам пробного нагружения и последующей разгрузки дефектов и повреждений, снижающих несущую способность исследуемых элементов, не выявлено.

Основное нагружение производилось ступенями величиной  $10 \dots 20$  % от теоретической разрушающей нагрузки с выдержкой не менее  $15$  мин или до полной стабилизации показаний приборов.

За счет наличия поперечных ребер жесткости (см. рис. 2, 3) смятие в приопорной зоне не зафиксировано.

**Результаты исследования.** При нагружении от  $685$  до  $730$  кг/м<sup>2</sup> в пониженном участке верхней полки отмечается местная потеря устойчивости (рис. 9). Исследуемая конструкция относится к 4-му классу напряженно-деформированного состояния, при котором потеря местной устойчивости наступает до достижения предела текучести в одной или более зонах поперечного сечения.



Рис. 9. Потеря местной устойчивости в пониженном участке верхней полки

Теоретическая потеря несущей способности исследуемой конструкции с учетом редуцирования сечения по СП [25] наступает при нагрузке  $1288$  кг/м<sup>2</sup>. По результатам экспериментальных исследований установлено, что пониженный участок верхней полки теряет местную устойчивость. При учете выключения из работы пониженного участка верхней полки теоретическая потеря несущей способности ожидается при нагрузке  $1154,5$  кг/м<sup>2</sup>.

Фактическая потеря несущей способности произошла в виде смятия и коробление по-лок (см. п 5.2.3 СП 260.1325800.2023) (рис. 10, 11) при нагрузке  $1224,17 \text{ кг/м}^2$ . Фактическая (экспериментальная) несущая способность исследуемого настила при нагружении равномерно распределенной нагрузкой на 5,7 % выше теоретического значения.



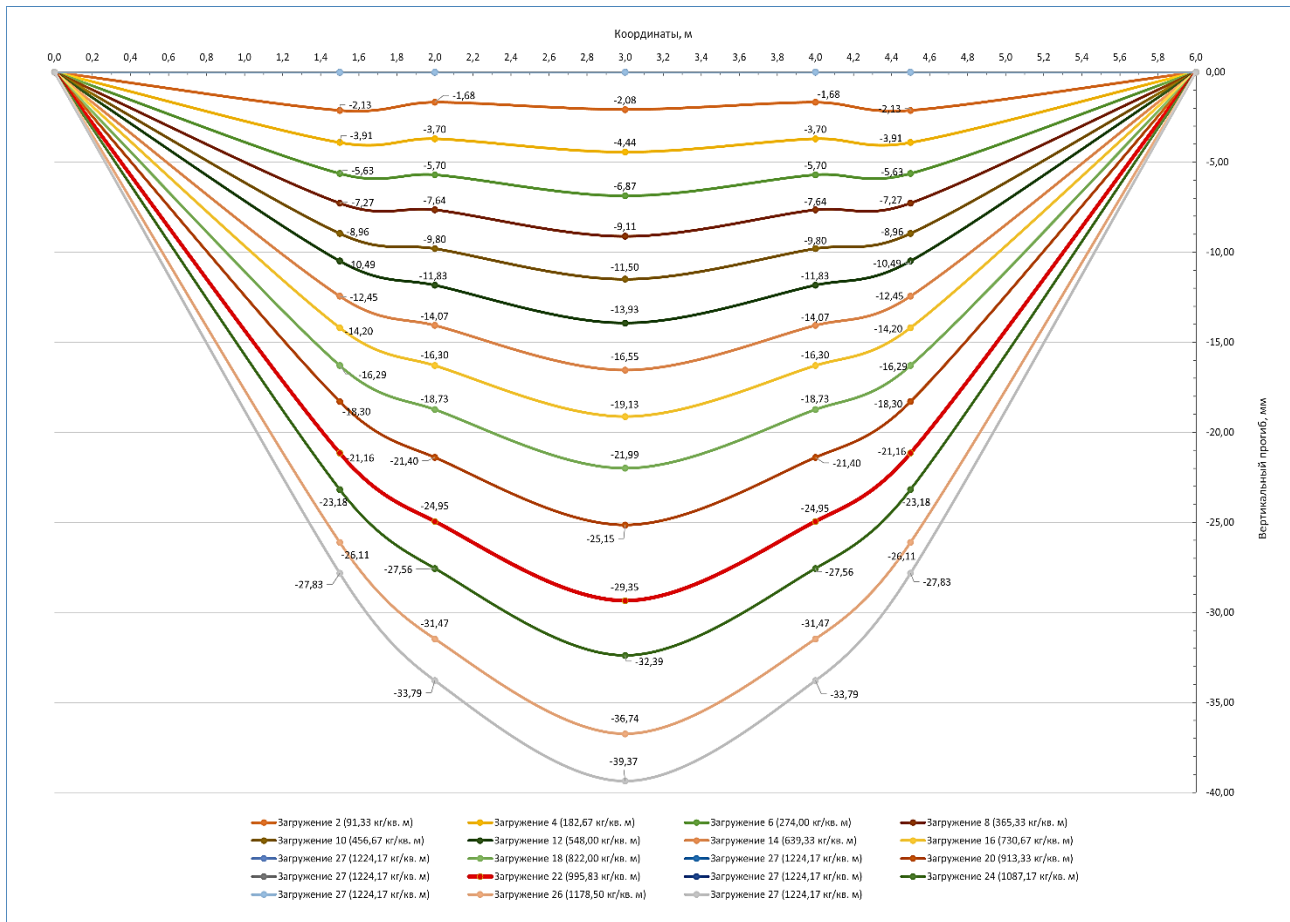
**Рис. 10.** Общий вид конструкции после потери несущей способности (до разгрузки)



**Рис. 11.** Общий вид конструкции после разгрузки

На всех этапах нагружения деформации и напряжения нарастали равномерно.

Экспериментальная нагрузка, при которой достигнуты перемещения 29,35 мм (близко к вертикальному предельному прогибу), составила  $995,83 \text{ кг/м}^2$ . График вертикальных прогибов  $\Omega$ -образного профиля представлен на рис. 12.

Рис. 12. График вертикальных прогибов  $\Omega$ -образного профиля

### Выводы

1. Теоретическая нагрузка, при которой достигается вертикальный предельный прогиб  $f_{\text{теор}} = (1/200)L = 30$  мм, составляет  $q = 839$  кг/м<sup>2</sup>.
2. Фактический вертикальный прогиб при нагрузке  $q = 822,00$  кг/м<sup>2</sup> составил  $f_{\text{эксп}} = 21,99$  мм, при нагрузке  $q = 867,67$  кг/м<sup>2</sup> составил  $f_{\text{эксп}} = 23,53$  мм. Интерполяцией определено, что при нагрузке  $q = 839$  кг/м<sup>2</sup> прогиб составляет  $f_{\text{эксп}} = 22,6$  мм.
3. Вертикальный прогиб 29,35 мм (ближайший к предельному значению 30 мм [26]) при испытаниях зафиксирован при нагрузке  $q = 995,83$  кг/м<sup>2</sup>.
4. Фактический (экспериментальный) прогиб исследуемого профиля при нагрузке  $q = 839$  кг/м<sup>2</sup> ниже теоретического значения на 32,7 %.
5. При загрузке от 685 до 730 кг/м<sup>2</sup> произошла потеря местной устойчивости пониженной части верхней широкой полки профиля. Выключение части сечения не приводит к разрушению конструкции за счет перераспределения напряжений. При дальнейшем нагружении экспериментальные исследования проводились в закритической стадии работы профиля.
6. Потеря несущей способности профиля произошла в виде смятия и коробления полок при нагрузке 1224,17 кг/м<sup>2</sup>.
7. Теоретическая потеря несущей способности исследуемой конструкции по СП [25] наступает при нагрузке 1288 кг/м<sup>2</sup>. При учете редуцирования сечения с учетом местной потери устойчивости широкой части верхней полки профиля истощение несущей способности происходит при нагрузке 1154,5 кг/м<sup>2</sup>.
8. Фактическая (экспериментальная) несущая способность исследуемого профиля при нагружении равномерно распределенной нагрузкой на 5,7 % выше теоретического значения.



**Сведения о финансировании.** Исследование выполнено при поддержке гранта Научно-исследовательского института строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук: 3.1.1.1 Несущая способность сталежелезобетонных конструкций с несъемной опалубкой из настила силового  $\bar{\text{U}}$ -образного сечения, сталежелезобетонные конструкции, настил силовой.

#### Библиографический список

1. Ведяков И. И., Арменский М. Ю., Соловьев Д. В. Теоретические и экспериментальные исследования новых марок профилированного настила // Строительная механика и расчет сооружений. 2007. № 2 (211). С. 72–74.
2. Семенов А. С., Зверев В. В., Попоудин Д. П., Бобровских Д. А. Экспериментальные исследования работы профилированных листов пролетом 6 м по однопролетной и двухпролетной схемам // Строительная механика и конструкции. 2024. № 2 (41). С. 98–105.
3. Кулешов В. В., Капырин Н. В., Попоудин Д. П. Натурные испытания стального профилированного настила, работающего по двухпролетной схеме, с усиленной опорной зоной на средней опоре // Вестник науки. 2023. № 6 (63). С. 481–488.
4. Пат. № 2811556 Российская Федерация, МПК У04В 5/36. Строительный элемент: № 2023120363: заявл. 02.08.2023; опубл. 15.01.2024 / 21. Анпилов С. М., Бондарь В. В., Леонович С. Н., Павлик А. В., Панфилов Д. А., Римшин В. И., Сорочайкин А. Н., Сколубович Ю. Л. 18 с.
5. Анпилов С. М., Зайченко Н. М., Маилян Л. Р. Инновационные технологии для быстровозводимых объектов массового строительства // Инженерная экономика: материалы междунар. науч.-техн. конф., Минск, 27–28 ноября 2024 г. Минск: Белорусский национальный технический университет, 2024. С. 610–629.
6. Анпилов С. М., Ерофеев В. Т., Римшин В. И., Сколубович Ю. Л., Сорочайкин А. Н. Опыт практической реализации инновационных строительных материалов и изделий // Строительные материалы. 2024. № 8. С. 31–39.
7. Сколубович Ю. Л., Анпилов С. М., Добровольский Д. А., Ерофеев В. Т., Леонович С. Н., Маилян Л. Р., Римшин В. И., Сорочайкин А. Н. Способы продления жизненного цикла зданий с деревянными перекрытиями // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2024. № 9 (789). С. 88–103.
8. Ведяков И. И., Соловьев Д. В., Коваленко А. И. Расчет тонколистовых профилированных секций с двойным гофрированием на сжатие с изгибом // Вестник НИЦ Строительство. 2019. № 2 (21). С. 5–14.
9. Ведяков И. И., Соловьев Д. В., Коваленко А. И. Расчет тонколистовых профилированных секций с двойным гофрированием на сжатие с изгибом // Вестник НИЦ Строительство. 2019. № 2 (21). С. 5–14.
10. Арменский М. Ю. Опыт использования численных методов в исследованиях геометрических характеристик тонкостенных профилей // Промышленное и гражданское строительство. 2009. № 6. С. 23–26.
11. Подзоров А. В., Зверев В. В., Тезиков Н. Ю. и др. Редуцирование площади поперечного сечения тонкостенного стального профиля при центральном сжатии // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 6 (263). С. 24–28.
12. Подзоров А. В., Зверев В. В., Тезиков Н. Ю. и др. Имитационное моделирование напряженно-деформированного состояния тонколистового профилированного элемента с двойным гофрированием // Наука и бизнес: пути развития. 2015. № 5 (47). С. 103–105.
13. Зверев В. В., Карманов И. В., Голев Р. В. К вопросу трехмерного и четырехмерного моделирования стального бескаркасного арочного здания // Applied and Fundamental Studies. Proceedings of the 13th International Academic Conference. – Saint-Louis: Publishing House Science and Innovation Center, Ltd. (Saint-Louis), 2017. С. 84–90.

14. Римшин В. И., Анпилов С. М., Рощина С. И., Усанов С. В. Практические подходы к устранению коллизий в информационных моделях зданий // Эксперт: теория и практика. 2024. № 3 (26). С. 87–94.
15. Римшин В. И., Анпилов С. М., Усанов С. В. Применение когнитивных технологий для прогнозирования прочности тонких стенок двутавровых балок // Эксперт: теория и практика. 2024. № 1 (24). С. 42–52.
16. Еремеев П. Г., Киселев Д. Б., Арменский М. Ю., Бурлай С. И. Натурные испытания фрагментов панелей из холодногнутых тонколистовых стальных профилей для арочных сводов // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2004. № 9. С. 10–13.
17. Поповин Д. П., Семенов А. С., Тихомирова А. М. Современные направления исследования трехслойных сэндвич-панелей с легкими заполнителями // Эффективные конструкции, материалы и технологии в строительстве: материалы междунар. науч.-практ. конф. Липецк: Липецкий государственный технический университет, 2019. С. 101–106.
18. Зверев В. В., Жидков К. Е., Салдаев А. Ю. Экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния элементов покрытия бескаркасного складчатого здания типа «Эксергия» // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. 2012. № 2 (26). С. 9–15.
19. Подзоров А. В., Карманов И. В., Зверев В. В. и др. Формы потери устойчивости участков поперечного сечения стального стенового элемента бескаркасного здания // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 68–73.
20. ТУ-1120-004-316631300162970-2019. Профили стальные листовые гнутые с трапециевидными гофрами для сталежелезобетонных конструкций (настилы силовые – НС «Бизон»).
21. ГОСТ 14918-2020. Прокат листовой горячеоцинкованный. Технические условия: дата введения 30.07.2020. М.: Стандаринформ, 2020. 32 с.
22. ГОСТ 11701-84. Металлы. Методы испытаний на растяжение тонких листов и лент: дата введения 17.07.1984. М.: Издательство стандартов, 1984. 15 с.
23. ГОСТ Р 58900-2020. Профили стальные листовые гнутые с трапециевидными гофрами для строительства. Метод испытаний на несущую способность: дата введения 30.07.2020. М.: Стандаринформ, 2020. 20 с.
24. ГОСТ 8829-2018. Изделия строительные железобетонные и бетонные заводского изготовления. Методы испытаний нагружением. Правила оценки прочности, жесткости и трещиностойкости: дата введения 1.09.2019. М.: Стандаринформ, 2019. 20 с.
25. СП 260.1325800.2023. Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутых оцинкованных профилей и гофрированных листов. Правила проектирования: утв. Приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 28 декабря 2023 г. N 1015/пр.
26. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85\*: утв. Приказом Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации от 3 декабря 2016 г. N 891/пр. Изменения N 6, утв. Приказом Минстроя России от 05.09.2024 N 597/пр.

## References

1. Vedyakov I. I., Armensky M. Yu., Solovyov D. V. Theoretical and experimental studies of new grades of profiled flooring. Construction Mechanics and Calculation of Structures. No. 2(211). 2007. Pp. 72–74.
2. Semenov A. S., Zverev V. V., Popovin D. P., Bobrovskikh D. A. Experimental studies of profiled sheets with a span of 6 m according to single-span and double-span schemes. Construction Mechanics and Structures. No. 2 (41). 2024. Pp. 98–105.

3. Kuleshov V. V., Kapyrin N. V., Popoudin D. P. Field tests of steel profiled flooring operating according to a two-span scheme with a reinforced support zone on an average support. *Herald of Science*. No. 6 (63). 2023. Pp. 481–488.
4. Patent No. 2811556 Russian Federation, IPC U04B 5/36. BUILDING ELEMENT: No. 2023120363: application 08.02.2023: publ. 01.15.2024. Anpilov S. M., Bondar V. V., Leonovich S. N., Pavlik A. V., Panfilov D. A., Rimshin V. I., Sorochaykin A. N., Skolubovich Yu. L. 18 p.
5. Anpilov S. M., Zaichenko N. M., Mailyan L. R. Innovative technologies for prefabricated mass construction facilities. *Engineering Economics: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference*, Minsk, November 27–28, 2024. Minsk: Belarusian National Technical University, 2024. Pp. 610–629.
6. Anpilov S. M., Erofeev V. T., Rimshin V. I., Skolubovich Yu. L., Sorochaykin A. N. Experience in the practical implementation of innovative building materials and products. *Construction Materials*. No. 8. 2024. Pp. 31–39.
7. Skolubovich Yu. L., Anpilov S. M., Dobrovolsky D. A., Yerofeev V. T., Leonovich S. N., Mailyan L. R., Rimshin V. I., Sorochaykin A. N. Ways to extend the life cycle of buildings with wooden floors. *News of Universities. Construction*. No. 9 (789). 2024. Pp. 88–103.
8. Vedyakov I. I., Solovyov D. V., Kovalenko A. I. Calculation of thin-sheet profiled sections with double corrugation for compression with bending. *Bulletin of NIC Construction*. No. 2 (21). 2019. Pp. 5–14.
9. Vedyakov I. I., Solovyov D. V., Kovalenko A. I. Calculation of thin-sheet profiled sections with double corrugation for compression with bending. *Bulletin of NIC Construction*. No. 2 (21). 2019. Pp. 5–14.
10. Armensky M. Y. The experience of using numerical methods in studies of geometric characteristics of thin-walled profiles. *Industrial and Civil Engineering*. No. 6. 2009. Pp. 23–26.
11. Podzorov A. V., Zverev V. V., Tezikov N. Yu. Reduction of the cross-sectional area of a thin-walled steel profile under central compression. *Construction Mechanics and Calculation of Structures*. No. 6 (263). 2015. Pp. 24–28.
12. Podzorov A. V., Zverev V. V., Tezikov N. Yu. Simulation of the stress-strain state of a thin-sheet profiled element with double corrugation. *Science and Business: Ways of Development*. No. 5 (47). 2015. Pp. 103–105.
13. Zverev V. V., Karmanov I. V., Golev R. V. On the issue of three-dimensional and four-dimensional modeling of steel frameless arched buildings. *Applied and Fundamental Studies. Proceedings of the 13th International Academic Conference*. Saint-Louis: Publishing House Science and Innovation Center, Ltd. (Saint-Louis), 2017. Pp. 84–90.
14. Rimshin V. I., Anpilov S. M., Roshchina S. I., Usanov S. V. Practical approaches to eliminating collisions in information models of buildings. *Expert: Theory and Practice*. No. 3(26). 2024. Pp. 87–94.
15. Rimshin V. I., Anpilov S. M., Usanov S. V. The use of cognitive technologies to predict the strength of thin walls of I-beams. *Expert: Theory and Practice*. No. 1 (24). 2024. Pp. 42–52.
16. Ereemeev P. G., Kiselev D. B., Armensky M. Yu., Burlai S. I. Field tests of fragments of panels from cold-rolled thin-sheet steel profiles for arched arches. *Installation and special works in construction*. No. 9. 2004. Pp. 10–13.
17. Popoudin D. P., Semenov A. S., Tikhomirova A. M. Modern research directions for three-layer sandwich panels with light fillers. *Efficient Structures, Materials and Technologies in Construction. Proceedings of the International Scientific and Practical Conference*. Lipetsk: Lipetsk State Technical University, 2019. Pp. 101–106.
18. Zverev V. V., Zhidkov K. E., Saldaev A. Yu. Experimental studies of the stress-strain state of the coating elements of a frameless folded building of the Exergy type. *Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. No. 2 (26). 2012. Pp. 9–15.



19. Podzorov A. V., Karmanov I. V., Zverev V. V. Forms of loss of stability of sections of the cross-section of a steel wall element of a frameless building. *Construction Mechanics and Calculation of Structures*. No. 4 (267). 2016. Pp. 68–73.
20. TU-1120-004-316631300162970-2019. Bent steel sheet profiles with trapezoidal corrugations for steel-reinforced concrete structures (power decking – NS "Bizon").
21. Federal Standard 14918-2020. Hot-dip galvanized sheet metal. Technical specifications: date of introduction 07.30.2020. Moscow: Standartinform, 2020. 32 p.
22. Federal Standard 11701-84. Metals. Tensile testing methods for thin sheets and tapes: date of introduction 17.07.1984. Moscow: Publishing House of Standards, 1984. 15 p.
23. Federal Standard R 58900-2020. Bent steel sheet profiles with trapezoidal corrugations for construction. Load-bearing capacity test method: date of introduction 07.30.2020. Moscow: Standartinform, 2020. 20 p.
24. Federal Standard 8829-2018. Reinforced concrete and factory-made construction products. Loading test methods. Rules for assessing strength, stiffness and crack resistance: date of introduction 1.09.2019. Moscow: Standartinform, 2019. 20 p.
25. Set of Rules 260.1325800.2023. Thin-walled steel structures made of cold-rolled galvanized profiles and corrugated sheets. Design rules: approved by Order of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services of the Russian Federation dated December 28. No. 1015/pr. 2023.
26. Set of Rules 20.13330.2016. Loads and impacts updated version of SNiP 2.01.07-85\*: approved by Order of the Ministry of Construction and Housing and Communal Services N 891/pr. Amendments No. 6. Approved by Order of the Ministry of Construction of Russia dated 05.09.2024 N 597/pr.

## EXPERIMENTAL STUDIES OF THE STRESS-STRAIN STATE OF STEEL ROLL-FORMED SECTIONS WITH TRAPEZOIDAL CORRUGATIONS

V. V. Zverev <sup>1</sup>, V. I. Rimshin <sup>2</sup>, S. M. Anpilov <sup>3</sup>, K. E. Zhidkov <sup>4</sup>, A. Zh. Markovich <sup>5</sup>

Lipetsk State Technical University <sup>1, 4, 5</sup>

Russia, Lipetsk

Research Institute of Building Physics Russian Academy of Architecture and Construction Sciences <sup>2</sup>

Russia, Moscow

Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin) <sup>3</sup>

Russia, Novosibirsk

---

<sup>1</sup> Dr of Technical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Civil Engineering, Professor, Head of Department of Metal Structures, tel.: +7(4742)32-80-79, e-mail: kaf-mk@bk.ru

<sup>2</sup> Dr of Technical Sciences, Corresponding Member of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Professor, Head of the Laboratory for Monitoring Housing and Public Utilities and Radiation Safety in Construction, e-mail: v.rimshin@niisf.ru

<sup>3</sup> Dr of Technical Sciences, Professor of the Department of Reinforced Concrete Structures, tel.: +7(987)974-85-55, e-mail: anpilovsm@yandex.ru

<sup>4</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal Structures, tel.: +7(4742)32-80-79, e-mail: kaf-mk@bk.ru

<sup>5</sup> Assistant Professor of the Department of Metal Structures, tel.: +7(4742)32-80-79, e-mail: kaf-mk@bk.ru

---

The article presents the results of full-scale tests of steel grating made of bent sections with trapezoidal corrugations. The parameters of the tested sections, loading patterns, and instrumentation arrangements are determined. The results of experimental studies under uniformly distributed loading are obtained. The nature of deformation and failure of the structures is determined. The stress-strain state was analyzed at various test stages. Based on the results of the studies, experimental data were compared with theoretical values.

**Keywords:** thin sheet metal, bent sections with trapezoidal corrugations, full-scale testing, experimental studies, stress-strain state.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.07

DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.009

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗДУШНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН ПО КАНАЛАМ СООРУЖЕНИЙ

А. Ю. Савенков<sup>1</sup>, П. В. Фомин<sup>2</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры сопротивления материалов, тел.: +7-916-356-52-01,  
e-mail: anton.savenkov86@internet.ru<sup>2</sup> Магистрант, тел.: +7-915-100-15-84, e-mail: arremakeone@gmail.com

**Введение.** При взаимодействии воздушной ударной волны с сооружениями происходит не только дифракция/обтекание строительных конструкций, но и затекание в вентиляционные или другие каналы сооружений, что может быть опасным для находящихся в них людей и оборудования. Для прогнозирования уровня опасности необходимо знать параметры во фронте распространяющейся воздушной ударной волны. В советский период отечественные ученые ставили такие задачи, в результате чего получены эмпирические таблицы и графики, основанные на натурном эксперименте, с последующей аппроксимацией для различных ситуаций с помощью математических формул. В настоящее время с развитием программных комплексов есть возможность постановки численных экспериментов, которые в полной мере повторяют натурные испытания.

