

ISSN 2219-1038 (print)

ISSN 2949-3757 (online)

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научный журнал

Выпуск № 1 (44)

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж – 2025

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения – Российская Федерация.

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В. С., д-р техн. наук, профессор,

Воронежский государственный технический университет

Зам. главного редактора: Козлов В. А., д-р физ.-мат. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е., канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

Антонов В. М., канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;

Беляева С. Ю., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Буренин А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии

Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;

Гриднев С. Ю., д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Зверев В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Ефрюшин С. В., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Кирсанов М. Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;

Колчунов В. И., д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;

Коробко А. В., д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;

Михайлов В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;

Нугужинов Ж. С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;

Овчинников И. Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;

Пшеничкина В. А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;

Свентиков А. А., д-р техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Трещев А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;

Турищев Л. С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;

Шимановский А. О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;

Шитикова М. В., д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки – А. Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Подписной индекс в Объединенном каталоге «Пресса России» – 66004

Оформить подписку можно на сайте <https://www.pressa-ru.ru>

Дата выхода в свет 31.03.2025. Усл. печ. л. 14,0. Формат 60×84/8. Тираж 29 экз. Заказ № 50.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018

Цена свободная

Адрес редакции и издателя: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

(строительный факультет, кафедра строительной механики),

тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»

394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

ISSN 2219-1038 (print)

ISSN 2949-3757(online)

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific Journal

Issue № 1 (44)

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh – 2025

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.

Territory of distribution — Russian Federation.

The journal «Structural mechanics and structures» is included into the List of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,

Voronezh State Technical University

The deputy chief editor: Kozlov V. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

Executive secretary: Gabrielyan G. E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,

Voronezh State Technical University

Antonov V. M., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

Belyaeva S. Yu., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Burenin A. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

Gridnev S. Yu., Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Zverev V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Efryushin S. V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Kirsanov M. N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

Kolchunov V. I., Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

Korobko A. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenyev;

Mikhailov V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Nguyen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

Nuguxhinov Zh. S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

Ovchinnikov I. G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

Pshenichkina V. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

Sventikov A. A., Dr. of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Trechshev A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

Turichshev L. S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

Shimanovsky A. O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

Shitikova M. V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A. R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Subscription index in the United catalogue «Press of Russia» – 66004

You can subscribe on the website www.press-rf.ru

Publication date 31.03.2025. Conventional printed sheets 14.0. Format 60×84/8. Numbers of copies 29. Order № 50.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 – 72895 dated 22.05.2018

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation

(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics),

tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.....	7
<i>Кирсанов М. Н., Грибова О. В.</i> Нижняя оценка первой частоты собственных колебаний прямоугольного пространственного покрытия.....	7
<i>Саиян С. Г., Шитикова М. В.</i> Сравнительный анализ динамического отклика зданий и сооружений различной высотности на ветровые и сейсмические воздействия	16
<i>Грибова О. В.</i> Формулы для расчета прогиба и частоты собственных колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей.....	31
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ	40
<i>Римшин В. И., Сулейманова Л. А., Амелин П. А., Аноприенко Д. С.</i> Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния изгибаемых железобетонных элементов в хлоридной агрессивной среде	40
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ	52
<i>Маркина Ю. Д.</i> Напряженное состояние подкраново-подстропильной фермы с расцентрованными узлами примыкания решетки к нижнему поясу	52
<i>Кравчук Е. В., Иодчик А. А., Кравчук В. А.</i> Теоретическое и экспериментальное обоснование параметров несущей способности стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки.....	63
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ.....	79
<i>Трошин М. Ю., Коробко А. В.</i> Экспериментальные исследования плит из древесины перекрестно клееной с утолщенными продольными слоями	79
РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ	88
<i>Некрасова Н. Н.</i> Эффективный алгоритм расчета защемленной плиты переменной жесткости, опирающейся на упругое основание.....	88
<i>Копылов С. С., Антонов В. М.</i> Экспериментальные исследования влияния горизонтального армирования листовым винипластом на несущую способность и деформативность песчаного основания	97
<i>Некрасова Н. Н., Габриелян Г. Е.</i> Совершенствование расчетных моделей грунтовых оснований, контактирующих с фундаментными конструкциями.....	109
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ	120

CONTENTS

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS	7
<i>Kirsanov M. N., Gribova O. V.</i>	
Lower Estimate of Rectangular Spatial Coating Natural Oscillations First Frequency	7
<i>Saiyan S. G., Shitikova M. V.</i>	
Comparative Analysis of the Dynamic Response of Buildings and Structures of Different Heights to Wind and Seismic Loading	16
<i>Gribova O. V.</i>	
Formulas for Calculation of Deflection and Natural Frequency of a Flat Truss with an Arbitrary Number of Panels	31
CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES.....	40
<i>Rimshin V. I., Suleimanova L. A., Amelin P. A., Anoprienko D. S.</i>	
Finite Element Modeling of the Stress-strain State of Bending Reinforced Concrete Elements in a Chloride Aggressive Environment.....	40
CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES	52
<i>Markina Yu. D.</i>	
The Stressed State of the Crane Secondary Truss with the Centered Nodes of the Grid Abutment to the Lower Belt.....	52
<i>Kravchuk E. V., Iodchik A. A., Kravchuk V. A.</i>	
Theoretical and Experimental Justification of the Parameters of the Load-bearing Capacity of Steel Beams Pre-stressed by Wall Stretching	63
CALCULATION AND DESIGN FROM POLYMERIC STRUCTURES	79
<i>Troshin M. Yu., Korobko A. V.</i>	
Experimental Studies of CLT-panels with Thickened Longitudinal Layers.....	79
CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES	88
<i>Nekrasova N. N.</i>	
Efficient Algorithm for Calculation of a Firm Plate of Variable Stiffness Based on an Elastic Foundation	88
<i>Kopylov S. S., Antonov V. M.</i>	
Experimental Studies of the Effect of Horizontal Reinforcement with Vinyl Sheet on the Bearing Capacity and Deformability of Sandy Foundation	97
<i>Nekrasova N. N., Gabrielyan G. E.</i>	
Improvement of Calculation Models of Soil Bases in Contact with Foundation Structures.....	109
RULES OF PREPARATION OF ARTICLES	120

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04:531.391.3

DOI 10.36622/2219-1038.2025.44.1.001

НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОКРЫТИЯ

М. Н. Кирсанов¹, О. В. Грибова²

Национальный исследовательский университет «МЭИ»^{1, 2}
Россия, г. Москва

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

² Ст. преп. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: gribovaov@mail.ru

Рассмотрена схема статически определимой регулярной фермы покрытия с вертикальными опорами-стойками по периметру конструкции. Для вывода формулы зависимости основной частоты собственных колебаний от числа панелей использован упрощенный метод Донкерлея. Инерционные свойства конструкции моделируются массами в ее узлах, совершающими вертикальные колебания. Для расчета жесткости фермы используется формула Максвелла. Сравнение результатов аналитического решения с численным показывает удовлетворительную точность предлагаемого подхода. Для аналитических преобразований использована система символьной математики «Maple». Решение для произвольного числа панелей получается методом индукции по данным расчетов последовательности ферм различного порядка. Показано, что точность метода сильно зависит от четности числа панелей в ферме.

Ключевые слова: пространственная ферма, собственная частота, метод Донкерлея, «Maple», метод индукции, формула Максвелла.

Введение. Расчет основной частоты собственных колебаний инженерных конструкций, как правило, выполняется в специализированных численных компьютерных программах, основанных на методе конечных элементов [1, 2]. В тех случаях, когда конструкция статически определима, возможен и аналитический метод, дающий простую возможность для оценки характеристик объекта [3–5]. Для приближенного вычисления первой частоты известны метод Донкерлея (оценка снизу) и метод Рэлея (оценка сверху) [6, 7]. Эти методы применимы и для аналитического расчета регулярных конструкций в тех случаях, когда требуется найти зависимость решения от числа панелей в регулярной конструкции. Аналитическое решение, полученное для произвольного порядка сооружения, позволяет без потери точности рассчитывать масштабные сооружения периодической структуры с большим числом элементов. Особенный эффект от применения аналитических методов достигается в пространственных конструкциях, расчет которых требует больших вычислительных мощностей [8, 9]. Основным алгоритмом, используемым для вывода расчетных формул для регулярных конструкций, является метод индукции с применением системы компьютерной математики [10, 11]. В [12] этим методом с использованием оценок Донкерлея и Рэлея получено значение первой частоты колебаний простой плоской фермы с треугольной решеткой. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей методом индукции в

системе компьютерной математики «Maple» выполнен в [13]. Альтернативой этому подходу является аналитический метод расчета статики и динамики строительных конструкций с применением рядов и специальных функций [14, 15]. В [16] для вывода формулы зависимости основной собственной частоты колебаний плоской фермы используется упрощенный метод Донкерлея, дающий большую точность, чем исходный метод Донкерлея. В настоящей работе этот метод применяется для пространственной стержневой конструкции.

Конструкция покрытия. Объектом исследования является регулярная ферма с двумя осями симметрии купольного типа с $n_v = 4(m + n)$ опорами-стойками по ее периметру (рис. 1). В [17] для этой конструкции с использованием системы «Maple» была получена формула зависимости прогиба центрального узла от числа панелей. Рассматривалась сосредоточенная нагрузка на этот узел. Конструкция безопорная и предназначена для перекрытия больших площадей. Сооружение имеет $2n$ панелей длиной a по одной стороне и $2m$ длиной b по другой. Всего в ферме $n_s = 3 \cdot 4mn + 2m + 2n + 1$ стержней, включая два горизонтальных опорных стержня в узле A и один горизонтальный стержень в угловом узле B . Эти стержни вместе с вертикальными стойками моделируют сферический и цилиндрический шарниры соответственно. Высота стоек – c , общая высота фермы – $h + c$ (рис. 2).

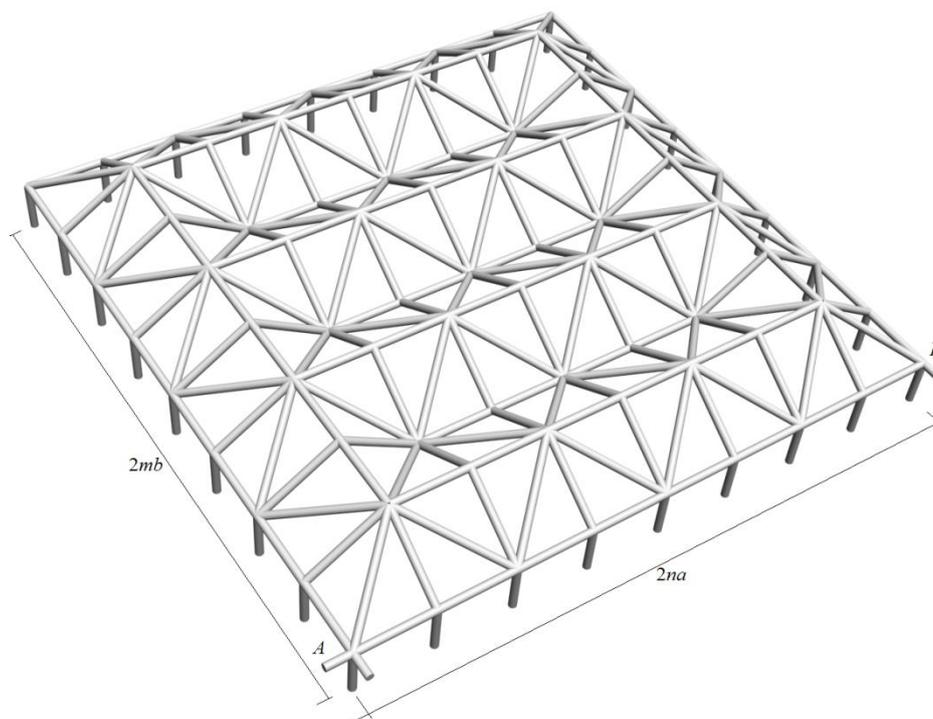


Рис. 1. Схема конструкции фермы, $n = m = 4$

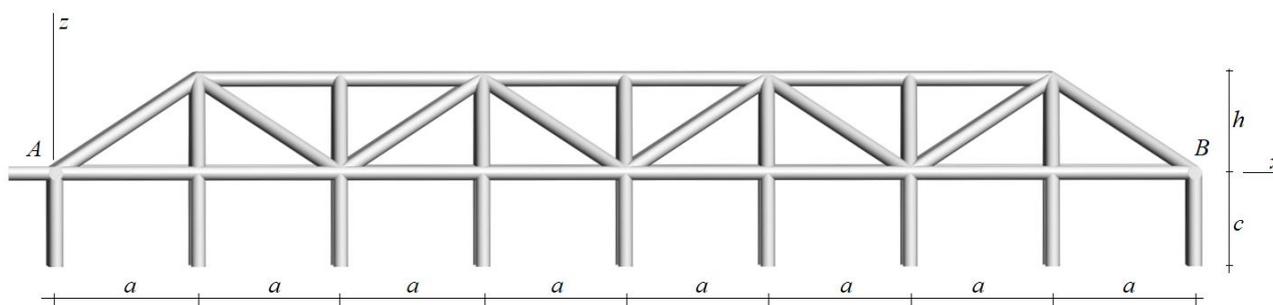


Рис. 2. Схема фермы в проекции на плоскость x - z , $n = m = 4$

Принимая, что масса фермы равномерно распределена по $K = (2n + 1)(2m + 1)$ узлам, а колебания масс происходят только по вертикальной оси z , получаем, что число степеней свободы такой системы равно K . Масса каждого узла равна M .

Расчет усилий в стержнях. Для расчета усилий, необходимых для определения жесткости конструкции, составляются уравнения равновесия узлов. Матрица этой системы содержит направляющие косинусы усилий, для расчета которых в программу вводятся координаты узлов и данные о порядке соединения стержней в узлах. Узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 3). Фрагмент программы ввода координат на языке системы «Maple» имеет вид:

```

> for j to 2*m+1 do
> for i to 2*n+1 do t:=i+(j-1)*(2*n+1):
> x[t]:=a*(i-1):y[t]:=b*(j-1):z[t]:=0:
> od:od:
> for i to 2*n+1 do
> x[i+K]:=a*(i-1):y[i+K]:=0: z[i+K]:=-c:
> x[i+K+2*n+1]:=a*(i-1):y[i+K+2*n+1]:=b*2*m: z[i+K+2*n+1]:=-c:
> od:
> K1:=K+4*n+2:
> for i to 2*m-1 do
> x[i+K]:=0: y[i+K1]:=b*i: z[i+K1]:=-c:
> x[i+K1+2*m-1]:=n1*a: y[i+K1+2*m-1]:=b*i: z[i+K1+2*m-1]:=-c:
> od:
> for j to m do
> for i from 2 to 2*n do z[1+i+2*n+2*(2*n+1)*(j-1)]:=h:
od:od:
> for i to n-1 do
z[4*(n+1)+(i-1)*(4*n+2)]:=h:
z[6*n+2+(i-1)*(4*n+2)]:=h:
od:

```

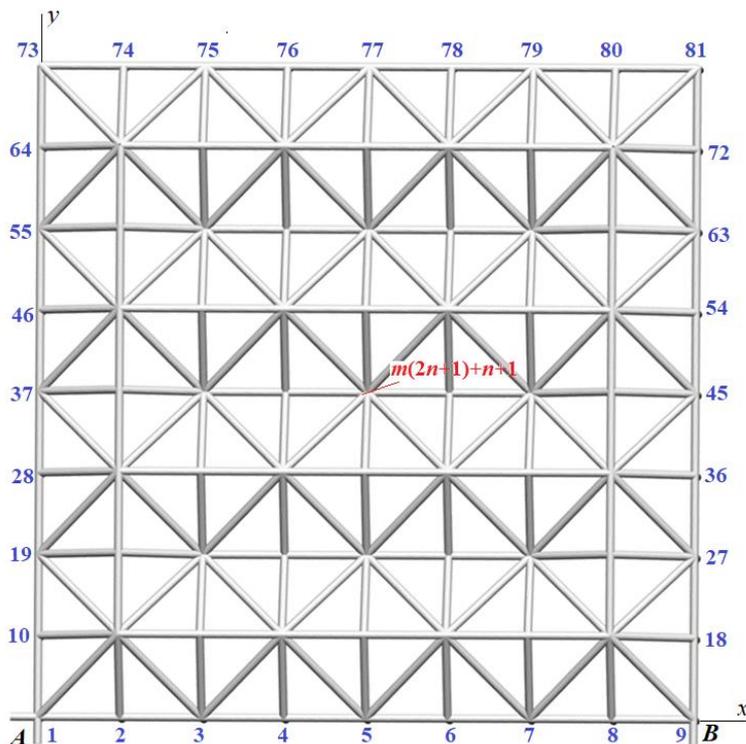


Рис. 3. Нумерация узлов,
 $n = m = 4$

Система уравнений равновесия узлов записывается в векторном виде: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{R} – вектор узловых нагрузок; \mathbf{G} – матрица направляющих косинусов размером $n_s \times n_s$; \mathbf{S} – вектор неизвестных усилий в стержнях длиной n_s . В это число включены усилия в стойках и три горизонтальные опорные реакции в углах A и B . Матрица \mathbf{G} строится по данным о координатах концов стержней.

Оценка первой частоты собственных колебаний. Для расчета первой собственной частоты ω_* используется формула, предложенная в [16]:

$$\omega_*^{-2} = m\delta^{\max}K / 2 = m\Delta_n, \quad (1)$$

где δ^{\max} – максимальное по всем узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на узел фермы. В оригинальном методе Донкерлея, дающем нижнюю оценку частоты, вычисление включает в себя сумму смещений по *всем* узлам: $\omega_*^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p$

. Смещение на узел p рассчитывается от единичной вертикальной силы, приложенной к этому узлу. Если при численной реализации метода вычисление суммы почти не влияет на скорость расчетов, то в символьной форме суммирование может вызвать некоторые трудности, значительно увеличивает время вывода формулы и усложняет итоговую формулу. Отдельный вопрос, который возникает в расчете этим методом, – выбор точки p с максимальным смещением, которое входит в формулу (1). В рассматриваемой задаче это достаточно очевидно. Точка в геометрическом центре покрытия с номером $m(2n + 1) + n + 1$ (рис. 3) имеет наибольший прогиб.

Коэффициент Δ_n рассчитывается по формуле Максвелла суммированием по всем усилиям в стержнях конструкции, включая стойки по периметру фермы:

$$\delta^{\max} = \sum_{\alpha=1}^{n_s} S_{\alpha}^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (2)$$

где S_{α} – усилие в стержне α при действии на выбранный узел единичной вертикальной силы; l_{α} – длина этого стержня. Жесткость EF всех стержней принимается одинаковой. Расчет сумм $\Delta_n = \delta^{\max}K / 2$ для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей в предположении $c = h$ дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= (6a^3 + 6b^3 + 2d^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \Delta_3 &= (23a^3 + 19b^3 + 5d^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \Delta_4 &= (44a^3 + 44b^3 + 6d^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \Delta_5 &= (109a^3 + 85b^3 + 9d^3 + h^3) / (4h^2EF), \\ \Delta_6 &= (162a^3 + 146b^3 + 10d^3 + h^3) / (4h^2EF), \dots \end{aligned}$$

где $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$. Особенность этих расчетов по сравнению с аналогичными расчетами для плоских ферм [7, 11] состояла в значительном объеме аналитических преобразований. При $m = n = 2, 3, \dots, 9$ последовательность чисел стержней и, следовательно, размер матрицы \mathbf{G} растут очень быстро: 75, 147, 243, ..., 1083. Это существенно усложняет и удлиняет решение. С применением операторов `rgf_findrecur` и `genfunc` системы «Maple» находится общий член последовательности:

$$\Delta_n = \frac{C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3}{h^2 EF},$$

где коэффициенты имеют вид полиномов по числу панелей:

$$C_1 = (2n^3 - ((-1)^n + 3)n^2 + (5 + (-1)^n)n + (-1)^n - 1) / 8,$$

$$C_2 = n(1 + 2n^2) / 12, \quad C_3 = (4n - (-1)^n - 3) / 8, \quad C_4 = 1 / 4.$$

Окончательно расчетная формула для определения нижней оценки первой частоты по методу Донкерлея имеет вид:

$$\omega_* = h \sqrt{\frac{EF}{M(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3)}}. \quad (3)$$

Численное решение. Для расчета приняты размеры панели фермы: $a = 3$ м. Материал стержней – сталь с модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа. Площадь поперечного сечения стержней одинакова: $F = 9$ см², в узлах расположены одинаковые массы $M = 500$ кг. На графике 4 кривые зависимости частоты ω_* от числа панелей по формуле (3) сопоставлены с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно. Для численного расчета использовалась та же программа «Maple», но в режиме численных расчетов. Для вычисления собственных чисел матрицы задействовался оператор Eigenvalues из специализированного пакета LinearAlgebra.

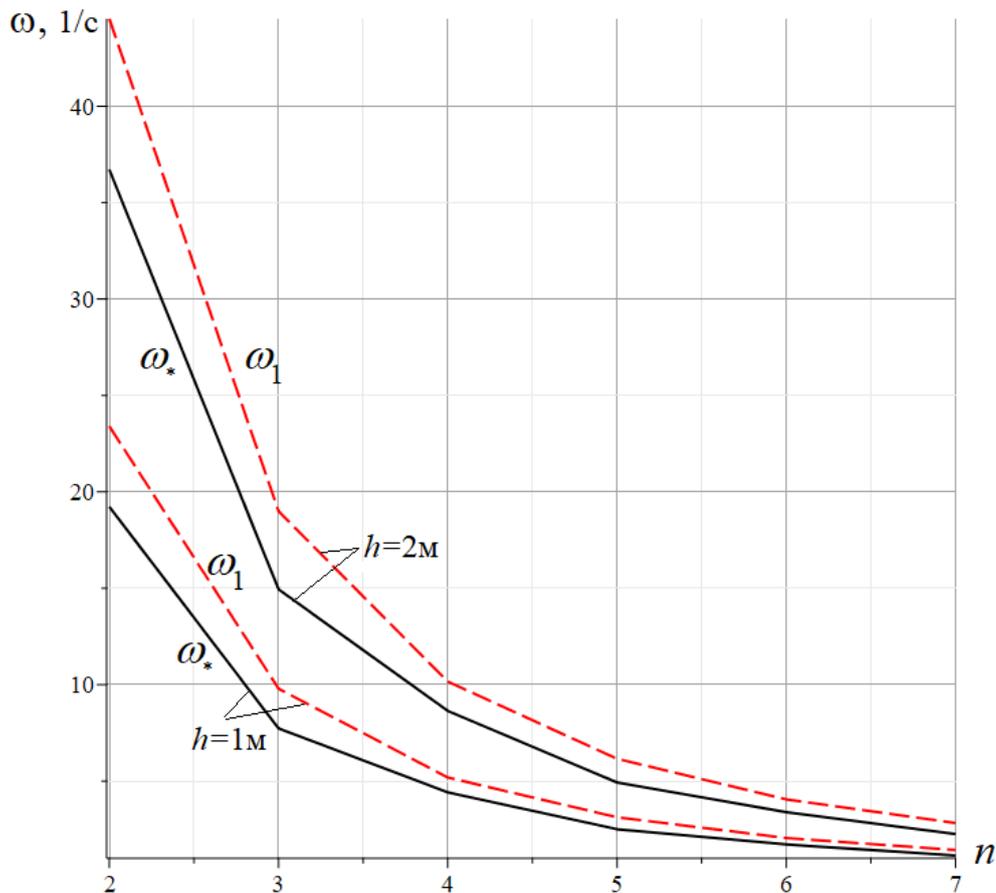


Рис. 4. Сравнение аналитического решения ω_* с численным ω_1

С увеличением числа панелей частота монотонно падает, при этом аналитическое решение является нижней границей численного. Оценить относительную точность найденной зависимости можно, вычислив погрешность $\varepsilon = |\omega_1 - \omega_*| / \omega_1$. На рис. 5 видно, что точность решения существенно зависит от четности числа панелей и почти не зависит от значения высоты h .

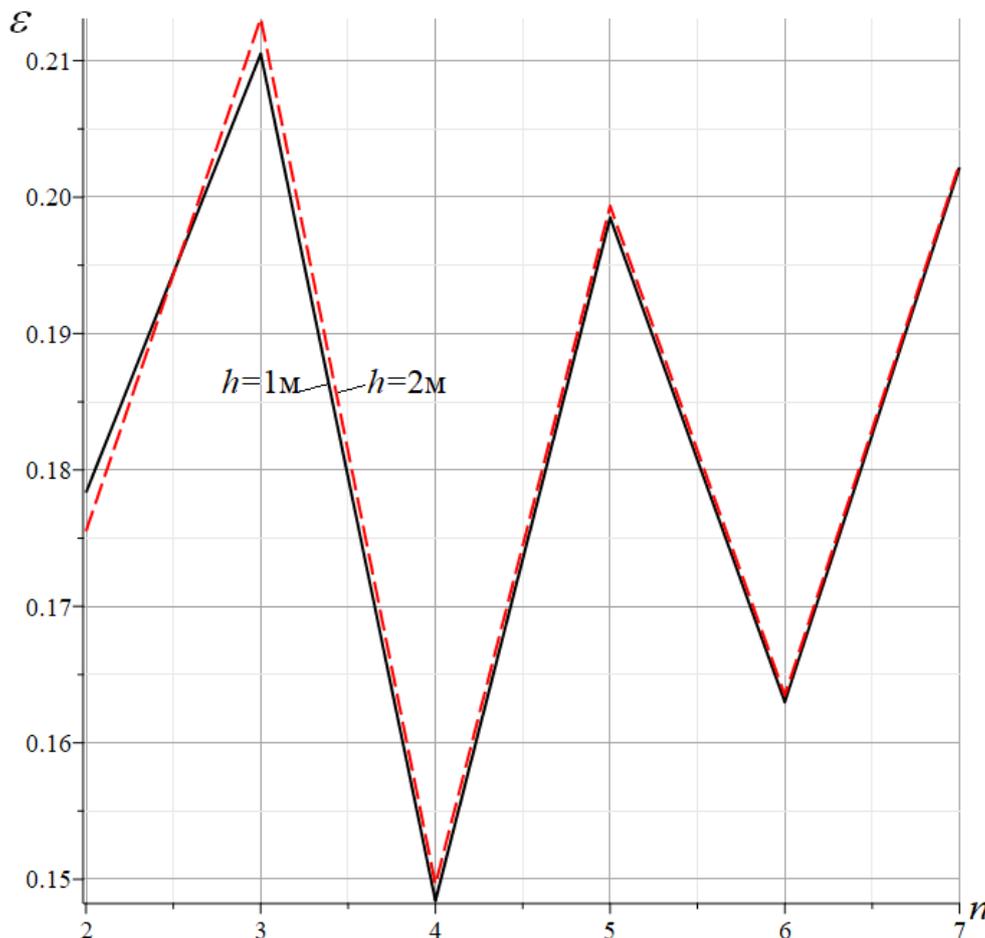


Рис 5. Погрешность оценки основной частоты

Заключение. Для пространственной модели шарнирно-стержневого покрытия выведена формула оценки основной частоты собственных колебаний. Сравнение с численным решением, полученным стандартным способом с помощью собственных чисел матрицы с учетом всех степеней свободы, для принятой модели фермы показало хорошую точность найденного аналитического решения. Замечены значительные скачки точности (до 30 %) в зависимости от четности числа панелей. Использованный алгоритм можно использовать в других статически определимых конструкциях для простой оценки собственной частоты.

Библиографический список

1. Borji A., Boroomand B., Movahedian B. Experimental and numerical investigations on wave propagation in planar frames and trusses with shear deformable elements: Introduction of a fast numerical method using degrees of freedom just at joints // Structures. – Elsevier. – 2024. – Vol. 70. – Pp. 107599. – <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.107599>.
2. Игнатъев В. А., Игнатъев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). – М.: АСВ, 2022. – 306 с.

3. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 27–34
4. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. – 2022. – № 111 (3). – Article No. 11114. – DOI: 10.34910/MCE.111.14.
5. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 17–26. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
6. Low K. H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2000. – Vol. 42. – № 7. – Pp. 1287–1305. – DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1.
7. Кирсанов М. Н. Формулы для двухсторонней оценки основной частоты колебаний решетчатой фермы // *Вестник МГСУ*. – 2024. – Т. 19, вып. 3. – С. 377–386. – DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386.
8. Астахов С. В. Аналитическая оценка прогиба стержневой модели каркаса четырехскатного покрытия // *Строительная механика и конструкции*. – 2024. – № 4 (43). – С. 34–41. – DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003.
9. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 35–45. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004.
10. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – 101. – Article No 10101. – DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
11. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. – 2023. – 29. – Article No 2902. – DOI: 10.57728/ALF.29.2.
12. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – 109. – Article No 10912. – DOI: 10.4123/CUBS.109.12.
13. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 2 (29). – С. 29–37.
14. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack // *Materials Physics and Mechanics*. – 2018. – № 36. – Pp. 137–141. – https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15.
15. Galileev S. M., Matrosov A. V. Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. *Composite Structures*. – 1997. – 39. – Pp. 255–262. – [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00108-6).
16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – 108. – Article No 10801. – DOI: 10.4123/CUBS.108.1.
17. Кирсанов М. Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // *Вестник МГСУ*. – 2018. – Т. 13, вып. 5 (116). – Pp. 579–586. – DOI: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586.

References

1. Borji A., Boroomand B., Movahedian B. Experimental and numerical investigations on wave propagation in planar frames and trusses with shear deformable elements: Introduction of a fast

numerical method using degrees of freedom just at joints. *Structures*. Elsevier, 2024. Vol. 70. Pp. 107599. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.107599>.

2. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). – Moscow: ASV Publishing House, 2022. – 306 p. (in Russian).

3. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). Pp. 27–34 (in Russian).

4. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111 (3). Article No. 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.

5. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2 (37). Pp. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002 (in Russian).

6. Low K. H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000. V. 42. № 7. Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1.

7. Kirsanov M. N. Formulas for two-sided estimation of the fundamental frequency of oscillations of a lattice truss. *Bulletin of MGSU*. 2024. Vol. 19. Issue. 3. Pp. 377–386. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386 (in Russian).

8. Astakhov S. V. Analytical estimation of the deflection of a rod model of a hip roof frame. *Structural Mechanics and Structures*. 2024. No. 4 (43). Pp. 34–41. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.43.4.003 (in Russian).

9. Komerzan E. V., Maslov A. N. Estimation of the L-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations. *Structural mechanics and structures*. 2023. № 2 (37). Pp. 35–45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004 (in Russian).

10. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.

11. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss. *AlfaBuild*. 2023. 29 Article No 2902. DOI: 10.57728/ALF.29.2.

12. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109 Article No 10912. DOI: 10.4123/CUBS.109.12.

13. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*, 2021. 2 (29). Pp. 29–30 (in Russian).

14. Goloskokov D. P., Matrosov A. V. Approximate analytical approach in analyzing an orthotropic rectangular plate with a crack. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. 36. Pp. 137–141. https://doi.org/10.18720/MPM.3612018_15.

15. Galileev S. M., Matrosov A. V. Method of initial functions: Stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. *Composite Structures*. 1997. 39. Pp. 255–262. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(97\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(97)00108-6).

16. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.

17. Kirsanov M. N. Analytical calculation of deflection of rectangular spatial roof structure. *Vestnik MGSU*. 2018. Vol. 13, issue 5 (116). Pp. 579–586. DOI: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586 (in Russian).

**LOWER ESTIMATE
OF RECTANGULAR SPATIAL COATING NATURAL OSCILLATIONS
FIRST FREQUENCY**

M. N. Kirsanov ¹, O. V. Gribova ²

National Research University «MPEI» ^{1,2}
Moscow, Russia

¹ Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

² Senior Lecturer of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: gribovaov@mail.ru

The scheme of statically determinate regular roof truss with vertical supports – racks along the perimeter of the structure is considered. To derive the formula for the dependence of the main frequency of natural oscillations on the number of panels, the simplified Dunkerley method is used. The inertial properties of the structure are modeled by masses in its nodes performing vertical oscillations. To calculate the rigidity of the truss, the Maxwell formula is used. Comparison of the results of the analytical solution with the numerical one shows satisfactory accuracy of the proposed approach. For analytical transformations, the Maple symbolic mathematics system is used. The solution for an arbitrary number of panels is obtained by induction based on the data of calculations of a sequence of trusses of different orders. It is shown that the accuracy of the method strongly depends on the parity of the number of panels in the truss.

Key words: spatial truss, natural frequency, Dunkerley method, Maple, induction method, Maxwell's formula.

УДК 624.04

DOI 10.36622/2219-1038.2025.44.1.002

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ РАЗЛИЧНОЙ ВЫСОТНОСТИ НА ВЕТРОВЫЕ И СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

С. Г. Саиян¹, М. В. Шитикова²Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет^{1,2}
Россия, г. Москва

¹ Науч. сотр. НОЦ КМ им. А. Б. Золотова, аспирант кафедры строительной и теоретической механики, тел.: +7(495)287-49-14, e-mail: berformert@gmail.com

² Д-р физ.-мат. наук, проф. кафедры строительной и теоретической механики, тел.: +7(495)287-49-14, e-mail: mvs@cchgeu.ru

Представлен сравнительный анализ динамического отклика зданий различной высотности на ветровые и сейсмические воздействия, выполненный с использованием метода прямого интегрирования во времени и методики суперэлементного моделирования. Рассматриваются пять типов зданий с габаритами $40 \times 40 \times 40 \times n$ ($n = 1 \dots 5$), что соответствует высотам от 40 до 200 м. Для сейсмических расчётов применены акселерограммы Карпатского землетрясения с учётом вариации балльности (5–10 баллов), а для ветровых воздействий использован авторский программный комплекс «WindSpectrum», основанный на базе данных ветровых воздействий. Показано, что при увеличении высотности сооружений существенно возрастают резонансные эффекты и динамические перемещения верхних этажей, причём в ряде случаев ветровые нагрузки могут превосходить сейсмические по интенсивности. Установлено, что стандартная методика расчёта (СП 20.13330.2016) в направлении вдоль ветра даёт завышенные значения перемещений и ускорений, а в направлении поперёк ветрового потока, напротив, недооценивает пульсационную составляющую. Результаты сопоставления ветровых и сейсмических воздействий демонстрируют, что для низких и среднеэтажных зданий доминируют сейсмические эффекты при умеренном уровне балльности, тогда как для высотных сооружений ветровая нагрузка может стать критическим фактором. Полученные выводы позволяют оптимизировать проектные решения и повысить безопасность эксплуатации высотных объектов в условиях комплексного влияния внешних динамических нагрузок.

Ключевые слова: динамический отклик, ветровые воздействия, сейсмические воздействия, здания и сооружения, конечно-элементное моделирование, суперэлементный анализ.

Введение. В современной строительной практике вопросы обеспечения надёжности и безопасности зданий и сооружений при различных динамических воздействиях приобретают особую актуальность. Интенсивное градостроительство, усложнение архитектурных решений и постоянный рост высотности объектов требуют тщательного анализа поведения конструкций под влиянием ветровых и сейсмических воздействий. При этом динамический отклик зданий различной высотности может значительно варьироваться из-за отличий в жёсткостных, инерционных и демпфирующих характеристиках несущих систем. Изучение динамики строительных конструкций особенно важно в регионах с повышенной сейсмической активностью (для России порядка 30 % территории страны) и в районах, подверженных интенсивным ветровым воздействиям (например, прибрежных территориях или местности с выраженными ураганскими ветрами).

Несмотря на наличие обширного количества работ, посвящённых анализу динамической реакции зданий на сейсмические и ветровые воздействия, до сих пор остаётся пробел в комплексном сравнительном исследовании объектов различной высотности. Известно, что даже здания-небоскрёбы, спроектированные с соблюдением требований по предельным боковым смещениям, способны испытывать заметные колебания во время сильных ураганных ветров. Причём с увеличением высоты сооружения возрастает его уязвимость к ветровым колебаниям,

что делает проблему определения динамического отклика при ветровых воздействиях весьма важной. Аналогично и в сейсмически активных районах: обеспечение сейсмостойкости зданий является первостепенной задачей, так как строения должны выдерживать землетрясения различной интенсивности без обрушения. Таким образом, исследование динамического отклика зданий различной высотности на ветровые и сейсмические воздействия актуально как с научной точки зрения (для углубления понимания динамического поведения конструкций), так и с практической – для повышения безопасности и комфорта эксплуатации сооружений.

Необходимо учитывать, что строения малой, средней и большой высоты обладают разными динамическими характеристиками, от чего напрямую зависит их реакция на внешние возмущения. С увеличением высоты здания его каркас становится более гибким, а низшая частота собственных колебаний снижается [1]. Это приводит к тому, что один и тот же внешний импульс – порыв ветра или сейсмический толчок – вызывает различный динамический отклик в зависимых от высоты конструкциях. Так, для относительно невысокого здания ветровое воздействие может носить почти квазистатический характер, не вызывая ощутимых колебаний, тогда как для очень высокого и гибкого здания порывы ветра способны привести к заметным резонансным колебаниям. В случае землетрясения жёсткое малоэтажное строение испытает преимущественно высокочастотные колебания, тогда как у гибкого высотного здания возбуждятся низкочастотные режимы с вовлечением нескольких форм колебаний в динамический процесс.

Динамический вклад при ветровых воздействиях с увеличением высотности зданий и сооружений зачастую оказывается настолько значительным, что по своей интенсивности может превосходить даже сейсмические воздействия [1]. При этом важно учитывать эффекты аэродинамической интерференции, возникающие в условиях плотной городской застройки, когда здания влияют на воздушные потоки друг друга [2]. Здания могут экранировать одно другое от ветра или, наоборот, усиливать ветровые нагрузки за счёт концентрации воздушных потоков между сооружениями. Подобные явления особенно существенны при проектировании высотных комплексов в условиях плотной городской застройки.

Для корректного учёта ветровых и сейсмических воздействий важно сравнивать спектральные характеристики внешнего воздействия с собственными частотами колебаний зданий, так как резонансные явления могут привести к существенным дополнительным нагрузкам. На рис. 1 сопоставлены спектральные плотности скорости ветра и ускорения грунта с частотами собственных колебаний основных типов сооружений [3, 4]. Из рис. 1 видно, что хоть и сейсмическое воздействие является более «мощным», чем ветровое воздействие, однако оно реализуется на более высоких частотах колебаний, что покрывает интервал наиболее энергетического спектра при частотах, близких к собственным частотам колебаний для нормальных по высоте зданий.

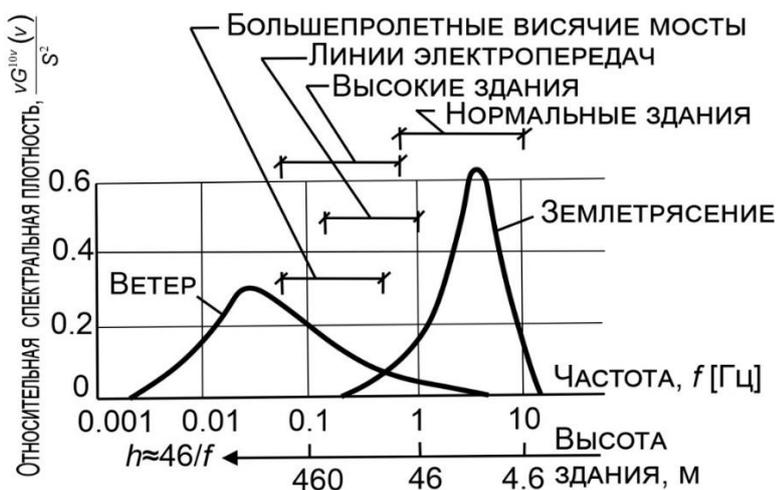


Рис. 1. Сопоставление спектральных плотностей скорости ветра и ускорения грунта с частотами собственных колебаний основных типов сооружений [3, 4]

Ординаты спектральных плотностей (рис. 1) представлены в безразмерной форме; спектр ветра вычислен для $\mu_{v10} = 20$ м/с и $S_{v10}^2 = 2400$ м/с² (где G – коэффициент, учитывающий шероховатость поверхности грунта и принимаемый обычно в пределах от 0,005 до 0,015); спектр землетрясения соответствует значениям $\mu_a = 0$ и $S_a^2 = 0,38$ м²/с⁴.

Таким образом, в данной статье ставится цель восполнить существующий научный пробел и провести сравнительный анализ динамического отклика зданий и сооружений разной высоты на ветровые и сейсмические воздействия различной интенсивности (ветровых и сейсмических районов / балльности по классификации СП 20.13330.2016 и СП 14.13330.2018). Предполагается исследовать влияние высотности (что влияет на жёсткость, массу, собственные частоты, коэффициенты демпфирования и т. д.), а также определить, каким образом высотность объекта сказывается на характере динамического отклика при внешних воздействиях. Результаты работы позволят как более точно оценивать риски, так и оптимизировать конструктивные решения в проектной практике, что особенно важно для снижения материальных затрат и повышения безопасности эксплуатации объектов.

Постановка задачи. Рассматривается типовой проект здания с габаритными размерами $40 \times 40 \times 40 \cdot n$, где n – количество секций по высоте $n = 1, 2, 3, 4, 5$ [1]. Размерность пластинчато-стержневой конечно-элементной модели секции $40 \times 40 \times 40$ м составляла 6561 элемент и 3059 узлов. На рис. 2 представлены конечно-элементные модели железобетонного здания, для которых проводился сравнительный анализ. Основное допущение расчетных исследований – линейный расчет. Для сбора масс задан собственный вес и полезная нагрузка. В качестве исследуемых параметров воздействий рассматриваются: (1) ветровое воздействие для 1–7-го ветровых районов, тип местности В; (2) сейсмическое воздействие – 5–10 баллов.

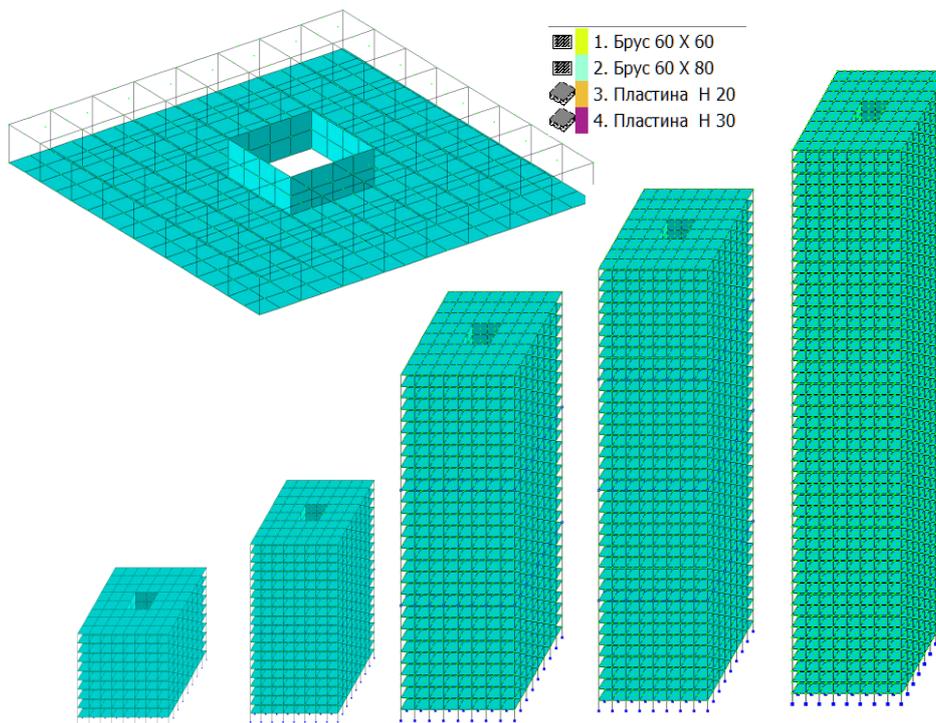


Рис. 2. Конечно-элементная модель этажа и железобетонного здания размерами $40 \times 40 \times 40 \cdot n$, где $n = 1, 2, \dots, 5$

В качестве расчетной акселерограммы выбрано Карпатское землетрясение (рис. 3). Для варьирования балльности акселерограммы масштабировались амплитуды (ось OY) для соответствия требуемым уровням ускорения (п. 5.2.2 СП 14.13330.2018). Каждая последующая балльность приводит к удвоению амплитуд ускорений в уровне основания сооружения.

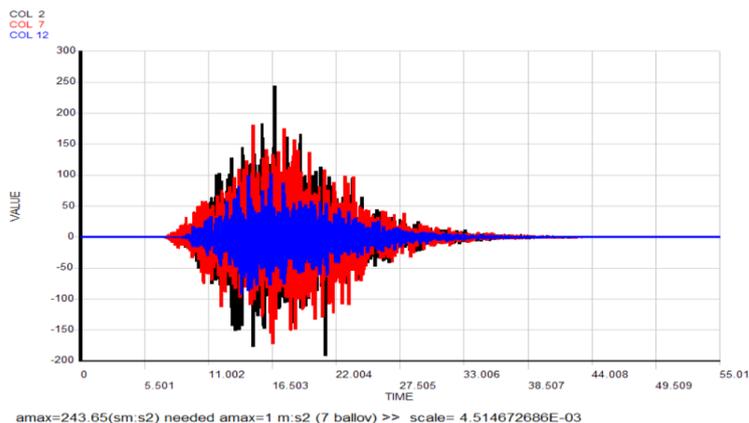


Рис. 3. Акселерограмма Карпатского землетрясения, соответствующая 7 баллам: черный график – X-компонента, красный – Y-компонента, синий – Z-компонента (вертикальная)

Ниже приведены спектры акселерограммы и сейсмограммы (рис. 4), а также спектр велосиграммы с отмеченными низшими собственными частотами колебаний рассматриваемых расчетных моделей зданий (рис. 5).

