

ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757 (online)

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научный журнал

Выпуск № 2 (45)

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж – 2025

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения – Российская Федерация.

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В. С., д-р техн. наук, профессор,

Воронежский государственный технический университет

Зам. главного редактора: Козлов В. А., д-р физ.-мат. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е., канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

Антонов В. М., канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;

Беляева С. Ю., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Буренин А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;

Гриднев С. Ю., д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Зверев В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Ефрюшин С. В., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Кирсанов М. Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;

Колчунов В. И., д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;

Коробко А. В., д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;

Михайлов В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;

Нугужинов Ж. С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;

Овчинников И. Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;

Пшеничкина В. А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;

Свентиков А. А., д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Трещев А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;

Турищев Л. С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;

Шимановский А. О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;

Шитикова М. В., д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки – А. Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» – 66004

Оформить подписку можно на сайте <https://www.pressa-rf.ru>

Дата выхода в свет 30.06.2025. Усл. печ. л. 10,6. Формат 60×84/8. Тираж 29 экз. Заказ № 155.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018

Цена свободная

Адрес редакции и издателя: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

(строительный факультет, кафедра строительной механики),

тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»

394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757(online)

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific Journal

Issue № 2 (45)

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh – 2025

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.

Territory of distribution — Russian Federation.

The journal «Structural mechanics and structures» is included into the List of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,

Voronezh State Technical University

The deputy chief editor: Kozlov V. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

Executive secretary: Gabrielyan G. E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

Antonov V. M., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

Belyaeva S. Yu., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Burenin A. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

Gridnev S. Yu., Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Zverev V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Efryushin S. V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Kirsanov M. N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

Kolchunov V. I., Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

Korobko A. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenyev;

Mikhailov V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Nguyen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

Nuguxhinov Zh. S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

Ovchinnikov I. G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

Pshenichkina V. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

Sventikov A. A., Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Trechshev A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

Turichshev L. S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

Shimanovsky A. O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

Shitikova M. V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A. R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Subscription index in the United catalogue «Press of Russia» – 66004

You can subscribe on the website www.press-rf.ru

Publication date 30.06.2025. Conventional printed sheets 10.6. Format 60×84/8. Numbers of copies 29. Order № 155.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 – 72895 dated 22.05.2018

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation

(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics),

tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ	7
<i>Кирсанов М. Н.</i> Аналитический расчет прогиба и первой собственной частоты колебаний плоской фермы	7
<i>Киселёва Р. З., Рябуха В. В., Кирсанова Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П.</i> Напряженное состояние в зоне сочленения оболочек при плоском нагружении на основе смешанного МКЭ	17
<i>Кирсанов М. Н., Агарков А. В.</i> Формула для первой частоты собственных колебаний пространственной консольной фермы	27
ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА	34
<i>Трещев А. А., Теличко В. Г., Дорошенко Д. И.</i> Термомеханическое нагружение ортотропной сферической оболочки с отверстием	34
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	50
<i>Беляева С. Ю., Померанцев А. С., Ляшенко А. В.</i> Расчет прочности железобетонных плит, армированных стальным профилированным настилом, по нормальным сечениям с использованием полной диаграммы сжатия бетона	50
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ	61
<i>Беляева С. Ю., Сазыкин В. Г., Ляшенко А. В.</i> Расчет стальных профилированных настилов в легких покрытиях зданий	61
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ	71
<i>Конов А. В., Козлов В. А., Викулов М. А.</i> Напряженно-деформированное состояние замкнутых призматических тонкостенных систем пролетных конструкций на основе полубезмоментной теории оболочек	71
МЕХАНИКА ГРУНТОВ	82
<i>Ким В. Х., Ким М. С.</i> Исследования давления морозного пучения мерзлого грунта в лабораторных условиях	82
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ	91

CONTENTS

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS	7
<i>Kirsanov M. N.</i>	
Analytical Calculation of Deflection and First Natural Frequency of a Flat Truss Oscillations	7
<i>Kiseleva R. S., Ryabukha V. V., Kirsanova N. A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P.</i>	
Stress State in the Joint Zone of Shells under Flat Loading Based on Mixed Fem	17
<i>Kirsanov M. N., Agarkov A. V.</i>	
Formula for the Spatial Cantilever Truss First Natural Oscillations Frequency.....	27
APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS OF SOLID BODY UNDER DEFORMATION	34
<i>Treshchev A. A., Telichko V. G., Doroshenko D. I.</i>	
Thermomechanical Loading of an Orthotropic Spherical Shell with a Hole.....	34
CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES	50
<i>Belyaeva S. Yu., Pomerantsev A. S., Lyashenko A. V.</i>	
Strength Calculation of Reinforced Concrete Slabs Reinforced with Profiled Steel Decking by Normal Sections Using a Full Concrete Compression Diagram.....	50
CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES	61
<i>Belyaeva S. Yu., Sazykin V. G., Lyashenko A. V.</i>	
Calculation of Profiled Steel Deckings in Lightweight Building Coverings.....	61
CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES	71
<i>Konov A. V., Kozlov V. A., Vikulov M. A.</i>	
Stress-strain State of Closed Prismatic Thin-walled Systems in Span Structures Based on Semi-momentless Shells Theory	71
SOIL MECHANICS	82
<i>Kim V. Kh., Kim M. S.</i>	
Studies of The Pressure of Frost Heaving of Frozen Soil in Laboratory Conditions.....	82
RULES OF PREPARATION OF ARTICLES	91

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04:531.391.3
DOI 10.36622/2219-1038.2025.45.2.001

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА И ПЕРВОЙ СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов ¹

Национальный исследовательский университет «МЭИ» ¹
Россия, г. Москва

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Рассмотрена схема статически определимой фермы регулярного типа. Ферма имеет прямолинейные пояса, и четыре опоры, одна из которых – неподвижный шарнир, три – подвижные шарниры. Зависимость прогиба и горизонтального смещения опоры фермы под действием равномерно распределенной нагрузки от числа панелей находится методом индукции с использованием формулы Максвелла – Мора. При выводе формулы для основной частоты используется модифицированный метод Донкерлея. Предполагается, что масса конструкции равномерно распределяется по ее узлам, а колебания узлов происходят только по вертикали. Выполняется сравнение результата приближенного аналитического решения с численными при учете всех степеней свободы конструкции в рамках принятой модели. Для аналитических преобразований используется система символьной математики «Maple». В зависимости прогиба от числа панелей найдена квадратичная асимптотика. Выведены формулы для реакций опор фермы.

Ключевые слова: плоская ферма, собственная частота, метод Донкерлея, индукция, Maple, приближенный метод, формула Максвелла – Мора, прогиб, асимптотика, смещение опоры.

Введение. Для расчета частот собственных колебаний и деформаций стержневых систем на практике используют хорошо зарекомендовавшие себя численные алгоритмы на основе метода конечных элементов [1–3]. Альтернатива численным методам расчета строительных конструкций появилась с развитием систем компьютерной математики. Вероятно, первыми, кто обратил внимание на возможность получения аналитических решений для регулярных стержневых систем, были В. А. Игнатьев [3], R. G. Hutchinson и N. A. Fleck [4, 5]. В этих работах подняты проблемы существования и расчета регулярных конструкций и методов их расчета. Системы компьютерной математики для расчета строительных конструкций широко используют также А. В. Матросов и Д. П. Голоскоков [6, 7]. В [8] с применением системы «Maple» выведена аналитическая зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей от порядка конструкции. Формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской статически определимой фермы с произвольным числом панелей приведены в [9]. В [10] исследованы собственные частоты плоской фермы и проанализированы те области значений частот, для которых исключен эффект резонанса. Оценки статического прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей в форме конечных соотношений получены в [11]. Метод индукции совместно с операторами системы компьютерной математики использован в [12] для вывода формулы

приближенной зависимости основной частоты свободных колебаний плоской фермы от числа панелей. Спектр частот колебаний фермы, инерционные свойства которой моделируются сосредоточенными массами в ее узлах, и формула для первой частоты получены в [13]. Эта же задача для консольной фермы решена в [14]. В [15] методом индукции выведена простая формула для расчета низшей частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы. Аналитические решения известны и для пространственных регулярных ферм. В [16, 17] получены такие решения для составной и консольной пространственных ферм. Собственные частоты плоской двухпролетной балки рассчитаны аналитически в [18]. Формулы для расчета статического прогиба плоской шпренгельной фермы с треугольной решеткой и параллельными поясами выведены в [19]. В [20] метод, примененный в этой работе, использован для аналитического расчета башни опоры линии электропередач. Спектр собственных частот семейства регулярных плоских балочных ферм различного порядка и некоторые закономерности частотных характеристик исследованы в [21]. Формулы для первой частоты собственных колебаний плоских шпренгельных ферм выведены в системе «Maple» в [22, 23]. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы арочного типа от числа панелей в аналитической форме исследована в [24]. В настоящей работе в аналитической форме разыскивается зависимость прогиба, сдвига опоры и основной частоты плоской фермы с дополнительными опорами от числа панелей. Особенность рассматриваемой схемы фермы – внешняя статическая неопределенность, конструктивно реализованная в виде двух дополнительных боковых опор.

Конструкция фермы. Статически определимая ферма с параллельными поясами имеет четыре опоры, одна из которых – неподвижный шарнир, три других – горизонтально подвижные шарниры. Ферма состоит из $2n$ панелей длиной a в средней части пролета и по две панели по концам. Высота фермы равна h , масса фермы равномерно распределена по узлам массами m . Принимается, что узлы совершают вертикальные колебания по гармоническому закону (рис. 1).

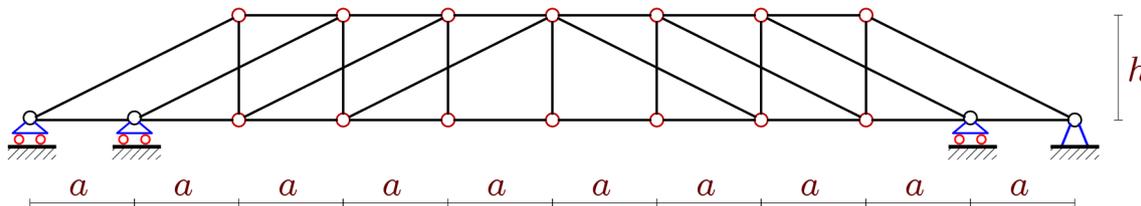


Рис. 1. Схема фермы, $n = 3$

В задаче о колебании число степеней свободы конструкции равно числу ее внутренних узлов: $K = 4n + 6$. Общее число стержней $\nu = 8n + 12$. В это число входят и пять реакций опор.

Расчет усилий в стержнях. Для определения жесткости статически определимой системы с использованием формулы Максвелла – Мора необходимо рассчитать усилия в стержнях из условия равновесия узлов. Для этого в системе компьютерной математики составляется матрица уравнений равновесия узлов, состоящая из направляющих косинусов усилий. Эти величины в аналитической форме находятся по данным о структуре соединения стержней в узлы и их координатам. Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). Начало координат размещается в левой подвижной опоре A :

$$\begin{aligned} x_i &= a(i-1), y_i = 0, i = 1, \dots, 2n+5, \\ x_{i+2n+5} &= a(i+1), y_{i+2n+5} = h, i = 1, \dots, 2n+1. \end{aligned}$$

Порядок соединения стержней в узлы задается специальными списками, содержащими номера концов стержней. Стержни нижнего пояса кодируются следующими списками:

$\Phi_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n + 4$. Аналогично списки стержней верхнего пояса имеют вид:
 $\Phi_{i+2n+4} = [i + 2n + 5, i + 2n + 6], i = 1, \dots, 2n$.

Пролет фермы: $AD = L = (2n + 4)a$. Система уравнений равновесия узлов записывается для произвольного порядка фермы в матричной форме: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{R} – вектор внешних узловых нагрузок, \mathbf{G} – матрица размером $\nu \times \nu$, составленная из направляющих косинусов, \mathbf{S} – вектор неизвестных усилий в стержнях и опорных реакций. Направляющие косинусы рассчитываются по данным о координатах узлов и порядку соединения стержней в соответствующие узлы.

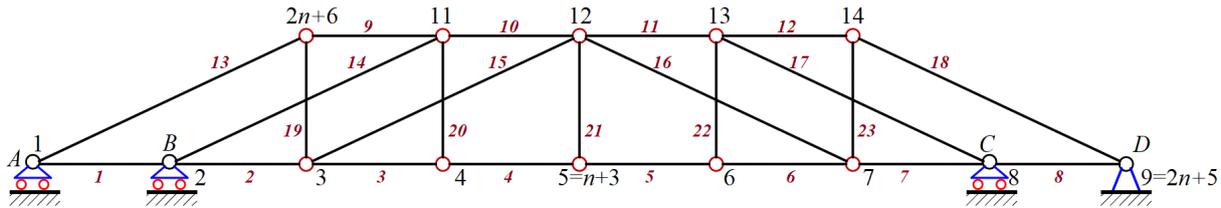


Рис. 2. Номера стержней и узлов фермы, $n = 2$

Прогиб. В случае действия распределенной нагрузки интенсивностью P на узлы нижнего пояса ненулевые элементы вектора в правой части системы уравнений равновесия имеют вид: $R_i = P, i = 1, \dots, 2n + 5$ (рис. 3). На рис. 3 показано распределение усилий в стержнях от действия распределенной по нижнему поясу единичной безразмерной нагрузки $P = 1$ при $a = 3$ м, $h = 2$ м.

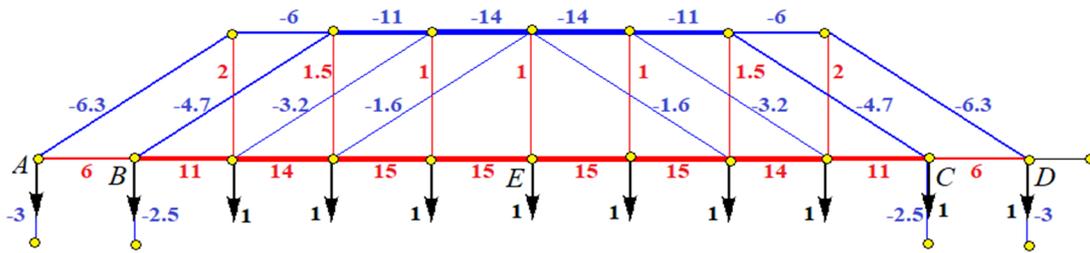


Рис. 3. Нагрузка и распределение усилий, $n = 3$

Верхний пояс фермы при такой нагрузке сжат, нижний растянут, а в решетке значительные сжимающие усилия есть только в боковых раскосах. Стойки фермы растянуты незначительными усилиями. Прогиб фермы фиксируется вертикальным смещением среднего узла E . Расчет прогиба выполняется по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta_E = \sum_{\alpha=1}^{\nu} S_{\alpha}^{(p)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF),$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ – усилия в стержне с номером α при действии на ферму распределенной нагрузки; $S_{\alpha}^{(E)}$ – усилия от действия единичной вертикальной силы на узел E ; l_{α} – длина стержня α . Жесткость EF стержней принимается для всей фермы одинаковой. Для вывода формулы прогиба в зависимости от числа панелей составляется последовательность решений для ферм с числом панелей $n = 1, 2, \dots, 14$:

$$\Delta_{E,1} = P(24a^3 + c^3 + 5h^3) / (2h^2 EF),$$

$$\Delta_{E,2} = P(80a^3 + 2c^3 + 5h^3) / (h^2 EF),$$

$$\begin{aligned}\Delta_{E,3} &= P(144a^3 + 2c^3 + 5h^3) / (h^2EF), \\ \Delta_{E,4} &= P(888a^3 + 9c^3 + 17h^3) / (2h^2EF), \\ \Delta_{E,5} &= P(1320a^3 + 9c^3 + 17h^3) / (2h^2EF), \dots\end{aligned}$$

Для меньшей длины последовательности решений закономерность в системе «Maple» не находится. Решения линейных однородных рекуррентных уравнений, полученных с помощью операторов `rgf_findrecur` и `rsolve` из пакета `genfunc` системы «Maple», дает общий член этой последовательности:

$$\Delta_{E,n} = P(C_1a^3 + C_2c^3 + C_3h^3) / (h^2EF),$$

где $c = \sqrt{4a^2 + h^2}$, а коэффициенты имеют вид полиномов по числу панелей:

$$\begin{aligned}C_1 &= (10n^4 + 4(2(-1)^n + 15)n^3 + 4(9(-1)^n + 35)n^2 + 2(29(-1)^n + 75)n + 33(-1)^n + 63) / 24, \\ C_2 &= (2n^2 + (2(-1)^n + 6)n + 3(-1)^n + 5) / 16, \\ C_3 &= (2n^2 + (2(-1)^n + 14)n + 7(-1)^n + 33) / 16.\end{aligned}$$

На графике 4 представлены кривые зависимости от числа панелей относительного прогиба: $\Delta' = EF\Delta_{E,n} / (LP_{sum})$, где $P_{sum} = (2n + 5)P$ – суммарная нагрузка на ферму. С помощью операторов системы «Maple» можно найти асимптотику решения. Выясняется, что рост прогиба при увеличении числа панелей имеет квадратичный характер: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = 5a^2 / (48h^2)$.

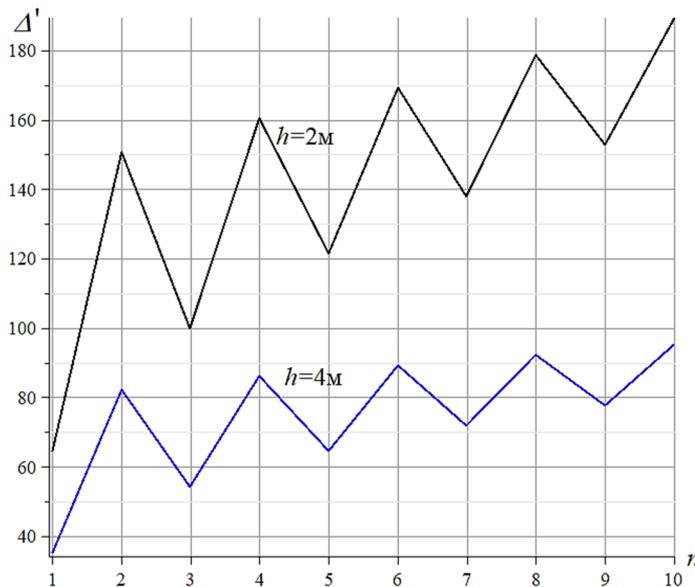


Рис. 4. Зависимость относительного прогиба от числа панелей

Одновременно с вычислением прогиба в этом же цикле по числу панелей программа позволяет найти реакции опор внешне статически неопределимой конструкции: $S_A = S_D = P(n + 3) / 2$, $S_B = S_C = P(n + 2) / 2$. Горизонтальная компонента реакции неподвижной правой опоры при такой нагрузке равна нулю.

Под действием вертикальной нагрузки три подвижные опоры смещаются. Расчет смещения также производится по формуле Максвелла – Мора, но в качестве единичной силы берется горизонтальная сила, приложенная к опоре A:

$$\delta_A = 2P(n + 1)(n + 2)(n + 3)a^2 / (3hEF).$$

Расчет основной частоты собственных колебаний. Вычисление первой собственной частоты ω_D производится по приближенной формуле [25], основанной на упрощении подхода Донкерлея [26, 27]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m K \Delta_n, \quad (1)$$

где ω_p – парциальная частота колебаний одной массы m в узле с номером p . Упрощение состоит в замене суммы парциальных прогибов $\sum_{p=1}^K \delta_p$ ее средним значением $\delta^{\max} K / 2$. Частота находится из уравнения движения массы в узле:

$$m \ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Для вычисления коэффициента D_p используется формула Максвелла – Мора как сумма квадратов усилий по всем стержням фермы, включая опоры:

$$1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (3)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ – усилие в стержне α при действии на узел p единичной вертикальной силы. В качестве узла p , согласно [25], выбирается наиболее податливый узел. Для данной схемы это, очевидно, узел с номером $n + 3$ в середине нижнего пояса.

Расчет суммы в (3) $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (2EF)$ для ряда ферм с увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (8a^3 + c^3 + 3h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (24a^3 + c^3 + 2h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (24a^3 + c^3 + 2h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (152a^3 + 3c^3 + 5h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (152a^3 + 3c^3 + 5h^3) / (4h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Общий член полученной последовательности методами «Maple» находится из анализа не менее четырнадцати ферм различного порядка. С помощью операторов системы «Maple» находится общий член последовательности:

$$\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF),$$

где коэффициенты имеют вид полиномов:

$$\begin{aligned} C_1 &= (2n^3 + (3(-1)^n + 9)n^2 + (9(-1)^n + 19)n + 9(-1)^n + 15) / 12, \\ C_2 &= (2n + (-1)^n + 3) / 16, \\ C_3 &= (2n + (-1)^n + 11) / 16. \end{aligned} \quad (4)$$

Расчетная формула для определения нижней оценки первой частоты принимает вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(4n + 6)(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3)}}. \quad (5)$$

Для оценки степени приближения полученного решения приведем стандартное численное решение задачи о колебании, полученное без упрощений Донкерля с учетом всех K степеней свободы системы грузов. В расчете приняты следующие размеры: $a = 3$ м, $h = 2$ м или $h = 4$ м. Материал стержней (сталь) имеет модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, площадь поперечного сечения всех стержней $F = 9$ см², массы в узлах $m = 200$ кг. На рис. 5 приведены кривые аналитической зависимости от числа панелей частоты ω_D и первой частоты ω_1 , рассчитанной численно для двух значений высоты фермы h . С увеличением числа панелей в ферме аналитическое решение и численное сближаются, частоты закономерно уменьшаются, стремясь в пределе к нулю. Решение ω_D по модифицированному методу Донкерля в отличие от оригинального метода не ограничивает численное решение снизу, соответствующие кривые пересекаются, что повышает точность решения. Точность приближенного аналитического решения оказывается достаточно высокой и увеличивается с ростом числа панелей.

Для уточненной оценки погрешности вводится относительная величина: $\varepsilon = |\omega_D - \omega_1| / \omega_1$. На рис. 6 показана зависимость погрешности ε от числа панелей при различных значениях высоты h .

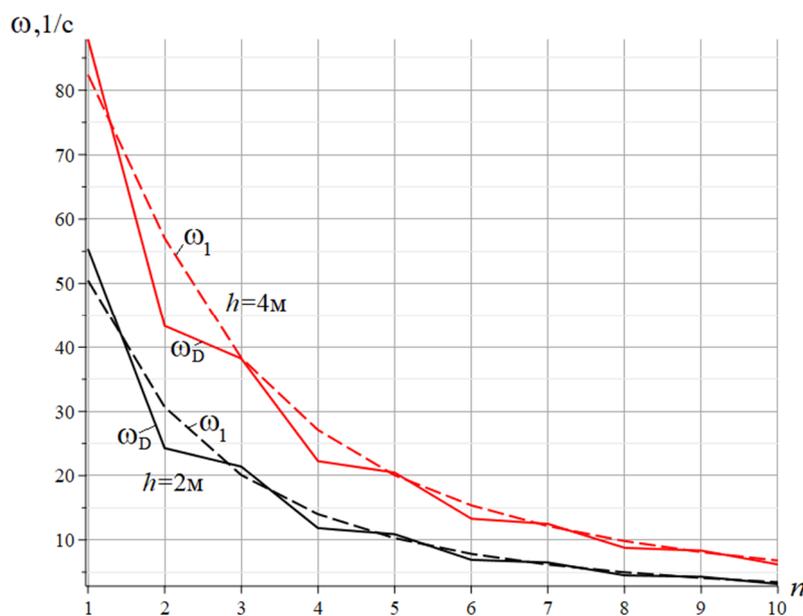


Рис. 5. Сравнение аналитического решения с численным

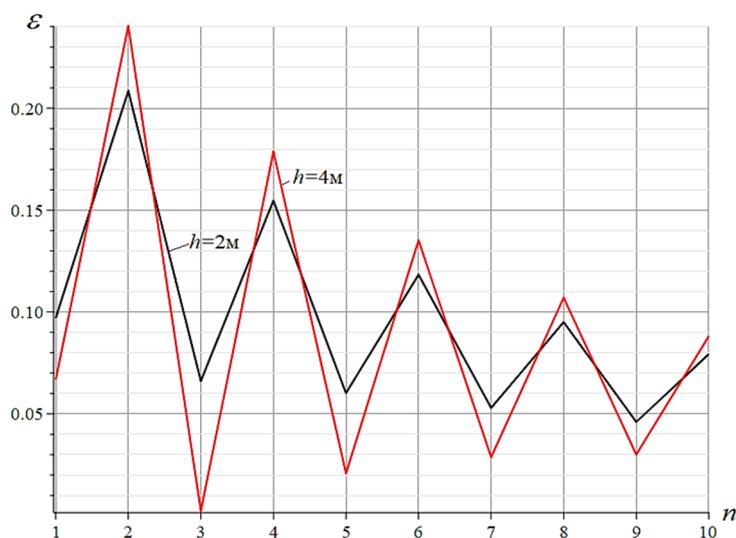


Рис. 6. Погрешность аналитической оценки основной частоты

Использованы те же данные фермы, что и для кривых рис. 5. Погрешность аналитического решения неравномерно уменьшается с увеличением порядка фермы и зависит от высоты фермы h . Для нечетного числа панелей n в половине пролета погрешность в несколько раз меньше, чем для четного числа.

Заключение. Предложена и проанализирована схема раскосной статически определимой фермы с двумя дополнительными опорами. Методом индукции получены формулы зависимости прогиба и основной (первой) частоты собственных колебаний от числа панелей. Показано, что точность выведенной приближенной формулы растет с увеличением числа панелей. В решении задачи о прогибе фермы под действием распределенной узловой нагрузки найдена квадратичная асимптотика.

Библиографический список

1. Wang Q. et al. Reinforcement design and structural performance for the topology optimized 3D printed concrete truss beams // *Engineering Structures*. – 2025. – Vol. 332. – P. 120064. – <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120064>.
2. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method // *Computers & Structures*. – 2024. – Vol. 305. – P. 107570. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.
3. Игнатъев В. А., Игнатъев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: АСВ, 2022. – 306 с.
4. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. – 2005. – № 9 (85). – P. 607–617. – DOI: 10.1002/zamm.200410208.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. – 2006. – № 4 (54). – P. 756–782. – DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.
6. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. – 2018. – № 1 (36). – P. 137–141. – DOI: 10.18720/MPM.3612018_15.
7. Goloskokov D. P. Analyzing simply supported plates using Maple system // *2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014 – Proceedings*. – 2014. – P. 55–56. – DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273.
8. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 2 (29). – С. 29–37.
9. Грибова О. В. Формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2025. – № 1 (44). – С. 31–39. – DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003.
10. Luong C. L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2024. – 113. – Article No 11304. – DOI: 10.4123/CUBS.113.4.
11. Льюнг К. Л. Оценки прогиба и частоты собственных колебаний шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2024. – № 4 (43). – С. 42–53. – DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004.
12. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – 109. – Article No 10912. – DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

13. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. – 2022. – 111 (3). – Article No. 11114. – DOI: 10.34910/MCE.111.14.
14. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – 101. – Article No 10101. – DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
15. Комерзан Е. В., Ниналалов И.Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 27–34.
16. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // *Строительная механика и конструкции*. – 2022. – № 4 (35). – С. 40–48. – DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
17. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 35–45. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004.
18. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. – 2021. – 20. – Article No 2001. – DOI: 10.34910/ALF.20.1.
19. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. – 2021. – 17 Article No 1701. – DOI: 10.34910/ALF.17.1.
20. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2021. – 96 – Article No 9602. – DOI: 10.4123/CUBS.96.2.
21. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 17–26. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
22. Манукало А. С. Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 54–60. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.006.
23. Комерзан Е. В., Лушнов Н. А., Осипова Т. С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2022. – № 2 (33). – С. 17–25. – DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002.
24. Овсянникова В. М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2020. – № 4 (27). – С. 16–25.
25. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – 108. – Article No 10801. – DOI: 10.4123/CUBS.108.1.
26. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems // *Journal of sound and vibration*. – 1991. – Vol. 150.1. – Pp. 111–118. – [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90405-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90405-9).
27. Rutenberg A. A lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems // *Journal of Sound and Vibration*. – 1976. – Vol. 45.2. – Pp. 249–252. – DOI: 10.1016/0022-460X(76)90599-X.

References

1. Wang Q. et al. Reinforcement design and structural performance for the topology optimized 3D printed concrete truss beams. *Engineering Structures*. 2025. V. 332. P. 120064. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2025.120064>.
2. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method. *Computers & Structures*. 2024. V. 305. P. 107570. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.

3. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
4. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – The hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005. № 9(85). Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208.
5. Hutchinson R. G., Fleck N. A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. № 4(54). Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008.
6. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. № 1 (36). P. 137–141. DOI: 10.18720/MPM.3612018_15.
7. Goloskokov D. P. Analyzing simply supported plates using Maple system. 2014 International Conference on Computer Technologies in Physical and Engineering Applications, ICCTPEA 2014 – Proceedings. 2014. Pp. 55–56. DOI: 10.1109/ICCTPEA.2014.6893273.
8. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*, 2021. 2 (29). P. 29–30.
9. Gribova O. V. Formulas for calculation of deflection and natural frequency of a flat truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2025. № 1 (44). Pp. 31–39. DOI: 10.36622/2219-1038.2025.44.1.003.
10. Luong C. L. Resonance safety zones of a truss structure with an arbitrary number of panels. 2024; *Construction of Unique Buildings and Structures*; 113Article No 11304. DOI: 10.4123/CUBS.113.4.
11. Luan L. C. Estimates of deflection and natural frequency of vibrations of a hinged-rod truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2024. № 4 (43). P. 42–53. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.004.
12. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109. Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
13. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111 (3). Article 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
14. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
15. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural vibrations of a plane model of a composite truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4(39). Pp. 27–34.
16. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Static deformations of a composite spatial frame truss. Analytical solutions. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 4 (35). Pp. 40–48. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005. (in Russian).
17. Komerzan E. V., Maslov A. N. Evaluation of the fundamental frequency of oscillations of an L-shaped spatial truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 2 (37). Pp. 35–45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004.
18. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20. Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1.
19. Dai Q. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. DOI: 10.34910/ALF.17.1.
20. Kirsanov M., Khromatov V. Deformation of the transmission towers: analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2021. 96 Article No. 9602. DOI: 10.4123/CUBS.96.2.

21. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
22. Manukalo A. S. Analysis of a planar sprengel truss first frequency natural oscillations value. *Structural mechanics and structures*. 2023. № 2 (37). Pp 54–60. (in Russian). DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.006.
23. Komerzan E. V., Lushnov N. A., Osipova T. S. Analytical calculation of the deflection of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2022. № 2 (33). Pp. 17–25. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002.
24. Ovsyannikova V. M. Dependence of the deflection of a planar external statically undeterminable truss on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2020. №4 (27). Pp. 16–25.
25. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.
26. Levy C. An iterative technique based on the Dunkerley method for determining the natural frequencies of vibrating systems. *Journal of sound and vibration*. 1991. V. 150. 1. Pp. 111–118. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(91\)90405-9](https://doi.org/10.1016/0022-460X(91)90405-9).
27. Rutenberg A. A lower bound for Dunkerley's formula in continuous elastic systems. *Journal of Sound and Vibration*. 1976. V. 45.2. Pp. 249–252. DOI: 10.1016/0022-460X(76)90599-X.

ANALYTICAL CALCULATION OF DEFLECTION AND FIRST NATURAL FREQUENCY OF A FLAT TRUSS OSCILLATIONS

M. N. Kirsanov ¹

National Research University "MPEI" ¹
Moscow, Russia

¹ Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

The scheme of a statically determinate truss of a regular type is considered. The truss has rectilinear chords and four supports, one of which is a fixed hinge, three are movable ones. The dependence of the deflection and horizontal displacement of the truss support under the action of a uniformly distributed load on the number of panels is found by the induction method using the Maxwell – Mohr formula. When deriving the formula for the fundamental frequency, the modified Dunkerley method is used. It is assumed that the mass of the structure is uniformly distributed over its nodes, and oscillations of the nodes occur only vertically. The result of the approximate analytical solution is compared with the numerical ones, taking into account all degrees of freedom of the structure within the framework of the adopted model. For analytical transformations, the Maple symbolic mathematics system is used. Depending on the deflection on the number of panels, a quadratic asymptotics is found. Formulas for support reactions are derived.

Key words: planar truss, natural frequency, Dunkerley method, induction, Maple, approximate method, Maxwell – Mohr formula, deflection, asymptotics, support displacement.

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ЗОНЕ СОЧЛЕНЕНИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ ПЛОСКОМ НАГРУЖЕНИИ НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО МКЭ

Р. З. Киселёва¹, В. В. Рябуха², Н. А. Кирсанова³, Ю. В. Клочков⁴, А. П. Николаев⁵

Волгоградский государственный аграрный университет^{1, 2, 4, 5}

Россия, г. Волгоград

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации³

Россия, г. Москва

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной геодезии, природообустройства и водопользования, тел.: +7(917)641-53-79; e-mail: rumia1970@yandex.ru

² Аспирант кафедры механики, e-mail: vitalik30090@mail.ru

³ Д-р физ.-мат. наук, доц. департамента анализа данных, принятия решений и финансовых технологий, e-mail: Natalya-gureeva@yandex.ru

⁴ Д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой высшей математики, e-mail: Klotchkov@bk.ru

⁵ Д-р техн. наук, проф. кафедры механики, e-mail: anpetr40@yandex.ru

Для определения напряженного состояния в зоне пересечения оболочек при плоском нагружении использован смешанный метод конечных элементов в криволинейной системе координат.

Сочлененные оболочки рассматривались без использования гипотезы Кирхгофа – Лява при использовании метода конечных элементов в смешанной формулировке.

В качестве конечного элемента использовался призматический конечный элемент единичной высоты при треугольных основаниях с узловыми неизвестными в виде перемещений узловых точек и компонент тензора напряжений (нормальных и сдвигающих напряжений в плоскости нагружения).

Искомые величины внутренней точки призматического конечного элемента аппроксимировались с использованием линейных функций в координатах модельного равнобедренного треугольника. Для получения матрицы деформирования призматического конечного элемента при нагружении в пределах упругости использовался смешанный функционал Рейсснера, при минимизации которого по искомым узловым неизвестным получены матрица деформирования призматического конечного элемента и вектор узловых усилий. Для узлов на границе сочленения плоско нагруженных оболочек узловые неизвестные одной оболочки приняты за основные. Узловые неизвестные примыкающей оболочки выражены через узловые неизвестные основной на основе равенства векторов перемещений граничной узловой точки и ее тензоров напряжений в криволинейных системах координат сочленяемых оболочек.

На конкретном примере реализован разработанный алгоритм для сочленяемых пластин с возможностью контроля.

Ключевые слова: смешанный метод конечных элементов, призматический конечный элемент, функционал Рейсснера, упругое деформирование, сочленение оболочек.

Введение. Для определения напряженно-деформированного состояния (НДС) тонкостенных элементов инженерных конструкций (типа пластин и оболочек различного очертания) широко используется метод конечных элементов (МКЭ) в различных формулировках. Наиболее широкое распространение при определении НДС получил МКЭ в формулировке метода перемещений, когда при расчетах тонкостенных конструкций используется гипотеза Кирхгофа – Лява, а в используемых конечных элементах искомыми величинами принимаются перемещения узловых точек и их производные различных порядков [1–5, 10–12]. На основе МКЭ в формулировке метода перемещений проведены исследования НДС в зонах сочленения пересекающихся оболочек [14, 15] и в контактных задачах [8]. В последнее время для определения НДС тонкостенных элементов инженерных конструкций стал использоваться МКЭ в смешанной формулировке [6, 7, 16–19].

Гипотеза Кирхгофа – Лява, широко используемая при определении НДС в тонкостенных элементах инженерных конструкций, хорошо выполняется в зонах, располагающихся на некотором удалении от мест сочленения тонкостенных конструкций, от мест резкого изменения толщин и от вырезов. А так как в этих зонах как раз проявляются концентрации напряжений, то задача определения НДС без принятия гипотезы Кирхгофа – Лява является актуальной задачей инженерной практики. По этой причине при определении НДС пластин и оболочек стал применяться МКЭ в смешанной формулировке без использования гипотезы о возможности прямолинейного деформирования нормали [6, 7, 16–19]. В таких работах для конечных элементов различных конфигурации в качестве узловых неизвестных принимались перемещения и напряжения с линейными аппроксимациями. –

В настоящей работе для определения НДС в зоне сочленения двух плоско нагруженных криволинейных пересекающихся оболочек использован трехмерный конечный элемент с узловыми неизвестными в виде перемещений и напряжений. Разработаны условия сочленения двух плоско нагруженных оболочек в криволинейных системах координат.

1. Геометрия сочленяемых оболочек. В декартовых системах координат срединные поверхности сочленяемых оболочек, продольные сечения которых представлены на рис. 1, определяются радиус-векторами:

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + z(x)\vec{k}; \quad \vec{R}^{0'} = x'\vec{i}' + z'\vec{k}', \quad (1.1)$$

где x, z, \vec{i}, \vec{k} – координаты и орты координатной системы основной оболочки; $x', z', \vec{i}', \vec{k}'$ – координаты и орты декартовой системы координат примыкающей оболочки.