**Цель исследования.** На основе полученного прошлого опыта, используя численные методы, выполнить сравнительный анализ и валидировать расчетные модели для более сложных схем распространения воздушных ударных волн, что даст возможность получить любые параметры фронта в любой точке каналов и камер сооружений.

**Методы.** Для проведения численного расчета использованы методы нелинейной динамики, основанные на применении явных методов расчета и эйлеровом описании движения воздушной среды.

**Результаты.** Выполнен численный эксперимент по распространению воздушной ударной волны в прямом канале, в канале переменного сечения с переходом из узкого сечения в широкий, и наоборот, а также в канале с расширительной камерой. В результате расчета получены результаты, близкие к экспериментальным, что доказывает эффективность численных методов расчета и показывает, что такие подходы могут быть использованы для более сложных постановок.

**Ключевые слова:** воздушная ударная волна, «Ansys Fluent», нелинейная динамика, каналы сооружений, фронт волны.

**Введение.** Актуальным является защита людей от воздушных ударных волн, в том числе в сооружениях гражданской обороны, где воздушная ударная волна может затекать через вентиляционные и другие каналы. В советский период проведено большое количество испытаний, по результатам которых выполнены исследования и выведены соотношения для определения основных параметров во фронте затекшей в канал волны. Но в настоящий момент есть возможность с помощью реализованных в программных комплексах методик проверить и выполнить валидацию расчетных моделей более сложных конструкций. Целью работы является продемонстрировать такие возможности и выполнить расчет канала на воздействие воздушной ударной волны с прохождением сквозь прямой канал при изменении сечения, а также сквозь канал с расширительной камерой.

**Типы каналов сооружений.** Каналы сооружений по протяженности и геометрии могут быть прямыми (вентиляционные шахты убежищ, аварийные вытяжные каналы, гладкие участки приточных и вытяжных систем), с участками переходов от широкого в узкий или из узкого в широкий, такие как расширительные камеры на входах в убежища или камеры гашения энергии в вентиляционных туннелях [1, 2].

**Предмет, задачи и методы.** В механике движение сплошной среды можно формулировать, используя два различных метода, описывающих основные параметры состояния среды (плотность, температуру) и движения (скорость и ускорение) в пространстве и времени [6]. Метод Лагранжа сводится к определению параметров состояния и движения системы относительно изменяющейся системы координат и фокусируется на деформации самого тела. Метод Эйлера определяет данные параметры относительно фиксированной системы координат, что дает возможность его применения к задачам с движущимися потоками, где необходимо получать информацию о скоростях и ускорениях в любой точке пространства и в любой момент времени. Поэтому в газодинамической теории ударных волн преимущественно применяют метод Эйлера. Такие возможности могут быть реализованы в различных программных комплексах, так, например, в [3] показано решение задачи в программном комплексе «LS-Dyna», также можно найти реализацию подобных постановок в иностранных работах [4, 5]. В данной работе рассмотрим его реализацию в ПК «ANSYS Fluent» – продукте «ANSYS» в области вычислительной гидрогазодинамики (CFD).

Такой подход к решению задачи распространения воздушной ударной волны, реализованный с помощью метода Эйлера и основанный на уравнениях газодинамики, описывается следующими основными уравнениями:

– уравнением неразрывности потока [7], или законом сохранения массы, суть которого заключается в том, что масса остается неизменной в любом сечении, если нет истока. Для удобства представим его в тензорной форме записи:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}, \quad (1)$$

где  $x_i = (x; y; z)$  – пространственные декартовы координаты;  $p = p(x; y; z; t)$  – давление;  $\rho = \rho(x; y; z; t)$  – плотность;  $v_i = v_i(x; y; z; t)$  –  $i$ -я компонента вектора скорости;

– уравнением Навье-Стокса, которое описывает движение вязкой жидкости, в форме закона сохранения импульса с применением гипотезы Стокса, и которое является основным для описания поведения ньютоновской жидкости в различных условиях [7, 8]. Для каждой компоненты импульса  $\rho v_i$ :

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( p + \frac{2}{3} \mu S_{kk} \right) + \frac{\partial 2\mu S_{ij}}{\partial x_j}, \quad (2)$$

где  $S_{ij} = 0,5 \left( \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$  – тензор скоростей деформации;  $\mu$  – динамическая вязкость. Здесь и далее не учитываются массовые силы  $\rho g_i$ , так как для высокоскоростных потоков действие гравитации мало по сравнению с другими силами [9];

– законом сохранения энергии [8, 10]:

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\rho E + p) v_j + v_i \cdot 2\mu (S_{ij} - \frac{1}{3} S_{kk} \delta_{ij}) + \kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \right), \quad (3)$$

где  $E$  – полная энергия как сумма кинетической  $0,5 \rho v_k v_k$  и внутренней  $\varepsilon$ ;  $T = T(x; y; z; t)$  – температура;  $\kappa$  – коэффициент теплопроводности;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Связь между  $\rho$ ,  $p$  и  $\varepsilon$  описывается уравнением состояния. Для идеального газа таким уравнением является [11]:

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon, \quad (4)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты Пуассона.

Воздушной ударной волной [12–14] называется резкое сжатие воздуха в области бесконечно малой ширины. Она стремительно распространяется во все стороны на значительные расстояния от детонационного взрыва со сверхзвуковой скоростью – происходит разрыв функций параметров среды в момент  $t_f$  прихода воздушной ударной волны в точку пространства (рис. 1). Поэтому, воздушные ударные волны определяют разрывные решения уравнений (1)–(4), но параметры фронта воздушной ударной волны на значительной удалённости от источника выражаются просто через избыточное давление на фронте  $\Delta p_f$ , не учитывающее полную энергию взрыва и его природу [6, 12]. Согласно [15], избыточное давление на фронте (в форме Горнера) записывается как:

$$\Delta p_f = \frac{\sqrt[3]{K_{\text{eff}} \cdot C}}{R} \left( 82,4 + \frac{\sqrt[3]{K_{\text{eff}} \cdot C}}{R} \left( 265 + \frac{\sqrt[3]{K_{\text{eff}} \cdot C}}{R} 687 \right) \right) \text{ [кПа]},$$

где  $R$  – расстояние до центра взрыва [м];  $C$  – масса взрывчатого вещества в тротильном эквиваленте [кг];  $K_{\text{eff}}$  – коэффициент эффективности заряда взрывчатого вещества по образованию воздушной ударной волны, который будем принимать зависящим только от вида взрыва:  $K_{\text{eff}} = 1$  для воздушного,  $K_{\text{eff}} = 2$  для наземного.

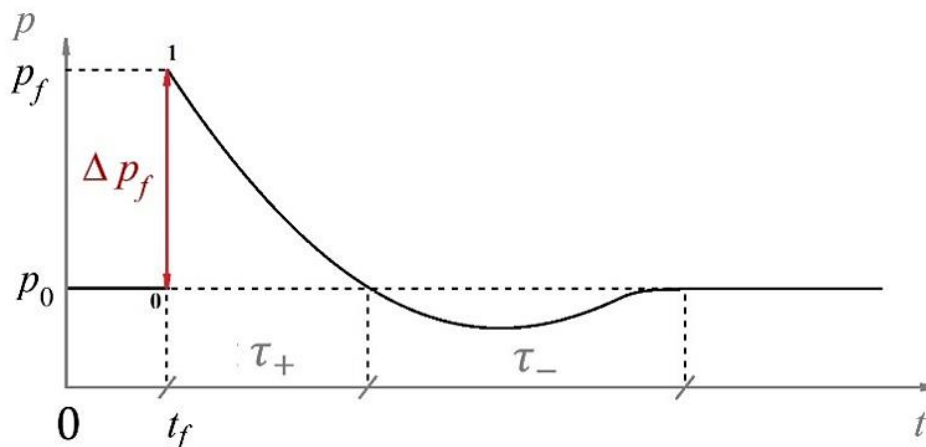


Рис. 1. Функция  $p(t)$  при прохождении волны через точку пространства

Параметры воздушной ударной волны за фронтом [15] являются функциями от времени и зависят помимо  $\Delta p_f$  ещё и от длительности фазы сжатия  $\tau_+$  (падения давления  $p(t)$  за фронтом до атмосферного  $p_0 = 101,325$  кПа на рис. 1):

$$\tau_+ = \frac{1,5}{10^3} \sqrt{R \cdot \sqrt[3]{K_{\text{eff}} \cdot C}} \text{ [с]}, \quad (5)$$

или длительности фазы разрежения  $\tau_-$ , которой будем пренебрегать ввиду незначительного вклада [14].

**Результаты исследований и обсуждение.** В качестве исходных данных для моделирования распространения воздушной ударной волны примем  $\Delta p_f = 100$  кПа. Выразив остальные характеристики фронта воздушной ударной волны согласно формулам из [15], получим:

- скорость движущихся вместе с фронтом частиц воздуха:

$$v_f = \frac{2,4 \cdot \Delta p_f}{\sqrt{1 + 0,00846 \cdot \Delta p_f}} = 176,643 \frac{\text{м}}{\text{с}}; \quad (6)$$

- их скоростной напор:

$$q_f = \frac{2,5 \cdot \Delta p_f^2}{\Delta p_f + 7p_0} = 30,9 \text{ кПа}; \quad (7)$$

- скорость фронта воздушной ударной волны:

$$D_f = a_0 \sqrt{1 + 0,00846 \cdot \Delta p_f} = 461,95 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (8)$$

где  $a_0 = 340 \text{ м/с}$  – скорость звука в невозмущенной среде; плотность воздуха:

$$\rho_f = \frac{\rho_0}{\left(1 - \frac{v_f}{D_f}\right)} = 1,98344 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad (9)$$

где  $\rho_0 = 1,225 \text{ кг/м}^3$  – исходная плотность воздуха; температура на фронте:

$$T_f = \frac{\Delta p_f + p_0}{0,287\rho_f} = 353,67 \text{ °К}; \quad (10)$$

- скорость звука на фронте:

$$a_f = \sqrt{1,4 \cdot 287 T_f} = 377 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (11)$$

Длительность фазы сжатия  $\tau_+$  подберём так, чтобы задать длинную воздушную ударную волну [17] на входе в канал с характерным размером поперечного сечения  $d = 2 \text{ м}$  ( $D_f$  взято согласно уравнению (8)):

$$\tau_+ \geq \frac{200 \cdot d}{D_f} = \frac{200 \cdot 2 \text{ м}}{461,95 \frac{\text{м}}{\text{с}}} = 0,865895 \text{ с},$$

затухание которой со временем при распространении по каналу не будет влиять на результаты моделирования и позволит сравнить их с РД-95.10533-96 [18]. Пусть  $R = 1 \text{ км}$ ,  $C = 50 \text{ кт}$  (для  $K_{\text{eff}} = 1$ ) или  $C = 25 \text{ кт}$  (для  $K_{\text{eff}} = 2$ ), тогда по формуле (5):

$$\tau_+ = \frac{1,5}{10^3} \sqrt{R \cdot \sqrt[3]{K_{\text{eff}} \cdot C}} = 0,911379 \text{ с}.$$

Получившиеся исходные данные для моделирования воздушной ударной волны:

$$\begin{cases} \Delta p_f = 100 \text{ кПа}; \\ \tau_+ = 0,911379 \text{ с}. \end{cases} \quad (12)$$

Для моделирования распространения воздушной ударной волны между каналами разных сечений в работе использовался «ANSYS Fluent» [7] – программный комплекс для решения задач вычислительной гидрогазодинамики (CFD). Моделирование осуществлялось в плоско-симметричной (2D-Axisymmetric) нестационарной постановке с использованием явного решателя на основе плотности (Explicit Density-Based Solver) и включением в расчёт уравнения энергии (Energy Equation), учитывающего изменение температуры потока.

При расчёте распространения воздушной ударной волны непосредственно в среде турбулентностью обычно пренебрегают, поскольку сразу за фронтом турбулентность не успевает развиваться [16], однако на некотором удалении от фронта и для движения непосредственно по каналам с переменным сечением турбулентность стоит учитывать. В расчётах в качестве модели турбулентности была выбрана модель Ментера ( $k-\omega$  SST), хорошо проявляющая себя как

в центре потока, так и у стенок [8]. При данных настройках численно, с использованием метода конечных объёмов (FVM) со значениями переменных в центрах ячеек, решаются осредненные по Рейнольдсу (URANS) уравнения (1)–(4) на каждом временном шаге в сочетании с выбранной моделью турбулентности. Дискретизация конвективных потоков осуществлялась с помощью метода AUSM. Вычисление градиентов – методом наименьших квадратов. Аппроксимация по времени производилась явной схемой (Explicit Transient Formulation), аппроксимация по пространству – «противопотоковой» (UPWIND) второго порядка.

Во всех рассматриваемых в данной статье моделях использовалась равномерная ортогональная конечно-объёмная сетка с размером конечного объёма 0,05 м × 0,1 м. Каждой расчётной области был присвоен домен сжимаемого вязкого воздуха (Air) [19] с изменением плотности по закону идеального газа (Ideal gas) – формула (4).

Граничные условия каждой расчётной области были определены в соответствии с исходными данными (12). В «ANSYS Fluent» на «вход» в расчётную область (Pressure Inlet) подавались:

– полное давление  $\Delta p_f + q_f = 130,9$  кПа на фронте воздушной ударной волны (согласно уравнению (7)), распространяющейся вдоль расчётной области, и функция его изменения за фронтом согласно [15]:

$$\Delta p(t) + q(t) = \Delta p_f \left(1 - \frac{t}{\tau_+}\right)^{1 + \left(\frac{\Delta p_f}{p_0}\right)^{0,6}} + q_f \left(1 - \frac{t}{\tau_+}\right)^{2,64 + 0,0227(\Delta p_f - 2,1)^{1,05}}; \quad (13)$$

– избыточное давление фронта  $\Delta p_f = 100$  кПа и функция его изменения:

$$\Delta p(t) = \Delta p_f \left(1 - \frac{t}{\tau_+}\right)^{1 + \left(\frac{\Delta p_f}{p_0}\right)^{0,6}}; \quad (14)$$

– температура  $T_f = 353,67$  °К на фронте, согласно уравнению (10), и функция её изменения за фронтом:

$$T(t) = \frac{28,97 p(t)}{8,314 \rho(t)}, \quad (15)$$

где  $p(t) = p_0 + \Delta p(t)$  и  $\rho(t) = \rho_f \left(\frac{p(t)}{\Delta p_f + p_0}\right)^{\frac{1}{1,4}}$  – функция изменения плотности.

На «выходе» из расчётной области (Pressure Outlet) было задано в «ANSYS Fluent» нулевое избыточное давление  $\Delta p = 0$  кПа, а стенки канала (Wall) были определены неподвижными, непроницаемыми, с нулевой скоростью потока на них и отсутствием теплового взаимодействия с движущимся потоком.

Последнее граничное условие плоскосимметричных задач – ось симметрии (Axis).

Начальные условия в расчётной области приняты следующими:  $p_0 = 101,325$  кПа – атмосферное давление; нулевые избыточное давление  $\Delta p = 0$  кПа и скорость воздуха  $v = 0$  м/с;  $T_0 = 288,15$  °К – температура воздуха. В качестве времени  $t = 0$  для начальных условий и для формул (13)–(14) на «входе» в канал приняли момент  $t_f$  прихода воздушной ударной волны на «вход» в расчётную область (рис. 1).

Геометрические модели каналов и камер создавались в ПК «ANSYS SpaceClaim» – продукте «ANSYS» для прямого моделирования САПР. Разработка конечно-объёмной сетки осуществлялась в «WorkBench DesignModeler» – модуле ПК «ANSYS WorkBench» для моделирования САПР. Расчёт, как было подробно описано выше, выполнялся в «ANSYS Fluent», а визуализация полученных результатов производилась в «CFD Post» – программе «Ansys» для обработки результатов расчёта вычислительной гидрогазодинамики.

На рис. 2 представлена геометрическая модель № 1 для моделирования затекания воздушной ударной волны из канала с широким сечением в узкий при резком переходе между каналами. Длина широкого канала – 8 м, его диаметр  $d_0 = 2$  м, длина узкого канала – 13 м, его диаметр  $d_1 = 1$  м. Конечно-объёмная сетка для данной модели представлена на рис. 3 с указанием направления потока и состоит из 2900 конечных объёмов.



Рис. 2. Геометрическая модель № 1

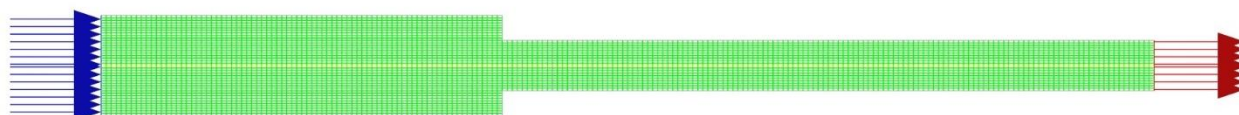


Рис. 3. Расчётная модель № 1

Приведём результаты первого расчёта. При затекании в момент времени  $t = 0,0172526$  с воздушной ударной волны с избыточным давлением  $\Delta p_f = 96908$  Па на фронте (рис. 4) из широкого канала в узкий происходит перекрытие входного отверстия в узкий канал отражённой ударной волной ( $t = 0,0202654$  с), образованной вследствие резкого уменьшения поперечного сечения с  $S_0 = d_0^2$  до  $S_1 = d_1^2$  (рис. 5). На некотором расстоянии от входа в узкий канал, приблизительно равном нескольким диаметрам канала [17], с одной стороны, в момент времени  $t \approx 0,0252927$  с формируется фронт затёкшей в узкий канал воздушной ударной волны, на котором избыточное давление  $\Delta p_1 = 137250$  Па  $\approx 1,42 \Delta p_f$  (рис. 6), а с другой – движущийся по широкому каналу в обратном направлении фронт отражённой ударной волны ( $t \approx 0,0414947$  с), на котором избыточное давление  $\Delta p_0 = 206018$  Па  $\approx 2,13 \Delta p_f$  (рис. 7).

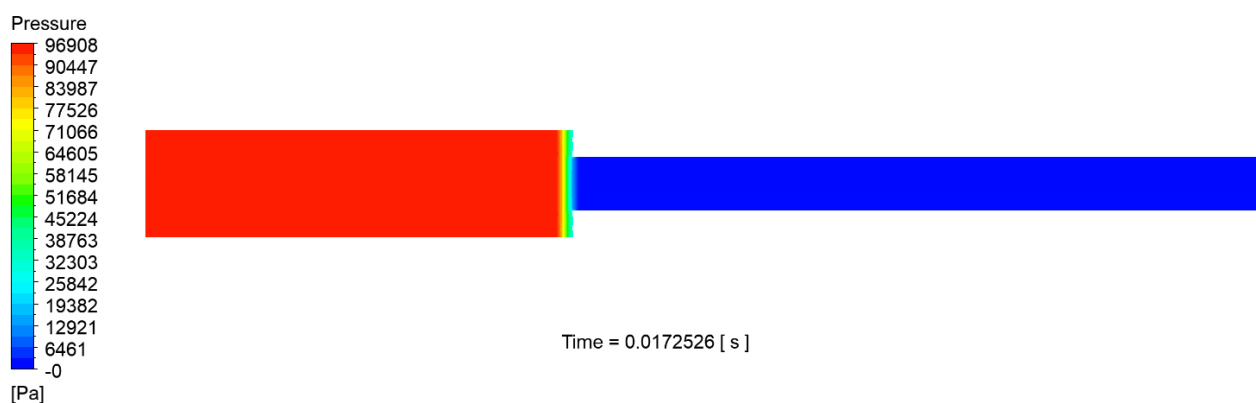
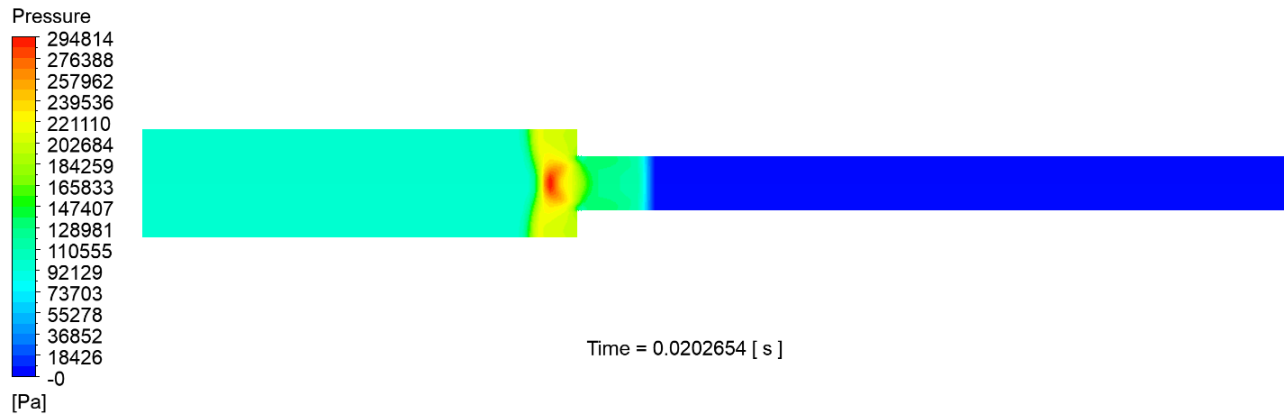


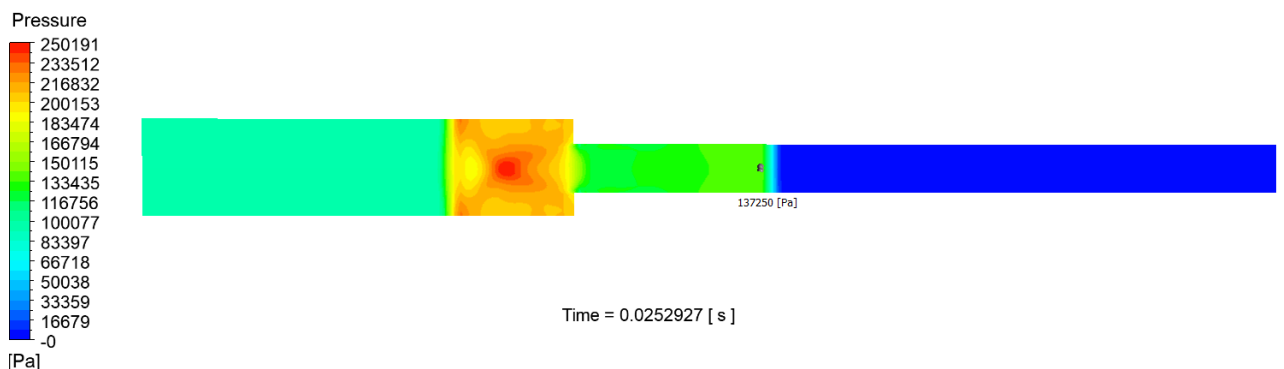
Рис. 4. Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0172526$  с при затекании воздушной ударной волны из широкого канала в узкий

Данные результаты сопоставимы с приведёнными в [18] графиками для определения коэффициентов роста избыточного давления на фронте при затекании из широкого канала в узкий в зависимости от отношения  $S_1/S_0$  и  $\Delta p_f$ . Согласно им,  $\Delta p_1 \approx 1,35 \Delta p_f$  и  $\Delta p_0 \approx 2,15 \Delta p_f$  для  $S_1/S_0 = d_1^2/d_0^2 = 0,25$  и  $\Delta p_f \approx 97$  кПа. Небольшие отличия объясняются тем, что при выводе данных графиков [17] не учитывалась зависимость газодинамических потерь, возникающих на входе в узкий канал, от чисел Рейнольдса и Маха [11], а лишь от отношения поперечных

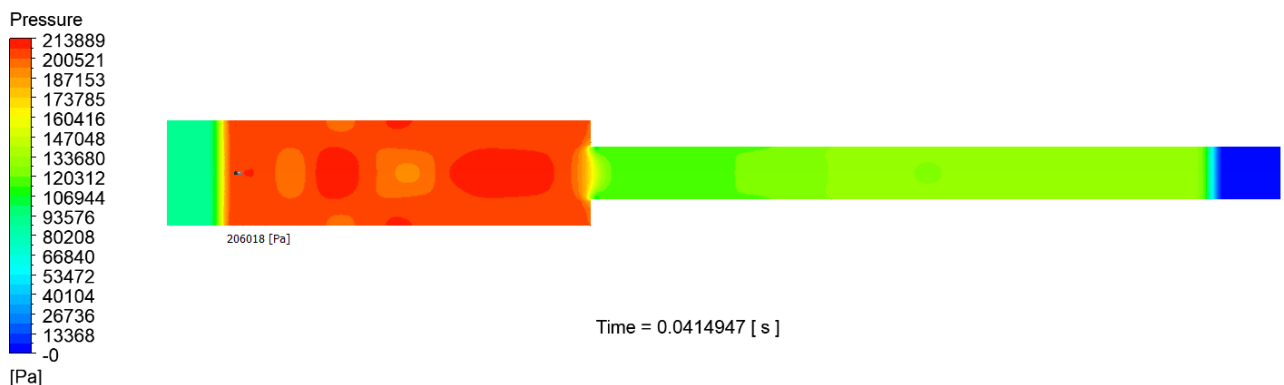
сечений  $S_1/S_0$  каналов и геометрии перехода по материалам гидравлических справочников. Точные данные о длине участков формирования фронтов в соответствующей литературе [17, 18] также не приводятся и определены визуально по результатам расчёта: как видно из рис. 6 в момент когда сформирован фронт затёкшей воздушной ударной волны, фронт отражённой находится в переходной стадии. Произошедший рост избыточного давления в узком канале в 1,42 раза сопровождается увеличением остальных параметров фронта в соответствии с их зависимостями только от  $\Delta p_1$  согласно формулам (6)–(11).