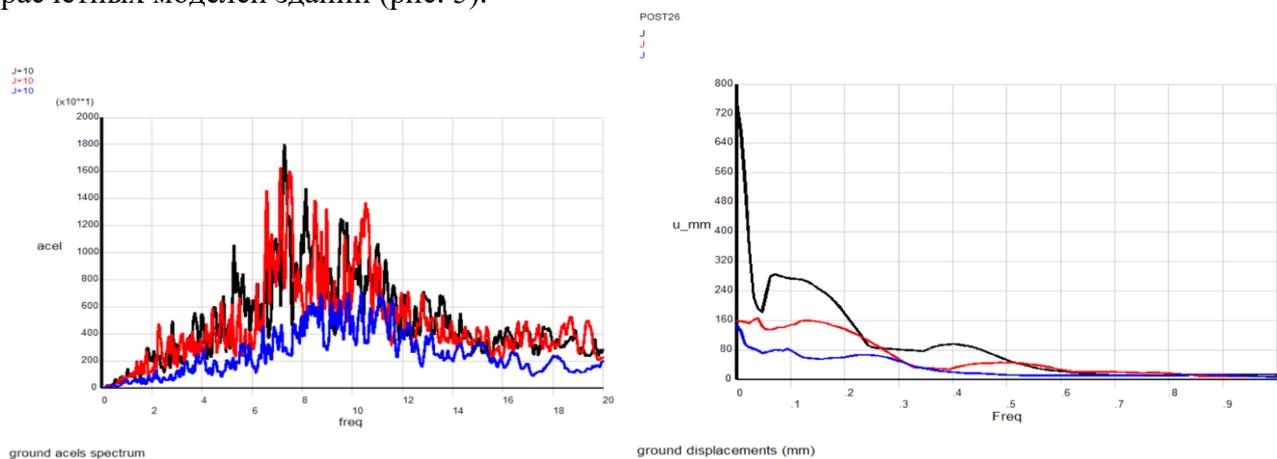


Рис. 4. Спектр акселерограммы (слева) и сейсмограммы (справа)

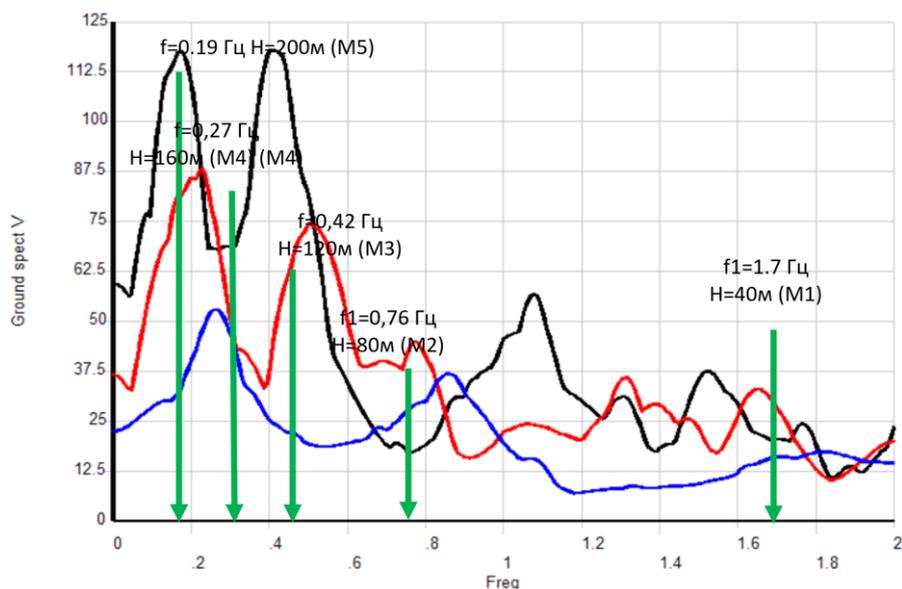


Рис. 5. Спектр велосиграммы с отмеченными низшими собственными частотами колебаний рассматриваемых расчетных моделей зданий

Сравнение напрямую ветровых и сейсмических воздействий является некорректным по следующим причинам:

- ветровые нагрузки в СП 20.13330.2016 рассчитываются на основе метеорологических данных за последние 50 лет, в то время как сейсмические карты общего сейсмического районирования строятся на основе геологических, сейсмотектонических и исторических данных, причем их временные интервалы значительно больше – от 500 (карта А ОСР-2015) до 5 000 лет (карта С ОСР-2015);
- ветровые воздействия относятся к первому и второму предельным состояниям, в то время как расчеты на контрольное землетрясение (максимальное расчетное землетрясение) относятся к особому предельному состоянию для оценки общей устойчивости, однородности и неизменяемости.

Сопоставление ветровых и сейсмических воздействий на примерах рассмотренных расчетных моделей зданий является условным и производится на основе оценки интенсивности воздействий по эквивалентным напряжениям на уровне консольной опоры:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F} + \frac{M_x + M_y}{W}, \quad (1)$$

где N – продольное усилие в уровне опоры; M_x и M_y – опорные изгибающие моменты; F и W – площадь и момент сопротивления поперечного сечения эквивалентной модели (на основе стержневой).

Ветровые воздействия сгенерированы программным комплексом «WindSpectrum» [5], разработчиком которого является один из авторов настоящей статьи. Программный комплекс «WindSpectrum» предназначен для определения нестационарных (во времени) ветровых нагрузок на прямоугольные в плане здания и сооружения различных габаритов и конфигураций при различных углах атаки ветра. В её основе лежит постоянно пополняемая база данных аэродинамических коэффициентов давления, которая может расширяться результатами экспериментального или численного моделирования.

Методика прямого динамического конечно-элементного анализа. Метод расчета основан на прямом динамическом конечно-элементном анализе отклика конструкций, реализованном в программном комплексе «ANSYS Mechanical APDL», когда нагрузка линейно пропорциональна узловым перемещениям, а матрица жесткости системы остается неизменной. Уравнение движения в матричной форме метода конечных элементов можно записать в следующем виде:

$$[M]\{\ddot{u}_{n+1}\} + [C]\{\dot{u}_{n+1}\} + [K]\{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}^a\}, \quad (2)$$

где $\{\ddot{u}_{n+1}\} = \{\ddot{u}(t_{n+1})\}$, $\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}(t_{n+1})\}$ и $\{u_{n+1}\} = \{u(t_{n+1})\}$ – соответственно векторы узловых ускорений, скоростей и перемещений в момент времени (t_{n+1}) ; $\{F_{n+1}^a\} = \{F_{n+1}^a(t_{n+1})\}$ – вектор приложенных узловых нагрузок.

В дополнение к уравнению (2) семейство алгоритмов интегрирования во времени Ньюмарка требует обновления перемещений и скорости следующим образом:

$$\{\dot{u}_{n+1}\} = \{\dot{u}_n\} + [(1-\delta)\{\ddot{u}_n\} + \delta\{\ddot{u}_{n+1}\}]\Delta t, \quad (3)$$

$$\{u_{n+1}\} = \{u_n\} + \{\dot{u}_n\}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \{\ddot{u}_n\} + \alpha \{\ddot{u}_{n+1}\} \right] \Delta t^2, \quad (4)$$

где α и δ – параметры интегрирования Ньюмарка: $\left(\delta \geq \frac{1}{2}, \alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} + \delta \right)^2 \right)$.

В конечном итоге схема интегрирования Ньюмарка состоит из трех уравнений конечных разностей, представленных в уравнении (2) с учетом соотношений (3) и (4), а также трех неизвестных $\{\ddot{u}_{n+1}\}$, $\{\dot{u}_{n+1}\}$ и $\{u_{n+1}\}$, которые могут быть вычислены численно с помощью трех алгебраических уравнений вместе с тремя известными величинами $\{\ddot{u}_n\}$, $\{\dot{u}_n\}$ и $\{u_n\}$.

Используя три уравнения (2)–(4), одношаговый алгоритм в терминах неизвестной $\{u_{n+1}\}$ и трех известных величин можно записать как

$$\begin{aligned} (\alpha_0 [M] + \alpha_1 [C] + [K]) \{u_{n+1}\} = \{F_{n+1}^a\} + \\ + [M] (\alpha_0 \{u_n\} + \alpha_2 \{\dot{u}_n\} + \alpha_3 \{\ddot{u}_n\}) + [C] (\alpha_1 \{u_n\} + \alpha_4 \{\dot{u}_n\} + \alpha_5 \{\ddot{u}_n\}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $\alpha_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}$, $\alpha_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}$, $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}$, $\alpha_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1$, $\alpha_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1$, $\alpha_5 = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta}{\alpha} - 2 \right)$ – параметры интегрирования.

Учет демпфирующих свойств на основе Рэлеевского демпфирования [7–9] выполняется через коэффициенты α (пропорциональности масс) и β (пропорциональности жесткости), посчитанные на основе круговых частот колебаний конструкции ω_i и ω_j . Для сейсмике линейные частоты для Рэлеевского демпфирования выбирались от первой собственной частоты колебаний до 33 Гц; для расчетов на ветровые воздействия – от первой собственной частоты колебаний до предельного значения собственной частоты f_{lim} (табл. 11.5 СП 20.13330.2016).

Метод динамического синтеза подконструкций. Поскольку размерность расчетных моделей достаточно велика (учитывая многовариантные расчеты на ветровые и сейсмические воздействия), то они были редуцированы методом Component Mode Synthesis (CMS) (метод динамического синтеза подконструкций) для формирования суперэлементов с целью снижения размерности задачи.

В основе данного метода лежит разбиение матричного уравнения (1) на внешние (интерфейсные, или граничные) и внутреннюю степени свободы [10]:

$$\begin{aligned} \{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_{ex}\} \\ \{u_{in}\} \end{Bmatrix}; \quad [M] = \begin{bmatrix} M_{ex,ex} & M_{ex,in} \\ M_{in,ex} & M_{in,in} \end{bmatrix}; \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{ex,ex} & C_{ex,in} \\ C_{in,ex} & C_{in,in} \end{bmatrix}; \\ [K] = \begin{bmatrix} K_{ex,ex} & K_{ex,in} \\ K_{in,ex} & K_{in,in} \end{bmatrix}; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} \{F_{ex}\} \\ \{F_{in}\} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

где *ex* (external – наружные) – основные степени свободы, которые являются внешними (интерфейсными, или граничными); *in* (internal – внутренние) – все остальные степени свободы.

Вектор перемещений $\{u\}$ может быть представлен в виде обобщенных координат:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_{ex}\} \\ \{u_{in}\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{u_{ex}\} \\ \{y_{\delta}\} \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где y_{δ} – усеченный набор обобщенных модальных координат; $[T]$ – матрица преобразования, к формированию которой существует большое количество различных подходов, основными из которых являются метод фиксированной границы (метод Крейга-Бэмптона) [11], метод свободной границы (метод Гертинга) [12, 13], а также метод остаточно-гибкого свободного интерфейса (метод Мартинеса) [14].

Эквивалентная суперэлементная динамическая система. Для обоснования корректности подобной эквивалентной суперэлементной системы зданий необходимо сопоставление по собственным частотам и формам колебаний нескольких низших собственных частот

(поскольку именно низшие собственные частоты и формы колебаний формируют большой процент вовлеченной модальной массы). На рис. 6 приведены низшие собственные частоты и формы колебаний рассматриваемых моделей. В табл. 1 приведено сопоставление по первым 5-ти собственным частотам колебаний полномасштабной КЭ-модели и их суперэлементного эквивалента.

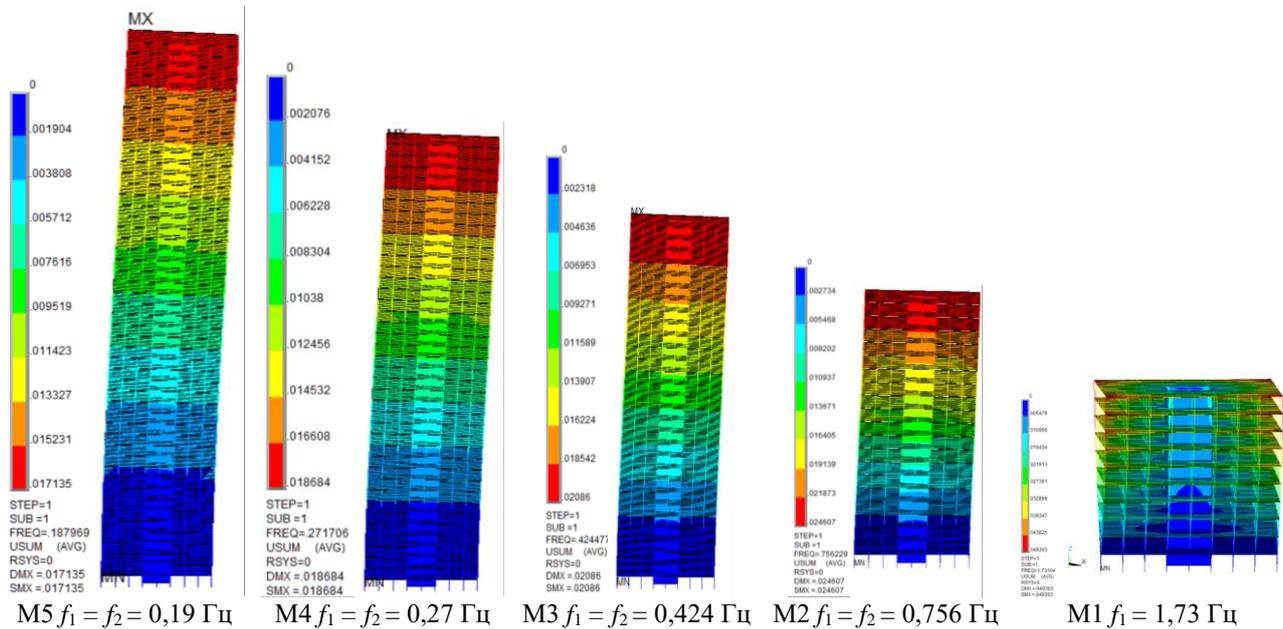


Рис. 6. Низшие собственные частоты и формы колебаний рассматриваемых моделей

Таблица 1

Собственные частоты полномасштабной КЭ-модели и суперэлементов

Частота, Гц	Тип формы	КЭ-модель	Суперэлемент	Δ , %
Модель 1. 40×40×40 м				
f_1	Крутильная	1,731	1,827	5,518
$f_2 = f_3$	Изгибная	1,836	1,849	0,714
$f_4 = f_5$	Изгибная	5,172	6,350	22,792
Модель 2. 40×40×80 м				
$f_1 = f_2$	Изгибная	0,756	0,757	0,131
f_3	Крутильная	0,867	0,879	1,438
$f_4 = f_5$	Изгибная	2,530	2,579	1,943
Модель 3. 40×40×120 м				
$f_1 = f_2$	Изгибная	0,424	0,425	0,043
f_3	Крутильная	0,577	0,581	0,645
$f_4 = f_5$	Изгибная	1,490	1,501	0,748
Модель 4. 40×40×160 м				
$f_1 = f_2$	Изгибная	0,272	0,272	0,018
f_3	Крутильная	0,432	0,434	0,364
$f_4 = f_5$	Изгибная	1,012	1,016	0,345
Модель 5. 40×40×200 м				
$f_1 = f_2$	Изгибная	0,188	0,188	0,009
f_3	Крутильная	0,346	0,581	0,346
$f_4 = f_5$	Изгибная	0,745	0,747	0,180

На основе анализа результатов сопоставления низших собственных частот колебаний можно заявлять о корректности подобной суперэлементной системы, являющейся динамически эквивалентной полномасштабной КЭ-модели.

Динамический отклик при сейсмических воздействиях. В данном подразделе кратко представлены результаты динамического отклика моделей М1, М2 и М5 для 7-балльного землетрясения (рис. 7–12). Всего было проведено 30 расчетов на сейсмическое воздействие (5 моделей (М1–М5)) × 6 видов балльности (с 5-балльного по 10-балльное землетрясение)) в прямой динамической (во временной области) постановке.

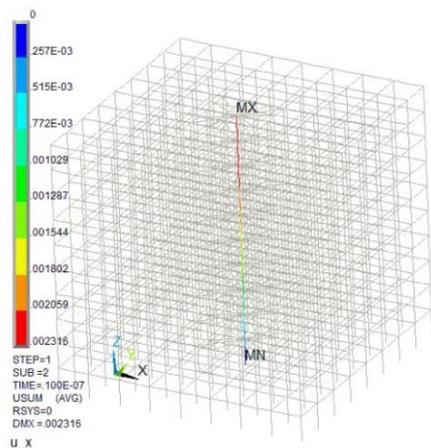
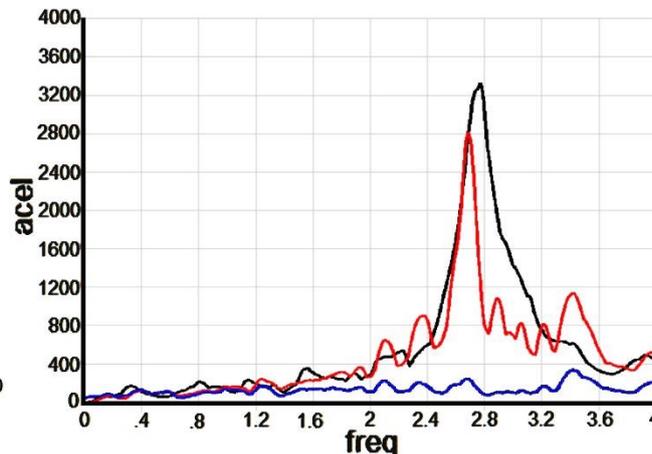
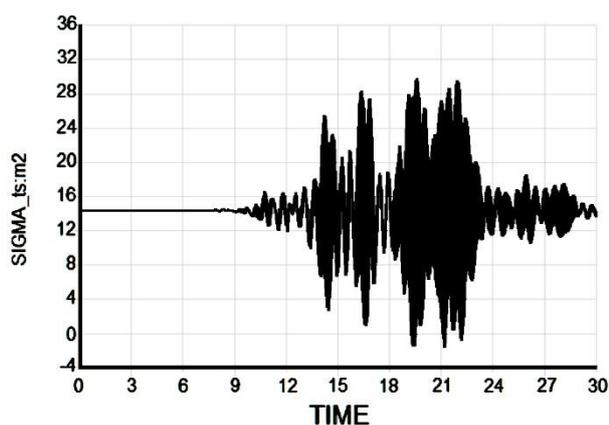


Рис. 7. Колебание здания (в виде суперэлемента) во времени для модели М1 при сейсмических воздействиях



SIGMA_ts:m2 equivalent beam model 1

Рис. 8. σ_{\max} по эквивалентной модели (слева) для 7-балльной сеймики и спектр ускорения верхнего этажа (справа). На графике спектра: черный цвет – по X, красный – по Y, синий – по Z

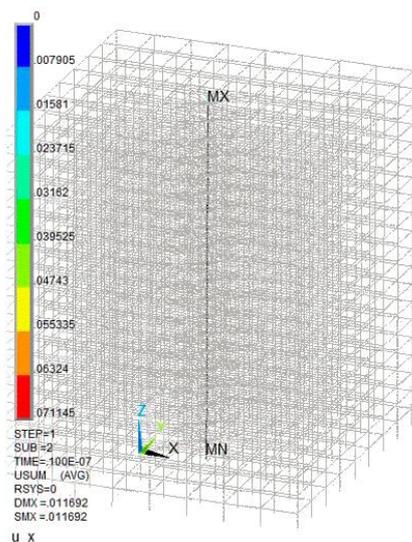


Рис. 9. Колебание здания (в виде суперэлемента) во времени для модели М2 при сейсмических воздействиях

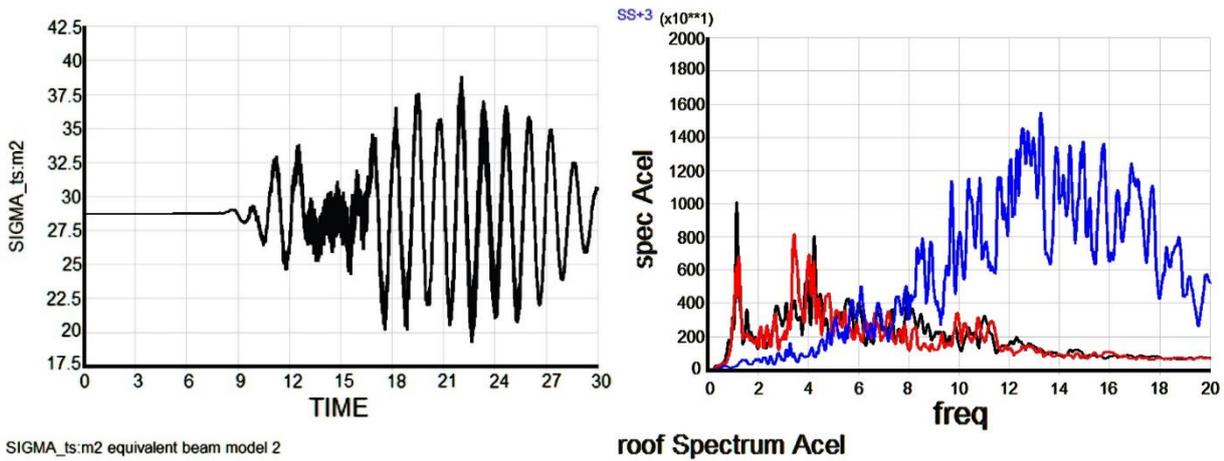


Рис. 10. σ_{max} по эквивалентной модели для 7-балльной сеймики (слева) и спектр ускорения верхнего этажа (справа), где черный цвет – по X, красный – по Y, синий – по Z

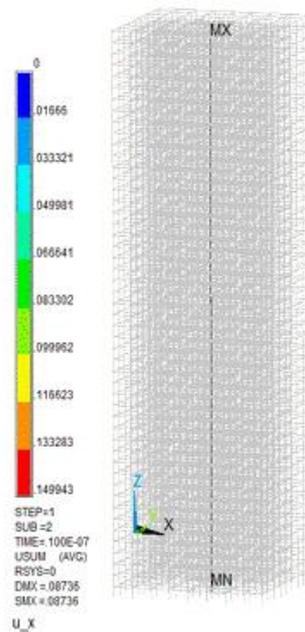


Рис. 11. Колебание здания (в виде суперэлемента) во времени для модели М5 при сейсмических воздействиях

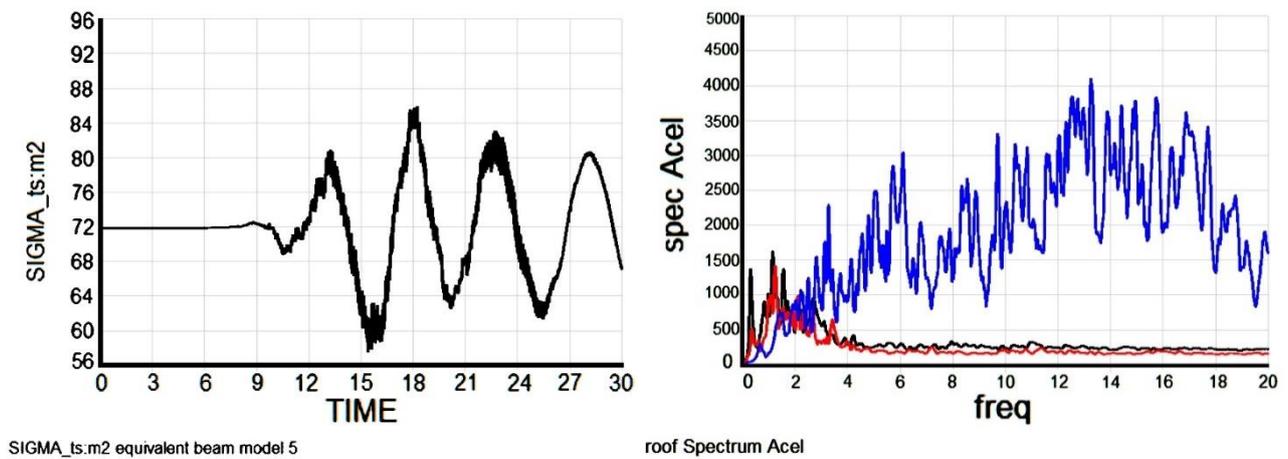


Рис. 12. σ_{max} по эквивалентной модели для 7-балльной сеймики (слева) и спектр ускорения верхнего этажа (справа), где черный цвет – по X, красный – по Y, синий – по Z

Динамический отклик при ветровых воздействиях. В данном подразделе кратко представлены результаты динамического отклика моделей М4 и М5 для 1-го ветрового района (рис. 13–16).

Всего было проведено 35 расчетов на ветровые воздействия (5 моделей (М1–М5)) × 7 ветровых районов (с 1-го по 7-й ветровые районы)) в прямой динамической (во временной области) постановке.

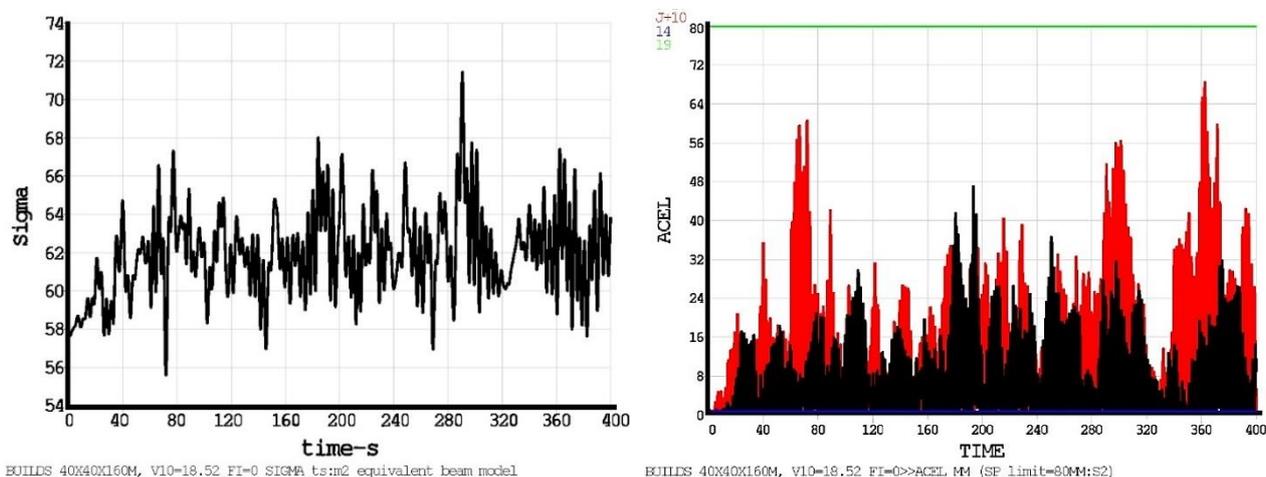


Рис. 13. σ_{\max} по эквивалентной модели М4 для 1-го ветрового района (слева) и ускорения (по модулю) верхнего этажа (зеленым цветом показано ограничение СП 20 по динамической комфортности 80 мм/м²) (справа), где черным цветом показаны ускорения вдоль ветра, а красным – перпендикулярно ветру

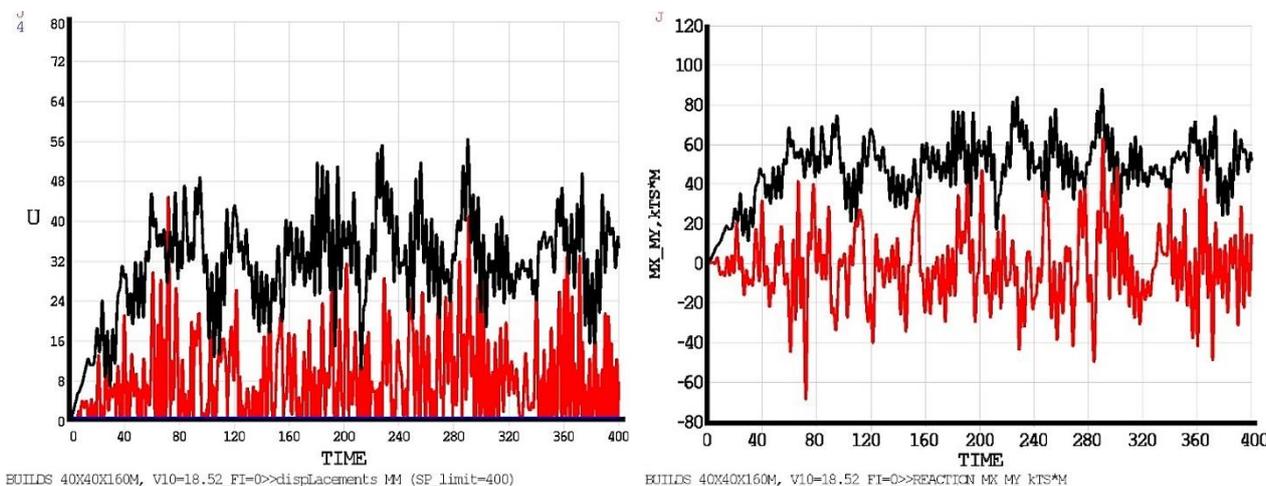


Рис. 14. Перемещения (по модулю) верхнего этажа (слева) и опорные реакции M_x (вдоль потока) и M_y (поперек потока) для модели М4, где черным цветом показаны ускорения вдоль ветра, а красным – перпендикулярно ветру

В табл. 2 представлены результаты динамического отклика для здания М5, рассчитанного по методике СП 20.13330.2016. Сравнительный анализ результатов для высотного здания М5 по методике СП 20.13330.2016 и на основе программного комплекса «WindSpectrum» показывает, что в направлении вдоль потока (u_x и a_x) СП 20 дает завышенную оценку как средних, так и пульсационных величин (по ускорениям – на 30 % в пике, по перемещениям – на 78,5 % в пике), в то время как для направления поперек потока (u_y и a_y) СП 20 дает сильно заниженное значение пульсационных величин (почти в 8 раз по ускорениям и почти в 7,5 раз по перемещениям).

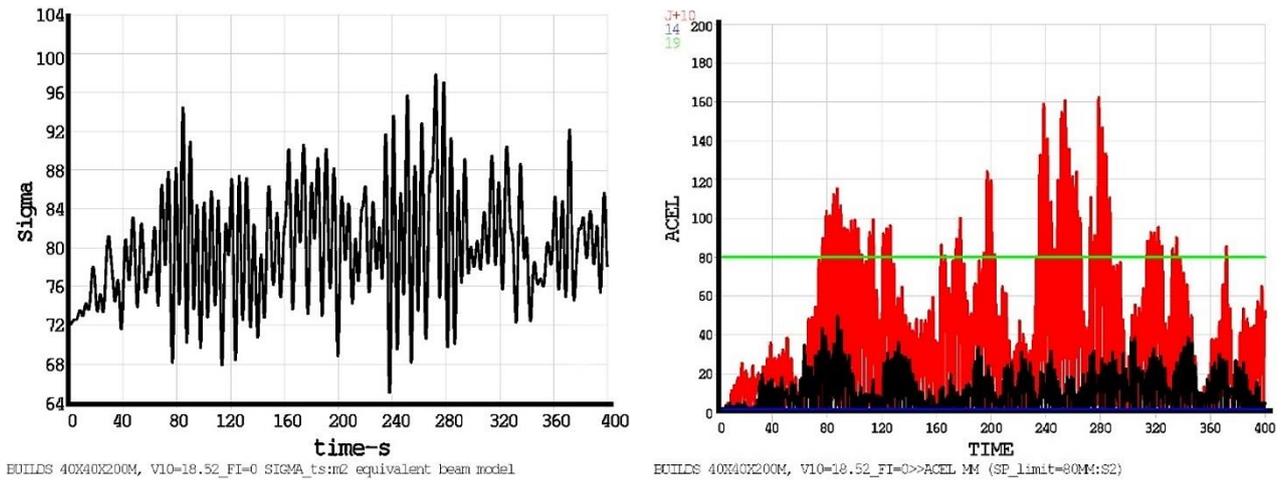


Рис. 15. σ_{max} по эквивалентной модели М5 для 1-го ветрового района (слева) и ускорения (по модулю) верхнего этажа (зеленым цветом показано ограничение СП20 по динамической комфортности 80 мм/м²) (справа), где черным цветом показаны ускорения вдоль ветра, а красным – перпендикулярно ветру

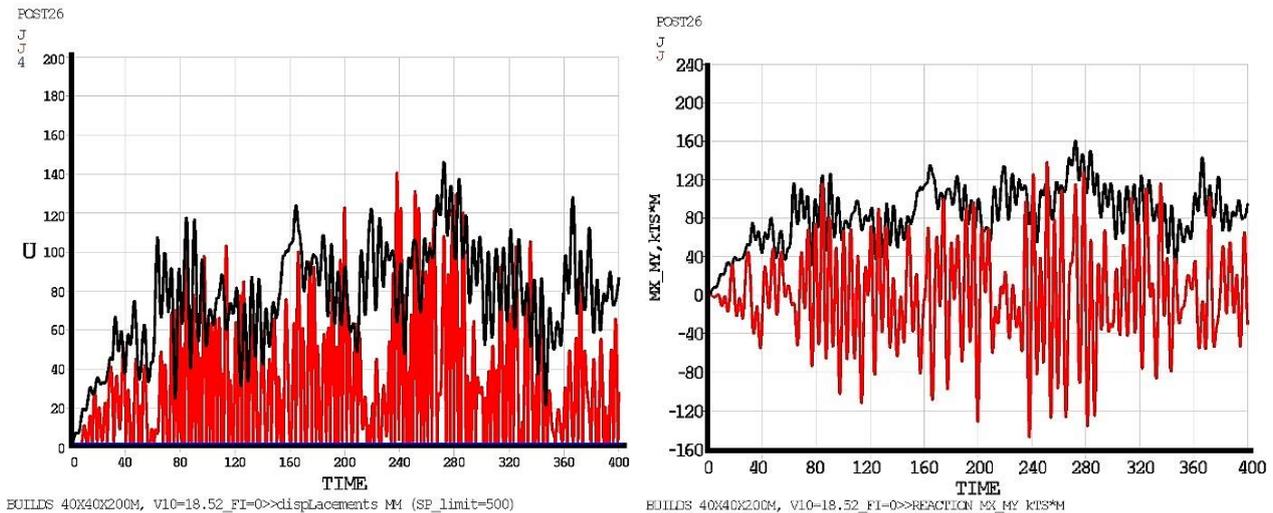


Рис. 16. Перемещения (по модулю) верхнего этажа (слева) и опорные реакции M_x (вдоль потока) и M_y (поперек потока) для модели М5, где черным цветом показаны вдоль ветра, а красным – перпендикулярно ветру

Таблица 2

Результаты динамического отклика здания М5 (40×40×200) при ветровых воздействиях по методике СП 20.13330.2016

Здание 40×40×200 м							
	Ветровой район	u_x (ср+пульс), мм	u_y (ср+пульс), мм	$F_{x\ sum}$, кН	$F_{y\ sum}$, кН	a_x , мм/с ²	a_y , мм/с ²
Ветер	1	90,3+61,5	0+18,5	7920,06+3512	0+1058	66,1	19,9
	2	118+82	0+24,7	10332+4685	0+1411	88,2	26,6
	3	149+105	0+31,6	13086+5987	0+1804,1	113	34
	4	188+132	0+39,8	16506+7552	0+2275	142	42,8
	5	236+166	0+50	20699,9+9471	0+2854	178	53,7

Обобщающие результаты сопоставления динамического отклика зданий при ветровых и сейсмических воздействиях. Рис. 17 представляет собой обобщающие результаты проведенного исследования по сравнению ветровых и сейсмических воздействий

(с учетом гипотез и условностей, принятых в данной постановке). На графике представлены результаты зависимости интенсивности воздействия по эквивалентной балочной модели (см. формулу (5)) к высоте зданий для различных районов (для ветровых воздействий) и балльности (для сейсмических воздействий).

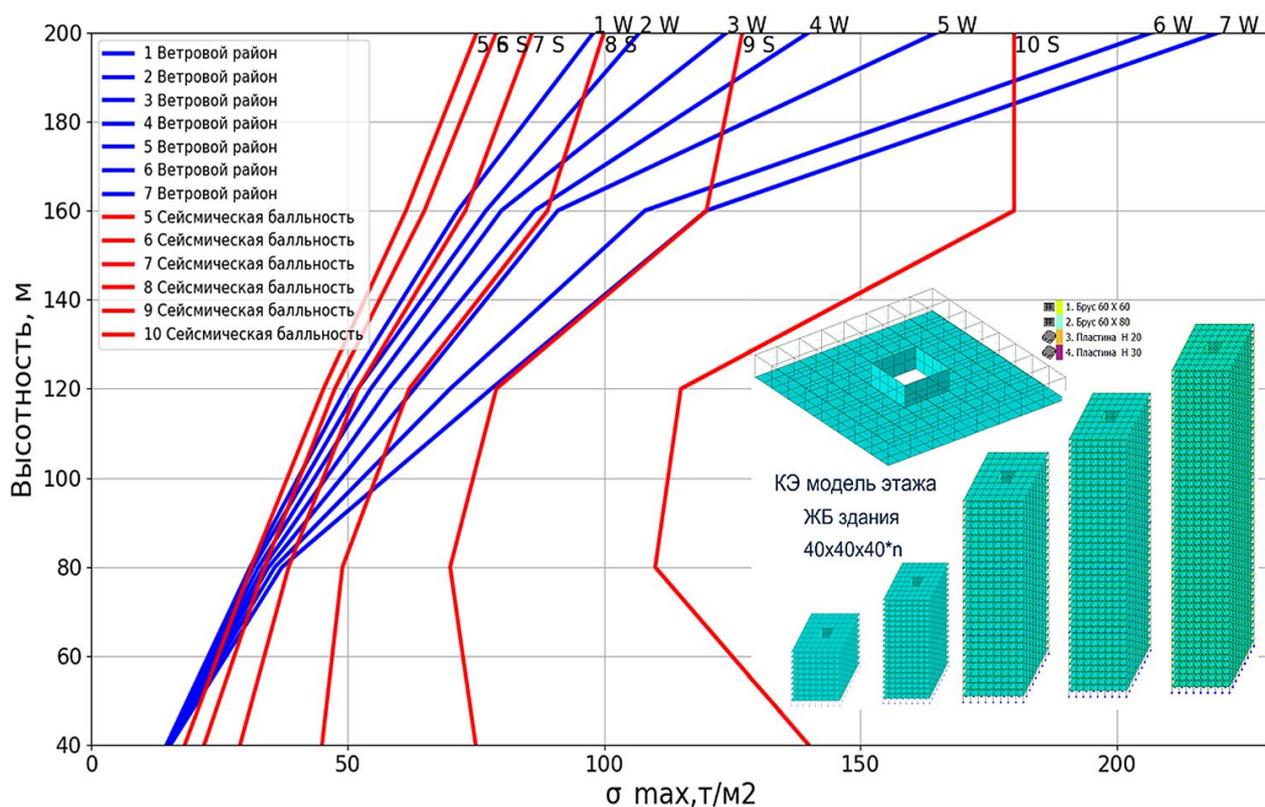


Рис. 17. Обобщающие результаты проведенного исследования по сравнению динамического отклика зданий разной высоты при ветровых и сейсмических воздействиях

Выводы. В результате проведенного сравнительного анализа динамического отклика зданий и сооружений различной высоты на ветровые и сейсмические воздействия установлено, что влияние высоты сооружения и соответствующих ей жёсткостных, инерционных и демпфирующих характеристик является определяющим фактором при выборе конструктивных решений и оценке рисков, связанных с внешними динамическими возмущениями. Полученные данные позволили сделать следующие выводы:

1. *Динамический отклик при сейсмических воздействиях.* Анализ временных реализаций и спектральных характеристик акселерограмм показал, что для малоэтажных зданий (М1, высота 40 м) преобладают высокочастотные колебания с меньшими перемещениями верхнего этажа и меньшими пиковыми ускорениями. Напротив, высотные здания (М5, высота 200 м) характеризуются более заметными низкочастотными колебаниями, вовлекающими несколько форм, что приводит к увеличенным перемещениям верхних этажей. Увеличение балльности землетрясения закономерно усиливает отклик, повышая как пиковые эквивалентные напряжения (σ_{max}), так и горизонтальные ускорения верхних этажей. При этом особенно сильно возрастает чувствительность высотных зданий к резонансным эффектам;

2. *Динамический отклик при ветровых воздействиях.* Ветровые нагрузки, особенно в сочетании с пульсационной (динамической) составляющей, могут приводить к существенным дополнительным перемещениям и ускорениям верхних этажей у высотных зданий. Выявлено, что в направлении вдоль ветра расчёты по СП 20.13330.2016 дают завышенные значения для высоких сооружений по сравнению с результатами численного

моделирования (до 78,5 % в перемещениях и около 30 % в ускорениях). В направлении поперёк ветрового потока стандартная методика, напротив, может сильно недооценивать пульсационную составляющую (почти в 8 раз по ускорениям и около 7,5 раз по перемещениям). Данные результаты указывают на необходимость детализированной оценки аэродинамической интерференции для высотных зданий и потенциального корректирования нормативных методов расчёта;

3. *Сопоставление ветровых и сейсмических воздействий.* При сравнительно низкой высотности (до ~60–80 м) ветровые нагрузки могут быть ниже или сопоставимы с сейсмическими воздействиями 5–6-балльности. То есть если здание невысокое и жёсткое, то даже умеренная сейсмика способна стать доминирующим фактором в расчёте прочности. В диапазоне средних высот (около 100–120 м) ветровые воздействия 5–6 районов начинают давать тот же порядок интенсивности, что и сейсмика 7–8 баллов. Для высот свыше 160 м становится заметно, что ветровые воздействия значительно увеличиваются в сравнении с сейсмическими. Так, например, для здания высотой 200 метров 1-й ветровой район сопоставим с 8-балльной сейсмикой, а 3-й ветровой район – с 9-балльной сейсмикой. Это подчёркивает важность тщательного динамического анализа именно для ветровой компоненты у высотных зданий, особенно с учётом пульсационных эффектов и потенциальной аэродинамической интерференции.

Сведения о финансировании: работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-49-02002.

Библиографический список

1. Саиян С. Г. Сравнительный анализ динамического отклика зданий и сооружений различной высотности на ветровые и сейсмические воздействия // Материалы X Международной научной конференции «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»), 29–30 сентября. – Москва, 2022.
2. Саиян С. Г., Ефимова А. М. Расчетные аэродинамические исследования комплекса Московского международного делового центра «Москва-Сити» при последовательном возведении зданий // Вестник МГСУ. – 2024. – Т. 19, № 6. – С. 906–941. – DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.906-941.
3. Ferry-Borges J., Castanheta M. Structural Safety. – Lisbon: LNEC, 1971, 150 p.
4. Аугусти Г., Баратта А., Кашиати Ф. Вероятностные методы в строительном проектировании / Пер. с англ. Ю. Д. Сухова. – М.: Стройиздат, 1988. – 584 с. – Перевод.: Probabilistic Method in Structural Engineering. – London – New York: Chapman and Hall, 1984. – ISBN 5-274-00212-9.
5. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025614895 Российская Федерация. WindSpectrum: № 2025612964: заявл. 13.02.2025: опубл. 26.02.2025 / С. Г. Саиян, Д. С. Синякин.
6. Newmark N. M. A method of computation for structural dynamics // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1959. – Vol. 85, No. 3. – Pp. 67–94.
7. Tizoc M., Valenzuela-Beltrán F., Bojorquez E., Bojorquez J., Gaxiola-Camacho J. R., Leal-Graciano J., Chavez R., Reyes-Salazar A. Rayleigh Damping vs. Modal Damping Matrix Superposition for Steel Frames and Evaluation of Higher-Mode Contribution // Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering. – 2024. – Pp. 1–17. – DOI: 10.1007/s40996-024-01615-2.
8. Kou M., Jinhua S., Daiki S., Yinli C., Razelle D. A. S., Satoshi N. Wind-load estimation for seismically isolated building by equivalent-input-disturbance approach with robust-control strategy // Control Engineering Practice. – 2024. – Vol. 145. – PaperID 105853. – <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2024.105853>.

9. Сидоров В. Н., Бадина Е. С., Климушкин Д. О. Модификация функции диссипации Рэлея для численного моделирования внутреннего демпфирования в стержневых конструкциях // Вестник МГСУ. – 2024. – Т. 19, № 6. – С. 960–970. – <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.6.960-970>.
10. Craig R. R. Jr. A Review of Time Domain and Frequency Domain Component Mode Synthesis Methods // International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis. – 1987. – Vol. 3, No. 2. – Pp. 59–72.
11. Craig R. R., Bampton M. D. D. Coupling of substructures for dynamic analysis // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. – 1968. – Vol. 12. – Pp. 1313–1319.
12. Hintz R. M. Analytical methods in component modal synthesis // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. – 1975. – Vol. 13, No. 8. – Pp. 1007–1016.
13. Herting D. N. A general purpose, multi-stage, component modal synthesis method // Finite Elements in Analysis and Design. – 1985. – Vol. 1. – Pp. 153–164.
14. Martinez D. R., Carne T. G., Gregory D. L., Miller A. K. Combined experimental/analytical modeling using component mode synthesis // AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. – 1984. – Pp. 140–152. – Palm Springs, CA.

References

1. Saiyan S. G. Comparative Analysis of the Dynamic Response of Buildings and Structures of Various Heights to Wind and Seismic Actions // Proceedings of the 10th International Scientific Conference «Problems and Methods of Computer Modeling of Structures and Constructions» («Zolotovskie Readings»), 29–30 September. – Moscow, 2022.
2. Saiyan S. G., Efimova A. M. Aerodynamic Analysis of the Moscow International Business Center «Moscow City» Complex during the Sequential Construction of Buildings // Vestnik MGSU. – 2024. – Vol. 19, No. 6. – Pp. 906–941. – DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.906-941.
3. Ferry-Borges J., Castanheta M. Structural Safety. – Lisbon: LNEC, 1971.
4. Augusti G., Baratta A., Kashyati F. Probabilistic Methods in Structural Engineering Design / Translated from English by Yu. D. Sukhov. – Moscow: Sroyizdat, 1988. – 584 p. – Translation ed.: Probabilistic Method in Structural Engineering / London, New York: Chapman and Hall, 1984. – ISBN 5-274-00212-9.
5. Certificate of State Registration of a Computer Program No. 2025614895. – Russian Federation. Software Module for Predicting Aerodynamic Coefficients for Twisted Shapes of Buildings and Structures: No. 2025612964: filed 13.02.2025, published 26.02.2025 / Saiyan S. G., Sinyakin D. S.
6. Newmark N. M. A Method of Computation for Structural Dynamics // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1959. – Vol. 85, No. 3. – Pp. 67–94.
7. Tizoc M., Valenzuela-Beltrán F., Bojorquez E., Bojorquez J., Gaxiola-Camacho J. R., Leal-Graciano J., Chavez R., Reyes-Salazar A. Rayleigh Damping vs. Modal Damping Matrix Superposition for Steel Frames and Evaluation of Higher-Mode Contribution // Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering. – 2024. – Pp. 1–17. – DOI: 10.1007/s40996-024-01615-2.
8. Kou M., Jinhua S., Daiki S., Yinli C., Razelle D. A. S., Satoshi N. Wind-Load Estimation for Seismically Isolated Building by Equivalent-Input-Disturbance Approach with Robust-Control Strategy // Control Engineering Practice. – 2024. – Vol. 145. – Paper ID 105853. – <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2024.105853>.
9. Sidorov V. N., Badina E. S., Klimushkin D. O. Modification of the Rayleigh Damping Function for Numerical Modeling of Internal Damping in Beam Structures // Vestnik MGSU. – 2024. – Vol. 19, No. 6. – Pp. 960–970. – <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2024.6.960-970>.

10. Craig R. R. Jr. A Review of Time Domain and Frequency Domain Component Mode Synthesis Methods // *International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*. – 1987. – Vol. 3, No. 2. – Pp. 59–72.
11. Craig R. R., Bampton M. D. D. Coupling of Substructures for Dynamic Analysis // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. – 1968. – Vol. 12. – Pp. 1313–1319.
12. Hintz R. M. Analytical Methods in Component Modal Synthesis // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. – 1975. – Vol. 13, No. 8. – Pp. 1007–1016.
13. Herting D. N. A General Purpose, Multi-Stage, Component Modal Synthesis Method // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 1985. – Vol. 1. – Pp. 153–164.
14. Martinez D. R., Carne T. G., Gregory D. L., Miller A. K. Combined Experimental/Analytical Modeling Using Component Mode Synthesis // *AIAA/ASME/ASCE/AHS 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*. – 1984. – Pp. 140–152. – Palm Springs, CA.