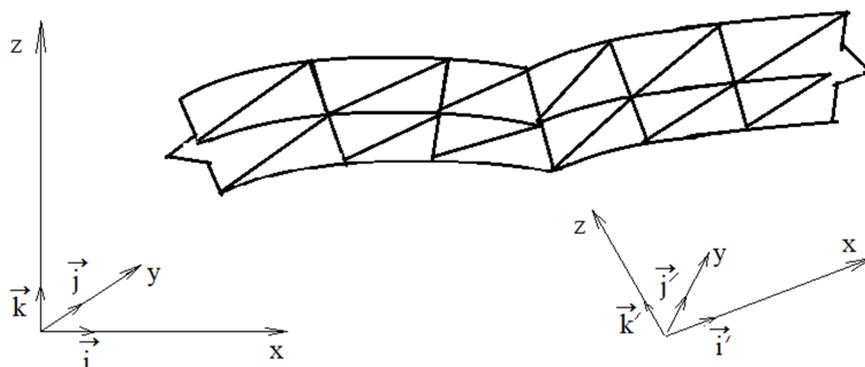


Рис. 1. Продольное сечение сочленяемых оболочек в декартовых системах координат

Орты декартовых систем координат на границе сочленения оболочек связаны матричным соотношением

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix}_{2 \times 1} = [\mu] \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}_{2 \times 1}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix}_{1 \times 2}^T = \begin{Bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{k}' \end{Bmatrix}_{1 \times 2}, \quad \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}_{1 \times 2}^T = \begin{Bmatrix} \vec{i} \\ \vec{k} \end{Bmatrix}_{1 \times 2}.$$

Положения произвольных точек сочленяемых оболочек, расположенных на расстояниях t и t' от срединных поверхностей, определяются радиус-векторами:

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + t\vec{a}^0; \quad \vec{R}' = \vec{R}^{0'} + t'\vec{a}^{0'}, \quad (1.3)$$

где $\vec{a}^0; \vec{a}^{0'}$ – нормали к срединным поверхностям основной и примыкающей оболочек.

Базисные векторы произвольных точек оболочек определяются дифференцированием соотношений (1.3):

$$\bar{g}_\alpha = \bar{R}_{,\alpha} = \bar{R}_{,\alpha}^0 + t\bar{a}_{,\alpha}^0; \bar{g}'_\alpha = \bar{R}'_{,\alpha} = \bar{R}'_{,\alpha}{}^{0'} + t'\bar{a}'_{,\alpha}{}^{0'}, \quad (1.4)$$

где символом α обозначено дифференцирование по координатам x, t и x', t' соответственно.

Соотношения (1.4) представляются матричными выражениями:

$$\left\{ \begin{array}{c} \bar{g} \\ \bar{g}' \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{c} \tau \\ \tau' \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \bar{i}_\alpha \\ \bar{i}'_\alpha \end{array} \right\}, \quad (1.5)$$

где

$$\left\{ \bar{g}_i \right\}^T = \{ \bar{g}_1, \bar{g}_3 \}; \left\{ \bar{g}'_i \right\}^T = \{ \bar{g}'_1, \bar{g}'_3 \}.$$

С использованием (1.2) из (1.5) определяются матричные зависимости между векторами локальных базисов граничных точек сочленяемых оболочек в криволинейных системах координат основной и примыкающей оболочек:

$$\left\{ \bar{g}' \right\} = \left[\tau' \right] \left[\mu \right]^{-1} \left\{ \bar{g} \right\} = \left[d \right] \left\{ \bar{g} \right\}. \quad (1.6)$$

На основании (1.6) базисные векторы граничной точки записываются выражениями

$$\bar{g}'_\alpha = d_{\alpha 1} \bar{g}_1 + d_{\alpha 2} \bar{g}_2, \quad (1.7)$$

при использовании которых формируется матричное соотношение между диадными произведениями базисных векторов граничных точек сочленяемых оболочек:

$$\left\{ \bar{g}' \right\} = \left[\chi \right] \left\{ \bar{g} \right\}, \quad (1.8)$$

где

$$\left\{ \bar{g}' \right\}^T = \{ \bar{g}'_1 \bar{g}'_1; \bar{g}'_3 \bar{g}'_3 \}; \left\{ \bar{g} \right\}^T = \{ \bar{g}_1 \bar{g}_1; \bar{g}_3 \bar{g}_3 \}.$$

Дифференцированием (1.4) можно записать соотношения

$$\bar{g}_{\alpha,\beta} = \bar{R}_{,\alpha\beta}^0 + (t\bar{a}_{,\alpha}^0)_{,\beta}; \bar{g}'_{\alpha,\beta} = \bar{R}'_{,\alpha\beta}{}^{0'} + (t'\bar{a}'_{,\alpha}{}^{0'})_{,\beta}, \quad (1.9)$$

на основании которых при учете (1.6) формируются матричные выражения для представления производных базисных векторов компонентами в этих же базисах:

$$\left\{ \bar{g}_{,1} \right\} = \left[\gamma_1 \right] \left\{ \bar{i}_{\alpha,1} \right\} = \left[\gamma_1 \right] \left[\tau \right]^{-1} \left\{ \bar{g} \right\} = \left[m \right] \left\{ \bar{g} \right\}; \quad (1.10)$$

$$\left\{ \bar{g}_{,3} \right\} = \left[\gamma_3 \right] \left\{ \bar{i}_{\alpha,3} \right\} = \left[\gamma_3 \right] \left[\tau \right]^{-1} \left\{ \bar{g} \right\} = \left[n \right] \left\{ \bar{g} \right\};$$

$$\left\{ \bar{g}'_{,1} \right\} = \left[m' \right] \left\{ \bar{g}' \right\}; \left\{ \bar{g}'_{,3} \right\} = \left[n' \right] \left\{ \bar{g}' \right\},$$

где

$$\left\{ \bar{g}_{,1} \right\}^T = \{ \bar{g}_{,1,1}, \bar{g}_{,3,1} \}; \left\{ \bar{g}_{,3} \right\}^T = \{ \bar{g}_{,1,3}, \bar{g}_{,3,3} \}; \left\{ \bar{g}'_{,1} \right\}^T = \{ \bar{g}'_{,1,1}, \bar{g}'_{,3,1} \}; \left\{ \bar{g}'_{,3} \right\}^T = \{ \bar{g}'_{,1,3}, \bar{g}'_{,3,3} \}.$$

2. Смешанный конечный элемент оболочки и его преобразование на границе сочленения при плоском нагружении. Используется призматический конечный элемент единичной высоты с основаниями в форме равных треугольников с узловыми неизвестными в виде перемещений и напряжений. Вектор перемещения внутренней точки поперечного сечения конечного элемента и его производная определяются в локальном базисе точки:

$$\bar{v} = v^\rho \bar{g}_\rho; \bar{v}_{,\alpha} = v_{,\alpha}^\rho \bar{g}_\rho + v^\rho \bar{g}_{\rho,\alpha} = f_\alpha^\rho \bar{g}_\rho. \quad (2.1)$$

В качестве узловых неизвестных принимаются перемещения узловых точек:

$$\left\{ v_y \right\}_{1 \times 6}^T = \left\{ v^{1i} v^{1j} v^{1k} v^{3i} v^{3j} v^{3k} \right\}. \quad (2.2)$$

Аппроксимация перемещения внутренней точки поперечного сечения конечного элемента выполняется с использованием линейных функций относительно координат $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ модельного равнобедренного треугольника:

$$v^\rho = \left\{ \xi : \eta : (1 - \xi - \eta) \right\} \left\{ v_y^\rho \right\} = \left\{ \varphi(\xi, \eta) \right\}^T \left\{ v_y^\rho \right\}, \quad (2.3)$$

где

$$\left\{ v_y^\rho \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ v^{\rho i} v^{\rho j} v^{\rho k} \right\}; \quad (\rho = 1, 3).$$

С использованием (2.3) формируется матричное соотношение:

$$\left\{ v \right\}_{2 \times 1} = [A] \left\{ v_y \right\}_{2 \times 6 \quad 6 \times 1}, \quad (2.4)$$

где

$$\left\{ v \right\}_{1 \times 2}^T = \left\{ v^1 v^3 \right\}.$$

Деформация во внутренней точке конечного элемента определяется соотношениями [8, 13]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\bar{g}_\alpha \cdot \bar{v}_{,\beta} + \bar{g}_\beta \cdot \bar{v}_{,\alpha} \right), \quad (2.5)$$

или в матричной форме при учете (2.1):

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{3 \times 1} = [L] \left\{ v_y \right\}_{3 \times 2 \quad 2 \times 1} = [L][A] \left\{ v_y \right\}_{3 \times 2 \quad 2 \times 6 \quad 6 \times 1} = [B] \left\{ v_y \right\}_{3 \times 6 \quad 6 \times 1}, \quad (2.6)$$

где

$$\left\{ \varepsilon \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{13} \right\},$$

$[L]_{3 \times 2}$ – матрица дифференциальных операторов.

Компоненты тензора напряжений во внутренней точке конечного элемента аппроксимируются также с использованием линейной функции (2.3):

$$\sigma^{\alpha\beta} = \left\{ \varphi(\xi, \eta) \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \sigma_y^{\alpha\beta} \right\}, \quad (2.7)$$

где

$$\left\{ \sigma_y^{\alpha\beta} \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \sigma^{\beta i} \sigma^{\beta j} \sigma^{\beta k} \right\}.$$

На основании (2.7) формируется матричное соотношение:

$$\left\{ \sigma \right\}_{3 \times 1} = [S] \left\{ \sigma_y \right\}_{3 \times 9 \quad 9 \times 1}, \quad (2.8)$$

где

$$\left\{ \sigma \right\}_{1 \times 3}^T = \left\{ \sigma^{11} \sigma^{33} \sigma^{13} \right\}; \quad \left\{ \sigma_y \right\}_{1 \times 9}^T = \left\{ \sigma^{11i} \sigma^{11j} \sigma^{11k} \sigma^{33i} \sigma^{33j} \sigma^{33k} \sigma^{13i} \sigma^{13j} \sigma^{13k} \right\}.$$

Соотношения между деформациями и напряжениями принимаются по уравнениям [13]:

$$\begin{matrix} \{\varepsilon\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [C] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 3 \times 1 \end{matrix}. \quad (2.9)$$

Для получения матрицы деформирования призматического конечного элемента используется смешанный функционал Рейсснера [6]:

$$\Pi_{\kappa} = \int_V \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \begin{matrix} [L] \\ 3 \times 2 \end{matrix} \begin{matrix} \{v\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} dV - \frac{1}{2} \int_V \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \begin{matrix} [C] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} \{\sigma\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} dV - \frac{1}{2} \int_F \begin{matrix} \{v\} \\ 1 \times 2 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{q\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} dF, \quad (2.10)$$

где V – объем конечного элемента; F – площадь приложения нагрузки.

С учетом аппроксимирующих выражений (2.4), (2.6) и (2.8) функционал (2.10) записывается выражением:

$$\Pi_R \equiv \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 1 \times 9 \end{matrix}^T \int_V \begin{matrix} [S] \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \begin{matrix} [B] \\ 3 \times 6 \end{matrix} dV \begin{matrix} \{v_y\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} - \frac{1}{2} \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 1 \times 9 \end{matrix}^T \int_V \begin{matrix} [S] \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \begin{matrix} [C] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} [S] \\ 3 \times 3 \end{matrix} dV \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 9 \times 1 \end{matrix} - \frac{1}{2} \begin{matrix} \{v_y\} \\ 1 \times 6 \end{matrix}^T \int_F \begin{matrix} [A] \\ 6 \times 2 \end{matrix} \begin{matrix} \{q\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} dF. \quad (2.11)$$

В результате минимизации функционала (2.11) по узловым неизвестным получаются системы уравнений:

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 9 \times 1 \end{matrix}^T} \equiv \begin{matrix} [Q] \\ 6 \times 9 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 9 \times 1 \end{matrix} - \begin{matrix} \{f_q\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = 0; \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \begin{matrix} \{v_y\} \\ 6 \times 1 \end{matrix}^T} \equiv - \begin{matrix} [H] \\ 9 \times 9 \end{matrix} \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 9 \times 1 \end{matrix} + \begin{matrix} [Q] \\ 9 \times 6 \end{matrix} \begin{matrix} \{v_y\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = 0,$$

где $\begin{matrix} [H] \\ 9 \times 9 \end{matrix} = \int_V \begin{matrix} [S] \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \begin{matrix} [C] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} [S] \\ 3 \times 3 \end{matrix} dV$; $\begin{matrix} [Q] \\ 9 \times 6 \end{matrix} = \int_V \begin{matrix} [S] \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \begin{matrix} [B] \\ 3 \times 6 \end{matrix} dV$;

$$\begin{matrix} \{f_q\} \\ 6 \times 1 \end{matrix} = \int_F \begin{matrix} [A] \\ 6 \times 2 \end{matrix} \begin{matrix} \{q\} \\ 2 \times 1 \end{matrix} dF.$$

Системы алгебраических уравнений представляются в виде матрицы деформирования призматического конечного элемента $\begin{matrix} [K] \\ 15 \times 15 \end{matrix}$, вектора узловых неизвестных $\begin{matrix} \{z_y\} \\ 15 \times 1 \end{matrix}$ и вектора

узловых усилий $\begin{matrix} \{f\} \\ 15 \times 1 \end{matrix}$:

$$\begin{matrix} [K] \\ 15 \times 15 \end{matrix} \begin{matrix} \{z_y\} \\ 15 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} \{f\} \\ 15 \times 1 \end{matrix}, \quad (2.13)$$

где $\begin{matrix} [K] \\ 15 \times 15 \end{matrix} = \begin{bmatrix} -[H] & [Q] \\ [Q]^T & [0] \end{bmatrix}$; $\begin{matrix} \{z_y\} \\ 1 \times 15 \end{matrix}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\sigma_y\} \\ 1 \times 9 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{v_y\} \\ 1 \times 6 \end{matrix}^T \right\}$; $\begin{matrix} \{f\} \\ 1 \times 15 \end{matrix}^T = \left\{ \begin{matrix} \{0\} \\ 1 \times 9 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{f_q\} \\ 1 \times 6 \end{matrix}^T \right\}$.

Для конечных элементов, примыкающих к границе сочленения оболочек, неизвестные граничных узлов одной оболочки принимаются за основные:

$$\begin{matrix} \{z^\omega\} \\ 1 \times 5 \end{matrix}^T = \left\{ \begin{matrix} \{\sigma_y^\omega\} \\ 1 \times 3 \end{matrix}^T \begin{matrix} \{v_y^\omega\} \\ 1 \times 2 \end{matrix}^T \right\}, \quad (2.14)$$

где ω – номер граничной точки.

Узловые неизвестные примыкающей оболочки в узле ω

$$\left\{ \begin{matrix} z'_y \\ \end{matrix} \right\}_{1 \times 5}^T = \left\{ \begin{matrix} \sigma'_y & v'_y \\ \end{matrix} \right\}_{\begin{matrix} 1 \times 3 & 1 \times 2 \end{matrix}}^T \quad (2.15)$$

следует выразить через узловые значения (2.14) основной оболочки, и с использованием полученного матричного выражения преобразовать матрицу деформирования примыкающей оболочки.

С этой целью используется условие равенства векторов перемещения граничной точки в криволинейных координатных системах сочленяемых оболочек:

$$\vec{v}' = \vec{v}. \quad (2.16)$$

С использованием (1.6) и (2.1) из (2.16) получается зависимость:

$$\left\{ v'_\omega \right\}_{2 \times 1} = \left[d^T \right]_{2 \times 2}^{-1} \left\{ v^\omega \right\}_{2 \times 1}. \quad (2.17)$$

Условие равенства тензоров напряжений граничной точки в криволинейных координатных системах сочленяемых оболочек записывается выражением:

$$\left\{ g'_\omega \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \sigma'_\omega \right\}_{3 \times 1} = \left\{ g^\omega \right\}_{1 \times 3}^T \left\{ \sigma_y^\omega \right\}_{3 \times 1}. \quad (2.18)$$

При использовании (1.8) из (2.18) получается зависимость между компонентами тензоров напряжений в граничной точке сочлененных оболочек:

$$\left\{ \sigma'_y \right\}_{3 \times 1} = \left[\chi^T \right]_{3 \times 3}^{-1} \left\{ \sigma_y^\omega \right\}_{3 \times 1}. \quad (2.19)$$

С использованием (2.18) и (2.19) формируется матричная зависимость:

$$\left\{ v'_\omega \right\}_{5 \times 1} = \left[\lambda \right]_{5 \times 5} \left\{ \sigma_y^\omega \right\}_{5 \times 1}, \quad (2.20)$$

где

$$\left\{ v'_\omega \right\}_{1 \times 5}^T = \left\{ v'^1 v'^3 \sigma'^{11} \sigma'^{33} \sigma'^{13} \right\} -$$

узловые искомые величины примыкающей оболочки в граничном узле ω' ;

$$\left\{ v^\omega \right\}_{1 \times 5}^T = \left\{ v^1 v^3 \sigma^{11} \sigma^{33} \sigma^{13} \right\} -$$

узловые неизвестные основной оболочки в узле ω .

Матрицы (2.20) составляются для всех граничных точек сочлененных оболочек, и с их использованием преобразуются матрицы деформирования $[K']$, столбцы узловых неизвестных $[z'_y]$ и векторы узловых усилий $[f'_q]$ конечных элементов примыкающей оболочки, узлы которых содержат граничные точки сочленяемых оболочек.

3. Полученные результаты. Пример. Определялось НДС пересекающихся пластин, нагруженных сосредоточенной силой Q (рис. 2). Материал пластин однородный.

Были приняты следующие исходные данные: $l_1 = 1$ м; $l_2 = 0,8$ м; $Q = 20$ кН; $h = 0,1$ м; $h' = 0,1$ м; $E = 2 \times 10^6$ МПа; $E' = 2 \times 10^6$ МПа; $\mu = 0,3$; $\mu' = 0,3$.

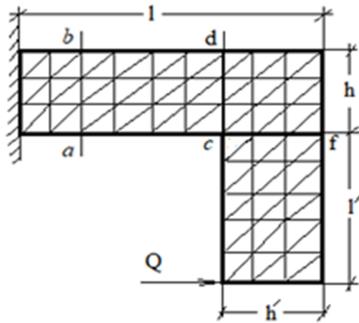


Рис. 2. Расчетная схема сочленяемых пластин с дискретизацией на конечные элементы

По толщине основная и примыкающая пластины разбивались на 9 равных дискретных элементов. По длине основная пластина разбивалась на 70 одинаковых элементов, а примыкающая пластина – на 50 одинаковых элементов.

По полученным результатам построены эпюры нормальных напряжений σ_{xx} в сечениях $a-b$, $c-d$, $c-f$ (рис. 2), разделенных по высоте на 9 равных частей (рис. 2).

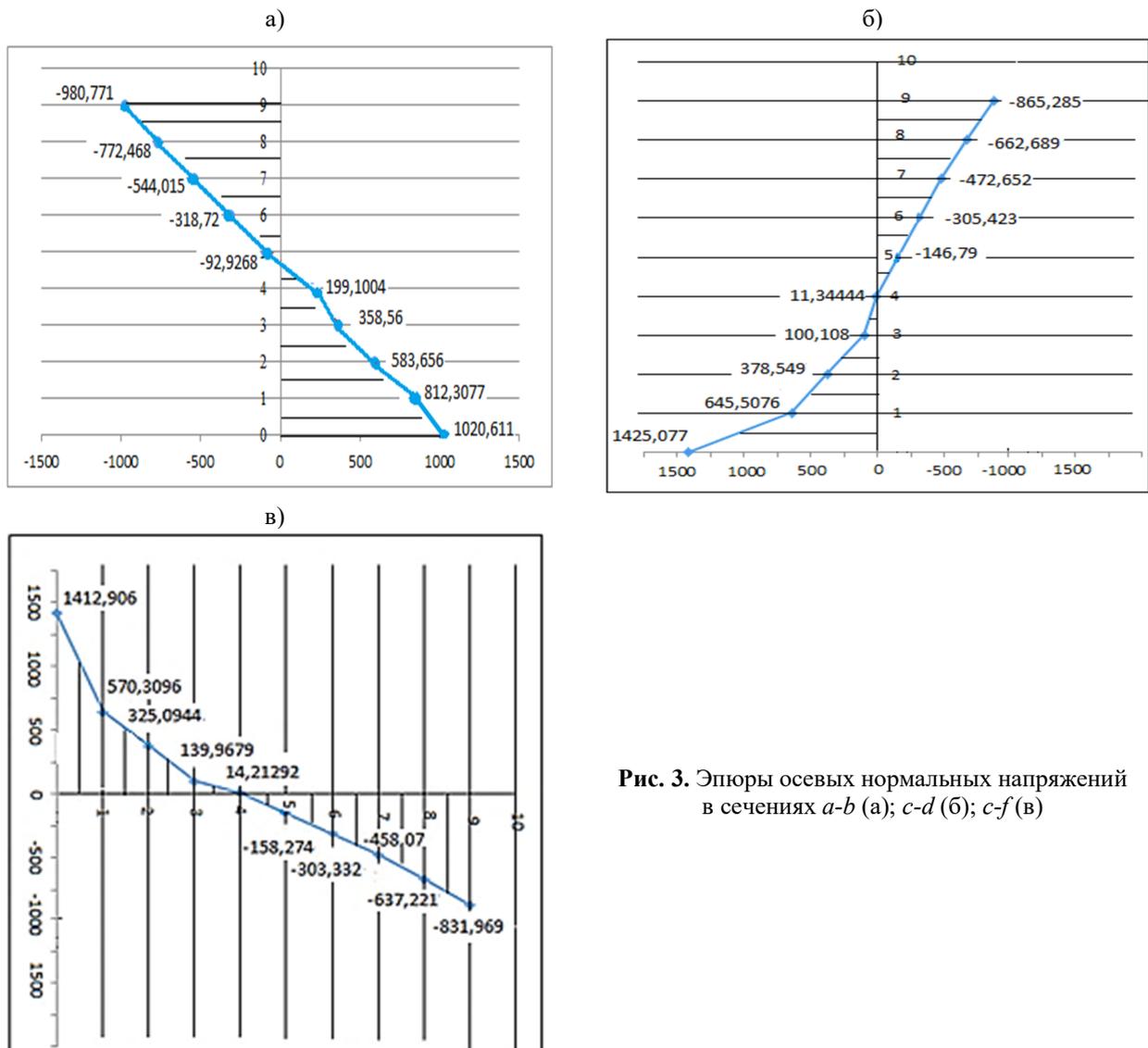


Рис. 3. Эпюры осевых нормальных напряжений в сечениях $a-b$ (а); $c-d$ (б); $c-f$ (в)

В напряженном состоянии рассматриваемой конструкции в точке c имеет место концентрация нормальных напряжений с коэффициентами концентрации $k_{c-d} = 1,65$ и $k_{c-f} = 1,7$.

По полученным результатам нормальных напряжений σ_{xx} с использованием эпюр нормальных напряжений σ_{xx} для контроля точности вычислений выполнены проверки $\sum M = 0$.

Условие равновесия по моментам ($\sum M_x = 0$) выполняется с погрешностью $\delta = 0,1$ % (рис. 3а); для (рис. 3б) условие равновесия по моментам ($\sum M_x = 0$) выполняется с погрешностью $\delta = 2$ %; для (рис. 3в) условие равновесия по моментам ($\sum M_x = 0$) выполняется с погрешностью $\delta = 2$ %.

Заключение. Разработанный призматический смешанный конечный элемент с узловыми неизвестными в виде перемещений и напряжений вполне пригоден для определения напряженно-деформированного состояния в тонкостенных конструкциях без использования гипотезы Кирхгофа – Лява.

Использование разработанного призматического смешанного конечного элемента дает возможность определения напряженного состояния в тонкостенных конструкциях в зонах концентраторов напряжений (вырезах, точках резкого изменения толщин, зонах сочленения).

Библиографический список

1. Бате К. Ю. Метод конечных элементов. – М.: Физматлит, 2010. – 1022 с.
2. Бакулин В. Н. Блочная конечно-элементная модель для послойного анализа напряженно-деформированного состояния трехслойных оболочек с нерегулярной структурой // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2018. – № 4. – С. 66–73. – DOI: 10.31857/S057232990000701-1.
3. Бакулин В. Н. Послойный анализ напряженно-деформированного состояния нерегулярных трехслойных оболочек вращения ненулевой гауссовой кривизны // Прикладная математика и механика. – 2021. – Т. 85, № 1. – С. 89–105. – DOI: 10.31857/S0032823521010033.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 214 с.
5. Голованов А. И., Тюленева О. Н., Шигабутдинов А. Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.
6. Гуреева Н. А., Клочков Ю. В., Николаев А. П. Расчет оболочки вращения при произвольном нагружении с использованием МКЭ на основе функционала Рейснера // Вычислительные технологии. – 2008. – Т. 13, № 4. – С. 51–59. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=11913114>.
7. Гуреева Н. А., Киселёва Р. З., Рябуха В. В. Алгоритм реализации треугольного элемента в смешанной формулировке при решении плоской задачи теории упругости // Материалы Междунар. науч.-практ. конф., проведенной в рамках Междунар. науч.-практ. форума, посвященного 75-летию Победы в Великой отечественной войне 1941–1945 гг. Волгоград. – 2020. – С. 318–324. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=44785422>.
8. Демидов С. П. Теория упругости. – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
9. Железнов Л. П., Колмагоров А. Е. Применение полуаналитического метода конечных элементов к решению контактной задачи для осесимметричных тел // Ученые записки ЦАГИ. – 1990. – Т. 21, № 5. – С. 102–111.
10. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
11. Киселев А. П., Гуреева Н. А., Киселева Р. З., Леонтьева В. В. Определение напряжений в зонах сочленения пластин с использованием конечных элементов различных конфигураций // Тр. VIII Междунар. науч.-практ. конф. «Инженерные системы – 2015» / под общ. ред. Н. К. Пономарева. – 2015. – С. 84–88. – <https://elibrary.ru/item.asp?id=26268229>.
12. Клочков Ю. В., Николаев А. П., Вахнина О. В. Численный анализ напряженно-деформированного состояния тонких оболочек на основе совместного конечного элемента треугольной формы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2019. – Т. 15, № 2. – С. 117–126. – DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126.

13. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М.: Наука, 1976. – 536 с.
14. Скопинский В. Н. Напряжения в пересекающихся оболочках. – М.: Физматлит, 2008. – 400 с. – <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24056990>.
15. Скопинский В. Н. Пересекающиеся оболочки – конструктивные объекты машиностроения // Машиностроение и инженерное образование. – 2005. – № 2 (3). – С. 31–45. – <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12050847>.
16. Daghighia S., Zuccoa G., Rouhia M., Weaver P. M. Bend-free design of super ellipsoids of revolution composite pressure vessels // *Composite Structures*. – 2020. – № 245. – P. 112283.
17. Liguori F. S. Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2024. – № 123. – P. 6243–6266.
18. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Advantages of mixed format in geometrically non-linear of beams and shells using solid finite elements // *International Journal for Numerical Methods Engineering*. – 2017. – Vol. 109, Issue 9. – P. 1237–1262. – <https://doi.org/10.1002/nme.5322>.
19. Nodargi N. A. An Overview of Mixed Finite Elements for the Analysis of Inelastic Bidimensional Structures // *Archives of Computational Methods in Engineering*. – 2019. – Vol. 26, № 4. – P. 1117–1151. – DOI: 10.1007/s11831-018-9293-0.

References

1. Bate K. Yu. Finite element method. M.: Fizmatlit, 2010. 1022 p.
2. Bakulin V. N. Block finite element model for layer-by-layer analysis of the stress-strain state of three-layer shells with an irregular structure. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*. No. 4. 2018. Pp. 66–73. DOI: 10.31857/S057232990000701-1.
3. Bakulin V. N. Layer-by-layer analysis of the stress-strain state of irregular three-layer shells of revolution with non-zero Gaussian curvature. *Applied Mathematics and Mechanics*. Vol. 85. No. 1. 2021. Pp. 89–105. DOI: 10.31857/S0032823521010033.
4. Gallagher R. Finite Element Method. Basics. Moscow: Mir, 1984. 214 p.
5. Golovanov A. I., Tyuleneva O. N., Shigabutdinov A. F. Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures. Moscow: Fizmatlit, 2006. 392 p.
6. Gureeva N. A., Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P. Calculation of a shell of revolution under arbitrary loading using fem based on Reissner functional. *Computational Technologies*. Vol. 13. No. 4. 2008. Pp. 51–59. <https://elibrary.ru/item.asp?id=11913114>.
7. Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Ryabukha V. V. Algorithm for the implementation of a triangular element in a mixed formulation when solving a plane problem of elasticity theory. *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference*. Volgograd. 2020. Pp. 318–324. <https://elibrary.ru/item.asp?id=44785422>.
8. Demidov S. P. Theory of elasticity. M.: Higher School, 1979. 432 p.
9. Zheleznov L. P., Kolmogorov A. E. Application of the semi-analytical finite element method to solving the contact problem for axisymmetric bodies. *Scientific notes of TsAGI*. 1990. Vol. 21. No. 5. Pp. 102–111.
10. Zenkevich O. Finite element method in engineering. Moscow: Mir, 1975. 542 p.
11. Kiselev A. P., Gureeva N. A., Kiseleva R. Z., Leontyeva V. V. Determination of stresses in the joint zones of plates using finite elements of different configurations. *Proceedings of the VIII International Scientific and Practical Conference "Engineering Systems – 2015"*. Under the General Editorship of N. K. Ponomarev. 2015. Pp. 84–88. <https://elibrary.ru/item.asp?id=26268229>.
12. Klochkov Yu. V., Nikolaev A. P., Vakhnina O. V. Numerical analysis of the stress-strain state of thin shells based on a joint finite element of a triangular shape. *Structural Mechanics of Engineering Structures and Constructions*. Vol. 15. No. 2. 2019. Pp. 117–126. DOI: 10.22363/1815-5235-2019-15-2-117-126.

13. Sedov L. I. Continuum mechanics. Vol. 1. Moscow: Nauka, 1976. 536 p.
14. Skopinsky V. N. Stresses in intersecting shells. M.: Fizmatlit, 2008. 400 p. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24056990>.
15. Skopinsky V. N. Intersecting shells - structural objects of mechanical engineering. Mechanical Engineering and Engineering Education. No. 2(3). 2005. Pp. 31–45. <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12050847>.
16. Daghighia S., Zucco G., Rouhia M., Weaver P. M. Bend-free design of super ellipsoids of revolution composite pressure vessels. Composite Structures. No. 245. 2020. P. 112283.
17. Liguori F. S. Madeo A., Garcea G. A dual decomposition of the closest point projection in incremental elasto-plasticity using a mixed shell finite element. International Journal for Numerical Methods in Engineering. No. 123. 2024. Pp. 6243–6266.
18. Magisano D., Leonetti L., Garcea G. Advantages of mixed format in geometrically non-linear of beams and shells using solid finite elements. International Journal for Numerical Methods Engineering. Vol. 109. Issue 9. 2017. Pp. 1237–1262. <https://doi.org/10.1002/nme.5322>.
19. Nodargi N. A. An overview of mixed finite elements for the analysis of inelastic bidimensional structures. Archives of Computational Methods in Engineering. Vol. 26. No. 4. 2019. Pp. 1117–1151. DOI: 10.1007/s11831-018-9293-0.

STRESS STATE IN THE JOINT ZONE OF SHELLS UNDER FLAT LOADING BASED ON MIXED FEM

R. S. Kiseleva ¹, V. V. Ryabukha ², N. A. Kirsanova ³, Yu. V. Klochkov ⁴, A. P. Nikolaev ⁵

Volgograd State Agricultural University ^{1,2,4,5}
Volgograd, Russia

Financial University under the Government of the Russian Federation ³
Moscow, Russia

¹ PhD of Technical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Applied Geodesy, Nature Management and Water Use, tel.: 8-917-641-53-79; e-mail: rumia1970@yandex.ru.

² PhD Student of the Department of Mechanics, e-mail: vitalik30090@mail.ru.

³ Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Data Analysis, Decision Making and Financial Technologies, e-mail: Natalya-gureeva@yandex.ru.

⁴ Dr. of Technical Sciences, Prof., Head of the Department of Higher Mathematics, e-mail: Klotchkov@bk.ru

⁵ Dr. of Technical Sciences, Prof. of the Department of Mechanics, e-mail: anpetr40@yandex.ru

To determine the stress state in the intersection zone of shells under plane loading, a mixed finite element method in curvilinear coordinate systems was used.

Articulated shells were considered without using the Kirchhoff-Love hypothesis using the FEM in a mixed formulation.

A prismatic finite element of unit height with triangular bases with nodal unknowns in the form of displacements of nodal points and stress tensor components (normal and shear stresses in the loading plane) was used as a finite element.

The sought values of the internal point of the prismatic finite element were approximated using linear functions in the coordinates of the model isosceles triangle. To obtain the deformation matrix of the prismatic finite element under loading within the elastic limits, the mixed Reissner functional was used, with the minimization of which, by the sought nodal unknowns, the deformation matrix of the prismatic finite element and the nodal force vector were obtained. For nodes on the junction boundary of plane loaded shells, the nodal unknowns of one shell are taken as the main ones. The nodal unknowns of the adjacent shell are expressed through the nodal unknowns of the main one based on the equality of the displacement vectors of the boundary nodal point and its stress tensors in the curvilinear coordinate systems of the articulated shells.

A specific example is used to implement the developed algorithm for articulating plates with the possibility of control.

Key words: mixed FEM, prismatic finite element, Reissner functional, elastic deformation, shell joint.

ФОРМУЛА ДЛЯ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КОНСОЛЬНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов¹, А. В. Агарков²

Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва

Воронежский государственный технический университет²
Россия, г. Воронеж

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

² Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: agarkov3@yandex.ru

Статически определимая регулярная ферма пространственной консоли с четырьмя плоскими гранями имеет треугольную решетку. Рассматриваются собственные колебания модели фермы, вся масса которой условно концентрируется в ее узлах. Узлы совершают вертикальные колебания, число степеней свободы системы масс равно числу узлов фермы без учета точек крепления конструкции к вертикальной стенке. Вывод формулы зависимости основной частоты колебаний конструкции от числа панелей основан на методе Донкерлея. Жесткость фермы рассчитывается по формуле Максвелла – Мора. Сопоставление найденного аналитического решения с численным показывает весьма высокую точность полученной формулы. Все аналитические преобразования выполнены в системе символьной математики «Maple». Обобщение ряда решений для ферм различного порядка на произвольный случай выполняется методом индукции. Точность предложенного метода увеличивается с ростом числа панелей.

Ключевые слова: пространственная ферма, консоль, собственная частота, метод Донкерлея, «Maple», метод индукции, формула Максвелла – Мора.

Введение. Для вычисления основной частоты собственных колебаний стержневых систем, как правило, применяются специализированные численные компьютерные программы [1, 2], в основу которых положен метод конечных элементов [3]. Реже расчет частот колебаний ферм выполняется аналитически. В основном такие задачи решаются приближенно, как правило, методом Донкерлея или Рэлея [4, 5]. Первый подход дает оценку частоты снизу, второй – сверху. Аналитический расчет прогиба регулярного пространственного прямоугольного покрытия в системе «Maple» выполнен в [6]. В [7] получена компактная формула для прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного пространственного покрытия с произвольным числом панелей. Методы компьютерной математики «Maple» часто применяются для расчета строительных конструкций [8, 9]. В [10] выполняется аналитический расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы. Найденное решение сравнивается с численным. Формула для первой собственной частоты колебаний двухпролетной регулярной плоской фермы выведена в [11]. Двухсторонняя оценка первой частоты собственных колебаний в аналитической форме получена в [12] методами Рэлея и Донкерлея. В настоящей работе выводится формула зависимости основной частоты колебаний пространственной четырехгранной консоли от числа панелей, размеров и масс в узлах. Аналогичная задача для пространственной консоли, составленной из трех плоских ферм с крестообразной решеткой, в аналитической форме решена в [13]. Формула для собственной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы выведена методом индукции в [14] с использованием метода Донкерлея. Деформации плоской консольной рамы в аналитической форме рассматривались в [15].

Конструкция фермы. Консольная ферма составлена из четырех одинаковых плоских ферм и прикреплена к вертикальной плоскости сферическим шарниром A , цилиндрическим B и стойками C, D (рис. 1, 2).

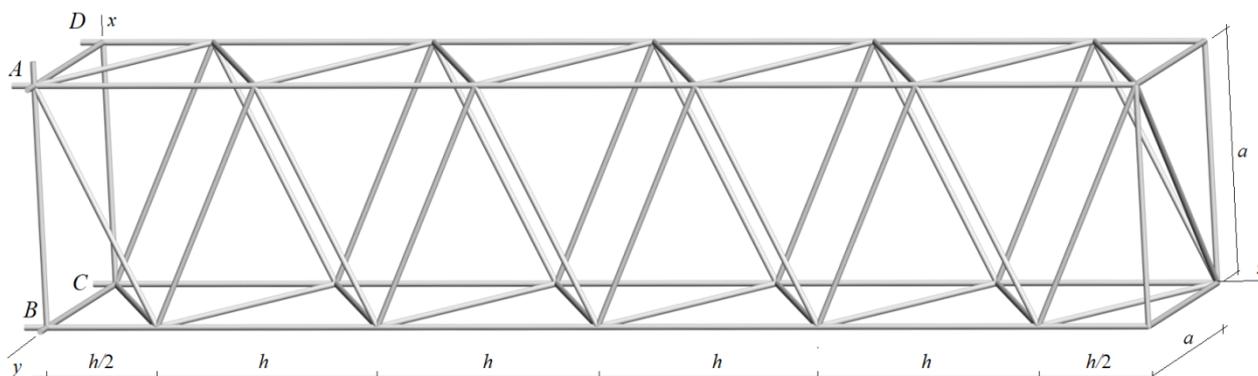


Рис. 1. Схема фермы, $n = 5$

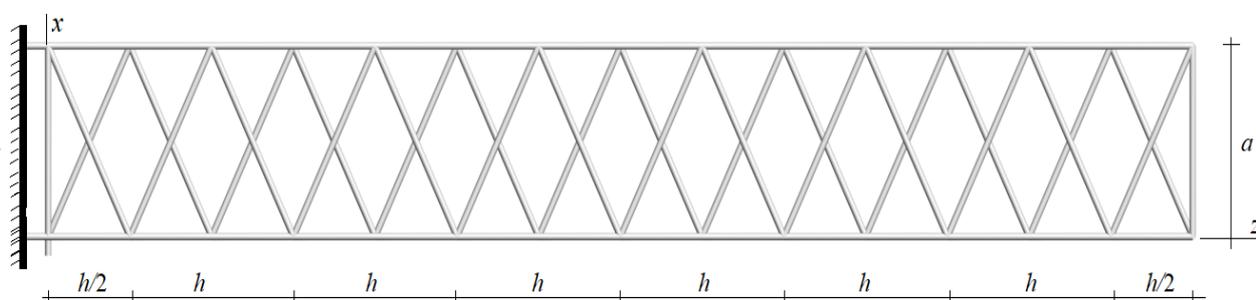


Рис. 2. Схема фермы в проекции на плоскость $x-z$, $n = 7$

Плоские фермы, из которых составлена консоль, имеют треугольные решетки и раскосный стержень на конце фермы. Пролет фермы $L = nh$, ее высота и глубина равны a . Принимается модель конструкции, в которой вся масса равномерно распределена по ее узлам, а стержни считаются невесомыми. Всего в ферме $K = 4n + 6$ узлов и $n_s = 12n + 18$ стержней, считая и семь стержней, моделирующих опоры.