**Рис. 5.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0202654$  с при затекании воздушной ударной волны из широкого канала в узкий



**Рис. 6.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0252927$  с при затекании воздушной ударной волны из широкого канала в узкий

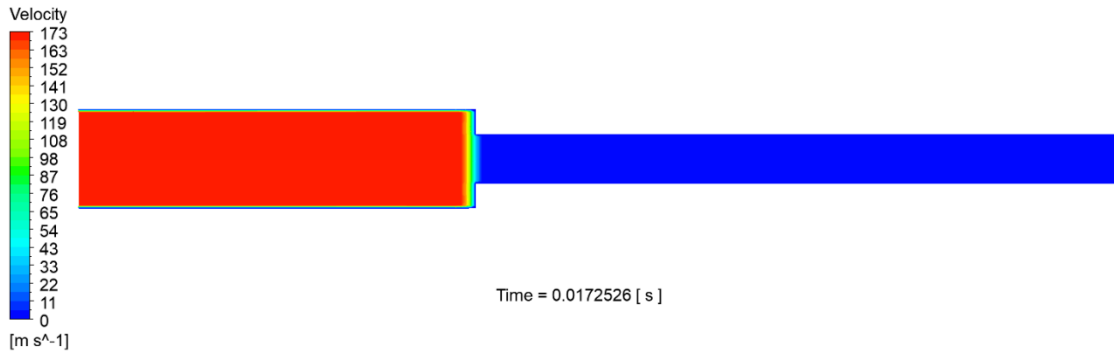


**Рис. 7.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0414947$  с при затекании воздушной ударной волны из широкого канала в узкий

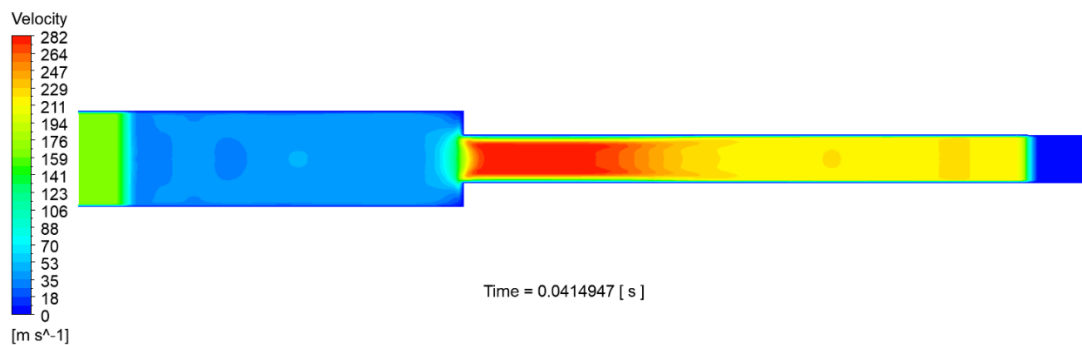
Для момента времени  $t = 0,0414947$  с, когда оба фронта (затёкшей и отражённой воздушных ударных волн) сформированы, рассмотрим также изополя скоростей потока воздуха (рис. 9). В узком канале происходит увеличение скорости воздуха в сравнении с моментом



времени  $t = 0,0172526$  с (рис. 8), однако она остается дозвуковой. В широком канале (рис. 9) отражённые частицы воздуха тормозятся набегающим воздушным потоком.



**Рис. 8.** Изополя скорости потока воздуха [м/с] в момент времени  $t = 0,0172526$  с при затекании воздушной ударной волны из широкого канала в узкий

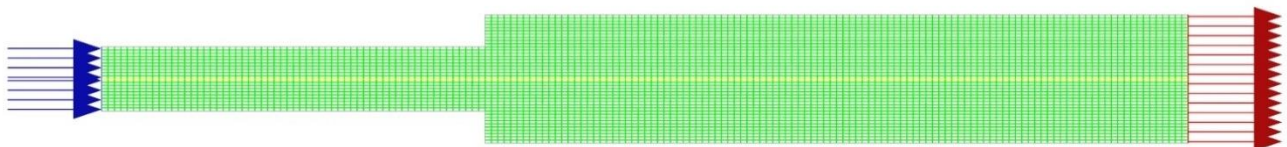


**Рис. 9.** Изополя скорости потока воздуха [м/с] в момент времени  $t = 0,0414947$  с при затекании воздушной ударной волны из широкого канала в узкий

На рис. 10 представлена геометрическая модель № 2 для моделирования затекания воздушной ударной волны из канала с узким сечением в широкий при резком переходе между каналами. Длина узкого канала – 6 м, его диаметр  $d_0 = 1$  м, длина широкого канала – 11 м, его диаметр  $d_1 = 2$  м. Конечно-объёмная сетка для данной модели представлена на рис. 11 с указанием направления потока и состоит из 2800 конечных объёмов.



**Рис. 10.** Геометрическая модель № 2

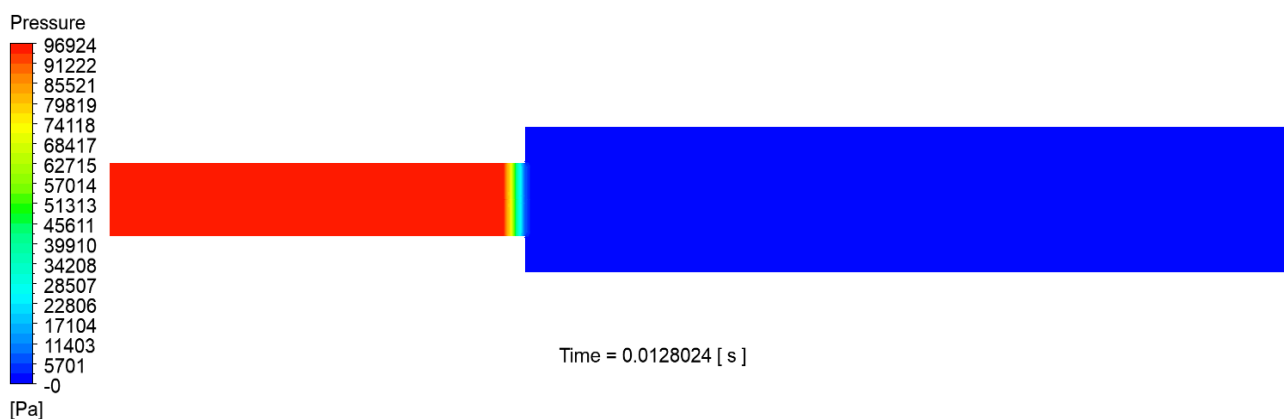


**Рис. 11.** Расчётная модель № 2

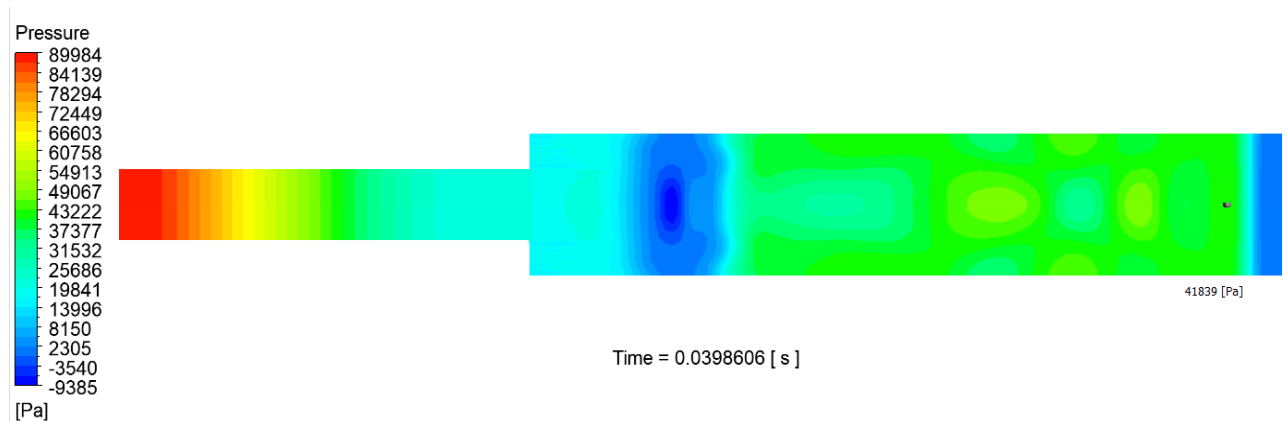
Приведём результаты второго расчёта. При затекании в момент времени  $t = 0,0128024$  с воздушной ударной волны с избыточным давлением  $\Delta p_f = 96924$  Па на фронте (рис. 12) из узкого канала в широкий на некотором расстоянии от входа в широкий канал вследствие резкого увеличения поперечного сечения с  $S_0 = d_0^2$  до  $S_1 = d_1^2$  к моменту времени  $t \approx 0,0398606$  с сформировывается фронт затёкшей воздушной ударной волны, на котором избыточное

давление  $\Delta p_1 = 41839 \text{ Па} \approx 0,43 \Delta p_f$  (рис. 13). Данные результаты сопоставимы с приведёнными в [18] графиками для определения коэффициентов снижения избыточного давления на фронте при затекании из узкого канала в широкий в зависимости от отношения  $S_0/S_1$  и  $\Delta p_f$ .

Согласно им,  $\Delta p_1 \approx 0,38 \Delta p_f$  для  $S_0/S_1 = d_0^2/d_1^2 = 0,25$  и  $\Delta p_f \approx 97 \text{ кПа}$ . Небольшие отличия объясняются теми же соображениями, что и в первом расчёте: при выводе данных графиков [17] не учитывалась зависимость газодинамических потерь, возникающих на входе в широкий канал, от чисел Рейнольдса и Маха [11], а лишь от отношения поперечных сечений  $S_0/S_1$  каналов и геометрии перехода. Так же, как и в первом расчёте, длина участка формирования фронта затёкшей волны определена визуально по результатам расчёта. Произошедшее падение избыточного давления в широком канале в 2,3 раза сопровождается снижением остальных параметров фронта в соответствии с их зависимостями только от  $\Delta p_1$  согласно формулам (6)–(11).

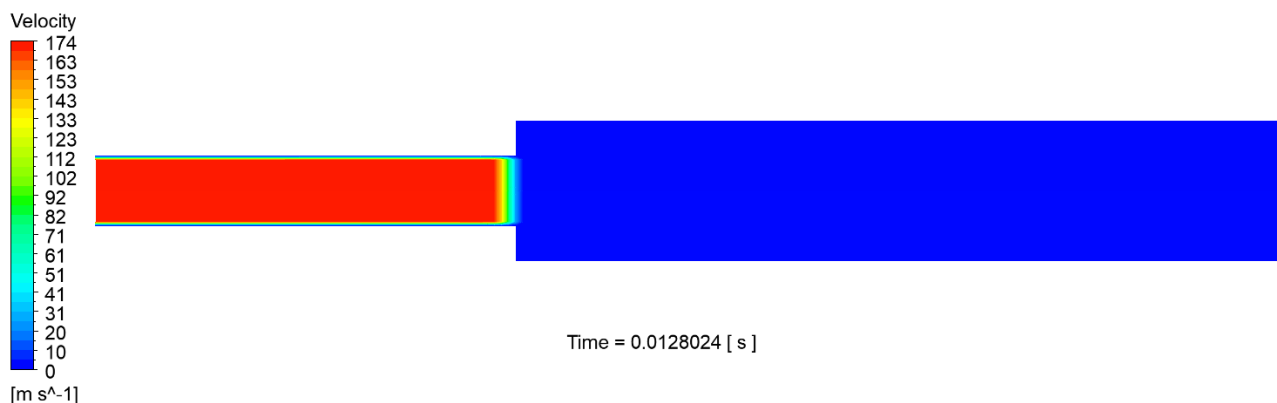


**Рис. 12.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0128024 \text{ с}$  при затекании воздушной ударной волны из узкого канала в широкий

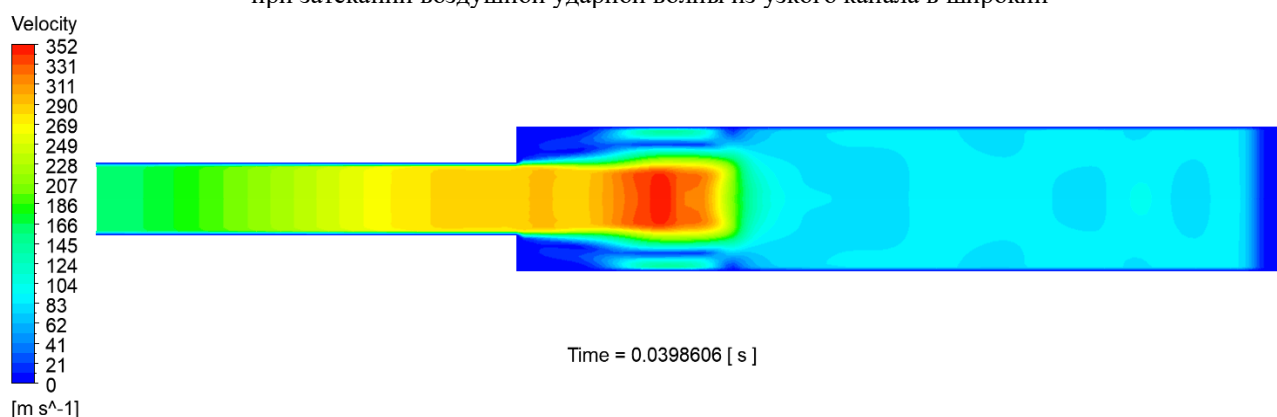


**Рис. 13.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0398606 \text{ с}$  при затекании воздушной ударной волны из узкого канала в широкий

Для момента времени  $t = 0,0398606 \text{ с}$ , когда фронт затёкшей воздушной ударной волны сформирован, рассмотрим также изополя скоростей потока воздуха (рис. 15). На входе в широкий канал происходит изменение течения воздушного потока на звуковой режим в сравнении с моментом времени  $t = 0,0128024 \text{ с}$  (рис. 14), а затем резкое торможение частиц воздуха. Такой результат объясняется образованием на входе в широкий канал обращённой воздушной ударной волны (рис. 13), которая к моменту времени  $t = 0,0398606 \text{ с}$  на некотором удалении от узкого канала останавливается, превращаясь в стационарный скачок уплотнения с отрицательным избыточным давлением [17].



**Рис. 14.** Изополя скорости потока воздуха [м/с] в момент времени  $t = 0,0128024$  с при затекании воздушной ударной волны из узкого канала в широкий



**Рис. 15.** Изополя скорости потока воздуха [м/с] в момент времени  $t = 0,0398606$  с при затекании воздушной ударной волны из узкого канала в широкий

Сравнив полученные результаты моделирования в «ANSYS Fluent» распространения воздушной ударной волны из широкого канала в узкий (рис. 4–9) и из узкого в широкий (рис. 12–15) с рекомендуемыми в [18] графиками, а также с описанием происходящих при этом физических процессов в [17], тем самым подтвердив возможности «ANSYS Fluent» для моделирования распространения воздушных ударных волн в каналах сооружений, перейдём к доказательству целесообразности использования данного ПК на примере подбора размеров расширительной камеры для снижения избыточного давления на фронте проходящей по каналу воздушной ударной волны.

На рис. 16–18 отображены геометрические модели № 3–5 для моделирования прохождения воздушной ударной волны сквозь расширительную камеру. На рис. 16 представлен канал со следующими размерами: длина – 20 м, диаметр – 1 м. На рис. 17 на расстоянии 6 м от входа в данный канал представлена расширительная камера, длина которой совпадает с её диаметром – 2 м.



**Рис. 16.** Геометрическая модель № 3



**Рис. 17.** Геометрическая модель № 4

На рис. 18 представлена расширительная камера, длина которой в 3 раза превышает её диаметр – 6 м. Конечно-объёмные сетки для данных моделей представлены на рис. 19–21 с указанием направлений потоков и состоят из 2000, 2200, 2600 конечных объёмов соответственно.



Рис. 18. Геометрическая модель № 5



Рис. 19. Расчётная модель № 3

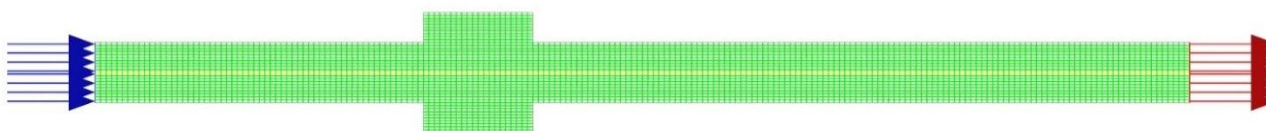


Рис. 20. Расчётная модель № 4

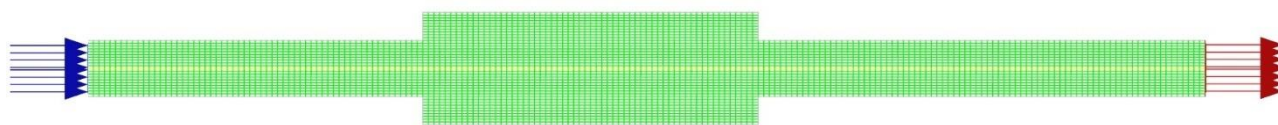
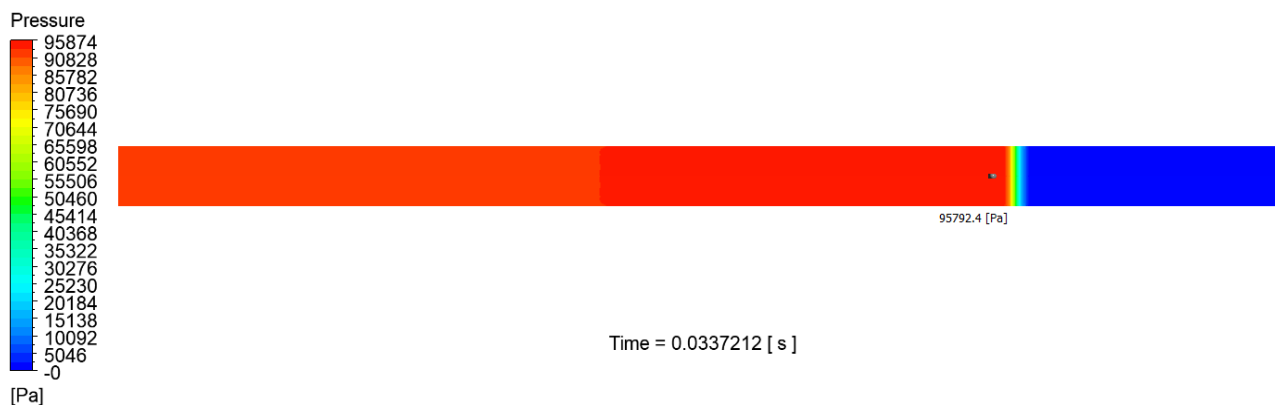
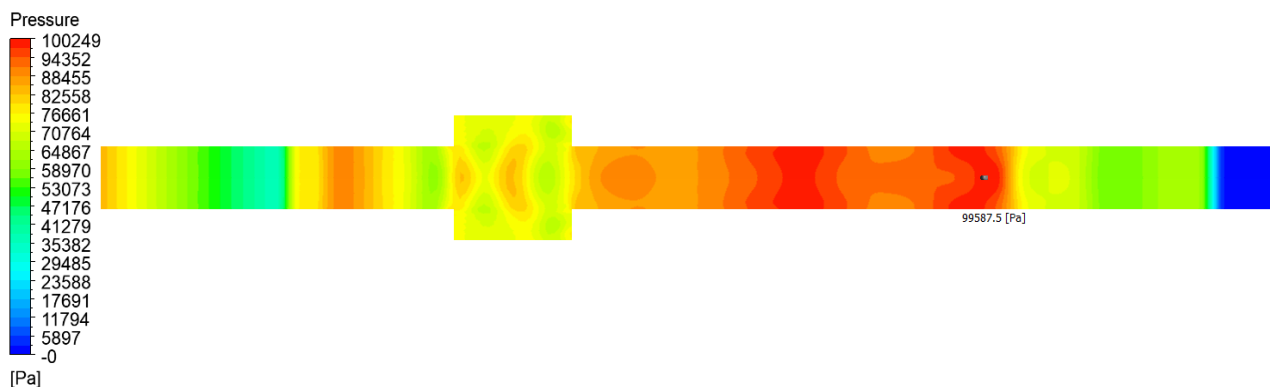


Рис. 21. Расчётная модель № 5

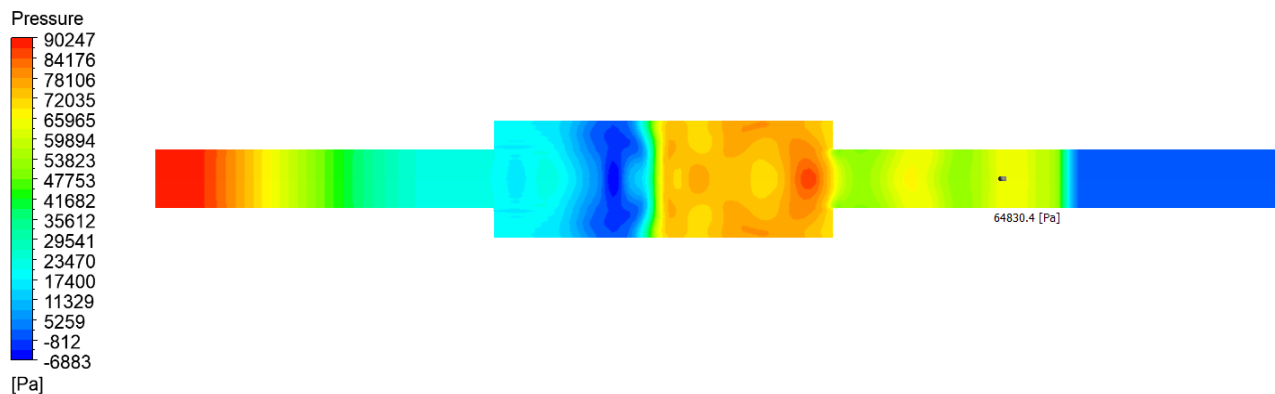
Приведём результаты расчётов № 3–5. Избыточное давление на фронте воздушной ударной волны необходимо сравнивать не после формирования фронта при прохождении сквозь расширительные камеры, а в одной и той же точке на выбранном расстоянии (15 м от «входа» в расчётные области) по достижении её максимального избыточного давления в каждой из трёх расчётных ситуациях. В результате распространения воздушной ударной волны по каналу без расширительных камер в момент времени  $t = 0,0337212$  с избыточное давление в рассматриваемой точке становится равным 95795,4 Па (рис. 22). В результате прохождения воздушной ударной волны сквозь расширительную камеру, длина которой в 3 раза превышает её диаметр, в момент времени  $t = 0,0386979$  с избыточное давление в рассматриваемой точке становится равным 64830,4 Па (рис. 24), то есть расширительная камера погасила воздушную ударную волну примерно в 1,5 раза по сравнению с ситуацией на рис. 22. В результате прохождения воздушной ударной волны сквозь расширительную камеру, длина которой совпадает с её диаметром, в момент времени  $t = 0,0386979$  с избыточное давление в рассматриваемой точке становится равным 99587,5 Па (рис. 23), то есть расширительная камера не смогла погасить воздушную ударную волну, и даже произошёл небольшой рост избыточного давления. Это объясняется звуковым истечением воздуха при переходе из канала в расширительную камеру, поперечное сечение которой превышает поперечное сечение канала (рис. 15) для ситуации затекания воздушной ударной волны из узкого канала в широкий с таким же отношением поперечных сечений – 0,25. Длины расширительной камеры не хватает для того, чтобы участок со звуковой скоростью не повлиял на избыточное давление в исследуемой точке, поэтому применение расширительных камер, длина которых совпадает с их диаметром, нецелесообразно и может привести даже к увеличению избыточного давления (рис. 23).