COMPARATIVE ANALYSIS OF THE DYNAMIC RESPONSE OF BUILDINGS AND STRUCTURES OF DIFFERENT HEIGHTS TO WIND AND SEISMIC LOADING

S. G. Saiyan ¹, M. V. Shitikova ²

National Research Moscow State University of Civil Engineering ^{1,2}
Russia, Moscow

¹ Research Associate at the A. B. Zolotov Research Center, PhD Student of the Department of Structural and Theoretical Mechanics, tel.: +7(495)287-49-14, e-mail: berformert@gmail.com

² Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Structural and Theoretical Mechanics, tel.: +7(495)287-49-14, e-mail: mvs@cchgeu.ru

The paper presents a comparative analysis of the dynamic response of buildings of various heights to wind and seismic loads using the direct time integration method and the superelement modeling technique. Five types of buildings with dimensions of $40 \times 40 \times 40 \times n$ ($n = 1 \dots 5$), corresponding to heights from 40 to 200 m, are considered. Seismic calculations are performed using accelerograms of the «Carpathian earthquake» considering variations in intensity (5–10 scale score). Wind loads are analyzed using the proprietary software WindSpectrum based on a wind load database. The study reveals that resonant effects and dynamic displacements of upper floors significantly increase with the building height, and in some cases wind loads may exceed seismic loads in intensity. It is established that the standard calculation method (SP 20.13330.2016) overestimates displacements and accelerations in the windward direction, while underestimating the pulsation component in the direction perpendicular to the wind flow. A comparative assessment of wind and seismic effects demonstrates that for low- and mid-rise buildings, seismic effects dominate at a moderate intensity level, whereas for high-rise structures, wind loads may become the critical factor. The obtained conclusions allow one to achieve optimizing design solutions and to enhance the safety of high-rise buildings under the combined influence of external dynamic loads.

Keywords: dynamic response, wind loads, seismic loads, buildings and structures, finite element modeling, superelement analysis.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА И ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

О. В. Грибова¹

Национальный исследовательский университет «МЭИ»¹
Россия, г. Москва

¹ Ст. преп. кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: gribovaov@mail.ru

Для балочной статически определимой фермы с параллельными поясами и раскосной решеткой методом индукции в системе «Maple» выводятся формулы для расчета зависимости частоты собственных колебаний и прогиба середины пролета от размеров конструкции, нагрузки и числа панелей. Используется формула Максвелла – Мора в предположении, что все стержни конструкции упругие, невесомые и соединены идеальными шарнирами. Масса фермы предполагается равномерно распределенной по узлам. В задаче о прогибе рассмотрены три вида нагрузок на узлы фермы. Для аналитического расчета первой собственной частоты фермы используется упрощенный вариант метода Донкерлея. Сравнение аналитических результатов с численными расчетами показывает хорошую точность предлагаемых решений.

Ключевые слова: ферма, прогиб, частота колебаний, индукция, формула Максвелла – Мора.

Введение. Расчет прогибов и частот собственных колебаний конструкций представляет важные практические задачи строительной механики. Решаются они в основном численно в стандартных вычислительных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1, 2]. Для некоторых простых статически определимых моделей возможны и аналитические решения [3–5] с применением современных систем символьного исчисления. Преимущество таких расчетов на основе сравнительно несложных формул заключается в возможности оптимизации исследуемой конструкции за счет выбора параметров системы. Аналитические методы расчета ферм применяются как для плоских [6, 7], так и пространственных систем [8–10]. В большинстве случаев в число параметров конструкции в эти решения входит и порядок системы (число панелей, например). В справочнике [11] собраны различные схемы плоских статически определимых регулярных ферм и формулы для расчета их прогибов под действием различных видов статических узловых нагрузок. В [12] приводятся формулы для основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы. Аналитический расчет частоты колебаний консольной регулярной фермы с применением формулы Максвелла – Мора для вычисления жесткости конструкции выполнен в [13]. Формулы для основной собственной частоты плоской двухпролетной фермы методом индукции выведены в [14]. Аналитическая оценка частоты собственных колебаний плоской фермы Больмана с произвольным числом панелей приведена в [15]. Аналитическое решение задачи о статических деформациях фермы составной пространственной рамы получено в [16]. В [17] в аналитической форме с применением системы компьютерной математики «Maple» изучены деформации плоской многопролетной арочной фермы.

В настоящей работе рассматривается новая схема плоской регулярной фермы балочного типа с двунаправленной раскосной решеткой. Выводится формула для прогиба фермы и частоты ее собственных колебаний методом индукции в системе «Maple».

Конструкция фермы. Плоская ферма, состоящая из $2n$ панелей длиной $2a$ каждая по нижнему поясу, с параллельными поясами на двух шарнирных опорах имеет наклонные

восходящие раскосы длиной $c = \sqrt{a^2 + 4h^2}$ и нисходящие длиной $d = \sqrt{9a^2 + 4h^2}$. Высота конструкции равна $2h$, длина пролета $8na$. Стержни конструкции соединены шарнирно, общее число стержней $\nu = 8n + 10$. В это число входят и три упругих стержня, моделирующих опоры (рис. 1). Число узлов $K = 4n + 5$.

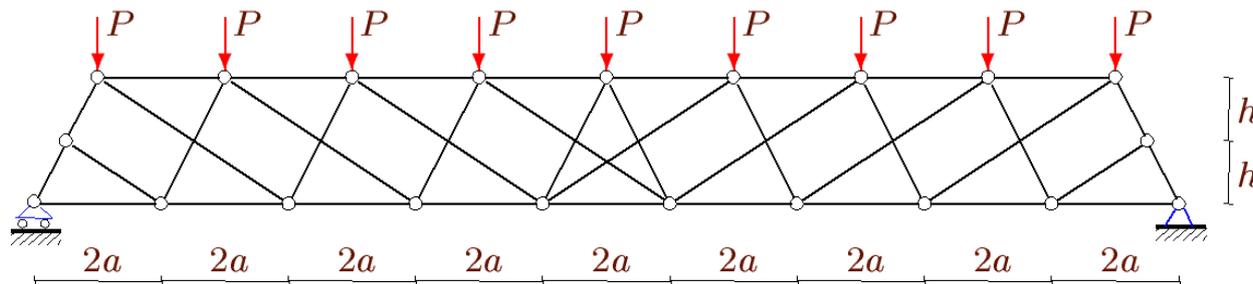


Рис. 1. Ферма с нагрузкой по верхнему поясу, $n = 4$

Расчет усилий в стержнях. Формулы для усилий в стержнях, необходимых при нахождении прогиба и жесткости фермы, в задаче о собственной частоте рассчитываются из уравнений равновесия узлов в системе компьютерной математики «Maple»:

$$GS = R. \tag{1}$$

Здесь обозначено: R – вектор узловых нагрузок длиной K ; G – матрица направляющих косинусов стержней размером $\nu \times \nu$; S – вектор неизвестных усилий в стержнях. В число неизвестных входят и три реакции опор. Все элементы матрицы G рассчитываются по данным о координатах концевых шарниров стержней. Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). В программу вносятся координаты узлов:

$$\begin{aligned} x_i &= 2a(i - 1), y_i = 0, i = 1, \dots, 2n + 2, \\ x_{2n+3} &= a / 2, y_{2n+3} = h, \\ x_{i+2n+3} &= 2ai - a, y_{i+2n+3} = 2h, i = 1, \dots, 2n + 1, \\ x_{4n+5} &= L_0 - a / 2, y_{4n+5} = h, \end{aligned}$$

где $L_0 = 2a(2n + 1)$.

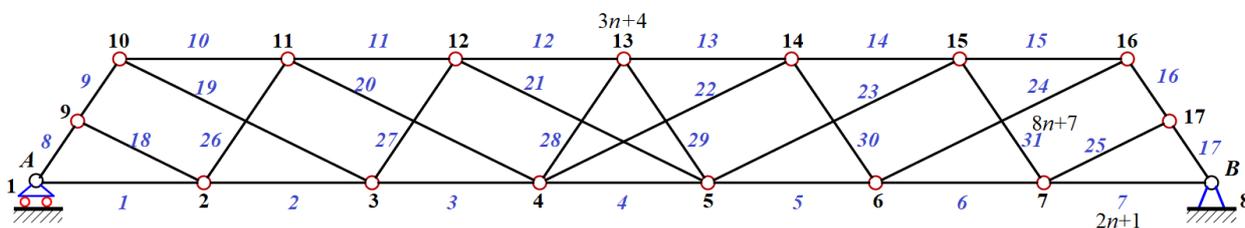


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов, $n = 3$

Решение системы (1) ищется в системе «Maple». Рассмотрена для примера равномерно распределенная по узлам вертикальная нагрузка. Для случая нагрузки по нижнему поясу (рис. 3) ненулевые элементы вектора нагрузок в правой части системы (1) имеют вид: $R_{2i} = P, i = 1, \dots, 2n + 2$. Распределение усилий в стержнях фермы в случае $n = 3$ представлено на рис. 3. Тонкими черными линиями обозначены ненапряженные стержни, синим цветом выделены сжатые, а красным растянутые стержни.

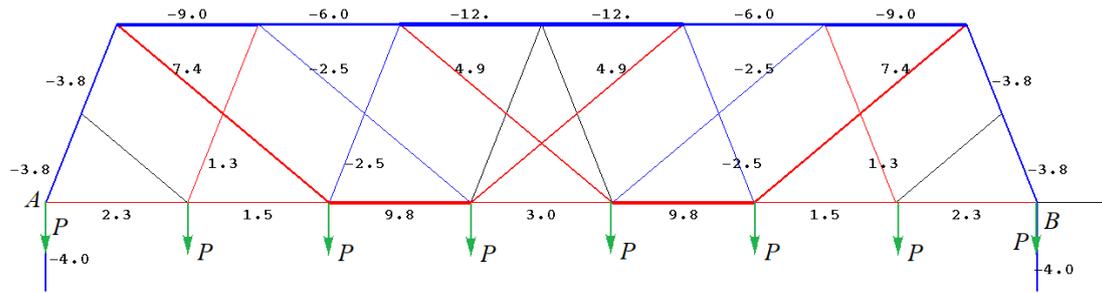


Рис. 3. Распределение усилий в стержнях от действия равномерно распределенной по узлам нижнего пояса вертикальной нагрузки, $n = 3$, $P = 1$

Аналогичная картина распределения усилий по стержням получается и при нагрузке по верхнему поясу (рис. 4).

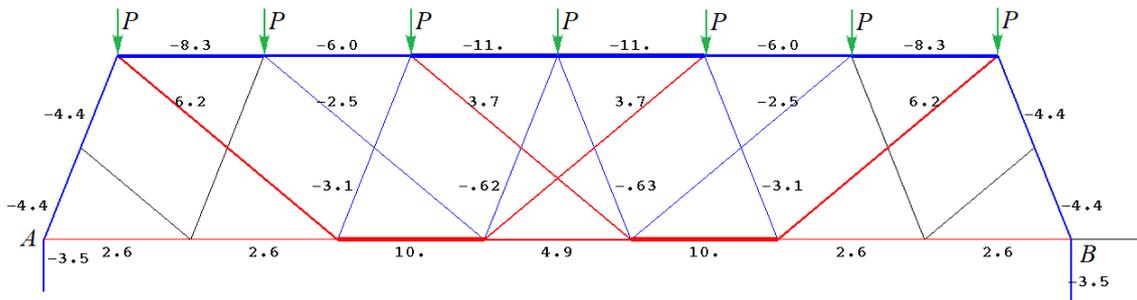


Рис. 4. Распределение усилий в стержнях от действия равномерно распределенной по узлам верхнего пояса вертикальной нагрузки, $n = 3$, $P = 1$

В обоих случаях наиболее нагруженными оказываются стержни в середине пролета.

Решение задачи о прогибе фермы, рассчитанном по значению вертикального перемещения среднего узла верхнего пояса, можно получить аналитически. Известна формула Максвелла – Мора применительно к стержневой системе:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{\nu} S_i^{(p)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

где $S_i^{(1)}$ – усилие в стержне i при действии единичной вертикальной силы на центральный узел с номером $3n + 4$ верхнего пояса, в котором рассчитывается вертикальное смещение; $S_i^{(p)}$ – усилия в стержнях фермы от распределенной нагрузки; l_i – длина стержня. Жесткость EF всех стержней принимается одинаковой. Вертикальные опорные стержни имеют длину h , а горизонтальный, соответствующий правой неподвижной опоре, имеет длину a . Расчет прогиба для нескольких ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей с использованием операторов системы «Maple» дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P \frac{36a^2 + c^3 + d^3 + 8h^3}{4h^2 EF}, \quad \Delta_2 = P \frac{76a^2 + c^3 + d^3 + 6h^3}{2h^2 EF}, \\ \Delta_3 &= P \frac{568a^2 + 5c^3 + 5d^3 + 16h^3}{4h^2 EF}, \quad \Delta_4 = P \frac{1440a^2 + 7c^3 + 7d^3 + 20h^3}{4h^2 EF}, \\ \Delta_5 &= P \frac{799a^2 + 3c^3 + 3d^3 + 6h^3}{h^2 EF}, \dots \end{aligned}$$

Общий член полученной последовательности имеет вид:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 (c^3 + d^3) + C_3 h^3) / (h^2 EF),$$

где коэффициенты зависят только от порядка фермы n :

$$\begin{aligned} C_1 &= (n+1)(10n^3 + 10n^2 + 16n + 9 - 9(-1)^n) / 12, \\ C_2 &= (6n^2 + 2(3 - (-1)^n)n - (-1)^n + 1) / 64, \quad C_3 = n + 1. \end{aligned}$$

Аналогично, для нагрузки по верхнему поясу получается решение вида:

$$\Delta_n = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 h^3) / (h^2 EF),$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} C_1 &= (20n^4 + 40n^3 + 58n^2 + 2(16 - 9(-1)^n)n + 6(-1)^n - 3) / 24, \\ C_2 &= (6n^2 + 2(5 - (-1)^n)n - 3(-1)^n + 11) / 64, \\ C_3 &= (6n^2 + 2(1 - (-1)^n)n + (-1)^n - 1) / 64, \\ C_4 &= (2n + 1) / 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Расчет первой частоты собственных колебаний. Рассмотрим инерционную модель фермы, в которой вся масса сосредоточивается в ее узлах, а сами стержни принимаются невесомыми. Пренебрегая горизонтальными движениями масс в узлах, предполагаем, что узлы совершают колебательные движения только по вертикали. В [18] предложен упрощенный (модифицированный) вариант метода Донкерлея для оценки первой собственной частоты ω_D свободных колебаний узлов фермы. Расчетная формула этого метода, основанная на теореме о среднем, имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \Delta_n,$$

где δ^{\max} – наибольшая для всех узлов величина прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на узел p . В рассматриваемой ферме это узел в середине верхнего пояса:

$3n + 4$. Упрощение состоит в замене суммирования прогибов $\sum_{p=1}^K \delta_p$ вычислением соответствующей треугольной площади $\delta^{\max} K / 2$ с максимальным значением δ^{\max} . Значение Δ_n

рассчитывается по формуле Максвелла – Мора в аналитической форме суммированием по всем стержням конструкции, включая и три опорные:

$$\delta^{\max} = \sum_{i=1}^{\nu} S_i^{(j)2} l_i / (EF),$$

где $S_i^{(j)}$ – значение усилия в стержне с номером i при действии на узел $j = 3n + 4$ единичной вертикальной силы. Как и в задаче о прогибе, жесткость EF всех стержней считается одинаковой.

Вычисление сумм в (1) для ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей в системе «Марле» [19] дает следующие выражения:

$$\begin{aligned} \delta_1^{\max} &= 9(35a^3 + 2c^3 + d^3 + h^3 / 2) / (16h^2 EF), \\ \delta_2^{\max} &= 13(93a^3 + 2c^3 + d^3 + h^3 / 2) / (16h^2 EF), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_3^{\max} &= 17(255a^3 + 3c^3 + 2d^3 + h^3 / 2) / (16h^2EF), \\ \delta_4^{\max} &= 21(505a^3 + 3c^3 + 2d^3 + h^3 / 2) / (16h^2EF), \\ \delta_5^{\max} &= 25(923a^3 + 4c^3 + 3d^3 + h^3 / 2) / (16h^2EF), \dots\end{aligned}$$

Методами системы компьютерной математики «Maple» с помощью оператора `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` можно найти выражение общего члена полученной последовательности. Искомая формула имеет вид полинома:

$$\Delta_n = (4n + 5) \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + h^3 / 2}{2h^2 EF},$$

где коэффициенты полинома C_1, \dots, C_3 зависят лишь от числа панелей n в половине пролета:

$$\begin{aligned}C_1 &= (16n^3 + 24n^2 + 26n - 18(-1)^n + 21) / 24, \\ C_2 &= (2n - (-1)^n + 5) / 32, \\ C_3 &= (4n - (-1)^n + 1) / 32.\end{aligned}$$

В итоге формула для определения первой частоты собственных колебаний фермы принимает вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{2EF}{(4n + 5)m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + h^3 / 2)}}. \quad (3)$$

Численное решение. Приближенное аналитическое решение можно сравнить с численным, полученным для системы K отдельных масс в узлах фермы, совершающих колебания по вертикали как дискретной механической системы масс с K степенями свободы. Расчеты выполняются в численной моде системы «Maple». Элементы $\varphi_{i,j}$ квадратной матрицы жесткости Φ согласно формуле Максвелла – Мора имеют вид:

$$\varphi_{i,j} = \sum_k^{\nu} S_k^i S_k^j l_k / EF, \quad i, j = 1, \dots, K.$$

Для вычисления вектора собственных чисел матрицы используется оператор $\Lambda = Eigenvalues(\Phi)$. Собственные частоты имеют вид $\omega_i = 1 / \sqrt{m\lambda_i}$, $i = 1, \dots, K$, где λ_i – собственное число матрицы Φ .

Пример. Приняты следующие размеры: $F = 9$ см², $a = 3$ м. Материал стержней – сталь с модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, в узлах сосредоточены массы $m = 200$ кг. Кривая (3) аналитической зависимости частоты ω_D от числа панелей сравнивается с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно (рис. 5).

С увеличением числа панелей в ферме аналитическое решение сближается с численным, а частота колебаний уменьшается. Начиная с некоторого числа панелей кривая аналитического решения ограничивает численное решение снизу. Заметим, что оригинальный метод Донкерлея отличается от использованного здесь модифицированного метода тем, что он ограничивает численное решение снизу при любом значении числа панелей.

Оценить погрешность приближенного решения можно по относительной величине: $\varepsilon = |\omega_1 - \omega_D| / \omega_1$. Зависимости погрешности от числа панелей при $a = 3$ м для различных значений высоты h представлены на рис 6. С увеличением числа панелей погрешность предложенного аналитического решения немонотонно уменьшается.

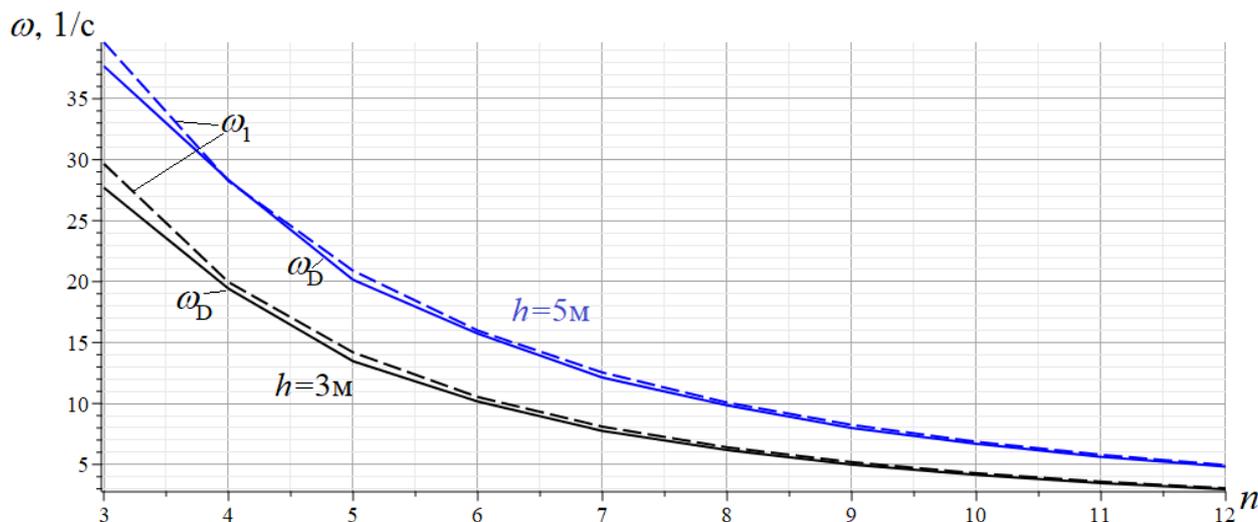


Рис. 5. Первая частота колебаний. Аналитическое решение ω_D и численное ω_1

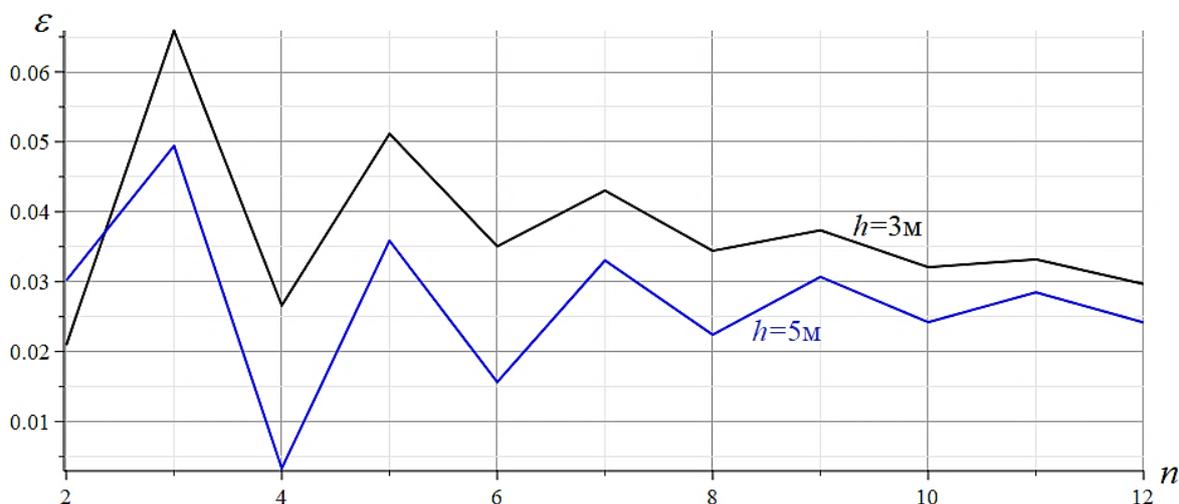


Рис. 6. Погрешность аналитического решения

Заключение. Предложена простая схема статически определимой решетчатой фермы балочного типа. Выведены формулы зависимости прогиба и основной частоты собственных колебаний конструкции от числа панелей. Решения имеют простые формулы полиномиального по числу панелей вида. Погрешность аналитического решения для первой частоты вполне приемлема и уменьшается с увеличением числа панелей.

Библиографический список

1. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method // *Computers & Structures*. – 2024. – Т. 305. – С. 107570. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.
2. Игнатъев В. А., Игнатъев А. В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. – 306 с.
3. Комерзан Е. В., Маслов А. Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 2 (37). – С. 17–26. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.

4. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 2 (29). – С. 29–37.
5. Kirsanov M. N., Luong C. L. Simplified method for estimating the first natural frequency of a symmetric arch truss // *Magazine of Civil Engineering*. – 2024. – 17 (6). – Article No. 13001. – DOI: 10.34910/MCE.130.1.
6. Luong C. L., Kirsanov M. Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2024. – 110. – Article No 11003. – DOI: 10.4123/CUBS.110.3.
7. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. – 2022. – 111 (3). – Article No. 11114. – DOI: 10.34910/MCE.111.14.
8. Кирсанов М. Н. Пространственная модель и аналитический расчет собственной частоты колебаний фермы трехгранной мачты // *Строительная механика и конструкции*. – 2024. – № 2 (41). – С. 7–15. – DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.001.
9. Kirsanov M. N. Hexagonal rod pyramid. Deformations and natural oscillation frequency // *Magazine of Civil Engineering*. – 2023. – 119 (3). – Article no. 11903. – DOI: 10.34910/MCE.119.3.
10. Кирсанов М. Н., Маслов А. Н. Формула для нижней оценки первой частоты собственных колебаний фермы трехгранной башни // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2023. – 2 (307). – С. 11–17. – DOI: 10.37538/0039-2383.2023.2.11.17.
11. Кирсанов М. Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. – М.: ИНФРА-М, 2024. – 238 с. – Т. 1–3. – DOI: 10.12737/textbook_5c3c4183ee7be5.95025996.
12. Комерзан Е. В., Ниналалов И. Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. – 2023. – № 4 (39). – С. 27–34.
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – 101. – Article No 10101. – DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss // *AlfaBuild*. – 2021. – 20. – Article No 2001. – DOI: 10.34910/ALF.20.1.
15. Скулова П. А. Оценка частоты собственных колебаний фермы Больмана // *Механизация и автоматизация строительства. Сборник статей. Самарский государственный технический университет. Самара, 2020*. – С. 102–107.
16. Комерзан Е. В., Свириденко О. В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // *Строительная механика и конструкции*. – 2022. – № 4 (35). – С. 40–48. – DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
17. Kirsanov M. Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2022. – 102. – Article No 10204. – DOI: 10.4123/CUBS.102.4.
18. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. – 2023. – 108. – Article No 10801. – DOI: 10.4123/CUBS.108.1.
19. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. – СПб.: Лань, 2022. – 512 с.

References

1. Zhou J., Zeng Y., Li G. Size, shape and topology optimization of truss structure via the finite particle method. *Computers & Structures*. 2024. V. 305. P. 107570. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2024.107570>.

2. Ignatiev V. A., Ignatiev A. V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p. (in Russian).
3. Komerzan E. V., Maslov A. N. Analytical assessment of the fundamental frequency of natural oscillations of a regular truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2 (37). P. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002 (in Russian).
4. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2021. 2 (29). P. 29–30. (in Russian).
5. Kirsanov M. N., Luong C. L. Simplified method for estimating the first natural frequency of a symmetric arch truss. *Magazine of Civil Engineering*. 2024. 17 (6). Article no. 13001. DOI: 10.34910/MCE.130.1
6. Luong C. L., Kirsanov M. Effect of truss height on the safe frequency region of a statically determined flat truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2024. 110. Article No 11003. DOI: 10.4123/CUBS.110.3.
7. Kirsanov M. N., Safronov V. S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111 (3). Article 11114. DOI: 10.34910/MCE.111.14.
8. Kirsanov M. N. Spatial model and analytical calculation of the natural frequency of vibrations of a triangular mast truss. *Structural mechanics and structures*. 2024. No. 2 (41). P. 7–15. DOI: 10.36622/2219-1038.2024.41.2.001 (in Russian).
9. Kirsanov M. N. Hexagonal rod pyramid. Deformations and natural oscillation frequency // *Magazine of Civil Engineering*. 2023. 119 (3). Article no. 11903. DOI: 10.34910/MCE.119.3.
10. Kirsanov M. N., Maslov A. N. Formula for the lower bound of the first frequency of natural vibrations of a trihedral tower truss. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2023. 2 (307). P. 11–17. DOI: 10.37538/0039-2383.2023.2.11.17 (in Russian).
11. Kirsanov M. N. Flat trusses. Schemes and calculation formulas: reference book. M.: IN-FRA-M, 2024. 238 p. V. 1–3. DOI: 10.12737/textbook_5c3c4183ee7be5.95025996 (in Russian).
12. Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V. Calculation of the fundamental frequency of natural oscillations of a flat model of a composite truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4 (39). P. 27–34 (in Russian).
13. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. DOI: 10.4123/CUBS.101.1.
14. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. DOI: 10.34910/ALF.20.1.
15. Skulova P. A. Estimation of the natural oscillation frequency of the Bohlmann truss. In the collection: *Mechanization and automation of construction*. Collection of articles. Samara State Technical University. Samara, 2020. P. 102–107 (in Russian).
16. Komerzan E. V., Sviridenko O. V. Static deformations of a composite spatial frame truss. Analytical solutions / *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 4 (35). P. 40–48. DOI: 10.36622/VSTU.2022.35.4.005 (in Russian).
17. Kirsanov M. Deformations of a planar multi-span arch truss: analytical solutions. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 102 Article No 10204. DOI: 10.4123/CUBS.102.4.
18. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1.
19. Kirsanov M. N. *Maple and Maplet. Solutions to mechanics problems*. St. Petersburg: Lan, 2022. 512 p. (in Russian).

FORMULAS FOR CALCULATION OF DEFLECTION AND NATURAL FREQUENCY OF A FLAT TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

O. V. Gribova ¹

National Research University «MPEI» ¹
Moscow, Russia

¹ Senior Lecturer of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines,
tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: gribovaov@mail.ru

For a statically determinate beam truss with parallel chords and a diagonal lattice, the induction method in the Maple system is used to derive formulas for calculating the dependence of the natural oscillation frequency and the mid-span deflection on the dimensions of the structure, load, and number of panels. The Maxwell – Mohr formula is used under the assumption that all the rods of the structure are elastic, weightless, and connected by ideal hinges. The mass of the truss is assumed to be uniformly distributed among the nodes. In the deflection problem, three types of loads on the truss nodes are considered. A simplified version of the Dunkerley method is used for the analytical calculation of the first natural frequency of the truss. Comparison of the analytical results with numerical calculations shows good accuracy of the proposed solutions.

Key words: statically determinate truss, first natural frequency, analytical method, induction, Maxwell – Mohr formula, spectrum of natural frequencies, spectral constants, resonance safety zone.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 69.07

DOI 10.36622/2219-1038.2025.44.1.004

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ХЛОРИДНОЙ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЕ

В. И. Римшин¹, Л. А. Сулейманова², П. А. Амелин³, Д. С. Аноприенко⁴НИУ МГСУ¹

Россия, г. Москва

Научно-исследовательский институт строительной физики РААСН¹

Россия, г. Москва

БГТУ им. В. Г. Шухова^{2, 3, 4}

Россия, г. Белгород

¹ Д-р техн. наук, профессор кафедры жилищно-коммунального комплекса, тел.: +7(499)183-38-92, e-mail: v.rimshin@niisf.ru

² Д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой строительства и городского хозяйства, тел.: +7(4722)54-16-20, e-mail: ludmilasuleimanova@yandex.ru

³ Ассистент кафедры строительства и городского хозяйства, тел.: +7(4722)54-16-20, e-mail: p.amelin@inbox.ru

⁴ Магистрант кафедры строительства и городского хозяйства, тел.: +7(4722)54-16-20, e-mail: vk.danila.use@yandex.ru

Рассматривается моделирование поведения изгибаемых железобетонных элементов, подвергающихся воздействию хлоридной агрессивной среды, с использованием программного комплекса «Abaqus». Основной целью исследования является оценка напряженно-деформированного состояния железобетонного элемента прямоугольного поперечного сечения. Моделирование проводится с учетом нелинейной диаграммы состояния бетона, описанной моделью пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP), а армирование задано стержневыми конечными элементами с комбинацией упругих свойств и модели пластичности металла. Нагружение элемента осуществляется статически с приложением двух сосредоточенных сил по центрам третьей расчетной пролета. В результате моделирования были получены распределения напряжений и деформаций в бетоне и арматуре, а также модели повреждения бетона при нарастании нагрузки. Полученные результаты показывают высокую сходимость с экспериментальными данными испытания балок на изгиб по нормальному сечению. Это подтверждает возможность применения разработанного алгоритма для проектирования изгибаемых железобетонных конструкций в агрессивных средах, что имеет важное значение для повышения их надежности и долговечности.

Ключевые слова: конечно-элементный метод (КЭМ), модель пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP), «Abaqus», прочность, деформативность.

Введение. Железобетон широко используется в строительстве благодаря своей высокой прочности и долговечности [1–3]. Однако железобетонные конструкции, эксплуатирующиеся в условиях воздействия агрессивной хлоридной среды (объекты транспортной инфраструктуры, паркинги, станции обеззараживания, резервуары), подвержены коррозии арматуры, что приводит к снижению их несущей способности и долговечности [4–7]. Исследование поведения поврежденных железобетонных изгибаемых элементов в агрессивных средах имеет важное значение для повышения надежности и долговечности строительных конструкций.

Хлориды, проникая в бетон, вызывают коррозию арматуры, что приводит к появлению трещин и снижению прочности элементов. Расчет поврежденных конструкций требует учета множества факторов, таких как неравномерное распределение коррозии, изменение физико-механических свойств бетона и арматуры, а также влияние внешних нагрузок [8–11]. Традиционные методы расчета часто не учитывают всех этих аспектов, что может привести к ошибкам в оценке несущей способности конструкций.

Использование конечно-элементного метода (КЭМ), который является численным методом решения дифференциальных уравнений с частными производными, а также интегральных уравнений, возникающих при решении задач прикладной физики, позволяет более точно моделировать поведение поврежденных железобетонных элементов [12–14].

Конечно-элементный метод легко реализуется при использовании программных комплексов, таких как «Simulia Abaqus». «Abaqus» предоставляет инструменты для создания детализированных моделей, учитывающих нелинейное поведение материалов, развитие трещин, коррозию арматуры и другие важные факторы. Это позволяет получать более точные данные о напряженно-деформированном состоянии конструкций и прогнозировать их долговечность [15].

Основные задачи исследования включают моделирование процессов коррозии арматуры, оценку изменения прочностных характеристик бетона и арматуры, а также анализ влияния этих изменений на несущую способность элементов. Для верификации результатов конечно-элементного моделирования проведено экспериментальное исследование по определению прочности железобетонных изгибаемых элементов, поврежденных в результате нахождения в хлоридной агрессивной среде, что позволило сопоставить полученные результаты с данными лабораторных испытаний.

Материалы и методы. В данном исследовании авторами проведено моделирование работы железобетонной балки прямоугольного сечения при испытании на изгиб, прямоугольного сечения из бетона класса прочности на сжатие В15 и плотностью 2180 кг/м³. Армирование балки выполнено одиночным каркасом, в качестве рабочей и конструктивной арматуры каркасов использовалась стальная горячекатаная арматура Ø 12 мм класса А500 и холоднотянутая проволока из низкоуглеродистой стали класса В500 Ø 5 мм. Роль поперечной арматуры выполняет горячекатаная арматура Ø 6 мм класса А240. Геометрические размеры и схема армирования железобетонной балки показаны на рис. 1.

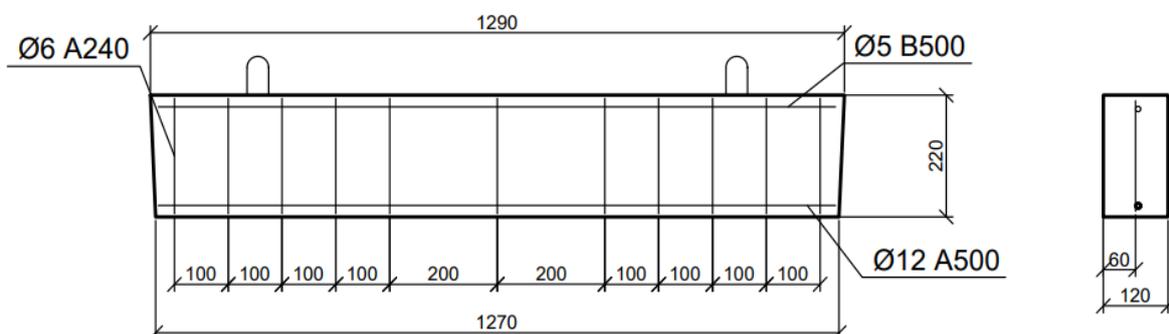


Рис. 1. Схема армирования железобетонной балки

Физико-механические характеристики бетона в программном комплексе «Abaqus» задавались упругими и пластичными свойствами согласно модели пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP), изложенной в работе Дж. Люблинера [16]. Соотношения между напряжениями растяжения-сжатия и деформациями в бетоне в исходном (неповрежденном) состоянии описываются зависимостями:

$$\sigma_t = (1 - d_t)E_0(\varepsilon_t - \tilde{\varepsilon}_t^{pl}), \quad (1)$$

$$\sigma_c = (1 - d_c)E_0(\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c^{pl}), \quad (2)$$

где E_0 – модуль упругости бетона; d_t и d_c – коэффициенты поврежденности растянутого и сжатого бетона; ε_t и ε_c – полные деформации растяжения и сжатия; $\tilde{\varepsilon}_t^{pl}$ и $\tilde{\varepsilon}_c^{pl}$ – пластические деформации бетона.

Указанные исходные данные уравнений определяются зависимостями:

$$\varepsilon_b^{pl} = b_c \cdot \varepsilon_b^{in}, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{bt}^{pl} = b_t \cdot \varepsilon_{bt}^{in}, \quad (4)$$

$$\varepsilon_b^{in} = \varepsilon_b - \frac{\sigma_b}{E_b}, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{bt}^{in} = \varepsilon_{bt} - \frac{\sigma_{bt}}{E_{bt}}, \quad (6)$$

$$d_b = 1 - \frac{\sigma_b}{E_b \cdot (\varepsilon_b - \varepsilon_b^{pl})}, \quad (7)$$

$$d_{bt} = 1 - \frac{\sigma_{bt}}{E_b \cdot (\varepsilon_{bt} - \varepsilon_{bt}^{pl})}, \quad (8)$$

где b_c и b_t – характеристики цикличности нагружения [15].

Значения деформаций упругой и пластической части сжатия, а также модуля упругости определялись на основе экспериментальной диаграммы работы бетона (рис. 2), полученной на основе испытаний осевого сжатия бетонных призм $100 \times 100 \times 400$ мм.

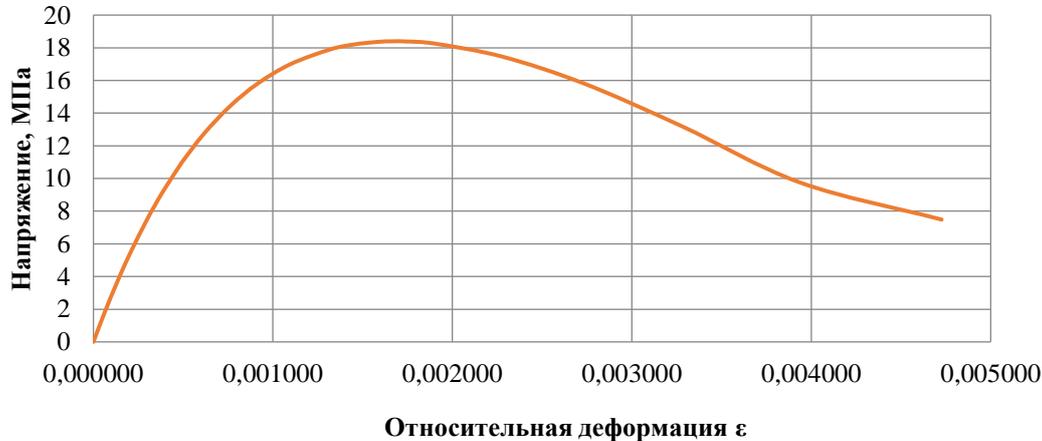


Рис. 2. Диаграмма σ - ε бетона В15 при сжатии

Значения деформаций упругой и пластической части растяжения определялись на основе п. 6 СП 63.13330.208 «Бетонные и железобетонные конструкции». Итоговые физико-механические характеристики модели бетона показаны в табл. 1.

Влияние агрессивной среды на силовое сопротивление бетона учитывается функцией повреждения слоя $K(z)$, изложенной в работе [17]:

$$\sigma_{b,cor} = \sigma_b(t) \cdot K(z), \quad (9)$$

$$E_{b,cor}^H = E_b^H(t) \cdot K(z), \quad (10)$$

где $\sigma_b(t)$ – модель деформирования обычного бетона; $E_b^H(t)$ – модель изменения интегрального модуля деформаций; $K(z)$ – функция повреждения для слоя толщиной z .

Физико-механические характеристики бетона

Начальный модуль упругости E_b , МПа		Коэффициент Пуассона	
24000 МПа		0,2	
Напряжения и деформации при сжатии		Повреждение бетона при сжатии	
Напряжения σ_b , МПа	Пластические деформации ε_b^{in}	Коэффициент повреждения d_b	Пластические деформации ε_b^{in}
1.737227	-1.03873E-05	0	0
3.819938	-1.64394E-05	0	-1.0387E-05
5.552851	-1.49853E-05	0	-1.6439E-05
7.409317	-5.20387E-06	0	-1.4985E-05
8.310138	3.29753E-06	0	-5.2039E-06
9.24815	1.5292E-05	0	3.29753E-06
10.85871	4.5037E-05	0	1.5292E-05
11.11925	5.1147E-05	0	4.5037E-05
12.77241	0.000100833	0	5.1147E-05
14.44734	0.00017797	0	0.000100833
15.8157	0.000275194	0	0.00017797
17.00499	0.000410208	0	0.000275194
17.89658	0.000593923	0	0.000410208
18.20054	0.000713512	0	0.000593923
18.3593	0.000838983	0	0.000713512
18.39301	0.000916759	0	0.000838983
18.38369	0.001000236	0	0.000916759
18.25752	0.001159676	0	0.001000236
17.45435	0.001572102	0.005543947	0.001155552
15.8057	0.002094761	0.049291512	0.001535436
13.1816	0.002748114	0.139090663	0.002091296
9.749391	0.003543616	0.282020632	0.002748328
7.486791	0.004423016	0.468967262	0.003543676
Напряжения и деформации при растяжении		Повреждение бетона при растяжении	
Напряжения σ_{bt} , МПа	Пластические деформации ε_{bt}^{in}	Коэффициент повреждения d_{bt}	Пластические деформации ε_{bt}^{in}
2.261	0	0	0
1.507333333	0.000238927	0.445215	0.000281
0.847875	0.000553147	0.606951	0.000507
0.376833333	0.001034732	0.692214	0.000718
0.463463	0.00172	0.845512	0.00172
0.423761	0.001917	0.858746	0.001917
Параметры модели пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP)			
Угол дилатации	Эксцентриситет	f_{bo}/f_{co}	K
35	0.1	1.16	0.667

В соответствии с моделью коррозионного поражения бетона поперечное сечение элемента разделяется на зоны различной степени поврежденности [18]. Зона полностью поврежденного бетона определяется толщиной z^* , имеющего начальные характеристики бетона толщиной p , изменяющихся характеристик толщиной δ (рис. 3).

Коэффициент K находится в пределах от 0 до 1 и в общем виде определяется зависимостью:

$$K(z) = \sum_{i=0}^{i=3} a_i \cdot z^i, \quad (11)$$

где z – ордината, отсчитываемая от оси силовых напряжений поврежденного коррозией бетонного элемента; a_i – коэффициенты степенного ряда, которые находят при фиксированных значениях K_i .

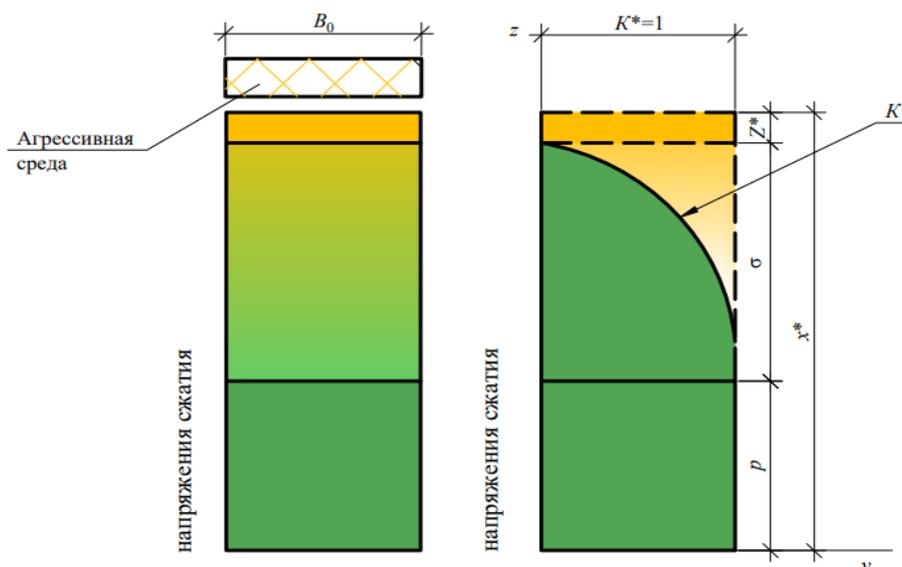


Рис. 3. Схема разделения бетонного поперечного сечения по зонам поврежденности

Согласно модели, условия для определения параметров a_i выглядят следующим образом:

$$\text{при } z = p \quad K(p) = 1 \frac{dk^*}{dz} \Big|_{z=p} = 0, \quad (12)$$

$$\text{при } z > p \quad K^*(p + \delta) = K_1. \quad (13)$$

При условии, что $z = p + \sigma \rightarrow K(p + \sigma) = 0$, коэффициенты a_0, a_1, a_2 равны:

$$a_0 = 1 - \left(\frac{p}{\delta}\right)^2, \quad (14)$$

$$a_1 = 2 \frac{p}{\delta^2}, \quad (15)$$

$$a_2 = -\frac{1}{\delta^2}. \quad (16)$$

Значения напряжений и деформаций стали определялись на основе экспериментальных диаграмм работы для трех классов по прочности, полученных на основе испытаний осевого растяжения стальных стержней классов А500, А240, В500 (рис. 4).

Итоговые параметры модели пластичности металла, основанные на полученных диаграммах работы стальной арматуры, показаны в табл. 2.