Число степеней свободы рассматриваемой модели фермы равно K . Массы узлов M одинаковые.

Расчет усилий в стержнях. Усилия, необходимые для определения жесткости конструкции по формуле Максвелла – Мора, рассчитываются из решения системы уравнений равновесия узлов. Матрица этой системы состоит из направляющих косинусов усилий [16]. В программу расчета вводятся данные о координатах узлов и порядке их соединения в узлах.

Система уравнений равновесия узлов записывается в матричной форме: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{R} – вектор нагрузок на узлы; \mathbf{G} – матрица, состоящая из направляющих косинусов векторов усилий в стержнях размером $n_s \times n_s$; \mathbf{S} – вектор длиной n_s искомых усилий в стержнях. В число неизвестных усилий включаются и семь усилий в опорных стержнях. Элементы матрицы \mathbf{G} составлены по данным о координатах концов стержней.

Оценка первой частоты собственных колебаний. Для расчета первой собственной частоты ω_* используется формула, предложенная в [16]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2} = M \sum_{p=1}^K \delta_p = M \Delta_n, \quad (1)$$

где δ_p , $p = 1, \dots, K$ рассчитывается по формуле Максвелла – Мора как прогиб узла p от действия на него единичного вертикального усилия:

$$\delta_p = \sum_{\alpha=1}^{n_s} (S_\alpha)^2 l_\alpha / (EF). \quad (2)$$

Обозначено: S_α – усилие в стержне α при действии на узел p единичной вертикальной силы; l_α – длина стержня. Жесткость EF стержней одинаковая. Колебания узлов происходят по оси x . Сложность решения состоит в том, что в (1) и (2) выполняются аналитические преобразования с двойным суммированием. Последовательный расчет ферм после упрощений дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (40a^3\sqrt{2} + 116a^3 + 20b^3 + 381h^3) / (4a^2EF), \\ \Delta_2 &= (28a^3\sqrt{2} + 78a^3 + 28b^3 + 1303h^3) / (2a^2EF), \\ \Delta_3 &= (70a^3\sqrt{2} + 196a^3 + 108b^3 + 8995h^3) / (4a^2EF), \\ \Delta_4 &= (22a^3\sqrt{2} + 59a^3 + 44b^3 + 5691h^3) / (a^2EF), \\ \Delta_5 &= (104a^3\sqrt{2} + 276a^3 + 260b^3 + 48025h^3) / (4a^2EF), \dots, \end{aligned}$$

где

$$b = \sqrt{4a^2 + h^2}.$$

Для нахождения общего члена в этой задаче оказалось достаточным проанализировать десять членов последовательности. Операторы системы «Maple» `rgf_findrecur` и `genfunc` возвращают общий член этой последовательности:

$$\Delta_n = \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 h^3}{a^2 EF},$$

где полиномиальные по числу панелей коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left((96\sqrt{2} + 240)n + 144\sqrt{2} + 456 \right) / 24, \\ C_2 &= n(2n + 3), \quad C_3 = n(488n^2 + 518n + 25 + 112n^3) / 12. \end{aligned}$$

Таким образом, конечная формула для определения нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея имеет вид:

$$\omega_D = a \sqrt{\frac{EF}{M(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 h^3)}}. \quad (3)$$

Численное решение. Для примера принят поперечный размер панели консоли: $a = 3$ м, модуль упругости материала стержней $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, площадь поперечного сечения $F = 9$ см². Массы в узлах $M = 200$ кг. Кривые зависимости частоты ω_D от числа панелей по формуле (3) на графике 3 сравниваются с первой частотой спектра ω_1 , найденной численно с помощью оператора «Eigenvalues» из специализированного пакета «LinearAlgebra» системы «Maple». С увеличением числа панелей и фактической длины консоли частота монотонно падает, при этом аналитическое решение практически совпадает с численным, различаясь с ним лишь в третьем знаке. Более точно оценить относительную погрешность

аналитического решения можно по величине $\varepsilon = |\omega_1 - \omega_*| / \omega_1$. Точность решения существенно зависит от размера панели h (рис. 4) и начиная с $n = 5$ незначительно растет с увеличением числа панелей.

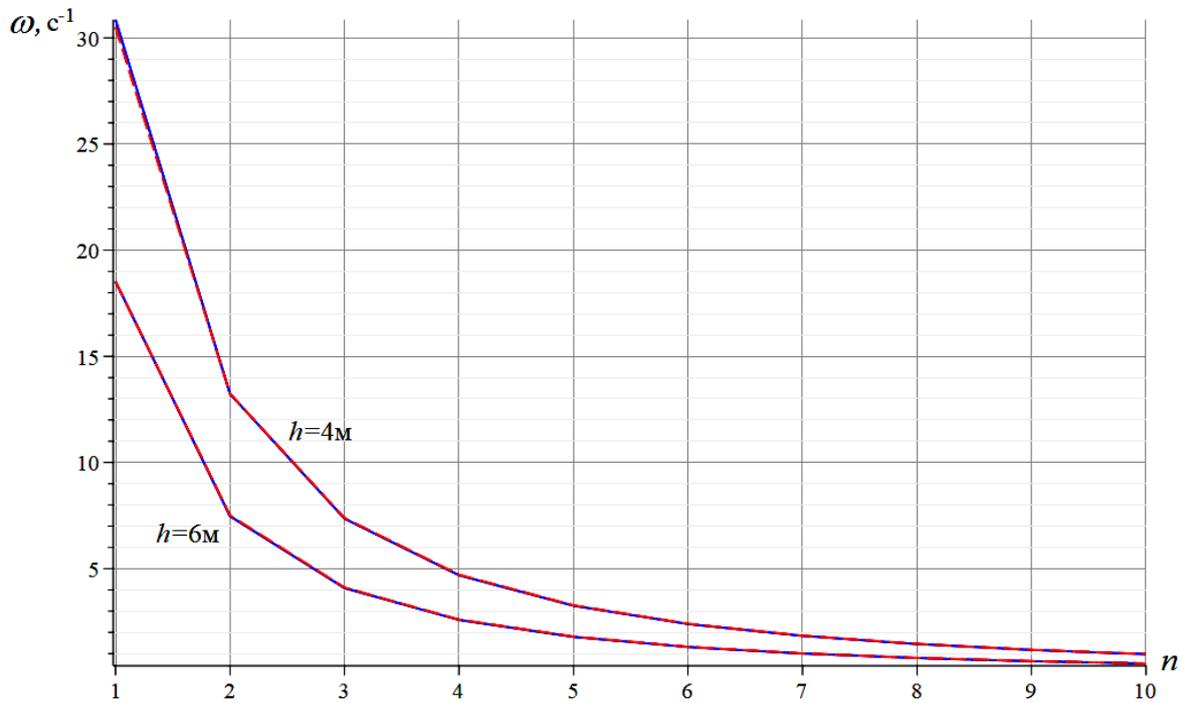


Рис. 3. Зависимость частоты ω_* от числа панелей

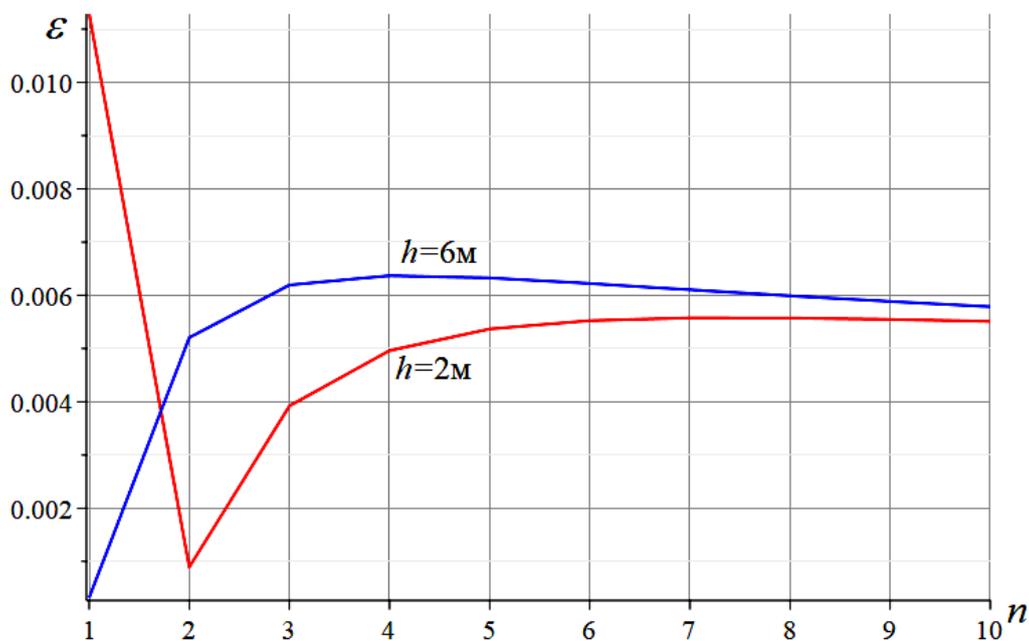


Рис. 4. Погрешность оценки основной частоты

Заключение. Предложена математическая модель пространственной консольной фермы. В системе компьютерной математики выведена формула для основной частоты собственных колебаний. Сравнение аналитического решения с численным решением показало

высокую точность выведенной формулы зависимости решения от числа панелей и размеров конструкции. Используемая модель конструкции и предложенный алгоритм вывода аналитического решения можно использовать в других статически определимых ферменных конструкциях для оценки основной частоты собственных колебаний.

Библиографический список

1. Li X., Chen T., Jin D. Discrete adaptive mesh refinement for equivalence modelling of planar beamlike periodic truss with rigid joints // *Thin-Walled Structures*. – 2025. – Vol. 210. – Pp. 112967. – <https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.112967>.
2. Zhao X. et al. Evaluating fire performance of through continuous composite steel Warren-truss bridge girders: Experimental and numerical investigation // *Engineering Structures*. – 2025. – Vol. 326. – Pp. 119591. – <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.119591>.
3. Игнатъев В. А., Игнатъев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: АСВ, 2022. – 306 с.
4. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. – 2022. – 111 (3). – Article No. 11114. – DOI: 10.34910/MCE.111.14.
5. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 17–26. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
6. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // *Вестник МГСУ*. – 2018 – Т. 13, вып. 5 (116). – С. 579–586. – DOI: 10.22227/1997-0935.2018.5.579-586.
7. Астахов С. В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // *Строительная механика и конструкции*. – 2024. – № 4 (43). – С. 34–41. – DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003.
8. Matrosov A. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions // *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*. – 2022. – Vol. 73, № 2. – DOI: 10.1007/S00033-022-01714-Y.
9. Goloskokov D. P., Matrosov, A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates // *AIP Conference Proceedings*. – 2018. – Vol. 1959. – DOI: 10.1063/1.5034687.
10. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 27–34. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.003.
11. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. – 2021. – № 20. – Article No 2001. – DOI: 10.34910/ALF.20.1.
12. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2020. – Vol. 92. – Article No 9204. – DOI: 10.18720/CUBS.92.4.
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – 101. – Article No 10101. – DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 35–45. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004.
15. Buka-Vaivade K., Kirsanov M. N., Serdjuk D. O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // *Vestnik MGSU*. – 2020. – № 4. – Pp. 510–517. – DOI:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

16. Кирсанов М. Н. Формулы для двухсторонней оценки основной частоты колебаний решетчатой фермы // Вестник МГСУ. – 2024. – Т. 19, вып. 3. – С. 377–386. – DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386.

References

1. Li X., Chen T., Jin D. Discrete adaptive mesh refinement for equivalence modelling of planar beamlike periodic truss with rigid joints. *Thin-Walled Structures*. 2025. 210. Pp. 112967. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2025.112967>.
2. Zhao X. et al. Evaluating fire performance of through continuous composite steel Warren truss bridge girders: Experimental and numerical investigation. *Engineering Structures*. 2025. 326. Pp. 119591. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.119591>.
3. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p. (in Russian).
4. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111 (3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
5. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002 (in Russian).
6. Kirsanov M. N. Analytical calculation of deflection of rectangular spatial roof structure. *Vestnik MGSU*. 2018. 13. 5 (116). Pp. 579–586. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.5.579-586 (in Russian).
7. Astakhov S. V. Analytical estimation of the deflection of a rod model of a hip roof frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 4 (43). Pp. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003 (in Russian).
8. Matrosov A. An exact analytical solution for a free-supported micropolar rectangle by the method of initial functions. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Physik*. 2022. 73. 2. DOI: 10.1007/S00033-022-01714-Y.
9. Goloskokov D. P., Matrosov, A. V. Approximate analytical solutions in the analysis of thin elastic plates. *AIP Conference Proceedings*. 2018. 1959. DOI: 10.1063/1.5034687.
10. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). P. 27–34. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.003 (in Russian).
11. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1.
12. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92. Article No 9204 DOI: 10.18720/CUBS.92.4.
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002 (in Russian).
15. Buka-Vaivade K., Kirsanov M. N., Serdjuks D. O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. 4. Pp. 510–517. DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.
16. Kirsanov M. N. Formulas for two-sided estimation of the fundamental frequency of oscillations of a lattice truss. *Vestnik MGSU*. 2024. 19 (3). Pp. 377–386. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386 (in Russian).

FORMULA FOR THE SPATIAL CANTILEVER TRUSS FIRST NATURAL OSCILLATIONS FREQUENCY

M. N. Kirsanov ¹, A. V. Agarkov ²

National Research University "MPEI" ¹
Moscow, Russia

Voronezh State Technical University ²
Voronezh, Russia

¹ Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: agarkov3@yandex.ru

A statically determinate regular spatial cantilever truss with four planar faces has a triangular lattice. Natural oscillations of a truss model are considered, the entire mass of which is conventionally concentrated in its nodes. The nodes perform vertical oscillations, the number of degrees of freedom of the mass system is equal to the number of truss nodes without taking into account the points of attachment of the structure to the vertical wall. The derivation of the formula for the dependence of the main frequency of oscillations of the structure on the number of panels is based on the Dunkerley method. The rigidity of the truss is calculated using the Maxwell – Mohr's formula. Comparison of the found analytical solution with the numerical one shows a very high accuracy of the obtained formula. All analytical transformations are performed in the Maple symbolic mathematics system. Generalizations of a number of solutions for trusses of different orders to an arbitrary case are performed by the induction method. The accuracy of the proposed method increases with an increase in the number of panels.

Key words: spatial truss, console, natural frequency, Dunkerley method, Maple, induction method, Maxwell – Mohr formula.

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

УДК 624.074.4: 539.3

DOI 10.36622/2219-1038.2025.45.2.004

ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ОРТОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ОТВЕРСТИЕМ

А. А. Трещев¹, В. Г. Теличко², Д. И. Дорошенко³Тульский государственный университет^{1,2,3}
Россия, г. Тула

¹ Чл.-кор. РААСН, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции», тел.: +7(905)622-90-58, e-mail: taa58@yandex.ru

² Д-р техн. наук, доц. кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции», тел.: +7(952)019-84-65, e-mail: katranv@yandex.ru

³ Аспирант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции», тел.: +7(915)411-10-79, e-mail: doroshenki2@gmail.com

Представлена математическая модель термомеханического деформирования тонкой сферической оболочки, изготовленной на основе ортотропного композита, в котором развивается наведенная в процессе ее нагружения неоднородность. Общая постановка краевых задач, как обосновано в ряде работ, осуществлена в несвязанной постановке. Возникновение температурного перепада принято одномерным по нормали к поверхностям оболочки. При этом приняты малые градиенты распространения температурного воздействия, благодаря чему решение задач осуществлено в квазистатическом варианте. Для учета влияния наводимой неоднородности, проявляющейся как зависимость деформационно-прочностных свойств композитов от вида напряженного состояния, использованы уравнения состояния, сформулированные одним из авторов в главных материальных осях нормированного тензорного пространства. Разработанная модель реализована при термомеханическом расчете однослойной сферической оболочки с центральным отверстием. Основные параметры решения сравниваются с результатами аналогичных решений, полученных с использованием наиболее апробированных моделей теории деформирования ортотропных разносопротивляющихся материалов, предложенных другими авторами, а также базирующихся на уравнениях ортотропной линейной теории упругости без учета разносопротивляемости.

Ключевые слова: сферическая оболочка, наведенная анизотропия, ортотропия, перепад температуры, несвязанная термомеханическая задача, нормированное тензорное пространство.

Введение. При интенсивном развитии строительства, беспилотной авиации, энергетики, оборонной промышленности и микроэлектроники обнаруживается повсеместное внедрение композитных материалов, обладающих особыми физико-механическими свойствами [1–7]. Приоритетное использование композитов объясняется их высокими деформационно-прочностными характеристиками при одновременной явной сопротивляемостью агрессивным и термическим воздействиям при минимальной массе [1–7]. Как оказалось, большинство разработанных композитов обладают особыми механическими проявлениями, такими как структурная ортотропия, физическая нелинейность, а особенно их зависимость от вида напряженного состояния, которая может трактоваться как деформационная анизотропия [1–10]. Очевидно, что эти факторы вызвали широкий импульс к теоретическим и экспериментальным исследованиям среди ученых во всем мире [1–16]. Если с экспериментальными исследованиями все более или менее ясно с учетом их ограничения рамками уровня и

возможностями современного парка испытательного оборудования, то при теоретических способах формулировки уравнений состояния до сих пор нет единого подхода и правил построения [1, 2, 8–16].

На наличие серьезных недостатков моделей определяющих соотношений, уже известных и применяемых для ортотропных композитов, проявляющих деформационную анизотропию, неоднократно указывалось в работах [17–19]. К этим недостаткам были отнесены разрывности уравнений или энергетических поверхностей [8, 9, 11, 12], недостаточная обоснованность качественных параметров [10, 13], совершенное отсутствие в моделях функций, определяющих вид напряженного состояния [15, 16], наличие ограничений, искусственно накладываемых на значения деформационных констант [8, 9, 11, 12], чрезвычайно большое количество необходимых испытаний для определения коэффициентов полиномиальных разложений [14–16] и – самое главное – неудовлетворительная согласованность с эмпирическими диаграммами при сложных видах напряженного состояния [8–16].

Учитывая обнаруженные преимущества разработанных композитов, они нашли широкое применение в конструировании тонкостенных элементов, таких как оболочки и пластины. В частности, широкое распространение получили сферические оболочки, зачастую эксплуатируемых в переменных температурных полях. При этом для пропуска технологических жидкостей или газообразных сред их подведение осуществляется через трубопроводные сети, подводимые к центральным отверстиям оболочек.

При постановке термомеханических задач деформационно-прочностных расчетов конструкций рассматриваются как несвязанные, так и связанные формулировки. Однако анализ влияния связанности термических и механических полей при расчете элементов из деформационно-анизотропных материалов показал, что связанность задачи проявляется только на начальных этапах колебаний температуры, а временной интервал проявления весьма короток и заканчивается после установления равновесного температурного перепада [20, 21]. Поэтому в представленном исследовании сформулирована математическая модель термомеханического деформирования тонкой сферической оболочки с центральным отверстием, изготовленной на основе ортотропного композита, чувствительного к виду напряженного состояния, в несвязанной постановке. Основой построения этой модели послужил обобщающий подход к построению потенциала деформаций для ортотропных материалов, проявляющих нелинейную деформационную анизотропию [17]. В этой же работе продемонстрировано, что для полного эмпирического вычисления коэффициентов разложения энергетического полинома необходимо привлекать достаточно сложную комбинацию экспериментов, включающих испытания на одновременные сдвиги в трех главных взаимно ортогональных плоскостях ортотропии [17], что даже при современном уровне развития экспериментальной техники пока не удастся реализовать. Поэтому в других работах [22–24] для практических расчетов рекомендовано использование потенциала деформаций, представленного в тензорном пространстве нормированных напряжений в квазилинейном приближении. Обработав этот потенциал процедурой, предложенной Кастильяно, уравнения состояния приводим к виду [22–24]:

$$\{e\} = [C]\{\sigma\}, \quad (1)$$

где

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix};$$

$$\begin{aligned}
C_{1111} &= (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}) + 0,5[B_{1111}\alpha_{11}(1 - \alpha_{11}^2) - B_{2222}\alpha_{22}^3 - \\
&- B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{22}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\
&+ B_{1133}\alpha_{33}(1 - \alpha_{11}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) - B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}); \\
C_{1122} = C_{2211} &= A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \quad C_{1133} = C_{3311} = A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33}); \\
C_{2222} &= (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22}) + 0,5[B_{2222}\alpha_{22}(1 - \alpha_{22}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - \\
&- B_{3333}\alpha_{33}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1122}\alpha_{11}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{11}\alpha_{22}) + \\
&+ B_{2233}\alpha_{33}(1 - \alpha_{22}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}); \\
C_{2233} = C_{3322} &= A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33}); \\
C_{3333} &= (A_{3333} + B_{3333}\alpha_{33}) + 0,5[B_{3333}\alpha_{33}(1 - \alpha_{33}^2) - B_{1111}\alpha_{11}^3 - \\
&- B_{2222}\alpha_{22}^3 - B_{1212}\alpha_{12}^3 - B_{2323}\alpha_{23}^3 - B_{1313}\alpha_{13}^3] + B_{1133}\alpha_{11}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{11}\alpha_{33}) + \\
&+ B_{2233}\alpha_{22}(1 - \alpha_{33}^2 - \alpha_{22}\alpha_{33}) - B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \\
C_{2323} &= A_{2323} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \\
&- 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]; \\
C_{1313} &= A_{1313} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \\
&- 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]; \\
C_{1212} &= A_{1212} - (B_{1111}\alpha_{11}^3 + B_{2222}\alpha_{22}^3 + B_{3333}\alpha_{33}^3) - \\
&- 2[B_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) + B_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) + B_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})];
\end{aligned}$$

e_{ij} ($e_{ij} = \gamma_{ij} / 2$ при $i \neq j$), σ_{km} (τ_{km}) – компоненты тензоров деформаций и напряжений; C_{ijkl} – компоненты тензора податливостей ортотропного материала; $\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S$ – нормированные напряжения в тензорном пространстве, определенном в главных осях ортотропии, связанные условием нормировки $\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{13}^2 + 2\alpha_{23}^2 = 1$; $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}$ – норма тензорного пространства, определенная в нем модулем вектора полного напряжения; $i, j = 1, 2, 3$.

Константы A_{ijkl} , B_{ijkl} , фигурирующие в нелинейных выражениях компонентов тензора податливостей C_{ijkl} , в работах [22–24] вычислены по результатам обработки методом наименьших квадратов эмпирических данных, полученных при осевых растяжении, сжатии в главных направлениях материала и на сдвиги в главных плоскостях.

Постановка задачи исследования. Расчетная схема сферической оболочки представлена на рис. 1, где приведены основные геометрические и равновесные температурные параметры для исследуемой задачи.

Исходные данные для рассматриваемой задачи принимались следующими:

- 1) к полой оболочке приложено внешнее нормальное давление равномерной интенсивностью до $q = 0,3$ МПа (рис. 1);
- 2) начальная температура оболочки на всю толщину и по всем поверхностям принята равной $T_0 = 22^\circ\text{C}$, а в последующем внутренняя поверхность охлаждается до $T_1 = 0^\circ\text{C}$ и поддерживается неизменной; внешняя поверхность нагревается с последующей стационарностью до $T_2 = 60^\circ\text{C}$ (разность температур в точке оболочки между начальным и равновесным состояниями обозначим через θ°);

3) главные кривизны срединной поверхности оболочки характеризуют ее сферичность $k_1 = k_2 = k = 1/R$, $R = 6$ м;

4) радиус опорного контура оболочки составляет $a = 2,5$ м (рис. 1), а стрела подъема $f = 0,545$ м (рис. 1);

5) центральное круговое отверстие имеет диаметр $2 \times r_0 = 1$ м (рис. 1);

6) толщина оболочки принята равной $h = 0,08$ м (рис. 1).

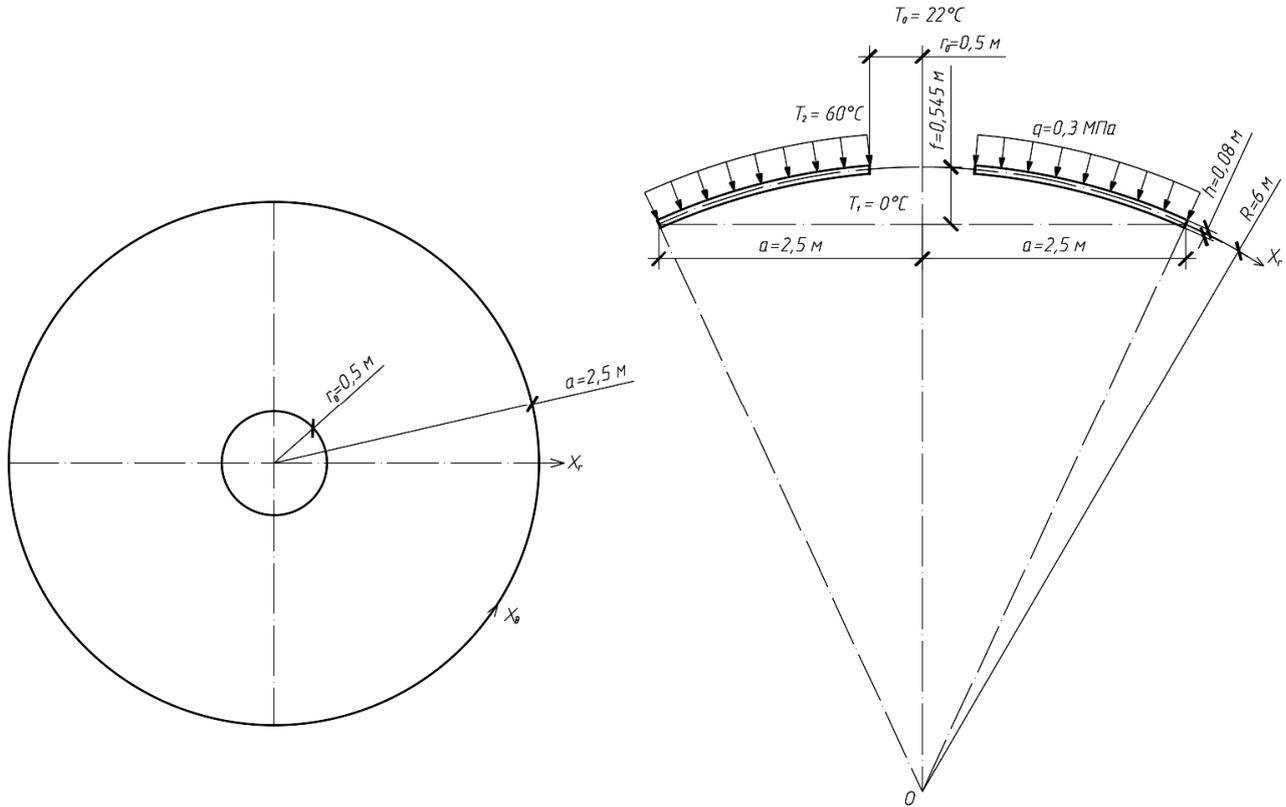


Рис. 1. Расчетная схема полой сферической оболочки

Хотя при построении математических моделей расчета ортотропных оболочек зачастую принимаются гипотезы С. П. Тимошенко, В. З. Власова и С. А. Амбарцумяна, здесь же, учитывая генеральные соотношения толщины, радиусов кривизны и диаметров их оснований, с большой точностью для получаемых результатов можно принять допущения Кирхгофа – Лява.

Благодаря принятой осевой симметрии распределения физико-математических свойств материалов оболочки и ее термосилового нагружения, связи деформационных параметров ее срединной поверхности с перемещениями можно определить следующим образом:

$$\varepsilon_r = u_{,r} - kw + 0,5(w_{,r})^2; \quad \varepsilon_\theta = u/r - kw;$$

$$e_r = \varepsilon_r + z\chi_r; \quad e_\theta = \varepsilon_\theta + z\chi_\theta; \quad \chi_r = -w_{,rr}; \quad \chi_\theta = -w_{,r}/r, \quad (2)$$

где r , θ – горизонтальная радиальная и окружная координаты; u , w – радиальные перемещения срединной поверхности и ее прогибы; ε_r , ε_θ – относительные деформации в срединной поверхности.

Учитывая, что главные материальные оси ортотропии строго направлены вдоль координат цилиндрической системы, к которой привязана сферическая оболочка, физические уравнения (1) можно упростить, добавляя температурные составляющие, приводя к виду:

$$e_r = K_{11}\sigma_r + K_{12}\sigma_\theta + \omega_{1T}\theta^\circ; \quad e_\theta = K_{21}\sigma_r + K_{22}\sigma_\theta + \omega_{2T}\theta^\circ, \quad (3)$$

где

$$K_{11} = A_{1111} + B_{1111}\alpha_r + 0,5[B_{1111}\alpha_r(1-\alpha_r^2) - B_{2222}\alpha_\theta^3] + B_{1122}\alpha_\theta(1-\alpha_r^2 - \alpha_r\alpha_\theta);$$

$$K_{12} = K_{21} = A_{1122} + B_{1122}(\alpha_r + \alpha_\theta);$$

где A_{kkkk} , B_{kkkk} , A_{ijij} , B_{ijij} – константы потенциала, зависящие от модулей упругости (E_k^\pm) и коэффициентов поперечной деформации (ν_{ij}^\pm) материала при растяжении и сжатии; $\alpha_r = \sigma_r / S$, $\alpha_\theta = \sigma_\theta / S$ – нормированные напряжения; ω_{1T} , ω_{2T} – коэффициенты линейного температурного расширения в направлениях радиальной и окружной координат.

Методика проведения экспериментов с эталонными образцами композитов, вырезанных вдоль главных направлений ортотропии и в их главных плоскостях, подробно изложена в работах [22–24]. Там же осуществлена обработка эмпирических данных, получены выражения констант A_{kkkk} , B_{kkkk} , A_{ijij} , B_{ijij} через технические параметры материала, которые применительно к рассматриваемой задаче приведем в упрощенном виде и двумерной форме при $i, j, k = r, \theta$:

$$A_{kkkk} = (1/E_k^+ + 1/E_k^-) / 2; \quad A_{ijij} = -(\nu_{ij}^+ / E_j^+ + \nu_{ij}^- / E_j^-) / 2; \quad \nu_{ij}^+ / E_j^+ = \nu_{ji}^+ / E_i^+;$$

$$B_{kkkk} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-) / 2; \quad B_{ijij} = -(\nu_{ij}^+ / E_k^+ - \nu_{ij}^- / E_j^-) / 2; \quad \nu_{ij}^- / E_j^- = \nu_{ji}^- / E_i^-.$$

В этих же работах [22–24] приведены числовые значения характеристик ряда ортотропных композитов, проявляющих склонность к наводимой физико-механической неоднородности.

В процессе построения системы разрешающих дифференциальных уравнений, которые будут сформулированы в перемещениях, необходимо рассмотреть полный комплект уравнений механики деформируемого твердого тела применительно к теории оболочек. Для этой цели физические уравнения (3) обратим, представив их в форме зависимости компонентов напряжений от деформаций:

$$\sigma_r = E_{11}e_r + E_{12}e_\theta - \varphi_{1T}; \quad \sigma_\theta = E_{12}e_r + E_{22}e_\theta - \varphi_{2T}, \quad (4)$$

где

$$E_{11} = K_{22} / \Psi; \quad E_{22} = K_{11} / \Psi; \quad E_{12} = -K_{12} / \Psi; \quad \Psi = K_{11}K_{22} - K_{12}^2;$$

$$\varphi_{1T} = E_{11}\omega_{1T}\theta^\circ + E_{12}\omega_{2T}\theta^\circ; \quad \varphi_{2T} = E_{12}\omega_{1T}\theta^\circ + E_{22}\omega_{2T}\theta^\circ.$$

Статические условия для оболочек принято формулировать через значимые усилия и моменты, среди которых в условиях осесимметричных задач сохраняются следующие N_r , N_θ , Q_r и M_r , M_θ . При этом первые из двух усилий и моменты определяются путем интегрирования напряжений по толщине конструкции по координате z :

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz; \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz; \quad M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz; \quad M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz. \quad (5)$$

Поперечная сила Q_r определяется дифференцированием момента M_r по радиальной координате:

$$Q_r = M_{r,r} + N_r w_{,r}. \quad (6)$$

Совокупность уравнений (2)–(5) позволяет определить связи интегральных характеристик напряженного состояния с параметрами деформаций и развивающихся кривизн срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned}
 N_r &= L_{11}\varepsilon_r + L_{12}\varepsilon_\theta + J_{11}\chi_r + J_{12}\chi_\theta - \eta_{1T}; \\
 N_\theta &= L_{12}\varepsilon_r + L_{22}\varepsilon_\theta + J_{21}\chi_r + J_{22}\chi_\theta - \eta_{2T}; \\
 M_r &= J_{11}\varepsilon_r + J_{12}\varepsilon_\theta + R_{11}\chi_r + R_{12}\chi_\theta - \gamma_{1T}; \\
 M_\theta &= J_{12}\varepsilon_r + J_{22}\varepsilon_\theta + R_{21}\chi_r + R_{22}\chi_\theta - \gamma_{2T},
 \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
 L_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} E_{ij} dz; \quad J_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} E_{ij} z dz; \quad R_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} E_{ij} z^2 dz; \\
 \eta_{iT} &= \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_{iT} dz; \quad \gamma_{iT} = \int_{-h/2}^{h/2} \varphi_{iT} z dz; \quad (i, j = 1, 2).
 \end{aligned}$$

Независимо от вводимых тех или иных уравнений состояния, статические зависимости не меняют свои формы, которые в условиях формулируемой задачи, то есть для полой оболочки при $zk \ll 1$ [25]:

$$\begin{aligned}
 M_{r,rr} - M_{\theta,r}/r + \frac{2M_{r,r}}{r} + k(N_r + N_\theta) + N_r w_{,rr} &= -q_z; \\
 N_{r,r} - k \left[M_{r,r} + \frac{(M_r - M_\theta)}{r} \right] + (N_r - N_\theta)/r &= 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Анализ приведенного комплекта уравнений (1)–(15) свидетельствует о том, что рассматриваемая краевая задача обладает нелинейностями трех видов – физической, геометрической и конструктивной. Поэтому формулировка разрешающей системы дифференциальных уравнений и последующее их решение проводятся в рамках двухшагового метода последовательных возмущений параметров, предложенного В. В. Петровым [26]. Предварительно исходные зависимости подвергались линеаризации по методике последовательных нагружений.

Линеаризация системы дифференциальных уравнений. Линеаризация геометрических зависимостей приводит к уравнениям в приращениях аргументов и функций:

$$\begin{aligned}
 \Delta e_r &= \Delta \varepsilon_r + z \Delta \chi_r; \quad \Delta e_\theta = \Delta \varepsilon_\theta + z \Delta \chi_\theta; \quad \Delta \chi_r = -\Delta w_{,r}; \quad \Delta \chi_\theta = -\Delta w_{,r}/r; \\
 \Delta \varepsilon_r &= \Delta u_{,r} - k \Delta w + w_{,r} \Delta w_{,r}; \quad \Delta \varepsilon_\theta = \Delta u/r - k \Delta w,
 \end{aligned} \tag{9}$$

где множитель Δ , фигурирующий перед каждым параметром, обозначает их приращение.

Разложив уравнения состояния (1) в ряд Тейлора в соответствии с указаниями [27], ограничившись малыми величинами первого порядка, получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta e_r &= \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_r} \Delta \sigma_r + \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_\theta} \Delta \sigma_\theta + \omega_{1T} \frac{\partial e_r}{\partial \theta^\circ} \Delta \theta^\circ; \\
 \Delta e_\theta &= \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_r} \Delta \sigma_r + \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_\theta} \Delta \sigma_\theta + \omega_{2T} \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta^\circ} \Delta \theta^\circ.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Обратив уравнения (10) относительно приращений напряжений, получим:

$$\begin{aligned}
 \Delta \sigma_r &= D_{11} \Delta e_r + D_{12} \Delta e_\theta - \Delta \varphi_{1T}; \\
 \Delta \sigma_\theta &= D_{21} \Delta e_r + D_{22} \Delta e_\theta - \Delta \varphi_{2T},
 \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$D_{11} = \Omega_{22} / \Omega; \quad D_{12} = D_{21} = -\Omega_{21} / \Omega = -\Omega_{12} / \Omega; \quad D_{22} = \Omega_{11} / \Omega;$$

$$\Omega_{11} = \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_r}; \quad \Omega_{12} = \Omega_{21} = \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_\theta} = \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_r}; \quad \Omega_{22} = \frac{\partial e_\theta}{\partial \sigma_\theta}; \quad \Omega_{1T} = \frac{\partial e_r}{\partial \theta^\circ}; \quad \Omega_{2T} = \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta^\circ};$$

$$\Omega = \Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}\Omega_{21}; \quad \Delta\varphi_{1T} = (\Omega_{12}\Omega_{2T} - \Omega_{1T}\Omega_{22}) / \Omega; \quad \Delta\varphi_{2T} = (\Omega_{21}\Omega_{1T} - \Omega_{2T}\Omega_{11}) / \Omega.$$

Переход от приращений напряжений (11) к приращениям усилий и моментов осуществляется по тем же правилам (5):

$$\Delta N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_r dz; \quad \Delta N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_\theta dz; \quad \Delta M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_r z dz; \quad \Delta M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_\theta z dz, \quad (12)$$

где ΔN_r , ΔN_θ , ΔM_r , ΔM_θ – приращения соответствующих усилий и моментов.