**Рис. 22.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0337212$  с при распространении воздушной ударной волны по каналу



**Рис. 23.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0447334$  с при прохождении воздушной ударной волны сквозь первую расширительную камеру



**Рис. 24.** Изополя избыточного давления [Па] в момент времени  $t = 0,0386979$  с при прохождении воздушной ударной волны сквозь вторую расширительную камеру

**Выводы.** В результате проведенных исследований получены основные параметры воздушной ударной волны в каналах различной конфигурации.

Полученные результаты имеют хорошую сходимость с эмпирическими данными, полученными на основании натурных экспериментов. Это показывает, что указанная методика с использованием программных комплексов с реализованными динамическими методами расчёта позволяет в подобной поставке исследовать более сложные с точки зрения геометрии строительные конструкции. Что позволит разрабатывать более эффективные пассивные или активные средства защиты от воздушной ударной волны при распространении в зданиях и сооружениях, а также выполнять качественные вычисления взрывных нагрузок на строительные конструкции.

## Библиографический список

1. Казаков Б. П., Колесов Е. В., Накаряков Е. В., Исаевич А. Г. Модели и методы аэрогазодинамических расчётов вентиляционных сетей подземных шахт: обзор // Горный информационно-аналитический бюллетень (МИАБ). 2021. № 6. С. 5–33. DOI: 10.25018/0236-1493-2021-6-0-5.
2. Chen S., Liu W., Mu C. Research on the Rule of Explosion Shock Wave Propagation in Multi-Stage Cavity Energy-Absorbing Structures // Materials. 2023. Vol. 16, no. 13. Article 4608. DOI: 10.3390/ma16134608.
3. Мкртычев О. В., Савенков А. Ю. Надежность встроенного подземного сооружения при воздействии воздушной ударной волны // Жилищное строительство. 2023. № 1–2. С. 71–74. DOI: <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2023-1-2-71-74>.
4. Weng, Y.-H., Qian, K., Fu, F., Fang, Q. Numerical investigation on load redistribution capacity of flat slab substructures to resist progressive collapse // Journal of Building Engineering. 2020. No. 29. P. 101109. DOI 10.1016/j.jobbe.2019.101109. URL: [doi.org/10.1016/j.jobbe.2019.101109](https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2019.101109) (дата обращения: 26.07.2020).
5. Wei J., Li J., Wu C. An experimental and numerical study of reinforced conventional concrete and ultra-high performance concrete columns under lateral impact loads. 2019. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109822. URL: [doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109822](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109822) (дата обращения: 26.07.2020).
6. Ильюшонок А. В., Терешенков В. И., Миканович А. С. Определение параметров ударных волн // Вестник Командно-инженерного института МЧС Республики Беларусь. 2007. № 2 (6). С. 54–62.
7. Ansys Fluent Theory Guide: 2021 R2. Canonsburg: ANSYS Inc., 2021. 1024 p. URL: [https://dl.cfdexperts.net/cfd\\_resources/Ansys\\_Documentation/Fluent/Ansys\\_Fluent\\_Theory\\_Guide.pdf](https://dl.cfdexperts.net/cfd_resources/Ansys_Documentation/Fluent/Ansys_Fluent_Theory_Guide.pdf) (дата обращения: 05.02.2025).
8. Снегирёв А. Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. 143 с.
9. Батулин О. В., Батулин Н. В., Матвеев В. Н. Расчет течений жидкостей и газов с помощью универсального программного комплекса Fluent. Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2009. 151 с.
10. Bagabir A., Abutaleb A. Numerical Experiments and Analysis of Shock Wave Diffraction around Structures // YJES. 2021. Vol. 18, no. 1. Pp. 46–54. DOI: 10.53370/001c.29009.
11. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика: в 10 т. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.
12. Физика ядерного взрыва: в 2 т. Т. 1. Развитие взрыва / Министерство обороны Российской Федерации. Центральный физико-технический институт; под ред. В. М. Лоборева, Б. В. Замышляева, Е. П. Маслина, Б. А. Шиловцева. М.: Наука. Физматлит, 1997. 528 с.
13. Воронин М. С. Физика взрыва и удара. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2019. 212 с.
14. Девисилов В. А., Дроздова Т. И., Тимофеева С. С. Теория горения и взрыва: практикум / под общ. ред. В. А. Девисилова. М.: ФОРУМ, 2012. 352 с.
15. РД 95 10528-96. Руководство по определению параметров ударных волн при внешних взрывах и нагрузках на строительные конструкции АС. М., МГСУ, 1995.
16. Горкунов С. В. Математическое моделирование нестационарных течений с ударными волнами в пространственно-неоднородных средах: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.2.2. М., 2022. 141 с.
17. Мишуев А. В. Воздушная ударная волна в сооружениях / М-во образования и науки Российской Федерации, Моск. гос. строит. ун-т. М.: МГСУ, 2014. 408 с.
18. РД-95 10533-96. Руководство по определению параметров ударных волн при затекании в помещения и коммуникации различной конфигурации и нагрузках на строительные конструкции и оборудование АС. М., МГСУ. 1996.

19. Шаблий Л. С., Кривцов А. В., Колмакова Д. А. Компьютерное моделирование типовых гидравлических и газодинамических процессов двигателей и энергетических установок в ANSYS Fluent. Самара: Изд-во Самар. ун-та, 2017. 108 с.

## References

1. Kazakov B. P., Kolesov E. V., Nakariakov E. V., Isaevich A. G. Models and Methods of Aerogasdynamic Calculations for Ventilation Networks in Underground Mines: Review // Mining Informational and Analytical Bulletin (MIAB). 2021. No. 6. Pp. 5–33. DOI: 10.25018/0236-1493-2021-6-0-5.
2. Chen S., Liu W., Mu C. Research on the Rule of Explosion Shock Wave Propagation in Multi-Stage Cavity Energy-Absorbing Structures // Materials. 2023. Vol. 16, no. 13. Article 4608. DOI: 10.3390/ma16134608.
3. Mkrtychev O. V., Savenkov A. Yu. Reliability of a built-in underground structure under the impact of an air shock wave // Zhilishchnoe Stroitel'stvo [Housing Construction]. 2023. No. 1–2, Pp. 71–74. DOI: <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2023-1-2-71-74>.
4. Weng, Y.-H., Qian, K., Fu, F., Fang, Q. Numerical investigation on load redistribution capacity of flat slab substructures to resist progressive collapse // Journal of Building Engineering. 2020. No. 29. P. 101109. DOI: 10.1016/j.jobe.2019.101109. URL: [doi.org/10.1016/j.jobe.2019.101109](https://doi.org/10.1016/j.jobe.2019.101109) (date accessed: 26.07.2020).
5. Wei J., Li J., Wu C. An experimental and numerical study of reinforced conventional concrete and ultra-high performance concrete columns under lateral impact loads. 2019. DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109822. URL: [doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109822](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109822) (date accessed: 26.07.2020).
6. Il'yushonok A. V., Tereshenkov V. I., Mikanovich A. S. Opredeleeniye parametrov udarnykh voln // Vestnik Komandno-inzhener'nogo instituta MCHS Respubliki Belarus'. 2007. No. 2 (6). Pp. 54–62.
7. Ansys Fluent Theory Guide: 2021 R2. Canonsburg: ANSYS Inc., 2021. 1024 p. URL: [https://dl.cfdexperts.net/cfd\\_resources/Ansys\\_Documentation/Fluent/Ansys\\_Fluent\\_Theory\\_Guide.pdf](https://dl.cfdexperts.net/cfd_resources/Ansys_Documentation/Fluent/Ansys_Fluent_Theory_Guide.pdf) (date accessed: 05.02.2025).
8. Snegirov A. Yu. Vysokoproizvoditel'nyye vychisleniya v tekhnicheskoy fizike. Chislennoye modelirovaniye turbulentnykh techeniy. SPb.: Izd-vo Politekh. un-ta. 2009. 143 p.
9. Baturin O. V., Baturin N. V., Matveyev V. N. Raschet techeniy zhidkostey i gazov s pomoshch'yu universal'nogo programmnoy kompleksa Fluent. Samara: Izd-vo Samar. gos. aero-kosm. un-ta, 2009. 151 p.
10. Bagabir A., Abutaleb A. Chislennyye eksperimenty i analiz difraktsii udarnykh voln vokrug konstruksiy // YJES. 2021. Vol. 18, no. 1. Pp. 46–54. DOI: 10.53370/001c.29009.
11. Landau L. D., Lifshits Ye. M. Teoreticheskaya fizika: v 10 t. T. VI. Gidrodinamika. M.: Fizmatlit, 2001. 736 p.
12. Fizika yadernogo vzryva: v 2 t. T. 1. Razvitiye vzryva / Ministerstvo oborony Rossiyskoy Federatsii. Tsentral'nyy fiziko-tekhnicheskiiy institute; pod red. V. M. Loboreva, B. V. Zamyshlyayeva, Ye. P. Maslina, B. A. Shilobreteva. M.: Nauka. Fizmatlit, 1997. 528 p.
13. Voronin M. S. Fizika vzryva i udara: uchebnoye posobiye. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2019. 212 p.
14. Devisilov V. A., Drozdova T. I., Timofeyeva S. S. Teoriya goreniya i vzryva: praktikum / pod obshch. red. V. A. Devisilova. M.: FORUM, 2012. 352 p.
15. RD 95 10528-96. Rukovodstvo po opredeleniyu parametrov udarnykh voln pri vneshnikh vzryvakh i nagruzok na stroitel'nyye konstruksii AS. M.: MGSU, 1995.
16. Gorkunov S. V. Matematicheskoye modelirovaniye nestatsionarnykh techeniy s udarnymi volnami v prostranstvenno-neodnorodnykh sredakh: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk: 1.2.2. M., 2022. 141 p.

17. Mishuyev A. V. *Vozdushnaya udarnaya volna v sooruzheniyakh: monografiya. M-vo obrazovaniya i nauki Ross. Federatsii, Mosk. gos. stroit. un-t. M.: MGSU, 2014. 408 p.*

18. RD-95 10533-96. *Rukovodstvo po opredeleniyu parametrov udarnykh voln pri zatekanii v pomeshcheniya i kommunikatsii razlichnoy konfiguratsii i nagruzok na stroitel'nyye konstruksii i oborudovaniye AS. M.: MGSU, 1996.*

19. Shabliy L. S., Krivtsov A. V., Kolmakova D. A. *Komp'yuternoye modelirovaniye tipovykh gidravlicheskiy i gazodinamicheskikh protsessov dvigateley i energeticheskikh ustanovok v ANSYS Fluent. Samara: Izd-vo Samar. un-ta, 2017. 108 p.*

## PROPAGATION OF AIR SHOCK WAVES THROUGH STRUCTURE CHANNELS

A. Yu. Savenkov <sup>1</sup>, P. V. Fomin <sup>2</sup>

Moscow State University of Civil Engineering <sup>1,2</sup>  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Strength of Materials, tel.: +7-916-356-52-01, e-mail: anton.savenkov86@internet.ru

<sup>2</sup> Student, tel.: +7-915-100-15-84, e-mail: arremakeone@gmail.com

---

**Introduction.** When an air blast wave interacts with structures, not only diffraction and flow around building elements occur, but the wave can also penetrate into ventilation or other utility channels of the structure, which may be dangerous for people and equipment located inside. To assess the level of hazard, it is necessary to know the parameters at the front of the propagating air blast wave. In the Soviet period, domestic researchers addressed such problems and obtained empirical tables and charts based on full-scale experiments, subsequently approximated for various scenarios using mathematical formulas. At present, with the development of software packages, it has become possible to perform numerical experiments that fully reproduce full-scale tests.

**Purpose of the study.** Building on the experience gained in the past and using numerical methods, to carry out a comparative analysis and validate computational models for more complex schemes of air blast wave propagation, which will make it possible to obtain any wave-front parameters at any point in the channels and chambers of structures.

**Methods.** For the numerical analysis, methods of nonlinear dynamics were used, based on explicit time-integration schemes and an Eulerian description of the motion of the air medium.

**Results.** A numerical experiment was performed on the propagation of an air blast wave in a straight channel, in a channel of variable cross-section with transitions from a narrow section to a wide one and vice versa, as well as in a channel with an expansion chamber. The computed results are close to experimental data, which confirms the effectiveness of numerical methods and shows that such approaches can be used for more complex problem formulations.

**Keywords:** air blast wave, Ansys Fluent, nonlinear dynamics, structural channels, wave front.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКЦИЙ СВОДОВ ЗДАНИЯ ПРАВОСЛАВНОГО ХРАМА

А. А. Черняев<sup>1</sup>, К. В. Марфин<sup>2</sup>

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Орел

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры промышленного и гражданского строительства,  
тел.: 8(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительных конструкций и материалов,  
тел.: +7 (906) 663-33-31, e-mail: marfinkirill@yandex.ru

Представлено конечно-элементное моделирование в ПК «Ansys» сводов здания православного храма. Объект исследования – Гарнизонный храм Казанской иконы Божией Матери при Академии ФСО России (в г. Орле). Моделирование выполнялось для целей расчета и возможного проектирования альтернативного варианта конструктивного выполнения сводов кирпичными взамен железобетонных, первоначально запланированных в проектной документации. В работе приведены конечно-элементная объёмная геометрическая модель сводов и полученные картины распределения напряжений от суммарной нагрузки вышележащих конструкций. Моделирование и расчет были использованы в последующем обсуждении и выборе конструктивного решения сводов храма. Таким образом, полноценное конечно-элементное моделирование и расчет с объёмной геометрической моделью позволили произвести необходимую оценку напряженного состояния конструкций сводов при окончательном выборе их конструктивного решения.

**Ключевые слова:** своды, православные храмы, конечно-элементная объёмная расчетная модель.

**Введение.** При проектировании различных конструкций зданий, сооружений нередко возникает необходимость рассмотреть несколько вариантов их конструктивного выполнения, в случае заданной геометрии – несколько вариантов материалов [1].

В несложных случаях бывает достаточно произвести оценку напряженного состояния методами строительной механики, а по формулам действующих норм проектирования строительных конструкций запроектировать конструкцию. В более сложных же случаях приходится прибегать к конечно-элементному моделированию с объёмной расчетной моделью [2].

В архитектуре современных православных храмов, как известно, применяются различные конструктивные возможные их решения. Как традиционные из кирпича, свойственные русской традиции и культуре, так и более современные, например, из железобетона (см., например, [3, 4] и др.). И при проектировании нередко возникает вопрос о выборе конструктивного решения.

Отдельные авторы, например [3], опасаются, что повсеместное применение железобетона может привести к отсутствию потребности в специалистах, способных возвести каменные своды, и в целом выполнению сводчатых конструкций из кирпича.

**Постановка задачи.** В качестве объекта исследования рассматривается Гарнизонный храм Казанской иконы Божией Матери при Академии ФСО России в г. Орле [5].

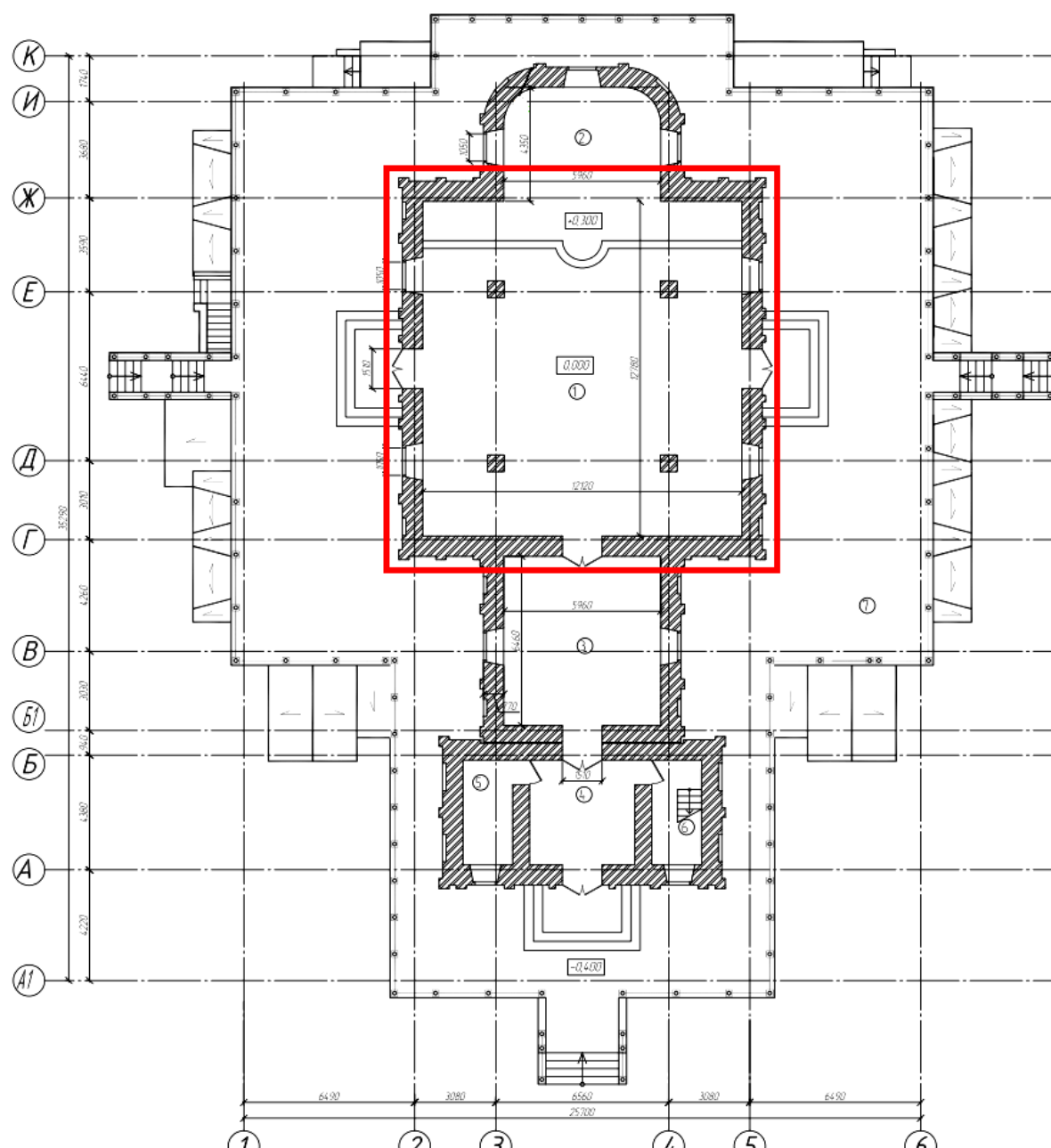
Строительство храма осуществлялось после перерыва (в 2008 г.), на момент которого были выполнены конструкции фундамента и цокольного этажа. В процессе возобновленного строительства с 2016 г. при изменении архитектурного решения храма [6] на существующих конструкциях возник вопрос конструктивного решения сводов храма. В качестве возможных вариантов рассматривалось выполнение сводов в железобетоне (первоначально запланированное

решение в проектной документации 2008 г.) и кирпичными как альтернативный вариант (при возобновленном проектировании).

Предметом исследования является напряженное состояние конструкций сводов здания православного храма, выполненных в варианте из кирпича.

В проекте рассматривались: кирпич керамический полнотелый КР-р-по 250×120×65/1НФ/150/2,0/100 по ГОСТ 530-2012; раствор цементно-песчаный М150/Ф100 Пк 2 по ГОСТ 28013-98.

Расположение сводов в осях 2-5/Г-Ж на плане православного храма Казанской иконы Божией Матери показано на рис. 1. Размер покрываемого конструкциями «квадрата» в осях 12720 × 13040 мм. Пролеты самих сводов по цифровым осям – 6560 мм, по буквенным – 6440 мм. Своды крестовые, сечением в виде полукруга [1, гл. 4], толщиной 250 мм (толщина принята равной толщине «железобетонного» варианта для первой предварительной оценки напряжений).



**Рис. 1.** Расположение сводов на плане православного храма Казанской иконы Божией Матери при Академии ФСО России (в г. Орле)

**Методы исследования.** Было принято решение получить полноценный конечно-элементный расчет с объёмной геометрической моделью в ПК «Ansys» [7].

На рис. 2 показана геометрия верхней части храма, на рис. 3 – конечно-элементная объёмная модель, на рис. 4 – загрузка суммарной нагрузкой от вышележащих конструкций (Force C:  $1.5 \cdot 10^5$  Н; собственный вес (гравитация) Force B –  $9806 \text{ мм/с}^2$ ).