Таблица 2

Параметры модели пластичности металла

Начальный модуль упругости E_s , МПа	Коэффициент Пуассона
210000 МПа	0,3
Напряжения и деформации при растяжении	
Напряжения σ_s , МПа	Пластические деформации ε_s^{in} , %
Арматура В500	
0	0
500	0,45
Арматура А240	
160	160
240	0,19
Арматура А500	
372	0
500	0,23

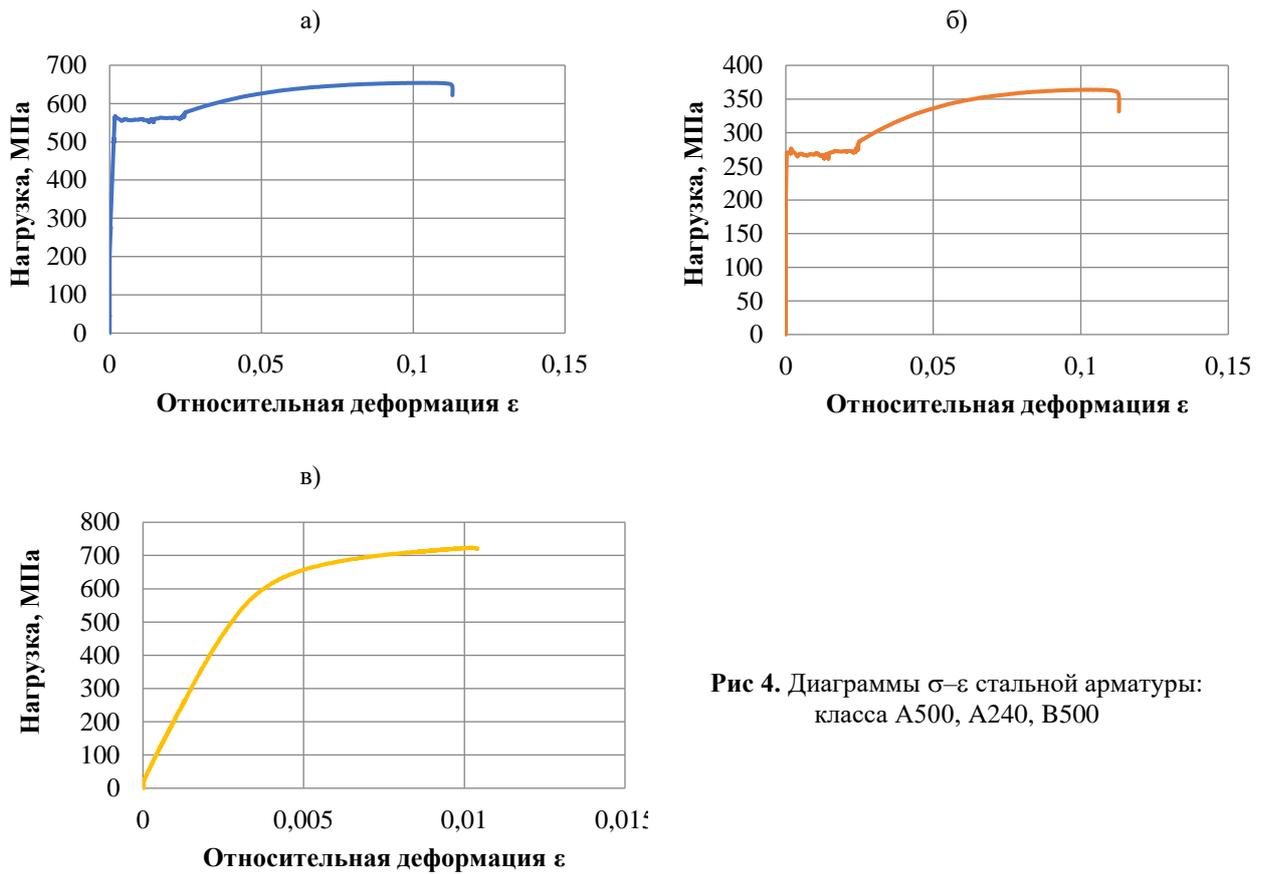


Рис 4. Диаграммы σ - ϵ стальной арматуры: класса A500, A240, B500

Коррозионные повреждения арматуры учитываются уменьшением площади ее поперечного сечения согласно уравнению:

$$A_s^* = A_s - A_s^{cor}, \quad (17)$$

где A_s – площадь поперечного сечения стальной арматуры до коррозии; A_{scor} – расчетная площадь коррозионных повреждений поперечного сечения стальной арматуры.

Экспериментально установлено, что одновременное воздействие источника питания на железобетонный элемент, находящийся в 5-процентном растворе NaCl, способно за 32 дня уменьшить диаметр стальной арматуры с 12 мм до 9,3 мм, что было учтено при задании площади поперечного сечения стержневого конечного элемента в «Abaqus» [19].

Геометрические характеристики железобетонной балки задавались объемными и стержневыми элементами для тела бетона и стержней арматуры соответственно (рис. 5).

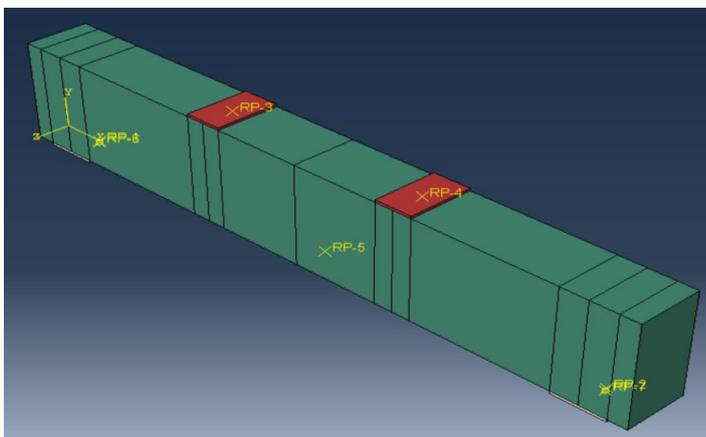


Рис 5. Трехмерная модель исследуемого железобетонного элемента

Нагружение балки выполнялось с помощью приращения по 1 % от расчетной по СП 63.13330.2018 разрушающей нагрузки P_{cr} , которая составляла 27 кН. Задание статической нагрузки осуществлялось с помощью двух стальных пластин $120 \times 50 \times 20$ мм, которые находились по краям центральной трети расчетного пролета. Расчетная схема – шарнирно опертая балка на двух опорах. Первая опора ограничивалась в перемещении по плоскостям U1, U2, U3, вторая – по плоскостям U1 и U2. Далее определялись места контактного взаимодействия исследуемой балки, опор и элементов приложения нагрузки. В конечном итоге модель тела бетона и опор разбивалась на объемные конечные элементы размерами $10 \times 10 \times 10$ мм, арматура разбивалась на стержневые отрезки длиной 10 мм (рис. 6). Общее количество конечных элементов составило 35 728 элементов.

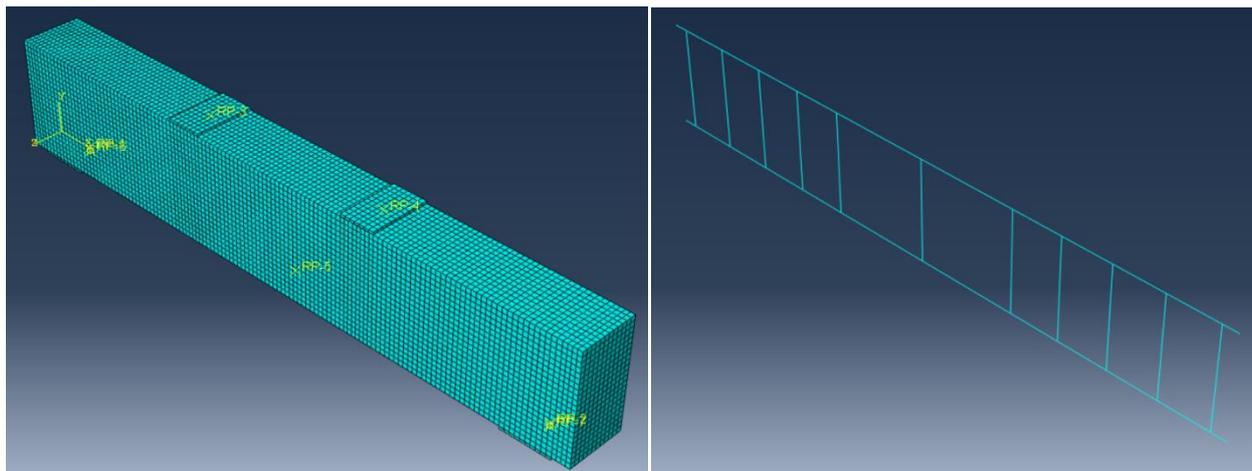


Рис. 6. Модель железобетонного элемента, разбитая на конечные элементы

Результаты исследования. По результатам расчета были получены распределения напряжений (рис. 7) в бетоне (по оси y) и арматуре (по оси x).

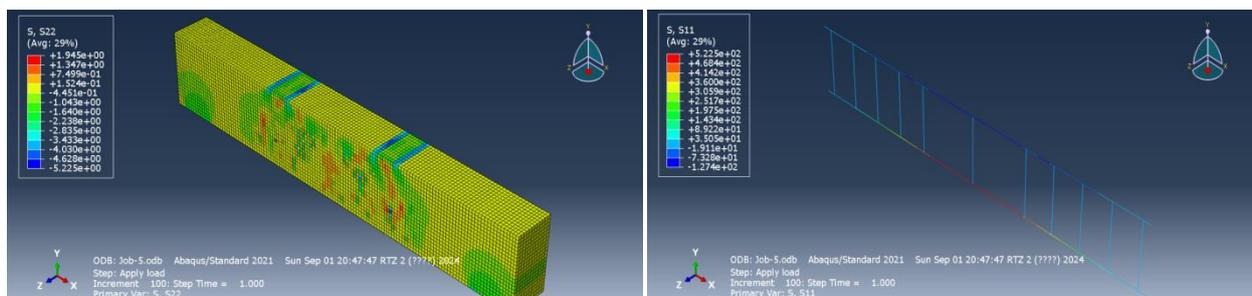


Рис. 7. Распределение напряжений в бетоне и арматуре

Помимо распределения напряжений получена модель распределения деформаций и трещинообразования на последней стадии нагрузки (рис. 8).

Исходя из распределения напряжений и деформаций видно, что арматура достигла предела текучести, наблюдается локальное разрушение бетона в зоне приложения нагрузки от продавливания, что говорит о том, что балка находится в стадии предразрушения. Разрушение предполагается в растянутой зоне вследствие достижения предельных значений арматуры.

С целью верификации конечно-элементной модели проведено экспериментальное исследование разрушения элементов, поврежденных с использованием гальванического метода. В качестве электролита был принят 5-процентный раствор NaCl. Уровень раствора в ванне был выбран с целью полного погружения защитного слоя бетона и растянутой арматуры.

Направление тока было организовано таким образом, что основная арматурная сталь служила анодом, а продольные подвески и стремена – катодом (рис. 9).

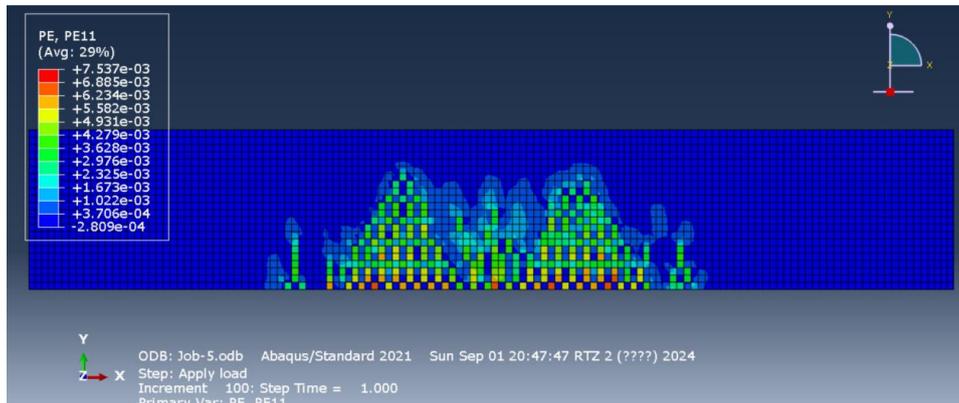


Рис. 8. Модель трещинообразования изгибаемого элемента

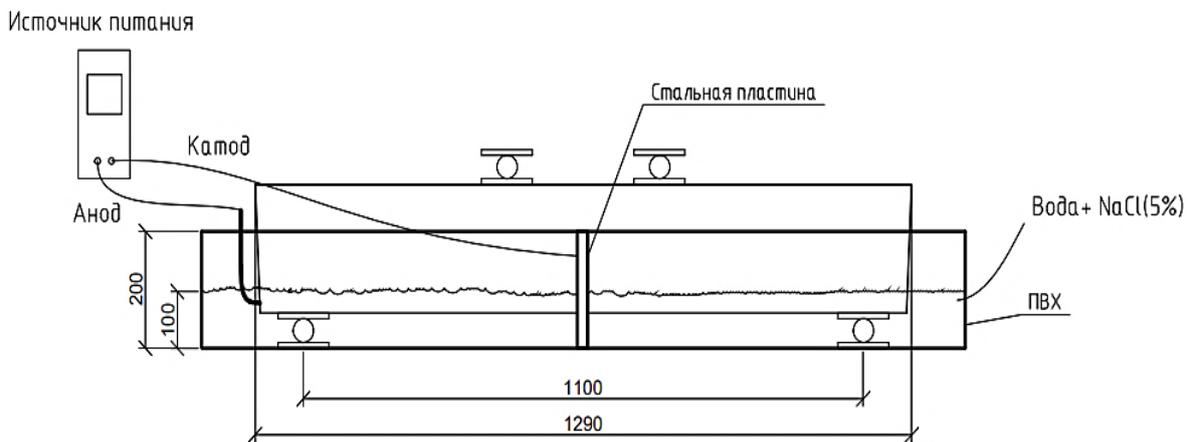


Рис. 9. Схема проведения гальванического ускорения коррозии арматуры

По истечении срока предполагаемого нахождения в ванной железобетонные элементы получили повреждения арматуры растянутой зоны. На нижней грани элементов были видны продукты коррозии высотой до 8 см. Визуальный осмотр показал отсутствие ярко выраженных профилей арматуры (рис. 10).



Рис. 10. Внешний вид арматуры после проведения гальванического ускорения коррозии арматуры

Далее элементы были установлены растянутой гранью вниз и испытаны до разрушения (рис. 11). Шаг нагружения составлял 5 % от разрушающей нагрузки.



Рис. 11. Внешний вид изгибаемого элемента на стадии предразрушения

Результаты испытаний представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты испытаний поврежденных балок

Марка балки	Разрушающая нагрузка P_{ult} , кН	Средняя разрушающая нагрузка $P_{cp,ult}$, кН
БП-1	24	24,65
БП-2	25,4	
БП-3	24,57	

Образцы разрушились при нагрузке 24–25,4 кН в результате разрыва арматуры растянутой зоны, что подтверждает характер разрушения смоделированного в ПК «Simulia Abaqus» конечно-элементного изгибаемого элемента.

Выводы. На основании анализа основных результатов исследования можно сделать выводы:

- разработанная в программном комплексе «Abaqus» модель пластичного разрушения бетона с повреждениями (CDP) показала высокую сходимость с экспериментальными данными, что подтверждает ее эффективность и точность;
- исследование влияния хлоридной агрессивной среды на железобетонные конструкции выявило значительное снижение прочностных характеристик из-за коррозии арматуры. Это важно учитывать при проектировании конструкций, эксплуатирующихся в подобных условиях;
- применение объемных конечных элементов для бетона и стержневых конечных элементов для арматуры позволило получить детализированные данные о напряженно-деформированном состоянии конструкций, что способствует более точной оценке их долговечности и надежности;
- результаты исследования могут быть использованы для совершенствования методов проектирования и оценки состояния железобетонных конструкций, работающих в агрессивных средах, что повысит их эксплуатационную надежность и продлит срок службы.

Библиографический список

1. Римшин В. И., Кустикова Ю. О., Котельников Д. Н. Аналитическая оценка силового сопротивления железобетона, поврежденного коррозионными воздействиями // Вестник Мордовского университета. – 2005. – Т. 15, № 1–2. – С. 149–153.
2. Петров В. В., Овчинников И. Г., Шихов Ю. М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1987. – 288 с.
3. Andrade C., Alonso C., Gulikers J. Test methods for on-site corrosion rate measurement of steel reinforcement in concrete by means of the polarization resistance method // Materials and Structures. – 2004. – No. 37. – P. 623–643.

4. Чирков, В. П. Прикладные методы теории надежности в расчетах строительных конструкций: учебное пособие / В. П. Чирков. – М.: Учебно-методический центр по образованию на железнодорожном транспорте, 2006. – 620 с.
5. Brown R. D. Design Prediction of the Life for Reinforced Concrete in Marine and Other Chloride Environments / R. D. Brown // *Durability of Building Materials*. – Amsterdam: Elsevier Scientific, 1982. – Vol. 1. – P. 113–125.
6. Розенталь Н. К., Степанова В. Ф., Чехний Г. В. Бетоны высокой коррозионной стойкости и нормирование их характеристик // *Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века*. – 2017. – № 3–4 (218–219). – С. 14–19.
7. Feng G., Jin Z., Jiang Y., Wang X., Zhu D. Localized corrosion propagation of steel in cracked mortar and long-term corrosion of steel reinforcement in cracked concrete in seawater environment // *Corrosion Science*. – 2024. – Vol. 228. – <https://doi.org/10.1016/j.corsci.2023.111793>.
8. Al-Hammoud R., Soudki K., Topper T. H. Bond analysis of corroded reinforced concrete beams under monotonic and fatigue loads // *Cement Concrete Composites*. – 2010. – Vol. 32, No. 3. – P. 194–203.
9. Сулейманова, Л. А., Амелин П. А. Развитие процессов коррозии железобетона в условиях хлоридной агрессивной среды // *Наука и инновации в строительстве: сборник докладов VI Международной научно-практической конференции, посвященной 50-летию кафедры строительства и городского хозяйства*. – Белгород: БГТУ им. В. Г. Шухова, 2022. – Т. 1. – С. 131–135.
10. Римшин В. И. Ресурс силового сопротивления железобетонных конструкций инженерных сооружений / В. И. Римшин, Л. И. Шубин, А. В. Савко // *Academia. Архитектура и строительство*. – 2009. – № 5. – С. 483–491.
11. Римшин В. И., Сулейманова Л. А., Амелин П. А., Крючков А. А. Экспериментальные исследования изгибаемых железобетонных элементов, имеющих повреждения арматуры вследствие контакта с хлоридной агрессивной средой // *Эксперт: теория и практика*. – 2023. – № 3 (22). – С. 138–146. – DOI: 10.51608/26867818_2023_3_138.
12. Карпунин, В. Г., Голубева Е. А. Компьютерное моделирование строительных конструкций зданий и сооружений // *Архитектон: известия вузов*. – 2019. – № 4 (68). – С. 17.
13. Raghu, P., Rajagopal, A., Reddy, J.N., Nonlocal nonlinear finite element analysis of composite plates using TSDT // *Composite Structures* (2017). – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.075>.
14. Nikaido, Yuji, Yoshinori Mihara, Shohei Sawada and Yoshiyuki Takahashi. “Improvement and Enhancement of Concrete Damage Plasticity Model” (2015).
15. Abaqus/CAE User's Guide 2016.
16. Lubliner J., Oliver J., Oller S. and Oñate E. A plastic-damage model for concrete, *Int. J. Solids and Structures* (1989). Vol. 25 (3), pp. 299-326 URL https://www.scipedia.com/public/Lubliner_et_al_1989a.
17. Бондаренко В. М., Римшин В. И. Квазилинейные уравнения силового сопротивления и диаграмма $\sigma - \epsilon$ бетона // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2014. – № 6. – С. 40–44.
18. Бондаренко В. М. Элементы диссипативной теории силового сопротивления железобетона // *Строительная механика инженерных конструкций и сооружений*. – 2014. – № 2. – С. 47–57.
19. Сулейманова Л. А. Гальванический метод ускорения хлоридной коррозии железобетонных элементов / Л. А. Сулейманова, П. А. Амелин // *Наука и инновации в строительстве: сборник докладов VIII Международной научно-практической конференции, посвященной 70-летию со дня образования БГТУ им. В. Г. Шухова, Белгород, 15 апреля 2024 года*. – Белгород: Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, 2024. – С. 134–141.

References

1. Rimshin V. I., Kustikova Yu. O., Kotelnikov D. N. Analytical assessment of the strength resistance of reinforced concrete damaged by corrosion. *Bulletin of the Mordovian University*. Vol. 15. No. 1–2. 2005. Pp. 149–153.
2. Petrov V. V., Ovchinnikov I. G., Shikhov Yu. M. Calculation of structural elements interacting with an aggressive environment. Saratov: Publishing House of Saratov University. 1987. 288 p.
3. Andrade C., Alonso C., Gulikers J. Test methods for on-site corrosion rate measurement of steel reinforcement in concrete by means of the polarization resistance method. *Materials and Structures*. No. 37. 2004. Pp. 623–643.
4. Chirkov V. P. Applied methods of reliability theory in calculations of building structures. M.: Educational and Methodological Center for Education in Railway Transport. 2006. 620 p.
5. Brown R. D. Design prediction of the life for reinforced concrete in marine and other chloride environments. *Durability of Building Materials*. Amsterdam: Elsevier Scientific. Vol. 1. 1982. Pp. 113–125.
6. Rosenthal N. K., Stepanova V. F., Chekhov G. V. Concretes of high corrosion resistance and normalization of their characteristics. *Building Materials, Equipment, Technologies of the XXI Century*. No. 3–4 (218–219). 2017. Pp. 14–19.
7. Feng G., Jin Z., Jiang Y., Wang X., Zhu D. Localized corrosion propagation of steel in cracked mortar and long-term corrosion of steel reinforcement in cracked concrete in seawater environment. *Corrosion Science*. Vol. 228. 2024. <https://doi.org/10.1016/j.corsci.2023.111793>
8. Al-Hammoud R., Soudki K., Topper T. H. Bond analysis of corroded reinforced concrete beams under monotonic and fatigue loads. *Cement Concrete Composites*. Vol. 32. No. 3. 2010. Pp. 194–203.
9. Suleymanova L. A., Amelin P. A. Development of corrosion processes of reinforced concrete in conditions of chloride aggressive environment. *Science and Innovations in Construction: Collection of Reports of the VI International Scientific and Practical Conference Dedicated to the 50th Anniversary of the Department of Construction and Urban Management*. Belgorod: BSTU named after V. G. Shukhov. Volume 1. 2022. Pp. 131–135.
10. Rimshin V. I., Shubin L. I., Savko A. V. Resource of force resistance of reinforced concrete structures of engineering structures. *Academia. Architecture and Construction*. No. 5. 2009. Pp. 483–491.
11. Rimshin V. I., Suleymanova L. A., Amelin P. A., Kryuchkov A. A. Experimental studies of bent reinforced concrete elements with reinforcement damage due to contact with an aggressive chloride medium. *Expert: Theory and Practice*. No. 3 (22). 2023. Pp. 138–146. DOI: 10.51608/26867818_2023_3_138.
12. Karpunin V. G., Golubeva E. A. Computer modeling of building structures of buildings and structures. *Architecton: News of Universities*. No. 4 (68). 2019. P. 17.
13. Raghu P., Rajagopal A., Redd J. N. Nonlocal nonlinear finite element analysis of composite plates using TSdT. *Composite Structures*. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.075>.
14. Nikaido Yuji, Yoshinori Mihara, Shohei Sawada and Yoshiyuki Takahashi. Improvement and Enhancement of Concrete Damage Plasticity Model. 2015.
15. Abaqus/CAE User's Guide 2016.
16. Lubliner J., Oliver J., Oller S. and Onate E. A plastic-damage model for concrete. *Int. J. Solids and Structures*. Vol. 25 (3). 1989. Pp. 299–326 URL https://www.scipedia.com/public/Lubliner_et_al_1989a.
17. Bondarenko V. M., Rimshin V. I. Qasi-linear equations of force resistance and diagram $\sigma - \varepsilon$ of concrete. *Construction Mechanics of Engineering Structures*. No. 6. 2014. Pp. 40–44.

18. Bondarenko V. M. Elements of the dissipative theory of force resistance of reinforced concrete. *Construction Mechanics of Engineering Structures*. No. 2. 2014. Pp. 47–57.

19. Suleymanova L. A., Amelin P. A. Galvanic method of accelerating chloride corrosion of reinforced concrete elements. *Science and Innovations in Construction: Collection of Reports of the VIII International Scientific and Practical Conference dedicated to the 70th Anniversary of the Founding of the V. G. Shukhov*. BSTU. Belgorod. April 15, 2024. Belgorod: Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov. 2024. Pp. 134–141.

FINITE ELEMENT MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF BENDING REINFORCED CONCRETE ELEMENTS IN A CHLORIDE AGGRESSIVE ENVIRONMENT

V. I. Rimshin ¹, L. A. Suleimanova ², P. A. Amelin ³, D. S. Anoprienko ⁴

National Research University Moscow State University of Civil Engineering ¹
Russia, Moscow

Research Institute of Building Physics of the Russian Academy of Architecture and Construction Sciences ¹
Russia, Moscow

BSTU named after V. G. Shukhov ^{2, 3, 4}
Russia, Belgorod

¹ Dr. of Technical Sciences, Professor of the Department of Housing and Public Utilities, tel.: +7(499)183-38-92, e-mail: v.rimshin@niisf.ru

² Dr. of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Construction and Urban Management, tel.: +7(4722)541620, e-mail: ludmilasuleimanova@yandex.ru

³ Assistant of the Department of Construction and Urban Management, tel.: +7(4722)54-16-20, e-mail: p.amelin@inbox.ru

⁴ MA Student of the Department of Construction and Urban Management, tel.: +7(4722)54-16-20, e-mail: vk.danila.use@yandex.ru

This article considers the modeling of the behavior of bending reinforced concrete elements exposed to an aggressive chloride environment using the Abaqus software package. The main objective of the study is to assess the stress-strain state of a rectangular reinforced concrete element. The modeling was carried out taking into account the nonlinear state diagram of concrete described by the concrete damage plastic failure model (CDP), and the reinforcement was specified by rod finite elements with a combination of elastic properties and a metal plasticity model. The element was loaded statically with the application of two concentrated forces at the centers of one-third of the calculated span. As a result of the modeling, the distributions of stresses and strains in concrete and reinforcement, as well as models of concrete damage with increasing load have been obtained. The obtained results show high convergence with the experimental data of beam bending tests along a normal section. This confirms the possibility of using the developed algorithm for designing flexible reinforced concrete structures in aggressive environments, which is important for increasing their reliability and durability.

Keywords: finite element method (FEM), concrete damage plastic failure model (CDP), "Abaqus", strength, deformability.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 69.04

DOI 10.36622/2219-1038.2025.44.1.005

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОДКРАНОВО-ПОДСТРОПИЛЬНОЙ ФЕРМЫ С РАСЦЕНТРОВАННЫМИ УЗЛАМИ ПРИМЫКАНИЯ РЕШЕТКИ К НИЖНЕМУ ПОЯСУ

Ю. Д. Маркина¹Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет¹
Россия, г. Н. Новгород

¹ Ст. преп. кафедры теории сооружений и технической механики, тел.: +7 (908) 237-35-81,
e-mail: poluektoff@bk.ru

При определении максимального изгибающего момента в ездовом нижнем поясе подкраново-подстропильной фермы рекомендуется учитывать составляющую от внецентренного примыкания элементов решетки к ездовому поясу.

Статья посвящена вопросам, связанным с расцентровкой узлов подкраново-подстропильной фермы. Рассмотрены методики учёта в расчете нижнего пояса расцентровки узлов. Проанализировано влияние расцентровки на усилия и напряжения в элементах подкраново-подстропильной фермы при кручении, горизонтальном и вертикальном изгибе.

Ключевые слова: подкрановые конструкции, напряженно-деформированное состояние, расцентровка узлов, тонкостенное замкнутое сечение.

Введение. Характерной особенностью классических подкраново-подстропильных ферм (ППФ) являются габаритные и сложные в исполнении узлы соединения решетки с ездовым нижним поясом, по которому перемещается кран [1–3]. Крепление осуществляется на высокопрочных болтах. Сварной нижний пояс, выполненный в виде тонкостенной оболочки прямоугольного сечения, в зоне примыкания решетки прорезается с двух сторон фасонками, которые в теле пояса соединяются наклонными ребрами жесткости (рис. 1). В узлах коробчатый пояс укрепляется вертикальными сплошными диафрагмами жесткости [4]. Сложность конструирования узлов примыкания элементов решетки к нижнему поясу заставляет центрировать их не на ось пояса, а с эксцентриситетом [5–7]. Это приводит к дополнительному изгибу нижнего пояса [8].

В соответствии с [9] при определении максимального изгибающего момента в ездовом поясе ППФ рекомендуется учитывать составляющую от внецентренного примыкания элементов решетки к ездовому поясу за исключением случаев, когда она оказывает разгружающее влияние.

Статья посвящена вопросам, связанным с эксцентриситетом крепления элементов решетки к ездовому нижнему поясу ППФ. Проанализировано влияние эксцентриситета на усилия и напряжения в элементах ППФ при горизонтальном, вертикальном изгибе и кручении. Рассмотрены методы определения момента от внецентренного примыкания решетки [10–12], сделаны выводы о возможности их применения для расчёта ППФ.

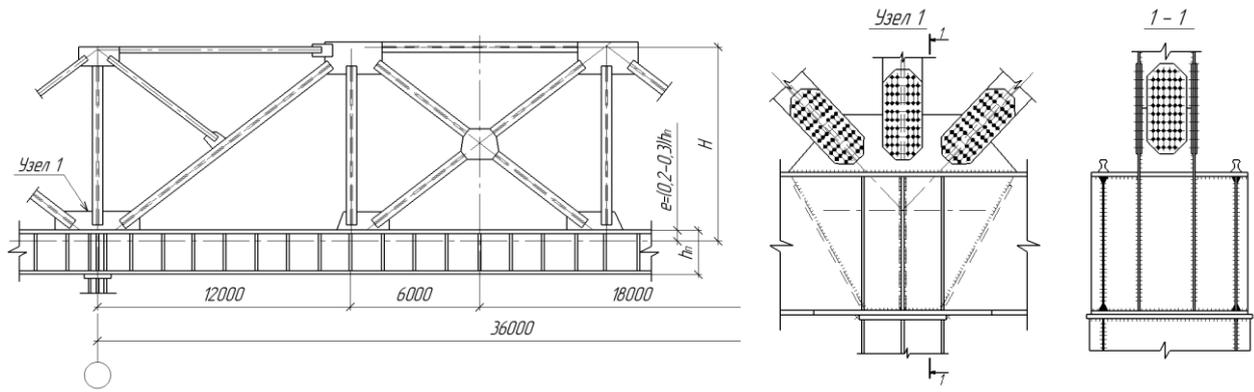


Рис. 1. Примыкание решетки к нижнему поясу:

e – эксцентриситет узлов примыкания элементов решетки к нижнему поясу; H – высота ППФ;
 h_{II} – высота нижнего пояса ППФ

Методы исследования. Объект исследования – ППФ, расположенная в литейном цехе металлургического предприятия (рис. 2). Размеры нижнего пояса – 3,42×2,01 м, толщина стенок пояса – 25 мм, толщина полок – 16 мм. Толщина поперечных диафрагм жёсткости пояса – 20 мм. При расчёте задаётся нагрузка от двух двухбалочных мостовых кранов, расположенных в середине пролета. Краны литейные 180+63/20-33,5-36-3-220 выполняют функцию заливки и разливки жидкой стали в изложницы. Данным кранам соответствует тяжёлый режим работы 7К согласно ГОСТ 25546-82. Для предварительного расчёта неразрезной многопролётный нижний пояс принимается разрезным на опорах [13–15].

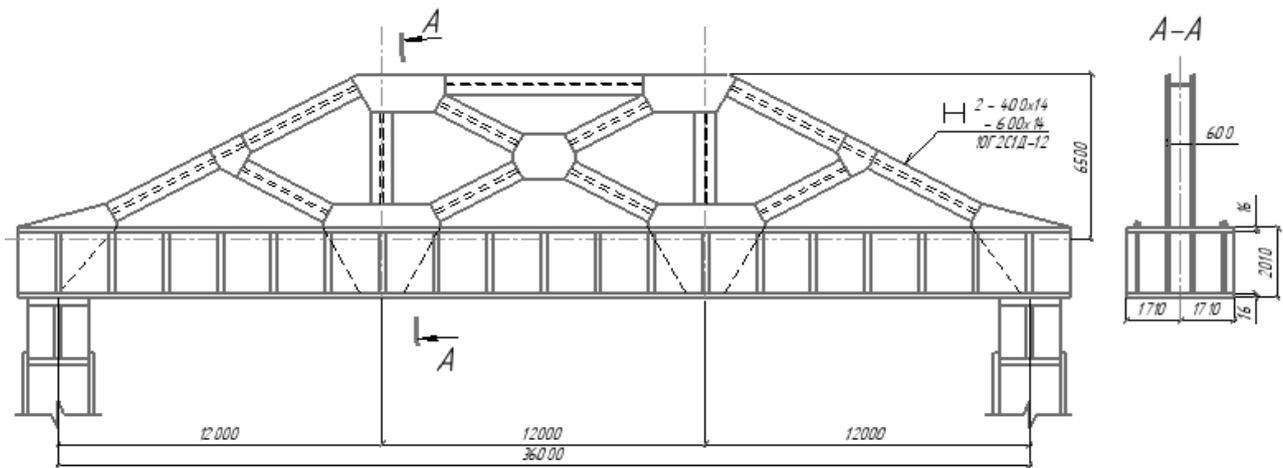


Рис. 2. Объект исследования

В соответствии с [11] для лёгких ферм с жесткими узлами узловые моменты от расцентровки узлов определяются по формуле:

$$M_z''' = e(N_{II} - N_L), \quad (1)$$

где e – эксцентриситет центровки решетки к оси нижнего пояса; N_{II} и N_L – продольные силы в нижнем поясе справа и слева от узла (рис. 3).

В соответствии с [12] значения моментов от расцентровки определяются как разность величин моментов, определенных с использованием ЭВМ по расчётным схемам с учетом и без учёта эксцентриситета.

Несмотря на большую жесткость неразрезного нижнего пояса ППФ, для предварительного расчета допускается рассматривать его как разрезной [9]. Это позволяет упростить

внутренне и внешне статически неопределимую модель до статически определимой шарнирно-стержневой расчетной схемы (рис. 4).

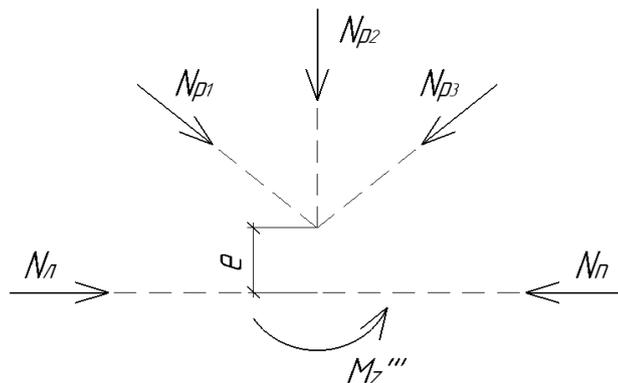


Рис. 3. К определению узловых моментов от расцентровки узлов

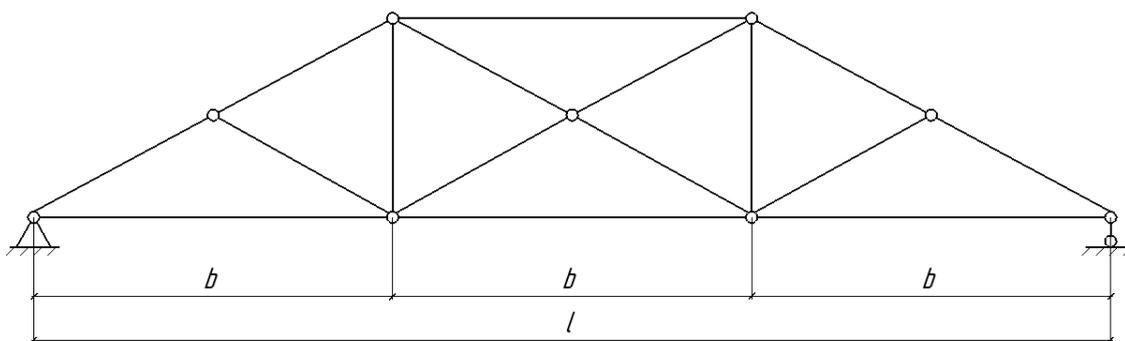


Рис. 4. Шарнирно-стержневая расчетная схема

В [16] обоснована необходимость учета неразрезности нижнего пояса ППФ при определении его податливости. Для расчёта рекомендуется использовать внешне статически определимую систему со степенью внутренней статической неопределимости, равной числу узлов нижнего пояса (без учета узлов соединения с колоннами) (рис. 5).

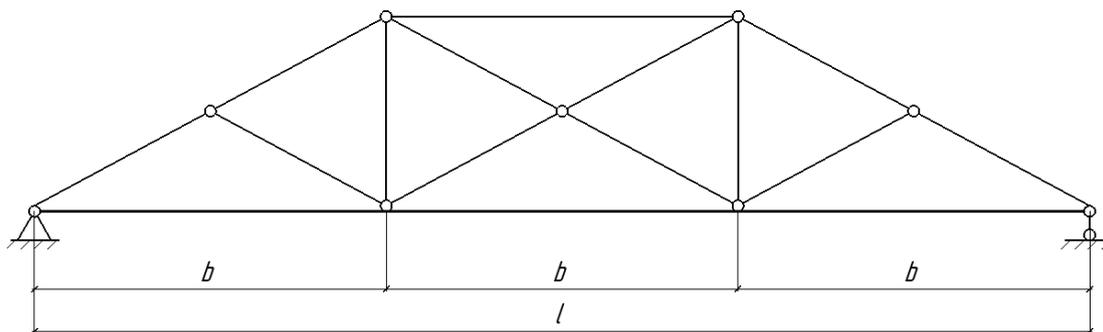


Рис. 5. Внутренне статически неопределимая расчетная схема

Аналитически рассчитаны узловые моменты от расцентровки узлов с определением продольных усилий пояса по расчетным схемам рис. 1 и 2. Проведено сравнение результатов расчёта. Также для расчетной схемы с неразрезным поясом (рис. 5) моменты от расцентровки

узлов определены численным методом. Для этого построены расчетные схемы ППФ без учета и с учетом расцентровки узлов. Расцентровка моделируется установкой в узловых зонах на стержневые элементы решетки жестких вставок высотой, равной эксцентриситету. Значения моментов от расцентровки находятся как разности величин моментов, определенных по расчетным схемам с учетом и без учета эксцентриситета [12].

В соответствии с [17] плоская расчетная схема дает наименьшую погрешность при определении перемещений в сравнении с пространственной при учете расцентровки решетки и жестком соединении всех узлов (рис. 6).

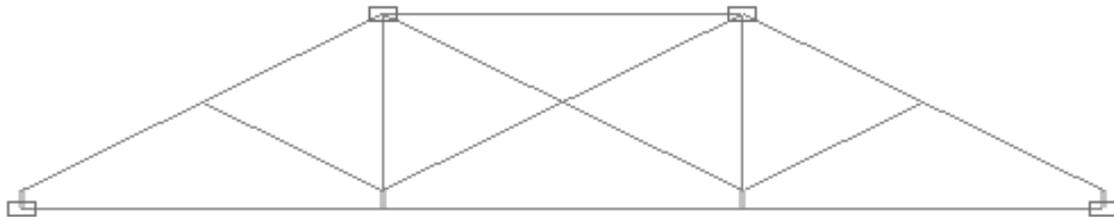


Рис. 6. Расчетная схема для численного расчёта

Для определения влияния эксцентриситета крепления решетки на напряжения нижнего пояса построены эпюры напряжений в наиболее нагруженном сечении в середине пролета ППФ. Для построения эпюр напряжений используются усилия, полученные расчетом схемы с жесткими узлами (рис. 6), схем с шарнирным примыканием решетки и неразрезным поясом (рис. 5) с учетом и без учета эксцентриситета.

Геометрические характеристики призматического тонкостенного нижнего пояса ППФ рассчитываются по [18] в соответствии с [19–21]. Эквивалентное напряжение σ_e определяется по СП 16.13330.2017:

$$\sigma_e = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_{loc,x})^2 - (\sigma_x + \sigma_{loc,x})\sigma_{loc,y} + \sigma_{loc,y}^2 + 3(\tau_{xy} + \tau_{loc,xy})^2}. \quad (2)$$

Основные напряжения в элементах ППФ в общем случае (для произвольного поперечного сечения, не имеющего осей симметрии) вычисляются по формулам [18]:

- от продольных сил:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}; \quad (3)$$

- от изгиба в плоскости фермы:

$$\sigma_x = \frac{M_z(I_{y_0}y_0 - I_{y_0z_0}z_0)}{\Delta I}. \quad (4)$$

Так как сечение обладает осями симметрии, формула (4) переходит в формулу Л. Навье и максимальные нормальные напряжения определяются как:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{W_x}. \quad (5)$$

Эпюры напряжений, полученные аналитическими вычислениями, сравнивались с результатами численного расчёта. Для численного определения напряжений из оболочечных конечных элементов построена пространственная модель ППФ (рис. 7). Использован 44-й тип элементов – 4-узловой конечный элемент с шестью степенями свободы в каждом узле. Форма конечных элементов – четырехугольник с соотношением сторон, близким к единице. Размер конечных элементов пояса принят с в соответствии с [22] и не превышает 0,2 м.

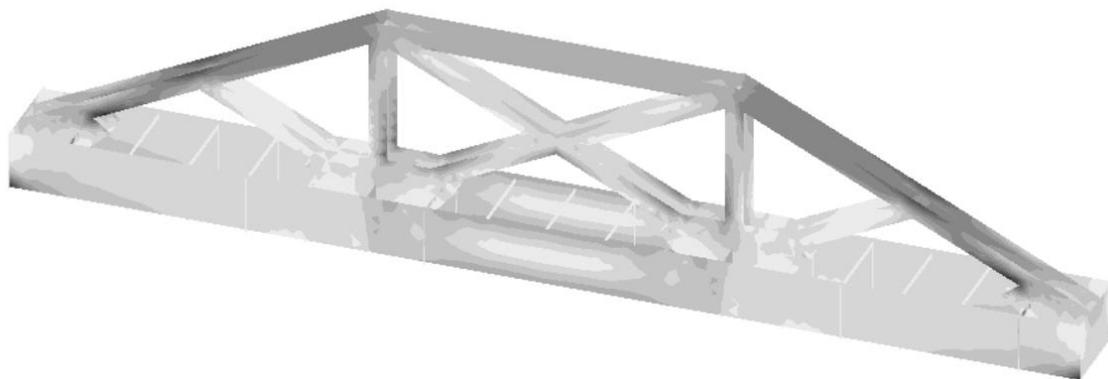


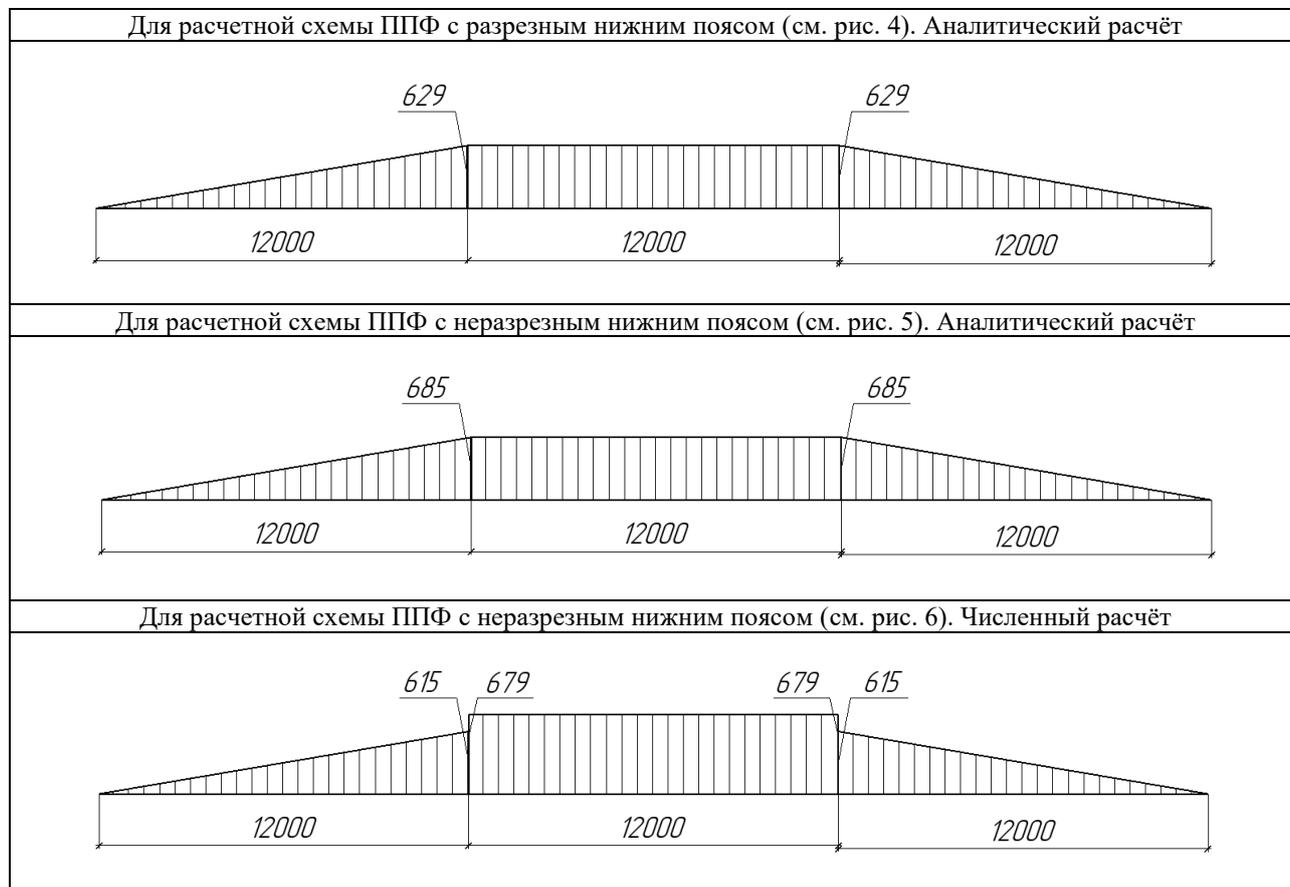
Рис. 7. Конечно-элементная расчетная схема ППФ

Также численным методом проведено исследование влияния эксцентриситета крепления решетки к поясу на усилия в элементах ППФ при горизонтальном изгибе и кручении. Рассмотрена расчетная схема с учетом расцентровки решетки и жестком соединении всех узлов (рис. 6) с учетом и без учета расцентровки решетки. Для анализа влияния эксцентриситета при горизонтальном изгибе приложена горизонтальная узловая нагрузка $F = 100$ кН, при кручении – узловой крутящий момент $M_{кр} = 100$ кНм. Выполнено сравнение результатов расчета.

Результаты. Результаты аналитического и численного определения изгибающего момента в плоскости ППФ от расцентровки узлов для различных расчетных схем сведены в табл. 1.

Таблица 1

Эпюры узловых моментов от расцентровки узлов



Вклад момента от расцентровки узла в общий изгибающий момент нижнего пояса – 22 % (найден от величин моментов, определенных по расчётным схемам без учёта и с учетом эксцентриситета [16]). Узловые моменты от расцентровки узлов, полученные с определением нормальных усилий пояса по шарнирно-стержневой статически определимой расчетной схеме (см. рис. 4), на 8 % ниже усилий, полученных по расчётной схеме с неразрезным нижним поясом (см. рис. 5), и на 7 % ниже усилий, полученных по той же расчётной схеме численным методом. Аналитическое определение момента от расцентровки узла с определением нормальных усилий пояса по расчётной схеме с неразрезным нижним поясом даёт погрешность 1 % в сравнении с численным методом. Расчёт выполнен для разрезной на опорах ППФ в соответствии с [9], результаты расчётов с учетом приопорных изгибающих моментов дают большее отклонение [16].