Применив процедуры (12) к уравнениям в приращениях (11), получим:

$$\begin{aligned} \Delta N_r &= L_{11}^\Delta \Delta \varepsilon_r + L_{12}^\Delta \Delta \varepsilon_\theta + J_{11}^\Delta \Delta \chi_r + J_{12}^\Delta \Delta \chi_\theta - \Delta \eta_{1T}; \\ \Delta N_\theta &= L_{21}^\Delta \Delta \varepsilon_r + L_{22}^\Delta \Delta \varepsilon_\theta + J_{21}^\Delta \Delta \chi_r + J_{22}^\Delta \Delta \chi_\theta - \Delta \eta_{2T}; \\ \Delta M_r &= J_{11}^\Delta \Delta \varepsilon_r + J_{12}^\Delta \Delta \varepsilon_\theta + R_{11}^\Delta \Delta \chi_r + R_{12}^\Delta \Delta \chi_\theta - \Delta \gamma_{1T}; \\ \Delta M_\theta &= J_{21}^\Delta \Delta \varepsilon_r + J_{22}^\Delta \Delta \varepsilon_\theta + R_{21}^\Delta \Delta \chi_r + R_{22}^\Delta \Delta \chi_\theta - \Delta \gamma_{2T}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$L_{ij}^\Delta = \int_{-h/2}^{h/2} D_{ij} dz; \quad J_{ij}^\Delta = \int_{-h/2}^{h/2} D_{ij} z dz; \quad R_{ij}^\Delta = \int_{-h/2}^{h/2} D_{ij} z^2 dz;$$

$$\Delta \eta_{iT} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \varphi_{iT} dz; \quad \Delta \gamma_{iT} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \varphi_{iT} z dz; \quad (i, j = 1, 2).$$

Уравнения статики (8) после преобразования через приращения записываются в виде:

$$\begin{aligned} \Delta M_{r,rr} - \Delta M_{\theta,r} / r + 2\Delta M_{r,r} / r + k(\Delta N_r + \Delta N_\theta) + \Delta N_r w_{,rr} + N_r \Delta w_{,rr} &= -\Delta q_3; \\ \Delta N_{r,r} + (\Delta N_r - \Delta N_\theta) / r - k[\Delta M_{r,r} + (\Delta M_r - \Delta M_\theta) / r] &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где Δq_3 – приращение интенсивности поперечной нагрузки.

Объединив уравнения (9), (13) и (14) в единое математическое пространство, приходим к линеаризованным модельным представлениям в приращениях перемещений срединной поверхности оболочки:

$$\begin{aligned} R_{11}^\Delta \Delta w_{,rrrr} + \{2[R_{11}^\Delta (R_{11}^\Delta + R_{12}^\Delta) / r] - J_{11}^\Delta w_{,r}\} \Delta w_{,rrr} + \{R_{11}^\Delta + 2[R_{11}^\Delta + \\ + 0,5R_{12}^\Delta - (R_{12}^\Delta + R_{22}^\Delta + 2R_{12}^\Delta / r) / r^2 + k(J_{11}^\Delta + J_{12}^\Delta) - 0,5J_{11}^\Delta w_{,r} - \\ - (J_{11}^\Delta + J_{11}^\Delta / r - J_{12}^\Delta / r) w_{,r}\} - L_{11}[u_{,r} - kw - 0,5(w_{,r})^2] - L_{12}(u / r - kw) + J_{11} w_{,rr} + \\ + J_{12} w_{,r} / r + \eta_{1T}\} \Delta w_{,rr} + \{[R_{12}^\Delta + 2(R_{12}^\Delta + 2R_{12}^\Delta / r) / r^2] / r - (R_{22}^\Delta - R_{22}^\Delta / r) / r^2 - \\ - [L_{11}^\Delta + k(L_{11}^\Delta + L_{12}^\Delta) + L_{11}^\Delta w_{,r}]\} w_{,r} + 2k[J_{11}^\Delta + J_{12}^\Delta + (J_{11}^\Delta + J_{12}^\Delta) / r] - J_{11}^\Delta w_{,rrr} + \\ + 2(J_{11}^\Delta + J_{12}^\Delta) w_{,rr} / r - 2J_{11}^\Delta (w_{,rr} + w_{,r} / r) + J_{12}^\Delta w_{,r} / r\} \Delta w_{,r} + \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 & + \{k[(J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta})_{,rr} + (2J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta} - J_{22}^{\Delta})_{,r} / r + L_{11}^{\Delta} + k(2L_{12}^{\Delta} + L_{22}^{\Delta}) + (L_{11}^{\Delta} + L_{12}^{\Delta})w_{,rr}] \} \Delta w - \\
 & - J_{11}^{\Delta} \Delta u_{,rrr} - 2(J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta} / r) \Delta u_{,rr} - [J_{11}^{\Delta} + (2J_{11}^{\Delta} + 3J_{12}^{\Delta})_{,r} / r - (J_{12}^{\Delta} - J_{22}^{\Delta}) / r^2 + \\
 & + k(L_{11}^{\Delta} + L_{12}^{\Delta}) + L_{11}^{\Delta} w_{,rr}] \Delta u_{,r} - \{ [J_{12}^{\Delta} - J_{22}^{\Delta} / r - 3J_{12}^{\Delta} / r^2 + (J_{22}^{\Delta} - J_{12}^{\Delta} / r) / r + \\
 & + k(L_{12}^{\Delta} + L_{22}^{\Delta}) + L_{12}^{\Delta} w_{,rr}] / r \} \Delta u + \Delta \gamma_{1T,rr} + (2\Delta \gamma_{1T} - \Delta \gamma_{2T})_{,r} / r + k(\eta_{1T} + \eta_{2T}) + \Delta \eta_{1T} w_{,rr} = \Delta q ; \\
 & (L_{11}^{\Delta} - kJ_{11}^{\Delta}) \Delta u_{,rr} + [(L_{11}^{\Delta} + L_{11}^{\Delta} / r) - k(J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta} / r)] \Delta u_{,r} + [(L_{12}^{\Delta} - L_{22}^{\Delta} / r) - k(L_{12}^{\Delta} + \\
 & + L_{22}^{\Delta} / r)] \Delta u / r - (J_{11}^{\Delta} - kR_{11}^{\Delta}) \Delta w_{,rrr} + \{ L_{11}^{\Delta} w_{,r} - (J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta} / r) + (J_{12}^{\Delta} - J_{22}^{\Delta} / r) - \\
 & - k[J_{11}^{\Delta} w_{,r} - (R_{11}^{\Delta} + R_{11}^{\Delta} / r)] \} \Delta w_{,rr} + \{ L_{11}^{\Delta} w_{,rr} + [L_{11}^{\Delta} + (L_{11}^{\Delta} - L_{12}^{\Delta}) / r] w_{,r} + J_{22}^{\Delta} / r^2 - \\
 & - k(L_{11}^{\Delta} + L_{12}^{\Delta}) - k[L_{11}^{\Delta} w_{,rr} + J_{11}^{\Delta} w_{,r} + (J_{11}^{\Delta} - J_{12}^{\Delta}) w_{,r} / r - k(J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta}) - \\
 & - (R_{12}^{\Delta} + R_{22}^{\Delta} / r) / r \} \Delta w_{,r} - \{ (L_{11}^{\Delta} + L_{12}^{\Delta} + L_{11}^{\Delta} - L_{22}^{\Delta}) k / r - k^2 [(J_{11}^{\Delta} - J_{12}^{\Delta} / r) - \\
 & - (J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta} + J_{22}^{\Delta}) / r] \} \Delta w - (\Delta \eta_{1T,r} - \Delta \eta_{2T} / r) + k[\Delta \gamma_{1T,r} + (\Delta \gamma_{1T} + \Delta \gamma_{2T}) / r] = 0 .
 \end{aligned}$$

Для обеспечения замкнутой постановки задачи к дифференциальным уравнениям (15) необходимо добавить граничные условия, также представленные в приращениях перемещений. Для границы центрального отверстия оболочки условия приняты соответствующие свободному контуру:

$$\begin{aligned}
 \Delta N_r &= L_{11}^{\Delta} (\Delta u_{,r} - k \Delta w + w_{,r} \Delta w_{,r}) + L_{12}^{\Delta} (\Delta u / r - k \Delta w) - J_{11}^{\Delta} \Delta w_{,rr} - J_{12}^{\Delta} \Delta w_{,r} / r - \Delta \eta_{1T} = 0 ; \\
 \Delta M_r &= J_{11}^{\Delta} (\Delta u_{,r} - k \Delta w + w_{,r} \Delta w_{,r}) + J_{12}^{\Delta} (\Delta u / r - k \Delta w) - R_{11}^{\Delta} \Delta w_{,rr} - R_{12}^{\Delta} \Delta w_{,r} / r - \Delta \gamma_{1T} = 0 ; \\
 -\Delta Q_r &= R_{11}^{\Delta} \Delta w_{,rrr} + (R_{11}^{\Delta} - R_{12}^{\Delta} / r) \Delta w_{,rr} - \{ J_{11}^{\Delta} (w_{,rr} + w_{,r}) - k(J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta}) + (R_{12}^{\Delta} - R_{12}^{\Delta} / r) / r + \\
 & + L_{11} [u_{,r} - k w + 0,5(w_{,r})^2] + L_{12} (u / r - k w) - J_{11} w_{,rr} - J_{12} w_{,r} / r - \eta_{1T} + (L_{11}^{\Delta} w_{,r} - J_{12}^{\Delta} / r) w_{,r} \} \Delta w_{,r} + \\
 & + k [J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta} + (L_{11}^{\Delta} + L_{12}^{\Delta}) w_{,r}] \Delta w - J_{11}^{\Delta} \Delta u_{,rr} - (J_{11}^{\Delta} + J_{12}^{\Delta} / r + L_{11}^{\Delta} w_{,r}) \Delta u_{,r} - \\
 & - (J_{12}^{\Delta} - J_{12}^{\Delta} / r + L_{12}^{\Delta} w_{,r}) \Delta u / r + \Delta \gamma_{1T,r} + \Delta \eta_{1T} w_{,r} = 0 .
 \end{aligned} \tag{16}$$

При этом опорный внешний контур принят жестко заземленным, то есть:

$$\Delta u = 0 ; \quad \Delta w = 0 ; \quad \Delta w_{,r} = 0 . \tag{17}$$

Температурная составляющая задачи. Процесс распространения температуры в твердых телах, обладающих структурной ортотропией, подчиняется дифференциальному уравнению теплопроводности [28]:

$$T_{,t} = \Lambda_1 \cdot T_{,11} + \Lambda_2 \cdot T_{,22} + \Lambda_3 \cdot T_{,33} , \tag{18}$$

где $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ – параметры, определяющие температуропроводность материала по взаимно ортогональным направлениям и характеризующие его температурную инерционность в этих осях; t – текущее время; T – температура в точке.

Учитывая, что градиент температуры в данной задаче устанавливается только по толщине оболочки и процесс передачи температуры является одномерным вдоль координаты z , уравнение теплопроводности (18) упрощается и сводится к виду:

$$T_{,t} = \Lambda_3 \cdot T_{,33} , \tag{19}$$

где $\Lambda_3 = \lambda / c$ – параметр температуропроводности, ортогональный к оболочечной поверхности; λ – коэффициент теплопроводности; c – относительная по объему теплоемкость (удельная) материала оболочки.

Численному анализу подлежали оболочки, выполненные из стеклопластиков [24, 25] и подобных им композитов, у которых коэффициенты теплопроводности достаточно велики. В связи с этим в тонких оболочках процесс возникновения равновесного стационарного распределения температуры по их толщинам обнаруживается достаточно скоротечно, а само распределение является линейным. Этот факт является достаточным основанием для рассмотрения комплексной термомеханической задачи по деформированию оболочки после установления линейной зависимости температуры от координаты z . Таким образом, распределение температуры по толщине оболочки будет соответствовать зависимости (см. рис. 1):

$$T(z) = (T_2 - T_1)z/h + (T_1 + T_2)/2 - T_0. \quad (20)$$

Решение поставленной задачи и анализ полученных результатов. Для конкретизации ортотропной структуры оболочки были приняты стеклопластики, физико-механические характеристики материала которых рассматривались в работах [13, 14]. В частности, модули упругости при осевых (в главных осях ортотропии) растяжениях использованы следующие: $E_1^+ = 140$ ГПа, $E_2^+ = 280$ ГПа, а при осевых сжатиях: $E_1^- = 70$ ГПа, и $E_2^- = 140$ ГПа; соответствующие коэффициенты поперечной деформации: $\nu_{12}^+ = 0,2$; $\nu_{12}^- = 0,3$; коэффициенты линейного температурного расширения в направлениях главных материальных осей: $\omega_{1T} = 3,3 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$; $\omega_{2T} = 4,0 \cdot 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$ [13, 14].

Решение линеаризованных дифференциальных уравнений (15) совместно с граничными условиями (16), (17) и в соответствии с законом распределения температуры по толщине оболочки (20) осуществлялось численно с конечно-разностной аппроксимацией повышенной точности с использованием центральных и односторонних разностей (вблизи контуров) [29]. При этом дискретизация континуума оболочки вдоль радиуса аппроксимировалась 200 точками с разбиением по толщине на 21 точку для интегрирования методом Симпсона. Полученная система алгебраических уравнений решалась методом Зейделя с ускорением по способу Люстерника. Для численного интегрирования по параметрам приращения нагрузки применялась интерполяционная процедура Адамса. Разработанный многоветвевой алгоритм был реализован в рамках пакета прикладных программ с применением комплекса «SCILAB».

В представленном исследовании осуществлено сравнение результатов решения краевой задачи, полученных в рамках разработанной модели, с расчетными параметрами, соответствующими уравнениям состояния, сформулированным другими авторами в работах [8–13]. Разработанная модель была сопоставлена: а) с расчетом без учета свойств наведенной деформационной анизотропии (с усредненными механическими характеристиками); б) с расчетами, полученными на основе разработанной модели, но без температурного воздействия; в) с результатами, вытекающими из теории С. W. Bert – J. N. Reddy [8, 9]; г) с решениями, основанными на модели R. M. Jones – D. A. R. Nelson [10, 13]; д) с решениями С. А. Амбарцумяна [11, 12].

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчета радиальных перемещений и прогибов срединной поверхности рассмотренной оболочки, полученные с использованием различных уравнений состояния структурно ортотропных материалов, проявляющих в процессе нагружения деформационную неоднородность (разносопротивляемость). Рис. 4, 5 иллюстрируют аналогичные результаты по распределению нормальных напряжений вдоль радиальной координаты для крайних волокон, а на рис. 6, 7 представлены характерные распределения напряжений по толщине оболочки в контурном опорном сечении.

Анализ напряженно-деформированного состояния сферической оболочки с отверстием в ее центре и находящейся одновременно под воздействием поперечного нагружения и перепада температур, выявил существенные расхождения в результатах расчета, которые зависят от применяемых уравнений состояния ортотропных сред, проявляющих деформационную зависимость от вида напряженного состояния.

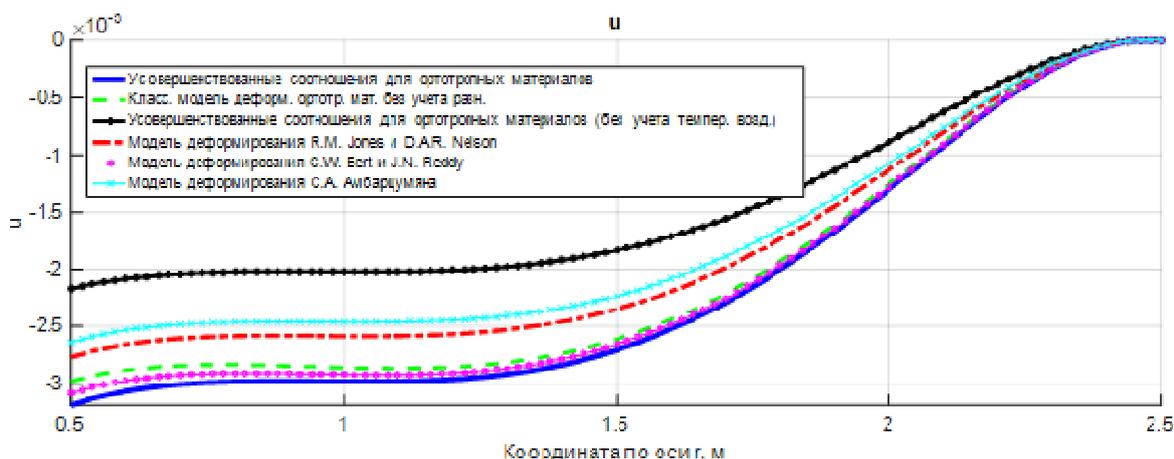


Рис. 2. Горизонтальные перемещения срединной поверхности в радиальном направлении, м

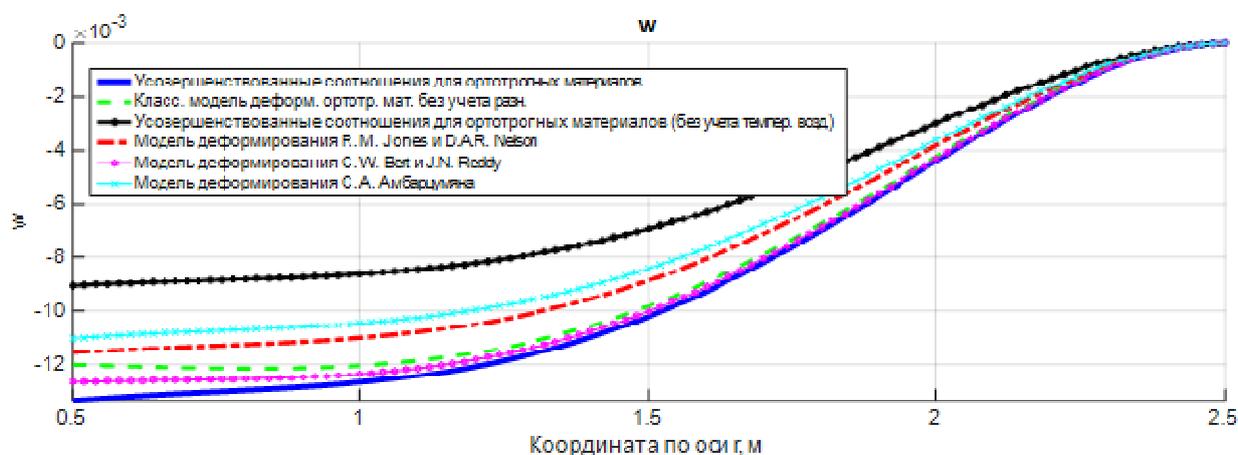


Рис. 3. Прогибы срединной поверхности, м

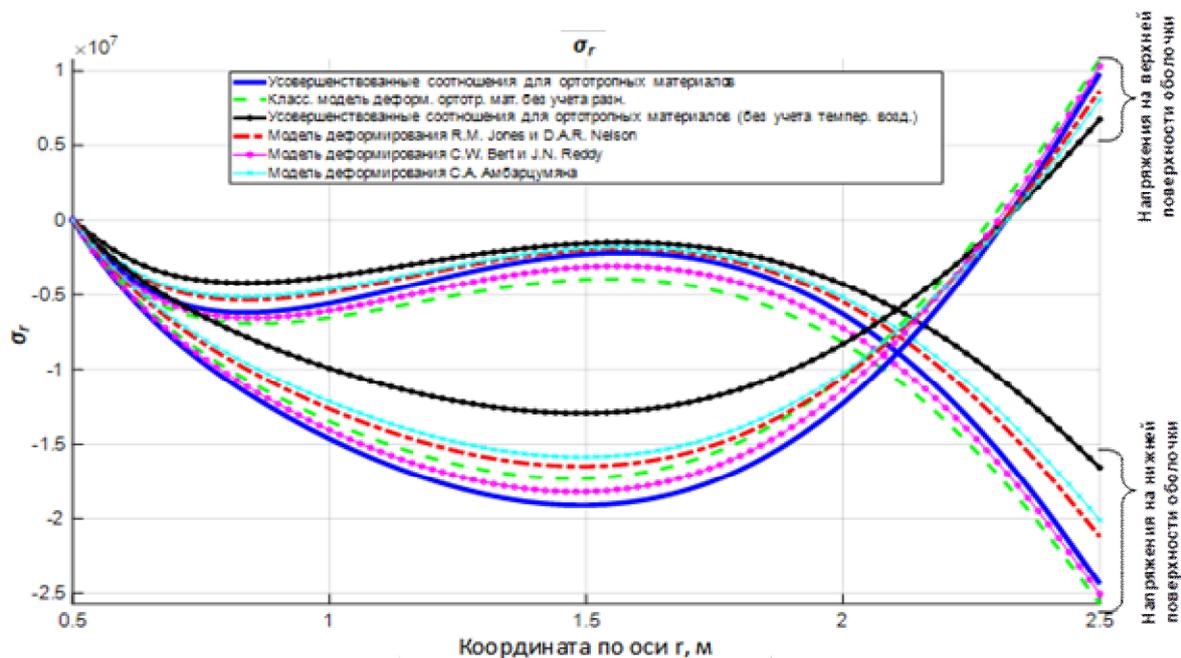


Рис. 4. Осевые напряжения, Па

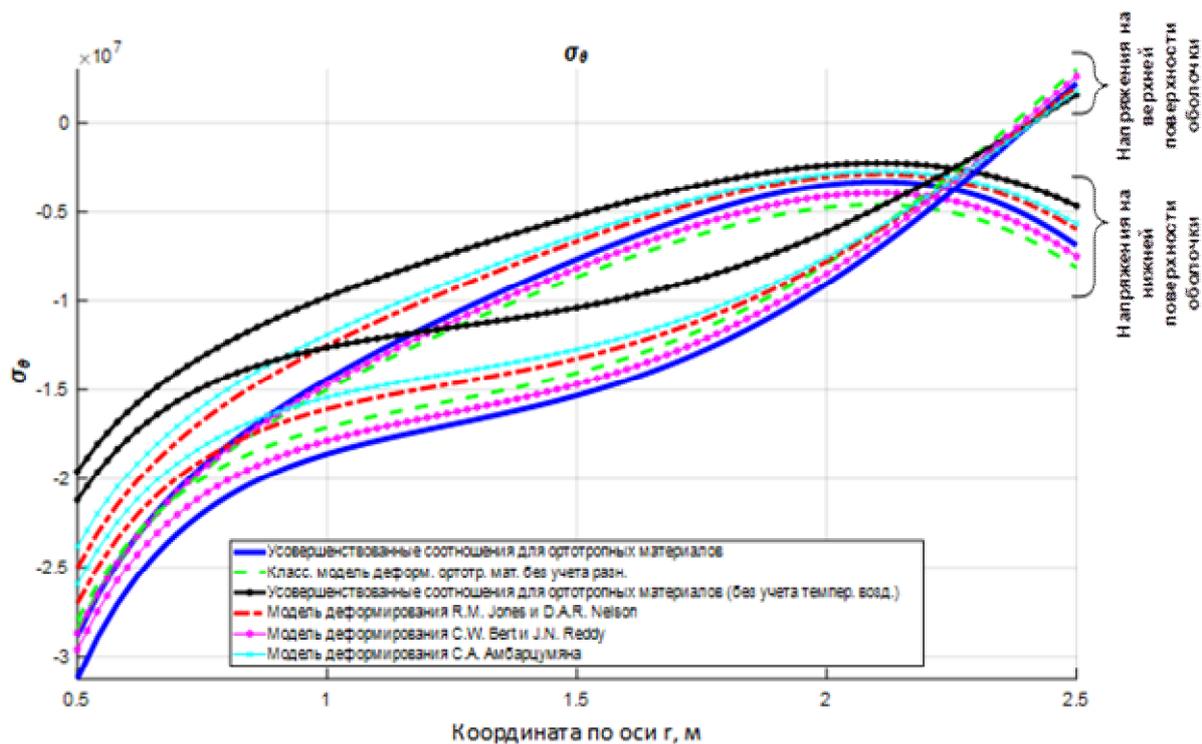


Рис. 5. Окружные напряжения, Па

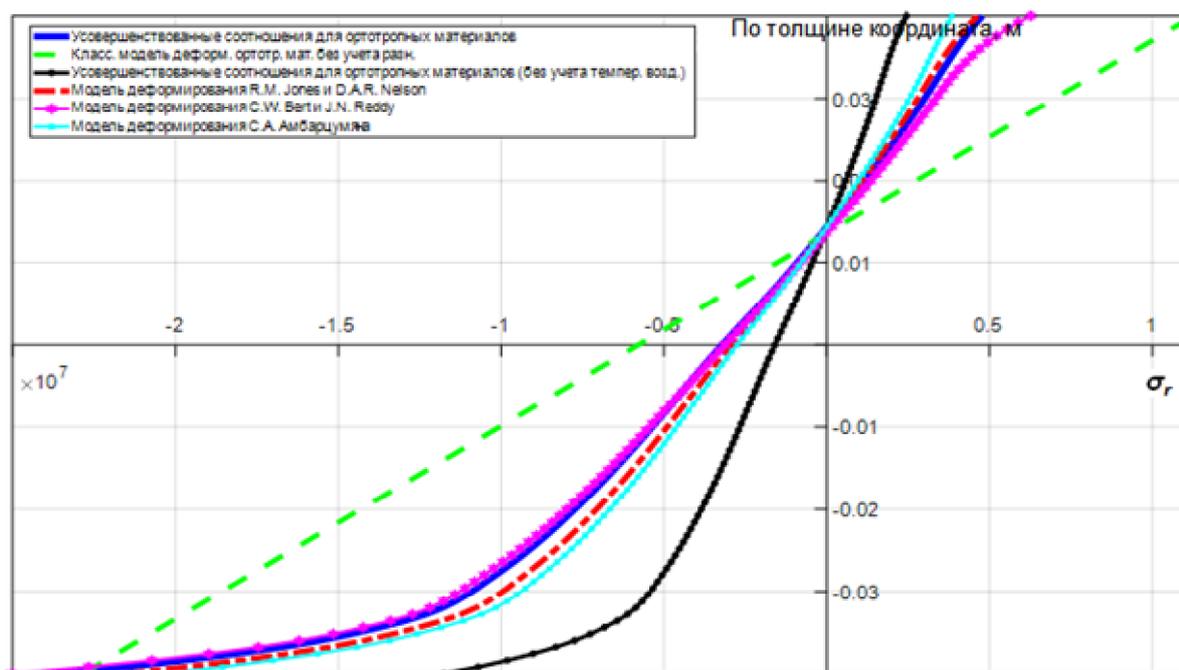


Рис. 6. Осевые напряжения по толщине оболочки на опоре (внешний край), Па

Анализ результатов численного моделирования термомеханического деформирования ортотропной сферической оболочки, выполненной из стеклопластиков, позволил обнаружить ряд особенностей:

1. Для перемещений в срединной поверхности: величины отклонений от классического подхода, не учитывающего деформационную анизотропию материалов и с учетом их усредненных механических характеристик, достигают 8,5 %, при игнорировании температурного воздействия – 18 %, а при всех равных условиях термомеханического нагружения – 21 % по

сравнению с расчетами на основе уравнений С. А. Амбарцумяна, 3 % по сравнению с теорией С. W. Bert – J. N. Reddy и 16 % при применении соотношений R. M. Jones – D. A. R. Nelson;

2. Для прогибов срединной поверхности: расхождение достигло 12,5 % относительно расчетов по традиционной теории ортотропных оболочек с применением усредненных характеристик материала, 22 % без учета температурного перепада, 23 % по сравнению с теорией С. А. Амбарцумяна, 6,5 % по сравнению с моделью С. W. Bert – J. N. Reddy и 17,5 % по отношению варианта расчета R. M. Jones – D. A. R. Nelson;

3. Для радиальных напряжений: различия достигали 8 % относительно классических расчетов с усредненными характеристиками, 20 % по сравнению с теорией С. А. Амбарцумяна, 24 % в расчетах без учета температурного воздействия, 4 % по отношению к теории С. W. Bert – J. N. Reddy и 11,5 % при использовании соотношений R.M.Jones – D. A. R. Nelson;

4. Для окружных напряжений: расхождения были наиболее выраженными, достигая 23 % по сравнению с классическими расчетами, полученными с использованием усредненных свойств материала, 47 % при игнорировании температурного фактора, 15 % по сравнению с соотношениями С. А. Амбарцумяна, 13 % – по отношению к теории С. W. Bert – J. N. Reddy и 10 % в случае использования соотношений R. M. Jones – D. A. R. Nelson.

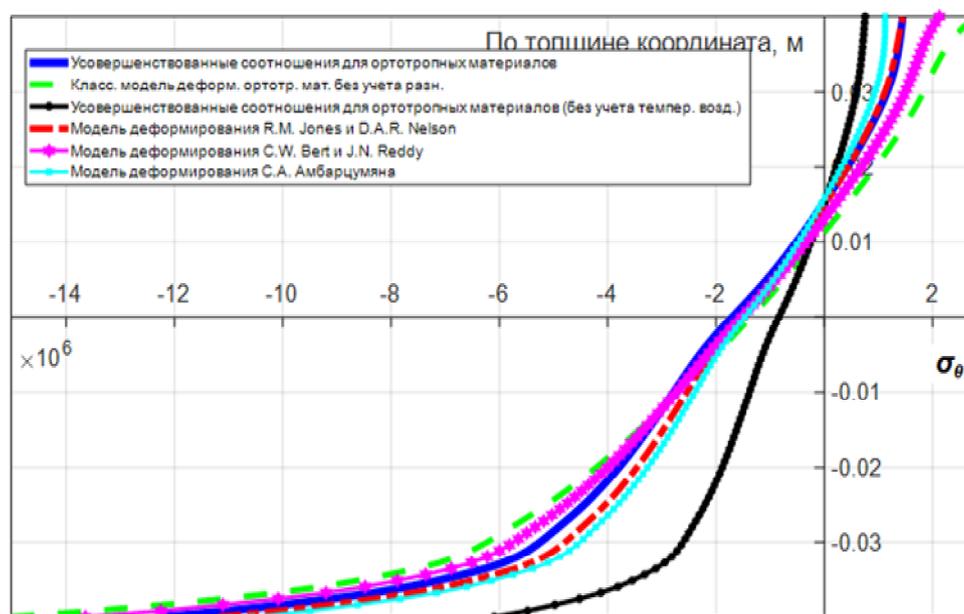


Рис. 7. Окружные напряжения по толщине оболочки на опоре (внешний край), Па

Выводы, подкрепленные исследованиями. Проведенные численные исследования по прогнозированию характеристик состояния ортотропной сферической оболочки с отверстием, в основу которых были положены потенциальные уравнения состояния, учитывающие наводимую деформационную неоднородность, сформулированные в нормированном тензорном пространстве напряжений, преимущества которых при согласовании с экспериментальными данными обсуждались в работах [13], позволяют утверждать следующее:

1. Использование разработанного подхода обеспечивает надежные и более точные результаты расчета пространственных конструкций по сравнению с известными теориями других авторов;

2. Результаты численных экспериментов убедительно показывают, что учет деформационной анизотропии в расчетных моделях раскрывает серьезные недостатки классических подходов к определению НДС оболочечных конструкций. Недооценка этого фактора может приводить к заметным погрешностям в прогнозировании поведения пространственных конструкций.

Библиографический список

1. Амелина Е. В., Глушко С. К., Ерасов В. С., Идимешев С. В., Немировский Ю. В., Семисалов Б. В., Юрченко А. В., Яковлев Н. О. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет // ИВТ СО РАН: Вычислительные технологии. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 27–52.
2. Каюмов Р. А., Луканкин С. А., Паймушин В. Н., Холмогоров С. А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов // Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 112–132.
3. Shafigullin L. N., Bobrishev A. A., Erofeev V. T., Treshchev A. A., Shafigullina A. N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts // International Journal of Applied Engineering Research. – 2015. – Vol. 10, № 23. – P. 43758–43762.
4. Бобрышев А. А., Шафигуллин Л. Н., Гумеров И. Ф., Трещев А. А., Шафигуллина Г. Р. Свойства композитных материалов с порошковыми полимерными модификаторами // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2016. – № 3. – С. 57–64.
5. Yusupova A. A., Bobryshev A. A., Treschev A. A. Development of Sulfur and Silicon Dioxide Activation Method in the Sulfur Concrete Technology // Solid State Phenomena. – 2018. – Vol. 284. – P. 1114–1118.
6. Shafigullin L. N., Romanova N. V., Gabdrakhmanov A. T., Shafigullina G. R., Treshchev A. A. Using Tire Reclaim for Production of Rubber Wheels of Waste Containers // Lecture Notes in Mechanical Engineering. ICIE 2022: Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Engineering. – 2022. – P. 164–173.
7. Шафигуллин Л. Н., Романова Н. В., Соколова Ю. А., Ерофеев В. Т., Трещев А. А., Шафигуллина Г. Р., Лахно А. В. Разработка огнестойкой полиэтиленовой композиции для кабельных полимерных колодцев // Известия вузов. Строительство. – 2024. – № 2. – С. 40–51.
8. Bert C. W., Reddy J. N., Chao W. C. Bending of Thick Rectangular Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials // AIAA Journal. – 1981. – Vol. 19, № 10. – P. 1342–1349.
9. Bert C. W., Gordaninejad F. Deflection of Thick Beams of Multimodular Materials // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1984. – Vol. 20. – P. 479–503.
10. Jones R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18, № 8. – P. 995–1001.
11. Амбарцумян С. А. Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. Сер. Механика. – 1965. – № 4. – С. 77–85.
12. Амбарцумян С. А. Основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости анизотропного тела // Изв. АН СССР. МТТ. – 1969. – № 3. – С. 51–61.
13. Jones R. M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15, № 1. – P. 16–25.
14. Золочевский А. А., Кузнецов В. Н. Расчет анизотропных оболочек из разномодульных материалов при неосесимметричном нагружении // Динамика и прочность тяжелых машин. – Днепропетровск: ДГУ, 1989. – С. 84–92.
15. Нгуен Ш. Т., Христич Д. В. Идентификация параметров квадратичной модели упругого анизотропного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2021. – № 3 (49). – С. 3–11.
16. Нгуен Ш. Т. Нелинейные модели упругости ортотропного материала // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2021. – № 4 (50). – С. 25–32.

17. Трещев А. А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов // *Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии*. – Орел: ОГУ. – 2017. – № 4–1 (324). – С. 71–74.
18. Трещев А. А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения. – М. – Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. – 326 с.
19. Трещев А. А. Теория деформирования и прочности разносопротивляющихся материалов. – Тула: Изд-во ТулГУ, 2020. – 359 с.
20. Трещев А. А., Делягин М. Ю. Моделирование оболочки из изотропного разносопротивляющегося графита с помощью объемных конечных элементов с учетом связанности напряжений и температур // *Materials Physics and Mechanics*. – 2013. – № 17. – Р. 59–70.
21. Трещев А. А., Делягин М. Ю., Астахов Д. С. Математическая модель связанной термоупругости существенно нелинейных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Механика предельного состояния*. – Чебоксары: Чувашский гос. пед. ун-т. – 2013. – № 3 (17). – С. 72–79.
22. Трещев А. А., Монастырев Ю. А., Чибрикина В. Д., Завьялова Ю. А., Лапшина М. А. Описание деформирования ортотропных разносопротивляющихся материалов // *Строительная механика и конструкции*. – Воронеж: ВГТУ, 2019. – № 1 (20). – С. 7–13.
23. Трещев А. А., Завьялова Ю. А., Лапшина М. А. Вариант модели деформирования ортотропных композитных материалов // *Эксперт: теория и практика*. – 2020. – №3 (6). – С. 62–68.
24. Treschev A. A., Zavyalova Yu. A., Lapshina M. A., Gvozdev A. E., Kuzovleva O. V., Krupitsyn E. S. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy // *Chebyshevskii sbornik*. – 2021– Vol. 22, № 4. – Р. 369–383.
25. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
26. Петров В. В., Кривошеин И. В. Методы расчета конструкций из нелинейно деформируемого материала. – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 208 с.
27. Трещев А. А. Изотропные пластины и оболочки, выполненные из материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. – М. – Тула: РААСН; ТулГУ, 2013 – 249 с.
28. Коваленко А. Д. Термоупругость. – Киев: Вища школа, 1975. – 216 с.
29. Варвак П. М., Варвак Л. П. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.