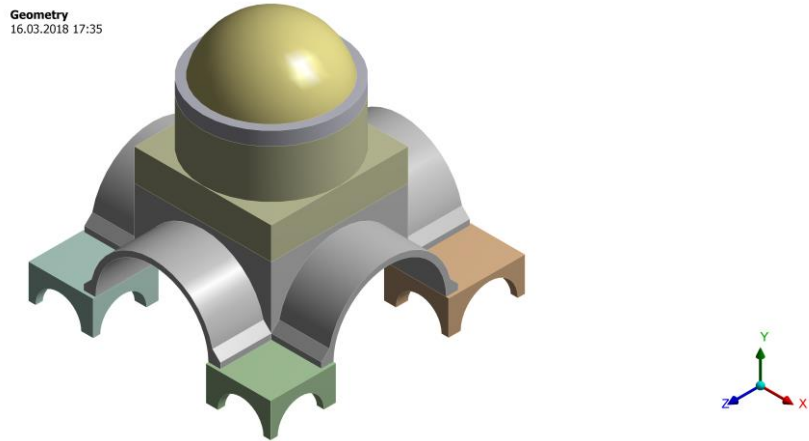


Рис. 2. Геометрия верхней части храма в ПК «Ansys»

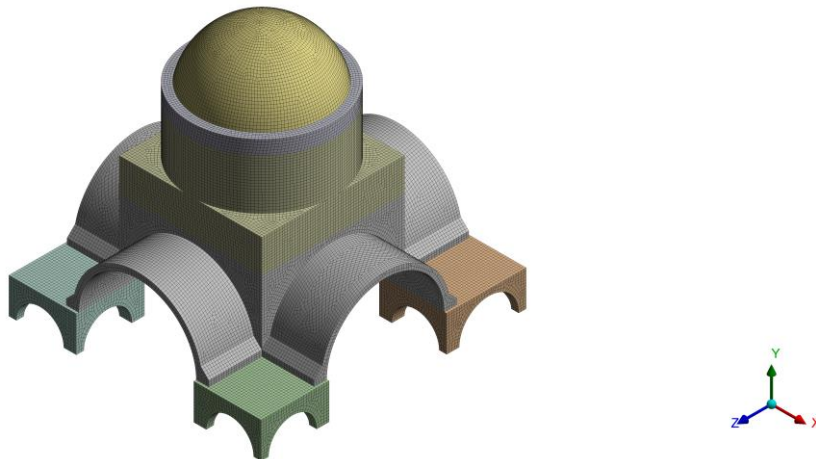


Рис. 3. Конечно-элементная объёмная модель в ПК «Ansys»

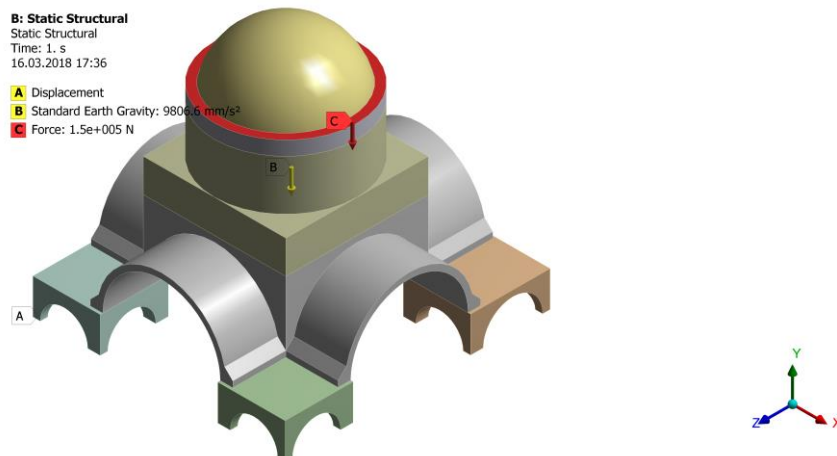


Рис. 4. Загрузка суммарной нагрузкой от вышележащих конструкций в ПК «Ansys»

Расчетное сопротивление сжатию кладки  $R = 2,4$  МПа; расчетное сопротивление кладки растяжению по перевязанному сечению  $R_t = 0,16$  МПа; модуль упругости (начальный модуль деформаций) кладки  $E_0 = 7200$  МПа [8].

**Результаты.** На рис. 5–8 показаны картины распределения максимальных и минимальных напряжений (Type: Principal Stress) в сводах.

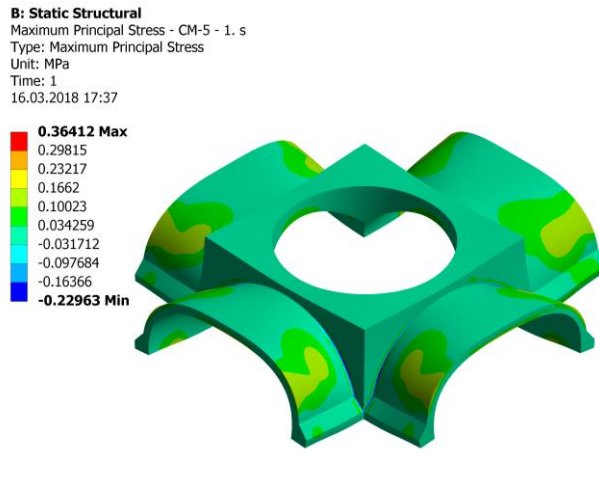


Рис. 5. Картина распределения максимальных напряжений в сводах (вид сверху) в ПК «Ansys»

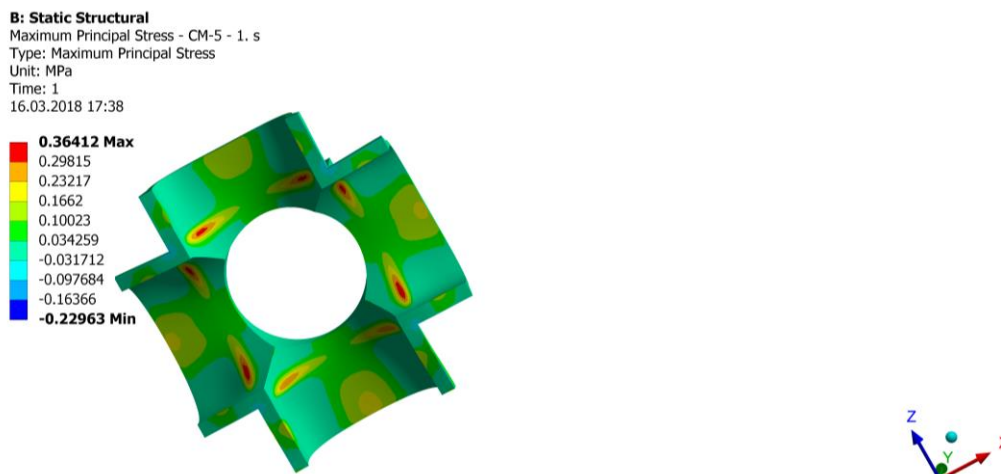


Рис. 6. Картина распределения максимальных напряжений в сводах (вид снизу) в ПК «Ansys»

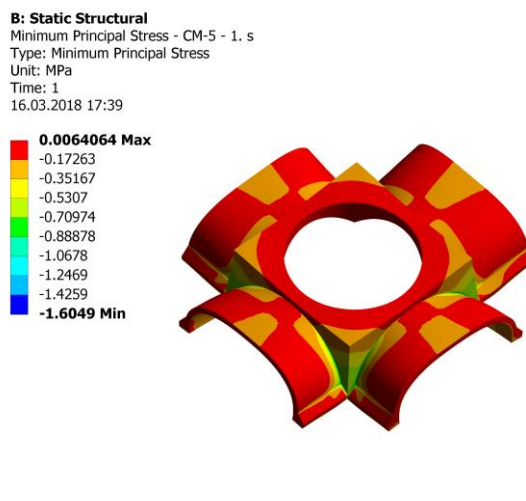


Рис. 7. Картина распределения минимальных напряжений в сводах (вид сверху) в ПК «Ansys»

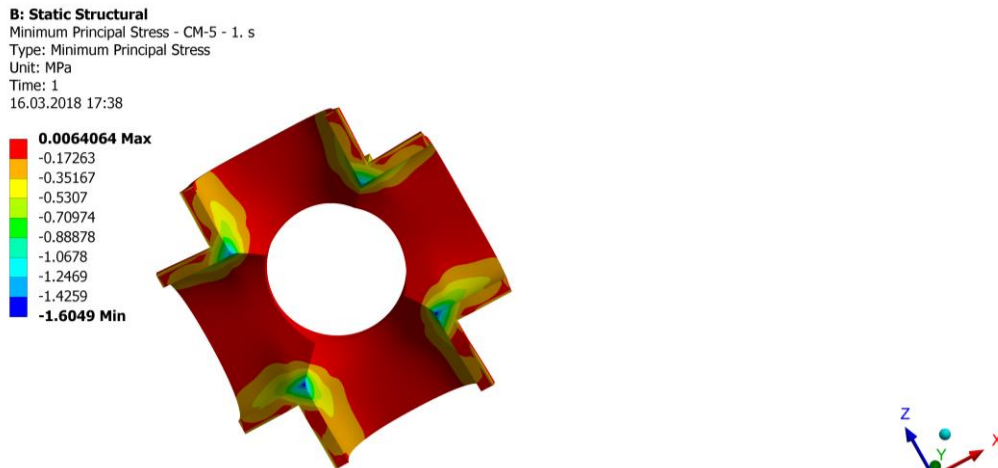


Рис. 8. Картина распределения минимальных напряжений в сводах (вид снизу) в ПК «Ansys»

**Выводы.** Проведенное моделирование и полноценный конечно-элементный расчет с объемной геометрической моделью в ПК «Ansys» позволили получить сложные картины распределения напряжений.

Максимальные напряжения в сводах (Type: Principal Stress) – 0,36412 МПа, минимальные (наибольшие) – 1,6049 МПа. Превышение расчетного сопротивления растяжению считается началом образования трещин [9] и показывает необходимость увеличения толщины.

Увеличение толщины сводов в данном объекте исследования было нецелесообразным и опасным [10], т. к. нагрузка при увеличении толщины сводов из кирпича до необходимых превышала допустимую нагрузку на кирпичные колонны выше 0,000 и колонны стилобатного цокольного этажа (которые были уже выполнены). Поэтому после проведения данных расчетов вариант альтернативного конструктивного выполнения сводов кирпичными, взамен железобетонных, первоначально запланированных, был отклонен.

Таким образом, полноценное конечно-элементное моделирование и расчет с объемной геометрической моделью позволили произвести необходимую оценку напряженного состояния конструкций сводов при окончательном выборе их конструктивного решения.

#### Библиографический список

1. Черняев А. А., Савин С. Ю., Коробко В. И. Введение в специальность «Строительство». Германия, Саарбрюккен: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. 208 с.
2. Кожанов Д. А., Лихачева С. Ю. Конечно-элементное моделирование в инженерных расчетах механики деформируемого твердого тела. Н. Новгород: ННГАСУ, 2024. 51 с.
3. Левшеков С. С. Особенности архитектурных и конструктивных решений современных храмов // Architecture and Modern Information Technologies. 2019. № 2 (47). С. 109–121. URL: [https://marhi.ru/AMIT/2019/2kvart19/PDF/07\\_levshekov.pdf](https://marhi.ru/AMIT/2019/2kvart19/PDF/07_levshekov.pdf) (дата обращения 04.11.2025).
4. Кеслер М. Ю. Православные храмы. Примеры архитектурно-строительных решений: в 3 т. Т. 3. М.: АХЦ «Арххрам». 2003. 259 с.
5. Гарнизонный храм Казанской иконы Божией Матери при Академии ФСО России в Орле. URL: <https://orel-eparhia.ru/objects/territory/orel/kazansky-naugorskiy> (дата обращения 04.11.2025).
6. СП 391.1325800.2017. Храмы православные. Правила проектирования. М.: Стандартинформ, 2018. 242 с.
7. Ansys: оф. сайт разработчиков. URL: <https://www.ansys.com/?d=pub.xxx&d=pub.xxx> (дата обращения 04.11.2025).
8. СП 15.13330.2020. Каменные и армокаменные конструкции. М.: Стандартинформ. 108 с.
9. Алексеев П. А., Мелешко В. А., Трофимов А. В. Нелинейный анализ кирпичных сводчатых конструкций исторических зданий // Строительная механика и расчет сооружений. 2024. № 2 (313). С. 14–19.

10. Федеральный закон РФ «Технический регламент о безопасности зданий и сооружений» от 30.12.2009 N 384-ФЗ (ред. от 25.12.2023).

### References

1. Chernyaev A. A., Savin S. U., Korobko V. I. Introduction to the Specialty "Construction". Germany, Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. 208 p.
2. Kozhanov D. A., Likhacheva S. Yu. Finite Element Modeling in Engineering Calculations of Solid Mechanics: a textbook. Nizhny Novgorod: NNGASU, 2024. 51 p.
3. Levshekov S. S. Features of architectural and structural solutions for modern churches. Architecture and Modern Information Technologies. No. 2(47). 2019. Pp. 109–121. URL: [https://marhi.ru/AMIT/2019/2kvart19/PDF/07\\_levshekov.pdf](https://marhi.ru/AMIT/2019/2kvart19/PDF/07_levshekov.pdf) (date of access 04.11.2025).
4. Kesler M. Yu. Orthodox Churches. Examples of Architectural and Construction Solutions: in 3 Volumes. Vol. 3. Moscow: AHTs "Arkham". 2003. 259 p.
5. Garrison Church of the Kazan Icon of the Mother of God at the Academy of the Federal Guard Service of Russia in Orel. URL: <https://orel-eparhia.ru/objects/territory/orel/kazansky-naugorskiy> (date of access 04.11.2025).
6. Set of Rules 391.1325800.2017. Orthodox Churches. Design rules. Moscow: Standartinform, 2018. 242 p.
7. Ansys: official developer website. URL: <https://www.ansys.com/?d=pub.xxx&d=pub.xxx> (accessed 04.11.2025).
8. Set of Rules 15.13330.2020. Stone and Reinforced Stone Structures. Moscow: Standartinform. 108 p.
9. Alekseev P. A., Meleshko V. A., Trofimov A. V. Nonlinear analysis of brick vaulted structures of historic buildings. Structural Mechanics and Calculation of Structures. No. 2 (313). 2024. Pp. 14–19.
10. Federal Law of the Russian Federation “Technical Regulations on the Safety of Buildings and Structures” dated 30.12.2009 N 384-FZ (as amended on 25.12.2023).

## MODELING AND ASSESSMENT OF THE STRESS STATE OF ORTHODOX CHURCH VAULT STRUCTURES

A. A. Chernyaev <sup>1</sup>, K. V. Marfin <sup>2</sup>

Orel State University named after I.S. Turgenev <sup>1,2</sup>  
Russia, Orel

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial and Civil Engineering, tel.: 8(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures and Materials, tel.: +7 (906) 663-33-31, e-mail: marfinkirill@yandex.ru.

---

This paper presents finite element modeling of the vaults of an Orthodox church building using Ansys. The object of the study is the Garrison Church of the Kazan Icon of the Mother of God at the Academy of the Federal Security Service of Russia (in Orel). The modeling was performed for the purposes of calculating and possibly designing an alternative structural design for the vaults using brick, replacing the reinforced concrete originally planned in the design documentation. The paper presents a finite element volumetric geometric model of the vaults and the resulting stress distribution patterns from the combined load of the overlying structures. The modeling and calculations were used in the subsequent discussion and selection of the structural solution for the church vaults. Thus, comprehensive finite element modeling and calculations with a volumetric geometric model allowed for the necessary assessment of the stress state of the vault structures during the final selection of their structural solution.

**Keywords:** vaults, Orthodox churches, finite element volumetric calculation model.

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

УДК 624.131.551.4:624.07  
DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.011

## ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ АВТОМОБИЛЬНОГО ПОТОКА НА ЗДАНИЯ РАМНО-СВЯЗЕВЫХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ТРАНСПОРТНЫХ АРТЕРИЙ (ОБЗОР И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ)

С. Ю. Гриднев <sup>1</sup>, В. С. Сафронов <sup>2</sup>, В. В. Дятлов <sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет <sup>1, 2, 3</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.: +7-910-346-60-19, e-mail: gridnev\_s\_y@rambler.ru

<sup>2</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.: +7-473-271-52-30, e-mail: vss@mail.ru

<sup>3</sup> Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7-901-874-91-93,  
e-mail: dyatlovvladislavvladimirovich@gmail.com

Рассмотрена задача передачи динамического воздействия от транспортного потока на конструкции зданий городской застройки, находящихся вблизи автомобильной магистрали. Выполнен обзор литературы по теме исследования. Сформулированы и описаны этапы решения и реализации поставленной задачи, а также методы исследования, включающие численные расчеты методом конечных элементов и натурные инструментальные измерения. Описаны используемые методы решения поставленной задачи и приведены примеры таких исследований. Определены основные этапы построения расчетных схем в конечноэлементных комплексах и описаны особенности конечноэлементного подхода в рамках поставленной в данном исследовании задачи. Рассмотрены существующие виды динамических нагрузок и возможность их применения для моделирования транспортного воздействия на грунтовое основание. Приведены примеры использования конечноэлементных и виброметрических комплексов для численных и инструментальных исследований транспортных динамических задач. Определены условия возникновения и распространения сейсмических волн в грунтовой среде как в упругом полупространстве. Рассмотрены типы сейсмических волн и виды их затухания (демпфирования). Выдвинуто предположение возникновения стоячих волн в конструкциях при подкачке энергии от динамического транспортного воздействия. Предложена схема распространения транспортного воздействия в грунтовом массиве от динамической нагрузки с последующей передачей энергии волны на сооружения.

**Ключевые слова:** транспортный поток, динамическое воздействие, грунтовое основание, сейсмическая волна, метод конечных элементов, виброметрические измерения, стоячая волна.

**Введение.** Движущийся транспорт является одним из основных источников техногенного вибрационного воздействия на близлежащие здания и сооружения. Исследования такого влияния на основания и фундаменты проводятся уже достаточно давно.

А. В. Банах в статье [1] среди авторов, которые занимались вопросами моделирования работы строительных конструкций при динамических воздействиях, особенностями формирования расчетных моделей, в том числе и с учетом основания, возможностями их анализа и контроля адекватности рассчитываемых систем реальным объектам выделяет В. П. Агапова, А. С. Городецкого, А. А. Дыховичного, И. Д. Евзерова, С. Ф. Клованич, Э. З. Криксунова, В. В. Кулябо, А. В. Перельмутера, В. И. Сливкер, Е. Б. Стрелец-Стрелецкого и др.

Большая часть работ, посвященная исследованию воздействия вибраций через грунтовый массив, относится к железнодорожному транспорту и метро. В основе большинства исследований лежат результаты анализа натурных испытаний и расчеты в конечноэлементных



программных комплексах с верификацией результатов. Большинство авторов приходят к мнению, что универсального метода определения динамических воздействий, передающихся через грунтовый массив, невозможно добиться и каждая отдельная задача требует индивидуального подхода. При этом вопрос о возникновении стоячих волн в элементах сооружений от воздействия транспортной динамической нагрузки в исследованиях по теме не освещен вовсе. В работах [1, 2] автор рассматривает различные варианты моделирования работы строительных конструкций при динамических воздействиях. В [3] приведены исследования по оценке воздействия вибрации, вызванной движением железнодорожных поездов. В статье [4] приведены исследования вибрационного воздействия от проезда одиночного грузового транспортного средства. В [5] представлены экспериментальные и расчетные исследования динамических явлений в зданиях повышенной этажности при воздействии метрополитена.

В общем случае передачу динамического воздействия от транспортного потока на конструкции зданий можно разделить на несколько этапов:

1. Транспортный поток воздействует на дорожное полотно, что приводит к образованию сейсмических волн;
2. Волна распространяется в грунтовом массиве, который представляет из себя нелинейную неоднородную среду и достигает элементов сооружений;
3. Волна, меняя свои характеристики, передает энергию от основания на фундамент зданий;
4. Динамическое воздействие распространяется по всей строительной конструкции с возможностью образования стоячих волн в отдельных элементах;
5. Регулярная подкачка энергии от транспортного потока оказывает негативное влияние на несущую способность и долговечность сооружения.

Исходя из перечисленных этапов передачи динамического воздействия через грунтовое основание от транспортных потоков на конструкции зданий при выполнении научных исследований необходимо решить следующие вопросы:

1. Определить состав транспортного потока и уровень его динамического воздействия. Определить характеристики передаваемой от транспортного потока волны;
2. Определить законы распространения динамического воздействия в грунтовом массиве и характер его распространения с учетом возможности образования волноводов различного типа;
3. Определить механизм передачи волны с грунтового основания на элементы конструкции с учетом фундамента здания. Выяснить, как при этом меняются характеристики волны;
4. Смоделировать распространение волны в элементах строительной конструкции. Выявить условия образования стоячих волн в элементах строительной конструкции от динамического воздействия, вызванного транспортным потоком.

**Методы исследования.** Существующие в настоящее время методы оценки (в основном компьютерное моделирование) изменения внешних воздействий при переходе волн из грунта в тело сооружения требуют задания ряда коэффициентов, описывающих физико-механические свойства всей системы, в том числе зоны контакта сооружения с грунтами основания.

Для определения влияния динамических нагрузок на конструкции зданий используют различные методы исследования, которые можно разделить на две группы:

- 1) натурные измерения;
- 2) численные расчеты.

Выполнение специальных экспериментальных сейсмометрических исследований (динамических испытаний грунтов) является одним из основных путей получения достоверной информации о свойствах основания и позволяет обосновать выбор модели грунта при выполнении численных расчетов.



Е. А. Вознесенский [6] выделяет четыре группы полевых методов динамических испытаний грунтов:

1. Сейсмоакустические методы: основаны на расчете динамических модулей, коэффициента Пуассона и затухания грунта по измеренным скоростям сейсмических волн (объемных или поверхностных);

2. Геофизические несейсмические методы: не являются способами динамических испытаний, поскольку не предполагают возбуждения волн напряжений в грунтах, но способны дать значимую информацию о свойствах, которые в той или иной мере учитываются при решении задач динамики грунтов;

3. Вибрационные методы: расчет динамических характеристик грунта проводится на основе анализа его взаимодействия с сооружением (в том числе с его моделью);

4. Геотехнические методы.

В общем случае динамические испытания проводят с целью определения основных показателей грунтов, среди которых выделяют:

1. Динамические модули грунта;

2. Коэффициент Пуассона;

3. Характеристики поглощения и затухания волн напряжений в грунтах;

4. Характеристики разжижаемости грунтов;

5. Параметры прочности;

6. Распределение напряжений и деформаций грунта в объеме.

Измерения воздействия вибраций от транспорта производятся акселерометрами для получения реальной акселерограммы, которая затем используется в расчетной модели для определения дополнительных нагрузок при динамических воздействиях транспорта. Исследования выполняются на основе сопоставления расчетных значений с экспериментальными данными.

Так, в работе [2] задача виброметрических измерений состояла в инструментальном определении частоты и амплитуды горизонтальных и вертикальных смещений несущих стен обследуемых зданий с последующим вычислением скорости и ускорения колебаний при помощи виброметрического комплекса, состоящего из датчиков И001 в комплекте с самописцем уровня ЭК ИТ-04 для регистрации в диапазоне частот 2–30 Гц. Для оперативной оценки уровня колебаний, настройки комплекса и уточнения мест расстановки датчиков использовался электронный цифровой виброметр БИП-7. В работе [3] полученные теоретические результаты, установленные виброобследованиями, сравниваются с фактическими параметрами вибрации здания на стадии эксплуатации. В качестве вибрационных критериев для строительных конструкций и грунтов основания выбраны максимальные значения виброскоростей и виброускорений в нескольких частотных диапазонах. Колебания сооружения регистрировались виброметром ЭКОФИЗИКА-111В (в госреестре № 66279-16). Измерения проводились тремя однокомпонентными датчиками (АР 2099-100). В работе [4] необходимые данные для проведения динамического расчета были получены экспресс-методами многоканального анализа поверхностных волн (МАПВ). В работе [5] для получения виброграммы амплитуды перемещений здания использовался прибор TSS-101 с датчиком И-001. В [7] с помощью физических экспериментов по методу стоячих волн определяли динамические параметры исследуемого здания. Система регистрации здесь представляет собой многомодульную систему из трёхкомпонентных регистраторов расширенного частотного диапазона БАЙКАЛ-АСН8. В качестве сейсмоприемников использовали трехкомпонентные акселерометры А1638.