Эпюры напряжений в наиболее нагруженном сечении в середине пролета ППФ, полученные различными методами расчёта, представлены в табл. 2 и на рис. 8.

Таблица 2

Максимальные эквивалентные напряжения в нижнем поясе ППФ

Расчётная схема	$\sigma_{e,max}$, МПа			Процентное отклонение $\sigma_{e,max}$ от результатов численного расчёта, %		
	в стенках	в верхней полке	в нижней полке	в стенках	в верхней полке	в нижней полке
Пространственная	65,82	87,41	93,43	-	-	-
С жесткими узлами	66,62	73,43	73,43	-1	16	21
С неразрезным поясом с учетом расцентровки	75,18	83,00	83,00	-14	5	11
С неразрезным поясом без учета расцентровки	58,60	64,47	64,47	11	26	31

Напряжения, рассчитанные по усилиям плоской расчётной схемы с жесткими узлами и учетом расцентровки узлов (см. рис. 7) дают наименьшую погрешность в сравнении с пространственной расчётной схемой только в области стенки. Напряжения, полученные в полках по усилиям шарнирно-стержневой расчётной схемы с неразрезным поясом и учетом расцентровки, в наименьшей степени отличаются от результатов численного расчёта. Напряжения, полученные аналитическим расчётом без учёта расцентровки узлов в нижней полке, на 31 % ниже напряжений, полученных численным расчётом, в верхней полке – на 26 %, в стенках – на 11 %. В сравнении с напряжениями, полученными аналитическим расчётом с учетом расцентровки, они на 25 % ниже в стенках, на 20 % в полках. Таким образом, момент от внецентренного примыкания элементов решетки к нижнему поясу оказывает значительное негативное влияние на напряженное состояние нижнего пояса и должен учитываться при расчёте конструкции.

Результаты численного исследования влияния эксцентриситета крепления решетки к поясу на усилия в элементах ППФ при горизонтальном изгибе и кручении приведены в табл. 3.

Учет в расчете на кручение и горизонтальный изгиб составляющей от внецентренного примыкания элементов решетки к ездovому поясу оказывает разгружающее влияние на работу пояса. При этом момент от расцентровки узла оказывает негативное влияние на усилия в элементах решетки. Процентное отклонение Q_z в расчетной схеме ППФ без учёта расцентровки от Q_z в расчетной схеме ППФ с учётом расцентровки – 12 %. Таким образом, при предварительном расчёте ездovого нижнего пояса на горизонтальный изгиб и кручение расцентровку узлов целесообразно не учитывать.

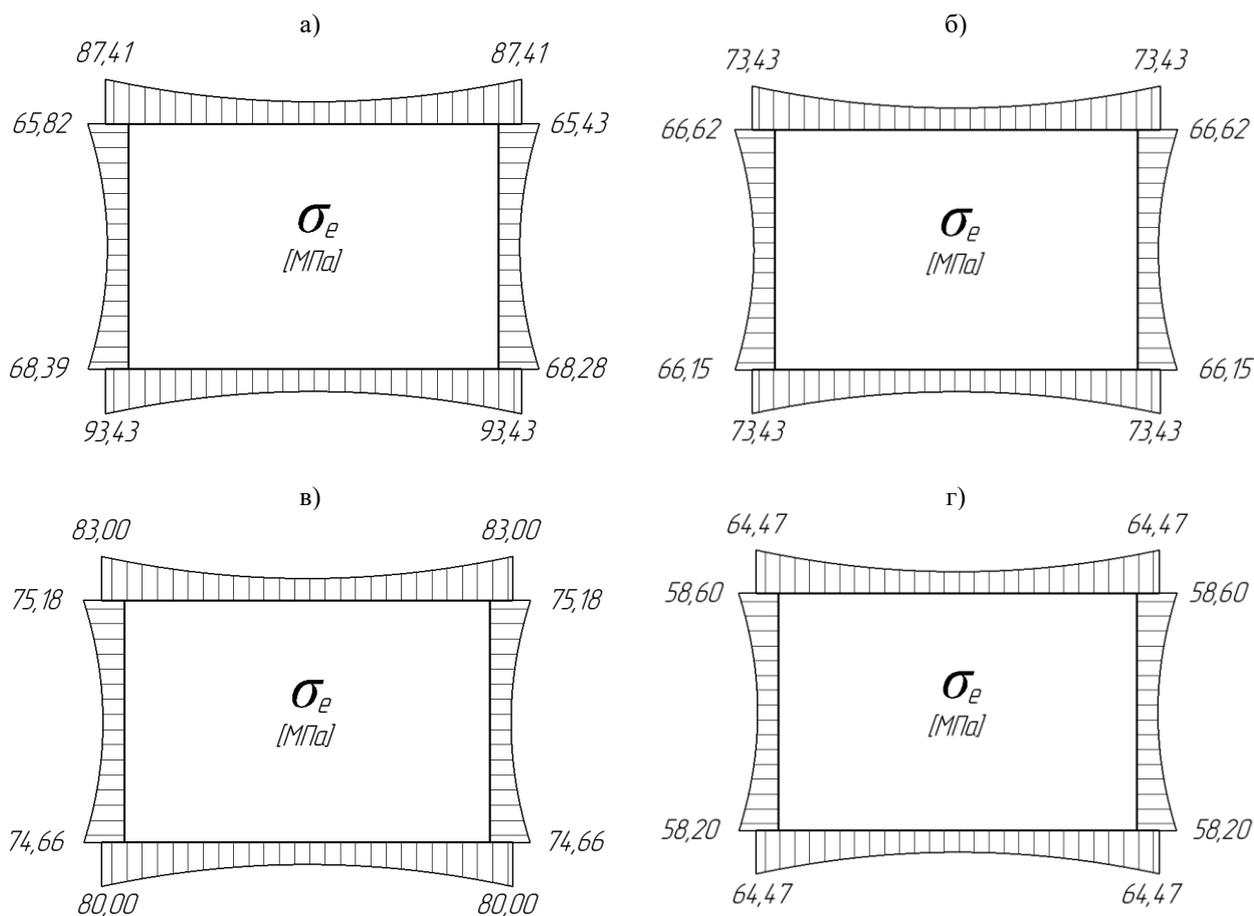


Рис. 8. Эпюры эквивалентных напряжений в нижнем поясе ППФ:

а) пространственной расчётной схемы; б) плоской расчётной схемы с жесткими узлами – см. рис. 6;
 в) плоской шарнирно-стержневой расчётной схемы с неразрезным нижним поясом с учетом расцентровки узлов и (г) без учета расцентровки узлов – см. рис. 5

Таблица 3

Влияния расцентровки узлов на усилия в элементах ППФ при горизонтальном изгибе и кручении

Максимальные усилия	При горизонтальном изгибе			При кручении		
	С учётом расцентровки	Без учёта расцентровки	Процентное отклонение, %	С учётом расцентровки	Без учёта расцентровки	Процентное отклонение, %
В ездовом нижнем поясе						
$M_{к,max}$, кНм	2,1	2,3	-9,5	31,1	33,8	-8,7
$M_{z,max}$, кНм	-342,0	-342,7	-0,2	42,5	41,3	2,8
$Q_{y,max}$, кН	-14,7	-14,8	-0,7	0,2	0,6	-200,0
В элементах решетки						
$M_{y,max}$, кНм	-11,9	-11,2	5,9	-49,3	-48,6	1,4
$Q_{z,max}$, кН	1,0	0,9	10,0	8,2	7,2	12,2

Заключение

1. Момент от внецентренного примыкания элементов решетки к нижнему поясу оказывает значительное негативное влияние на напряженное состояние нижнего пояса. Вклад момента от расцентровки узла в общий изгибающий момент нижнего пояса для рассматриваемой ППФ – 22 %. Напряжения, полученные аналитическим расчётом без учёта расцентровки узлов в нижней полке, на 31 % ниже напряжений, полученных численным расчётом, в верхней полке –

на 26 %, в стенках – на 11 %. Следует учитывать составляющую от внецентренного примыкания элементов решетки к ездовому поясу при расчете ППФ на вертикальный изгиб.

2. Для анализируемой ППФ учет в расчете на кручение и горизонтальный изгиб составляющей от внецентренного примыкания элементов решетки к ездовому поясу оказывает разгружающее влияние на работу пояса. Поэтому в соответствии с [9, 18] на стадии предварительного расчёта ездового нижнего пояса на горизонтальный изгиб и кручение расцентровку узлов допускается не учитывать.

3. Момент от расцентровки узла при кручении и горизонтальном изгибе может привести к увеличению внутренних усилий в элементах решетки.

4. Метод определения узловых моментов от расцентровки узла, используемый при расчёте лёгких ферм с жесткими узлами, применим на стадии предварительного расчёта ППФ как однопролётной конструкции. Для рассматриваемой системы аналитическое определение момента от расцентровки узла с вычислением нормальных усилий пояса по расчётной схеме с неразрезным нижним поясом даёт погрешность 1 % в сравнении с численным методом. Аналитическое определение момента от расцентровки узла с вычислением нормальных усилий пояса по статически определимой расчётной схеме с разрезным нижним поясом даёт погрешность 8 % в сравнении с численным методом.

Сведения о финансировании: статья подготовлена при финансовой поддержке гранта «Фундамент будущего», который проводится в рамках программы развития ННГАСУ, реализуемой по программе академического лидерства «Приоритет 2030», в аспекте развития научно-исследовательской политики университета.

Библиографический список

1. Markina Yu. D. Verification and refinement of the methodology for calculating the stiffness of crane secondary truss joints in its plane // Приволжский научный журнал. – 2024. – № 1 (69). – С. 11–21.
2. Srinivasan V., Purushothaman T., Chatterjee S. Stress analysis of thin-walled circular and rectangular tubes subjected to torsion // International Journal of Mechanical Engineering and Technology. – 2017. – Vol. 8, No. 8. – Pp. 1580–1587.
3. Туснина О. А., Такки В. Ф., Егоров И. Ф. Опыт замены нижнего пояса находящейся под нагрузкой подкраново-подстропильной фермы // Промышленное и гражданское строительство. – 2023. – № 4. – С. 21–28. – DOI: 10.33622/0869-7019.2023.04.21-28.
4. Влияние жесткости элементов решетки на податливость ездового пояса подкраново-подстропильной фермы (ППФ) / Б.Б. Лампси [и др.] // Приволжский научный журнал. – 2022. – № 2 (62). – С. 29–36
5. Маркина Ю. Д. Особенности статического расчета подкраново-подстропильной фермы // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред: сборник трудов 13-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И. Ф. Образцова и Ю. Г. Яновского. – 2023. – С. 113–120.
6. Ерёмин К. И., Шульга С. Н. Напряженно-деформированное состояние узлов подкраново-подстропильных ферм // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – № 4. – С. 52–54.
7. Маркина Ю. Д. Напряженное состояние нижнего пояса подкраново-подстропильной фермы при стесненном кручении // Вестник гражданских инженеров. – 2024. – № 7 (102). – С. 36-43.
8. Маркина Ю. Д. Кручение нижнего пояса подкраново-подстропильной фермы // Вестник БГТУ им. В. Г. Шухов. – 2023. – № 11. – С. 27–36. – DOI: 10.34031/2071-7318-2023-8-11-27-36.

9. Руководство по проектированию стальных подкрановых конструкций. – М.: ЦНИИ-Проектстальконструкция, 1976. – 112 с.
10. Лампси Б. Б. Оценка влияния особенностей конструкции и нагрузки на напряженное состояние и прочность ездовых поясов систем типа подкраново-подстропильных ферм: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01, 01.02.03. – Горький, 1983. – 220 с.
11. Горев В. В. Металлические конструкции. Т. 2. Конструкции зданий. – М.: Высшая школа, 2004. – 551 с.
12. Кузнецов В. В. Металлические конструкции. Т. 2. Стальные конструкции зданий и сооружений. – М.: АСВ, 1998. – 512 с.
13. Нежданов К. К., Горькин И. Н., Курткезов Д. Х. Результаты испытаний неразрезных подкрановых конструкций // Региональная архитектура и строительство. – 2020. – № 3 (44). – С. 78–83.
14. Никитина Е. А., Хазов П. А., Бриккель Д. М. Определение остаточного ресурса подкраново-подстропильной фермы с учетом накопления повреждений в реальных условиях эксплуатации // Приволжский научный журнал. – 2018. – № 1. – С. 9–14.
15. Романов М. В. Напряжённо-деформированное состояние опорных частей подкраново-подстропильных ферм: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01. – Магнитогорск, 2002. – 166 с.
16. Лампси Б. Б., Маркина Ю. Д. Жесткость узлов подкраново-подстропильной фермы в её плоскости // Строительная механика и конструкции. – 2023. – № 4 (39). – С. 51–63. – DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.006.
17. Лампси Б. Б., Маркина Ю. Д., Хазов П. А. Влияние высоты подкраново-подстропильной фермы (ППФ) на податливость ездового пояса // Приволжский научный журнал. – 2023. – № 1 (65). – С. 28–34.
18. Лампси Б. Б., Маркина Ю. Д. Подкраново-подстропильные фермы. Особенности конструкции, работы и расчёта: монография. – Нижний Новгород: ННГАСУ, 2024. – 169 с.
19. Лампси Б. Б. Металлические тонкостенные несущие конструкции при локальных нарузках. – М.: Стройиздат, 1979. – 270 с.
20. Уманский А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций. – М.: Оборониздат, 1939. – 112 с.
21. Власов В. З. Избранные труды. Т. 2. Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 328 с.
22. Tushina O. A. Finite element analysis of crane secondary truss // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – No. 1 (77). – Pp. 68–89. – DOI: 10.18720/MCE.77.7.

References

1. Markina Yu. D. Verification and refinement of the methodology for calculating the stiffness of crane secondary truss joints in its plane. Yu. D. Markina. *Privolzhskij nauchny`j zhurnal [Volga Scientific Journal]*. 2024. No. 1 (69). Pp. 11–21.
2. Srinivasan V., Purushothaman T., Chatterjee S. Stress analysis of thin-walled circular and rectangular tubes subjected to torsion. *International Journal of Mechanical Engineering and Technology*. 2017. Vol. 8. No. 8. Pp. 1580–1587.
3. Tushina O. A. Opy`t zameny` nizhnego poyasa nakhodyashhejsya pod nagruzkoy podkranovo-podstropil`noj fermy` [The experience of replacing the lower chord of a crane secondary truss under load. O. A. Tushina, V. F. Takki, I. F. Egorov. *Promy`shlennoe i grazhdanskoe stroitel`stvo [Industrial and civil engineering]*. 2023. No. 4. Pp. 21–28. DOI: 10.33622/0869-7019.2023.04.21-28.
4. Vliyanie zhestkosti e`lementov reshetki na podatlivost` ezdovogo poyasa podkranovo-podstropil`noj fermy` (PPF) [The effect of the rigidity of the lattice elements on the pliability of the crane secondary truss (CST) riding chord]. B. B. Lampsi, P. A. Khazov, Yu. D. Markina, D. M. Brikkel`. *Privolzhskij nauchny`j zhurnal [Volga Scientific Journal]*. 2022. No. 2 (62). Pp. 29–36.

5. Markina Yu. D. Osobennosti staticheskogo raschyota podkranovo-podstropil'noj fermy` [Features of the static calculation of the crane secondary truss]. Yu. D. Markina. *Mexanika kompozicionny`x materialov i konstrukcij, slozhny`x i geterogenny`x sred: sbornik trudov 13oj Vserossijskoj nauchnoj konferencii s mezhdunarodny`m uchastiem im. I. F. Obrazczova i Yu. G. Yanovskogo* [Mechanics of composite materials and structures, complex and heterogeneous media: proceedings of the 13th All-Russian scientific conference with international participation named after I.F. Obraztsov and Yu.G. Yanovsky], Moskva, 14–16 noyabrya 2023 goda. Moskva: IPRIM RAN, Izdatel'stvo Obshhestvo s ogranichennoj otvetstvennost`yu "Sam Poligrafist" [Publishing house limited liability company "Sam Polygraphist"]. 2023. Pp. 113–120.
6. Eryomin K. I. Napryazhenno – deformirovannoe sostoyanie uzlov podkranovo-podstropil'ny`x ferm [Stress-strain state of crane secondary trusses]. K. I. Eremin, S. N. Shul`ga. *Promy`shlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and civil engineering]. 2012. No. 4. Pp. 52–54.
7. Markina Yu. D. Napryazhennoe sostoyanie nizhnego poyasa podkranovo-podstropil'noj fermy` pri stesnennom kruchenii [The stressed state of the lower chord of the crane secondary truss with constrained torsion]. Yu. D. Markina. *Vestnik grazhdanskix inzhenerov* [Proceedings of civil engineers]. 2024. No. 7 (102). Pp. 36–43.
8. Markina Yu. D. Kruchenie nizhnego poyasa podkranovo-podstropil'noj fermy` [Torsion of the lower chord of the crane secondary truss]. Yu. D. Markina. *Vestnik BGTU im. V. G. Shuxova* [Proceedings of the Belgorod State Technological University named after V.G. Shukhov]. 2023. No. 11. Pp. 27–36. DOI: 10.34031/2071-7318-2023-8-11-27-36.
9. Rukovodstvo po proektirovaniyu stalnykh podkranovykh konstruktsiy [Guidelines for the design of steel crane structures]. Moscow.: TsNIIproektstalkonstruktsiya, 1976. 112 p.
10. Lampsi B. B. Otsenka vliyaniya osobennostey konstruktsii i nagruzki na napryazhennoye sostoyaniye i prochnost ezdovykh poyasov sistem tipa podkranovo-podstropilnykh ferm: dis. kand. texn. nauk: 05.23.01. 01.02.03 [Assessment of the influence of design features and load on the stress state and strength of the riding belts of systems such as crane-sub-trusses: thesis of candidate of technical sciences: 05.23.01. 01.02.03] Lampsi Boris Borisovich. Gorkiy. 1983, 220 p.
11. Gorev V. V. Metallicheskie konstrukcii. Tom 2. Konstrukcii zdaniy [Metal structures. Volume 2. Constructions of buildings]. Moscow: Vysshaya shkola, 2004. 551 p.
12. Kuznetsov V. V. Metallicheskiye konstruktsii. Tom 2. Stalnyye konstruktsii zdaniy i sooruzheniy [Metal structures. Volume 2. Steel structures of buildings and structures]. Moscow: izdvo ASV, 1998. 512 p.
13. Nezhdanov K. K. Rezul'taty` ispy'tanij nerazrezny`x podkranovy`x konstrukcij [Test results of continuous crane structures]. K. K. Nezhdanov, I. N. Gor`kin, D. X. Kurtkeзов. *Regional'naya arxitektura i stroitel'stvo* [Regional architecture and construction]. 2020. No. 3 (44). Pp. 78–83.
14. Nikitina E. A. Opredelenie ostatochnogo resursa podkranovo-podstropil'noj fermy` s uchetom nakopleniya povrezhdenij v real'ny`x usloviyax e`kspluatatsii [Determination of the remaining life of the crane secondary truss, taking into account the accumulation of damage in real operating conditions]. E. A. Nikitina, P. A. Khazov, D. M. Brikkel`. *Privolzhskij nauchny`j zhurnal* [Volga Scientific Journal]. 2018. No. 1. Pp. 9–14. (In Russian)
15. Romanov M. V. Napryazhyonno-deformirovannoe sostoyanie oporny`x chastej podkranovo-podstropil'ny`x ferm: dis. kand. texn. nauk: 05.23.01 [Stress-strain state of the supporting parts of crane secondary trusses: thesis of candidate of technical sciences: 05.23.01]. Romanov Mixail Viktorovich. Magnitogorsk. 2002. 166 p.
16. Lampsi B. B. Zhestkost` uzlov podkranovo-podstropil'noj fermy` v eyo ploskosti [Stiffness of the crane secondary truss nodes in its plane]. B. B. Lampsi, Yu. D. Markina. *Stroitel'naya mexanika i konstrukcii* [Construction mechanics and structures]. 2023. No. 4 (39). Pp. 51–63. DOI: 10.36622/VSTU.2023.39.4.006.

17. Lampsı B. B. Vliyanie vy`soty` podkranovo-podstropil`noj fermy` (PPF) na podatlivost` ezdovogo poyasa [The effect of the height of the crane secondary truss (CST) on the pliability of the riding chord]. B. B. Lampsı, Yu. D. Markina, P. A. Khazov. *Privolzhskij nauchny`j zhurnal* [Volga Scientific Journal]. 2023. No. 1 (65). Pp. 28–34.

18. Lampsı B. B. Podkranovo-podstropil`ny`e fermy`. Osobennosti konstrukcii, raboty` i raschyota: monografiya [Crane secondary trusses. Design, operation and calculation features: monograph]. B. B. Lampsı, Yu. D. Markina. Nizhnij Novgorod: *Nizhegorodskij gosudarstvenny`j arhitekturno-stroitel`ny`j universitet* [Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering]. 2024. 169 p.

19. Lampsı B. B. Metallicheskie tonkostenny`e nesushhie konstrukcii pri lokal`ny`x nagruzkax [Thin-walled metal load-bearing structures under local loads]. M.: *Strojizdat*, 1979. 270 p.

20. Umanskij A. A. Kruchenie i izgib tonkostenny`x aviakonstrukcij [Torsion and bending of thin-walled aircraft structures]. M.: Oboronizdat, 1939. 112 p.

21. Vlasov V. Z. Izbranny`e trudy` [Selected works]. vol. 2 Tonkostenny`e uprugie sterzhni. Principy` postroeniya obshhej texnicheskoy teorii obolochek [Thin-walled elastic rods. Principles of construction of the general technical theory of shells]. M.: Izd-vo AN USSR [Publishing house AN USSR]. 1963. 328 p.

22. Tsnina O. A. Finite element analysis of crane secondary truss. O. A. Tsnina. Magazine of Civil Engineering. 2018. No. 1(77). Pp. 68–89. DOI: 10.18720/MCE.77.7.

THE STRESSED STATE OF THE CRANE SECONDARY TRUSS WITH THE CENTERED NODES OF THE GRID ABUTMENT TO THE LOWER BELT

Yu. D. Markina ¹

Nizhny Novgorod State University of Architecture, Building and Civil Engineering ¹
Russia, Nizhny Novgorod

¹ Senior lecturer of the Department of Theory of Structures and Technical Mechanics, tel. +7 (908) 237-35-81, e-mail: poluektoff@bk.ru

When determining the maximum bending moment in the lower riding belt of the crane secondary truss, it is recommended to consider the component from the off-center abutment of the grid elements to the riding belt. The article is devoted to issues related to the misalignment of crane secondary truss nodes. The accounting methodology for calculating the lower zone of node misalignment is considered. The effect of misalignment on the forces and stresses in the elements of the crane secondary truss during torsion, horizontal and vertical bending is analyzed.

Key words: crane structures, stress-strain state, node alignment, thin-walled closed section.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СТАЛЬНЫХ БАЛОК, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ВЫТЯЖКОЙ СТЕНКИ

Е. В. Кравчук¹, А. А. Иодчик², В. А. Кравчук³

Дальневосточный государственный университет путей сообщения¹
Тихоокеанский государственный университет^{2,3}
Россия, г. Хабаровск

¹ Ст. преп. кафедры строительства, тел.: +7(4212)40-75-79, e-mail: 004938@togudv.ru

² Канд. техн. наук, доц. высшей школы промышленного и гражданского строительства, тел.: +7(4212)97-98-11, e-mail: 001168@togudv.ru

³ Д-р техн. наук, проф. высшей школы промышленного и гражданского строительства, тел.: +7(4212)97-98-11, e-mail: 000415@togudv.ru

Введение. Представлена методика оптимального проектирования тавра, являющегося исходным элементом двутавра, и результаты его экспериментального исследования в составе балки, предварительно напряженной вытяжкой стенки. Предмет исследования – зависимости геометрических параметров и параметров несущей способности стального тавра и двутавра, а также сопоставительный анализ теоретических выводов о напряженно-деформированном состоянии балок с его результатом, полученным в процессе натурального эксперимента. Объектом исследования является стальная балка, предварительно напряженная вытяжкой стенки.

Материалы и методы. Исследование базируется на методах сопротивления материалов, теории оптимального проектирования поперечных сечений сплошнотенчатых металлических строительных конструкций и практике проведения натуральных экспериментальных исследований конструкций.

Результаты. Выполнено оптимальное проектирование тавра и двутавра, установлена взаимозависимость геометрических параметров и параметров несущей способности элементов. Проведено сравнение теоретических и экспериментальных относительных деформаций в стенке и верхнем пояском листе тавра. На основе теории вероятности определено математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение экспериментальных и среднеарифметических значений относительных деформаций, определена плотность распределения деформаций и доверительный интервал значений.

Выводы. Теоретические предпосылки о напряженном состоянии тавра посредством вытяжки его стенки, являющегося исходным элементом двутавра, хорошо согласуются с результатами натурального экспериментального исследования.

Ключевые слова: предварительное напряжение, вероятностная оценка относительных деформации и напряжений.

Введение. Одним из направлений развития строительного комплекса является использование прогрессивных конструкций, изделий, материалов стройиндустрии, обеспечивающих технический и экономический эффект от их применения. Этим параметрам в полной мере соответствуют металлические строительные конструкции, которые особенно эффективны для строительства в экстремальных условиях.

Поэтому очевидно, что создание и совершенствование их конструктивных форм является важнейшей задачей развития строительного комплекса. Одним из путей решения указанной задачи является создание эффективных строительных конструкций повышенной несущей способности. В полной мере этому критерию отвечают стальные тонкостенные балки, предварительно напряженные без затяжек. Из всего многообразия способов предварительного напряжения наиболее эффективным является способ напряжения посредством вытяжки тонкой стенки балки, которая в напряженном состоянии присоединяется к ее верхнему поясу. После снятия усилий предварительного напряжения в стенке, к образовавшемуся тавру

присоединяется нижний пояс без усилий предварительного напряжения. Представляет интерес соотношение параметров несущей способности тавра и двутавра. Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

В качестве примеров применения предварительного напряжения можно назвать оружейное производство, судостроение, производство емкостей для хранения жидкостей, этот вопрос хорошо освещен в работе Э. Г. Ратца [1].

Впервые в России практическую проверку предварительно напряженные строительные конструкции, созданные В. Г. Шуховым [2], получили при строительстве павильонов ярмарки в Нижнем Новгороде.

Натурный эксперимент, подтверждающий теоретические выводы, позволил Е. И. Белене [3], Ю. Гайдарову [4], В. М. Вахуркину [5], Б. Н. Сперанскому [6], В. В. Бирюлеву [7], А. А. Воеводину [8] и др. сформулировать доказательную базу о надежности и экономической эффективности металлических строительных конструкций, предварительное напряжение в которых создавалось с помощью высокопрочной затяжки.

Совершенствование способов предварительного напряжения и методов экспериментального исследования строительных металлических конструкций нашло отражение в исследованиях И. Г. Клинова [9], М. Н. Лашенко [10], Е. И. Ванштейна [11], А. А. Иодчика [12], В. А. Кравчука [20] и Е. В. Кравчука [13].

К настоящему моменту в практике проведения научно-исследовательских работ нашли применение экспериментальные исследования с помощью станций GPS [14], по критерию собственных колебаний элементов [15], по критерию сейсмической прочности [16], на основе динамической жесткости [17], на основе токов сверхвысоких частот [18] и др.

Для обработки результатов натуральных экспериментов разработана стройная система аналитических зависимостей, базирующихся на теории вероятности и математической статистике, изложенной в работах В. В. Болотина [19] и его последователей.

Цель работы – показать эффективность предварительного напряжения стальных строительных балок посредством вытяжки их тонкой стенки.

Объект исследования – стальные разрезные предварительно напряженные балки.

Предмет исследования – зависимость геометрических параметров и параметров несущей способности стального тавра и двутавра, а также анализ теоретических выводов о напряженном деформированном состоянии балок с его результатом, полученным в процессе натурального эксперимента.

Модели и методы. Предварительное напряжение стальной тонкостенной балки сводится к вытяжке в продольном направлении ее стенки до напряжений, равных начальному контролируемому напряжению σ_{ok} (рис. 1а), присоединению к предварительно напряженной стенке анкерного поясного листа A_{fo} (рис. 1б) и снятию усилий предварительного напряжения стенки. За счет обратных упругих деформаций материала стенки тавра, образованный стенкой и поясным листом, сжимается напряжением σ_o . Поскольку усилие предварительного напряжения стенки балки $N_o = A_{wo} \sigma_{ok}$ прикладывается по ее центру тяжести, а центр тяжести тавра смещается вверх на расстояние y_3' , то указанное усилие создает изгибающий момент $M_o = N_o y_3'$, сопровождающийся изгибными предварительными напряжениями σ_v и σ_n (рис. 1в). На основании принципа независимости действия сил алгебраическое сложение напряжений σ_{ok} , σ_o , σ_v и σ_n позволяет получить по поперечному сечению тавра предварительные нормальные напряжения, представленные на рис. 1г:

– в анкерном верхнем поясе:

$$\sigma_{fo} = -\frac{\sigma_{ok}}{(2K+1)}; \quad (1)$$

– в верхней зоне стенки:

$$\sigma_{wv} = \frac{2K\sigma_{ok}}{(2K+1)}; \quad (2)$$

– в нижней зоне стенки:

$$\sigma_{wn} = -\frac{\sigma_{ok}K}{(2K+1)}. \quad (3)$$

В зависимостях (1)–(3) [20, с. 111] $K = y_2 / y_1$ – коэффициент асимметрии поперечного сечения двутавра (рис. 2б); σ_{ok} – начальное предварительное напряжение стенки балки.

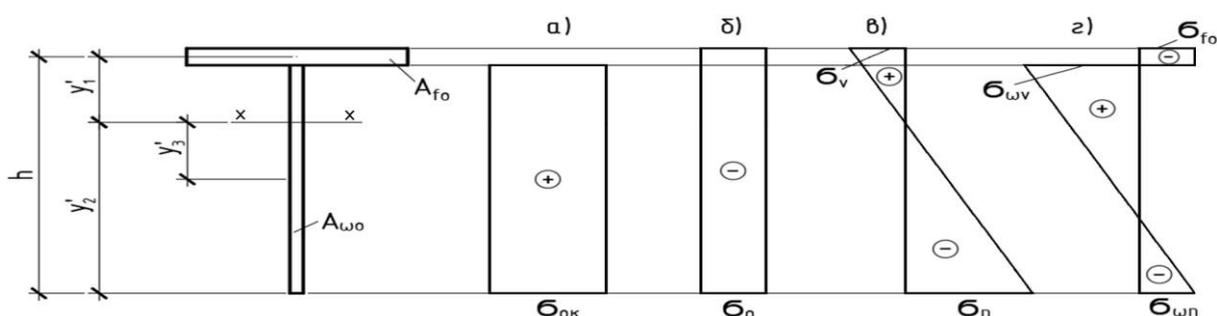


Рис. 1. График распределения предварительных нормальных напряжений по сечению тавра:

- а) растягивающие нормальные напряжения в стенке балки; б) сжимающие нормальные напряжения в тавре; в) изгибные нормальные напряжения в тавре; г) суммарные напряжения в тавра

Оптимальные параметры тавра и двутавра. Поскольку тавр, составленный из стенки A_{wo} и его верхнего поясного листа A_{fo} , является составной частью двутавра (рис. 2), целесообразно изучить соотношение параметров несущей способности тавра и двутавра. Поиск базируется на одном из методов оптимального проектирования сечений строительных металлических конструкций, в основу которого положен метод решения экстремальных задач, суть которого в оптимизации аналитических выражений, включающих в себя неизвестные оптимизации. В качестве аналитического выражения принят момент инерции сечения тавра (рис. 2).

$$I_{xt} = A_{fo}y_1'^2 + A_{wo}y_3'^2 + A_{wo}h^2/12. \quad (4)$$

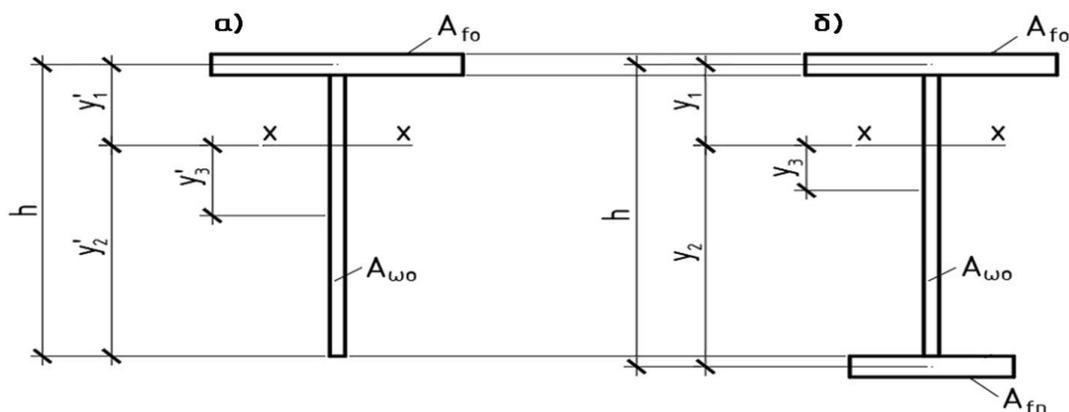


Рис. 2. Расчетная схема тавра и двутавра на стадии изготовления балки, предварительно напряженной вытяжкой стенки

Заметим, что $y_3 = h/2 - y_1$ (рис. 2а). Подстановка этого значения в зависимость (4) позволяет записать:

$$I_{xt} = A_{fo} y_1^2 + A_{wo} h^2 / 4 - A_{wo} h y_1 + A_{wo} y_1^2 + A_{wo} h^2 / 12.$$

В последней интерпретации момент инерции тавра I_{xt} представляет собой зависимость второй степени, включающую в себя геометрический параметр y_1 , характеризующий положение центра тяжести тавра. Степенная зависимость описывает некоторую кривую, угол наклона касательной к которой может быть характеристикой одного из неизвестных оптимизации. Поскольку угол наклона касательной в экстремуме кривой равен нулю, то, приравняв к нулю первую производную от I_{xt} по переменному y_1 , можно определить аналитическое выражение, определяющее одно из положений центра тяжести тавра:

$$\frac{dI_x}{dy_1} = 0 = 2y_1 A_{fo} - A_{wo} h + 2y_1 A_{wo}, \quad (5)$$

откуда:

$$y_1 = \frac{h A_{wo}}{2(A_{wo} + A_{fo})} = \frac{h}{2(\gamma_0 + 1)}, \quad (6)$$

где

$$\gamma_0 = A_{fo} / A_{wo}.$$

С учетом выражения (6):

$$y_2 = h - y_1 = \frac{h(2\gamma_0 + 1)}{2(\gamma_0 + 1)}; \quad (7)$$

$$y_3 = y_2 - \frac{h}{2} = \frac{h\gamma_0}{2(\gamma_0 + 1)}. \quad (8)$$

Из геометрии тавра (рис. 2а) коэффициент асимметрии сечения: $K_0 = y_2 / y_1$. Учитывая, что $y_2 = K_0 y_1$ и $y_2 = h - y_1$, соответствующие расстояния от центра тяжести тавра до характерных точек сечения, выраженные через его коэффициент асимметрии:

$$y_1 = \frac{h}{1 + K_0}; \quad y_2 = \frac{hK_0}{1 + K_0};$$

$$y_3 = h(K_0 - 1) / 2(K_0 + 1). \quad (9)$$

После сравнения выражений (8) и (9) находим, что соотношение площадей верхнего пояса и стенки тавра подчиняется зависимости:

$$\gamma_0 = \frac{K_0 - 1}{2}, \quad (10)$$

а коэффициент асимметрии тавра:

$$K_0 = 2\gamma_0 + 1. \quad (11)$$

Зависимости, определяющие расстояние от центра тяжести тавра до характерных точек сечения, можно получить и другом виде, если в формулу (6) ввести коэффициент $\gamma_{wo} = \frac{A_{wo}}{A_o}$,

где $A_o = A_{wo} + A_{fo}$.

Тогда:

$$y_1' = \frac{hA_{wo}}{2(A_{wo} + A_{fo})} = \frac{h\gamma_{wo}A_o}{2A_o} = \frac{h\gamma_{wo}}{2}; \quad (12)$$

$$y_2' = h - y_1' = \frac{h(2 - \gamma_{wo})}{2}; \quad (13)$$

$$y_3' = y_2' - \frac{h}{2} = \frac{h(1 - \gamma_{wo})}{2}. \quad (14)$$

Сравнивая y_1' по зависимости (6) и y_1' из зависимости (12), находим коэффициент, характеризующий распределение материала по стенке тавра:

$$\gamma_{wo} = \frac{1}{(\gamma_o + 1)}. \quad (15)$$

Коэффициент $\gamma_{wo} = A_{wo} / (A_{wo} + A_{fo}) = A_{wo} / A_o$ определим из условия, что стенка тавра A_{wo} и его верхний поясной лист A_{fo} принадлежат и двутавру (рис. 2). Изложенное условие требует записать:

$$\begin{aligned} A_{wo} &= \gamma_{wo}(A_{wo} + A_{fo}) = \gamma_{wo}A_o; \\ A_{wo} &= \gamma_w(A_{wo} + A_{fo} + A_{fn}) = \gamma_wA_o + \gamma_wA_{fn}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $\gamma_w = A_{wo} / A$; A – площадь двутавра.

Сопоставляя зависимости (16) и учитывая, что площадь тавра $A_o = A - A_{fn}$ (A_{fn} – площадь нижнего пояса), находим, что

$$\gamma_{wo} = \frac{\gamma_w}{1 - \gamma_{fn}}. \quad (17)$$

Заметим, что единицу в знаменателе выражения (17) можно рассматривать как сумму коэффициентов распределения материала поясных листов и стенки по сечению двутавра:

$$1 = \gamma_w + \gamma_{fv} + \gamma_{fn}.$$

Учитывая изложенное,

$$\gamma_{wo} = \frac{\gamma_w}{\gamma_w + \gamma_{fv}}. \quad (18)$$

Если в выражение (18) подставить известную зависимость, характеризующую распределение материала по верхнему поясу двутавра:

$$\gamma_{fv} = \frac{K}{K + 1} - \frac{\gamma_w}{2},$$

то можно получить коэффициент γ_{wo} , зависящий от асимметрии двутавра K и коэффициента $\gamma_w = A_{wo} / A$, определяющего отношение площади стенки двутавра A_{wo} к площади поперечного сечения двутавра A :

$$\gamma_{wo} = \frac{\gamma_w}{\gamma_w + \gamma_{fv}} = \frac{2\gamma_w(K+1)}{2K + \gamma_w(K+1)}. \quad (19)$$

Сравнивая между собой выражения (15) и (17), устанавливаем, что коэффициент, характеризующий соотношение площади поясного листа A_{fo} и площади стенки тавра $\gamma_o = A_{fo} / A_{wo}$ для двутавра выражается зависимостью:

$$\gamma_o = \frac{1 - \gamma_{fn} - \gamma_w}{\gamma_w}. \quad (20)$$

Сопоставляя расстояние y_3' , определенное по зависимостям (9) и (14), можно определить взаимосвязь между коэффициентом распределения материала по поясному листу и стенке тавра $\gamma_o = \gamma_{fo} / \gamma_{wo}$ и коэффициентом асимметрии тавра $K_o = y_2' / y_1'$:

$$\gamma_o = \frac{K_o - 1}{2}.$$

В данном случае коэффициент γ_o нашел подтверждение зависимостью (10).

Подставляя $\gamma_o = (K_o - 1)/2$ в выражение (15), можно найти новую интерпретацию коэффициента распределения материала по стенке тавра:

$$\gamma_{wo} = \frac{1}{\gamma_o + 1} = \frac{1}{\left(\frac{K_o - 1}{2}\right) + 1} = \frac{2}{K_o + 1}. \quad (21)$$

Момент инерции поперечного сечения тавра, выраженный через коэффициент асимметрии K_o , имеет вид:

$$I_x = \frac{A_{wo} h^2}{2} \frac{8K_o^2 + 4K_o - 4}{12(K_o + 1)^2}. \quad (22)$$

Соответствующие моменты сопротивления:

$$W_{xv} = \frac{A_{wo} h}{2} \frac{8K_o^2 + 4K_o - 4}{12(K_o + 1)}; \quad (23)$$

$$W_{xm} = \frac{A_{wo} h}{2} \frac{8K_o^2 + 4K_o - 4}{12K_o(K_o + 1)}. \quad (24)$$

Учитывая формулы (18) и (21) а также известные выражения, характеризующие распределение материала по верхнему поясу двутавра:

$$\gamma_{fv} = \frac{K}{K+1} - \frac{\gamma_w}{2},$$

где K – коэффициент асимметрии сечения двутавра, γ_w – коэффициент распределения материала по стенке двутавра, получим выражение коэффициента асимметрии тавра через параметры двутавра:

$$\gamma_{wo} = \frac{2}{(1 + K_o)} = \frac{\gamma_w}{\gamma_w + \left(\frac{K}{K+1} - \frac{\gamma_w}{2}\right)},$$

откуда:

$$K_o = \frac{4K}{2\gamma_w(K+1)} = \frac{2K}{\gamma_w(K+1)}; \quad (25)$$

или же:

$$K = \frac{\gamma_w K_o}{(2 - K_o \gamma_w)}. \quad (26)$$

Для определения параметров несущей способности двутавра запишем его момент инерции, включающий неизвестные оптимизации – геометрические размеры y_1, y_2 , определяющие его положение центра тяжести (рис. 2б):

$$I_x = A_{fv} y_1^2 + A_{fn} y_2^2 + A_w y_3^2 + A_w h/12. \quad (27)$$

Здесь $A_{fv} = \gamma_{fv} A$; $A_{fn} = \gamma_{fn} A$ – площади сечения верхнего и нижнего поясных листов двутавра, выраженные через коэффициенты распределения материала по сечению двутавра γ_{fv} и γ_{fn} .

Поскольку $y_2 = h - y_1$, а $y_3 = h/2 - y_1$, после подстановки этих значений в (27) и последующей минимизации указанного выражения $\left(\frac{dI_x}{d\gamma_1} = 0 \right)$ находим:

$$y_1 = \frac{h}{2} (2\gamma_{fn} + \gamma_w); \quad (28)$$

$$y_2 = \frac{h}{2} (2 - 2\gamma_{fn} - \gamma_w). \quad (29)$$

Учитывая, что коэффициент асимметрии сечения двутавра $K = \frac{y_2}{y_1}$, находим, что

$$K = \frac{h - y_1}{y_1} \text{ или:}$$

$$y_1 = \frac{h}{K+1}; \quad (30)$$

$$y_2 = \frac{hK}{K+1}; \quad (31)$$

$$y_3 = \frac{h}{2} \cdot \frac{(K-1)}{(K+1)}. \quad (32)$$

Анализируя зависимости (28) и (29) и сопоставляя их с соответствующими аналитическими выражениями (31) и (32), находим коэффициенты распределения материала по сечениям поясных листов двутавра:

$$\gamma_{fn} = \frac{1}{K+1} - \frac{\gamma_w}{2}; \quad (33)$$

$$\gamma_{fv} = \frac{K}{K+1} - \frac{\gamma_w}{2}. \quad (34)$$

Момент инерции двутавра I_x и моменты сопротивления его крайних верхней и нижней зон W_{xv} и W_{xn} с учетом зависимостей (33) и (34) преобразуются к виду:

$$I_x = \frac{Ah^2}{(K+1)^2} \cdot \frac{[6K - \gamma_w(K+1)^2]}{6}; \quad (35)$$

$$W_{xv} = \frac{Ah}{(K+1)} \cdot \frac{[6K - \gamma_w(K+1)^2]}{6}; \quad W_{xn} = W_{xv} / K. \quad (36)$$

Общеизвестно, что высоту двутавра можно записать как:

$$h = \sqrt{A_{w0} n_w} = \sqrt{ht_w} \cdot \frac{h}{t_w} = \sqrt{\gamma_w A n_w} = \gamma_w^{1/2} \sqrt{A n_w}, \quad (37)$$

где n_w – гибкость стенки, $n_w = h/t_w$; t_w – толщина стенки.

Подстановка h в одно из выражений момента сопротивления двутавра и оптимизация его по переменному $\gamma_w (dW_{xv} / d\gamma_w) = 0$ позволяют получить выражение для оптимального коэффициента распределения материала по сечению стенки двутавра:

$$\gamma_w^{opt} = \frac{2K}{(K+1)^2}. \quad (38)$$

С учетом γ_w^{opt} :

$$I_x = \frac{2}{3} \frac{Ah^2 K}{(K+1)^2}; \quad (39)$$

$$W = \frac{2}{3} \frac{AhK}{(K+1)}; \quad (40)$$

$$\gamma_{fv} = \frac{K^2}{(K+1)^2}; \quad (41)$$

$$\gamma_{fn} = \frac{1}{(K+1)^2}. \quad (42)$$

Если коэффициент асимметрии сечения $K = 1,0$, что соответствует двутавру, симметричному относительно оси $X-X$, то параметры несущей способности и распределения материала по сечению двутавра приобретают известные значения [21]:

$$I_x^{opt} = Ah^2 / 6; \quad W_{xv}^{opt} = Ah / 3;$$

$$\gamma_w^{opt} = 0,5; \quad \gamma_{xv}^{opt} = \gamma_{xn}^{opt} = 0,25.$$

Теперь вернемся к параметрам тавра. Выразим их через геометрические параметры двутавра:

– коэффициент, соотношения площади верхнего пояса и стенки – на основании зависимостей (38) и (42):

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_{fv}}{\gamma_w} = \frac{K^2(K+1)^2}{(K+1)^2 2K} = \frac{K}{2}; \quad (43)$$

- коэффициент асимметрии тавра – на основании выражений (25) и (38):

$$K_o = K + 1; \quad (44)$$

- коэффициент, характеризующий распределение материала стенки тавра, – на основании выражений (38) и (42):

$$\gamma_{wo} = \frac{\gamma_w}{\gamma_w + \gamma_{fv}} = \frac{2}{(K + 2)}; \quad (45)$$

- площадь поперечного сечения тавра – с учетом зависимостей (38) и (41):

$$A_o = \frac{AK(2 + K)}{(K + 1)^2}; \quad (46)$$

- момент инерции тавра – на основании зависимостей (22) и (41):

$$I_x = \frac{Ah^2K(2K + 1)}{3(K + 1)^2(K + 2)}; \quad (47)$$

- момент сопротивления крайних и нижних точек тавра – (25) и (26):

$$W_{xv} = \frac{AhK(2K + 1)}{3(K + 1)^2}; \quad (48)$$

$$W_{xm} = \frac{AhK(2K + 1)}{3(K + 1)^3}; \quad (49)$$

- соотношение моментов инерции тавра и двутавра – с учетом выражений (39) и (44):

$$\frac{I_x}{I_{xt}} = \frac{2(K + 2)}{(2K + 1)}; \quad (50)$$

- максимальная несущая способность тавра:

$$M_{\max.t} = R_y W_{xm} = \frac{R_y AKh(2K + 1)}{3(K + 1)^2}. \quad (51)$$

Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния тавра на стадии изготовления предварительно напряженной балки. Выше (выражения (1)–(3)) на основании критериального подхода к формированию оптимального поперечного сечения тавра (выражения (43)–(51)) сформулированы аналитические зависимости напряжений в исходном сечении балки.