References

1. Amelina E. V., Glushko S. K., Yerasov V. S., Idimeshev S. V., Nemirovsky Yu., Semisalov B. V., Yurchenko A. V., Yakovlev N. O. On nonlinear deformation of carbon plastics: experiment, model, calculation. *ICT SB RAS: Computational Technologies*. Vol. 20. No. 5. 2015. Pp. 27–52.
2. Kayumov R. A., Lukankin S. A., Paimushin V. N., Kholmogorov S. A. Identification of mechanical characteristics of fiber-reinforced composites. *Scientific Notes of Kazan University. Physical and Mathematical Sciences*. Vol. 157, Issue 4. 2015. Pp. 112–132.
3. Shafigullin L. N., Bobrishev A. A., Erofeev V. T., Treshchev A. A., Shafigullina A. N. Development of the recommendations on selection of glass-fiber reinforced polyurethanes for vehicle parts. *International Journal of Applied Engineering Research*. Vol. 10. No. 23. 2015. Pp. 43758–43762.
4. Bobryshev A. A., Shafigullin L. N., Gumerov I. F., Treshchev A. A., Shafigullina G. R. Properties of composite materials with powder polymer modifiers. *Bulletin of the Kazan State Technical University named after A. N. Tupolev*. No. 3. 2016. Pp. 57–64.

5. Yusupova A. A., Bobryshev A. A., Treschev A. A. Development of sulfur and silicon dioxide activation method in the sulfur concrete technology. *Solid State Phenomena*. Vol. 284. 2018. Pp. 1114–1118.
6. Shafigullin L. N., Romanova N. V., Gabdrakhmanov A. T., Shafigullina G. R., Treshchev A. A. Using tire reclaim for production of rubber wheels of waste containers. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. ICIE 2022: Proceedings of the 8th International Conference on Industrial Engineering. 2022. Pp. 164–173.
7. Shafigullin L. N., Romanova N. V., Sokolova Yu. A., Erofeev V. T., Treshchev A. A., Shafigullina G. R., Lakhno A. V. Development of a fire-resistant polyethylene composition for polymer cable manholes. *News of Universities. Construction*. No. 2. 2024. Pp. 40–51.
8. Bert C. W., Reddy J. N., Chao W. C. Bending of thick rectangular plates laminated of bimodulus composite materials. *AIAA Journal*. Vol. 19. No. 10. 1981. Pp. 1342–1349.
9. Bert C. W., Gordaninejad F. Deflection of thick beams of multimodular materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 20. 1984. Pp. 479–503.
10. Jones R. M. Modeling nonlinear deformation of carbon-carbon composite materials. *AIAA Journal*. Vol. 18. No. 8. 1980. Pp. 995–1001.
11. Ambartsumyan S. A. Axisymmetric problem of a circular cylindrical shell made of a material with different tensile and compression resistance. *News of ANSSSR. Series: Mechanics*. No. 4. 1965. Pp. 77–85.
12. Ambartsumyan S. A. Basic equations and relationships of the heterogeneous theory of elasticity of an anisotropic body. *News of ANSSSR. MTT*. No. 3. 1969. Pp. 51–61.
13. Jones R. M. Stress-strain relations for materials with different moduli in tension and compression. *AIAA Journal*. Vol. 15. No. 1. 1977. Pp. 16–25.
14. Zolochovsky A. A., Kuznetsov V. N. Calculation of anisotropic shells made of materials with different moduli under non-axisymmetric loading. *Dynamics and Strength of Heavy Machines*. Dnepropetrovsk: DSU, 1989. Pp. 84–92.
15. Nguyen Sh. T., Khristich D. V. Identification of parameters of a quadratic model of elastic anisotropic material. *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the Limit State*. No. 3(49). 2021. Pp. 3–11.
16. Nguyen Sh. T. Nonlinear models of elasticity of orthotropic material. *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Series: Mechanics of the Limit State*. No. 4(50). 2021. Pp. 25–32.
17. Treshchev A. A. Potential relationship between strains and stresses for orthotropic physically nonlinear materials. *Fundamental and Applied Problems of Engineering and Technology*. Orel: OSU. No. 4-1(324). 2017. Pp. 71–74.
18. Treshchev A. A. Theory of deformation and strength of materials with initial and induced sensitivity to the type of stress state. *Constitutive relations*. M. Tula: RAASN. Tula State University, 2016. 326 p.
19. Treschev A. A. Theory of deformation and strength of materials with different resistance. Tula: Tula State University Publishing House, 2020. 359 p.
20. Treschev A. A., Delyagin M. Yu. Modeling of a shell made of isotropic graphite with different resistance using volumetric finite elements taking into account the coupling of stresses and temperatures. *Materials Physics and Mechanics*. No. 17. 2013. Pp. 59–70.
21. Treschev A. A., Delyagin M. Yu., Astakhov D. S. Mathematical model of coupled thermoelasticity of essentially nonlinear materials sensitive to the type of stress state. *Bulletin of the Chuvash State Pedagogical University named after I. Ya. Yakovlev. Limit State Mechanics*. Cheboksary: Chuvash State Pedagogical University. No. 3(17). 2013. Pp. 72–79.
22. Treshchev A. A., Monastirev Yu. A., Chibrikina V. D., Zavyalova Yu. A., Lapshina M. A. Description of deformation of orthotropic materials with different resistances. *Structural Mechanics and Constructions*. Voronezh: VSTU. No. 1(20). 2019. Pp. 7–13.

23. Treshchev A. A., Zavyalova Yu. A., Lapshina M. A. Variant of the model of deformation of orthotropic composite materials. *Expert: Theory and Practice*. 2020. No. 3(6). Pp. 62–68.
24. Treshchev A. A., Zavyalova Yu. A., Lapshina M. A., Gvozdev A. E., Kuzovleva O. V., Krupitsyn E. S. Defining equations of deformation of materials with double anisotropy. *Chebyshev's Collection*. Vol. 22. No. 4. 2021. Pp. 369–383.
25. Ambartsumyan S. A. *General theory of anisotropic shells*. M.: Science, 1974. 446 p.
26. Petrov V. V., Krivoshein I. V. *Methods for calculating structures made of nonlinearly deformable material*. M.: ASV Publishing House, 2009. 208 p.
27. Treshchev A. A. *Isotropic plates and shells made of materials sensitive to the type of stress state*. M. Tula: RAASN. Tula State University, 2013. 249 p.
28. Kovalenko A. D. *Thermoelasticity*. Kyiv: High School, 1975. 216 p.
29. Varvak P. M., Varvak L.P. *The mesh method in problems of calculating building structures*. M.: Stroyizdat, 1977. 160 p.

THERMOMECHANICAL LOADING OF AN ORTHOTROPIC SPHERICAL SHELL WITH A HOLE

A. A. Treshchev ¹, V. G. Telichko ², D. I. Doroshenko ³

Tula State University ^{1,2,3}
Russia, Tula

¹ Corresponding Member of the RAACS, Dr. of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Construction, Building Materials and Structures, tel.: +7(905)622-90-58, e-mail: taa58@yandex.ru

² Dr. of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction, Building Materials and Structures, tel.: +7(952)019-84-65, e-mail: katrafv@yandex.ru

³ Postgraduate Student of the Department of Construction, Building Materials and Structures, tel.: +7(915)411-10-79, e-mail: doroshenki2@gmail.com

A mathematical model of thermomechanical deformation of a thin spherical shell made on the basis of an orthotropic composite, in which an induced heterogeneity develops during its loading, is presented. The general setting of boundary value problems, as justified in a number of works, was carried out in an unrelated setting. The temperature difference is assumed to be one-dimensional along the normal to the shell surfaces. In this case, small gradients of temperature effect propagation are accepted, due to which the solution of problems is implemented in a quasi-static version. To take into account the effect of induced inhomogeneity manifested as the dependence of the deformation-strength properties of composites on the kind of stress state, the equations of state formulated by one of the authors in the main material axes of the normed tensor space were used. The developed model is implemented in thermomechanical calculation of a single-layer spherical shell with a central hole. The main solution parameters are compared with the results of similar solutions obtained using the most proven models of the theory of deformation of orthotropic composite materials proposed by other authors, as well as based on the equations of the orthotropic linear theory of elasticity without taking into account the different resistances.

Key words: spherical shell, induced anisotropy, orthotropy, temperature difference, unrelated thermomechanical problem, normalized tensor space.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.012.45

DOI 10.36622/2219-1038.2025.45.2.005

РАСЧЕТ ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПЛИТ, АРМИРОВАННЫХ СТАЛЬНЫМ ПРОФИЛИРОВАННЫМ НАСТИЛОМ, ПО НОРМАЛЬНЫМ СЕЧЕНИЯМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛНОЙ ДИАГРАММЫ СЖАТИЯ БЕТОНА

С. Ю. Беляева¹, А. С. Померанцев², А. В. Ляшенко³Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7-909-217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

² Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7-909-217-31-10, e-mail: u00569@vgasu.vrn.ru

³ Аспирант кафедры технологии, организации строительства, экспертизы и управления недвижимостью, тел.: +7-962-326-29-24, e-mail: sanya.lyashenko.98@mail.ru

Проанализированы сложившиеся подходы к оценке прочности нормальных сечений изгибаемых железобетонных элементов, армированных стальным профилированным настилом. Приведены развернутые уравнения равновесия, позволяющие определить прочность пролетных сечений плит, армированных стальным профилированным настилом, на основе полной диаграммы сжатия в бетоне и диаграммы Прандтля в стальном профилированном настиле. Выделены ключевые этапы аналитической расчетной методики, предполагающей использование полинома пятой степени для описания диаграммы сжатия бетона, что позволяет оценить напряженно-деформированное состояние плиты, армированной стальным профилированным настилом, на всех этапах нагружения, вплоть до разрушения.

Ключевые слова: стальной профилированный настил, армирование железобетонной плиты, прочность нормальных сечений, нелинейные деформационные модели, полная диаграмма сжатия бетона, полином пятой степени, диаграмма Прандтля.

Введение. Постановка задачи. Использование стального профилированного настила (далее – СПН), применяемого в настоящее время преимущественно в качестве несъемной опалубки, при сокращении сроков возведения значительно удорожает конструкции железобетонных перекрытий. Рациональным с точки зрения расходования материала и снижения стоимости перекрытий, безусловно, представляется включение СПН в расчетное сечение плиты в качестве листовой арматуры. Внедрение в практику проектирования железобетонных перекрытий, армированных СПН, останавливало отсутствие нормативной базы проектирования сталежелезобетонных конструкций перекрытий, поскольку до введения в 2016 г. СП 266.1325800 «Сталежелезобетонные конструкции. Правила проектирования» [1] существовали только рекомендации НИИЖБ [2], выпущенные в 1987 г., которые затем заменило СТО 0047-2005 [3]. Кроме того, отсутствовали специализированные профилированные настилы с выштампованными на стенках гофров рифами, обеспечивающими сцепление СПН с бетоном в процессе деформирования, ГОСТ Р 58389 на которые также введен только в 2019 г. [4], а применяемые для несъемной

опалубки листы с гладкими стенками гофров по ГОСТ 24045-2016 [5] требовали дополнительных мероприятий по обеспечению сцепления с бетоном, что усложняло и конструкцию плиты, и построение расчетных методик, поэтому при введении в расчет гладких настилов используется понижающий расчетное сопротивление СПН коэффициент условий работы 0,4.

По требованиям СП 266.1325800 [1] различают расчет сталежелезобетонной плиты на стадии возведения, когда укладываемая бетонная смесь и арматура являются нагрузкой для тонкостенного гофрированного профиля, и на стадии эксплуатации, когда СПН включается в расчетное сечение плиты в качестве арматуры. С введением ГОСТ Р 58901-2020 [6] и СП 260.1325800.2016 [7] расчет гофрированных профилей на стадии возведения необходимо выполнять с учетом возможной неустойчивости ограниченной площади сжатых полки и стенки, а в действующем СП 266.1325800 [1] нет указаний на необходимость учета остаточных деформаций в эксплуатационной стадии работы при оценке прочности нормальных сечений плит, армированных СПН.

Согласно СП 266.1325800 [1]: «...Расчет прочности нормальных сечений сталежелезобетонных элементов следует проводить на основе нелинейной деформационной модели аналогично СП 63.13330.2018 [8], учитывая работу стального настила. Напряжения в настиле при сжатии или растяжении следует определять по СП 16.13330 [9]». Вместе с тем при определении несущей способности железобетонных конструкций перекрытия, армированных СПН, допускается проводить расчет на основе предельных усилий, с использованием прямоугольной эпюры распределения напряжений по сечению элемента [1–3]. Такой подход может привести к некоторому завышению несущей способности элементов, допускает неограниченную деформативность материалов, что не отвечает их реальной работе под нагрузкой, т. к. при ограниченной пластичности любого конструкционного материала после достижения деформациями предельных значений происходит его разрушение [10].

Дискретная модель, основанная на описании нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями бетона с использованием секущего модуля деформаций, заложена в нормативной методике нелинейного расчета железобетонных конструкций СП 63.13330.2018 [8]. Указанная деформационная модель требует численного решения с использованием ЭВМ при большом количестве итераций для каждого случая расчета [11]. На практике нелинейный расчет конструкций по требованиям [8] чаще всего реализуется в программных комплексах, основанных на методе конечных элементов.

Имеющиеся решения по замене криволинейной диаграммы « $\sigma - \varepsilon$ » условной диаграммой Прандтля [12], с одной стороны, упрощают расчет, с другой – вносят погрешности в оценку прочности бетона и, следовательно, в назначение армирования плит со СПН. С целью устранения погрешностей, вносимых трапецеидальной эпюрой распределения напряжений в бетоне, и в связи с необходимостью определения значения жесткостей и деформаций на всех этапах нагружения предложена методика расчета железобетонных изгибаемых элементов, армированных стальным профнастилом, с использованием реальной, криволинейной диаграммы деформирования бетона [13], основные положения которой основаны на описании зависимости «напряжения – деформации» в бетоне сжатой зоны полиномом пятой степени по предложению НИИСК Госстроя СССР [14]. Необходимо отметить, что в настоящее время аппроксимация диаграммы работы бетона на сжатие полиномом пятой степени и уточненные коэффициенты полинома закреплены в расчетной методике действующих норм Украины по проектированию железобетонных [15] и сталежелезобетонных конструкций [16]. В частности, именно такой подход использован в [16] для расчёта прочности комбинированных сечений, включающих балку и плиту по СПН.

Ниже приведены развернутые уравнения равновесия в рамках развития аналитической методики расчета пролетных сечений железобетонных плит, армированных СПН, с использованием полной диаграммы деформирования сжатого бетона и диаграммы Прандтля в СПН [13].

Расчетные предпосылки. Расчетные зависимости для оценки напряженно-деформированного состояния нормального сечения изгибаемого элемента, армированного СПН, получены исходя из следующих предпосылок:

- расчетное сечение принимается согласно рис. 1, 2; железобетонная плита с внешней профилированной арматурой в поперечном сечении представляет собой ребристую балочную конструкцию, расчет которой может быть сведен к обеспечению прочности одиночного ребра таврового сечения [1–3];
- закон распределения деформаций по высоте расчетного сечения – линейный;
- связь между напряжениями σ_b и относительными деформациями ε_b сжатого бетона описывается уравнением:

$$\sigma_b = R_b \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^k, \quad (1)$$

где R_b – призменная прочность бетона; a_k – коэффициенты полинома пятой степени по таблицам [15] в зависимости от значений параметров диаграммы « $\sigma - \varepsilon$ » осевого сжатия бетона; ε_{b1} – деформации бетона на крайнем сжатом волокне сечения (рис. 1, 2); ε_{bR} – относительные деформации сжатия бетона при напряжениях $\sigma_b = R_b$;

- работа растянутого бетона в изгибаемых элементах, армированных СПН, в расчетах не учитывается;
- связь между напряжениями и деформациями арматуры (СПН) принимается в виде диаграммы Прандтля (горизонтальные участки диаграммы ограничиваются значениями предельной сжимаемости и растяжимости стали);
- за критерий разрушения принимается достижение значений предельных деформаций крайним сжатым волокном бетона $\varepsilon_{b1} = \varepsilon_{bu}$ или крайним растянутым волокном СПН ε_{su} .

Построение расчетных зависимостей для оценки прочности нормальных сечений плит, армированных СПН, в пролете. В железобетонных элементах таврового сечения со стержневой арматурой расчет зависит от положения нейтральной оси по высоте сечения, которая определяет границу сжатой зоны. В связи с этим различают три случая расчета нормальных сечений плит, армированных СПН: при положении нейтральной оси в полке элемента таврового сечения, в стенке или на уровне верхней грани профилированного настила.

В соответствии с принятыми предпосылками напряженно-деформированное состояние расчетного сечения описывается системой нелинейных алгебраических уравнений равновесия:

- сумма сил в сечении:

$$F(\chi, \varepsilon_{b1}) = 0; \quad (2)$$

- сумма изгибающих моментов в сечении:

$$M(\chi, \varepsilon_{b1}) - M = 0, \quad (3)$$

где $\chi = \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_1}{x}$ – кривизна изогнутой оси в сечении; M – внешний изгибающий момент.

Деформации в сжатой части сечения на уровне произвольной точки Z согласно гипотезе плоских сечений:

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon_{b1} \cdot z}{x}, \quad (4)$$

где x – высота сжатой зоны; z – расстояние от нейтральной оси до произвольной точки сечения Z .

Для элемента таврового сечения, армированного СПН, условия равенства нулю суммы проекций всех сил на продольную ось и суммы изгибающих моментов относительно нейтральной оси записываются в зависимости от положения нейтральной оси в расчетном сечении.

Рассмотрим случай расположения нейтральной оси в пределах толщины или на уровне нижней границы «полки» $x \leq h_f$ (рис. 1) расчетного таврового сечения.

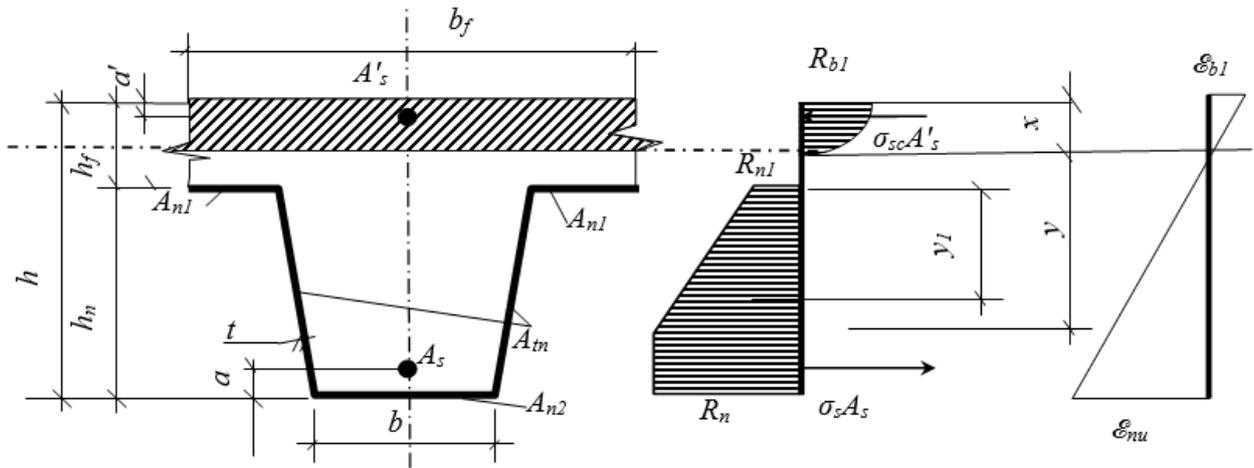


Рис. 1. Распределение напряжений и деформаций в расчетном тавровом сечении при $x \leq h_f$

Учитывая связь между напряжениями и деформациями по высоте сжатой зоны в виде уравнения (1) для нахождения усилий и статических моментов в бетоне сжатой зоны, выполним интегрирование функции (1) в соответствующих пределах и получим выражения для вычисления внутренних силовых факторов в бетоне сжатой зоны.

Несущая способность сжатой зоны бетона определяется интегральной зависимостью:

$$\int_0^x \sigma_z b_f dz = b_f \int_0^x \sigma_z dz = b_f \int_0^x R_b \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{bz}}{\varepsilon_{bR}} \right)^k dz = b_f R_b \int_0^x \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{b1} \cdot z}{x \cdot \varepsilon_{bR}} \right)^k dz. \quad (5)$$

Решая интеграл общего вида, окончательно запишем выражение для силы, определяющей несущую способность сжатой зоны бетона в уравнениях равновесия:

$$\begin{aligned} b_f R_b \int_0^x \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{b1} \cdot z}{x \cdot \varepsilon_{bR}} \right)^k dz &= \frac{b_f R_b x \varepsilon_{bR}}{\varepsilon_{b1}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_{b1} \cdot z}{x \cdot \varepsilon_{bR}} \right)^{k+1} \Bigg|_0^x = \\ &= \frac{b_f \cdot R_b \cdot x \cdot \varepsilon_{bR}}{\varepsilon_{b1}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_{b1} \cdot x}{\varepsilon_{bR} \cdot x} \right)^{k+1} - \frac{b_f \cdot R_b \cdot x \cdot \varepsilon_{bR}}{\varepsilon_{b1}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_{b1} \cdot 0}{\varepsilon_{bR} \cdot x} \right)^{k+1} = \\ &= \frac{b_f \cdot R_b \cdot x \cdot \varepsilon_{bR}}{\varepsilon_{b1}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Момент несущей способности сжатой зоны бетона определяется интегралом:

$$\int_0^x \sigma_z b_f z dz = b_f \int_0^x \sigma_z z dz = b_f \int_0^x R_b \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{bz}}{\varepsilon_{bR}} \right)^k z dz. \quad (7)$$

Выразив переменную z через деформации ε_z из условия (4): $z = \frac{x \cdot \varepsilon_{bz}}{\varepsilon_1}$, и учитывая, что $dz = \frac{x \cdot d\varepsilon_{bz}}{\varepsilon_1}$, запишем:

$$\begin{aligned} b_f R_b \int_0^{\varepsilon_{b1}} \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{bz}}{\varepsilon_{bR}} \right)^k \cdot \frac{x \cdot \varepsilon_{bz}}{\varepsilon_1} \cdot \frac{x}{\varepsilon_1} d\varepsilon_{bz} &= b_f R_b \int_0^{\varepsilon_{b1}} \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{bz}}{\varepsilon_{bR}} \right)^k \cdot \frac{x^2 \cdot \varepsilon_{bz}}{\varepsilon_1^2} \cdot \frac{\varepsilon_{bR}}{\varepsilon_{bR}} d\varepsilon_{bz} = \\ &= b_f R_b \frac{x^2}{\varepsilon_1^2} \varepsilon_{bR} \int_0^{\varepsilon_{b1}} \sum_{k=1}^5 a_k \left(\frac{\varepsilon_{bz}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+1} d\varepsilon_{bz}. \end{aligned}$$

Тогда момент несущей способности сжатой зоны бетона в уравнениях равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{b_f R_b x^2 \varepsilon_{bR} \cdot \varepsilon_{bR}}{\varepsilon^2_{b1}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left(\frac{\varepsilon_Z}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+2} \Big|_0^{\varepsilon_{b1}} &= \frac{b_f \cdot R_b \cdot x^2 \cdot \varepsilon^2_{bR}}{\varepsilon^2_{b1}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left(\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+2} - 0 = \\ &= \frac{b_f \cdot R_b \cdot x^2 \cdot \varepsilon^2_{bR}}{\varepsilon^2_{b1}} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left(\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения равновесия для расчетного сечения (рис. 1) с учетом полученных выражений (5) и (7), а также силовых факторов в профилированном настиле и стержневой арматуре приобретают вид:

$$F(\chi, \varepsilon_{b1}) = \frac{R_b \cdot b_f \cdot x \cdot \varepsilon_{bR}}{\varepsilon_1} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+1} + \sum \sigma_{si} A_{si} + \sum R_{ni} A_{ni}; \quad (9)$$

$$M(\chi, \varepsilon_{b1}) = \frac{R_b \cdot b_f \cdot x^2 \cdot \varepsilon^2_{bR}}{\varepsilon_1^2} \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+2} + \sum \sigma_{si} A_{si} z_{si} + \sum R_{ni} A_{ni} z_{ni}. \quad (10)$$

Суммы сил $\sum \sigma_{si} A_{si}$ и моментов $\sum \sigma_{si} A_{si} z_{si}$ в стержневой арматуре соответственно:

$$\sum \sigma_{si} A_{si} = -\sigma_s A_s + \sigma_{sc} A'_s; \quad (11)$$

$$\sum \sigma_{si} A_{si} z_{si} = \sigma_{sc} A'_s (x - a') - \sigma_s A_s (h - a - x),$$

причем деформации и напряжения в стержневой арматуре определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\varepsilon_{b1}(h-x-a)}{x} \leq \varepsilon_{sn}; \\ \varepsilon_{sc} &= \varepsilon_{b1} \left(1 - \frac{a'}{x} \right) \leq \varepsilon_{scn}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \leq R_s;$$

$$\sigma_{sc} = E_s \varepsilon_{sc} \leq R_{sc}.$$

Суммы внутренних силовых факторов $\sum R_{ni} A_{ni}$ и $\sum R_{ni} A_{ni} z_{ni}$ (сил и моментов соответственно) в стальном профилированном настиле определяются в зависимости от распределения относительных деформаций в сечении элемента, т. е. от стадии работы стального настила:

– с развитием пластических деформаций:

$$\begin{aligned} \sum R_{ni} A_{ni} &= -t_n [R_{vp} \cdot (b_f - b) + R_{np} \cdot b + +2 \cdot R_{st\ el} (x + y - h_f) + \\ &+ 2 \cdot R_{st\ pl} \cdot (h - x - y)]; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum R_{ni} A_{ni} z_{ni} &= t_n [R_{vp} \cdot (b_f - b) \cdot (h_f - x) + R_{np} \cdot b \cdot (h - x) + \\ &+ 2 \cdot R_{st\ el} (x + y - h_f) \cdot (h_f - x + y_1) + R_{st\ pl} \cdot (h - x - y) \cdot (h - x + y)]; \end{aligned} \quad (14)$$

причем, если напряжения во всех частях СПН достигают предела текучести, выражения (13), (14) приобретают вид:

$$\sum R_{ni} A_{ni} = t_n R_n [b_f - 2 \cdot h_f + 2 \cdot h]; \quad (15)$$

$$\sum R_{ni} A_{ni} z_{ni} = t_n \cdot R_n [(b_f - b) \cdot (h_f - x) + b \cdot (h - x) + 2 \cdot h_n \cdot (0,5h_n + h_f - x)]; \quad (16)$$

- в упругой работе СПН, т. е. при $(y + x) > h$:

$$\sum R_{ni} A_{ni} = -t_n [R_{vp} \cdot (b_f - b) + R_{np} \cdot b + 2 \cdot R_{st\ el} \cdot h_n]; \quad (17)$$

$$\sum R_{ni} A_{ni} z_{ni} = t_n [R_{vp} \cdot (b_f - b) \cdot (h_f - x) + R_{np} \cdot b \cdot (h - x) + 2 \cdot R_{st\ el} \cdot h_n \cdot (h_f - x + y_3)]. \quad (18)$$

При нахождении $\sum R_{ni} A_{ni}$ и $\sum R_{ni} A_{ni} z_{ni}$ по формулам (13)–(18) относительные деформации и напряжения R_{ni} в i частях профнастила определяются зависимостями:

- в верхней полке СПН:

$$\varepsilon_{vp} = \frac{\varepsilon_{b1} \cdot (h_f - x)}{x} \leq \varepsilon_{ни}, \quad (19)$$

$$R_{vp} = E_n \cdot \varepsilon_{vp} \leq R_n; \quad (20)$$

- в нижней полке СПН:

$$\varepsilon_{np} = \frac{\varepsilon_{b1} \cdot (h - x)}{x} \leq \varepsilon_{ни}, \quad (21)$$

$$R_{np} = E_n \cdot \varepsilon_{np} \leq R_n; \quad (22)$$

- напряжения в стенках СПН:

- а) работающих в упругой стадии:

$$R_{st\ el} = \frac{R_{vp} + R_{np}}{2}; \quad (23)$$

- б) работающих в пластической стадии:

$$\text{при } (y + x) < h \quad R_{st\ pl} = R_n; \quad (24)$$

$$\text{при } (y + x) > h \quad R_{st\ pl} = 0;$$

y – расстояние от нейтральной оси до точки перелома эпюры напряжений в стальном профилированном настиле:

$$y = \frac{R_n \cdot x}{E_n \cdot \varepsilon_{b1}}; \quad (25)$$

y_3 – расстояние до центра тяжести эпюры напряжений в стенке, работающей в упругой стадии (y_3 определяется в случае упругой работы настила):

$$y_3 = \frac{(h - hf) \cdot (R_{vp} + 2 \cdot R_n)}{3 \cdot (R_{vp} + R_n)}; \quad (26)$$

y_1 – расстояние от крайней верхней полки СПН до центра тяжести эпюры напряжений в стенке, работающей в упругой стадии (y_1 определяется в случае упругопластической работы настила):

$$y_1 = \frac{(x + y - hf) \cdot (R_{vp} + 2 \cdot R_n)}{3 \cdot (R_{vp} + R_n)}; \quad (27)$$

$\varepsilon_{su} = \varepsilon_{nu} = 200 \cdot 10^{-5}$ – предельные деформации растяжения стержневой арматуры и стали СПН.

Запишем уравнения равновесия сил и изгибающих моментов для случая прохождения нейтральной оси в ребре расчетного таврового сечения ($x > h_f$) (рис. 2), выполнив интегрирование функции (1) по аналогии с приведенными преобразованиями (4)–(7):

$$F(\chi, \varepsilon_{b1}) = \frac{R_b \cdot b \cdot \chi \cdot \varepsilon_{bR}}{\varepsilon_{b1}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} \left(\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+1} + \sum \sigma_{si} A_{si} + \sum R_{ni} A_{ni} +$$

$$+ \frac{R_b \cdot (b_f - b) \cdot \chi \cdot \varepsilon_{bR}}{\varepsilon_{b1}} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} \left(\left(\frac{\varepsilon_{n1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+1} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{h_f}{\chi} \right) \right)^{k+1} \right); \quad (28)$$

$$M(\chi, \varepsilon_{b1}) = \frac{R_b \cdot b \cdot \chi^2 \cdot \varepsilon_{bR}^2}{\varepsilon_{b1}^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+2} \left(\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+2} +$$

$$+ \frac{R_b (b_f - b) \chi^2 \cdot \varepsilon_{bR}^2}{\varepsilon_{b1}^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+2} \left(\left(\frac{\varepsilon_{b1}}{\varepsilon_{bR}} \right)^{k+2} \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{h_f}{\chi} \right) \right)^{k+2} \right) + \sum \sigma_{si} A_{si} z_{si} +$$

$$+ \sum R_{ni} A_{ni} y_{ni}. \quad (29)$$

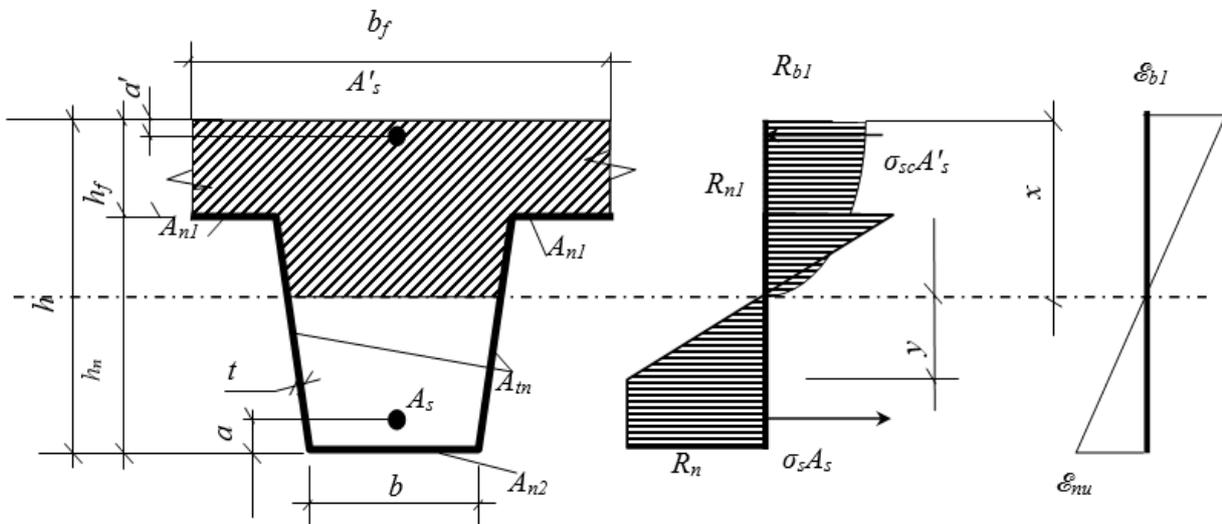


Рис. 2 Распределение напряжений и деформаций в расчетном тавровом сечении при $x > h_f$

Суммы внутренних силовых факторов в стальном профилированном настиле $\sum R_{ni} A_{ni}$ и $\sum R_{ni} A_{ni} z_{ni}$ (сил и моментов соответственно):

– при допущении развития пластических деформаций в настиле:

$$\sum R_{ni} A_{ni} = R_{vp} \cdot t_n (x - h_f + b_f - b) - R_n \cdot t_n (2h - 2x - y + b) = 0; \quad (30)$$

$$\sum R_{ni} A_{ni} z_{ni} = R_{vp} \cdot t_n (x - h_f) \left(\frac{x - h_f}{3} + b_f - b \right) +$$

$$+ R_n \cdot t_n \left[(h - x - y)(h + x + y) + b(h - x) + \frac{2}{3} y^2 \right]; \quad (31)$$

– при упругой работе, когда $(y + x) > h$:

$$\sum R_{ni} A_{ni} = t_n [R_{vp} \cdot (b_f - b + x - h_f) + R_{np} \cdot (b + h - x)]; \quad (32)$$

$$\sum R_{ni} A_{ni} z_{ni} = t_n [R_{vp} \cdot (x - h_f) \cdot (b_f - b + \frac{2}{3} \cdot (x - h_f)) +$$

$$+ R_{np} \cdot (b + \frac{2}{3} \cdot (h - x)) \cdot (h - x)], \quad (33)$$

где R_{vp} и R_{np} – напряжения в верхней и нижней полках соответственно, определяются по формулам (19)–(22); y – расстояние от нейтральной оси до точки перелома эпюры напряжений в растянутом стальном профилированном настиле, определяется по формуле (25); $\sum \sigma_{si} A_{si}$ и

$\sum \sigma_{si} A_{si} z_{si}$ – суммы усилий в стержневой арматуре (11) с учетом деформаций и напряжений в сжатой и растянутой стержневой арматуре, определяются по формулам (12).

Система нелинейных алгебраических уравнений (2)–(3) с двумя неизвестными (деформацией крайнего наиболее сжатого волокна бетона ε_{b1} и высотой сжатой зоны x) решается подбором и справедлива до тех пор, пока деформации бетона и арматуры (стержневой и СПН) не достигнут предельных значений:

$$\varepsilon_{b1} \leq \varepsilon_{bn}; \quad \varepsilon_{ni} \leq \varepsilon_{nu}; \quad \varepsilon_{si} \leq \varepsilon_{su}. \quad (34)$$

Таким образом, невыполнение условий (34) означает разрушение сечения.

Методика оценки напряженно-деформированного состояния сечения плиты, армированной СПН, и общая последовательность расчетов по указанной методике изложены в [13]. Остановимся на основных этапах прочностного анализа расчетного сечения плиты. Задаваясь некоторым начальным значением кривизны $\chi = \chi_0$ и деформацией крайнего сжатого волокна бетона $\varepsilon_{b1} = \varepsilon_0$, можно найти высоту сжатой зоны:

$$x = \frac{\varepsilon_{b1}}{\chi}, \quad (35)$$

и в зависимости от положения нейтральной оси установить расчетный случай для таврового сечения. Вычисляют внутренние силовые факторы в стержневой арматуре и СПН, а также значение функции $F(\chi, \varepsilon_{b1})$; при невыполнении условия (1) снова задаются значением: $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon_0$ (при этом $\Delta\varepsilon_0 > 0$, если $F(\chi, \varepsilon_{b1}) < 0$, и наоборот), повторяя расчет до его полного выполнения. Вычисляют значение функции $M(\chi, \varepsilon_{b1})$, и если условие (2) не выполняется, то принимают новое значение кривизны $\chi = \chi + \Delta\chi$ (при этом $\Delta\chi > 0$, если $M(\chi, \varepsilon_{b1}) < M$), а затем повторяют расчет, пока условие (2) с заданной точностью не удовлетворится.

Проверка прочности нормального сечения плиты в предельном состоянии производится из условия:

$$M \leq M_n(\chi, \varepsilon_0), \quad (36)$$

где $M_n(\chi, \varepsilon_0)$ – предельное значение функции $M(\chi, \varepsilon_0)$ при значениях кривизны, соответствующих предельным относительным значениям деформации сжатия бетона:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{bu}}{x}. \quad (37)$$

Выражения (9), (10) и (28), (29) могут быть использованы для построения зависимости «момент – кривизна», т. е. для установления связи между фибровой деформацией сжатого бетона, задаваемой с определенным шагом, кривизной и действующими в сечении усилиями.

Выводы. Предложенные развернутые уравнения равновесия позволяют выполнить расчеты прочности нормальных сечений железобетонных плит, армированных стальным профилированным настилом, в эксплуатационной стадии работы перекрытия, а также оценить напряженно-деформированное состояние изгибаемого сталежелезобетонного элемента таврового сечения на всех этапах работы, от начальных стадий нагружения вплоть до разрушения. Полученные выражения справедливы для оценки прочности пролетных сечений плит, когда сжатая зона бетона охватывает полку и часть ребра расчетного тавра. На основе изложенного подхода можно также получить зависимости для оценки напряженно-деформированного состояния опорных сечений плит при расположении части или всего СПН в сжатой зоне таврового сечения. Вместе с тем отметим, что расчет прочности опорных сечений плит, армированных СПН, с использованием полиномиальной зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона рационально выполнять на основе нормативной методики ДБН В.2.6-160:2010 [16] как для комбинированного элемента, включающего балку и часть опирающейся на нее плиты перекрытия, при условии обеспечения совместности их работы на всех этапах нагружения.