**Численное моделирование динамического воздействия на конструкции зданий от транспортного потока.** Исследования вибрационного воздействия транспорта на основания и фундаменты зданий проводят как путем натурных экспериментов, так и с помощью численного моделирования.

В настоящее время существует достаточно большое количество программных комплексов для численного моделирования вибрационного воздействия различных источников на

основания и фундаменты зданий. Так, например, в работах [1, 2] моделирование динамических воздействий на здание проводилось при помощи ПК «LIRA-Windows». Авторами работы [8] рассмотрено применение модуля «Quake/W» программного комплекса «GeoStudio» для численного моделирования вибрационного воздействия, которое оказывает движущийся по улице автотранспорт на фундаменты зданий и сооружений в условиях плотной городской застройки. Авторы [3] проводили численные исследования с помощью программного комплекса «midas GTS NX». Авторами [4] моделирование от проезжающего автомобиля осуществлялось в «Plaxis 2D v.9». В работе [5] произведен численный расчет с использованием программного комплекса «Ansys». В работе [7] создание конечно-элементной модели обследуемого здания осуществлялось в программном комплексе «SCAD».

Некоторые программы оснащены инструментами для моделирования динамических нагрузок от разных транспортных средств и позволяют учитывать не только массу автомобиля, но и особенности приложения динамической нагрузки в зависимости от количества колес и расстояния между ними. Это приводит к большой точности расчета и возможности оценки влияния динамического воздействия от единичного специализированного транспортного средства большой массы.

На кафедре строительной механики были ранее разработаны динамические модели подвижной нагрузки из состава автомобильного потока. Так, В. С. Сафронов и С. Ю. Гриднев разработали и использовали для исследования совместных колебаний несущих систем транспортных сооружений и подвижной нагрузки расчетные модели специализированных транспортных средств:

1. Тягач с полуприцепом для транспортировки длинномерных конструкций;
2. Автоцистерна для перевозки жидких грузов [15–17].

Однако использование сложных конечноэлементных моделей транспортных средств приводит к существенному увеличению размерности задач, трудоемкости расчета, устойчивости получаемых решений и не всегда соответствует возможностям расчетных комплексов.

Разнообразие программных комплексов, а также отсутствие подробного описания процесса создания моделей в опубликованных работах требует более детального исследования вопросов формирования расчетных моделей взаимодействия зданий с основаниями при передаче динамических воздействий через грунтовый массив и их применения в инженерной практике.

На данный момент наиболее распространенным методом расчета строительных конструкций является метод конечных элементов (МКЭ).

Решение поставленной задачи в расчетном комплексе МКЭ необходимо проводить в несколько этапов, на которых задаются влияющие на конечный результат ключевые свойства расчетной схемы:

1. Определение признака схемы (количества степеней свободы в узлах схемы). На данном этапе определяется, в какой постановке будет производиться моделирование распространения сейсмических волн – плоской или пространственной. От выбора признака схемы зависит, по каким законам будет происходить убывание энергии волны в пространстве модели;

2. Построение геометрии расчетной модели. На этом этапе определяются основные физические характеристики элементов схемы, которые оказывают значительное влияние на передачу и распространение сейсмических волн. На основании выбранных характеристик выполняется подбор конечных элементов, наиболее точно отражающих свойства обследуемых частей конструкции. А поскольку каждый программный комплекс имеет уникальную библиотеку конечных элементов, то решения для разных участков расчетной схемы могут проводиться в разных программах с необходимостью переноса соответствующих исходных данных и результатов между расчетными моделями, соответствующими каждому этапу исследования;

3. Выбор граничных условий. Поскольку грунтовое основание имеет только верхнюю границу, то возникает необходимость определения таких граничных условий грунтовой среды, которые будут в достаточной степени учитывать демпфирующие свойства основания, но при

этом не перегружать расчетную модель. Также от выбора граничных условий зависят характеристики преломленных и отраженных сейсмических волн в грунте и элементах конструкции;

4. Задание действующих на систему нагрузок. При моделировании воздействия от автомобильного потока возникает необходимость обосновать тот или иной тип динамической нагрузки, используемой в расчетах. В большинстве исследований, посвященных изучению влияния транспортной нагрузки на напряженно-деформированное состояние конструкций, авторами в качестве загрузки рассматривается прохождение одиночного транспортного средства. В рамках же рассматриваемой задачи требуется обосновать наличие регулярной составляющей автомобильного потока;

5. Определение физических свойств элементов расчетной схемы. После выбора определенных типов конечных элементов для моделирования основания нужно учесть демпфирующие и деформационные свойства грунтового массива. И поскольку грунт не является абсолютно упругой и однородной средой, а влияние вибраций может изменять его характеристики, необходимо обосновать выбор модели грунтового массива и ряда коэффициентов, описывающих свойства основания;

6. Выполнение расчета и обработка полученных данных. По результатам проведенных исследований необходимо сделать обоснованные выводы о влиянии динамических транспортных нагрузок на напряженно-деформированное состояние (НДС) элементов конструкции. Полученные данные позволят прогнозировать развитие негативно влияющих на НДС конструкции процессов и разработать методику по их предупреждению.

Основная проблема использования реализующих МКЭ программных комплексов заключается в том, что конкретных правил создания расчетных схем и их анализа не существует, при этом каждый программный комплекс МКЭ обладает индивидуальными инструментами расчета и требует конкретных инструкций, доступ к которым зачастую затруднен для рядового пользователя.

В связи с этим возникает необходимость решения следующих вопросов.

1. Обоснование выбора программного комплекса на основе выбранных для решения конкретной задачи критериев;

2. При выборе двух и более конечноэлементных комплексов необходимость разработки механизма передачи исходных данных и результатов между расчетными схемами и выполнение их увязки между собой.

Все вышеперечисленные вопросы в первую очередь требуют понимания физики процесса возникновения и передачи динамических волн в грунтовом массиве и конструкциях зданий, что вызывает необходимость описания этого процесса с точки зрения физических законов и в рамках решаемой в данном исследовании задачи.

**Динамическая нагрузка и ее распространение в грунтовом основании.** Транспортный поток оказывает динамическое воздействие на грунтовое основание. Создаваемые транспортным потоком напряжения в грунтовом массиве рассеиваются со временем.

По Е. А. Вознесенскому [6], динамическим воздействием можно назвать любую переменную нагрузку, которая изменяется во времени быстрее, чем рассеиваются вызванные ею напряжения в грунте. При этом на практике большая часть динамических нагрузок вызывает чередование возрастания и убывания напряжений во времени, что является колебательным процессом.

В инженерной практике наиболее частым примером колебаний является смещение некоторой массы по определенному закону. Вызываемые этой массой напряжения в грунте подчиняются тому же закону, что и перемещения источника.

По характеру колебаний различают несколько видов динамических нагрузок:

1. Периодическая нагрузка;

2. Непериодическая нагрузка: а) ударная (импульсная), б) почти периодическая, в) нерегулярная.

Помимо этого, различают знакопеременную и знакопостоянную динамическую нагрузку.

Вибрация сооружений и грунтов является самым распространенным вариантом динамической нагрузки и представляет собой механические колебания низких частот (от 1 до 100 Гц). К таким колебаниям в большинстве своем восприимчивы органы чувств человека.

В общем случае транспортное воздействие является сложным видом нерегулярной динамической нагрузки и подразумевает случайный характер изменения напряжений во времени. Сложность изучения поведения грунтов под воздействием нерегулярных нагрузок заключается в невозможности регистрации «входного» источника сигнала – определения динамической нагрузки. В этом случае возможна только регистрация реакции грунтов на возмущение – «выходного» сигнала. При этом для исследования динамических свойств грунтового основания необходимо установить взаимосвязь между двумя сигналами – «входным» (нагрузкой) и «выходным» (реакцией грунта).

Наиболее удобным вариантом динамической нагрузки для экспериментальных исследований грунтов является гармоническая нагрузка. Напряжения под воздействием вынужденных гармонических колебаний изменяются по закону синуса от нуля до амплитудного значения:

$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Использование синусоидальной нагрузки обусловлено следующими факторами:

1. Под воздействием такой нагрузки перемещение, скорость и ускорение колебаний частиц грунтовой среды тоже происходят по закону синуса;
2. Такая нагрузка позволяет получить результирующее периодическое колебание при сложении (суперпозиции) двух и более гармонических колебаний от нескольких источников динамического воздействия.

При воздействии автомобильной динамической нагрузки на дорожное покрытие в полупространстве грунтового основания распространяется колебание, называемое сейсмической волной. Волны напряжений, возникающие от источника, переносят энергию в грунтовом массиве и могут быть определены следующими типами: 1) продольные; 2) поперечные; 3) поверхностные.

Продольные и поперечные волны распространяются по всему объему грунта с постоянными скоростями  $V_P$  и  $V_S$  соответственно, связанными следующим соотношением:

$$\frac{V_S}{V_P} = \sqrt{\frac{(1 - \mu)}{2(1 + \mu)}} \leq 1, \quad (2)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

В полупространстве грунтового массива, имеющего свободную границу, помимо объемных волн, образуются поверхностные волны Рэлея, а также коническая волна.

Помимо этого, если грунтовое основание имеет включения-волноводы (например, подземные коммуникации) или слоистую структуру, в которой акустическая жесткость у слоев различна, то под воздействием динамических нагрузок могут возникнуть: псевдорэлеевская волна, волны Лява, а также система обменных (преломленных и отраженных) волн.

Основной вклад энергии динамического воздействия на значительном расстоянии от источника имеют поверхностные волны [9]. При этом они быстро затухают на глубине около одной длины волны.

Грунт не является идеальной средой для распространения динамических воздействий. Неидеальная упругость, неоднородность строения и дискретность приводят к тому, что по мере удаления от источника интенсивность динамической нагрузки снижается и происходит затухание (демпфирование) волны с потерей части ее энергии. Выделяют следующие виды затухания: 1) расхождение; 2) рассеяние; 3) поглощение.

Несмотря на то, что все виды затухания в грунте действуют одновременно, на разном расстоянии от источника их вклад будет различаться. Помимо этого, соотношение между разными видами демпфирования может сильно отличаться в зависимости от типа и частоты волны, а также свойств и состава грунтовой среды.

Согласно [10], транспортная автомобильная нагрузка является линейным наземным источником постоянных периодических вибраций с основной частотой 10–20 Гц и зоной действия 40–100 м. В качестве характерного значения виброускорения для автомобильной динамической нагрузки автор приводит значение до 31 дБ.

Указывается, что на расстоянии 25–40 м от автомагистралей и перекрестков колебания соответствуют уровню 3–4-балльного землетрясения.

Автомобильные магистрали являются источником вибраций, состоящим из непрерывно движущихся транспортных средств. Каждое транспортное средство представляет собой источник колебаний с относительно малой амплитудой.

Уровень виброскорости такого источника связан с интенсивностью транспортного потока и вычисляется по формуле:

$$A = 21,51N^{0,13}, \quad (3)$$

где  $A$  – уровень виброскорости, дБ;  $N$  – интенсивность транспортного потока, тр. ед./ч.

Учитывая, что пропускная способность городских магистралей рассчитана на интенсивность  $N = 10000$  тр. ед./ч и более, можно сделать вывод, что уровень вибраций при изменении виброскорости от автомобильной динамической нагрузки в некоторых случаях может достигать 65–70 дБ.

Формула (3) справедлива для автомагистралей с гладким покрытием, выполненным из асфальта или бетона, а это значит, что наличие дефектов дорожного полотна также требует дополнительного рассмотрения.

Помимо этого, необходимо учитывать, что собственные частоты большинства сооружений часто бывают близки к наиболее низкочастотным составляющим транспортного воздействия.

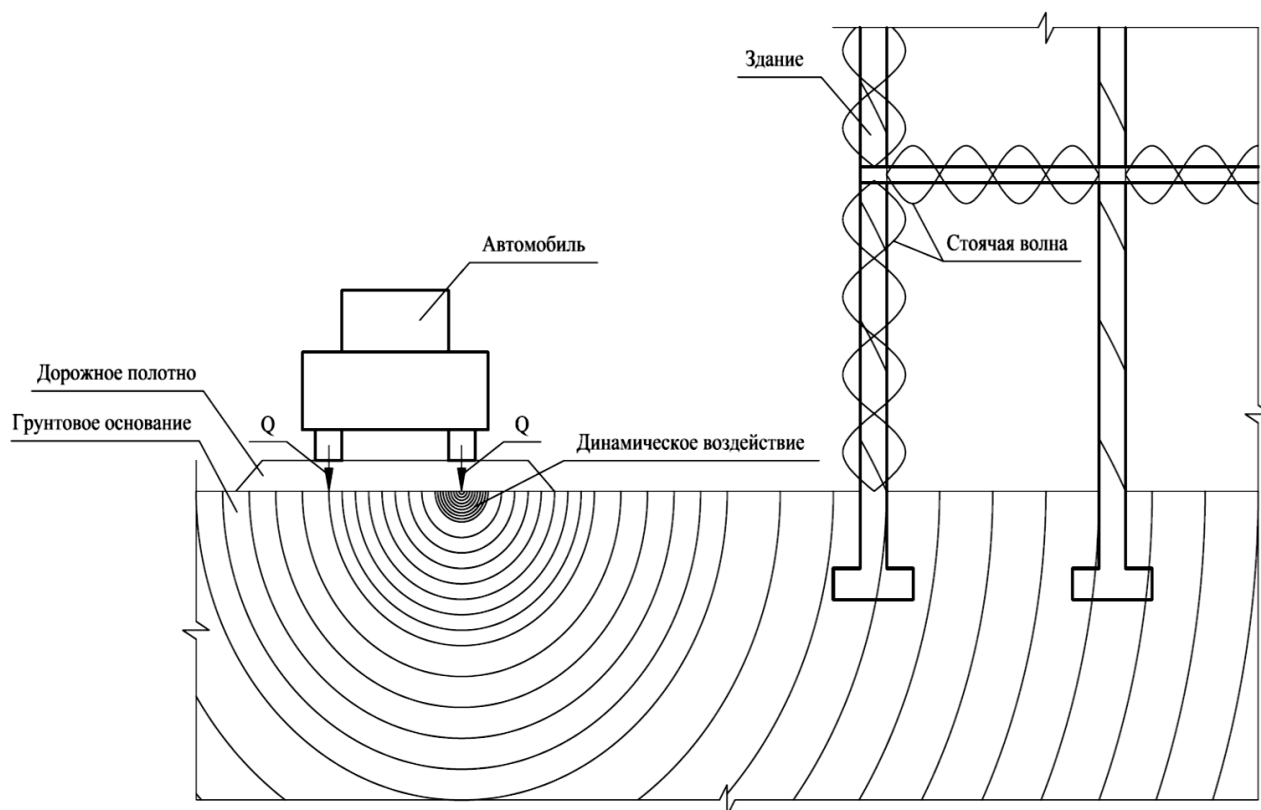
**Постановка задачи.** В работе [12] изложена принципиальная схема исследования по оценке влияния автомобильных транспортных потоков на НДС зданий рамно-связевых систем.

Авторы работы [8] среди факторов, влияющих на величину вибрационного воздействия автотранспорта на основания и фундаменты, выделяют расстояние до источника, массу транспортного средства, грунтовые условия, тип фундамента, состав и характер движения, состояние покрытия, климатические условия и т. д. Также по результатам исследований авторы приходят к выводу, что наибольшее влияние автотранспорт оказывает на основания, сложенные из глинистых грунтов, меньшее – на песчаные основания.

При регулярном воздействии транспортного потока на проезжую часть воздействие через грунтовое основание передается на находящееся вблизи здание. Волна распространяется в строительной конструкции и в ряде случаев между элементами конструкции формируется стоячая волна (рис. 1). При подкачке энергии амплитуда волны возрастает, что приводит к появлению трещин, чаще – в перекрытиях и реже – в стенах. Появление трещин говорит об уменьшении несущей способности элемента.

Согласно работе [11], значения амплитуды колебательной скорости грунтов при техногенных вибрациях могут достигать первых десятков мм/сек, что соответствует 5–6-балльному землетрясению. И несмотря на то, что методика оценки динамического воздействия землетрясений на массивы грунтов далеко не во всех случаях подходит и для изучения эффекта техногенных вибраций, многие положения инженерной сейсмологии в отношении распространения волн и оценки их влияния на грунтовые массивы могут быть заимствованы для изучения вибраций.

Сегодня изучение распространения упругих волн в грунтах производится на основе теории механики сплошных сред [9]. Данная теория является феноменологической и позволяет в большинстве случаев получить верный результат при рассмотрении малоамплитудного волнового поля.



**Рис. 1.** Формирование стоячей волны в перекрытии от транспортной динамической нагрузки

Размеры расчетной области основания выбираются таким образом, чтобы динамическое взаимодействие основания и сооружения не оказывало влияния на НДС в окрестности его границы. Во избежание фиктивных отражений на внешних границах модели устанавливаются вязкие границы. Размеры конечных элементов назначаются с учетом скорости распространения волн. Характеристики упругих и поглощающих свойств грунтов принимают по данным физико-механических испытаний грунтов.

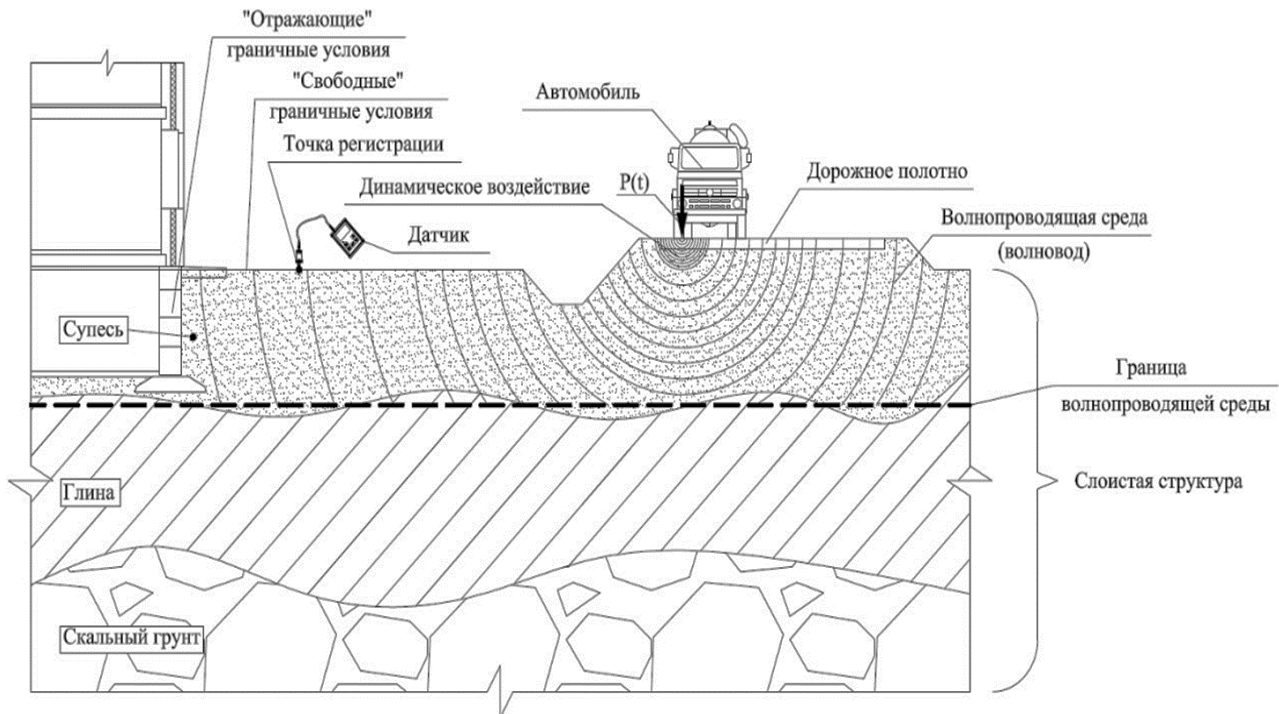
Модель основания должна быть максимально подробной, учитывающей наличие неоднородностей, подземных конструкций и инженерных сетей в грунтовой толще, геометрическую и физическую нелинейность, односторонние связи.

Колебания, создаваемые при движении транспорта, передаются в грунт. По мере удаления от источника они неравномерно затухают с расстоянием, так как являются совокупностью сейсмических волн разных типов – объемных и поверхностных, ослабевающих с расстоянием по разным законам.

Чаще всего на практике в условиях городской застройки грунтовый массив представляет из себя слоистую неоднородную структуру. Некоторые элементы этого массива могут формировать горизонтальный волновод, имеющий различные граничные условия. Отражающие – при наличии других элементов, от которых волна отражается, или прозрачные – при отсутствии таких элементов.

Получение достоверных в прикладном отношении результатов возможно при уменьшении площади рассеивания упругих волн границами волнопроводящей среды (волновода).

Этого можно добиться за счет моделирования физически обоснованной среды, в которую будут входить элементы-волноводы, препятствующие распространению волны за пределы собственного замкнутого контура, в который входят точки регистрации и приложения нагрузки (рис. 2).



**Рис. 2.** Модель распространения динамических воздействий от автомобильной нагрузки

В работе [13] средствами конечноэлементного комплекса были получены оптимальные значения размеров грунтового основания для выполнения поставленной в исследовании задачи, а также подобраны конечные элементы, позволяющие моделировать прозрачную границу волноводящей среды.

В работе [14] выполнены расчеты, показывающие значимость влияния подземных коммуникаций на образование волноводов и изменение характеристик сейсмических волн.

#### Библиографический список

1. Банах В. А. Моделирование работы строительных конструкций эксплуатируемых зданий при передаче динамических воздействий через грунтовый массив // Наука и прогресс транспорта. Вестник Днепропетровского национального университета железнодорожного транспорта. 2011. № 39. С. 18–22.
2. Банах А. В., Тарарик А. А. Влияние динамических воздействий от транспорта на реконструируемые здания // Коммунальное хозяйство мост. Серия: Технические науки и архитектура. 2012. № 105. С. 214–219. EDN: UIMYEL.
3. Алирзаев И. Ш., Сова Н. С. Оценка воздействия вибрации от железнодорожного транспорта на промышленное здание // Известия вузов. Строительство. 2022. № 6 (762). С. 5–14. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-762-6-5-14. EDN: TPZQSL.
4. Антипов В. В., Офрихтер В. Г., Пономарев А. Б., Шутова О. А. Численное моделирование динамики фундамента существующего здания от грузового автомобиля // Вестник

Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2017. Т. 8, № 4. С. 5–14. DOI: 10.15593/2224-9826/2017.4.01. EDN: YLDAOU.

5. Бутырский С. Н., Ковальчук О. А. Техногенное вибрационное воздействие на здания повышенной этажности // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. № 6. С. 201–203. EDN: RUXUXL.

6. Вознесенский Е. А. Поведение грунтов при динамических нагрузках: учеб. пособие. М.: Изд-во МГУ, 1997. 288 с.