Напряженное состояние стенки в процессе ее предварительного напряжения контролировалось образцовым динамометром ДОР-20, тензорезисторами, установленными по схеме на рис. 3, а также тензотрами Аистова ТА-2.

Проверка достоверности теоретических выводов о напряженном состоянии предварительно напряженного тавра проведена на 10 натуральных образцах марки ВТ (табл. 1). Для исключения влияния сварочных напряжений на напряжения по сечению тавра стенка к поясу из двух парных неравнополочных уголков присоединялась на эпоксидной композиции ЭД-5.

Начальное контролируемое напряжение во всех испытуемых натуральных тавровых образцах принималось равным 10,0 кН/см².

Для проверки соответствия теоретических нормальных напряжений их экспериментальным данным по стенке и поясам было установлено 225 тензорезисторов, позволяющих

фиксировать продольные, поперечные и сдвиговые деформации, 180 из которых установлены в виде «розеток» в приопорных узлах, 25 – на оставшейся длине конструкции и 20 – по длине пояса тавра (рис. 3).

Таблица 1

Геометрические размеры параметры несущей способности тавра

Обозначение образца	Эскиз сечения	Кол-во, шт.	Состав сечения, мм		$A, \text{см}^2$	Геометрические характеристики			
			Верхний пояс	Стенка		$I_x, \text{см}^4$	$I_y, \text{см}^4$	$W_{xv}, \text{см}^3$	$W_{xл}, \text{см}^3$
BT-1		1	45×28×4	378×2	13,6	2295	25,96	18,8	8,25
BT-2		1	-	372,6×2,1	13,4	2295,1	25,93	18,7	8,25
BT-3		1	-	372×2	13,6	2295	25,96	18,65	8,2
BT-4		1	-	371×1,98	14,0	2295,2	25,90	18,73	8,24
BT-5		1	-	372×2,1	13,5	2295	25,96	18,8	8,23
BT-6		1	-	372×2	13,6	2295	25,98	18,65	8,2
BT-7		1	-	372×2	13,6	2295	25,96	18,8	8,23
BT-8		1	-	372×1,98	13,46	2295	25,95	18,9	8,24
BT-9		1	-	372×1,98	13,56	2295	25,95	18,96	8,25
BT-10		1	-	372×2	13,6	2295	25,96	18,8	8,25

В основу определения нормальных напряжений в конструкции положен закон Гука.

Характер распределения нормальных напряжений по длине пояса тавра показан в сечении XII–XII, крайней верхней зоне стенки – сеч. XIII–XIII, и крайней нижней зоне стенки – сеч. XVII–XVII (рис. 4).

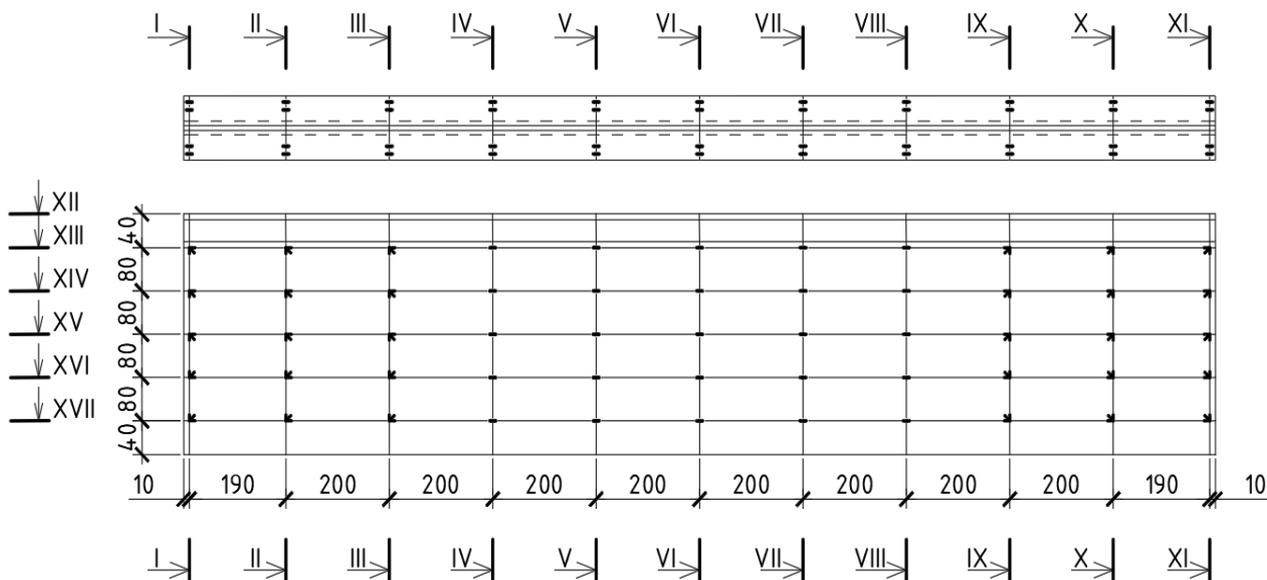


Рис. 3. Расстановка тензорезисторов по тавру (исходному элементу предварительно напряженной балки)

Эпюры распределения нормальных напряжений в характерных сечениях тавра (рис. 3) представлены на рис. 5. Из рис. 5 следует, что форма распределения нормальных напряжений по стенке тавра соответствует теоретическому распределению (см. рис. 1г). Результаты замеров относительных деформаций в процессе экспериментального исследования изложены в табл. 2. Форма распределения относительных деформаций и на их основе нормальных напряжений, полученных на клееболтовых предварительно напряженных образцах, полностью совпадает и для сварных предварительно напряженных балок.

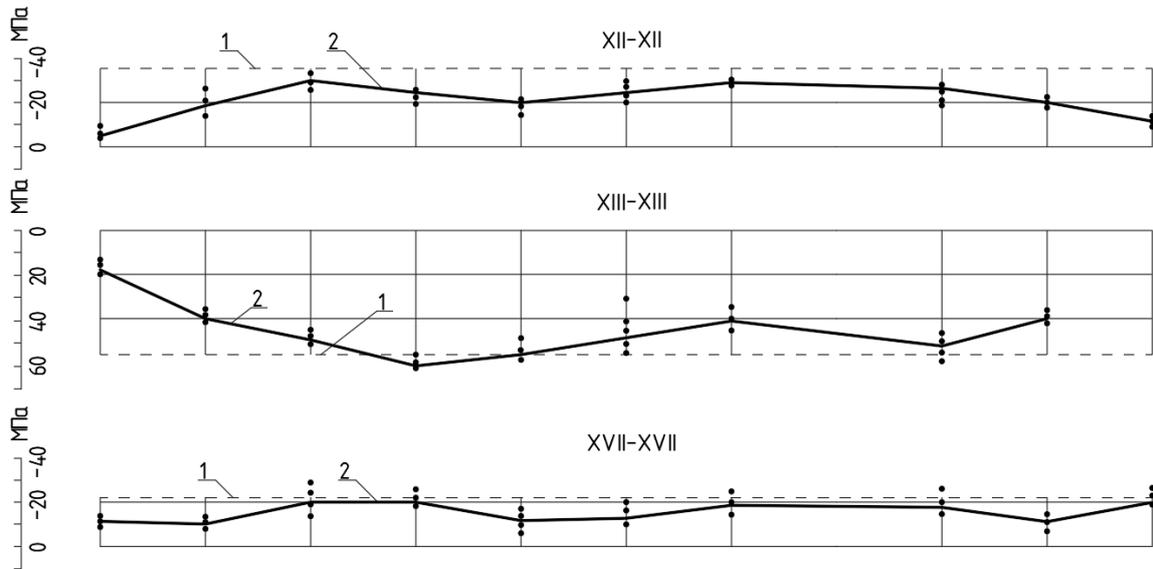


Рис. 4. Нормальные напряжения по длине экспериментального образца ВТ-1

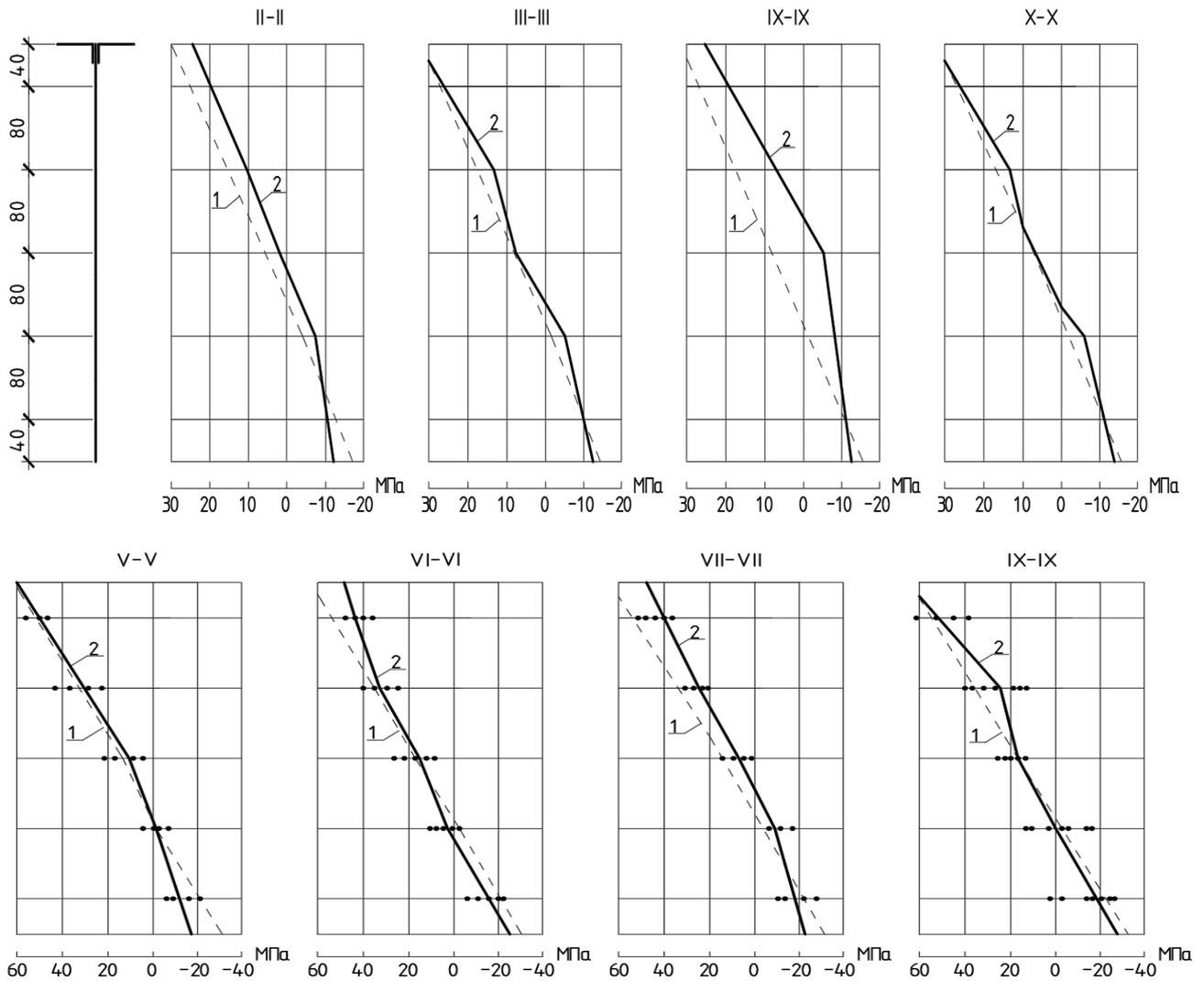


Рис. 5. Эпюры нормальных напряжений в тавре марки ВТ (см. рис. 3):
1 – теоретические; 2 – экспериментальные

Таблица 2

Относительные деформации
в верхней и нижней зонах стенки клееболтовых образцов таврового сечения

Образцы									
BT-1	BT-2	BT-3	BT-4	BT-5	BT-6	BT-7	BT-8	BT-9	BT-10
Относительные деформации в крайних верхних зонах стенки тавра ε_v									
0,000293	0,000294	0,000291	0,000292	0,000293	0,000293	0,0002926	0,0003014	0,0003015	0,0003036
Относительные деформации в крайних нижних зонах стенки ε_n									
0,0001465	0,0001470	0,0001459	0,0001463	0,0001467	0,0001468	0,0001463	0,0001507	0,0001507	0,0001518

Обработка результатов численных значений относительных деформаций ε , полученных в результате натурального эксперимента методами теории вероятности, показала, что математическое ожидание (среднее арифметическое значение относительных деформаций):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{2,933 \cdot 10^{-4} + 2,944 \cdot 10^{-4} + 2,912 \cdot 10^{-4} + 2,925 \cdot 10^{-4} + 2,934 \cdot 10^{-4} + 2,935 \cdot 10^{-4} + 2,926 \cdot 10^{-4} + 3,014 \cdot 10^{-4} + 3,015 \cdot 10^{-4} + 3,036 \cdot 10^{-4}}{10} = 2,957 \cdot 10^{-4}. \quad (52)$$

Среднее квадратическое отклонение, характеризующее отклонение экспериментальных данных от их среднеарифметического значения, определяется зависимостью:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \quad (53)$$

где $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ – среднее арифметическое значение экспериментальных данных; x_i – численные значения отдельного эксперимента; n – количество экспериментальных данных.

$$S = \sqrt{\frac{(2,933 \cdot 10^{-4} - 2,957 \cdot 10^{-4})^2 + \dots + (3,036 \cdot 10^{-4} - 2,957 \cdot 10^{-4})^2}{10}} = \sqrt{1,749 \cdot 10^{-10}} = 1,32 \cdot 10^{-5} = 0,0000132. \quad (54)$$

Напряжение, соответствующее среднему квадратическому отклонению, на основании закона Гука $\sigma_s = SE$:

$$\sigma_s = 0,0000132 \cdot 21000 = 0,2777 \text{ кН/см}^2. \quad (55)$$

Обеспеченность экспериментальных данных определяется разностью между среднеарифметическим значением относительных деформаций и их квадратическим отклонением, деленным на среднеарифметическое значение:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n x_i - S}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{(0,0002957 - 0,0000132)}{0,0002957} = \frac{0,0002825}{0,0002957} = 0,95633. \quad (56)$$

Плотность распределения экспериментальных замеров относительных деформаций:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \quad (57)$$

где σ – дисперсия (мера разброса значений случайной величины относительно ее математического ожидания – среднее квадратическое отклонение, возведенное в квадрат):

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}; \quad (58)$$

e – экспонента, $e = 2,718$.

Поскольку численные значения замеренных относительных деформаций, их средние арифметические значения, квадратическое отклонение и дисперсия величины очень малы, экспонента в степени, приближающейся к нулю, практически равна единице, и плотность распределения $f(x)$ слишком высока. На рис. 6 представлен график распределения экспериментальных относительных деформаций ϵ , построенный по данным табл. 2. График напоминает нормальный закон распределения.

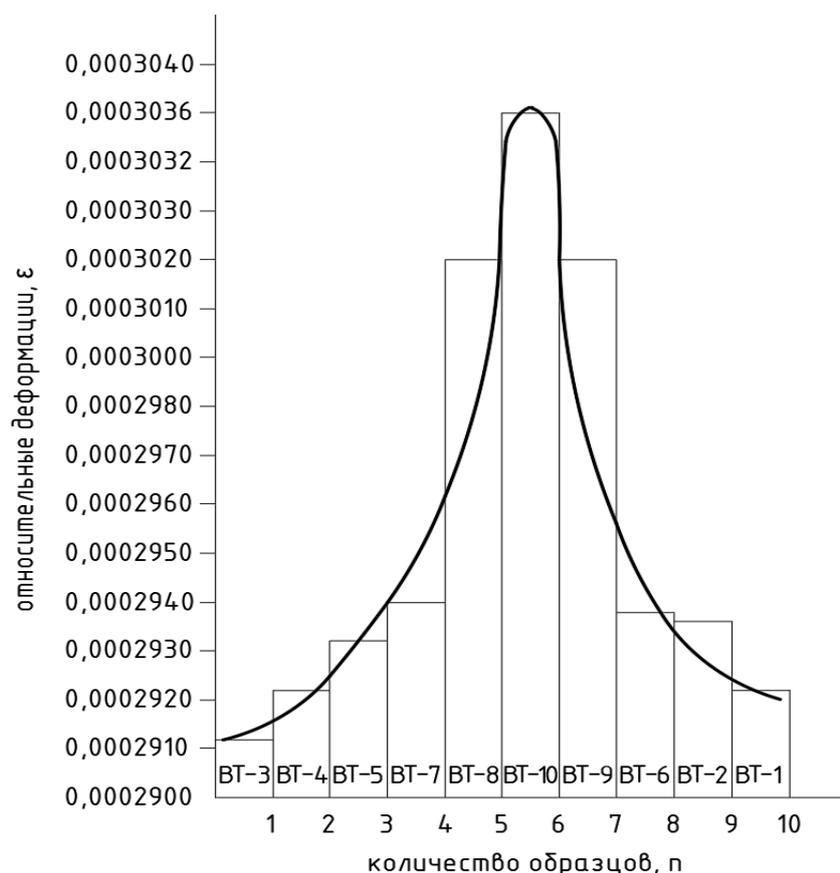


Рис. 6. График распределения относительных деформаций в предварительно напряженных образцах таврового сечения

Выводы. Сравнение среднеарифметических нормальных напряжений, полученных экспериментальным путем, с их теоретическими значениями, свидетельствует о хорошей схожести сопоставимых параметров, расхождение составляет 7,8 %.

Изложенное позволяет заявить о совершенстве методики определения предварительных напряжений в характерных зонах поперечного сечения балки, хорошем совпадении теоретических и экспериментальных данных, о чистоте натурального эксперимента и дает основание полагать, что теоретические выводы, касающиеся напряженно-деформированного состояния балок, будут соответствовать напряженному состоянию в предварительно напряженных балках, входящих в каркас зданий и сооружений.

Библиографический список

1. Ратц Э. Г. Старинные предварительно напряженные конструкции // Изв. АИиА СССР. – 1960. – № 3. – С. 35–58.
2. Шухов В. Г. Избранные труды. Строительная механика. – М.: Наука, 1977. – 193 с.
3. Беленя Е. И. Предварительно напряженные металлические несущие конструкции. – М.: Стройиздат, 1963. – 323 с.
4. Гайдаров Ю. В. Предварительно напряженные металлические конструкции. – Л.: Стройиздат, 1971. – 144 с.
5. Вахуркин В. М. Балки из двух марок стали (бистальные балки). – М.: Стройиздат, 1965. – Вып. 9. – С. 79–97.
6. Сперанский Б. Н. Решетчатые металлические пространственные металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1970. – 239 с.
7. Бирюлев В. В. Металлические неразрезные конструкции с регулированием уровня опор. – М.: Стройиздат, 1984. – 88 с.
8. Воеводин А. А. Предварительно напряженные системы элементов конструкций. – М.: Стройиздат, 1989. – 304 с.
9. Клинов И. Г. К вопросу о расчете по прочности предварительно напряженных металлических балок, изготовленных под нагрузкой. – Л.: труды ЛИСИ, 1963. – Вып. 40. – С. 28–33.
10. Лащенко М. Н. Повышение надежности металлических конструкций зданий и сооружений. – Л.: Стройиздат, 1987. – 136 с.
11. Ванштейн Е. И. Предварительно напряженные бестроссовые конструкции. – Челябинск, 1983. – 48 с.
12. Иодчик А. А., Чебровский А. А. и др. Экспериментальное исследование стальных двухтавровых балок, предварительно напряженных без затяжек // Инженерный сборник Дона. – 2021. – № 7. – С. 411–422.
13. Кравчук В. А., Кравчук Е. В. Надежные стальные изгибаемые строительные конструкции. – Хабаровск: изд-во ТОГУ, 2020. – 277 с.
14. Gatti M. Elasnkperiodofvibrantioncalculatedexperimebtallyinbuildinghostingpermanent GPS stations //Earthquake Engineering and Engineering Vibration. – 2018. – Vol. 17, No. 3. – Pp. 607–625.
15. Сычева А. М., Зарин С. В и др. Определение технического состояния пролетных строений по частоте собственных колебаний // Транспортное строительство. – 2019. – № 3. – С. 25–28.
16. Song S., Qian Y., Liu J., Xie S., Wu G. Time – variant fragility analysis of the bridge system considering time-varying dependence among typical component seismic demands // Earthquake Engineering and Engineering Vibration. – 2019. – Vol. 18, Issue 2. – Pp. 363–377.
17. Lien T. V., Duc N. T., Khiem N. T. Free and forced vibration analysis of multiple cracked FGM multi span continuous beams using dynamic stiffness method // Latin American Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 16 (2). – Pp. 1–26. – DOI:10.1590/1679-78255242.
18. Смирнова Н. Д., Белуцкий И. Ю. Исследование влияния длительности СВЧ излучения на повышение температуры бетона // сб. «Дальний Восток: Проблемы развития архитектурно-строительного комплекса». – Хабаровск: ТОГУ, 2022. – С. 141–144.

19. Болотин В. В. Методы теории вероятности и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.
20. Кравчук В. А. Стальные стержни, предварительно напряженные без затяжек. – М.: АСВ, 2015. – С. 550.
21. Кравчук Е. В., Иодчик А. А., Кравчук В. А. Элементы оценки ресурса стальных балок, предварительно напряженных вытяжкой стенки // Вестник ВСГУТУ. – 2024. – № 3.

References

1. Ratz. E. G. Old prestressed structures. News of AIiA USSR, 1960. No. 3. Pp. 35–58.
2. Shukhov V. G. Selected works. Structural mechanics. Moscow: Science, 1977. 193 p.
3. Belenya E. I. Prestressed metal load-bearing structures. Moscow: Stroyizdat, 1963. 323 p.
4. Gaidarov Yu. V. Prestressed metal structures. Leningrad: Stroyizdat, 1971. 144 p.
5. Vakhurkin V. M. Beams from two grades of steel (bi-steel beams). Moscow: Stroyizdat. Issue 9, 1965. Pp. 79–97.
6. Speransky B. N. Lattice metal spatial metal structures. Moscow: Stroyizdat, 1970. P. 239.
7. Biryulev V. V. Continuous metal structures with adjustable support levels. Moscow: Stroyizdat, 1984. 88 p.
8. Voevodin A. A. Prestressed systems of structural elements. Moscow: Stroyizdat, 1989. 304 p.
9. Klinov I. G. On the issue of strength calculation of prestressed metal beams manufactured under load. Leningrad: LISI Works. 1963. Issue 40. Pp. 28–33.
10. Lashchenko M. N. Improving the reliability of metal structures of buildings and structures. Leningrad: Stroyizdat, 1987. 136 p.
11. Vanshtein E. I. Prestressed cable-less structures. Chelyabinsk, 1983. 48 p.
12. Iodchik A. A., Chebrovsky A. A. Experimental study of steel I-beams, prestressed without ties. Engineering Collection of the Don. No. 7. 2021. Pp. 411–422.
13. Kravchuk V. A., Kravchuk E. V. Reliable steel bending building structures. Khabarovsk. Publishing House of TOGU, 2020. 277 p.
14. Gatti M. Elasnik period of vibranion calculated experimebtally in building hosting permanent GPS stations. Earthquake Engineering and Engineering Vibration. Vol. 17. No. 3. 2018. Pp. 607–625.
15. Sycheva A. M., Zarin S. V. Determination of the technical condition of span structures by the frequency of natural oscillations. Transport Construction. No. 3. 2019. Pp. 25–28.
16. Song S., Qian Y., Liu J., Xie S., Wu G. Time – variant fragility analysis of the bridge system considering time-varying dependence among typical component seismic demands. Earthquake Engineering and Engineering Vibration. Vol. 18. Issue 2. 2019. Pp. 363–377.
17. Lien T. V., Duc N. T., Khiem N. T. Free and forced vibration analysis of multiple cracked FGM multi span continuous beams using dynamic stiffness method. Latin American Journal of Solids and Structures. Vol. 16 (2). 2019. Pp. 1–26. DOI:10.1590/1679-78255242.
18. Smirnova N. D., Belutsky I. Yu. Study of the influence of microwave radiation duration on the increase in concrete temperature. Coll. "Far East: Problems of development of the architectural and construction complex". Khabarovsk: TOGU, 2022. Pp. 141–144.
19. Bolotin V. V. Methods of probability theory and reliability theory in calculations of structures. Moscow: Stroyizdat, 1982. 351 p.
20. Kravchuk V. A. Steel rods, prestressed without ties. Moscow, ASV Publishing House. 2015. P. 550.
21. Kravchuk E. V., Iodchik A. A., Kravchuk V. A. Elements of resource assessment of steel beams, prestressed by wall stretching. Bulletin of VSGUTU. No. 3. 2024.

THEORETICAL AND EXPERIMENTAL JUSTIFICATION OF THE PARAMETERS OF THE LOAD-BEARING CAPACITY OF STEEL BEAMS PRE-STRESSED BY WALL STRETCHING

E. V. Kravchuk ¹, A. A. Iodchik ², V. A. Kravchuk ³

Far Eastern State Transport University ¹
Pacific National University ^{2,3}
Russia, Khabarovsk

¹ Assistant Professor of the Department of Construction, tel.: +7(4212)40-75-79, e-mail: 004938@togudv.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Higher School of Industrial and Civil Engineering, tel.: +7(4212)97-98-11, e-mail: 001168@togudv.ru

³ Dr. of Technical Sciences, Professor of the Higher School of Industrial and Civil Engineering, tel.: +7(4212)97-98-11, e-mail: 000415@togudv.ru

Introduction. The article presents the methodology of optimal design of a T-beam, which is the initial element of an I-beam, and the results of its experimental study as part of a beam prestressed by drawing the wall. The subject of the study is the dependencies of the geometric parameters and the parameters of the non-load-bearing capacity of a steel T-beam and an I-beam, as well as a comparative analysis of theoretical conclusions about the stress-strain state of beams with its result obtained in the process of a full-scale experiment. The object of the study is a steel beam prestressed by drawing the wall.

Materials and methods. The study is based on the methods of strength of materials, the theory of optimal design of cross-sections of solid-wall metal building structures and the practice of conducting full-scale experimental studies of structures.

Results. The optimal design of a T-beam and an I-beam was performed, the interdependence of the geometric parameters and the parameters of the load-bearing capacity of the elements was established. A comparison of theoretical and experimental relative deformations in the web and the upper chord sheet of the T-beam was carried out. Based on the probability theory, the mathematical expectation, the mean square deviation of the experimental and arithmetic mean values of relative deformations were determined, the distribution density of deformations and the confidence interval of values were determined.

Conclusions. Theoretical assumptions about the stress state of the T-beam by stretching its wall, which is the initial element of the I-beam, are in good agreement with the results of the full-scale experimental study.

Keywords: preliminary stress, probabilistic assessment of relative deformations and stresses.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.074.1

DOI 10.36622/2219-1038.2025.44.1.007

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛИТ ИЗ ДРЕВЕСИНЫ ПЕРЕКРЕСТНО КЛЕЕНОЙ С УТОЛЩЕННЫМИ ПРОДОЛЬНЫМИ СЛОЯМИ

М. Ю. Трошин¹, А. В. Коробко²

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева^{1,2}
Орел, Россия

¹ Аспирант кафедры строительных конструкций и материалов, тел.: +7(980)361-53-74,
e-mail: mtr997@mail.ru

² Д-р техн. наук, проф. кафедры строительных конструкций и материалов, тел.: +7(903)881-25-98,
e-mail: ankor.66@mail.ru

Представлены результаты экспериментального исследования плит из древесины перекрестно клееной (ДПК) с утолщенными продольными слоями. Для проведения испытаний собран испытательный стенд в виде шарнирно опертой плиты из ДПК. Были получены значения максимального поперечного прогиба, нормальных напряжений при различных значениях нагрузки и частоты собственных колебаний испытательного образца. Целью исследования являлось сопоставление результатов эксперимента и численной модели плиты из ДПК для подтверждения ранее полученных закономерностей. Кроме того, проверена применимость закономерности В. И. Коробко для плиты из ДПК с целью развития методов динамического контроля качества строительных конструкций. Полученные результаты эксперимента обладают высокой сходимостью с численной моделью и подтверждают применимость использованных численных методов для реальных конструкций из данного материала.

Ключевые слова: деревянные конструкции, древесина перекрестно клееная, CLT, максимальный прогиб, частота собственных колебаний, составная пластина.

Введение. Древесина перекрестно клееная (ДПК, или CLT) является относительно новым материалом на российском рынке строительных материалов. Данный материал представляет собой деревянную плиту, состоящую из нескольких слоев, накрест склеенных ламелей [1].

Несмотря на наличие различных научно-исследовательских работ по изучению несущей способности ДПК [2–4], существует необходимость более широкого исследования конструкций из ДПК с учетом различных геометрических вариаций плит, так как проектирование нестандартных сечений может быть обусловлено технико-экономическими показателями объекта строительства.

Кроме исследования несущей способности плиты, необходимо развитие методов контроля качества строительных конструкций из ДПК. Одним из таких является метод динамического контроля, опирающийся на закономерность В. И. Коробко [5], устанавливающую взаимосвязь между максимальным прогибом W_0 и частотой собственных колебаний конструкции ω :

$$W_0 \cdot \omega^2 = K \frac{q}{m}. \quad (1)$$

Важной особенностью данной закономерности является то, что коэффициент K является постоянной для различных видов граничных условий.

В предыдущих работах [6–7] была разработана и опробована расчетная модель многослойной плиты из ДПК, позволяющая определить все необходимые параметры плиты при различных геометрических вариациях и граничных условиях.

Целью настоящего исследования является проведение экспериментальных исследований и сопоставление результатов эксперимента с численной моделью для оценки применимости разработанной расчетной модели и корректности установленных закономерностей.

Методы исследования. Для исследования был собран испытательный стенд (рис. 1), представляющий собой 2 опоры и размещенный на них опытный образец плиты, со следующими параметрами: длина всей плиты – 2000 мм, ширина всей плиты – 400 мм, толщина плиты – 50 мм, ширина ламелей в слоях – 100 мм, толщина ламелей – 10 мм (рис. 2). Материал плиты – сосна. Расстояние между опорами составляет 1900 мм. С помощью данных опор обеспечивается шарнирный вид опирания конструкции. Утолщение продольных слоев плиты обеспечено путем приклеивания дополнительного слоя досок в продольном направлении волокон.

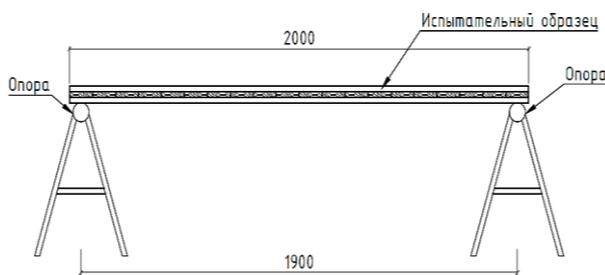


Рис. 1. Схема испытательного стенда

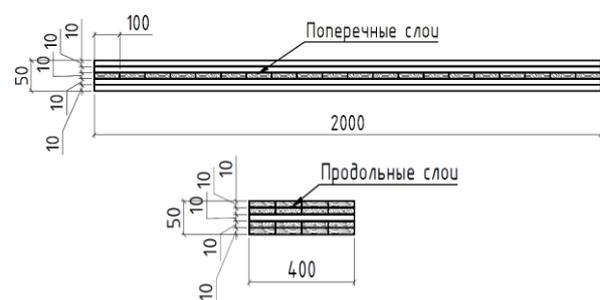


Рис. 2. Продольное и поперечное сечения опытного образца

Для исследования статических параметров конструкции плита загружалась в 5 ступеней равномерно распределенной нагрузкой с помощью силикатных кирпичей, взвешенных с точностью до 10 г (рис. 3). Таким образом была обеспечена интенсивность нагрузки для каждой ступени: 0,246, 0,489, 0,734, 0,967, 1,207 кН/м.

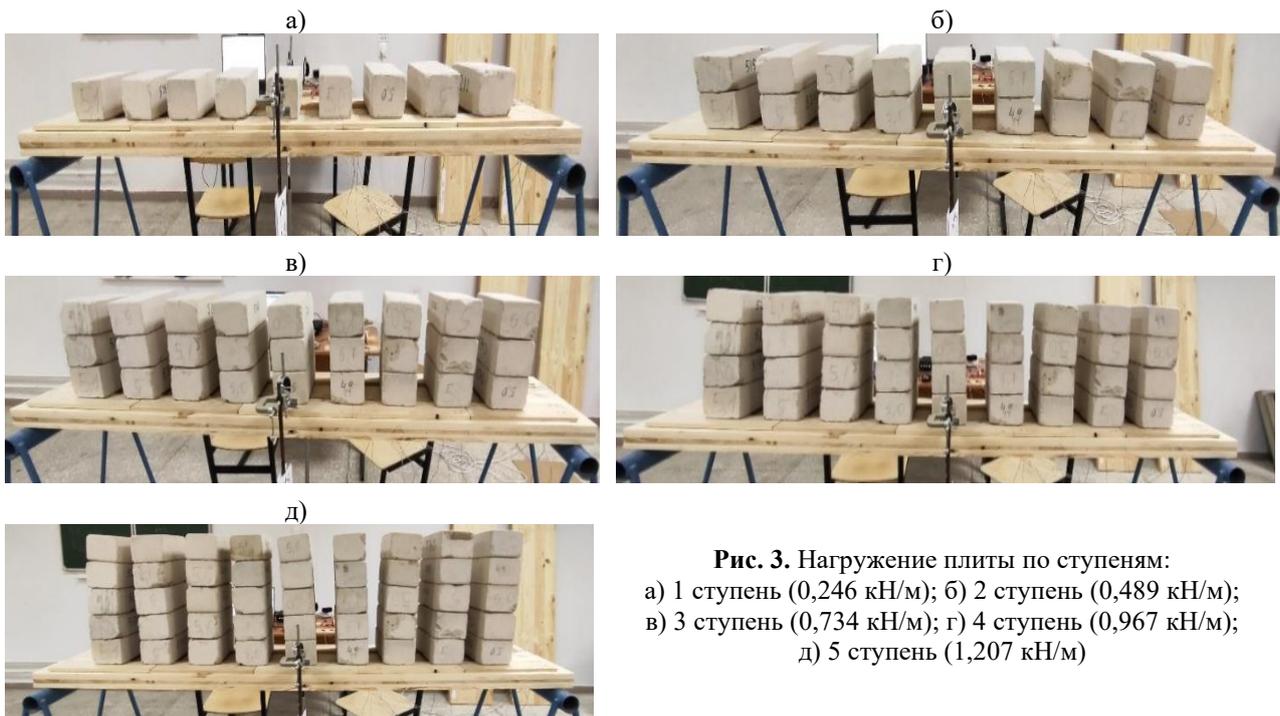


Рис. 3. Нагрузка плиты по ступеням:

- а) 1 ступень (0,246 кН/м); б) 2 ступень (0,489 кН/м);
- в) 3 ступень (0,734 кН/м); г) 4 ступень (0,967 кН/м);
- д) 5 ступень (1,207 кН/м)

Максимальный прогиб конструкции измерялся в центре пролета плиты с помощью двух индикаторов часового типа ИЧ-25. Нормальные напряжения в плите измерены с помощью тензометрического метода измерения напряжений, реализованного с использованием тензостанции ZET 017-T. Показания снимались тензорезисторами с сопротивлением $R = 200$ Ом и базой основания $l = 20$ мм, приклеенными в двух контрольных точках (рис 4). Ввиду того, что конструкция работает на изгиб, использована полумостовая схема измерительного моста Уитстона [8]. Для достижения высокой точности и стабильности результатов нагружение конструкции проводилось 3 раза. Каждая ступень выдерживалась не менее 15 минут для нарастания внутренних напряжений и деформаций в плите [9].

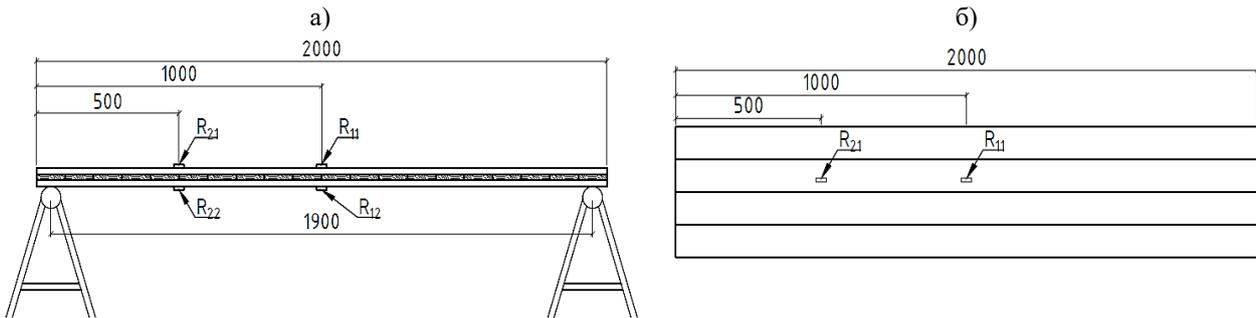


Рис. 4. Расположение тензорезисторов на конструкции:
а) вид сбоку; б) вид сверху

Для исследования динамических параметров плиты определялась основная циклическая частота собственных колебаний конструкции при воздействии импульсной нагрузки (удара). Измерения проводились посредством вибронализатора «ВИБРАН-3» с трех датчиков с различной чувствительностью канала для выбора наиболее читаемой виброграммы (рис. 5). Для достижения точности динамических исследований испытания проводились не менее 5 раз.

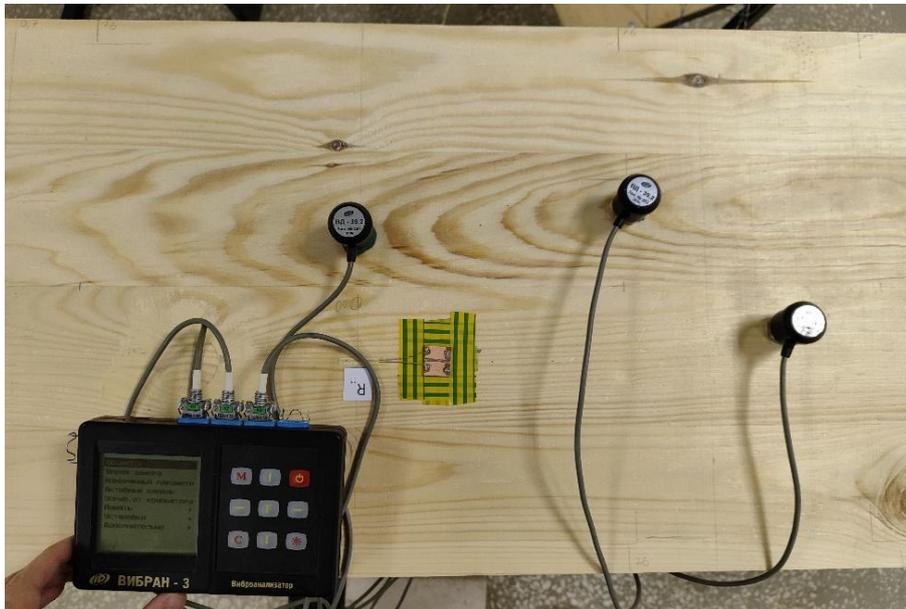


Рис. 5. Измерения с помощью вибронализатора «ВИБРАН-3»

Для сопоставления результатов исследования был произведен расчет методом конечных элементов в вычислительном комплексе SCAD++. Была построена расчетная модель в виде составной пластины с ортотропными свойствами [10–11] конечных элементов в слоях (рис. 6).

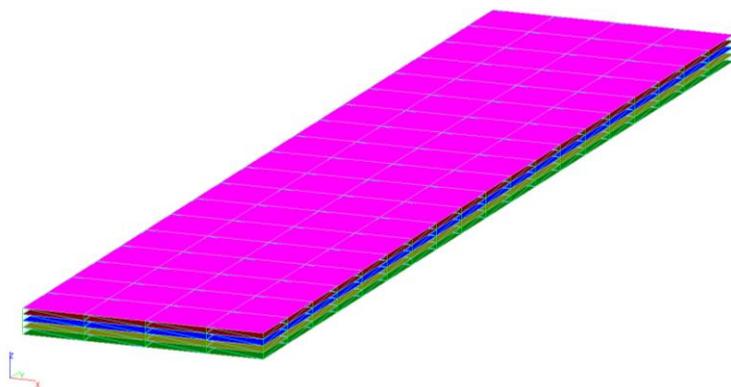


Рис. 6. Общий вид расчетной плиты из ДПК

Ввиду того, что данная конструкция состоит из большого количества склеенных друг с другом ламелей, определение фактического кратковременного модуля упругости является сложной задачей, ввиду чего конечным элементам заданы упругие свойства в соответствии с нормативной документацией (табл. 1 [12]).

Таблица 1

Упругие характеристики слоев в расчетной модели

Направление волокон	E_y , кН/м ²	E_x , кН/м ²	G_{xy} , кН/м ²	ν_{xy}	ν_{yx}
Продольное	1×10^7	4×10^5	5×10^5	0,45	0,018
Поперечное	4×10^5	1×10^7	5×10^5	0,018	0,45

Точность полученных результатов исследования оценивалась с помощью статистической обработки, в результате определены: средние арифметические прогибы и нормальных напряжений \bar{X} , среднее квадратическое отклонение S , средняя ошибка S_r , коэффициент вариации V и относительная точность P_r . Значение коэффициента Стьюдента $t = 4,303$.

Результаты и обсуждение. Результаты исследования деформативности плиты из ДПК с утолщенными продольными слоями приведены в табл. 2. Статистическая обработка значений показала, что относительная точность исследований P_r не превышала 8 %.

Таблица 2

Прогибы экспериментального образца

Номер опыта	Нагрузка, кН/м	Прогиб по ИЧ № 1, мм	Прогиб по ИЧ № 2, мм	Среднее значение прогиба в опыте W_0 , мм	Расчетное значение прогиба $W_{расч}$, мм	Отклонение экспериментального значения от расчетного, %
1	0	0	0	0	0	0
	0,246	1,03	1,02	1,03	0,97	5
	0,489	2,03	2,00	2,02	1,93	4
	0,734	3,03	3,00	3,02	2,89	4
	0,967	3,98	3,95	3,97	3,81	4
	1,207	4,67	4,92	4,80	4,75	1
2	0	0	0	0	0	0
	0,246	1,00	1,06	1,03	0,97	6
	0,489	2,00	2,07	2,04	1,93	5
	0,734	3,02	3,08	3,05	2,89	5
	0,967	3,97	4,03	4,00	3,81	5
	1,207	4,94	5,00	4,97	4,75	4
3	0	0	0	0	0	0
	0,246	1,02	1,04	1,03	0,97	6
	0,489	2,03	2,04	2,04	1,93	5
	0,734	3,04	3,05	3,05	2,89	5
	0,967	3,98	4,00	3,99	3,81	5
	1,207	4,71	4,99	4,85	4,75	2

Для каждой ступени нагружения плиты получены средние арифметические значения прогибов, равные 1,03, 2,03, 3,04, 3,99, 4,85 мм соответственно. Значения максимального прогиба плиты из ДПК с утолщенными продольными слоями изменяются в соответствии с рис. 7.

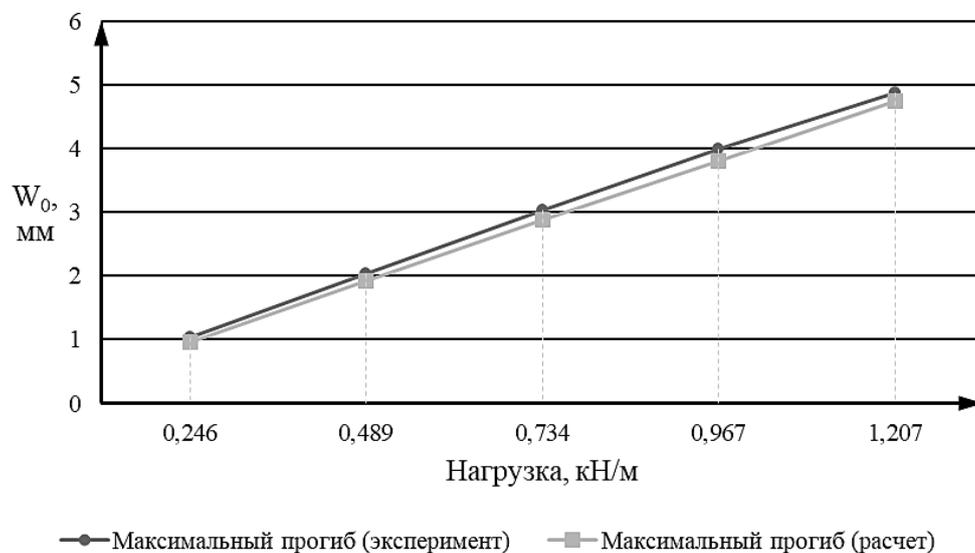


Рис. 7. Расчетные и экспериментальные значения прогибов

Отклонения экспериментального прогиба от расчетного составляют от 2 до 6 %, что свидетельствует о высокой сходимости эксперимента и расчетной модели для измерения прогибов плиты.

Результаты измерения нормальных напряжений в образце приведены в табл. 3. Относительная точность измерения данного параметра не превышала 8 %.

Таблица 3

Нормальные напряжения в экспериментальном образце

Номер опыта	Нагрузка, кН/м	Нормальное напряжение σ в точке		Расчетное нормальное напряжение σ в точке		Отклонение экспериментального значения от расчетного в точке	
		R_{11} , кН/м ²	R_{21} , кН/м ²	R_{11} , кН/м ²	R_{21} , кН/м ²	R_{11} , %	R_{21} , %
1	0,246	-690	-480	-670	-561	3	-15
	0,489	-1400	-950	-1330	-1113	5	-15
	0,734	-2120	-1420	-1998	-1673	6	-16
	0,967	-2800	-1870	-2633	-2204	6	-16
	1,207	-3470	-2340	-3284	-2749	5	-15
2	0,246	-690	-480	-670	-561	3	-15
	0,489	-1410	-950	-1330	-1113	6	-15
	0,734	-2130	-1430	-1998	-1673	6	-15
	0,967	-2800	-1890	-2633	-2204	6	-14
	1,207	-3470	-2360	-3284	-2749	5	-14
3	0,246	-686	-492	-670	-561	2	-12
	0,489	-1400	-970	-1330	-1113	5	-13
	0,734	-2130	-1460	-1998	-1673	6	-13
	0,967	-2810	-1820	-2633	-2204	6	-17
	1,207	-3500	-2400	-3284	-2749	6	-13

Расчетные и экспериментальные значения нормальных напряжений в тензорезисторах R_{11} и R_{21} изображены на рис. 8. Графики экспериментальных значений построены по средним

арифметическим для каждой ступени нагружения, и в тензорезисторе R_{11} равны: -689, -1403, -2127, -2803, -3480 кН/м²; в тензорезисторе R_{21} : -484, -957, -1437, -1860, -2367 кН/м².