Таким образом, приведенное в статье развитие аналитической методики прочностного расчета на основе криволинейной диаграммы сжатия бетона, описываемой полиномом пятой степени, позволяет четко сформулировать критерии исчерпания несущей способности нормальных сечений плит, армированных стальным профилированным настилом. Кроме того, расчетная методика позволяет оценить достоверность результатов оценки несущей способности сталежелезобетонной плиты по другим нелинейным теориям проектирования железобетонных конструкций, реализуемых, к примеру, в программных комплексах. При выполнении проверочных расчетов на основании приведенных уравнений можно получить представление об остаточном ресурсе плит, армированных СПН, при реконструкции.

Необходимо отметить, что с введением ГОСТ Р 58901-2020 [6], устанавливающим требования к расчету стальных профилированных настилов как тонкостенных оболочек, в частности на стадии бетонирования плиты перекрытия, т. е. с учетом заkritической работы профиля, получающего пластические деформации при ограниченной потере устойчивости части сечения, остается открытым вопрос о необходимости учета остаточных деформаций в эксплуатационной стадии работы при оценке прочности нормальных сечений плит, армированных СПН.

Библиографический список

1. СП 266.1325800. Сталежелезобетонные конструкции. Правила проектирования. – М.: Стандартинформ, 2016. – 124 с.
2. Рекомендации по проектированию монолитных железобетонных перекрытий со стальными профилированными настилами / НИИЖБ, ЦНИИпромзданий. – М., 1987. – 42 с.
3. СТО 0047-2005. Перекрытия сталежелезобетонные с монолитной плитой по стальному профилированному настилу. Правила проектирования / ЗАО «ЦНИИПСК им. Мельникова». – М., 2005. – 63 с.
4. ГОСТ Р 58389-2019. Профили стальные листовые гнутые с трапециевидными гофрами для сталежелезобетонных конструкций. Технические условия. – М.: Стандартинформ, 2019. – 24 с.
5. ГОСТ 24045-2016. Профили стальные листовые гнутые с трапециевидными гофрами для строительства. Технические условия. – М.: Стандартинформ, 2016. – 21 с.
6. ГОСТ Р 58901-2020. Профили стальные листовые гнутые с трапециевидными гофрами для строительства. Методика расчета несущей способности. – М.: Стандартинформ, 2020. – 23 с.
7. СП 260.1325800.2016. Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутох оцинкованных профилей и гофрированных листов. Правила проектирования. – М.: Минстрой России, 2016. – 124 с.
8. СП 63.13330.2018. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2019. – 124 с.
9. СП 16.13330.2017. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. Стальные конструкции. – М.: Минстрой России, 2017. – 140 с.
10. Бачинский В. Я., Манискевич Е. С. О предельном равновесии систем из ограниченно пластичных материалов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – № 1. – С. 41–43.
11. Радайкин О. В. Теоретические основы диаграммного метода расчёта стержневых элементов из армированного бетона // Строительство и реконструкция. – 2020. – Вып. 6 (92). – С. 26–42.
12. Беляева С. Ю. Аналитическая модель напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных элементов, армированных стальным профилированным настилом, на основе диаграммы Прандтля // Сб. матер. VI Междунар. науч.-практ. конф. «Проблемы

современных экономических, правовых и естественных наук в России». – Воронеж, ВГТУ, 2017. – С. 105–108.

13. . Беляева С. Ю. Методика оценки напряженно-деформированного состояния железобетонных элементов, армированных стальным профилированным настилом, на основе реальных диаграмм деформирования материалов // Сб. науч. тр. Донбас. гос. техн. ун-та. – Вып. 26. – Алчевск, 2008. – С. 278–286.

14. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона / НИИСК Госстроя СССР; Бамбура А. Н., Бачинский В. Я. и др. – Киев, 1987. – 25 с.

15. ДБН В.2.6-160:2010. Сталежелезобетонные конструкции. – К.: Минрегионбуд Украины, 2010. – 75 с.

16. ДБН В.2.6-68:2009. Бетонные и железобетонные конструкции. – К.: Минрегионбуд Украины, 2011. – 71 с.

References

1. Set of Rules 266.1325800. Composite and reinforced concrete structures. Design rules. M.: Standartinform, 2016. 124 p.

2. Recommendations for the design of monolithic reinforced concrete floors with steel profiled decking. NIIZHB, TsNIIPromzdaniy. M., 1987. 42 p.

3. Organization Standard 0047-2005. Composite and reinforced concrete floors with a monolithic slab on steel profiled decking. Design rules. JSC TsNIIPSK named after Melnikov. M., 2005. 63 p.

4. Federal Standard R 58389-2019. Bent steel sheet profiles with trapezoidal corrugations for composite concrete structures. Technical conditions. M.: Standartinform, 2019. 24 p.

5. Federal Standard 24045-2016. Bent sheet steel profiles with trapezoidal corrugations for construction. Technical conditions. M.: Standartinform, 2016. 21 p.

6. Federal Standard R 58901-2020. Bent sheet steel profiles with trapezoidal corrugations for construction. Methodology for calculating the bearing capacity. M.: Standartinform, 2020. 23 p.

7. Federal Standard 260.1325800.2016. Thin-walled steel structures made of cold-formed galvanized sections and corrugated sheets. Design rules. M.: Ministry of Construction of Russia, 2016. 124 p.

8. Set of Rules 63.13330.2018. Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions. M.: Standartinform, 2019. 124 p.

9. Set of Rules 16.13330.2017. Updated version of SNIIP II-23-81*. Steel structures. M.: Ministry of Construction of Russia, 2017. 140 p.

10. Bachinsky V. Ya., Maniskevich E. S. On the limit equilibrium of systems of limited plasticity materials. Structural Mechanics and Calculation of Structures. No. 1. 1983. Pp. 41–43.

11. Radaykin O. V. Theoretical foundations of the diagrammatic method for calculating rod elements made of reinforced concrete. Construction and Reconstruction. Issue 6(92). 2020. Pp. 26–42.

12. Belyaeva S. Yu. Analytical model of the stress-strain state of bending reinforced concrete elements reinforced with profiled steel sheeting based on the Prandtl diagram. Coll. Materials of the VI Int. Scientific-Practical. Conf. "Problems of Modern Economic, Legal and Natural Sciences in Russia". Voronezh, VSTU. 2017. Pp. 105–108.

13. Belyaeva S. Yu. Methodology for assessing the stress-strain state of reinforced concrete elements reinforced with profiled steel sheeting based on real material deformation diagrams. Coll. Scientific Works of Donbass State Tech. University. Issue 26. Alchevsk, 2008. Pp. 278–286.

14. Bambura A. N., Bachinsky V. Ya. Methodical recommendations for refined calculation of reinforced concrete elements taking into account the full compression diagram of concrete. NIISK of the USSR Gosstroy. Kyiv, 1987. 25 p.

15. State Building Codes B.2.6-160:2010. Steel and reinforced concrete structures. K.: Ministry of Regional Development of Ukraine, 2010. 75 p.

16. State Building Codes B.2.6-68:2009. Concrete and reinforced concrete structures. K.: Ministry of Regional Development of Ukraine, 2011. 71 p.

STRENGTH CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE SLABS REINFORCED WITH PROFILED STEEL DECKING BY NORMAL SECTIONS USING A FULL CONCRETE COMPRESSION DIAGRAM

S. Yu. Belyaeva¹, A. S. Pomerantsev², A. V. Lyashenko³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹ PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal and Wooden Structures, tel.: +7(909)217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal and Wooden Structures, tel.: +7(909)217-31-10, e-mail: u00569@vgasu.vrn.ru

³ Postgraduate Student of the Department of Technology, Organization of Construction, Expertise and Management of Real Estate, tel.: +7 (962)326-29-24, e-mail: sanya.lyashenko.98@mail.ru

The existing approaches to assessing the strength of normal sections of bending reinforced concrete elements reinforced with steel profiled sheeting are analyzed. The detailed equilibrium equations are given, allowing one to determine the strength of span sections of slabs reinforced with steel profiled sheeting, based on the full compression diagram in concrete and the Prandtl diagram in steel profiled sheeting. The key stages of the analytical calculation method are highlighted, which involves the use of a fifth-degree polynomial to describe the concrete compression diagram, which allows one to evaluate the stress-strain state of a slab reinforced with steel profiled sheeting at all loading stages, up to failure.

Key words: steel profiled sheeting, reinforcement of reinforced concrete slabs, strength of normal sections, non-linear deformation models, full concrete compression diagram, fifth-degree polynomial, Prandtl diagram.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.014.2

DOI 10.36622/2219-1038.2025.45.2.006

РАСЧЕТ СТАЛЬНЫХ ПРОФИЛИРОВАННЫХ НАСТИЛОВ В ЛЕГКИХ ПОКРЫТИЯХ ЗДАНИЙ

С. Ю. Беляева¹, В. Г. Сазыкин², А. В. Ляшенко³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7-909-217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

² Ст. преп. кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7-909-217-31-10, e-mail: vitalijsaz@vgasu.vrn.ru

³ Аспирант кафедры технологии, организации строительства, экспертизы и управления недвижимостью, тел.: +7-962-326-29-24, e-mail: sanya.lyashenko.98@mail.ru

Рассматриваются последние изменения в подходах к проектированию стальных профилированных настилов, отраженные в действующих нормативных документах; вносится ясность в чтение норм. Дается сравнительный анализ результатов расчета по разным методикам, формулируются основные принципы проектирования стальных профилированных настилов в легких покрытиях зданий.

Ключевые слова: стальной профилированный настил, прочность, устойчивость, элементы жесткости, эффективное сечение, редуцированные характеристики.

Введение. Постановка задачи. В легких покрытиях общественных, производственных, складских зданий и сооружений в качестве основного несущего элемента кровли используют стальной профилированный настил (далее – СПН). Конструктивное решение покрытия может быть выполнено беспрогонным, с опиранием СПН непосредственно на верхние пояса ферм (или балок), или с укладкой СПН по прогонам, расположенным с необходимым для обеспечения его несущей способности и жесткости шагом. При этом доля СПН в общем расходе стали на покрытие составляет достаточно высокий процент. Так, в покрытиях зданий с применением легких ферм из гнутосварных профилей независимо от принятой схемы опирания расход СПН составляет около 27–30 % от массы покрытия в целом [1]. Учитывая, что профилированный настил имеет достаточно высокую стоимость, и стремясь к снижению его весовых показателей, при проектировании зачастую пренебрегают общими принципами расчета СПН, заложенными в нормах. Вместе с тем участвовавшие в последнее время аварии покрытий зданий, как показывает экспертная оценка, чаще всего связывают с неправильным учетом снеговой нагрузки, превышением фактической нагрузки над нормативной и ошибками при проектировании конструктивных элементов [2–5]. К примеру, масштабное обрушение покрытия логотипа «Биек-Тау» (Казань) в 2011 г. произошло в том числе по причине неправильно принятого профиля СПН (по заключению экспертизы проекта, расчет СПН не выполнялся), получившего значительные прогибы в процессе эксплуатации, что повлекло за собой потерю устойчивости рамных балок покрытия (рис. 1), раскрепленных в горизонтальном направлении

профилированными листами. Причем до обрушения, т. е. до наступления расчетной ситуации, здание простояло около 2 лет. Ущерб от неправильного технического решения покрытия на 2001 г. составил около 663 млн руб. [5].



Рис. 1. Обрушение кровли логопарка «Биек-Тау» (9 марта 2011 г.)

Рекомендации по расчету СПН разбросаны по разным нормативным документам и рекомендациям, в которых требования к расчету и алгоритмам оценки несущей способности профилированных настилов значительно отличаются. В реальном проектировании инженеры-конструкторы зачастую вообще не рассчитывают СПН покрытий, пользуясь готовыми таблицами несущей способности, или «изобретают» свои коэффициенты перехода для расчетных ситуаций, не отраженных в таблицах, что рано или поздно приводит к отказам строительных конструкций и авариям не только при эксплуатации, но и на стадии возведения. Необходимо отметить, что в последнее время подходы к расчету СПН претерпели значительные изменения. Постоянно проводимая корректировка нормативной базы проектирования стальных конструкций, внесение изменений в СП, введение новых ГОСТ приводит к тому, что положения

действующих нормативных документов не всегда синхронизированы и проектировщики не успевают эти изменения отследить.

Анализ развития нормативной базы в области проектирования настилов покрытий из стальных профилированных листов. Долгое время для расчета профилированных листов покрытий действовали рекомендации ЦНИИПСК им. Н. П. Мельникова от 1985 г. [6], обновленные в 2005 и 2014 гг. в виде СТО 0043 [7]. Расчетная методика, применяемая для оценки несущей способности профилированного настила в этих документах, основывалась на подходе СНиП II-23-81, а затем и его актуализированной редакции СП 16.13330.2017 [8] к расчету изгибаемых элементов по прочности и жесткости с использованием полных геометрических характеристик СПН, приведенных в ГОСТ 24045 [9]. Проверка стенки гофра на устойчивость выполнялась как для сжато-изгибаемого элемента и зависела от наличия уступа на стенке или его отсутствия. Уступ в расчете выполнял роль продольного ребра, разделяющего стенку на отсеки по высоте (рис. 2). Этот же подход к расчету СПН был закреплен во впервые введенном в 2017 г. и действующем в настоящее время СП 294.1325800.2017 [10] для профилированных листов с расчетным сопротивлением по пределу текучести R_y не менее 230 МПа. В СТО 0043-2014 [7] и рекомендациях [6] для шага опор 3, 4 и 6 м составлены таблицы, позволяющие подобрать настил высотой не более 114 мм (Н114) из стали марки 220 ($R_y = 220$ МПа) при разном количестве (не более 4-х) равномерно загруженных пролетов. Табличными значениями продолжают руководствоваться проектировщики, не указывая при этом марку стали СПН в спецификациях и чертежах. К расчету прибегают только в случаях, не приведенных в таблицах, к примеру, в зонах повышенных снеговых отложений или при величинах пролетов, отличных от табличных.

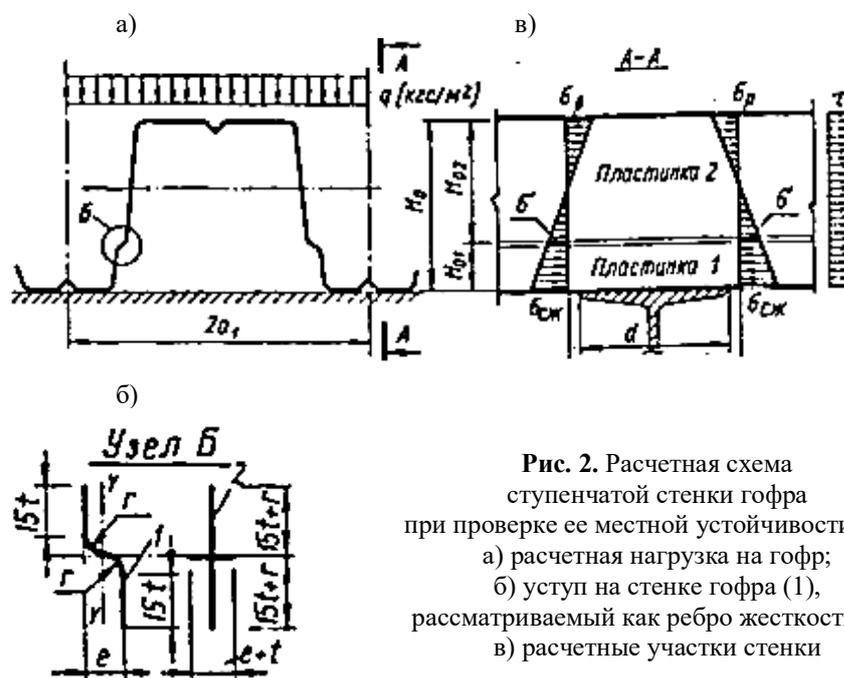


Рис. 2. Расчетная схема ступенчатой стенки гофра при проверке ее местной устойчивости [10]:
 а) расчетная нагрузка на гофр;
 б) уступ на стенке гофра (1), рассматриваемый как ребро жесткости (2);
 в) расчетные участки стенки

В июне 2020 г. в основной нормативный документ по проектированию стальных конструкций СП 16.13330.2017 [8] было внесено изм. 2, в котором кроме прочих введен п. 4.1.1а: «При проектировании стальных тонкостенных конструкций из холодногнутой оцинкованной профилей и гофрированных листов необходимо соблюдать требования СП 260.1325800» [11]. Кроме того, 01.12.2020 впервые введен ГОСТ Р 58901-2020 [12], отражающий требования к расчету настилов с трапециевидными гофрами, в котором даны ссылки на СП 260.1325800 [11] в части определения геометрических характеристик и расчетных сопротивлений СПН с учетом закритической работы стенок и полок профилей.

Согласно методике СП 260.1325800 [11] для оценки прочности и деформативности тонкостенных гофрированных профилей в расчет вводится редуцированное сечение, т. е. учитывается возможная потеря устойчивости сжатой части сечения и выключение его из общей работы профиля на изгиб при сохранении несущей способности элемента в целом. Редуцированные геометрические характеристики сечения профиля зависят от количества элементов жесткости на широких и (или) узких полках и (или) на стенке гофров, вводимых в виде уступов на стенках или продольных складок (мелких гофров) на полках с целью повышения жесткости и несущей способности пластин, составляющих поперечное сечение профилей (рис. 3), а также от уровня напряжений в сжатых полках профиля.

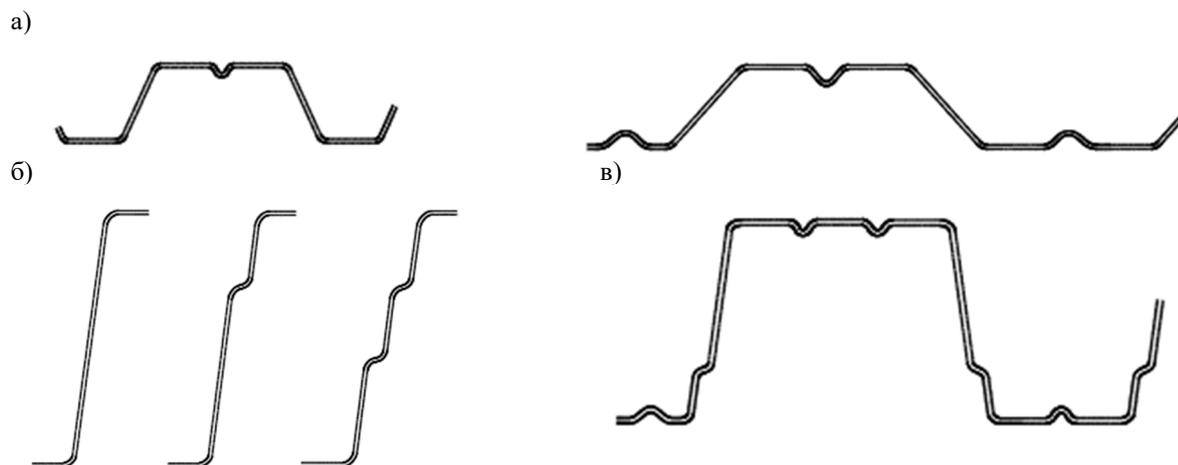


Рис. 3. Профилированные листы:

а) с элементами жесткости только на полках; б) без элементов жесткости, а также с одним или двумя элементами жесткости только на стенке; в) с элементами жесткости на полках и стенках

Таким образом, в настоящее время для оценки несущей способности профилированных настилов существуют две расчетные методики, включенные в нормы проектирования стальных конструкций, но вместе с тем реализующие разные подходы к оценке напряженно-деформированного состояния СПН. Однако введение СП 260.1325800 [11], на который ссылается СП 16.13330.2017 [8], подразумевает, что методикой СП 294.1325800.2017 [10], детализирующего и развивающего положения СП 16.13330.2017 [8], и готовыми таблицами несущей способности на основе этой методики можно пользоваться только для предварительного назначения профиля листа, который затем должен быть подтвержден и уточнен расчетами по требованиям нормативных документов [11, 12]. Вопрос к разработчикам норм в связи с отсутствием изменений в разделе 23 действующего СП 294, связанных с введением СП 260, остается открытым.

Особенности расчета СПН с редуцированными геометрическими характеристиками. Расчетные методики нормативных документов [11, 12] распространяются на стальные профилированные листы, геометрические параметры которых отвечают п. 7.4 [12] и разделу 7.1 [11]. Таким параметрам соответствуют СПН по ГОСТ 24045-2016 [9] и некоторым СТО. В оценке напряженно-деформированного состояния СПН в соответствии с требованиями СП 260.1325800 [11] можно выделить следующие основные этапы:

1) определение нагрузок на покрытие и усилий в СПН в соответствии с принятой расчетной схемой разрезной однопролетной или неразрезной многопролетной балки, расчет ведет на 1 м ширины настила;

2) определение (для заданного в соответствии с сортаментом сечения профиля) геометрических характеристик полного поперечного сечения с острыми углами (без учета скруглений) и с учетом фактических размеров элементов жесткости, а именно: площади сжатой и растянутой полок и стенки с учетом геометрии элементов жесткости; положение центра

тяжести полки с элементом жесткости; полной площади сечения части профиля, ограниченной стенкой, половиной верхней и нижней полки;

3) уточнение площади полного сечения с учетом влияния зон сгиба;

4) расчет эффективного сечения, уменьшенного вследствие потери местной устойчивости, при этом учитывается возможность потери местной устойчивости элемента жесткости и потери устойчивости формы всего сечения, а также взаимодействие между потерей устойчивости полки и стенки:

а) для сжатой гладкой полки расчет включает определение гибкости, критических напряжений в пластинке в зависимости от условий закрепления и коэффициента редукции;

б) для сжатой полки с элементом жесткости расчет выполняется в несколько итераций. При этом жесткость упругоподатливой связи в первом приближении принимается бесконечной, т. е. считается, что элемент жесткости обеспечивает полное защемление пластины-полки, а напряжение в нем достигает предела текучести. От итерации к итерации корректируется коэффициент снижения несущей способности в зависимости от величины фактических и критических напряжений, а также гибкости расчетного участка полки;

в) для стенки расчет выполняют в зависимости от количества элементов жесткости и положения нейтральной оси, а также от фактического распределения напряжений в растянутой и сжатой части стенки (рис. 4); после определения критических напряжений находят коэффициент снижения несущей способности элемента жесткости;

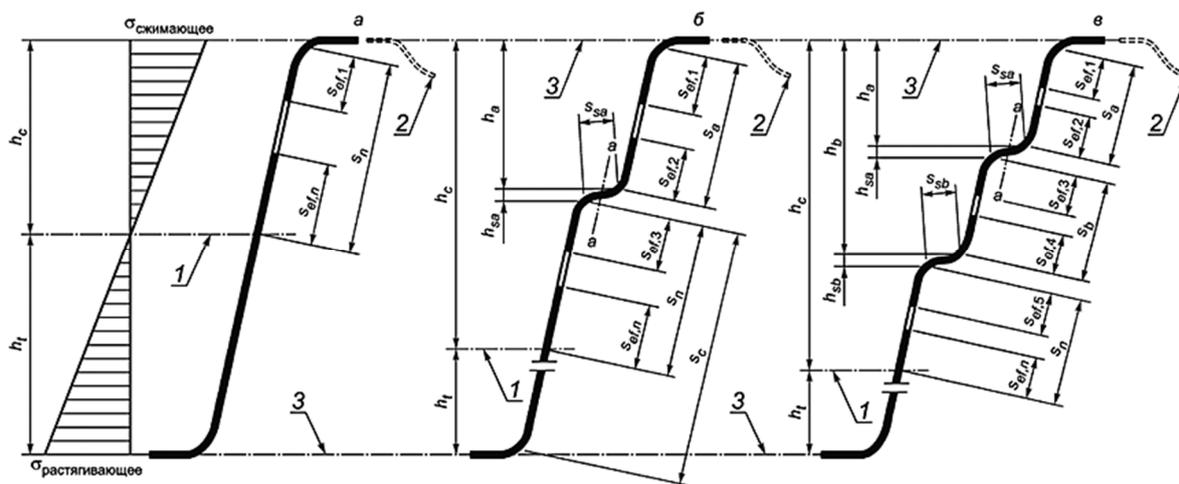


Рис. 4. Эффективные поперечные сечения стенок гофрированных листов [12]:

- а) со стенкой без элементов жесткости; б) со стенкой с одним элементом жесткости в сжатой зоне;
- в) со стенкой с двумя элементами жесткости в сжатой зоне;

1 – начальное положение нейтральной оси в эффективном сечении; 2 – участки эффективного поперечного сечения сжатых полок с промежуточными элементами жесткости; 3 – центральная ось полки

5) определение геометрических характеристик редуцированного сечения: площади, момента инерции, моментов сопротивления сечения;

б) расчет по первой группе предельных состояний – оценка прочности:

– по нормальным напряжениям в пролетном и опорном сечениях:

$$\frac{M}{W_{red,min}R_y} \leq 1, \quad (1)$$

где $W_{red,min}$ – минимальный момент сопротивления редуцированного сечения; R_y – расчетное сопротивление стали по пределу текучести; для изготовления холоднопрофилированного оцинкованного проката используются стали 220, 250, 280, 320, 350, т. е. с пределом текучести не ниже 215 МПа;

– по касательным напряжениям в опорных сечениях:

$$Q_w = \frac{h_w \cdot t_w \cdot R_s}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

где Q_w – поперечная сила, воспринимаемая одной стенкой гофра; h_w – высота стенки между осевыми линиями полок; t_w – толщина стенки профиля; R_s – расчетное сопротивление стали при сдвиге; в отличие от расчетного сопротивления срезу по СП 16.13330, является функцией гибкости стенки, определяемой от наличия и количества элементов жесткости; α – угол наклона стенки относительно полок;

7) расчет по второй группе предельных состояний – определение прогибов в пролете:

$$f \leq f_u, \quad (3)$$

где f – расчетный прогиб от нормативных нагрузок, определяемый в зависимости от принятой расчетной схемы СПН с учетом редуцированных жесткостных характеристик $EI_{red,min}$; f_u – предельный прогиб, допустимый по условиям эксплуатации согласно СП 20.13330.2016 [13]; $I_{red,min}$ – наименьший по пролету момент инерции редуцированного сечения в расчете на 1 м ширины профиля.

Сравнительный анализ результатов расчетов СПН по разным методикам. Как показывает практика, в последнее время в целях снижения металлоёмкости покрытий наметилась тенденция применения беспрогонных решений кровельных систем с шагом стропильных ферм (или балок) от 4 до 6 м. В проектах может быть заложена система связей по верхним поясам ферм (балок), включающая горизонтальные связевые фермы и распорки вдоль всего здания, или функцию связевых распорок может выполнять СПН, раскрепляя сжатые верхние пояса несущих элементов из плоскости действия нагрузки. В последнем случае при потере несущей способности настила с высокой степенью вероятности может произойти обрушение всего покрытия, что снижает надежность принятого проектного решения, особенно при неправильном подходе к оценке напряженно-деформированного состояния СПН. Следует отметить, что ранее преимущество отдавали кровельным системам с опиранием СПН на прогоны покрытия, шаг которых редко превышал 3 м, что позволяло применять профилированные листы высотой не более Н75, а включение прогонов в связевую систему определяло раскрепление сжатых элементов основных несущих конструкций от потери устойчивости из плоскости рамы. В этом случае возможное превышение деформациями настила нормативных значений в процессе эксплуатации практически не влияло на несущую способность всей конструктивной системы покрытия, т. е. расчет по [6, 7, 10] давал удовлетворительные результаты. Таким образом, при проектировании беспрогонных покрытий со значительными пролетами профилированных настилов требуется более тщательный подход к оценке его напряженно-деформированного состояния, заложенный в расчетной методике [11].

Проанализируем результаты расчета СПН на конкретном примере, основываясь на расчетных подходах, изложенных в СП 294.1325800.2017 [10] и СП 260.1325800 [11]. Рассмотрим покрытие производственно-складского комплекса с фермами из гнутых сварных замкнутых профилей, распложенных с шагом 6 м, решение кровли – беспрогонное. Полное расчетное значение нагрузок на покрытие составляет 3 кПа, включая постоянную (0,4 кПа) и снеговую (2,17 кПа) нагрузки, а также вес вентиляционного оборудования (0,39 кПа). Нормативная нагрузка на покрытие составила 2,2 кПа. Стальной профилированный лист рассчитывается по 2-пролетной расчетной схеме (рис. 5).

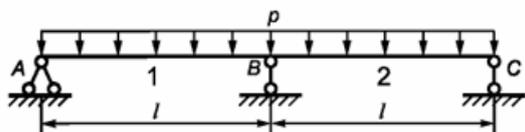


Рис. 5. Расчетная схема стального профилированного настила

Расчеты выполнены при размещении СПН широкими полками вверх (рис. 6), т. е. при изгибе в пролетном сечении профилированных листов сжаты широкие полки, в опорном сечении сжаты узкие полки. Геометрические параметры СПН соответствуют ГОСТ 24045-2016 [9]. Ширина опоры – верхнего пояса стропильной фермы – составляет 140 мм.

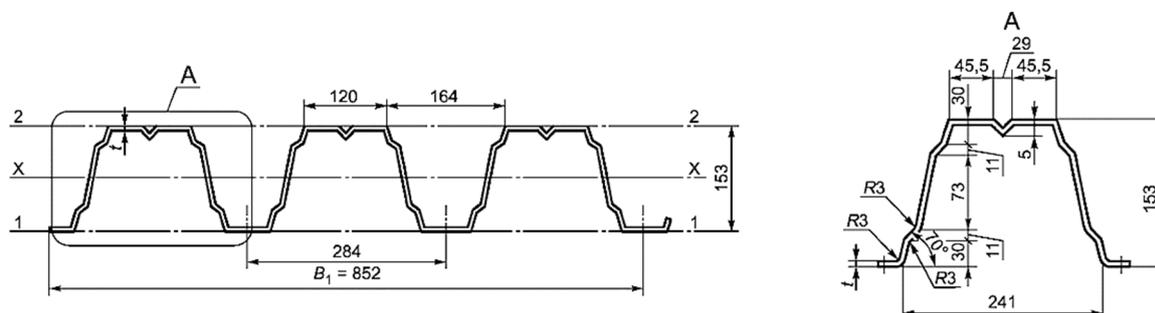


Рис. 6. Геометрические размеры профиля Н153-850 [9]

Результаты последовательного подбора сечения СПН с процентами использования по первой и второй группам предельных состояний согласно требованиям СП 294.1325800.2017 [10] сведены в табл. 1, результаты расчета по методике СП 260.1325800.2020 [11] приведены в табл. 2 (красным цветом показаны % использования, выходящие за предельно допустимые значения).

Таблица 1

Результаты расчета СПН по методике СП 294.1325800.2017 [10]

Марка стали	Марка СПН ГОСТ 24045	Результаты расчета по 1-й группе предельных состояний					% использования по прогибам (2-я группа пред. состояний)
		% использования пролетного сечения СПН		% использования опорного сечения СПН			
		по нормальным напряжениям	по устойчивости стенки	по нормальным напряжениям	по касательным напряжениям	по устойчивости стенки	
250	Н114-750-0,8	110,4 %	133,1 %	110,4 %	11,3 %	93,7 %	83,10 %
250	Н114-750-0,9	98,5 %	111,7 %	98,5 %	10,1 %	78,6 %	70 %
250	Н114-750-1,0	88,6 %	95,3 %	88,6 %	9,1 %	67,1 %	67 %

Таблица 2

Результаты расчета СПН по методике СП 260.1325800.2020[11]

Марка стали	Марка СПН ГОСТ 24045	Результаты расчета по 1-й группе предельных состояний			% использования по прогибам (2-я группа пред. состояний)
		% использования пролетного сечения СПН		% использования опорного сечения СПН	
		по нормальным напряжениям	по нормальным напряжениям	по касательным напряжениям	
250	Н114-750-1,0	80 %	150 %	66 %	97 %
250	Н153-850-1,0	127 %	170 %	75 %	110 %
280	Н153-850-1,2	95 %	133 %	50 %	90 %
320	Н153-850-1,2	82 %	116,7 %	43 %	89 %
320	Н153-850-1,5	65 %	93 %	29 %	68 %

Анализ результатов расчетов (табл. 1 и 2) показал, что для опорного сечения профилированного листа Н114-750-1 из стали марки 250, подобранного по СП 294 [10], условие прочности по нормальным напряжениям с учетом закритической работы полок и стенок профиля по

требованиям СП 260 [11] не выполняется со значительными перенапряжениями, составляющими 150 %. При попытке подбора профиля толщиной 1 мм из такой же стали, но большей высоты Н153-850-1, проверки прочности не выполняются не только для опорного, но и для пролетного сечений, что связано с увеличением гибкости стенок СПН, зависящей от соотношения высоты и толщины профиля и, как следствие, исключением большей части сжатой стенки при расчете редуцированных геометрических характеристик. В итоге для профилированного настила подобрано сечение Н153-850-1,5 (табл. 2) из стали марки 320 ($R_y = 310$ МПа).

Необходимо отметить, что в большинстве реальных проектов при подборе сечения используют табличные значения несущей способности настила, основанные на расчетных требованиях, не учитывающих потерю устойчивости части профиля при работе, и, кроме того, не указывают марку применяемой стали. При закупке профилированного листа, как правило, предпочтение отдают менее дорогому настилу из стали самой низкой марки по прочности, что, как показано выше, в случае наступления расчетной ситуации приводит к аварийным нарушениям работы конструкций покрытий.

Выводы и рекомендации

1. Участившиеся случаи обрушения покрытий связаны, кроме прочего, с неправильной оценкой напряженно-деформированного состояния кровельных настилов.

2. Расчеты по СП 294.1325800.2017, в котором при оценке прочности используется полное сечение элемента, завышают его несущую способность и приводят к недостоверной оценке НДС профилированных листов, что особенно опасно при значительных расстояниях (4 м и выше) между опорными креплениями и включении СПН в работу связевой системы. Данной методикой и разработанными на ее основе таблицами можно пользоваться только для предварительного назначения профиля листа, который затем должен быть подтвержден расчетами по введенным в 2020 г. нормам для тонкостенных профилей СП 260.1325800.2020.

3. СП 260.1325800.2020 основывается на расчете стальных профилированных листов как тонкостенных оболочек, в которых потеря устойчивости отдельными сжатыми элементами сечения может наступить до достижения напряжениями предела текучести, что однако не приводит к потере несущей способности элемента в целом. Такой подход к проектированию СПН повышает надежность конструктивных решений покрытий.

4. Отсутствие указания марок сталей в проектах является недопустимой ошибкой, которая может повлечь потерю несущей способности настила в стадии эксплуатации.

Библиографический список

1. Металлические конструкции: в 3 т. Т. 2. Стальные конструкции зданий и сооружений (справочник проектировщика) / Под общ. ред. заслуж. строителя РФ, лауреата госуд. премии СССР В. В. Кузнецова (ЦНИИпроектстальконструкция им. Н. П. Мельникова). – М.: АСВ, 1998. – 512 с.

2. Дебабов А. Падал прошлогодний снег // Кровли [интернет-издание]. – Март, 2010. – Режим доступа: <https://krovlirussia.ru/rubriki/working/padal-proshlogodnij-sneg>.

3. Надежность коммерческих и промышленных кровель // Промышленные страницы Сибири. – 2013. – № 75 // Единый промышленный портал Сибири [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://epps.ru/journal/detail.php?id=885&ysclid=m6oonyf5mo942570727>.

4. Случай обрушения кровли на предприятиях в России в 2011–2018 годах // РИА Новости, 17.12.2018 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://ria.ru/20181217/1548097241.html?ysclid=m6ooseo2po398781615>.

5. Почему обрушаются кровли? // Стройтрэйдинг: проектно-строительная компания [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://stroy-trading.ru/about/news/262-Pochemu-obrushayutsya-krovli?ysclid=m6om6fecau857318243>.

6. Рекомендации по применению стальных профлированных настилов нового сортамента в утепленных покрытиях зданий. – М.: ЦНИИПСК им. Н. П. Мельникова, 1985. – 35 с.
7. СТО 0043-2014. Настилы стальные профилированные для покрытий зданий и сооружений: проектирование, изготовление, монтаж. – М.: ЦНИИПСК им. Н. П. Мельникова, 1985. – 35 с.
8. СП 16.13330.2017. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. Стальные конструкции. – М.: Минстрой России, 2017. – 140 с.
9. СП 294.1325800.2017. Стальные конструкции. Правила проектирования. – М.: Минстрой России, 2017. – 158 с.
10. ГОСТ 24045-2016. Профили стальные листовые гнутые с трапециевидными гофрами для строительства. Технические условия. – М.: Стандартиформ, 2016. – 21 с.
11. СП 260.1325800.2016. Конструкции стальные тонкостенные из холодногнутой оцинкованной профилей и гофрированных листов. Правила проектирования. – М.: Минстрой России, 2016. – 124 с.
12. ГОСТ Р 58901-2020. Профили стальные листовые гнутые с трапециевидными гофрами для строительства. Методика расчета несущей способности. – М.: Стандартиформ, 2020. – 23 с.
13. СП 20.13330.2016. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*. – М.: Минстрой России, 2016. – 80 с.