7. Волгин Г. А., Рожков А. Ф., Инжутов И. С., Гончаров Ю. М. Численно-экспериментальное исследование динамических параметров крупнопанельного здания // Вестник Томского государственного архитектурно-строительного университета. 2016. № 3 (56). С. 111–120. EDN: WAGNOT.

8. Шутова О. А., Пономарев А. Б. Численное моделирование вибрационного воздействия автотранспорта на фундаменты зданий // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Строительство и архитектура. 2018. Т. 9, № 1. С. 93–102. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.1.09. EDN: YUGJYG.

9. Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973. 496 с.

10. Жигалин А. Д., Локшин Г. П. Формирование вибрационного поля в геологической среде // Инженерная геология. 1991. № 6. С. 110–119.

11. Капустин В. В., Владов М. Л., Волков В. А., Вознесенский Е. А. Методические вопросы измерения вибрации для оценки их воздействия на массивы грунтов // Грунтоведение. 2021. № 1 (16). С. 65–76. DOI: 10.53278/2306-9139-2021-1-16-65-77. EDN: OTRGXZ.

12. Дятлов В. В., Гриднев С. Ю. Моделирование условий возникновения стоячих волн в элементах сооружения при воздействии транспортных потоков // Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений: тезисы докладов IX Междунар. симпозиума. Пенза: Изд-во ПГУ, 2025. С. 187–188.

13. Дятлов В. В., Гриднев С. Ю., Скалько Ю. И. Оптимизация размеров грунтового основания при моделировании передачи динамического воздействия автомобильного транспортного потока на жилые здания // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сб. материалов XXVI Междунар. науч.-техн. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2025. С. 37–46.

14. Дятлов В. В., Гриднев С. Ю., Скалько Ю. И. Оценка влияния образования волнового в грунтовом основании на характер распространения вибрационной нагрузки от транспортных потоков // Актуальные проблемы строительства и строительной индустрии: сб. материалов XXVI Междунар. науч.-техн. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2025. С. 47–52.

15. Гриднев С. Ю., Будковой А. Н. Динамическое воздействие автоцистерн с отсеками на путь при учете гидроудара // Строительная механика и конструкции. 2012. № 1 (4). С. 116–121.

16. Гриднев С. Ю., Будковой А. Н. Сопоставление результатов расчета колебаний балочной системы при переходных режимах движения автоцистерн с экспериментальными данными // Строительная механика и конструкции. 2014. Вып. № 1 (8). С. 88–95.

17. Гриднев, С. Ю., Будковой А. Н. Моделирование колебаний балочных систем при переходных режимах движения транспортных средств с жидкими грузами // Научный вестник ВГАСУ. Строительство и архитектура. 2014. Вып. № 4 (36). С. 113–125.

## References

1. Banakh V. A. Modeling of the work of building structures of operated buildings during the transmission of dynamic impacts through a soil massif // Science and progress of transport. Bulletin of the Dnepropetrovsk National University of Railway Transport. 2011. No. 39. Pp. 18–22.



2. Banach A. V., Tararsik A. A. The influence of dynamic impacts from transport on reconstructed buildings // Communal rule of the Ministry. Series: Technical sciences and architecture. 2012. No. 105. Pp. 214–219. EDN: UIMYEL.
3. Alirzaev I. S., Sova N. S. Evaluation of impact of vibration from rail transport on industrial building // News of higher educational institutions. Construction. 2022. No. 6 (762). Pp. 5–14. DOI: 10.32683/0536-1052-2022-762-6-5-14. EDN: TPZQSL.
4. Antipov V. V., Ofrichter V. G., Ponomarev A. B., Shutova O. A. Numerical modelling of the dynamic impact of a cargo vehicle on a building foundation // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Construction and architecture. 2017. Vol. 8, No. 4. Pp. 5–14. DOI: 10.15593/2224-9826/2017.4.01. EDN: YLDAOU.
5. Butyrsky S. N., Kovalchuk O. A. Technogenic vibration effect on high-rise buildings // Scientific and Technical Bulletin of the Volga region. 2013. No. 6. Pp. 201–203. EDN: RUXUXL.
6. Voznesensky E. A. Soil behavior under dynamic loads. Moscow: Publishing House of Moscow State University, 1997. 288 p.
7. Volgin G. A., Rozhkov A. F., Injutov I. S., Goncharov Yu. M. Experimental and numerical analysis of dynamic parameters of large-panel building // Bulletin of the Tomsk State University of Architecture and Civil Engineering. 2016. No. 3 (56). Pp. 111–120. EDN: WAGNOT.
8. Shutova O. A., Ponomarev A. B. Numerical modelling of vibration impact of motor transport on bases of buildings // Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Construction and architecture. 2018. Vol. 9, no. 1. Pp. 93–102. DOI: 10.15593/2224-9826/2018.1.09. EDN: YUGJYG.
9. Isakovich M. A. General Acoustics. Moscow: Nauka Publishing House, 1973. 496 p.
10. Zhigalin A. D., Lokshin G. P. The formation of a vibrational field in the geological environment // Engineering Geology. 1991. No. 6. Pp. 110–119.
11. Kapustin V. V., Vladov M. L., Volkov V. A., Voznesensky E. A. Methodological issues of vibration measurement to assess their impact on soil arrays // Soil science. 2021. No. 1 (16). Pp. 65–76. DOI: 10.53278/2306-9139-2021-1-16-65-77. EDN: OTPGXZ.
12. Dyatlov V. V., Gridnev S. Yu. Modeling the conditions for the occurrence of standing waves in structural elements under the influence of traffic flows // Actual problems of Computer Modeling of Structures and structures: abstracts of the IX International Symposium. Penza: Publishing House of PSU, 2025. Pp. 187–188.
13. Dyatlov V. V., Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I. Optimization of the size of the soil base when modeling the transmission of the dynamic impact of automobile traffic flow on residential buildings // Current problems of construction and the construction industry: collection of materials of the XXVI International Scientific and Technical Conference. Tula: TulSU Publishing House, 2025. Pp. 37–46.
14. Dyatlov V. V., Gridnev S. Yu., Skalko Yu. I. Assessment of the effect of waveguide formation in the soil base on the propagation of vibration load from traffic flows // Current problems of construction and the construction industry: collection of materials of the XXVI International Scientific and Technical Conference. Tula: TulSU Publishing House, 2025. Pp. 47–52.
15. Gridnev S. Yu., Budkov A. N. Dynamic impact of tank trucks with compartments on the path when taking into account the hydraulic impact // Construction mechanics and structures. 2012. No. 1 (4). Pp. 116–121.
16. Gridnev S. Yu., Budkov A. N. Comparison of the results of calculating the vibrations of the beam system during transient modes of movement of tank trucks with experimental data // Construction mechanics and structures. 2014. No. 1 (8). Pp. 88–95.
17. Gridnev S. Yu., Budkov A. N. Modeling of vibrations of beam systems in transient modes of movement of vehicles with liquid loads // Scientific bulletin of VGASU. Construction and architecture. 2014. No. 4 (36). Pp. 113–125.

---

## ASSESSMENT OF THE DYNAMIC IMPACT OF AUTOMOBILE TRAFFIC ON BUILDINGS OF FRAME COMMUNICATION SYSTEMS NEAR TRANSPORT ARTERIES (OVERVIEW AND PROBLEM STATEMENT)

S. Y. Gridnev <sup>1</sup>, V. S. Safronov <sup>2</sup>, V. V. Dyatlov <sup>3</sup>

Voronezh State Technical University <sup>1, 2, 3</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7-910-346-60-19,  
e-mail: gridnev\_s\_y@rambler.ru

<sup>2</sup> Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7-473-271-52-30,  
e-mail: vss@mail.ru

<sup>3</sup> Graduate Student of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7-901-874-91-93,  
e-mail: dyatlovvladislavvladimirovich@gmail.com

---

The problem of transferring the dynamic impact from the traffic flow on the structures of urban buildings located near the highway is considered. A review of the literature on the research topic has been performed. The stages of solving and implementing the task are formulated and described, as well as research methods, including numerical calculations using the finite element method (FEM) and full-scale instrumental measurements. The methods used to solve the problem are described and examples of such studies are given. The main stages of constructing computational schemes in finite element complexes are defined and the features of the finite element approach within the framework of the task set in this study are described. The existing types of dynamic loads and the possibility of their application for modeling the transport impact on the ground are considered. Examples of the use of finite element and vibrometric complexes for numerical and instrumental studies of dynamic transport problems are given. The conditions of occurrence and propagation of seismic waves in the ground environment as in an elastic half-space are determined. The types of seismic waves and types of their attenuation (damping) are considered. The assumption of the occurrence of standing waves in structures when pumping energy from dynamic transport action is put forward. A scheme is proposed for the propagation of transport effects in a soil mass from a dynamic load, followed by the transfer of wave energy to structures.

**Keywords:** traffic flow, dynamic impact, ground foundation, seismic waves, FEM, vibrometric measurements, standing waves.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.073.2.04

DOI 10.36622/2219-1038.2025.47.4.012

## ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ КОНТАКТНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОСНОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ МОДУЛЕМ ДЕФОРМАЦИИ

Н. Н. Некрасова<sup>1</sup>Воронежский государственный технический университет<sup>1</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики, тел.: +7(473)271-53-62,  
e-mail: Nekrasova-N@yandex.ru

Предложен общий подход к построению контактных моделей упругого неоднородного основания, модуль деформации которого возрастает с глубиной согласно зависимостям довольно общего вида. Коэффициент Пуассона полагается постоянным, так как его изменение несущественно сказывается на характеристиках напряженно-деформированного состояния грунтового основания. Учитывая, что между упругими постоянными существует известная связь, при таком рассмотрении переменным по глубине рассматривается соответственно и модуль сдвига  $G(z) = E(z) / 2(1 + \nu)$ . Принята гипотеза о пропорциональности нормальных напряжений. Решается задача о действии вертикальной сосредоточенной силы на поверхности неоднородного основания. Для характеристики изменения модуля деформации по глубине основания вводится в рассмотрение функция степени неоднородности. Реализован способ построения пространственных контактных моделей упругих оснований с возрастающим по глубине модулем деформации, который приводит к эффективным численным алгоритмам решения пространственных контактных задач механики грунтов для фундаментов мелкого заложения.

**Ключевые слова:** неоднородное основание, переменный коэффициент, модуль сдвига, модуль деформации, коэффициент Пуассона.

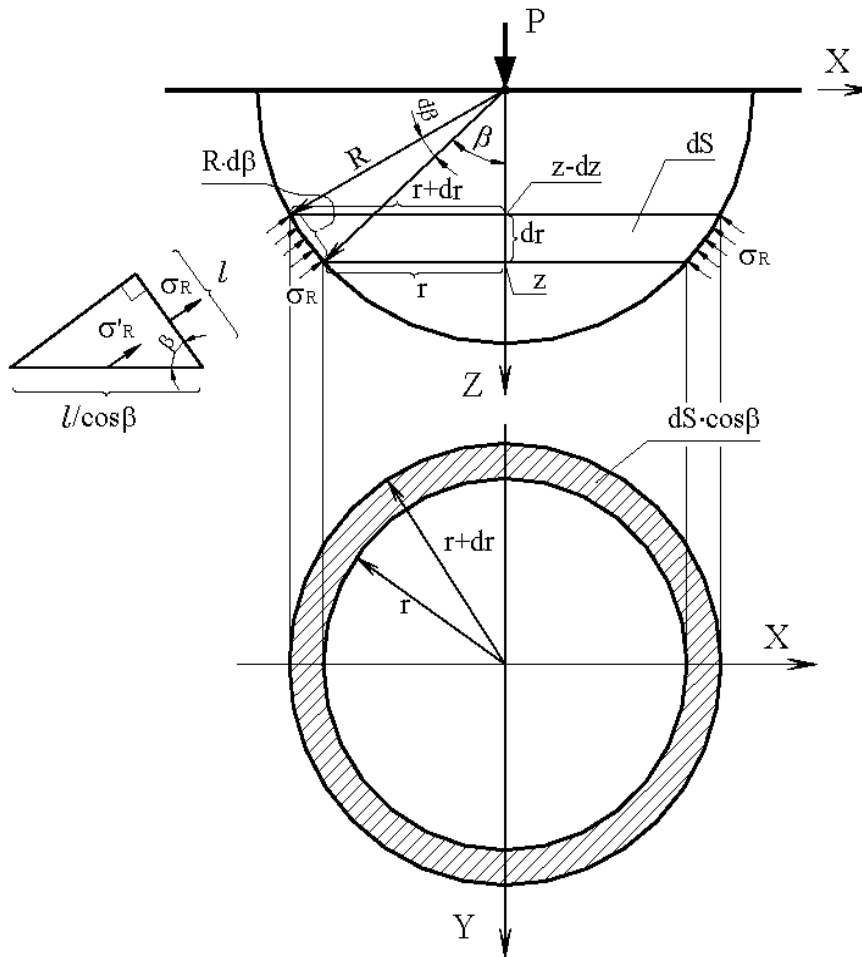
**Введение.** В работе обосновывается необходимость рассмотрения неоднородных оснований в виде упругого полупространства с переменными по глубине деформационными характеристиками. В ней развивается предложенная профессором Н. К. Снитко оригинальная методика нахождения фундаментального решения (ядра упругого основания), равного осадке свободной поверхности упругого полупространства, вызванной действием на него ортогональной сосредоточенной единичной силы, приложенной в начале системы координат, на свободной поверхности полупространства. Впервые решение такой задачи было предложено в труде профессора Буссинеска «О распределении напряжений в упругой почве от сосредоточенной силы».

Рассмотрим задачу Буссинеска о действии сосредоточенной силы  $P$  нормально плоскости  $z = 0$ , ограничивающей неоднородное упругое полупространство. Будем считать, что ось  $z$  направлена вглубь полупространства (рис. 1). Если совместить с точкой  $O$  приложения силы начала цилиндрической  $(r, \varphi, z)$  и сферической  $(R, \theta, \psi)$  систем координат, то в силу осевой симметрии задачи естественно принять, как и в случае однородного полупространства, следующее распределение радиальных перемещений:

$$u_r = \frac{D \cdot \cos \theta}{R}, \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол, отсчитываемый от оси  $z$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Для радиальных деформаций  $\varepsilon_R$  и напряжений  $\sigma_R$  будем иметь:

$$\varepsilon_R = -\frac{D \cdot \cos \theta}{R^2}, \quad \sigma_R = E(z) \cdot \varepsilon_R = -E(z) \frac{D \cdot \cos \theta}{R^2}. \quad (2)$$



**Рис. 1.** Задача Буссинеска о действии сосредоточенной силы  $P$  нормально плоскости  $z = 0$

С помощью формул перехода к цилиндрическим координатам получаем:

$$\sigma_z = \sigma_R \cdot \cos^2 \theta. \quad (3)$$

Так как (рис. 1)  $\cos \theta = \frac{z}{R}$ ,  $R = \sqrt{z^2 + r^2}$ , то будем иметь:

$$\sigma_R = -E(z) \cdot \frac{D \cdot z}{R^3}, \quad (4)$$

$$\sigma_z = -E(z) \cdot \frac{D \cdot z^3}{R^5}. \quad (5)$$

Определим входящий в (2) и (4) множитель  $D$  из уравнения равновесия полусферы, вырезанной около точки  $O$  приложения силы  $P$ , собирая давления с поверхности этой полусферы  $P + \iint_S \sigma_R \cdot \cos \theta ds = 0$ , или более подробно в развернутой записи:

$$P + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sigma_R \cdot \cos \theta \cdot R^2 \cdot \sin \theta d\theta = 0.$$

Учитывая (4), для постоянной  $D$  получаем:

$$D = \frac{P}{2\pi \cdot e(R)}, \quad (6)$$

где обозначено

$$e(R) = \int_0^1 E(Rt) t^2 dt. \quad (7)$$

Функция  $e(R)$  характеризует степень неоднородности упругого основания, обусловленную изменением модуля деформации по глубине.

Подстановка найденного значения  $D$  в (5) дает следующее выражение для вертикальных напряжений  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z = -\frac{P \cdot E(z)}{2\pi \cdot e(R)} \cdot \frac{z^3}{R^5}. \quad (8)$$

При  $E(z) = E_0 = \text{const}$ , как и следовало ожидать, имеем известную формулу Буссинеска для сжимающих напряжений в однородном полупространстве [1, 2]:

$$\sigma_z = -\frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5}. \quad (9)$$

Для определения пространственного напряженно-деформированного состояния неоднородного упругого основания сначала следует найти вертикальную деформацию, воспользовавшись законом Гука:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E(z)} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad (10)$$

или в случае осесимметричного напряженно-деформированного состояния:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E(z)} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi)]. \quad (11)$$

Так как распределения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  в неоднородном полупространстве нам неизвестны, то можно воспользоваться полуобратным методом, принимая гипотезы о распределении  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  (или  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ ).

В [1–3] используется предположение о пропорциональности нормальных напряжений и показано, что в этом случае

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = 0,5\nu \cdot \sigma_z. \quad (12)$$

Согласно гипотезе (12), вертикальные напряжения в неоднородном полупространстве распределяются в горизонтальной плоскости в соответствии с законом Пуассона в равных отношениях как в радиальном, так и тангенциальном направлениях.

Тогда

$$\varepsilon_z = -\frac{P \cdot (1-\nu^2)}{2\pi \cdot e(R)} \cdot \frac{z^3}{R^5}. \quad (13)$$

Теперь, используя известное выражение для вертикальной деформации  $\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$ , трудно найти осадки (вертикальные перемещения) в упругом неоднородном полупространстве на любой глубине основания  $z$ :

$$\begin{aligned} w(r, z) &= \frac{P(1-\nu^2)}{2\pi} \int_z^\infty \frac{\zeta^3 d\zeta}{e(R) \cdot R^5}, \\ R &= \sqrt{r^2 + \zeta^2}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что в случае однородного основания ( $E(z) = E_0 = \text{const}$ )

$$e(R) = \int_0^1 E_0 \cdot t^2 dt = \frac{E_0}{3}. \quad (15)$$

В результате с учетом точного значения интеграла

$$\int_0^\infty \frac{z^3 dz}{R^5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r}, \quad (16)$$

имеет место известная формула Буссинеска для осадки поверхности однородного упругого (классического) полупространства:

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi \cdot E_0} \cdot \frac{1}{r}, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как известно, опытные данные говорят о том, что распределительные свойства (способность распределять вертикальную нагрузку в горизонтальном направлении) модели грунтового основания в виде упругого однородного полупространства являются завышенными [4, 5]. Совершенно ясно, что ввиду увеличения модуля деформации с глубиной предсказания модели неоднородного основания на основе формул (14) будут ближе к характеристикам реальных грунтовых оснований. Как было показано в работах [1–3], использование предложенных расчетных моделей неоднородного основания приводит к существенному снижению распределительных свойств основания, а следовательно, уменьшению расчетных усилий при проектировании на упругих основаниях фундаментных конструкций мелкого заложения: балок, рам и плит различной (конечной) жесткости.

**Осадки поверхности неоднородного основания.** Для решения практических задач геотехники наибольший интерес представляет расчет вертикальных перемещений (осадок) поверхности грунтового основания. Для модели неоднородного упругого полупространства,

когда модуль упругости есть заданная функция глубины (14)  $E = E(z)$ , согласно (17), (14) будем иметь

$$W|_{z=0} = w(r) = \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{z^3 dz}{e(R) \cdot R^5}, \quad (18)$$

где  $e(R)$  – функция степени неоднородности (17).

Н. К. Снитко в работе [3] были предприняты расчеты осадок поверхности неоднородного полупространства, когда модуль деформации нарастает с глубиной по линейному и квадратическому законам [3]. Уже достаточно грубые оценки для таких типов неоднородности указали на значительно меньшую распределительную способность грунта, чем при использовании модели однородного полупространства, что важно учитывать при проектировании и расчете фундаментных конструкций.

Согласно предложенной в [2] численно-аналитической методике, при любой зависимости модуля деформации  $E = E(z)$  расчет осадок поверхности неоднородного полупространства сводится (после использования в формуле (18) равенства (16)) к вычислению вертикальных перемещений по формуле

$$W(r) = \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi \cdot E_0} \cdot \left[ \frac{1}{r} - \int_0^\infty \Phi(R) \cdot \frac{z^3}{R^5} dz \right], \quad (19)$$

где

$$\Phi(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3e(R)/E_0 - 1}{e(R)/E_0} - \text{весовая функция.} \quad (20)$$

В результате была получена оптимальная по трудоемкости расчетная формула, дающая возможность получать значения несобственного интеграла (18) и, следовательно, осадок поверхности основания с высокой степенью точности. Это достигается за счет выделения главной (сингулярной) части подынтегрального выражения и вычисления оставшегося несобственного интеграла по квадратурным формулам наивысшей степени точности.

Как видно, в предложенной формулировке функции перемещений первое слагаемое в (19) представляет собой классическое решение Буссинеска для однородного упругого полупространства, а второе (интегральное) слагаемое определяет влияние неоднородности деформационных свойств грунта по глубине.

Как указывалось выше, расчет интеграла

$$\int_0^\infty \Phi(R) \cdot \frac{z^3}{R^5} dz \quad (21)$$

в общем случае проводится численно. При этом существенно используются следующие характерные особенности изменения весовой функции  $\Phi(R)$ :

$$\lim_{R \rightarrow 0} \Phi(R) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \Phi(R) < \infty. \quad (22)$$

Как показано в [2], при возрастании  $R$  от 0 до  $\infty$  весовая функция  $\Phi(R)$ , являясь ограниченной для всех законов  $E(z)$ , монотонно возрастает от нуля, асимптотически приближаясь к своему ограниченному предельному значению на бесконечности. Таким образом, сходимость несобственных интегралов в (21) при малых  $R$  повышается, а при умеренных и больших  $R$  имеет такую же скорость, как и интеграла (16).

Так как для различных эмпирических зависимостей роста модуля деформации с глубиной основания точных решений задачи о действии сосредоточенной силы не найдено, то в [2] используются обладающие достаточной универсальностью и не требующие значительных затрат ресурсов ЭВМ численные алгоритмы расчета функций влияния. На некоторых примерах трехпараметрических, адекватных экспериментальным данным зависимостей, отражающих различные законы уплотнения грунта с глубиной, показана эффективность практического использования предложенного в [2] численно-аналитического определения функций влияния.

Разработанная методика обладает высокой точностью и, кроме того, применима практически для любых законов непрерывного изменения модуля деформации с глубиной. Далее рассмотрены ее возможности для различных законов изменения модуля деформации по глубине: степенных, экспоненциального, обратнoэкспоненциального и обратнотригонометрического.

**Контактные модели неоднородных оснований при специальных трех параметрических законах возрастания модуля деформации по глубине.** В [2] с использованием функции степени неоднородности были даны формулировки контактных моделей неоднородных оснований, не связанные с преобразованием Ханкеля и позволяющие свести смешанные (контактные) задачи теории упругости к граничным интегральным уравнениям. Эти альтернативные функции влияния позволяют, как и при использовании ядер основания, строить эффективные численные гранично-элементные алгоритмы для решения пространственных задач механики грунтов и, в первую очередь, при расчете контактных напряжений и осадок для фундаментных конструкций заданной формы в плане.

**Степенные законы.** Для общей степенной зависимости

$$E(z) = E_0 + E_n \cdot z^n, \quad n \geq 0, \quad (23)$$

нетрудно в общем виде получить выражение для функции степени неоднородности и соответственно весовой функции (табл. 1).