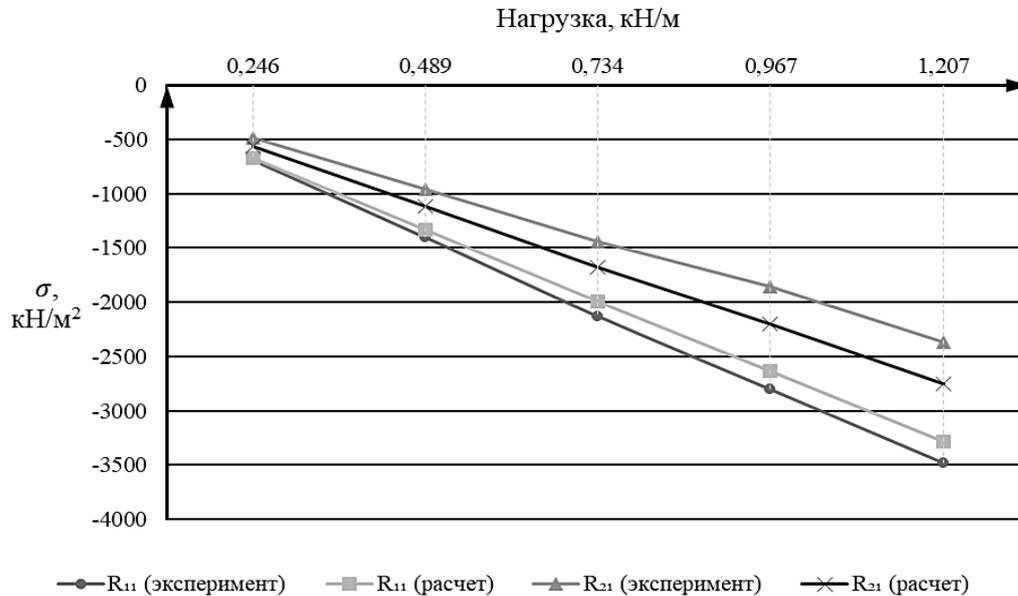


Рис. 8. Расчетные и экспериментальные значения нормальных напряжений

Отклонения экспериментальных нормальных напряжений в тензорезисторе R_{11} от расчетных значений составило от 3 до 6 %. Наибольшие отклонения экспериментальных данных возникли в тензорезисторе R_{21} и составили от 12 до 17 %, что может быть связано с неоднородностью древесины в месте приклеивания тензорезистора.

Для анализа динамических характеристик плиты из ДПК с утолщенными продольными слоями с помощью виброанализатора получена виброграмма (рис. 9).

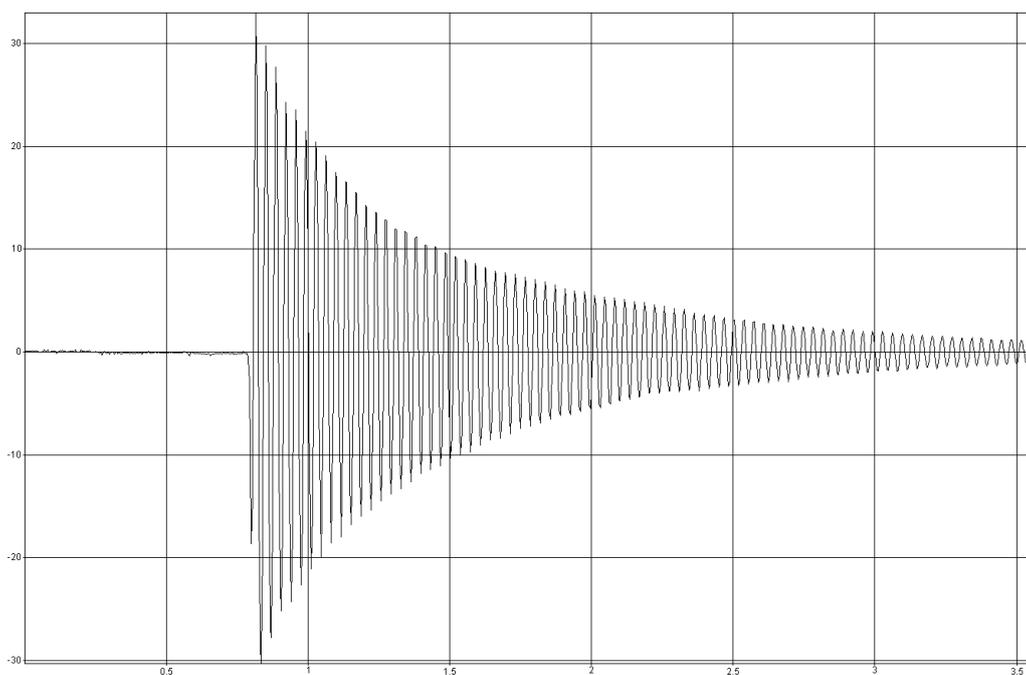


Рис. 9. Виброграмма собственных колебаний

Результаты динамических исследований и сопоставление с расчетной моделью приведены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты динамических испытаний

Параметр	Нагрузка q , кН/м									
	0,246		0,489		0,734		0,967		1,207	
	Расч.	Эксп.	Расч.	Эксп.	Расч.	Эксп.	Расч.	Эксп.	Расч.	Эксп.
W_0 , м·10 ³	0,97	1,03	1,93	2,03	2,89	3,04	3,81	3,99	4,75	4,87
m , кН/м	0,1030									
$\omega_{эксп}$, рад/с	177,814									
$\omega_{расч}$, рад/с	175,050									
$K_{аналит}$	1,26835									
K	1,26721	1,38619	1,27094	1,37822	1,26638	1,37301	1,26706	1,36745	1,26663	1,34043
Отклонение K от $K_{аналит}$, %	-0,09	8,50	0,20	7,97	-0,16	7,62	-0,10	7,25	-0,14	5,38

Примечание: расч. – расчет; эксп. – эксперимент.

Для плиты из ДПК с утолщенными продольными слоями отклонение коэффициента K не превышает 8,50 %, что свидетельствует о высокой точности проделанных исследований и применимости уравнения (1) для подобных конструкций. Данное несущественное отклонение может быть вызвано рядом факторов, таких как отличие фактической массы плиты от массы расчетной модели, отличие реального кратковременного модуля упругости от расчетного и т. д.

Выводы. Результаты настоящего исследования свидетельствуют о высокой сходимости расчетных и экспериментальных значений максимального прогиба, нормальных напряжений и частоты собственных колебаний. Также доказана применимость закономерности В. И. Коробко для реальных конструкций трехслойных плит из ДПК с утолщенными продольными слоями. При этом обеспечивается достаточно высокая сходимость экспериментальных и аналитических значений, так как отклонение не превысило 8,50 % для разной величины нагрузки.

Библиографический список

1. ГОСТ Р 56706-2022. Плиты из перекрестноклееной древесины. Общие технические условия.
2. Погорельцев А. А., Филимонов М. А., Смирнов П. Н. Определение прочностных и упругих характеристик древесины перекрестно клееной (ДПК/CLT) и классификация по классам прочности. – М.: НИЦ «Строительство», 2020. – 175 с.
3. Погорельцев А. А., Смирнов П. Н., Филимонов М. А. Проведение исследований по определению несущей способности стеновых панелей и плит перекрытия из древесины перекрестно клееной (ДПК/CLT) и разработка методики расчета. – М.: НИЦ «Строительство», 2020. – 268 с.
4. Филимонов М. А., Смирнов П. Н. Исследования прочностных и упругих характеристик плит из древесины перекрестно-клееной (ДПК/CLT) Российского производства // Сейсмическое строительство. Безопасность сооружений. 2022. № 2. С. 81–97. – DOI: 10.37153/2618-9283-2022-2-81-97.
5. Коробко В. И. Об одной «замечательной» закономерности в теории упругих пластинок // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1989. № 11. С. 32–36.

6. Трошин М. Ю., Турков А. В. Взаимосвязь максимального прогиба и частоты собственных колебаний в 3-слойной плите из ДПК при переменной величине зазоров в поперечном слое при различных граничных условиях // *Строительство и реконструкция*. 2024. № 4. С. 56–63. – <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2024-114-4-56-63>.
7. Трошин, М. Ю., Турков А. В., Заев А. В. Влияние толщины поперечного и продольных слоев на деформации и напряжения в 3-слойной плите ДПК (CLT), смоделированной как составная пластина // *Архитектура, строительство, транспорт*. – 2024. – № 2. – С. 30–41. – DOI: 10.31660/2782-232X-2024-2-30-41.
8. Мехеда В. А. Тензометрический метод измерения деформаций. — Самара: Изд-во Самар. гос. аэрокосм. ун-та, 2011. – 56 с.
9. Ашкенази Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов. – М.: Лесная промышленность, 1978. – 224 с.
10. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластинки. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
11. Филатов В. В. Развитие теории и разработка численной методики расчета составных стержней и пластин: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / Филатов Владимир Владимирович. – М., 2015. – 292 с.
12. СП 64.13330.2017. Деревянные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-25-80.

References

1. Federal Standard R 56706-2022. Cross-laminated timber boards. General specifications.
2. Pogoreltsev A. A., Filimonov M. A., Smirnov P. N. Determination of strength and elastic characteristics of cross-laminated timber (CLT) and classification by strength classes. M.: Research Center "Construction", 2020. 175 p.
3. Pogoreltsev A. A., Smirnov P. N., Filimonov M. A. Conducting research to determine the bearing capacity of wall panels and floor slabs made of cross-laminated timber (CLT) and development of a calculation methodology. M.: Research Center "Construction", 2020. 268 p.
4. Filimonov M. A., Smirnov P. N. Research of strength and elastic characteristics of cross-laminated timber boards (CLT) of Russian production. *Seismic Construction. Safety of Structures*. No. 2. 2022. Pp. 81–97. DOI: 10.37153/2618-9283-2022-2-81-97.
5. Korobko V. I. On one “remarkable” regularity in the theory of elastic plates. *News of Universities. Construction and Architecture*. No. 11. 1989. Pp. 32–36.
6. Troshin M. Yu., Turkov A. V. Relationship between maximum deflection and natural vibration frequency in a 3-layer WPC board with variable gap size in the transverse layer under different boundary conditions. *Construction and Reconstruction*. No. 4. 2024. Pp. 56–63. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2024-114-4-56-63>.
7. Troshin M. Yu., Turkov A. V., Zaev A. V. Effect of thickness of transverse and longitudinal layers on deformations and stresses in a 3-layer CLT slab modeled as a composite plate. *Architecture, Construction, Transport*. No. 2. 2024. Pp. 30–41. DOI: 10.31660/2782-232X-2024-2-30-41.
8. Mekheda V. A. Strain gauge method for measuring deformations. Samara: Publishing House of the Samara State Aerospace University, 2011. 56 p.
9. Ashkenazi E. K. Anisotropy of wood and wood materials. M.: Lesnaya Promyshlennost, 1978. 224 p.
10. Rzhantsyn, A. R. Composite rods and plates. M.: Stroyizdat, 1986. 316 p.
11. Filatov V. V. Development of the theory and development of a numerical method for calculating composite rods and plates: diss. ... Doctor of Engineering Sciences: 05.23.17. Filatov Vladimir Vladimirovich. M., 2015. 292 p.
12. Set of Rules 64.13330.2017. Wooden structures. Updated version of SNiP II-25-80.

EXPERIMENTAL STUDIES OF CLT-PANELS WITH THICKENED LONGITUDINAL LAYERS

M. Yu. Troshin ¹, A. V. Korobko ²

Oryol State University named after I. S. Turgenev ^{1,2}
Russia, Oryol

¹ Postgraduate Student of the Department of Building Structures and Materials, tel.: +7(980)361-53-74,
e-mail: mtr997@mail.ru

² Dr. of Technical Sciences, Professor of the Department of Building Structures and Materials, tel.: +7(903)881-25-98,
e-mail: ankor.66@mail.ru

The article presents the results of an experimental study of cross-laminated timber (CLT) boards with thickened longitudinal layers. A test rig in the form of a hinged CLT board was assembled for the tests. The values of maximum transverse deflection, normal stresses at various load values and natural vibration frequencies of the test specimen were obtained. The aim of the study was to compare the experimental results and the numerical model of the CLT board to confirm the previously obtained patterns. In addition, the applicability of V. I. Korobko's regularity for a CLT slab was verified in order to develop methods for dynamic quality control of building structures. The obtained experimental results have high convergence with the numerical model and confirm the applicability of the used numerical methods for real structures made of this material.

Keywords: timber structures, cross-laminated timber, CLT, maximum deflection, natural oscillation frequency, composite plate.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.073.2.04

DOI 10.36622/2219-1038.2025.44.1.008

ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ, ОПИРАЮЩЕЙСЯ НА УПРУГОЕ ОСНОВАНИЕ

Н. Н. Некрасова¹Воронежский государственный технический университет¹
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики, тел.: +7(473)271-53-62, e-mail: Nekrasova-N@yandex.ru

Рассматривается численное моделирование пространственной задачи контактного взаимодействия ортотропной плиты переменной жесткости, расположенной на упругом полупространстве Буссинеска. Система интегро-дифференциальных уравнений, к которой сводится задача, решается численно сочетанием методов конечных разностей типа сквозного счета и граничных элементов. Новизна подхода состоит в возможности осуществлять расчет напряженно-деформированного состояния плиты на основе сглаживания границ между областями с различными жесткостными характеристиками. Используемая методика расчета пригодна в случае любых известных контактных моделей упругих оснований. Проведен сравнительный анализ типов аппроксимации жесткостей в сеточных узлах для плит с различной границей раздела жесткостей (толщин).

Разработанная методика позволяет эффективно моделировать работу напряженно-деформированного состояния фундаментных конструкций при использовании уточненных контактных моделей основания.

Ключевые слова: ортотропная плита, упругое основание, коэффициент жесткости, конечно-разностная схема типа сквозного счета, метод граничных элементов.

Введение. Возрастающий интерес к изучению контактного взаимодействия плит переменной жесткости с упругим основанием обусловлен широким спектром применения решения данного класса задач для моделирования многих реальных инженерных приложений. Например, конструкция дорожного полотна, мостов или взлетно-посадочной полосы аэродромов часто состоит из железобетонных плит, лежащих на грунтовом основании. Широко применяются ортотропные плиты переменной жесткости в промышленном строительстве и машиностроении при расчете роторов турбин, различных клапанов и задвижек. Задачи о плитах переменной жесткости (толщины) возникают в процессе проектирования новых фундаментных конструкций для обеспечения высокой надежности, долговечности и экономичности.

Выделяют три типа плит переменной жесткости: 1) когда материал плиты однородный, но при этом изменяется ее толщина; 2) толщина плиты постоянна, но изменяется ее жесткость за счёт армирования, изменчивости физических свойств материала, частичных пластических деформаций или трещинообразования; 3) одновременно изменяется толщина и жесткость. В любом из этих трех случаев эффективная жесткость может изменяться по ступенчатому закону или непрерывно. В имеющихся аналитических решениях рассматриваются ограниченный класс нагрузок и сравнительно простые законы изменения жесткости. При этом рассматривалась расчетная модель грунтового основания типа пространственного континуума. Поэтому

теория моделирования процесса изгиба плит переменной жесткости, расположенных на упругих неклассических основаниях, требует дальнейшего развития с целью возможного её применения к более широкому классу практических задач.

Постановка задачи. Согласно известному подходу [1, 2], принятому при моделировании взаимодействия плиты, расположенной на плоскости XOY упругого основания под нагрузкой $p(x, y)$, плита рассматривается изолированно, а наличие основания заменяется его силовой реакцией $q(x, y)$. В этом случае с учетом гипотез Кирхгофа-Лява прогибы плиты с переменной жесткостью должны удовлетворять бигармоническому уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[D_x \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right] + 4 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D_K \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[D_y \cdot \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_1 \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right] = q(x, y) - p(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

дополненному некоторыми краевыми условиями. Здесь $W(x, y)$ – вертикальное перемещение срединной плоскости плиты; $q(x, y)$ – интенсивность внешней нагрузки; $p(x, y)$ – контактное давление; $D_x = E_x h^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2)$, $D_y = E_y h^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2)$ – цилиндрические жесткости изгиба для главных направлений упругости; $D_3 = D_x \cdot \nu_2 + 2D_K = D_y \cdot \nu_1 + 2D_K$, $D_K = Gh^3 / 12$ – жесткость кручения; E_x , E_y , ν_1 , ν_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона материала плиты соответственно; G – модуль сдвига; $h = h(l)$ – толщина плиты.

Ввиду сложности данной задачи её решение возможно только с помощью численных методов, причем важнейшим этапом решения является определение реакции основания при его контактном взаимодействии с плитой. На этом этапе применяется та или иная модель упругого основания, описывающая связь между нормальными перемещениями $W(x, y)$ поверхности полупространства и действующими на эту поверхность нормальными усилиями. Эта связь задается в виде интегрального оператора

$$W(x, y) = \bar{W}(x, y) + A + Bx + Cy = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \iint_s \omega(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2)$$

где параметры A , B , C – это параметры перемещения плиты как жесткого целого; $p(x, y)$ – значение контактного давления в точке (ξ, η) ; $\omega(x, y, \xi, \eta)$ – осадка поверхности основания в точке (ξ, η) от действия вертикальной единичной сосредоточенной силы, приложенной к основанию в точке (x, y) ; E_0 , ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона основания; s – область контакта плиты и основания. Функция $\omega(x, y, \xi, \eta)$ задается согласно используемой модели упругого основания. В частности, для однородного полупространства Буссинеска [1, 3]:

$$\omega(x, y, \xi, \eta) = \left(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right)^{-1}.$$

Граничные условия на контуре плиты могут быть заданы в виде защемления, шарнирного опирания, свободного контура плиты или их сочетания.

Для численного решения описанной выше задачи используется конечно-разностная схема типа сквозного счета, при которой граница раздела областей с различными

жесткостными характеристиками явно не выделяется. В соответствии с данным подходом вместо функции $W(x, y)$ двух переменных рассматривается её дискретная аппроксимация в узлах конечноразностной сетки. Частные производные в каждом слагаемом левой части уравнения (1) расписываются на основе известных конечно-разностных соотношений для производных второго порядка [4].

Распределенная по поверхности плиты реакция основания должна быть также представлена системой сил, приложенных в узлах соответствующей сетки. Приближенно это достигается путем рассмотрения на той же двумерной области (совпадающей по форме с самой плитой) другой, двойственной, сетки [4], каждая ячейка которой содержит внутри себя узел исходной сетки. Полагая приближенно реакцию основания постоянной в пределах каждой ячейки двойственной сетки и выбирая саму сетку так, чтобы узлы исходной сетки были расположены в центрах тяжести ячеек, можно добиться неплохой точности распределения величины реакции основания по узлам исходной сетки, которая осуществляет дискретную модель плиты. После этого плита рассматривается изолированно от основания. При этом кроме краевой задачи для уравнения (1) необходимо также учитывать обычные уравнения равновесия твердого тела:

$$\begin{aligned} \iint_S p_{\xi, \eta} d\xi d\eta &= \iint_F q_{\xi, \eta} d\xi d\eta, \\ \iint_S p_{\xi, \eta} \xi d\xi d\eta &= \iint_F q_{\xi, \eta} \xi d\xi d\eta, \quad \iint_S p_{\xi, \eta} \eta d\xi d\eta = \iint_F q_{\xi, \eta} \eta d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3)$$

где S – область контакта плиты и основания; F – область действия внешней распределенной нагрузки.

В результате построения алгоритма расчета, основные положения которого изложены в работах [5, 6], для уравнения (1) получим систему линейных уравнений относительно прогибов узловых точек плиты в матричном виде:

$$[H]\{W\} = \{q\} - \{p\}, \quad (4)$$

где $[H]$ – матрица дифференциального оператора относительно вектора прогибов $\{W\}$; $\{q\}$ и $\{p\}$ – векторы внешней нормальной нагрузки и реактивного давления, рассматриваемые в узлах конечно-разностной сетки.

Считая, что контактные давления в пределах каждой ячейки вспомогательной сетки остаются постоянными, интегральное уравнение (2) можно представить в следующей дискретной форме канонических уравнений:

$$\{W\} = [B]\{p\}, \quad (5)$$

где $[B] = \|\sigma_{ij}\|$ – матрица влияния, элементы которой вычисляются по формуле

$$\sigma_{ij} = \iint_{F_j} \omega(x_i, y_i, \xi, \eta) d\xi d\eta$$

и представляют собой вертикальные перемещения поверхности упругого основания, в точке (x_i, y_i) , совпадающей с центром тяжести i -го элемента, от единичной нагрузки, равномерно распределенной по области F_j j -го элемента. Вычисление элементов σ_{ij} осуществляется численно-аналитическим способом, изложенным в [7].

Решая матричное уравнение (5) относительно контактных давлений $\{p\}$, получаем:

$$[V]\{W\} = \{p\}, \quad (6)$$

где $[V] = [B]^{-1}$ – матрица жесткости упругого основания. Подставляя $\{p\}$ из (6) в (5), получаем решение задачи в виде:

$$\{W\} = [S]^{-1}\{p\}, \quad [S] = [H] + [B]^{-1}.$$

В результате краевая задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей, порядок которой равен числу неизвестных прогибов плиты в выделенной дискретной совокупности точек. Решение сформулированной пространственной контактной задачи при любой модели упругого основания представляет значительные трудности, а для прямоугольных плит точные решения к настоящему времени практически отсутствуют.

Аппроксимация функций жёсткости в сеточных узлах. Построенная конечно-разностная схема типа сквозного счета характеризуется тем, что граница областей с различными механическими свойствами явно не выделяется. Для жесткостей, входящих в выражения коэффициентов конечно-разностных уравнений матрицы $[H]$, в узлах сетки применяем принцип сглаживания [8, 9]. В дальнейшем рассмотрим три типа аппроксимации функций жесткости в сеточных узлах.

1. Как среднее арифметическое значение жёсткостей в двух соседних узлах (в рассматриваемом узле сетки и узле, расположенном слева от данного узла):

$$\hat{D}_{x_{i,j}} = \frac{1}{2} \cdot [D_{x_{i,j}} + D_{x_{i,j-1}}]; \quad \hat{D}_{x_{i,j+1}} = \frac{1}{2} \cdot [D_{x_{i,j+1}} + D_{x_{i,j}}];$$

$$\hat{D}_{x_{i,j-1}} = \frac{1}{2} \cdot [D_{x_{i,j-1}} + D_{x_{i,j-2}}]; \quad \hat{D}_{y_{i,j}} = \frac{1}{2} \cdot [D_{y_{i,j}} + D_{y_{i-1,j}}];$$

$$\hat{D}_{y_{i-1,j}} = \frac{1}{2} \cdot [D_{y_{i-1,j}} + D_{y_{i-2,j}}]; \quad \hat{D}_{y_{i+1,j}} = \frac{1}{2} \cdot [D_{y_{i+1,j}} + D_{y_{i,j}}];$$

$$(\hat{D}_K)_\alpha = \frac{1}{4} \cdot [(D_K)_{i+1,j-1} + (D_K)_{i+1,j} + (D_K)_{i,j-1} + (D_K)_{i,j}];$$

$$(\hat{D}_K)_\beta = \frac{1}{4} \cdot [(D_K)_{i+1,j} + (D_K)_{i+1,j+1} + (D_K)_{i,j} + (D_K)_{i,j+1}];$$

$$(\hat{D}_K)_\gamma = \frac{1}{4} \cdot [(D_K)_{i,j-1} + (D_K)_{i,j} + (D_K)_{i-1,j-1} + (D_K)_{i-1,j}];$$

$$(\hat{D}_K)_\sigma = \frac{1}{4} \cdot [(D_K)_{i,j} + (D_K)_{i,j+1} + (D_K)_{i-1,j} + (D_K)_{i-1,j+1}].$$

2. Значения величин, обратных жёсткостям в узле i, j , определяются как полсуммы величин, обратных среднему арифметическому значений жесткостей в соседних узлах:

$$\hat{D}_{x_{i,j}} = \frac{2 \cdot D_{x_{i,j}} \cdot D_{x_{i,j-1}}}{D_{x_{i,j}} + D_{x_{i,j-1}}}; \quad \hat{D}_{x_{i,j-1}} = \frac{2 \cdot D_{x_{i,j-1}} \cdot D_{x_{i,j-2}}}{D_{x_{i,j-1}} + D_{x_{i,j-2}}};$$

$$\begin{aligned}\hat{D}_{x_{i,j+1}} &= \frac{2 \cdot D_{x_{i,j+1}} \cdot D_{x_{i,j}}}{D_{x_{i,j+1}} + D_{x_{i,j}}}; & \hat{D}_{y_{i,j}} &= \frac{2 \cdot D_{y_{i,j}} \cdot D_{y_{i-1,j}}}{D_{y_{i,j}} + D_{y_{i-1,j}}}; \\ \hat{D}_{y_{i-1,j}} &= \frac{2 \cdot D_{y_{i-1,j}} \cdot D_{y_{i-2,j}}}{D_{y_{i-1,j}} + D_{y_{i-2,j}}}; & \hat{D}_{y_{i+1,j}} &= \frac{2 \cdot D_{y_{i+1,j}} \cdot D_{y_{i,j}}}{D_{y_{i+1,j}} + D_{y_{i,j}}}; \\ (\hat{D}_K)_\alpha &= \frac{A_\alpha}{B_\alpha}, & (\hat{D}_K)_\beta &= \frac{A_\beta}{B_\beta}, & (\hat{D}_K)_\gamma &= \frac{A_\gamma}{B_\gamma}, & (\hat{D}_K)_\sigma &= \frac{A_\sigma}{B_\sigma},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A_\alpha &= 4 \left[(D_K)_{i+1,j-1} \cdot (D_K)_{i+1,j} \cdot (D_K)_{i,j-1} \cdot (D_K)_{i,j} \right]; & B_\alpha &= B_\alpha^1 + B_\alpha^2 + B_\alpha^3 + B_\alpha^4, \\ B_\alpha^1 &= (D_K)_{i+1,j} \cdot (D_K)_{i,j-1} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\alpha^2 &= (D_K)_{i+1,j-1} \cdot (D_K)_{i,j-1} \cdot (D_K)_{i,j}; \\ B_\alpha^3 &= (D_K)_{i+1,j-1} \cdot (D_K)_{i+1,j} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\alpha^4 &= (D_K)_{i+1,j-1} \cdot (D_K)_{i+1,j} \cdot (D_K)_{i,j-1}; \\ A_\beta &= 4 \left[(D_K)_{i+1,j+1} \cdot (D_K)_{i+1,j} \cdot (D_K)_{i,j+1} \cdot (D_K)_{i,j} \right]; & B_\beta &= B_\beta^1 + B_\beta^2 + B_\beta^3 + B_\beta^4, \\ B_\beta^1 &= (D_K)_{i+1,j+1} \cdot (D_K)_{i,j+1} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\beta^2 &= (D_K)_{i+1,j+1} \cdot (D_K)_{i,j+1} \cdot (D_K)_{i,j}; \\ B_\beta^3 &= (D_K)_{i+1,j+1} \cdot (D_K)_{i+1,j} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\beta^4 &= (D_K)_{i+1,j+1} \cdot (D_K)_{i+1,j} \cdot (D_K)_{i,j+1}; \\ A_\gamma &= 4 \left[(D_K)_{i-1,j-1} \cdot (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j-1} \cdot (D_K)_{i,j} \right]; & B_\gamma &= B_\gamma^1 + B_\gamma^2 + B_\gamma^3 + B_\gamma^4, \\ B_\gamma^1 &= (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j-1} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\gamma^2 &= (D_K)_{i-1,j-1} \cdot (D_K)_{i,j-1} \cdot (D_K)_{i,j}; \\ B_\gamma^3 &= (D_K)_{i-1,j-1} \cdot (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\gamma^4 &= (D_K)_{i-1,j-1} \cdot (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j-1}; \\ A_\sigma &= 4 \left[(D_K)_{i-1,j+1} \cdot (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j+1} \cdot (D_K)_{i,j} \right]; & B_\sigma &= B_\sigma^1 + B_\sigma^2 + B_\sigma^3 + B_\sigma^4, \\ B_\sigma^1 &= (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j+1} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\sigma^2 &= (D_K)_{i-1,j+1} \cdot (D_K)_{i,j+1} \cdot (D_K)_{i,j}; \\ B_\sigma^3 &= (D_K)_{i-1,j+1} \cdot (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j}; & B_\sigma^4 &= (D_K)_{i-1,j+1} \cdot (D_K)_{i-1,j} \cdot (D_K)_{i,j+1}.\end{aligned}$$

3. Значения D_x, D_y, D_K в узлах сетки равны среднему арифметическому значению жесткостей в полуцелых узлах (промежуточные узлы, расположенные в серединах отрезков между узлами основной сетки):

$$\begin{aligned}\hat{D}_{x_{i,j}} &= \frac{1}{2} \cdot \left[D_{x_{i,j+1/2}} + D_{x_{i,j-1/2}} \right]; & \hat{D}_{x_{i,j-1}} &= \frac{1}{2} \cdot \left[D_{x_{i,j-1/2}} + D_{x_{i,j-3/2}} \right]; \\ \hat{D}_{x_{i,j+1}} &= \frac{1}{2} \cdot \left[D_{x_{i,j+1/2}} + D_{x_{i,j+3/2}} \right]; & \hat{D}_{y_{i,j}} &= \frac{1}{2} \cdot \left[D_{y_{i-1/2,j}} + D_{y_{i+1/2,j}} \right]; \\ \hat{D}_{y_{i-1,j}} &= \frac{1}{2} \cdot \left[D_{y_{i-1/2,j}} + D_{y_{i-3/2,j}} \right]; & \hat{D}_{y_{i+1,j}} &= \frac{1}{2} \cdot \left[D_{y_{i+1/2,j}} + D_{y_{i+3/2,j}} \right]; \\ (\hat{D}_K)_\alpha &= \frac{1}{4} \cdot \left[(D_K)_{i+1/2,j-1/2} + (D_K)_{i+1/2,j} + (D_K)_{i,j-1/2} + (D_K)_{i,j} \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hat{D}_K)_\beta &= \frac{1}{4} \cdot [(D_K)_{i+1/2, j+1/2} + (D_K)_{i+1/2, j} + (D_K)_{i, j+1/2} + (D_K)_{i, j}]; \\ (\hat{D}_K)_\gamma &= \frac{1}{4} \cdot [(D_K)_{i-1/2, j-1/2} + (D_K)_{i-1, j} + (D_K)_{i, j-1/2} + (D_K)_{i, j}]; \\ (\hat{D}_K)_\sigma &= \frac{1}{4} \cdot [(D_K)_{i-1/2, j+1/2} + (D_K)_{i-1/2, j} + (D_K)_{i, j+1/2} + (D_K)_{i, j}]. \end{aligned}$$

Защемленная плита переменной жесткости на упругом полупространстве. Сравнение типов аппроксимации жесткостей в сеточных узлах рассмотрим на примере изотропной плиты, защемленной по контуру и взаимодействующей с упругим полупространством. Толщина плиты скачкообразно меняется относительно диагонали квадрата (рис. 1). В области 1 толщина плиты $h_1 = 2$ м, а в области 2 и на самой диагонали $h_2 = 1$ м. Объем плиты $V = 384$ м³.

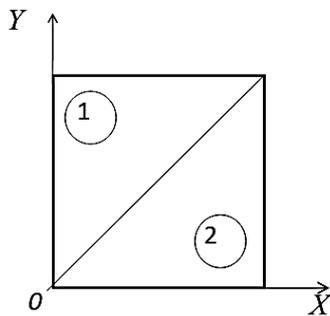


Рис. 1. Области плиты со скачкообразным изменением толщины относительно диагонали

На рис. 2а показаны изолинии равных прогибов для плиты постоянной толщины $h_1 = h_2 = 1,5$ м. Как видно из рисунка, картина изолиний симметрична относительно центра плиты, причем линии равных прогибов в центре плиты практически не отличаются от окружностей. С удалением от центра изолинии принимают вид прямоугольников со скругленными углами. Сравним изолинии для трех типов аппроксимации функций жёсткости при определении коэффициентов конечно-разностных уравнений.

Первому типу аппроксимации функций жёсткости в сеточных узлах соответствуют изолинии прогибов, приведенные на рис. 2б. Из представленных расчетных данных видно, что скачкообразное изменение толщины плиты приводит к существенной асимметрии в распределении прогибов. Область максимальных прогибов смещается в область плиты с меньшей толщиной и приобретает форму эллипса с большей осью в направлении границы раздела жёсткостей.

Второму типу осреднения функции жёсткости в узлах сетки соответствует картина линий равных прогибов, приведенная на рис. 2в. А на рис. 2г построены изолинии прогибов по третьему типу аппроксимации функций жёсткости в сеточных узлах. Как и для первого типа, для второго и третьего варианта изолинии прогибов ориентированы в направлении границы раздела толщины плиты и имеют форму эллипса. При этом изолинии на рис. 2г имеют более правильные очертания, чем на рис. 2б и 2в. Проведенная сравнительная оценка эффективности типов осреднения функций жесткости в сеточных узлах показала, что все три типа аппроксимации приводят к качественно подобному распределению прогибов и вполне удовлетворяют заданной точности расчетов.

Значения максимальных прогибов W_{\max} для плит равных объемов ($V = 384$ м³), рассчитанные с использованием трех типов осреднения коэффициентов жёсткости, приведены в таблице. При той же нагрузке для сравнения приводится значение W_{\max} для защемленной плиты постоянной толщины $h = 1,5$ м.

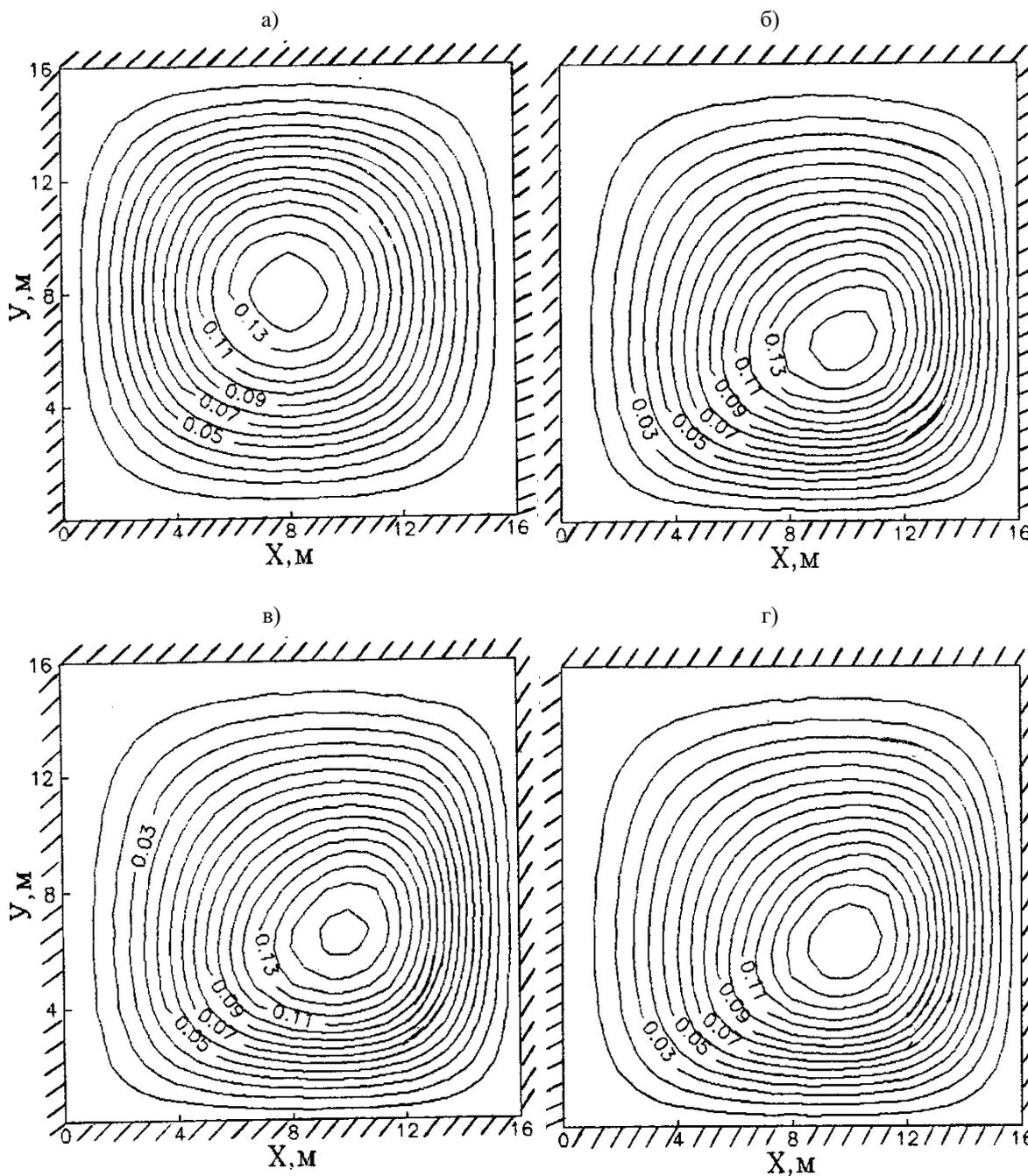


Рис. 2. Изолинии равных прогибов W , см, защемленной плиты, контактирующей с упругим полупространством: а) однородная плита; б, в, г) плита с кусочно-постоянной функцией толщины при аппроксимации жёсткостей по первому, второму и третьему типам соответственно

Таблица

W_{\max} , см	Плита постоянной толщины	Тип аппроксимации для плиты переменной жесткости		
		1	2	3
	0,1488	0,2050	0,2148	0,2005

Как показывают расчетные данные, скачкообразное изменение толщины плиты в два раза приводит к увеличению максимального прогиба W_{\max} по сравнению с плитой постоянной толщины почти в полтора раза. При этом количественное отличие не превышает 5 %, что вполне удовлетворяет заданной точности расчетов. Для рассматриваемой функции изменения

толщины все три типа осреднения приводят к качественно подобному распределению прогибов. Но осреднение жёсткостей при формировании конечно-разностных уравнений с использованием полуцелых узлов (третий тип) наиболее предпочтительно, так как повышается точность расчетов напряженно-деформированного состояния плиты.

Выводы. Разработанный программный комплекс может быть применен при более сложных законах изменения функций жёсткости, внешнего нагружения на плиту и других возможных сочетаниях граничных условий на контуре. Кроме того, предлагаемая методика позволяет использовать другие контактные модели упругого основания. Также применение численного метода позволяет решить большой класс задач с достаточно высокой точностью.

Библиографический список

1. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
2. Кончковский З. Плиты. Статические расчеты. – М.: Стройиздат, 1984. – 480 с.
3. Новотны Б., Ганушка А. Прямоугольная плита на упругом полупространстве. – *Staveb. Cas*, 1987.
4. Aleynikov S. M., Nekrasova N. N. Contact problem for orthotropic foundation slabs with consideration of deformation peculiarities of spatial and nongomogeneous bases // *Studia Geotechnica et Mechanica*. –1998. – Vol. XX, No. 1–2. – Pp. 63–104.
5. Бурковский В. Л., Некрасова Н. Н. Численная реализация модели цилиндрического изгиба ортотропных плит переменной жесткости на упругом основании // *Вестник Воронеж. гос. технического ун-та*. – 2009. – Т. 5, № 10. – С. 101–107.
6. Некрасова Н. Н. Контактная задача для ортотропных плит переменной толщины с пространственно-неоднородным основанием // *Строительная механика и конструкции*. – 2021. – № 3 (30). – С. 90–99.
7. Алейников С. М., Иконин С. В. Пространственная деформация поверхности упругого слоя переменной толщины // *Основания, фундаменты и механика грунтов*. – 1990. – № 5. – С. 21–23.
8. Самарский А. А. Теория разностных систем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
9. Самарский А. А., Фрязинов И. В. О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 1971. – Вып. 11, № 2. – С. 385–410.
10. Ээк Р. Н., Ряжет Р. К. Расчет ортотропных пластинок переменной толщины методом сеток // *Тр. Таллинского политех. ин-та*. – 1984. – № 575. – С. 13–21.
11. Варвак П. М., Варвак Л. П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.

References

1. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. Calculation of structures on an elastic foundation. M.: Stroyizdat, 1984. 679 p.
2. Konchkovsky Z. Plates. Static calculations. M.: Stroyizdat, 1984. 480 p.
3. Novotny B., Ganushka A. Rectangular plate on an elastic half-space. *Staveb. Cas*, 1987.
4. Aleynikov S. M., Nekrasova N. N. Contact problem for orthotropic foundation slabs with consideration of deformation peculiarities of spatial and nongomogeneous bases. *Studia Geotechnica et Mechanica*. Vol. XX. No. 1–2. 1998. Pp. 63–104.
5. Burkovsky V. L., Nekrasova N. N. Numerical implementation of the model of cylindrical bending of orthotropic slabs of variable stiffness on an elastic foundation. *Bulletin of the Voronezh State Technical University*. Vol. 5. No. 10. 2009. Pp. 101–107.

6. Nekrasova N. N. Contact problem for orthotropic plates of variable thickness with a spatially inhomogeneous base. *Construction Mechanics and Structures*. No. 3 (30). 2021. Pp. 90–99.
7. Aleinikov S. M., Ikonin S. V. Spatial deformation of the surface of an elastic layer of variable thickness. *Foundations, Bases and Soil Mechanics*. No. 5. 1990. Pp. 21–23.
8. Samarskiy A. A. *Theory of difference systems*. M.: Science, 1977. 656 p.
9. Samarskiy A. A., Fryazinov I. V. Difference schemes for solving the Dirichlet problem in an arbitrary domain for an elliptic equation with variable coefficients. *J. Cal. Mat. & Mat. Phys. Issue*. 11. No. 2. 1971. Pp. 385–410.
10. Eek R. N., Ryamet R. K. Calculation of orthotropic plates of variable thickness by the mesh method. Tallinn Polytechnic Institute. No. 575. 1984. Pp. 13–21.
11. Varvak P. M., Varvak L. P. *The method of grids in the problems of calculating building structures*. M.: Stroyizdat, 1977. 154 p.

EFFICIENT ALGORITHM FOR CALCULATION OF A FIRM PLATE OF VARIABLE STIFFNESS BASED ON AN ELASTIC FOUNDATION

N. N. Nekrasova ¹

Voronezh State Technical University ¹
Russia, Voronezh

¹ PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Mechanics, tel.: +7(473)2715362, e-mail: Nekrasova-N@yandex.ru

The paper considers numerical modeling of the spatial problem of contact interaction of an orthotropic plate of variable stiffness located on an elastic Boussinesq half-space. The system of integro-differential equations to which the problem is reduced is solved numerically by a combination of finite difference methods of the through-counting type and boundary elements. The novelty of the approach consists in the possibility of calculating the stress-strain state of the slab based on smoothing the boundaries between areas with different rigidity characteristics. The calculation method used is suitable for any known contact models of elastic foundations. A comparative analysis of the stiffness approximation types in grid nodes for slabs with different rigidity (thickness) interfaces was carried out.

The developed method allows for efficient modeling of the stress-strain state of foundation structures using refined contact models of the foundation.

Keywords: orthotropic slab, elastic foundation, stiffness coefficient, finite-difference scheme of the through-count type, boundary element method.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО АРМИРОВАНИЯ ЛИСТОВЫМ ВИНИПЛАСТОМ НА НЕСУЩЮЮ СПОСОБНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ ПЕСЧАНОГО ОСНОВАНИЯ

С. С. Копылов¹, В. М. Антонов²

Тамбовский государственный технический университет^{1,2}
Россия, Тамбов

¹ Аспирант кафедры «Конструкции зданий и сооружений», тел.: +7(953)722-78-22,
e-mail: sergey.kopylov.2000@list.ru

² Канд. техн. наук, доц. кафедры «Конструкции зданий и сооружений», тел.: +7(920)230-86-99,
e-mail: antonov280562@mail.ru

Постановка задачи. Проведение экспериментальных и численных исследований армированных оснований с последующим выполнением многофакторного анализа и сравнение несущей способности армированного и неармированного основания в зависимости от параметров армирования и плотности засыпки

Результаты. Приведены результаты испытаний поверхностных жестких моделей фундаментов на песчаном основании, армированном горизонтально расположенными листами непластифицированного поливинилхлорида. Проведен многофакторный анализ зависимости несущей способности основания от глубины расположения арматуры, ее размеров, плотности грунта засыпки. В ПК «Plaxis-3D» разработана конечно-элементная упруго-пластическая модель грунтового основания со штампом на поверхности и выполнено сравнение экспериментальных данных со значениями, полученными в расчетном комплексе.

Найдены оптимальные варианты расположения армирующего элемента. Выявлена зависимость несущей способности и модуля общей деформации основания от размеров арматуры и плотности грунтовой матрицы. Определен характер потери прочности армированного основания в зависимости от расстояния до арматуры. Подтверждена эффективность армирования основания композитным материалом.

Ключевые слова: армирующий элемент, штамп, модуль общей деформации, вертикальное перемещение.

Введение. Армирование грунтов как способ повышения деформационных, прочностных и физико-механических характеристик основания является достаточно новым и перспективным методом. Создание композитного материала, состоящего из армирующих элементов, воспринимающих растягивающие и сдвиговые усилия и передающих их на грунт, позволяет повысить несущую способность основания и снизить затраты на устройство подземной части сооружений. Область применения армирования обширна: его используют при устройстве плотин, дамб, подпорных сооружений, дорог и насыпей, а также при возведении фундаментов. В виде армирующих элементов чаще всего выступают сваи, пластик, стекловолокно, оцинкованная сталь, геосинтетические материалы (геотекстиль, геосетка, георешетка, полимерная геомембрана), полимерные волокна, алюминиевые сплавы, резина и др. В последнее время разрабатываются новые виды армирующих элементов, способы и технологии армирования оснований [1–5].

Основными достоинствами армирования грунтов по сравнению с традиционными способами укрепления оснований являются снижение расходов материалов на устройство фундаментов, рациональное использование используемых территорий, возможность строительства разнообразных сооружений в сложных грунтовых условиях, скорость и быстрота возведения и т. д.

Методика проведения испытаний. Более 35 лет в лаборатории механики грунтов ТГТУ проводятся эксперименты по исследованию напряженно-деформированного состояния

армированных грунтовых оснований [6, 7]. В этой статье приведены результаты испытаний жестких моделей фундаментов на армированном и неармированном основании, выполнено их сравнение по несущей способности и по скорости развития деформаций.