References

1. Metal structures. In 3 volumes. Vol. 2. Steel structures of buildings and structures (designer's handbook) / Under the general editorship of Honored Builder of the Russian Federation, laureate of the USSR State Prize V.V. Kuznetsov (TsNIIproektstalkonstruksiya named after N.P. Melnikov) M.: ASV Publishing House, 1998. 512 p.
2. Debabov A. Last year's snow fell. Roofs.March, 2010. [Online publication]. Access mode: <https://krovliurussia.ru/rubriki/working/padal-proshlogodnij-sneg>.
3. Reliability of commercial and industrial roofs. Industrial Pages of Siberia. No. 75, April 2013. Unified Industrial Portal of Siberia [Electronic resource]. Access mode: <https://epps.ru/journal/detail.php?id=885&ysclid=m6oonyf5mo942570727>.
4. Cases of roof collapse at enterprises in Russia in 2011-2018. RIA News, 12.17./2018. [Electronic resource]. Access mode: <https://ria.ru/20181217/1548097241.html?ysclid=m6oo-seo2po398781615>.
5. Why do roofs collapse? [Electronic resource]. Access mode: <https://stroy-trading.ru/about/news/262-Pochemu-obrushayutsya-krovli?ysclid=m6om6fecau857318243>.
6. Recommendations for the use of new range of profiled steel decking in insulated building roofs. M.: TsNIIPSK named after N.P. Melnikov, 1985. 35 p.
7. Organization Standard 0043-2014. Profiled steel decking for bilding and structure roofs: design, manufacture, installation. M.: TsNIIPSK named after N. P. Melnikov, 1985. 35 p.
8. Set of Rules: SP 16.13330.2017. "SNiP II-23-81* Steel structures". Moscow: Ministry of Construction of Russia, 2017. 140 p.
9. Set of Rules: SP 294.1325800.2017 "Steel Structures. Design Rules" Moscow: Ministry of Construction of Russia, 2017. 158 p.
10. Federal Standard 24045-2016. Interstate Standard "Bent Steel Sheet Profiles with Trapezoidal Corrugations for Construction. Specifications". Moscow: Standartinform, 2016. 21 p.
11. Set of Rules 260.1325800.2016 Thin-walled Steel Structures from Cold-Bent Galvanized Profiles and Corrugated Sheets. Design Rules. Moscow: Ministry of Construction of Russia, 2017. 124p.
12. Federal Standard R 58901-2020. Bent steel sheet sections with trapezoidal corrugations for construction. Methodology for calculating the bearing capacity. M.: Standartinform, 2020. 23 p.

13. Set of Rules: SP 20.13330.2016. Loads and impacts. Updated version of SNiP 2.01.07-85*. M.: Ministry of Construction of Russia, 2016. 80 p.

CALCULATION OF PROFILED STEEL DECKINGS IN LIGHTWEIGHT BUILDING COVERINGS

S. Yu. Belyaeva¹, V. G. Sazykin², A. V. Lyashenko³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹ PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Metal and Wooden Structures, tel.: +7(909)217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

² Assistant Professor of the Department of Metal and Wooden Structures, tel.: +7(909)217-31-10, e-mail: vitalijsaz@vgasu.vrn.ru

³ Postgraduate Student of the Department of Technology, Organization of Construction, Expertise and Management of Real Estate, tel.: +7(962)326-29-24, e-mail: sanya.lyashenko.98@mail.ru

The article draws the attention of designers to the latest changes in approaches to the design of steel profiled decking, reflected in current regulatory documents, and clarifies the reading of standards. A comparative analysis of the calculation results using different methods is given, and the basic principles of designing steel profiled decking in lightweight building coverings are formulated.

Key words: steel profiled sheeting, strength, stability, stiffening elements, effective cross-section, reduced characteristics.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.074

DOI 10.36622/2219-1038.2025.45.2.007

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЗАМКНУТЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ ПРОЛЕТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ПОЛУБЕЗМОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

А. В. Конов¹, В. А. Козлов², М. А. Викулов³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹ Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(900)308-95-86, e-mail: kav.9@mail.ru

² Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30,
e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

³ Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: vikulovmiha@mail.ru

Оценивается возможность использования полубезмоментной теории оболочек для расчета замкнутых призматических тонкостенных пролетных систем. В соответствии с данной теорией получены разрешающие уравнения для напряжений и перемещений. Для проверки полученных результатов создана конечно-элементная модель оболочки. Дана оценка влияния деформации на напряженно-деформированное состояние оболочки. Дана оценка сходимости результатов, полученных аналитическим методом, с результатами расчета в МКЭ-комплексе.

Ключевые слова: полубезмоментная теория оболочек, тонкостенные конструкции поперечных сечений, деформация, замкнутые сечения, метод конечных элементов.

Введение. Тонкостенные пространственные системы, состоящие из пластинок и оболочек, начали широко использоваться в строительной отрасли еще в позапрошлом веке. Это обусловлено в значительной мере их экономическими преимуществами перед обычными стержневыми конструкциями. Тонкостенные сооружения, запроектированные с учетом их пространственной работы, являются более экономичными, чем их стержневые аналоги.

Однако следует отметить, что методы прочностных расчетов оболочек изучены еще мало. Обуславливается это не только более сложным используемым в расчетах математическим аппаратом, но и более трудоемким способом создания расчетных моделей в конечно-элементных комплексах. При этом очевидно, что без правильного представления о работе конструкций оболочек под нагрузкой невозможно создание рациональных и надежных сооружений. Поэтому теория расчета замкнутых призматических тонкостенных систем приобретает немаловажное практическое значение.

Одним из наиболее эффективных подходов к решению задачи определения НДС замкнутых и многозамкнутых тонкостенных оболочек является полубезмоментная теория, позволяющая значительно упростить расчеты, сохраняя при этом высокую точность результатов. Полубезмоментная теория находит широкое применение в проектировании мостовых, авиационных и других инженерных конструкций, где требуется учет как мембранных, так и изгибных усилий, но при этом необходимо минимизировать сложность расчетов.

В работе [7] полубезмоментная теория дополняется численными методами и программными комплексами, что позволяет повысить точность расчетов и расширить область ее применения. Это делает полубезмоментную теорию незаменимым инструментом для анализа сложных тонкостенных конструкций

На рис. 1 изображены примеры замкнутых призматических пролетных строений.



Рис. 1а. Замкнутая призматическая оболочка моста из сборного железобетона



Рис. 1б. Призматическая оболочка моста из стальных листов

1. Основные расчетные положения. В работе использовалась полубезмоментная теория, описанная в работах В. З. Власова [2], И. Ф. Образцова [1]. При выводе разрешающих уравнений были приняты следующие основные гипотезы:

- 1) оболочка упругая безмоментная в продольном направлении и моментная в поперечном;
- 2) по толщине оболочки материал несжимаем;
- 3) деформация оболочки происходит таким образом, что нормальный линейный элемент, перпендикулярный к срединной поверхности до деформации, остается линейным и нормальным к срединной поверхности после деформации (гипотеза Кирхгофа – Лява).

Первая гипотеза выдвинута в связи с тем, что рассматриваемые оболочки являются сравнительно длинными и существенное влияние на НДС в них оказывают нормальные и сдвигающие силы N_1 N_2 S и поперечные изгибающие моменты M_2 с соответствующими им срезающими силами Q_2 . [1] Эти компоненты изображены на рис. 2.

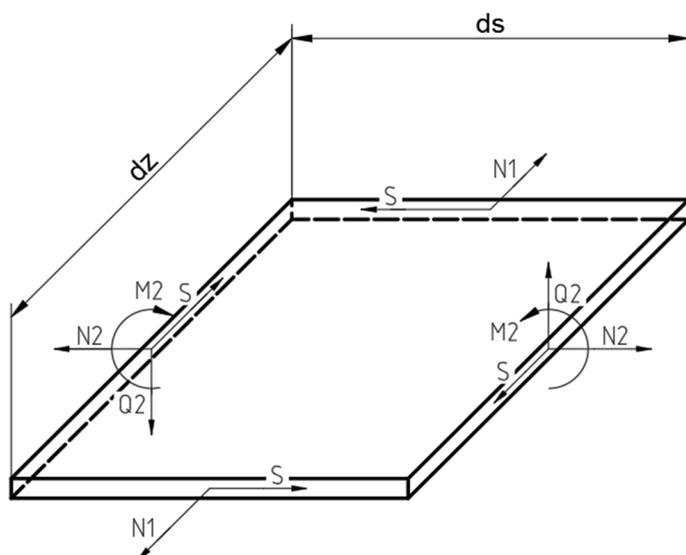


Рис. 2. Компоненты внутренних усилий

2. Основные уравнения метода В. З. Власова. Так как замкнутую оболочку можно представить в виде двумерного тела, дифференциальные уравнения перемещений этой оболочки будут зависеть от двух координат: продольной z и поперечной s . Обозначим продольное перемещение через $u(z, s)$, а поперечное через $v(z, s)$. Эти перемещения можно представить в виде конечного ряда [1–2]:

$$u(z, s) = \sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i(s); \tag{1}$$

$$v(z, s) = \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s), \tag{2}$$

где $U_i(z), V_k(z)$ – искомые продольные и поперечные перемещения соответственно, зависящие только от продольной координаты z ; $\varphi_i(s), \psi_k(s)$ – задаваемые функции, соответствующие искомым функциями $U_i(z), V_k(z)$ соответственно и зависящие только от поперечной координаты s .

Таким образом, дифференциальные уравнения теории оболочек в частных производных приводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Важно отметить, что функции $\varphi_i(s), \psi_k(s)$ подбираются в зависимости от сечения оболочки и ее НДС. Для прямоугольного однозамкнутого контура (рис. 3) под действием изгибающих и крутящих воздействий, полагая, что рассматриваемая оболочка обладает жестким недеформируемым контуром в плоскости поперечного сечения, выберем следующие функции [1–2]:

$$\varphi_1(s) = y(s), \varphi_2(s) = \pm \left[\left(\frac{d_2^2}{4} - x^2(s) \right) - cy(s) \right], \varphi_3(s) = x(s)y(s),$$

где $F_2 = d_2 \delta_2$ – площадь одного горизонтального пояса:

$$c = \frac{d_1 d_2^2 F_2}{6J_x},$$

J_x – момент инерции оболочки относительно оси X .

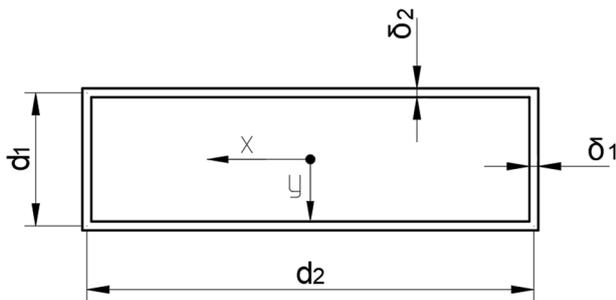


Рис. 3. Поперечное сечение оболочки

Функция $\varphi_1(s)$ представляет собой перемещение точек от изгиба, соответствующее закону плоских сечений; $\varphi_2(s)$ отвечает деформации поперечного сечения от изгиба. Аппроксимирующая функция $\varphi_3(s)$ соответствует обобщенной деформации при кручении.

$$\psi_1(s) = y'(s);$$

$$\psi_2(s) = h^*(s),$$

$h^*(s)$ – длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на соответствующую контурную пластину оболочки.

Функции $\psi_1(s)$ и $\psi_2(s)$ соответствуют контурному перемещению оболочки при поперечном изгибе и кручении соответственно. Эпюры аппроксимирующих функций представлены на рис. 4.

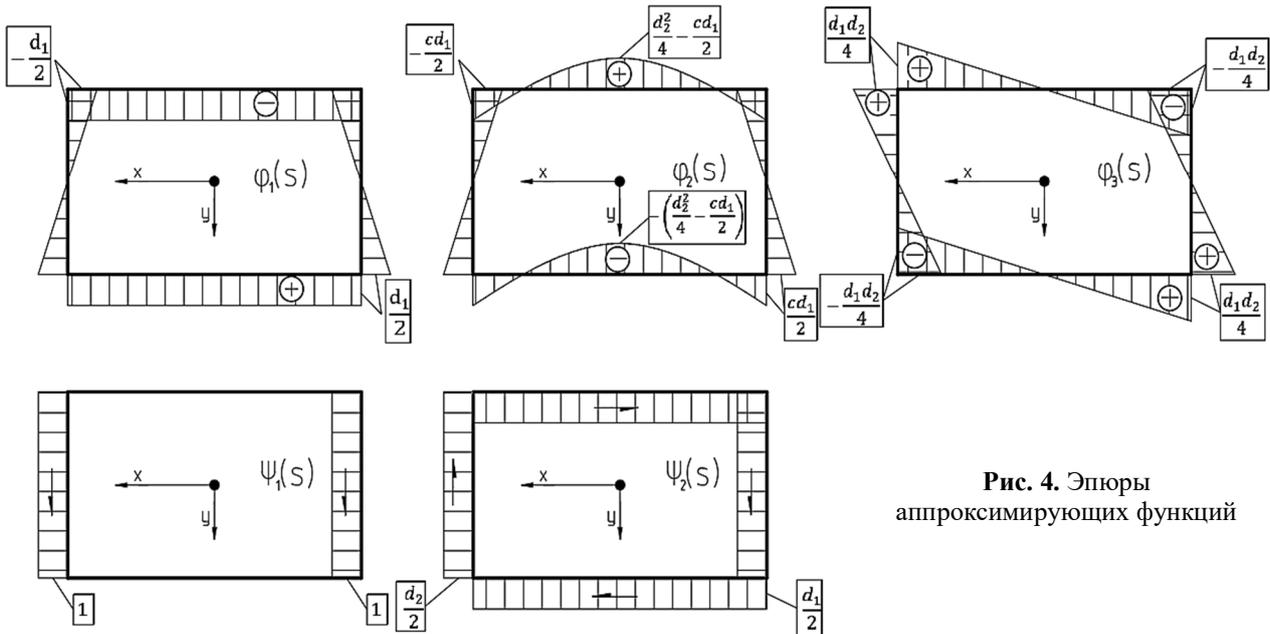


Рис. 4. Эпюры аппроксимирующих функций

3. Вывод основных разрешающих уравнений. В работе [1] получены дифференциальные уравнения изгиба (3) и кручения (4):

$$\begin{aligned}
 EJ_x U_1'' - 2GF_1 U_1 - 2GcF_1 U_2 - 2GF_1 V_1' + p_1 &= 0, \\
 EJ_{1\varphi} U_2'' - 2GcF_1 U_1 - Gb_{22} U_2 - 2GcF_1 V_1' + p_2 &= 0, \\
 2GF_1 U_1' + 2GcF_1 U_2' + 2GF_1 V_1'' + q &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 aU_3'' - b_1 U_3 - b_2 V_2' + p_3 &= 0, \\
 b_2 U_3 + b_1 V_2'' + m &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

где $F_1 = d_1 \delta_1$ – площадь одного вертикального пояса; E, G – модуль упругости и модуль сдвига соответственно;

$$\begin{aligned}
 a &= EJ_{2\varphi}, & b_1 &= \frac{1}{2} G(d_1^2 F_2 + d_2^2 F_1), \\
 b_2 &= \frac{1}{2} G(d_2^2 F_1 - d_1^2 F_2), & b_{22} &= \frac{2}{3} d_2^2 F_2 + 2c^2 F_1,
 \end{aligned}$$

$J_{1\varphi}, J_{2\varphi}$ – бимомент инерции при изгибе и кручении соответственно.

Свободные члены q, m, p_i представляют собой обобщенные внешние поперечные (q, m) и продольные (p_i) погонные силы. В дальнейшем положим следующее: обобщенные продольные погонные силы приняты равными нулю; обобщенная погонная сила, вызывающая поперечный изгиб, принята распределенной в соответствии с линейным законом изменения по длине; обобщенная погонная сила, вызывающая кручение, принята равномерно распределенной по длине. Аналитически это можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_2 = p_3 = 0, \\
 q(z) &= q_1 + \frac{(q_2 - q_1)(l - z)}{l}; \\
 q_1 &= const, & q_2 &= const, & m(z) &= const.
 \end{aligned}$$

Схемы обобщенных поперечных погонных нагрузок показаны на рис. 5.

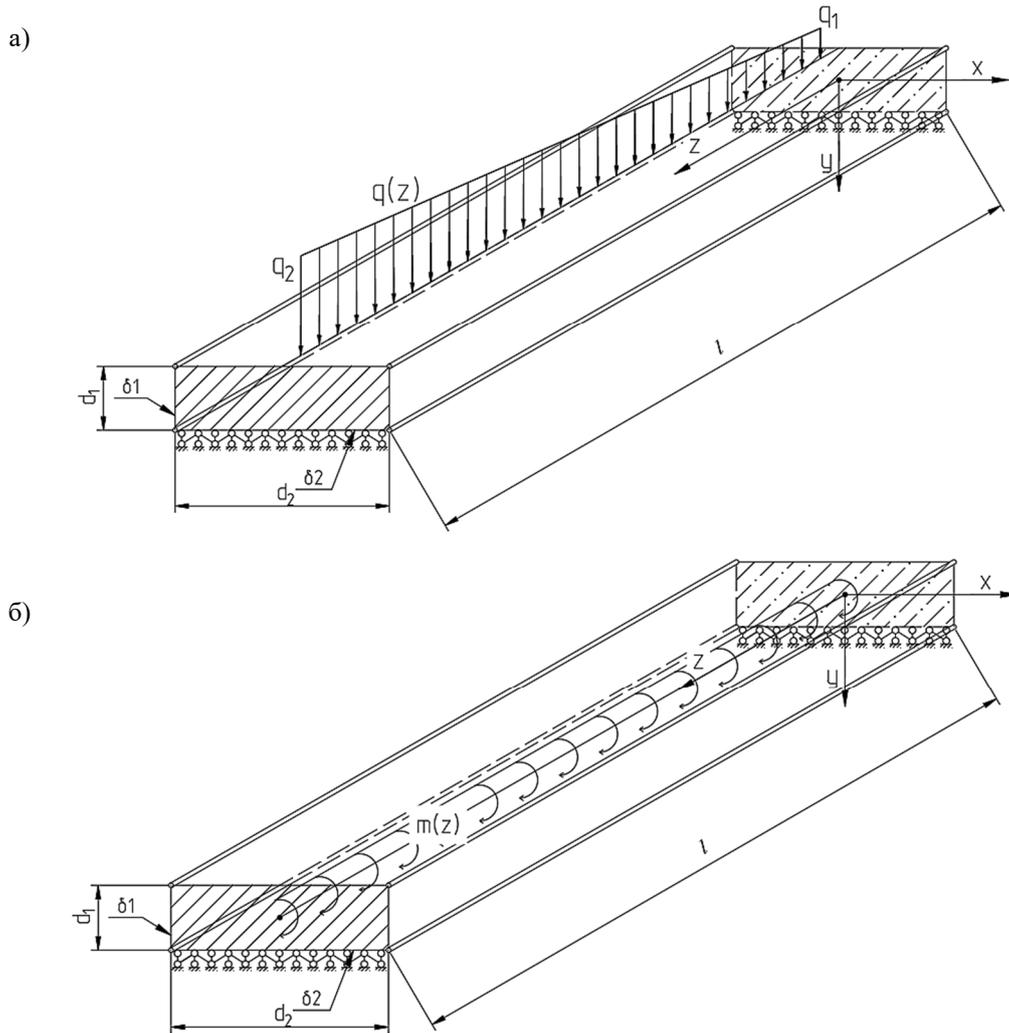


Рис. 5. Схемы обобщенных поперечных изгибающих (а) и крутящих нагрузок (б)

Решая системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4), получим:

$$\begin{aligned}
 U_1(z) &= \frac{q_2 z^3}{6EJ_x} - \frac{(q_2 - q_1)z^4}{24lEJ_x} + \frac{c_1 z^2}{2EJ_x} + \frac{c_2 z}{EJ_x} + \frac{c_3}{EJ_x}, \\
 U_2(z) &= c_4 e^{k_{изг} z} + c_5 e^{-k_{изг} z} - \frac{c_1 c}{EJ_{1\varphi} k_{изг}^2} - \frac{q_2 c z}{EJ_{1\varphi} k_{изг}^2} + \frac{c(q_2 - q_1)z^2}{2k_{изг}^2 lEJ_{1\varphi}} + \frac{c(q_2 - q_1)}{k_{изг}^4 lEJ_{1\varphi}}, \\
 V_1(z) &= \frac{1}{2GF_1} \left(\frac{q_2 z^2}{2} - \frac{(q_2 - q_1)z^3}{6l} \right) + \frac{c_1 z}{2GF_1} - \frac{c_1 z^3}{6EJ_x} - \frac{c_2 z^2}{2EJ_x} - \frac{c_3 z}{EJ_x} - \\
 &- \frac{1}{EJ_x} \left(\frac{q_2 z^4}{24} - \frac{(q_2 - q_1)z^5}{120l} \right) - \frac{c c_4 e^{k_{изг} z}}{k_{изг}} + \frac{c c_5 e^{-k_{изг} z}}{k_{изг}} + \frac{c^2 c_1 z}{k_{изг}^2 EJ_{1\varphi}} + \\
 &+ \frac{c^2 q_2 z^2}{2k_{изг}^2 EJ_{1\varphi}} - \frac{c^2 (q_2 - q_1)z^3}{6k_{изг}^2 lEJ_{1\varphi}} - \frac{c^2 (q_2 - q_1)z}{k_{изг}^4 lEJ_{1\varphi}} + c_6;
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$U_3(z) = c_{02} + c_{03} k_{кр} \operatorname{ch}(kz) + c_{04} k_{кр} \operatorname{sh}(kz) + \frac{mz b_2}{ab_1 k_{кр}^2}, \tag{6}$$

$$V_2(z) = -\frac{b_1}{b_2}(c_{01} + c_{02}z) - \frac{b_2}{b_1}[c_{03} \operatorname{sh}(k_{\text{кр}}z) + c_{04} \operatorname{ch}(k_{\text{кр}}z)] - \frac{mz^2}{2ak_{\text{кр}}^2} + \frac{m}{k_{\text{кр}}^2 b_1},$$

где

$$k_{\text{изг}} = \sqrt{\frac{2d_2^2 F_2}{3\gamma J_{1\varphi}}}, \quad k_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{b_1^2 - b_2^2}{ab_1}}$$

упругая характеристика изгиба и кручения соответственно; $c_1 \dots c_6, c_{01} \dots c_{04}$ – константы интегрирования.

Зная перемещения каждой точки на контуре, определяются напряжения:

$$\sigma(z, s) = E \left(U_1(z) \varphi_1(s) + U_2(z) \varphi_2(s) + U_3(z) \varphi_3(s) \right); \quad (7)$$

$$\tau(z, s) = G \left(U_1(z) \varphi_1 + U_2(z) \varphi_2 + U_3(z) \varphi_3 + V_1(z) \psi_1(s) + V_2(z) \psi_2(s) \right). \quad (8)$$

4. Определение констант интегрирования с использованием граничных условий.

В работе [2] даны граничные условия для однопролетной коробчатой оболочки, шарнирно опертой по краям:

$$U_i(0) = U_i(l) = V_j(0) = V_j(l) = 0; \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2.$$

Для данных систем уравнений и граничных условий можно вычислить константы интегрирования аналитически, получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(q_2 - q_1)l}{6} - \frac{q_2 l}{2}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = l^3 \left(\frac{q_2}{45} + \frac{7q_1}{360} \right), \\ c_4 &= \frac{q_2 c}{EJ_{1\varphi} k^3} - \frac{c}{EJ_{1\varphi} k^3 (e^{k^*l} - e^{-k^*l})} \left(q_2 (e^{k^*l} - 1) + (q_2 - q_1) \right), \\ c_5 &= -\frac{c}{EJ_{1\varphi} k^3 (e^{k^*l} - e^{-k^*l})} \left(q_2 (e^{k^*l} - 1) + (q_2 - q_1) \right), \quad c_6 = \frac{q_2 c^2}{EJ_{1\varphi} k^4}, \\ c_{01} &= \frac{mb_2^3}{ab_1^3 k^4} + \frac{mb_2}{k^2 b_1^2}, \quad c_{02} = -\frac{mlb_2}{2ak^2 b_1}, \\ c_{03} &= \frac{mb_2}{ab_1 k^4 \operatorname{sh}(kl)} (\operatorname{ch}(kl) - 1), \quad c_{04} = -\frac{mb_2}{ab_1 k^4}. \end{aligned}$$

5. Пример расчета. Данная методика реализована в ПК «MathCad», с ее помощью была произведена серия расчетов, в которых использовались две схемы нагружений.

Схема № 1: пролетное сооружение нагружено поперечной изгибающей погонной силой по линейному закону, $q_1 = 50$ кН/м, $q_2 = 200$ кН/м. Крутящая нагрузка отсутствует.

Схема № 2: пролетное сооружение нагружено поперечной изгибающей погонной силой равномерно, $q_1 = q_2 = 100$ кН/м. Крутящая нагрузка составляет 100 кНм/м.

Для каждой из схем была рассмотрена оболочка со следующими характеристиками: $d_1 = 2,2$ м, $d_2 = 4$ м, $\delta_1 = \delta_2 = 1,9$ см. Длина пролета – 6, 12, 50 м. Результаты расчета представлены на рис. 6.

Для проверки полученных результатов были произведены расчеты в конечно-элементном комплексе «ЛИРА-САПР» (рис. 7, 8, 9). Элементы панелей замоделированы с помощью КЭ № 44 (универсального четырехугольного КЭ оболочки). Нагрузка на конструкцию прикладывалась к верхней панели.

Для обеспечения условия недеформируемости контура сечения оболочка была подкреплена поперечными ребрами.

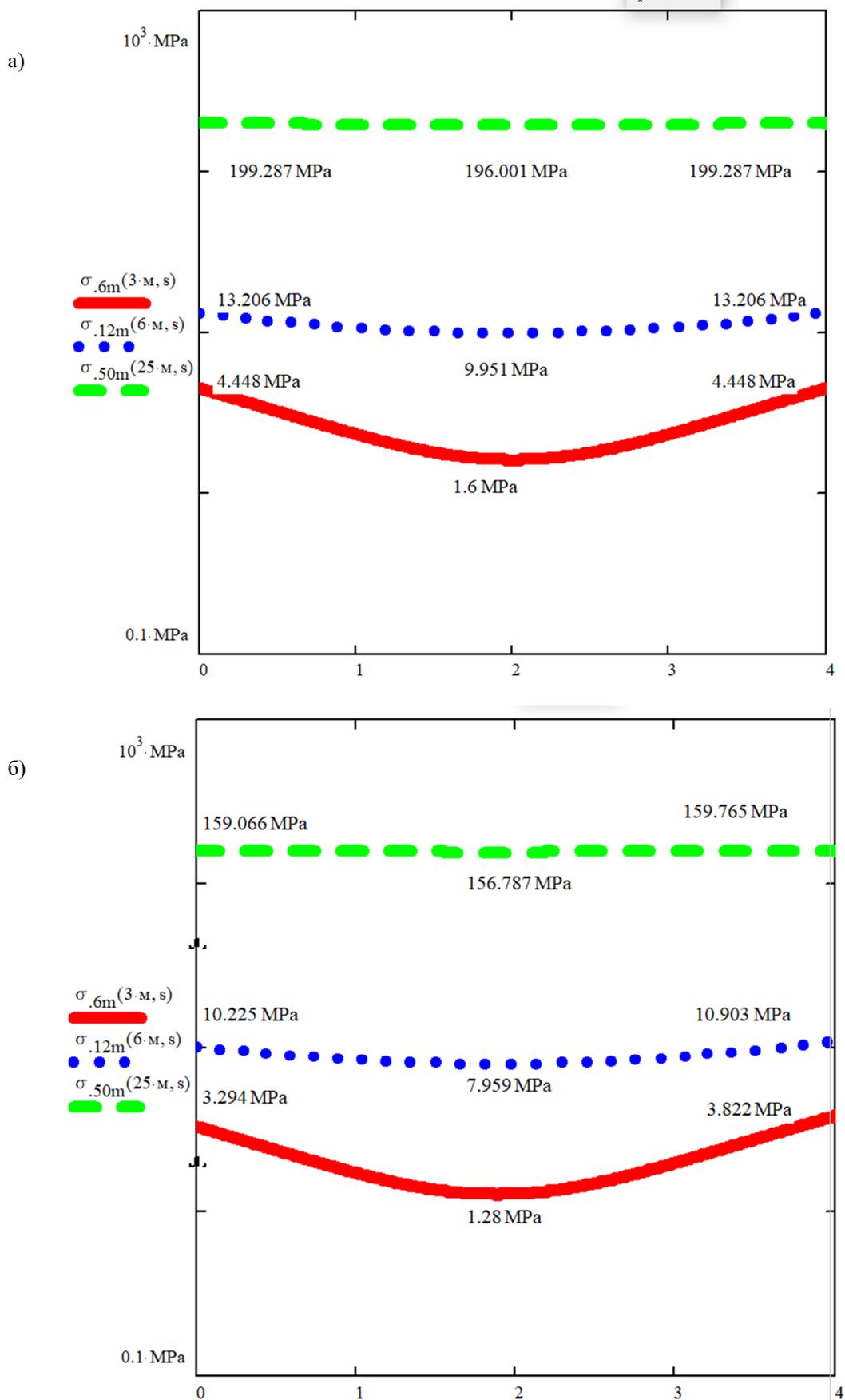


Рис. 6. Графики нормальных напряжений для загрузки № 1 (а) и № 2 (б) в нижней панели в середине пролета для трех значений l (масштаб по оси ординат логарифмический)

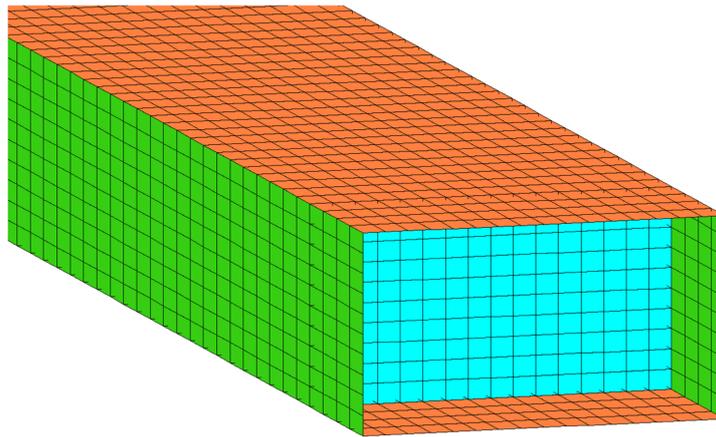


Рис. 7. Фрагмент конечно-элементной модели

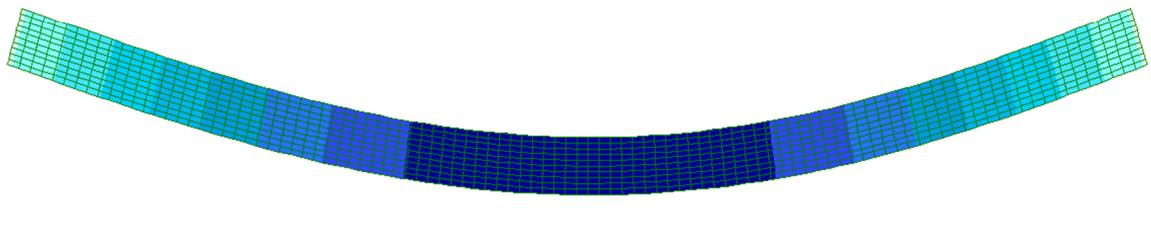
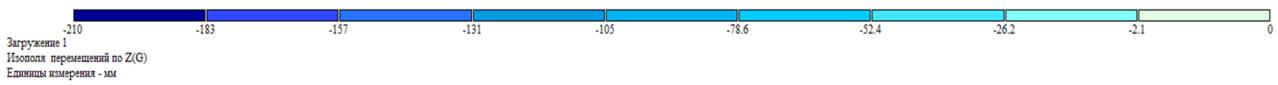


Рис. 8. Деформированный вид оболочки пролетом 50 м с изополями вертикальных перемещений (вид сбоку)

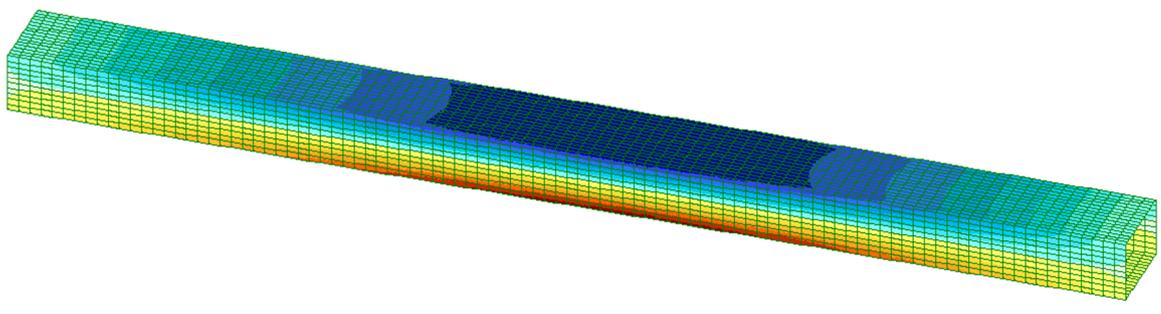
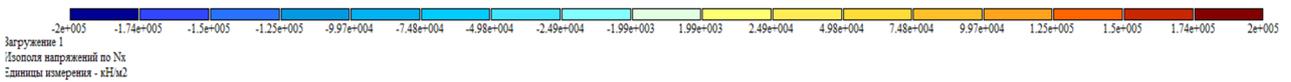


Рис. 9. Оболочка пролетом 50 м с изополями нормальных напряжений

Мозаики нормальных напряжений в середине пролета представлены на рис. 10. Результаты расчетов представлены в таблице.

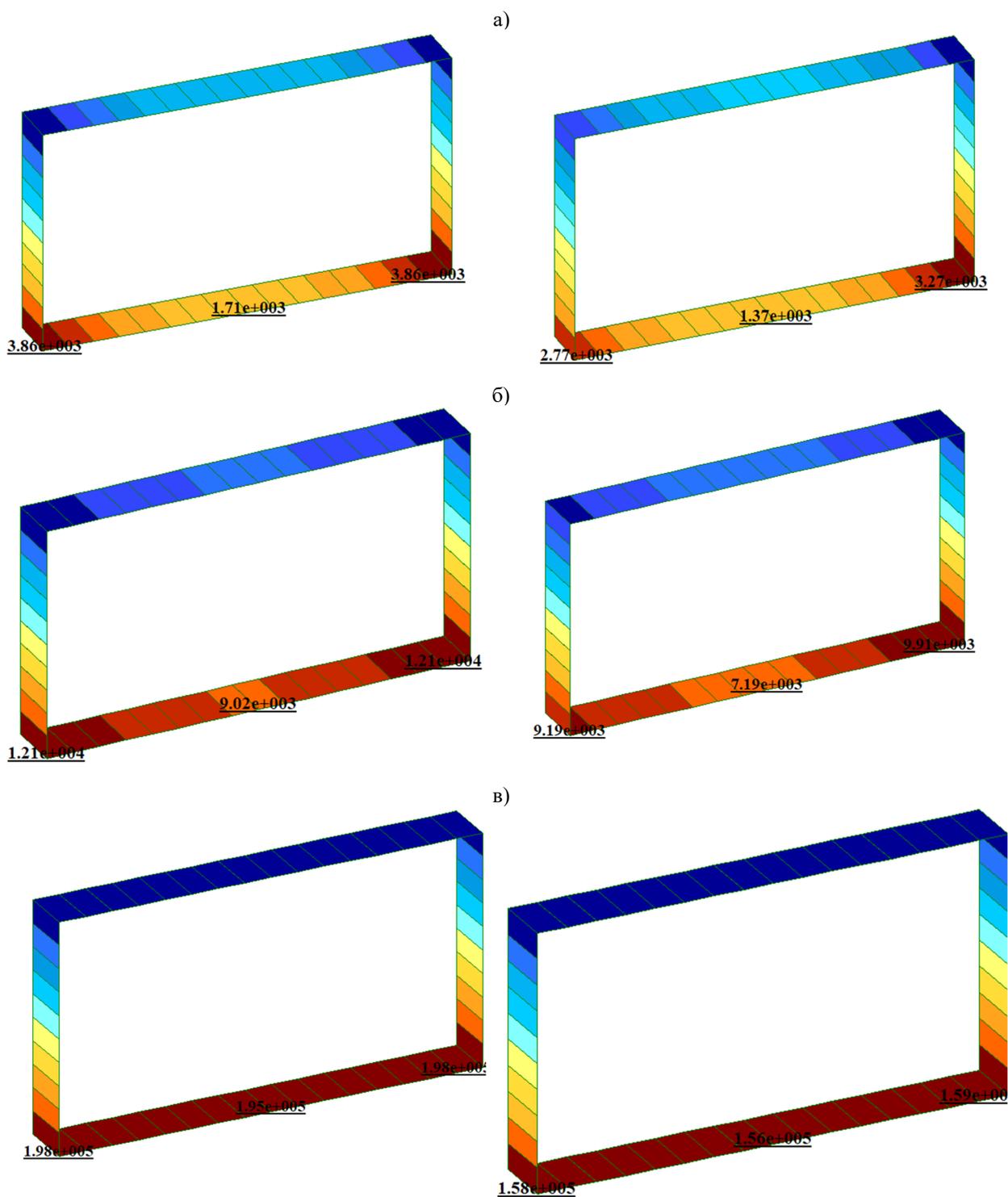


Рис. 10. Мозаика нормальных продольных напряжений (кПа) при пролете 6 (а), 12 (б) и 50 (в) м.
Для загрузкиения № 1 – слева, для загрузкиения № 2 – справа

Полученные результаты имеют хорошую сходимость. Разница при расчете деформаций составила около 14 %, при расчете нормальных напряжений – чуть более 9 %.

Также можно заметить, что влияние депланационных смещений оказывает наибольшее влияние для относительно небольших пролетов. При пролете 6 м разница между максимальным и минимальным по модулю напряжением в границах полки составила (в зависимости от схемы загрузкиения) 178–198 %, тогда как для пролета 50 м – не более 2 %.