Таблица 1  
Характеристики пространственных контактных моделей (неоднородных) упругих оснований

№ п/п	Закон изменения модуля деформации	Функция степени неоднородности $e(R) = \int_0^1 E(Rt)t^2 dt$	Весовая функция $\Phi(R) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3e(R)/E_0 - 1}{e(R)/E_0}$	$\Phi(\infty)$
1	Однородное полупространство $E(z) = E_0 = \text{const}$	$\frac{E_0}{3}$	0	0
2	Общий степенной $E(z) = E_0 + E_n \cdot z^n$	$\frac{E_0}{3} + \frac{E_n R^n}{n+3}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{E_n R^n}{E_0/3 + E_n R^n}$	$\frac{3}{2}$
3.	Линейный $E(z) = E_0(1 + B \frac{z}{h})$ , $B = (E_1 - E_0)/E_0$	$\frac{E_0}{3} + \frac{\alpha R}{4}, \quad \alpha = \frac{E_1 - E_0}{h}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{B \tilde{R}}{4/3 + B \tilde{R}}, \quad \tilde{R} = R/h$	$\frac{3}{2}$
4.	Квадратический $E(z) = E_0 \left( 1 + B \frac{z^2}{h^2} \right)$	$\frac{E_0}{3} + \frac{\beta R^2}{5}, \quad \beta = B \frac{E_0}{h^2}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{B \tilde{R}^2}{5/3 + B \tilde{R}^2}, \quad \tilde{R} = R/h$	$\frac{3}{2}$
5.	Степенной $E(z) = E_0(1 + kz)^b$	$\frac{E_0}{\hat{R}^3(b+1)} \left[ \hat{R}^2(1+\hat{R})^{b+1} - \frac{2\hat{R}(1+\hat{R})^{b+1}}{b+2} + \frac{2(1+\hat{R})^{b+3}}{(b+2)(b+3)} - \frac{2}{(b+2)(b+3)} \right]$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{3e(\hat{R})/E_0 - 1}{e(\hat{R})/E_0}, \quad \hat{R} = kR$	$\frac{3}{2}$
6.	Экспоненциальный $E(z) = E_0 \cdot [1 + \alpha(1 - e^{-kz})]$	$E_0 \left\{ \frac{\alpha+1}{3} + \alpha \left[ \frac{e^{-kR}}{kR} \left( 1 + \frac{2}{kR} \right) + \frac{2}{k^3 R^3} (e^{-kR} - 1) \right] \right\}$	$\frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{\alpha}{3} k^3 R^3 + \alpha [e^{-kR}(k^2 R^2 + 2kR) + 2(e^{-kR} - 1)]}{\frac{1+\alpha}{3} k^3 R^3 + \alpha [e^{-kR}(k^2 R^2 + 2kR) + 2(e^{-kR} - 1)]}$	$\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}$



В случаях  $n=1$  и  $n=2$ , т. е. когда модуль деформации грунта изменяется с глубиной по линейному

$$E(z) = E_0 + \alpha \cdot z = E_0 \left( 1 + B \cdot \frac{z}{h} \right) \quad (24)$$

и квадратичному

$$E(z) = E_0 + \beta \cdot z^2 = E_0 \left( 1 + B \cdot \frac{z^2}{h^2} \right) \quad (25)$$

законам, функции степени неоднородности без труда вычисляются соответственно в конечном виде:

$$e_1(R) = \frac{E_0}{3} + \frac{\alpha R}{4} \quad (n=1), \quad (26)$$

$$e_2(R) = \frac{E_0}{3} + \frac{\beta R^2}{5} \quad (n=2), \quad (27)$$

где  $E_0$  – значение модуля деформации на дневной поверхности грунта;  $E_1$  – на глубине  $z = h$ ;  $B = (E_1 - E_0) / E_0$ ,  $\alpha = (E_1 - E_0) / h > 0$ ,  $\beta = (E_1 - E_0) / h^2 > 0$ .

В [1, 2] для случаев линейного и квадратического законов получены аналитические выражения для осадки дневной поверхности (точные решения задачи Буссинеска), которые соответственно имеют следующий вид:

$$W_1(r) = \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi \cdot E_0} \cdot \frac{1}{r} + \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi \cdot E_0 \cdot h} \cdot \frac{B}{A^2} \left[ \frac{1}{2} - \frac{B \cdot r}{A \cdot h} + \left( 1 - \frac{B^2 \cdot r^2}{A^2 \cdot h^2} \right) \cdot \ln \frac{B \cdot r}{B \cdot r + A \cdot h} \right], \quad A = \frac{4}{3}; \quad (28)$$

$$W_1(r) = \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi \cdot E_0} \cdot \frac{1}{r} + \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi \cdot E_0 \cdot h} \cdot \frac{3C}{2} \left[ \frac{C \cdot r}{h} - \left( 1 + \frac{C^2 \cdot r^2}{h^2} \right) \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{C \cdot r}{h} \right) \right], \quad C = \sqrt{0,6B}. \quad (29)$$

В формулах (28) и (29) первые слагаемые представляют собой решение Буссинеска для однородного упругого полупространства, к которому, как легко видеть, сходятся оба точных решения при  $B \rightarrow 0$ .

В [2] даны расчеты осадок поверхности неоднородного полупространства для случаев линейного и квадратичного законов возрастания модуля деформации с глубиной, которые сравнены с осадками для однородного полупространства, т. е. с решением Буссинеска. Показано, что для линейно и квадратически неоднородных оснований с увеличением параметра  $B$ , характеризующего «скорость» роста модуля деформации с глубиной грунтового основания, распределительная способность грунта проявляется в меньшей степени. Кроме того, разница в осадках поверхности грунта при линейном и квадратичном законах становится незначительной. При  $B > 20$  осадки поверхности вне точки приложения сосредоточенной силы практически отсутствуют (становятся подобными  $\delta$ -функции Дирака) и неоднородное основание при линейном и квадратичном законах роста модуля деформации с глубиной ведет себя как винклеровское.

В [2] указан характер асимптотического поведения найденных решений (28) и (29) при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ .

Осадки от действия нормальной сосредоточенной силы на неоднородное основание в точке ее приложения имеют такую же особенность, что и в случае однородного упругого основания с модулем деформации  $E_0$ :

$$W_{1,2} \approx \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi E_0} \cdot \frac{1}{r} + O(r^{-1}), \quad r \rightarrow 0, \quad (30)$$

где  $O$  – символ порядка Ландау.

По мере удаления от точки приложения сосредоточенной силы ( $r \rightarrow \infty$ )

$$W_1 \approx \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi E_0} \cdot \frac{1}{2r}, \quad (31)$$

$$r \gg \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{B}, \quad (n=1),$$

$$W_2 \approx \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{\pi E_0} \cdot \frac{h^2}{3B} \cdot \frac{1}{r^3}, \quad (32)$$

$$r^2 \gg \frac{5}{3} \cdot \frac{h^2}{B}, \quad (n=2).$$

Рост параметра  $n$  приводит к существенному увеличению скорости затухания осадок. Как показано в [1, 2] и видно из (31) и (32), при линейном законе возрастания модуля деформации ( $n=1$ ) осадки поверхности вдаль от точки приложения сосредоточенной силы ровно в два раза меньше, чем для однородного полупространства, а при квадратическом законе ( $n=2$ ) указанная скорость убывания осадок также увеличивается и с ростом параметра неоднородности  $B$ . В [2] рассмотрен также более корректный по сравнению с (23) степенной закон

$$E(z) = E_0(1+k \cdot z)^b, \quad (33)$$

предложенный в работе В. П. Плевако [6]. В указанной публикации В. П. Плевако были найдены условия, при которых общее решение плоской, осесимметричной и пространственной задач теории упругости может быть выражено через гармонические функции. В табл. 2 (по [6]) для всех возможных  $b \leq 10$  указаны соответствующие значения коэффициента Пуассона  $\nu$ , которые определяют те частные случаи неоднородности, которые позволяют получать общее решение уравнений теории упругости неоднородной среды. Как видно из табл. 2, грунтовыми основаниям соответствует лишь пара значений  $\nu = 1/4$  и  $b = 2$ .

В [2] отмечено, что подход к решению задач теории упругости неоднородных сред с помощью гармонических функций имеет ограниченную практическую ценность, так как решение соответствующих уравнений возможно только при отдельных значениях деформационных параметров (табл. 2). Кроме того, используемый в [6] подход по расчету осадок поверхности неоднородного полупространства не только ограничен выбором функции неоднородности и ее параметров, но и связан с трудоемкими вычислениями, включающими использование специальных функций.

Таблица 2

$b$	2	3	4	5	6	7	8	8	9	10	10
$\nu$	1/4	0	1/6	1/6	1/8	1/15	0	1/10	1/16	1/56	1/10

Согласно предложенному в [2] численно-аналитическому подходу, функция степени неоднородности  $e(\hat{R})$  для закона возрастания модуля деформации (33) получена в свободном от интегралов виде (табл. 1), а весовая функция, несмотря на громоздкость, дает возможность расчета осадок поверхности по формуле (19) с заданной степенью точности. Представленные в [2] расчеты вертикальных перемещений поверхности неоднородного основания при  $b = 2$ ,  $\nu = 1/4$ , полученные по формулам теории упругости, незначительно отличаются (не более чем на 3,2 %) от значений, полученных с использованием приближенной расчетной модели (19), что графически почти неразличимо.

**Экспоненциальные законы.** Численно-аналитическая методика построения контактных моделей неоднородного основания была применена в [2] для некоторых законов неоднородности экспоненциального типа. В качестве основной экспоненциальной зависимости рассмотрен закон

$$E(z) = E_0 \left[ 1 + \alpha(1 - e^{-kz}) \right], \quad (34)$$

где  $\alpha = (E_\infty - E_0)/E_0$ ;  $E_\infty = E(\infty)$  – глубинное значение модуля деформации;  $k$  – эмпирический параметр, определяющий «скорость» возрастания модуля деформации,  $0 \leq k < \infty$ . Как видно, модуль деформации, согласно закону (34), будет возрастать на больших глубинах в  $(1 + \alpha)$  раз по сравнению со значением  $E_0$  на дневной поверхности.

Функция степени неоднородности для закона (34) определяется в конечном (свободном от интегрирования) виде и приведена в табл. 1. Осуществленные в [2] расчеты осадок поверхности неоднородного основания с использованием закона (34) показали, что основное влияние на снижение распределительной способности основания оказывает величина перепада модуля деформации  $\alpha = (E_\infty - E_0)/E_0$ . С ростом параметра  $k$  («скорости» изменения деформационных свойств) кривые осадок трансформируются, приобретая более крутую форму, что также указывает на уменьшение распределительной способности основания.

В [7] С. В. Босаковым сделана попытка для закона неоднородности (34) получить ядро основания в аналитическом виде с использованием интегралов Ханкеля. Для оценки несобственного интеграла в (19) рассмотрено следующее приближение для весовой функции:

$$\Phi(\alpha, \hat{R}) \approx \frac{3}{1 + \alpha} + \frac{3\alpha}{(1 + \alpha)(1 + \hat{R}^2)^{3/2}}, \quad \hat{R} = kR, \quad (35)$$

которое точно учитывает лишь асимптотические значения  $\Phi(\alpha, \hat{R})$  при  $\alpha, \hat{R} \rightarrow 0$  и  $\alpha, \hat{R} \rightarrow \infty$ . Интегрирование в (19) с использованием приближения (35) может быть без труда осуществлено при учете известных формул [8]:

$$\int_0^\infty x^{\lambda-1} (1 + \alpha x^p)^{-\mu} (1 + \beta x^p)^{-\nu} dx = \frac{\alpha^{-\frac{\lambda}{p}}}{p} B\left(\frac{\lambda}{p}, \mu + \nu - \frac{\lambda}{p}\right) {}_2F_1\left(\nu, \frac{\lambda}{p}; \mu + \nu; 1 - \frac{\beta}{\alpha}\right),$$

${}_2F_1\left(\frac{3}{2}; 2; 4; z\right) = 8 \cdot (1 + \sqrt{1-z})$ ,  $B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ,  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$  – гипергеометрическая функция.

В конечном итоге С. В. Босаковым получено аналитическое выражение для вертикальных перемещений поверхности неоднородного полупространства от действия вертикальной сосредоточенной силы:

$$W(r) = \frac{(1-\nu^2) \cdot P}{2\pi \cdot E_0} \left[ \frac{2}{r(1+\alpha)} + \frac{2\alpha}{r(1+\alpha)\sqrt{1+k^2r^2}} \cdot \frac{1}{1+4k^2r^2 + (3+4k^2r^2)\sqrt{\frac{k^2r^2}{1+k^2r^2}}} \right], \quad (36)$$

которое лишь в определенной степени соответствует экспоненциальному закону изменения модуля деформации (34).

Был проведен анализ зависимости осадок поверхности неоднородного основания, полученных непосредственными расчетами несобственных интегралов по формуле (19), а также с использованием приближенной формулы (36). Как следует из сопоставления расчетных кривых, картины деформирования поверхности в обоих случаях близки только для малых значений параметра  $\alpha$  (т. е. когда неоднородные свойства основания проявляются в незначительной степени). С ростом параметра  $\alpha$  расхождения становятся весьма значительными. Следовательно, приближенное решение С. В. Босакова нельзя использовать при решении контактных задач для упругих неоднородных оснований с перепадом модуля деформации  $\alpha > 1$ .

Ранее было отмечено, что для обратноэкспоненциальной зависимости модуля деформации (14) отсутствует ядро основания, т. е. не разработана контактная модель. В [2] для закона неоднородности (14) получена в квадратурах функция степени неоднородности (табл. 2), которая без труда может быть оценена численно с любой заданной точностью. Для обратноэкспоненциального закона (14) функции  $e(R)$  осадки поверхности неоднородного основания определяются по формуле (19) и имеют место такие же, как и для закона (34), предельные соотношения (табл. 1). Проведенные в [2] расчеты осадок поверхности обратноэкспоненциального неоднородного основания показали, что его распределительная способность снижается как с ростом перепада модуля деформации  $\alpha = (E_\infty - E_0) / E_0$ , так и при увеличении «скорости»  $k$  изменения деформационных свойств по глубине.

**Обратнотригонометрический закон.** В [2] получены формулы для расчета осадок поверхности неоднородного основания, когда экспериментальные значения модуля деформации аппроксимируются с помощью обратно тригонометрической зависимости ([2], табл. 1). Для этого закона функции степени неоднородности и весовая вычислены в элементарных функциях и приведены в табл. 1. Как показали результаты расчетов [2], осадки поверхности неоднородного основания с обратно тригонометрическим законом изменения модуля деформации качественно подобны зависимостям для закона (34), а количественные различия отражают «скорость» изменения модуля деформации с глубиной основания.

**Гранично-элементные решения контактных задач для жестких штампов с плоским профилем.** В [3] Н. К. Снитко была дана оценка снижения распределительной способности неоднородного основания, для которого модуль деформации нарастает с глубиной по линейному или параболическому законам. Приближенные инженерные расчеты для этих случаев неоднородности указали на значительно меньшую распределительную способность грунта, чем для однородного полупространства, что важно учитывать при проектировании и расчете фундаментных конструкций. Однако в [3] не были даны формулы для функций влияния в явном виде, которые необходимы для сведения смешанных (контактных) задач теории упругости к граничным интегральным уравнениям и использования численных методов расчета контактного взаимодействия и фундаментных конструкций сложной формы в плане с неоднородными грунтовыми основаниями.

Разработанная в [2] численно-аналитическая методика расчета вертикальных перемещений неоднородного полупространства для зависимостей, отражающих известные опытные данные по изменению модуля деформации с глубиной, позволяет ставить и решать пространственные контактные задачи для штампов с гладким основанием и различной формы в плане.

Некоторые контактные задачи указанного типа были решены в [2, 9–13] для штампов прямоугольной и круговой формы.

В [1, 2] рассмотрена важная для проектирования широко распространенных фундаментов под элеваторы, колонны зданий и сооружений, оборудование и др. пространственная контактная задача для жесткого прямоугольного штампа (модели фундамента), нагруженного центральной силой и расположенного на упругом основании с линейной или квадратичной неоднородностью ( $n = 1; 2$ ). Используются аналитические выражения для соответствующих функций влияния (28) и (29). Отмечено, что точные решения указанной контактной задачи до сих пор отсутствуют даже в случае однородного упругого полупространства. Поэтому система интегральных уравнений и относительно неизвестных контактного давления и осадки решалась численно методом граничных интегральных уравнений при кусочно-постоянной аппроксимации контактных давлений. Подробно разобраны результаты расчетов осадок и контактных давлений, полученные для квадратного фундамента. Показана сходимость численных решений при увеличении степени дискретизации области контакта на граничные элементы. Приведены относительные осадки фундамента в зависимости от значений перепада модуля деформации на неоднородных основаниях степенного типа. По результатам многочисленных расчетов установлено, что на снижение осадок существенно влияет тип неоднородности основания: при линейном росте модуля деформации с глубиной осадки всегда больше, чем при параболическом законе.

В [2, 9–13] рассмотрена контактная задача для квадратного штампа, нагруженного эксцентричной вертикальной силой и расположенного на упругом неоднородном основании с линейно возрастающим по глубине модулем деформации. Решение задачи иллюстрируется с помощью линий уровня для контактных давлений. В [2] получено решение аналогичной задачи для кругового эксцентрично нагруженного штампа. Отмечено, что контактные давления также проявляют чувствительность по отношению к изменению параметров неоднородности. Сделан вывод о том, что детальный учет неоднородности грунтовых оснований важен при оценке внутренних усилий в фундаментах сложной формы, а также снижении кренов и выравнивании их осадок.

**Выводы.** Рассмотренные в [2, 9–13] численные примеры решения пространственных контактных задач показывают, что гранично-элементная методика численного моделирования позволяет в рамках единого подхода одновременно учитывать, как различные типы пространственного нагружения жестких штампов, так и неоднородные свойства упругих оснований.

Таким образом, проведенные в [2, 9–13] исследования показали, что учет возрастания с глубиной модуля деформации в рамках полуэмпирических контактных моделей неоднородного упругого основания приводит к значительно меньшей распределительной способности грунта, существенным снижениям осадок фундаментов, перераспределению реактивных давлений под их подошвой по сравнению с моделью однородного упругого основания.

Многочисленные расчеты показали возможность эффективно оценивать влияние степени неоднородности грунтового массива на контактное взаимодействие оснований и центрально и внецентренно нагруженных фундаментов.

#### Библиографический список

1. Джонсон К. Механика контактных взаимодействий. М.: Мир, 1989. 510 с
2. Флорин В. А. Основы механики грунтов. Т. 1. М.; Л.: Стройиздат, 1959. 357 с.
3. Снитко Н. К. О действии сосредоточенной силы на неоднородное упругое полупространство // Строительная механика и расчет сооружений. 1980. № 2. С. 76–78.
4. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. М: Стройиздат, 1984. 679 с.

5. Манвелов Л. И., Бартошевич Э. С. О выборе модели упругого основания // Строительная механика и расчет сооружений. 1961. № 4. С. 14–18.
6. Плевако В. П. О возможности использования гармонических функций при решении задач теории упругости неоднородных сред // Прикладная математика и механика. 1972. Т. 36, вып. 5. С. 886–894.
7. Босаков С. В. Статистические расчеты плит на упругом основании. Мн.: БНТУ, 2002. 128 с.
8. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 794 с.
9. Алейников С.М. Пространственная контактная задача для жесткого фундамента на упругом неоднородном основании // Изв. вузов. Строительство. 1997. № 4. С. 52–59.
10. Алейников С. М. Метод граничных элементов в контактных задачах для упругих пространственно неоднородных оснований. М.: АСВ, 2000. 754 с.
11. Алейников С. М., Седаев А. А. Двойственные сетки и их применение в методе граничных элементов // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. № 2. С. 239–253.
12. Aleynikov S. M., Sedaev A. A. Implementation of dual grid technique in BEM analysis of spatial contact problems // Numerical Methods in Continuum Mechanics: Proc. VII intern. conf. high tatras, Slovak Republic, 6–9th October 1998. Pp. 113–118.
13. Aleynikov S. M., Sedaev A. A. Implementation of dual grid technique in BEM analysis of 3D contact problems // Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences, 2000. Vol. 7. Pp. 167–184.

## References

1. Johnson K. Mechanics of Contact Interactions. Moscow: Mir, 1989. 510 p.
2. Florin V. A. Fundamentals of Soil Mechanics. Vol. 1. Moscow; Leningrad: Stroyizdat, 1959. 357 p.
3. Snitko N. K. On the action of a concentrated force on an inhomogeneous elastic half-space. Structural Mechanics and Analysis of Structures. No. 2. 1980. Pp. 76–78.
4. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. Analysis of Structures on an Elastic Foundation. Moscow: Stroyizdat, 1984. 679 p.
5. Manvelov L. I., Bartoshevich E. S. On the selection of an elastic foundation model. Structural Mechanics and Analysis of Structures. No. 4. 1961. Pp. 14–18.
6. Plevako V. P. On the possibility of using harmonic functions in solving problems of elasticity theory of inhomogeneous media. Applied Mathematics and Mechanics. Vol. 36. Issue 5. 1972. Pp. 886–894.
7. Bosakov S. V. Statistical Calculations of Slabs on an Elastic Foundation. Minsk: BNTU, 2002. 128 p.
8. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and Series. Additional Chapters. Moscow: Nauka, 1986. 794 p.
9. Aleinikov S. M. Spatial contact problem for a rigid foundation on an elastic inhomogeneous foundation. News of Universities. Construction. No. 4. 1997. Pp. 52–59.
10. Aleynikov S. M. Boundary Element Method in Contact Problems for Elastic Spatially Inhomogeneous Foundations. Moscow: ASV, 2000. 754 p.
11. Aleynikov S. M., Sedaev A. A. Dual grids and their application in the boundary element method. Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Phys. No. 2. 1999. Pp. 239–253.
12. Aleynikov S. M., Sedaev A. A. Implementation of dual grid technique in BEM analysis of spatial contact problems. Numerical Methods in Continuum Mechanics: Proc. VII Intern. Conf. High Tatras, Slovak Republic, 6–9 October 1998. Pp. 113–118.

13. Aleynikov S. M., Sedaev A. A. Implementation of dual grid technique in BEM analysis of 3D contact problems. Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences. Vol. 7. 2000. Pp. 167–184.

**A NUMERICAL AND ANALYTICAL METHOD  
FOR CONSTRUCTING CONTACT MODELS  
FOR A HETEROGENEOUS FOUNDATION  
WITH A VARIABLE MODULUS OF DEFORMATION**

N. N. Nekrasova <sup>1</sup>

Voronezh State Technical University <sup>1</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Mechanics,  
tel.: +7(473)271-53-62, e-mail: Nekrasova-N@yandex.ru

---

A general approach to constructing contact models of an elastic heterogeneous foundation, the deformation modulus of which increases with depth according to fairly general relationships, is proposed. Poisson's ratio is assumed constant, since its change has little effect on the stress-strain characteristics of the soil foundation. Given the known relationship between elastic constants, the shear modulus is considered as a depth-varying variable in this approach. The hypothesis of proportionality of normal stresses is adopted. The problem of the action of a vertical concentrated force on the surface of a heterogeneous foundation is solved. To characterize the change in the deformation modulus with foundation depth, a function of the degree of heterogeneity is introduced. A method for constructing spatial contact models of elastic foundations with a deformation modulus increasing with depth is implemented, leading to efficient numerical algorithms for solving spatial contact problems of soil mechanics for shallow foundations.

**Keywords:** heterogeneous foundation, variable coefficient, shear modulus, deformation modulus, Poisson's ratio.

---

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

---

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.  
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
  - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
  - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
  - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
  - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
  - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
  - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
  - 3.7. Текст статьи;
  - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
  - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
  - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]). Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,  
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, доц.,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доц.

Почтовый адрес редакции: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.