Таблица

Сравнительная таблица результатов расчетов численным и аналитическим методом

Номер загрузки	Пролет, м	Полубезмоментная теория				МКЭ-расчет				Расхождение с МКЭ, %	
		Прогиб грани, мм		Напряжение на нижней грани, МПа		Прогиб грани, мм		Напряжение на нижней грани, МПа		Прогиб	Напряжение
		Лев.	Прав.	В углу (max)	В середине пояса	Прав.	Лев.	В углу (max)	В середине		
№ 1	6	0,16		4,45	1,60	0,14		3,86	1,71	12,50	7,93
	12	1,21		13,21	9,95	1,04		12,10	9,02	14,05	8,81
	50	231,00		199,29	196,00	210,00		198,00	195,00	9,09	0,58
№ 2	6	0,1	0,15	3,82	1,28	0,09	0,13	3,27	1,37	12,00	9,41
	12	0,87	1,06	10,90	7,96	0,73	0,93	9,91	7,19	13,99	9,54
	50	183,05	186,31	159,77	156,79	166,0	169,0	159,00	156,00	9,30	0,49

Выводы. Предложена методика аналитической оценки НДС замкнутой призматической оболочки на основе полубезмоментной теории. В отличие от известных работ [1, 2] были использованы другие граничные условия.

На основе работ И. Ф. Образцова и В. З. Власова получены разрешающие уравнения для разрезной пролетной тонкостенной конструкции, в том числе под действием линейного закона распределения нагрузки с ненулевой начальной и конечной интенсивностью.

Данная методика реализована в виде программы в ПК «MathCad». Была произведена серия расчетов для разных способов нагружения и различных пролетов.

Дана оценка влияния деформации на НДС оболочки для разных длин пролетов.

Для проверки полученных результатов была создана расчетная модель в МКЭ-комплексе «ЛИРА-САПР». Полученные результаты показали достаточно хорошую сходимость, что говорит о том, что данной методикой можно пользоваться для определения НДС замкнутых тонкостенных пролетных систем под действием изгибающей и крутящей нагрузки.

Библиографический список

1. Образцов И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 1966. – 392 с.
2. Власов В. З. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.
3. Корнеев М. М. Стальные мосты. Пособие по проектированию: в 3 т. Т. 3. – К.: Ультрадрук, 2019. – 560 с.
4. Козлов А. В. Расчет мостовых конструкций с использованием ПК Лира-САПР для начинающих пользователей: учеб. пособие. – Воронеж, 2017. – 223 с.
5. Образцов И. Ф. Строительная механика скошенных тонкостенных систем / И. Ф. Образцов, Г. Г. Онанов. — М.: Машиностроение, 1973. — 660 с.
6. Галимов К. З., Паймушин В. Н. Теория оболочек сложной геометрии. — Казань: КГУ, 1985. — 164 с.
7. Черников А. В., Козлов В. А. Определение напряженно-деформированного состояния гофрированных водопропускных труб с эксплуатационными дефектами на основе полубезмоментной теории оболочек // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 2 (29). – С. 12–28.
8. Новиковский Е. А. Работа в системе MathCAD: учеб. пособие. – Барнаул: Типография АлтГТУ, 2013. – 114 с.

9. Altenbach J., Kissing W. (2020). Statische und dynamische Analyse für prismatische und nichtprismatische Kastenträger // Technische Mechanik – European Journal of Engineering Mechanics. – 7 (1). – P. 37–41.
10. Altenbach H., Altenbach J. and Matzdorf V. (2019). Grundlagen einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie für dünnwandige, anisotrope Konstruktionen // Technische Mechanik – European Journal of Engineering Mechanics. – 11(1). – P. 23–35.

References

1. Obraztsov I. F. Variational methods for calculating thin-walled aircraft structures. M.: Mashinostroenie, 1966. 392 p.
2. Vlasov V. Z. Thin-walled spatial systems. M.: Gosstroyizdat, 1958. 502 p.
3. Korneev M. M. Steel bridges. Design manual. Vol. 3. K.: Ultradruk, 2019. 560 p.
4. Kozlov A. V. Calculation of bridge structures using the Lira-SAPR PC for novice users: tutorial. Voronezh, 2017. 223 p.
5. Obraztsov I. F., Onanov G. G. Structural mechanics of beveled thin-walled systems. M.: Mashinostroenie, 1973. 660 p.
6. Galimov K. Z., Paimushin V. N. Theory of shells of complex geometry. Kazan: KSU, 1985. 164 p.
7. Chernikov A. V., Kozlov V. A. Determination of the stress-strain state of corrugated culverts with operational defects based on the semi-momentless shell theory. Structural Mechanics and Structures. No. 2(29). 2021. Pp. 12–28.
8. Novikovskiy E. A. Working in the MathCAD system: tutorial. Barnaul: AltSTU Printing House, 2013. 114 p.
9. Altenbach J., Kissing W. Statistical and dynamic analysis of prism-based and non-prismatic cast iron. Technische Mechanik. European Journal of Engineering Mechanics. No.7(1). 2020. Pp. 37–41.
10. Altenbach H., Altenbach J. and Matzdorf V. Grundlagen einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie für dünnwandige, anisotrope Konstruktionen. Technische Mechanik. European Journal of Engineering Mechanics. No. 11(1). 2019. Pp. 23–35.

STRESS-STRAIN STATE OF CLOSED PRISMATIC THIN-WALLED SYSTEMS IN SPAN STRUCTURES BASED ON SEMI-MOMENTLESS SHELLS THEORY

A. V. Konov¹, V. A. Kozlov², M. A. Vikulov³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹ Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(900)308-95-86, e-mail: kav.9@mail.ru

² Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: vakozlov@vgasu.ru

³ PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: vikulovmiha@mail.ru

This paper evaluates the possibility of using the semi-momentless theory of shells to calculate closed prismatic thin-walled span systems. In accordance with this theory, solving equations for stresses and displacements are obtained. A finite element shell model has been created to verify the results obtained. An assessment of the effect of warping on the SSS of the shell is given. The convergence of the results obtained by the analytical method with the calculation results in the FEM complex is estimated.

Key words: semi-momentless theory of shells, thin-walled cross-sectional structures, warping, closed sections, FEM.

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

УДК 624.139.6

DOI 10.36622/2219-1038.2025.45.2.008

ИССЛЕДОВАНИЯ ДАВЛЕНИЯ МОРОЗНОГО ПУЧЕНИЯ МЕРЗЛОГО ГРУНТА В ЛАБОРАТОРНЫХ УСЛОВИЯХ

В. Х. Ким¹, М. С. Ким²Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов,
тел: +7(920)423-90-78; e-mail: vyachhkim@yandex.ru

² Канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов,
тел: +7(920)468-91-36; e-mail: marskim@yandex.ru

Статья посвящена результатам лабораторных исследований развития давления морозного пучения при промерзании грунта в замкнутом объеме. Изучение силовых воздействий пучинистых грунтов на сооружения приобретают в настоящее время особое значение в связи с интенсивным освоением арктической зоны России. Проведены исследования особенностей развития давления морозного пучения глинистых и песчаных грунтов при одностороннем и всестороннем промерзании в замкнутом объеме в зависимости от степени их водонасыщения, температурного режима и возможных деформаций. Выявлено различие в механизме формирования давления морозного пучения в песчаных и глинистых грунтах.

Ключевые слова: промерзающий грунт, давление морозного пучения, лабораторные исследования.

Введение. Условия промерзания пучинистого грунта в замкнутом объеме возникают в случае, когда мерзлый или замороженный грунт соприкасается с конструкцией, являющейся временным источником тепла. Таким источником тепла может служить бетон, при твердении которого выделяется экзотермическое тепло, в результате чего мерзлый грунт на контакте с конструкцией сначала оттаивает, а затем вновь промерзает. При этом развиваются процессы морозного пучения, приводящие к появлению дополнительного давления на конструкцию. Подобное явление может происходить, например, при устройстве буроопускных свай в многолетнемерзлых грунтах при замерзании раствора в пазухе свай [1].

К настоящему времени по проблеме морозного пучения накоплен значительный материал и выполнены важные экспериментальные и теоретические исследования, которые нашли отражение в работах [1–6]. Значительно менее изучены вопросы исследования механизма и динамики развития криогенных процессов, происходящих в грунтах, промерзающих в замкнутом объеме.

Целью и задачей данного исследования является установление закономерностей развития давления морозного пучения при промерзании пучинистого грунта в замкнутом объеме.

Экспериментальная установка для лабораторных исследований давления морозного пучения грунта в замкнутом объеме. Для исследования закономерностей развития давления морозного пучения грунта в замкнутом объеме в лабораторных условиях было поставлено свыше 50 опытов с песком средней крупности и пылеватой глиной. Гранулометрический состав и физические свойства исследуемых грунтов в соответствии с [7] приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Гранулометрический состав исследуемых грунтов

Наименование грунта	Содержание фракций, мм						
	>0,5	0,5–0,25	0,25–0,1	0,1–0,05	0,05–0,01	0,01–0,005	<0,005
Песок средней крупности	36,0	59,4	3,9	0,1	0,6	—	—
Глина пылеватая	0,6	2,4	4,2	5,8	41,8	15,0	30,2

Таблица 2

Физические характеристики исследуемых грунтов

Наименование грунта	Влажность на границе текучести W_L , %	Влажность на границе раскатывания (пластичности) W_P , %	Число пластичности I_P , %	Плотность частиц грунта ρ_s , г/см ³	Плотность грунта	
					минимальная ρ_{min} , г/см ³	максимальная ρ_{max} , г/см ³
Песок средней крупности	—	—	—	2,68	1,60	1,73
Глина пылеватая	38	17	21	2,70	—	—

Описанные в настоящей работе исследования проводились на экспериментальной установке, состоящей из камер для размещения образцов, датчиков давления и температуры, индикаторов часового типа, теплоизоляции, нагревательных элементов, комплекса регистрирующей аппаратуры и необходимых средств автоматики для работы нагревательных элементов в заданных режимах. Исследовались образцы грунта цилиндрической формы диаметром 0,2 м и высотой 0,3 м. Камеры для размещения образца представляли собой металлический стакан с приваренным дном. Съемная металлическая крышка, усиленная ребрами жесткости, крепилась к фланцу верхнего звена трубы (рис. 1).

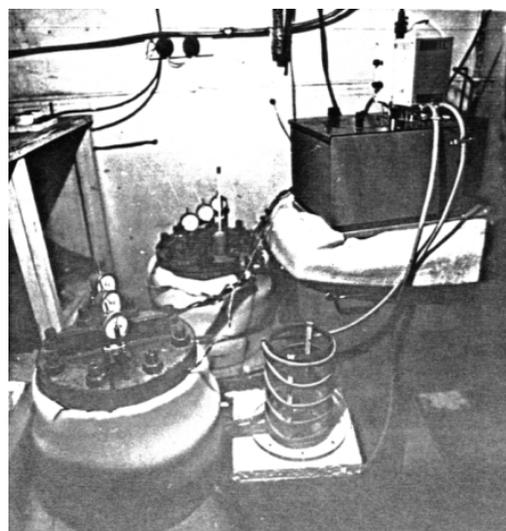
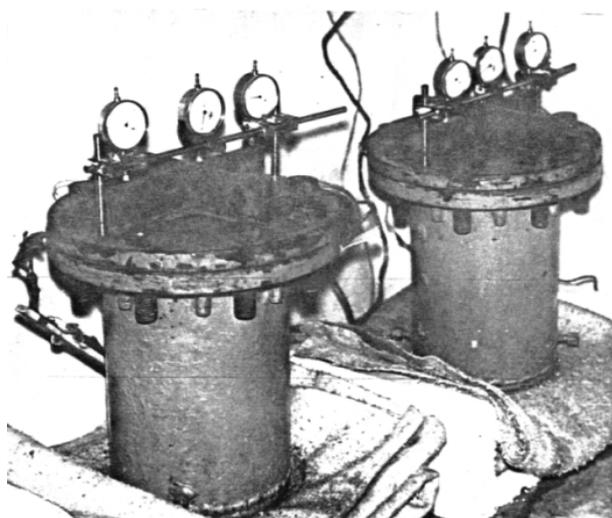


Рис. 1. Общий вид камеры для размещения образца

Грунтосодержащая камера была способна выдерживать давление до 16 МПа, а относительные деформации ее стенок и дна не превышали величины $1,3 \times 10^{-3}$.

Исследования давления пучения проводились в условиях одностороннего и всестороннего промерзания грунта.

Температура воздуха в холодильной камере изменялась в диапазоне от +0 до -35 °С.

При одностороннем промерзании грунта опыты проводились как в условиях «закрытой системы» (без подтока влаги в промерзающий образец извне), так и в условиях «открытой системы» (с подтоком влаги снизу в образец грунта). Совместно с изучением давления пучения был поставлен ряд опытов по определению свободных деформаций пучения. После прекращения эксперимента проводилось изучение и фотографирование криотекстур грунта.

Результаты опытов с глинистыми и песчаными грунтами. Использование разработанной методики комплексных лабораторных исследований позволило установить закономерности развития давления пучения в песчаных и глинистых грунтах, промерзающих в замкнутом объеме при различных температурно-влажностных режимах.

Далее представлены результаты пяти опытов с глинистыми и песчаными грунтами при одностороннем промерзании глины в замкнутом объеме. Характеристики грунтов, использованных в данных опытах, приведены в табл. 3. Графики давления и деформации пучения, полученные по результатам опытов, представлены на рис. 2.

Таблица 3

Физические характеристики грунтов в опытах М1...М5

Опыт	Наименование грунта	Плотность грунта ρ_{ss} , г/см ³	Влажность грунта W , %	Коэффициент пористости e	Показатель текучести I_L	Коэффициент водонасыщения S_r
М1	Глина текучепластичная	1,91	37,5	1,01	0,98	1,0
М2	Глина тугопластичная	2,1	24,6	0,61	0,36	1,0
М3	Глина полутвердая	2,1	20,3	0,54	0,16	1,0
М4	Глина полутвердая	2,15	19,3	0,5	0,11	1,0
М5	Песок средней крупности	2,06	20,2	0,58	—	0,98

Опыты показали, что исходная влажность грунта оказывает сильное влияние на характер притока воды в образец.

Так, в опыте М2 при промерзании глины тугопластичной в начальный период промерзания наблюдался интенсивный подток воды в образец, а в опыте М1 в начальном периоде промерзания глины текучепластичной наблюдалось обратное явление – отжатие влаги из образца. Можно предположить, что причиной оттока влаги из промерзающего образца в опыте М1 явилась более высокая интенсивность «внутреннего» пучения грунта.

Как видно из графиков (рис. 2), при неполном промерзании грунта в условиях стационарного температурного поля с градиентами температуры, близкими к оптимальным, заметного роста давления пучения грунта не наблюдалось. Максимальное давление в опытах М1 и М2 не превышало 1,0 МПа. Однако непродолжительное снижение температуры на нижней части образцов до -2°C после 10 суток эксперимента вызвало резкое увеличение давления пучения до 4,0 МПа. По мере оттаивания грунта нижней части образцов давление снизилось до 1,0 МПа и в дальнейшем, в течение всего периода охлаждения, длившегося свыше 30 суток, не превышало 1,0 МПа.

После 40 суток медленного охлаждения грунта при стационарном температурном режиме грунт был полностью заморожен до температуры -32°C . При этом давление пучения в опыте М1 достигло 8,1 МПа, а в опыте М2 – 15,7 МПа. Затем температура грунта была повышена до $-1...-2^{\circ}\text{C}$, а давление снижено до нуля путем снятия верхних крышек рабочих стаканов. После снятия крышек снова был проведен цикл охлаждения (до -32°C). Затем образцы мерзлого грунта извлекались из стаканов, и проводился анализ образовавшихся криогенных текстур.

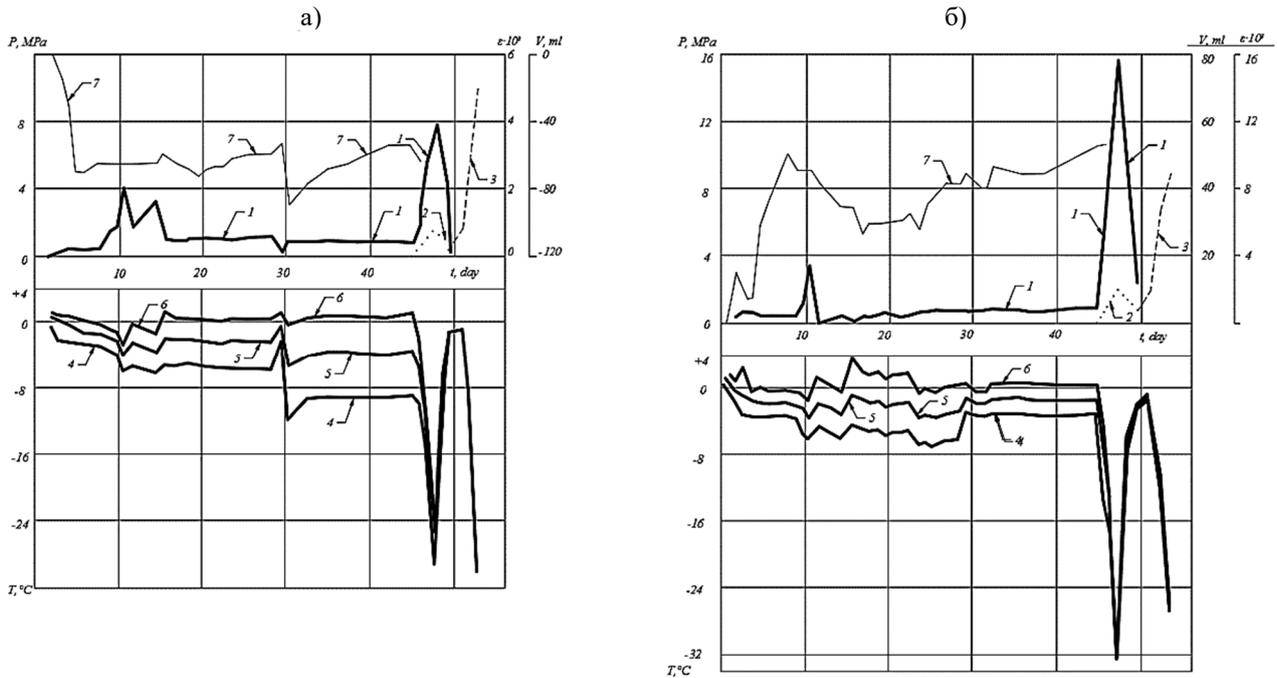


Рис. 2. Графики давления и деформации пучения при одностороннем промерзании глины в замкнутом объеме:
 а) опыт М1; б) опыт М2;
 1 – давление пучения; 2 – относительная деформация пучения; 3 – относительная деформация пучения после разгрузки; 4, 5, 6 – температура соответственно верха, середины и низа образца грунта, °С;
 7 – динамика миграции влаги, мл

На фото (рис. 3) хорошо видна ячеистая (сетчатая) криогенная текстура, образовавшаяся в мерзлой зоне образца при его неполном промерзании в условиях открытой системы. При промерзании грунта текучепластичной консистенции (опыт М1) частота расположения ледяных прослоек была выше, чем в опыте М2 у грунта тугопластичной консистенции, и мощность их достигала 3 мм, а в опыте М2 не превышала 1 мм. В нижней части образцов грунта образовались зоны с массивной криогенной текстурой, что также хорошо видно на фото (рис. 3).

На рис. 4 показано изменение влажности этих образцов грунта до и после их промерзания в условиях открытой системы.

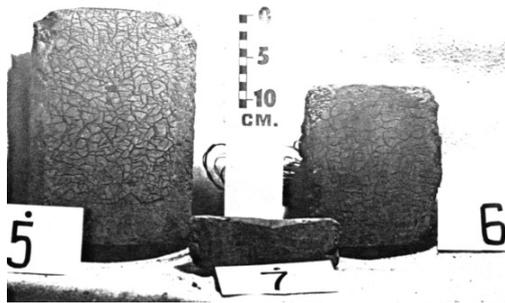


Рис. 3. Криогенная текстура в промерзшем грунте в опытах М1 (5) и М2 (6,7)

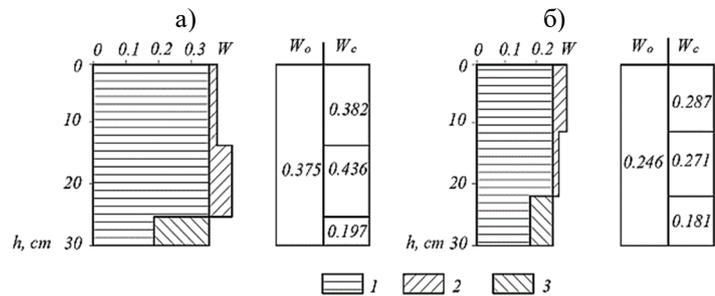


Рис. 4. Эпюры изменения влажности грунта до и после промерзания в условиях открытой системы в опытах М1 (а) и М2 (б):

1 – исходная влажность; 2 – увеличение влажности;
 3 – уменьшение влажности; W₀ – влажность до замерзания;
 W_c – влажность после замерзания

В верхней и средней частях образцов влажность грунта после промерзания увеличилась по сравнению с исходной на 2...7 %, а в нижней части произошло обезвоживание грунта до

влажности, близкой к критической. Влажности обезвоженных нижних частей обоих образцов после промерзания оказались практически одинаковыми.

В опытах М3 и М4 (рис. 5) проводилось исследование развития давления морозного пучения полутвердой пылеватой глины в зависимости от циклического изменения отрицательной температуры.

Выявлена отчетливая зависимость давления пучения при промерзании грунта от температуры. Температурный режим промерзания грунтов в опытах изменялся ступенчато. Форма графика давления пучения практически аналогична форме графика изменения температуры грунта. Так, ступенчатое понижение температуры грунта от $-1,2$ до $-15,2$ °С повлекло за собой возрастание давления от 4 до 13,8 МПа, а повышение температуры грунта от $-15,2$ до $-1,6$ °С вызвало уменьшение давления пучения с 13,8 до 5,6 МПа.

В опытах со всесторонним промерзанием в замкнутом объеме водонасыщенного песка средней крупности понижение отрицательной температуры грунта до -2 °С вызвало увеличение давления свыше 16 МПа (рис. 5, график 5).

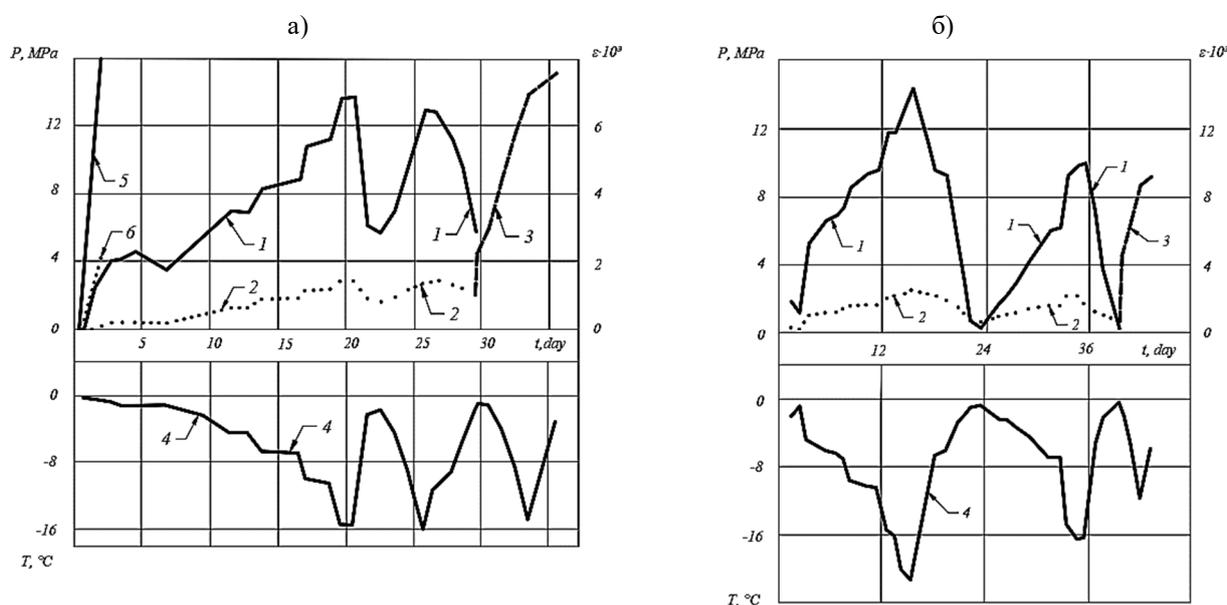


Рис. 5. Графики давления и деформации пучения

в зависимости от циклического перепада отрицательной температуры:

- а) всестороннее промерзание (опыты М3, М5); б) одностороннее промерзание (опыт М4);
 1 – давление пучения; 2 – относительная деформация пучения; 3 – относительная деформация пучения после разгрузки; 4 – средняя температура грунта, °С; 5 – давление пучения в опыте М5;
 6 – относительная деформация пучения в опыте М5

Оценка давления в промерзающих песчаных грунтах. Используя результаты описанных экспериментов, проведем оценку давления пучения водонасыщенных песков при их всестороннем промерзании в замкнутом объеме. В случае отсутствия в составе грунта пылеватых и глинистых фракций их промерзание не сопровождается миграцией влаги и происходит только за счет объемного расширения поровой воды при переходе ее в лед.

Максимальную величину давления, которое возникает при замерзании свободной воды без возможности ее объемного расширения, можно оценить с помощью зависимости Бриджмена-Тамманна [6]. При этом давление составляет свыше 10 МПа на один градус понижения температуры:

$$p_{i,w}^{\infty} = 1 + 127 \cdot T - 1,519 \cdot T^2, \quad (1)$$

где $p_{i,w}^{\infty}$ – давление, 10^{-1} МПа; T – температура плавления льда, °С.

Сравнение значений давлений, полученных в опыте М5 с песчаным грунтом и рассчитанных по формуле (1), позволило получить корреляционное уравнение связи между температурой и давлением в виде:

$$P_i = 1 + 76T, 10^{-1} \text{ МПа.} \quad (2)$$

При этом при сравнении экспериментальных данных и вычислений по формуле (2) в интервале температур грунта от $-0,3$ до $-2,2$ °С погрешность составила от 15 до 2 % (рис. 6).

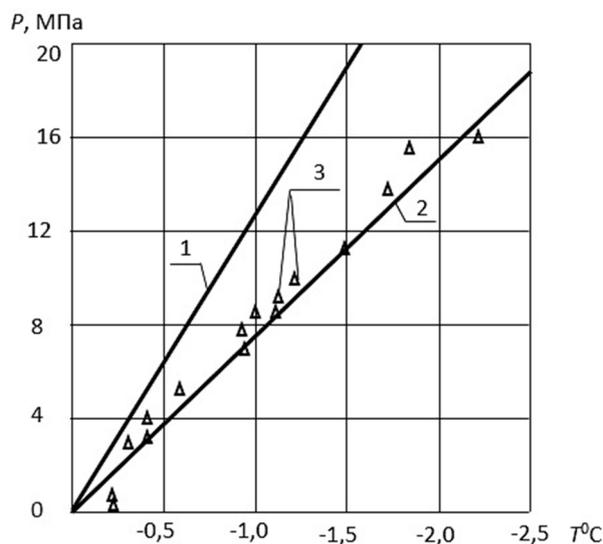


Рис. 6. Зависимость давления пучения от температуры при всестороннем промерзании водонасыщенного песка в замкнутом объеме:
1 – значения давления пучения по формуле (1);
2 – то же по формуле (2);
3 – экспериментальные значения

В водонасыщенных глинистых грунтах жидкая фаза представлена в основном связанной водой, и давление, развивающееся при промерзании грунта в замкнутом объеме, обусловлено замерзанием рыхлосвязанной (пленочной) воды. Наличие в глинистых грунтах пленочной воды, оказывающей доминирующее влияние на развитие процесса морозного пучения, вызывает отличную от песков динамику развития давления пучающегося грунта. Необходимо отличать давление, возникающее за счет кристаллизации свободной воды, и давление, возникающее в процессе охлаждения мерзлого грунта за счет кристаллизации пленочной, незамерзшей воды.

При взаимодействии грунта с водой давление растущих в порах кристаллов льда будет восприниматься как его минеральной частью вместе с прочносвязанной водой, свойства которой аналогичны свойствам твердого тела. В процессе развития давления в зоне промерзания минеральные частицы и прочносвязанная вода образуют жесткий решетчатый каркас, который, воспринимая давление, дает возможность пленочной воде проникать через отверстия решетки к растущим в порах кристаллам льда. При этом твердая фаза (лед) воспринимает давление, возникающее от растущих кристаллов льда, а в жидкой фазе (рыхлосвязанная, пленочная вода) это давление отсутствует [6].

Предложенные в [6, 8] механизм и механическая модель грунта позволили с позиций равновесной термодинамики получить формулу для количественной оценки давления пучения глинистого грунта в замкнутом объеме:

$$p_i = 1035,76 \ln(T) - 6,707T + 0,0031T^2 - 1,66 \cdot 10^{-11}T^3 - 4210, \quad (3)$$

где p_i – давление пучения, МПа, которое развивается в промерзающем грунте при температуре T , °К, за счет замерзания пленочной незамерзшей воды.

В условиях полного промерзания грунта в замкнутом объеме возможно проявление некоторой объемной деформации пучения за счет температурного сжатия мерзлого грунта, что вызывает в последнем изменение межфазового равновесного состояния и, как следствие,

уменьшение содержания незамерзшей воды вследствие перехода ее в лед. Это приводит к снижению давления пучения p_i , определяемого по формуле (3).

В этом случае уменьшение давления p_i учитывается введением понижающего коэффициента k_u [6]:

$$k_u = 1 - \frac{\rho_w(\varepsilon_v + 3\alpha_m T)}{0,09\rho_d w_{mmw}}, \quad (4)$$

где ρ_d и ρ_w – плотности скелета грунта и воды соответственно, кг/м³; ε_v – относительная деформация, связанная (вызывающая?) с замерзанием связанной воды; α_m – температурный коэффициент линейного сжатия мерзлого грунта, (°C)⁻¹; w_{mmw} – максимальная молекулярная влагоемкость грунта.

Выражение для давления пучения p_{iu} с учетом допущения возможных деформаций примет вид [6]:

$$p_{iu} = k_u p_i. \quad (5)$$

В глинистых грунтах развитие давления морозного пучения связано с замерзанием рыхлосвязанной (пленочной) воды и может быть определено предложенным авторами методом как при отсутствии, так и при наличии объемной деформации пучения.

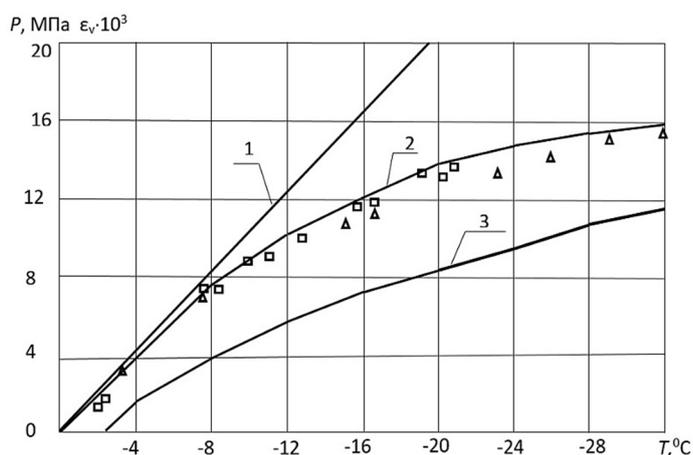


Рис. 7. Экспериментальные и расчетные данные при одностороннем промерзании глинистого грунта в замкнутом объеме:
1 – зависимость давления пучения от температуры, определенная по формуле (3);
2 – то же по формуле (5);
3 – рассчитанная допустимая относительная объемная деформация, $\varepsilon_v \times 10^3$;
△ – экспериментальные данные из опыта M2;
□ – экспериментальные данные из опыта M5

При частичном промерзании глинистого грунта в замкнутом объеме, т. е. в условиях существования мерзлой и талой зон, давление пучения будет определяться сопротивлением талого грунта при его сжатии пучающимся грунтом. В условиях невозможности деформаций пучения промерзающий грунт вследствие его высокой жесткости уплотняет талый грунт буферной зоны на так называемую величину «внутреннего» пучения, что приводит к снижению давления пучения до 0,04...1 МПа.

Выводы. Подводя итоги проведенных исследований и полученных результатов по определению давления морозного пучения при промерзании грунта в замкнутом объеме, можно сделать следующие выводы:

1. В ходе лабораторных исследований установлены особенности развития давления пучения в зависимости от одностороннего и всестороннего промораживания глинистых и песчаных грунтов, степени их водонасыщения и деформирования в замкнутом объеме, а также от температурного режима как в период промерзания талого, так и охлаждения мерзлого грунта в замкнутом объеме;

2. Развитие давления пучения при промерзании водонасыщенных песчаных и глинистых грунтов имеет принципиальное различие. В песчаных грунтах формирование давления пучения обусловлено замерзанием свободной (гравитационной) воды и может быть определено по формуле Бриджмена – Тамманна (1), а в глинистых грунтах оно обусловлено замерзанием

рыхлосвязанной (пленочной) воды. Количественная оценка этого давления может быть сделана с позиций равновесной термодинамики и описана уравнением (3);

3. Давление морозного пучения непосредственно связано с температурой промерзающего грунта и возможностью деформаций грунта. Количественная оценка этого давления с учетом допущения деформаций может быть сделана по формуле (5). Расчет по этой формуле показал хорошее совпадение с экспериментальными данными, полученными при полном промерзании глинистых грунтов в замкнутом объеме.

Библиографический список

1. Алексеев А. Г. Определение давления морозного пучения раствора в пазухе буропускных свай, устраиваемых в многолетнемерзлых грунтах // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2019. – № 1 (282). – С. 2–7.
2. Бондаренко Г. И., Алексеев А. Г. Определение давления морозного пучения грунтов в лабораторных условиях // *Геотехника: актуальные теоретические и практические проблемы: межвуз. технич. сб. тр. / Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет*. – Санкт-Петербург, 2006. – С. 220–225.
3. Орлов В. О., Дубнов Ю. Д., Меренков Н. Д. Пучение промерзающих грунтов и его влияние на фундаменты сооружений. – Л.: Стройиздат, 1977. – 183 с.
4. Алексеев А. Г. Лабораторные исследования давления криогенного пучения грунта // *Вестник НИЦ Строительство*. – 2020. – № 3 (26). – С. 5–12.
5. Орлов В. О., Железняк И. И., Филиппов В. Д., Фурсов В. В. Пучинистые грунты как основания сооружений. – Новосибирск: Наука, 1991. – 130 с.
6. Орлов В. О., Ким В. Х. Метод оценки давления морозного пучения грунта на ледогрунтовое ограждение подземного сооружения // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. – 1988. – № 3. – С. 25–28.
7. ГОСТ 25100-2020. Грунты. Классификация. – М., 2021.
8. Ким В. Х., Ким М. С. Оценка давления пучения при промерзании мерзлого грунта в замкнутом объеме // *Строительная механика и конструкции*. – 2024. – № 4 (43). – С. 85–91.

References

1. Alekseev A. G. Determination of frost heaving pressure of mortar in the sinus of bored piles installed in permafrost soils. *Structural Mechanics and Calculation of Structures*. No. 1(282). 2019. Pp. 2–7.
2. Bondarenko G. I., Alekseev A. G. Determination of frost heaving pressure of soils in laboratory conditions. *Geotechnics: current theoretical and practical problems: interuniversity technical collection of papers*. St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering. St. Petersburg, 2006. Pp. 220–225.
3. Orlov V. O., Dubnov Yu. D., Merenkov N. D. Heaving of freezing soils and its influence on the foundations of structures. L.: Stroyizdat, 1977. 183 p.
4. Alekseev A. G. Laboratory studies of cryogenic soil heaving pressure. *Bulletin of the Scientific Research Center Construction*. No. 3(26). 2020. Pp. 5–12.
5. Orlov V. O., Zheleznyak I. I., Filippov V. D., Fursov V. V. Heaving soils as foundations of structures. Novosibirsk: Science, 1991. 130 p.
6. Orlov V. O., Kim V. H. Method for assessing the pressure of frost heaving of soil on the ice-soil enclosure of an underground structure. *Foundations, Bases and Soil Mechanics*. No. 3. 1988. Pp. 25–28.
7. Federal Standard 25100-2020. Soils. Classification. M., 2021.

8. Kim V. H., Kim M. S. Estimation of heaving pressure during freezing of frozen soil in a confined volume. *Structural Mechanics and Structures*. No. 4(43). 2024. Pp. 85–91.

STUDIES OF THE PRESSURE OF FROST HEAVING OF FROZEN SOIL IN LABORATORY CONDITIONS

V. Kh. Kim¹, M. S. Kim²

Voronezh State Technical University^{1,2}
Voronezh, Russia

¹ PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Bases and Foundations,
Tel.: +7(920) 423-90-78, e-mail: vyachhkim@yandex.ru

² PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Bases and Foundations,
Tel.: +7(920) 468-91-36, e-mail: marskim@yandex.ru

This article is devoted to the results of laboratory studies of the development of frost heaving pressure during soil freezing in a closed volume. Currently, the study of the force effects of heaving soils on structures is of particular importance due to the intensive development of the Arctic zone of Russia. Studies of the peculiarities of the development of frost heaving pressure of clay and sandy soils during unilateral and comprehensive freezing in a closed volume, depending on the degree of their water saturation, temperature regime and possible deformations, have been carried out. The difference in the mechanism of formation of frost heaving pressure in sandy and clay soils has been revealed.

Key words: freezing soil, frost heaving pressure, phase transition of film water, laboratory tests.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
 - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
 - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
 - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
 - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
 - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
 - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
 - 3.7. Текст статьи;
 - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
 - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
 - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]). Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, доц.,
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доц.

Почтовый адрес редакции: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.