Испытания проводились в металлических лотках размерами $70 \times 60 \times 70$ (h) и $180 \times 100 \times 85$ (h) см. Передача центральной вертикальной нагрузки с ножа на модель фундамента проводилась посредством рычажной системы с отношением плеч (передаточных чисел) 1:6 и 1:10. В качестве основания был использован мелкий однородный песок плотностью $\rho_1 = 1,54$ г/см³ и $\rho_2 = 1,68$ г/см³. Круглый металлический штамп диаметром $D_{st} = 100$ мм с гладкой контактной поверхностью выступал в качестве модели фундамента. Укладка грунта происходила пластами толщиной 5 см. Каждый слой уплотнялся ручной трамбовкой. Плотность засыпки контролировалась послойно с помощью режущего кольца.

Измерение деформаций (S) во всем диапазоне нагрузок проводилось индикаторами часового типа ИЧ-10, прикрепленными к реперной раме. Каждая ступень нагрузки выдерживалась до условной стабилизации осадок – 0,1 мм/ч. Количество ступеней нагрузок принималось не менее 10. Опыты считались законченными, если происходила потеря прочности основания или осадка достигала условно предельной $[S_u] = 10$ мм ($0,1D_{st}$).

В качестве армирующих элементов использовались листы из непластифицированного поливинилхлорида, изготовленные методом прессования. Размеры листов: 150×100 , 150×150 , 200×200 , 250×250 мм, толщина листов – 6 мм. Для сравнения и поиска оптимальных вариантов армирования изменяли глубину расположения листового винипласта от $0,1D_{st}$ до $0,5D_{st}$, от подошвы модели фундамента. Физико-механические характеристики листового винипласта приведены в табл. 1.

Схема опытной установки представлена на рис. 1.

Таблица 1

Физико-механические характеристики листового винипласта

№ п/п	Характеристики	Значение
1	Плотность, г/см ³	1,38
2	Предел прочности при растяжении, МПа	55
3	Предел прочности при сжатии, МПа	100
4	Предел прочности при изгибе, МПа	90
5	Относительное удлинение при разрыве, %	20
6	Модуль упругости при растяжении, МПа	2600

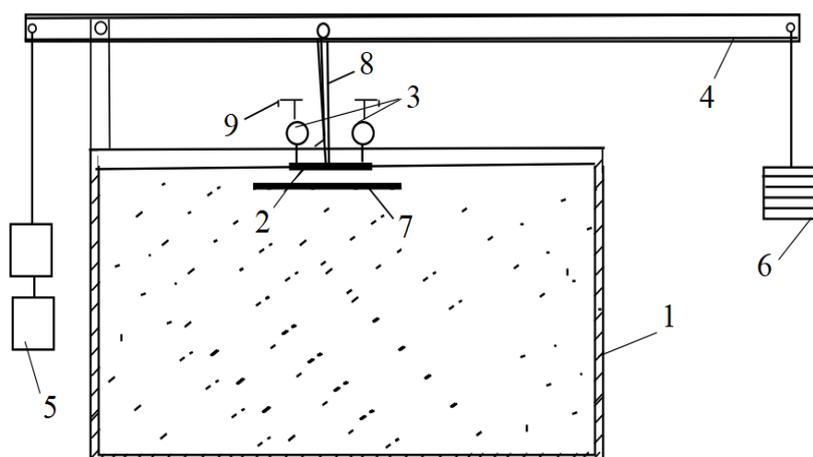


Рис. 1. Схема опытной установки:

1 – металлический лоток; 2 – штамп; 3 – индикаторы часового типа; 4 – рычаг; 5 – противовес;
6 – грузы; 7 – армирующий элемент; 8 – нож рычага; 9 – реперная рама

В экспериментах исследовали влияние плотности основания, глубины заложения ($h_s = 0,1D; 0,2D; 0,3D; 0,4D; 0,5D$) и размеров армирующего элемента на несущую способность и деформативность основания. Для оценки эффективности армирования сравнивали осадку модели, модуль деформации и несущую способность армированного и неармированного массивов.

Сжимаемость основания оценивали по расчетному модулю деформации, который на каждой ступени приложений нагрузок определяли по формуле Шлейхера:

$$E = \omega d(1 - \nu^2) \frac{\Delta p_i}{\Delta s_i},$$

где ω – коэффициент, зависящий от формы жесткого штампа (для круглого штампа $\omega = 0,78$); D – ширина или диаметр штампа; ν – коэффициент Пуассона грунта; Δp_i – приращение давления; Δs_i – приращение осадки.

Результаты экспериментов. В экспериментах оценивали влияние плотности засыпки и параметров армирования (размеров листа винипласта и его глубины расположения) на характер развития деформаций армированного и неармированного основания. Для этого использовали поверхностный штамп $D_{st} = 100$ мм при плотности $\rho_1 = 1,54$ г/см³ и $\rho_2 = 1,68$ г/см³.

Результаты опытов по определению эффективности армирования винипластом за счет снижения абсолютных значений осадок штампа для различных размеров армирующего элемента при плотности $\rho_1 = 1,54$ г/см³ приведены в табл. 2, 3, а при плотности $\rho_2 = 1,68$ г/см³ в табл. 4, 5. Эффективность армирования оценивали коэффициентом $k_s = S_{неарм} / S_{арм}$ (отношением осадок штампа на неармированном и армированном основании при равных значениях давления) и коэффициентом $k_E = E_s / E$, где E_s – модуль деформации армированного основания; E – модуль деформации неармированного основания при соответствующих значениях давления.

Таблица 2

Значения осадок штампа в зависимости от расстояния до армирующего элемента для листов размерами 100×150 мм и 150×150 мм при плотности $\rho = 1,54$ г/см³

Ступени давления P , кПа	Расстояние до армирующего элемента h_s										Без арм.
	Размеры арматуры 100×150					Размеры арматуры 150×150					
	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	
15	0,42	0,46	0,45	0,40	0,43	0,25	0,29	0,25	0,24	0,47	0,54
31	0,89	0,95	0,92	1,03	1,11	0,53	0,47	0,66	0,72	0,97	1,28
46	1,41	1,51	1,55	1,71	1,96	0,76	0,75	1,01	1,15	1,45	2,12
61	2,02	2,15	2,33	2,71	Раз.	1,14	1,06	1,48	1,69	2,04	3,04
76	2,74	2,90	3,22	Раз.		1,50	1,45	1,96	2,31	2,69	4,02
92	3,49	3,75	4,44			1,85	1,87	2,52	3,02	3,46	5,19
107	4,55	4,88	Раз.			2,22	2,34	3,07	3,70	4,35	6,85
122	5,63	6,05				2,70	2,83	3,71	4,51	Раз.	8,78
138	6,74	7,04				3,16	3,38	4,40	5,44		Раз.
153	7,94	8,46				3,68	3,94	5,15	6,48		
168	9,14	9,76				4,24	4,63	6,01	7,74		
183	>10	>10				4,83	5,40	6,95	Раз.		
199						5,54	6,27	8,15			
214						6,35	7,42	9,57			
229						7,30	8,40	Раз.			
224						8,35	9,60				
260						9,44	>10				
275						>10					

Примечание: раз. – потеря несущей способности

В табл. 6 и на рис. 2 приведены значения коэффициентов эффективности по значениям осадок и модуля деформаций для армированного и неармированного основания при давлении 60 кПа.

Таблица 3

Значения осадок штампа в зависимости от расстояния до армирующего элемента
для листов размерами 200×200 мм и 250×250 мм при плотности $\rho = 1,54 \text{ г/см}^3$

Ступени давления P , кПа	Расстояние до армирующего элемента h_s										Без арм.
	Размеры арматуры 200×200					Размеры арматуры 250×250					
	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	
15	0,16	0,28	0,22	0,19	0,35	0,15	0,24	0,27	0,22	0,28	0,54
31	0,31	0,43	0,43	0,38	0,70	0,29	0,39	0,47	0,47	0,63	1,28
46	0,47	0,58	0,63	0,59	1,07	0,44	0,55	0,67	0,76	1,03	2,12
61	0,63	0,74	0,83	0,82	1,44	0,59	0,71	0,87	1,09	1,48	3,04
76	0,77	0,90	1,03	1,08	1,82	0,75	0,87	1,08	1,47	1,98	4,02
92	0,95	1,07	1,23	1,35	2,21	0,90	1,03	1,28	1,90	2,52	5,19
107	1,12	1,25	1,43	1,66	2,61	1,06	1,20	1,49	2,36	3,11	6,85
122	1,29	1,42	1,63	1,98	3,02	1,23	1,38	1,71	2,87	3,74	8,78
138	1,47	1,61	1,83	2,33	3,43	1,39	1,55	1,92	Раз.	Раз.	Раз.
153	1,65	1,80	2,04	2,71	3,86	1,56	1,74	2,15			
168	1,83	1,99	2,27	3,10	4,30	1,73	1,92	2,38			
183	2,01	2,19	2,50	3,52	Раз.	1,90	2,11	2,62			
199	2,20	2,40	2,74	3,96		2,08	2,30	2,87			
214	2,39	2,61	2,99	Раз.		2,25	2,50	3,13			
229	2,59	2,82	3,27			2,44	2,70	3,39			
224	2,79	3,04	3,55			2,62	2,91	3,68			
260	2,99	3,27	3,86			2,81	3,12	3,97			
275	3,19	3,50	4,19			2,99	3,33	4,27			
290	3,40	3,73	4,54			3,19	3,55	4,58			
306	3,59	3,89	4,92			3,37	3,73	4,99			
331	3,97	4,27	5,60			3,71	4,07	5,49			
382	4,71	5,39	Раз			4,39	5,03	6,06			
433	5,48	6,01				5,10	5,62	Раз.			
484	6,30	7,19				5,84	6,65				
535	7,21	8,26				6,65	7,61				
611	8,54	9,85				7,86	9,01				
688	9,93	>10				9,06	>10				
764	>10					>10					

Таблица 4

Значения осадок штампа в зависимости от расстояния до армирующего элемента
для листов размерами 100×150 мм и 150×150 мм при плотности $\rho = 1,68 \text{ г/см}^3$

Ступени давления P , кПа	Расстояние до армирующего элемента h_s										Без арм.
	Размеры арматуры 100×150					Размеры арматуры 150×150					
	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	
15	0,29	0,29	0,25	0,27	0,32	0,15	0,16	0,25	0,30	0,30	0,38
31	0,61	0,63	0,63	0,66	0,74	0,35	0,41	0,53	0,58	0,64	0,82
46	0,89	0,92	0,98	1,09	1,28	0,54	0,65	0,79	0,85	0,93	1,30
61	1,22	1,27	1,46	1,58	1,93	0,76	0,97	1,12	1,19	1,24	1,86
76	1,64	1,71	1,93	2,23	2,67	1,01	1,30	1,46	1,56	1,59	2,47
92	2,03	2,14	2,52	2,95	3,86	1,27	1,61	1,82	1,91	1,98	3,15
107	2,54	2,69	3,20	3,75	Раз.	1,56	1,96	2,17	2,29	2,39	3,98
122	3,12	3,37	3,97	4,65		1,86	2,33	2,64	2,77	2,88	4,84
138	3,78	4,11	4,95	Раз.		2,17	2,73	3,14	3,26	3,39	5,89
153	4,56	5,00	6,27			2,52	3,15	3,62	3,85	4,14	7,19
168	5,48	6,10	Раз.			2,88	3,60	4,20	4,45	4,74	8,75
183	6,46	7,15				3,29	4,09	4,92	5,24	5,73	Раз.
199	7,54	8,22				3,74	4,67	5,73	6,17	6,84	
214	8,69	9,43				4,24	5,35	6,64	7,52	8,44	
229	9,86	>10				4,80	6,04	7,64	9,16	Раз.	

Ступени давления P , кПа	Расстояние до армирующего элемента h_s										Без арм.
	Размеры арматуры 100×150					Размеры арматуры 150×150					
	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	
260	>10					6,12	7,77	Раз.	Раз.		
290						7,76	10,00				
331						>10	>10				

Таблица 5

Значения осадки штампа в зависимости от расстояния до армирующего элемента для листов размерами 200×200 мм и 250×250 мм при плотности $\rho = 1,68 \text{ г/см}^3$

Ступени давления P , кПа	Расстояние до армирующего элемента h_s										Без арм.
	Размеры арматуры 200×200					Размеры арматуры 250×250					
	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	
15	0,03	0,23	0,11	0,11	0,14	0,14	0,05	0,14	0,16	0,19	0,38
31	0,19	0,38	0,27	0,21	0,29	0,29	0,24	0,34	0,31	0,36	0,82
46	0,36	0,54	0,43	0,33	0,46	0,43	0,43	0,54	0,48	0,57	1,30
61	0,52	0,70	0,59	0,47	0,65	0,58	0,62	0,73	0,68	0,80	1,86
76	0,68	0,86	0,75	0,63	0,86	0,73	0,81	0,93	0,91	1,07	2,47
92	0,82	1,02	0,91	0,81	1,09	0,87	1,00	1,14	1,16	1,36	3,15
107	1,01	1,18	1,08	1,01	1,34	1,02	1,19	1,34	1,45	1,69	3,98
122	1,18	1,35	1,25	1,22	1,60	1,17	1,38	1,55	1,76	2,04	4,84
138	1,35	1,52	1,43	1,46	1,88	1,32	1,57	1,77	2,10	2,43	5,89
153	1,51	1,69	1,62	1,72	2,19	1,47	1,76	1,99	2,46	2,84	7,19
168	1,68	1,86	1,81	1,99	2,51	1,62	1,94	2,23	2,86	3,29	8,75
183	1,85	2,04	2,02	2,29	2,85	1,77	2,13	2,47	3,28	Раз.	Раз.
199	2,02	2,22	2,23	2,60	3,20	1,92	2,32	2,72	3,73		
214	2,19	2,40	2,46	2,93	3,58	2,07	2,51	2,98	Раз.		
229	2,36	2,58	2,70	3,28	Раз.	2,22	2,69	3,25			
244	2,53	2,76	2,95	3,65		2,37	2,88	3,53			
260	2,70	2,95	3,22	4,04		2,52	3,07	3,83			
275	2,87	3,14	3,50	Раз.		2,67	3,25	4,14			
290	3,04	3,32	3,80			2,82	3,44	4,47			
306	3,13	3,51	3,99			3,05	3,80	4,81			
331	3,51	3,85	4,71			3,23	3,93	5,43			
382	4,09	4,53	Раз.			3,74	4,55	6,81			
433	4,68	5,03				4,26	5,16	Раз.			
484	5,28	5,91				4,78	5,76				
535	5,99	6,77				5,27	6,34				
611	6,86	7,82				6,07	7,17				
688	7,74	9,02				6,89	8,10				
764	8,65	>10				7,70	9,12				
840	9,61					8,59	9,91				
917	>10					9,38	>10				
993						>10					

По результатам этой серии экспериментов заметно, что наиболее эффективно расположение арматуры в зоне развития максимальных касательных напряжений, на расстоянии $0,1 \dots 0,2D$ от подошвы штампа. С увеличением плотности основания и размеров армирующего элемента увеличивается контакт грунта с арматурой, что приводит к повышению значений модуля деформации и снижению значений осадок.

Далее проводилось сравнение экспериментальных данных со значениями, полученными в ПК «Plaxis-3D». Исходные данные для проектирования приведены в табл. 7. Сравнительный результат данных, полученных в ходе эксперимента, и значений, полученных в ПК «Plaxis-3D», представлен на рис. 3 и 4.

Таблица 6

Значения коэффициента эффективности армирования $k_s = S_{неарм} / S_{арм}$
в зависимости от плотности грунта, расстояния до армирующего элемента и размеров арматуры
при давлении $P = 60$ кПа

Размеры арматуры	$k_s = S_{неарм} / S_{арм}$ при плотности грунта $\rho = 1,54$ г/см ³					$k_s = S_{неарм} / S_{арм}$ при плотности грунта $\rho = 1,68$ г/см ³				
	Расстояние до арматуры h_s					Расстояние до арматуры h_s				
	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D	0,1D	0,2D	0,3D	0,4D	0,5D
100×150	1,50	1,41	1,30	1,12	-	1,52	1,46	1,27	1,18	0,96
150×150	2,67	2,87	2,05	1,80	1,49	2,45	1,92	1,66	1,56	1,50
200×200	4,83	4,11	3,66	3,71	2,11	3,58	2,66	3,15	3,96	2,86
250×250	5,15	4,28	3,49	2,79	2,05	3,21	3,00	2,55	2,74	2,33

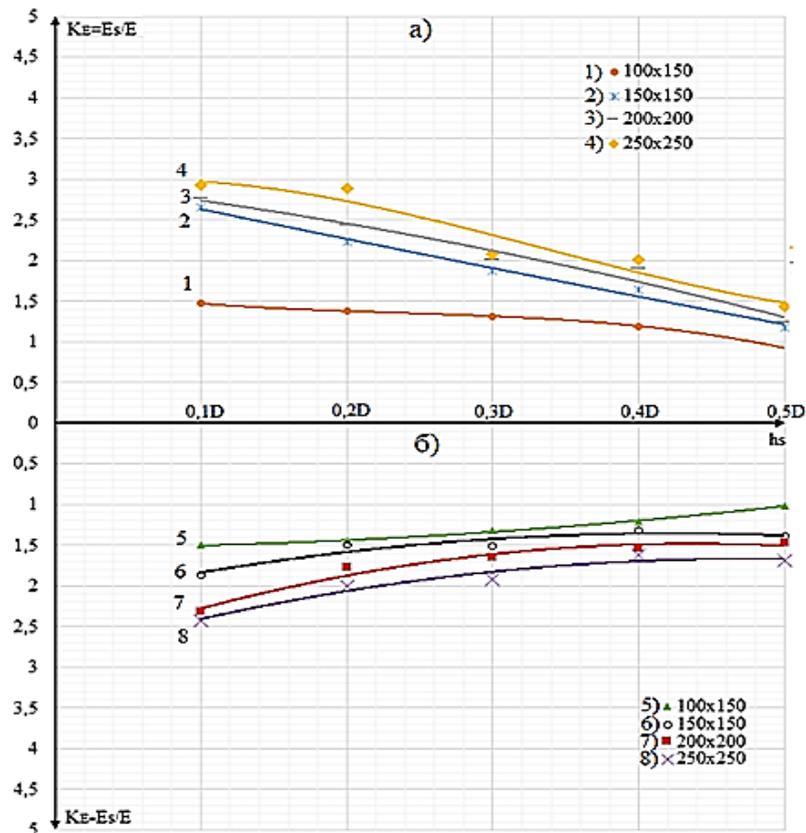


Рис. 2. Влияние глубины заложения и размеров армирующего элемента
на модуль деформации основания при плотности засыпки: $\rho_1 = 1,54$ г/см³ (а) и $\rho_2 = 1,68$ г/см³ (б)

Таблица 7

Данные, используемые для моделирования в программе «Plaxis-3D»

Параметры	Песок	Штамп	Армирующий элемент
Материальная модель	Мора-Кулона	Пластина	Пластина
Плотность ρ , г/см ³	1,54	7,85	1,38
Толщина d , м	–	0,01	0,006
Коэффициент Пуассона ν	0,3	0,3	0,38
Коэффициент пористости e	0,82	–	–
Модуль деформации / модуль упругости E , кПа	1340	$206 \cdot 10^6$	$2,6 \cdot 10^6$
Модуль сдвига G , кПа	515,4	$79,23 \cdot 10^6$	$948,9 \cdot 10^3$
Одометрический модуль E_{oed} , кПа	1804	–	–
Угол внутреннего трения ϕ , °	26,5°	–	–
Удельное сцепление c , кПа	3,3	–	–

На рис. 3 и 4 приведены зависимости «давление – осадка» при разном расположении армирующего элемента для плотности грунта основания $\rho_1 = 1,54 \text{ г/см}^3$ и размеров листа ви-нипласта $150 \times 150 \text{ мм}$.

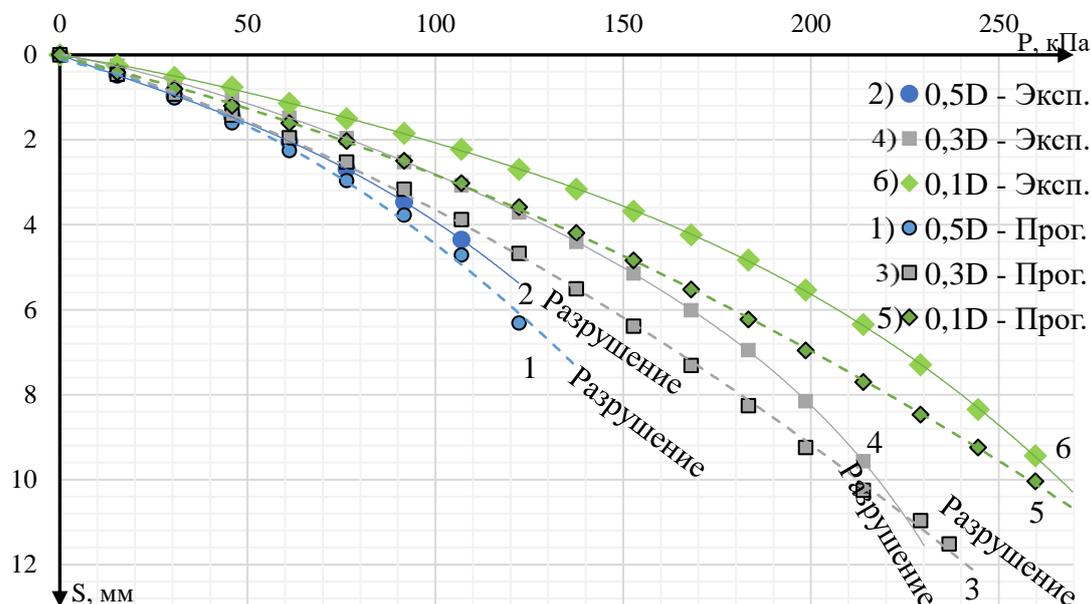


Рис. 3. Сравнение результатов, полученных в ходе экспериментов (Эксп.), и значений, полученных в ПК «Plaxis-3D» (Прог.), для глубины расположения армирующего элемента $h_s = 0,1D, 0,3D, 0,5D$.

Уравнения аппроксимации: 1: $y = 0,0002x^2 + 0,0192x + 0,1101$;
 2: $y = -4E-09x^4 + 2E-06x^3 - 9E-05x^2 + 0,0324x - 0,0018$; 3: $y = 9E-05x^2 + 0,0278x - 0,046$;
 4: $y = 2E-13x^6 - 8E-11x^5 + 2E-08x^4 - 2E-06x^3 + 0,0002x^2 + 0,0151x - 0,0052$;
 5: $y = 7E-05x^2 + 0,0209x + 0,0486$; 6: $y = -4E-12x^5 + 4E-09x^4 - 9E-07x^3 + 0,0001x^2 + 0,0126x + 0,0129$

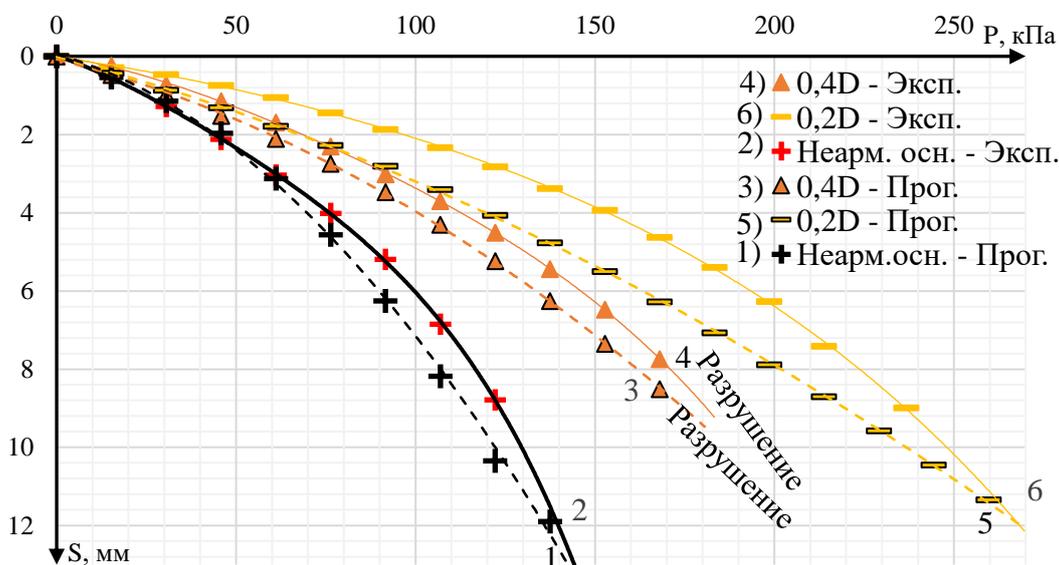


Рис. 4. Сравнение результатов, полученных в ходе экспериментов (Эксп.), и значений, полученных в ПК «Plaxis-3D» (Прог.), для глубины расположения армирующего элемента $h_s = 0,2D, 0,4D$ и неармированного основания.

Уравнения аппроксимации: 1: $y = 0,0005x^2 + 0,0182x + 0,0655$;
 2: $y = 3E-08x^4 - 6E-06x^3 + 0,0006x^2 + 0,0299x - 0,0086$; 3: $y = 0,0002x^2 + 0,0226x + 0,0803$;
 4: $y = 7E-09x^4 - 2E-06x^3 + 0,0003x^2 + 0,0137x - 0,0072$; 5: $y = 8E-05x^2 + 0,0243x + 0,0157$;
 6: $y = 1E-09x^4 - 2E-07x^3 + 9E-05x^2 + 0,0123x + 0,0229$

Изменение характера распределений нормальных, касательных напряжений, вертикальных перемещений за счет армирования по результатам численных исследований при размерах армирующего элемента 150×150 мм, плотности основания $\rho_1 = 1,54$ г/см³ и давлении $P = 122,23$ кПа приведены на рис. 5–10.

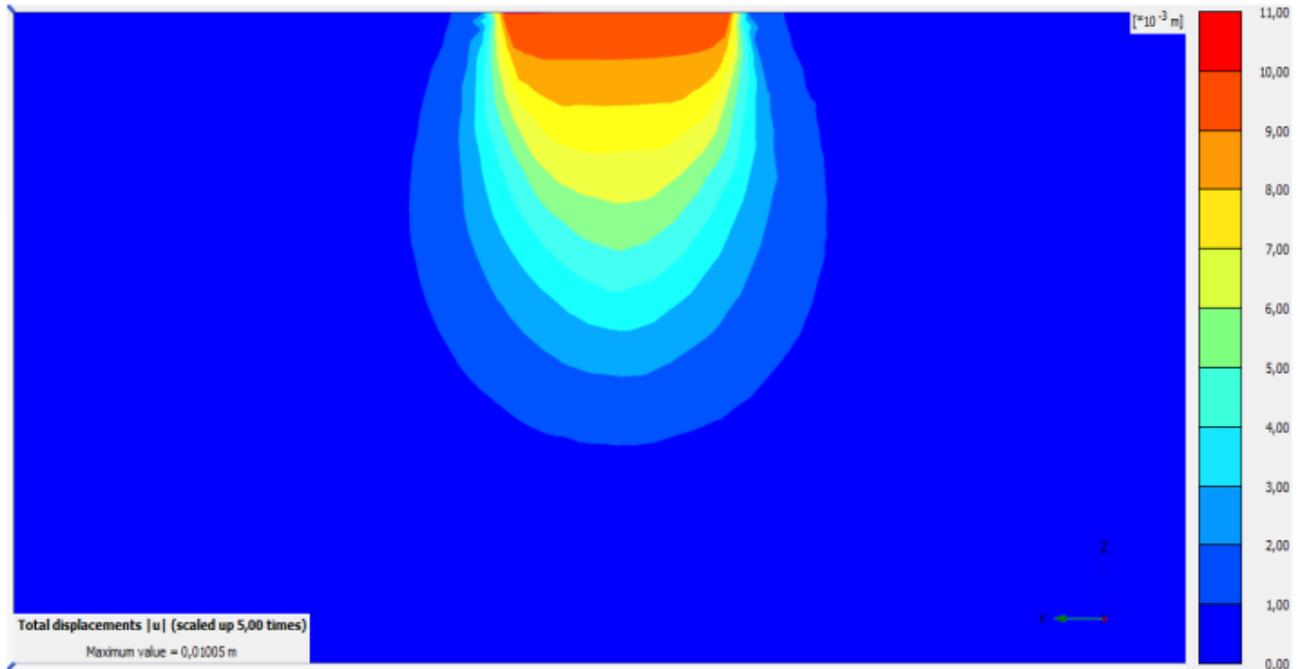


Рис. 5. Изолинии распределения вертикальных перемещений штампа на неармированном основании

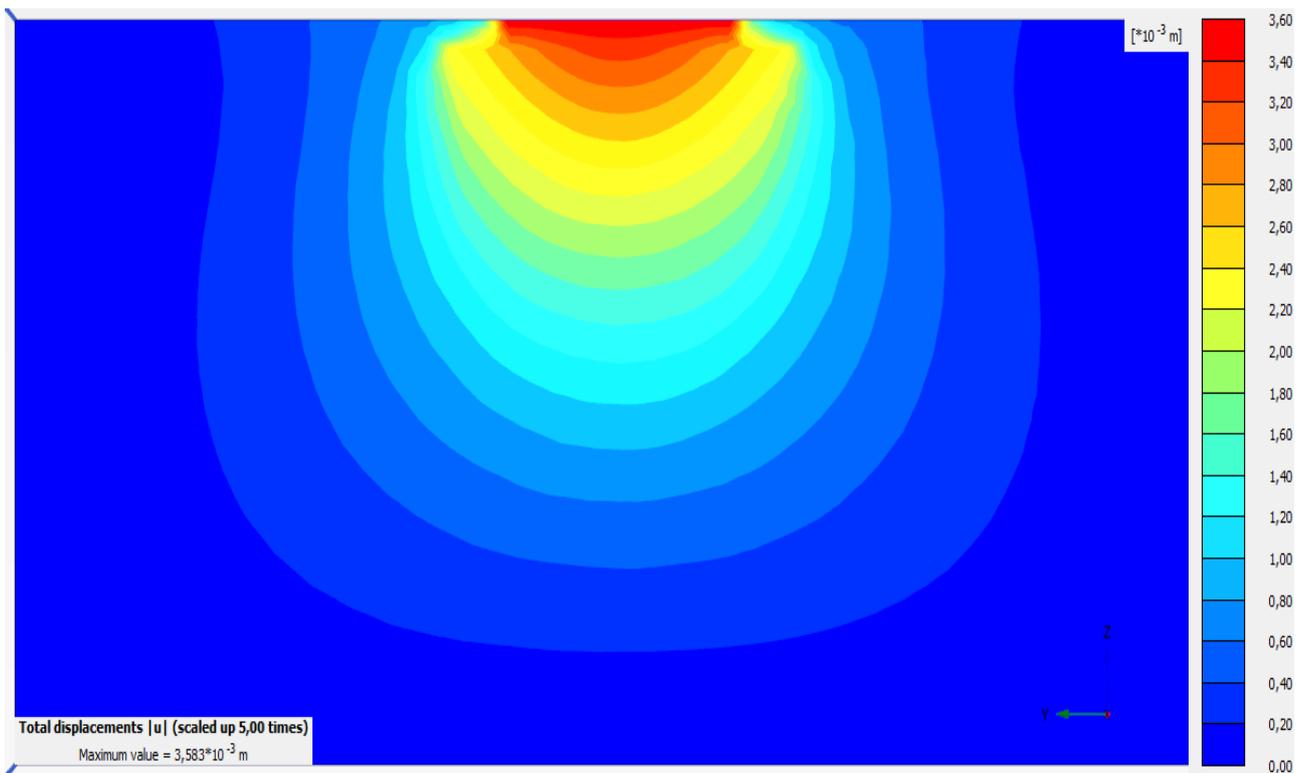


Рис. 6. Изолинии распределения вертикальных перемещений штампа при расстоянии от подошвы штампа до армирующего элемента $h = 0,1D$

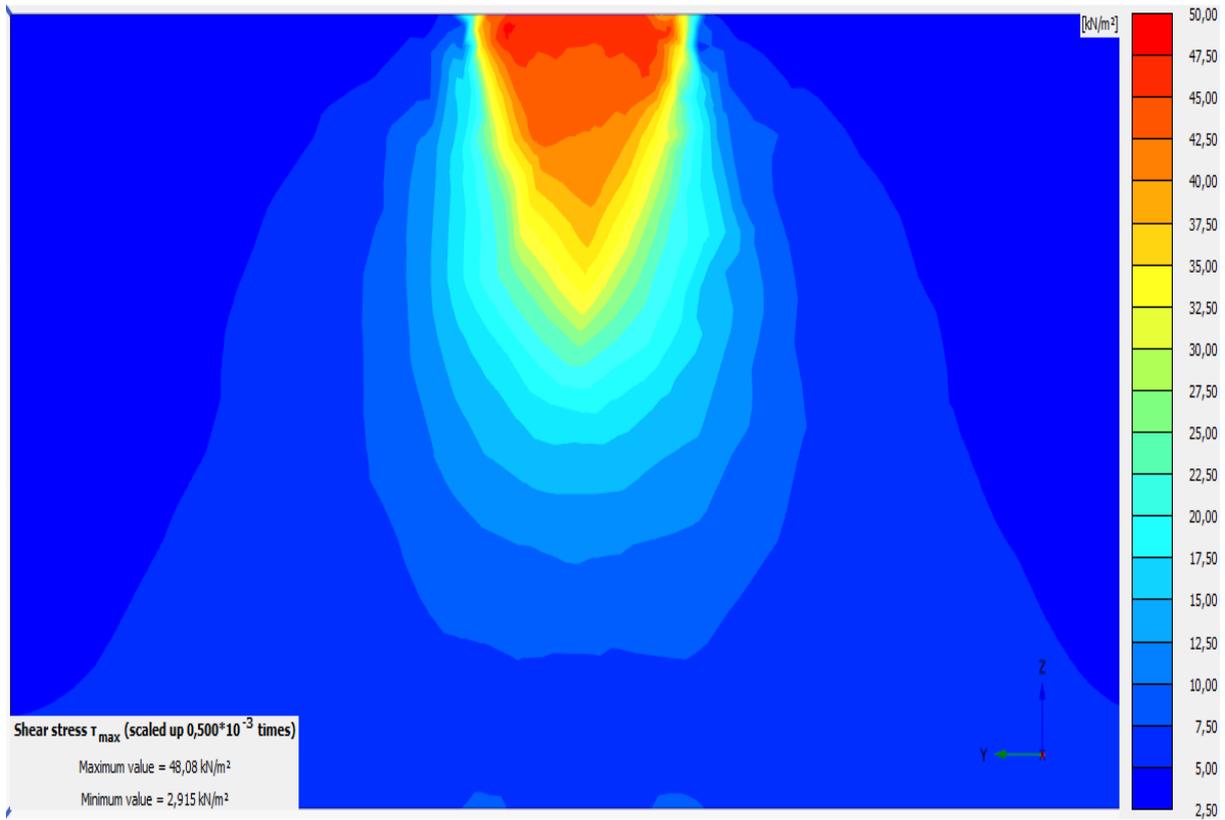


Рис. 7. Изолинии распределения касательных напряжений в основании штампа на неармированном основании

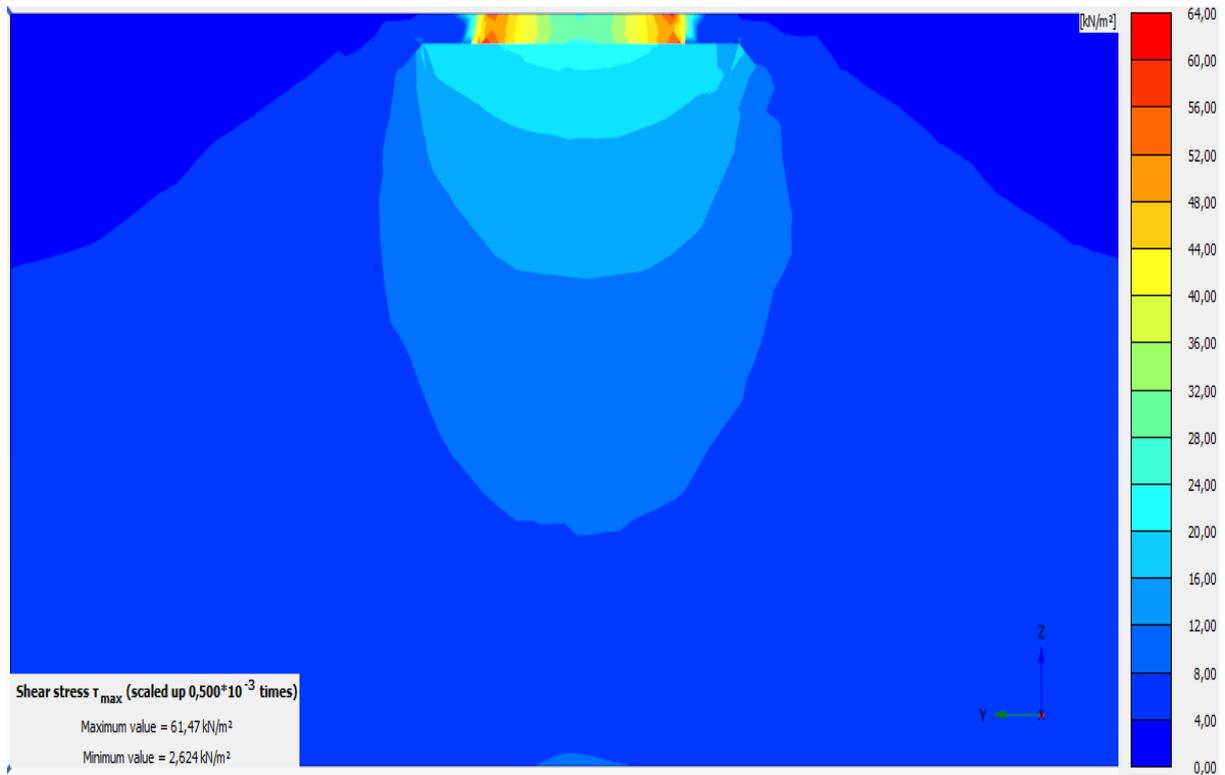


Рис. 8. Изолинии распределения касательных напряжений в основании штампа при расстоянии от подошвы штампа до армирующего элемента $h = 0,1D$

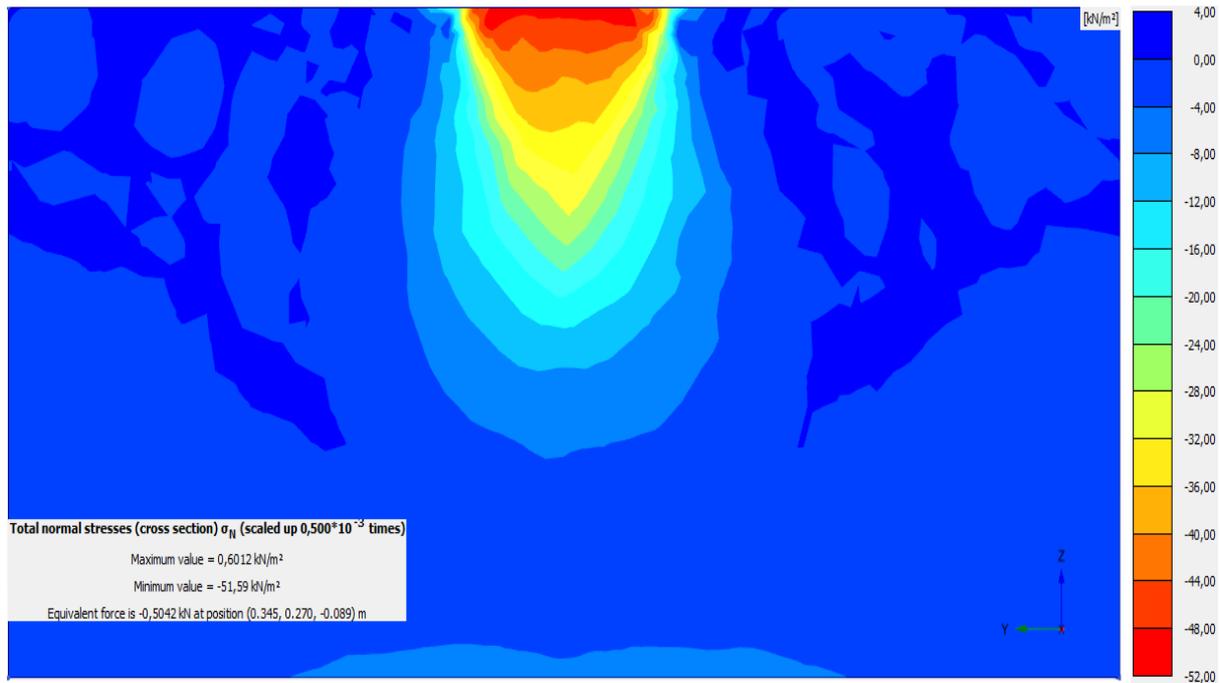


Рис. 9. Изолинии распределения нормальных напряжений в основании штампа на неармированном основании

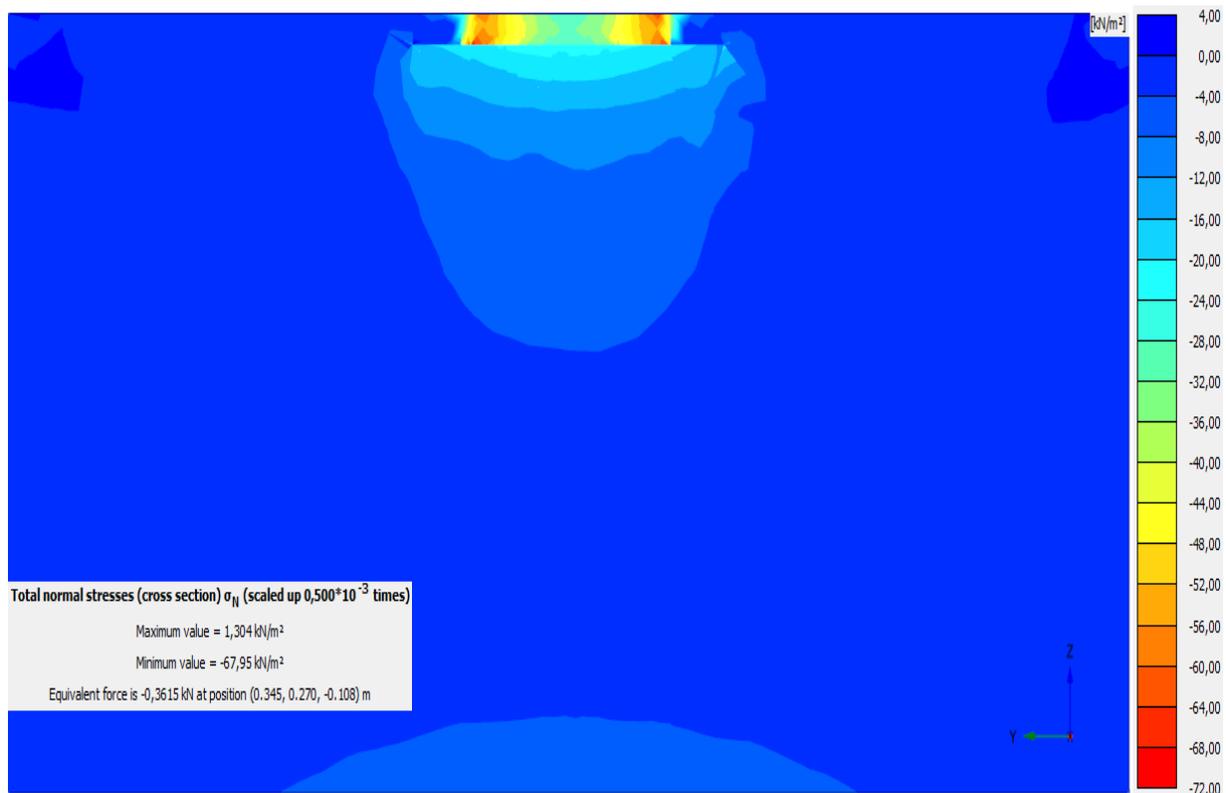


Рис. 10. Изолинии распределения нормальных напряжений в основании штампа при расстоянии от подошвы штампа до армирующего элемента $h = 0,1D$

Выводы

1. Изменение плотности для неармированного основания с $\rho_1 = 1,54 \text{ г/см}^3$ до $\rho_2 = 1,68 \text{ г/см}^3$ привело к увеличению разрушающей нагрузки в 1,3 раза. Для армированных грунтовых

массивов предельная нагрузка при увеличении плотности выросла в 1,3...1,75 раза в зависимости от расстояния до армирующего элемента, а значения модуля деформации увеличились в 1,2...1,5 раза. По сравнению с неармированным основанием значения модуля деформации возросли в 1,20...3,6 раз.

2. Увеличение размеров армоэлементов способствовало увеличению общей устойчивости и прочности армированного массива. При плотности основания $\rho_1 = 1,54 \text{ г/см}^3$ ($\rho_2 = 1,68 \text{ г/см}^3$) при размерах армирующего элемента $100 \times 150 \text{ мм}$ коэффициент эффективности по значениям модуля деформации $k_E = 1,13\text{--}1,49$ (1,1–1,55). При размерах $150 \times 150 \text{ мм}$ $k_E = 1,15\text{--}2,95$ (1,27–2,7). При размерах $200 \times 200 \text{ мм}$ $k_E = 1,19\text{--}3,43$ (1,21–2,34) и при размерах армирующего элемента $250 \times 250 \text{ мм}$ $k_E = 1,29\text{--}3,61$ (1,08–2,42) в зависимости от глубины расположения.

3. Расположение непластифицированного поливинилхлорида наиболее эффективно в зоне действия максимальных значений касательных напряжений: на глубине $0,1\text{--}0,2D$ от подошвы штампа. Эффективность армирования возрастает по мере увеличения нагрузок на модель фундамента. Так, снижение значений деформаций во всем диапазоне изменений размеров арматуры для армированного основания по сравнению с естественным основанием составило: при расстоянии до арматуры $0,5D$ – до 40 %; $0,4D$ – до 60 %; $0,3D$ – до 65 %; $0,2D$ – до 70 %; $0,1D$ – до 75 %.

4. Установлен путь потери прочности и несущей способности основания – выпор грунтового массива над арматурой или превышение предельных значений деформаций. Для заглупления арматуры $(0,1 \dots 0,2)D$ выпор грунта не фиксировался вследствие превышения величины предельно допустимой осадки. Для глубины заложения арматуры $(0,5 \dots 0,3)D$ наблюдался резкий выпор грунтового массива над арматурой в связи с тем, что под армирующим элементом создавался уплотненный слой грунтового массива большей жесткости.

5. Результаты сравнения полученных экспериментальных зависимостей с параметрами, полученными в «Plaxis-3D», позволяют считать работу успешной.

Библиографический список

1. Хрянина О. В. Совместная работа гибкого фундамента с армированным основанием: [монография] / О. В. Хрянина. – Пенза: Изд-во ПГУАС, 2016. – 203 с.
2. Мирсаяпов, И. Т. Экспериментально-теоретические исследования работы армированных грунтовых массивов / И. Т. Мирсаяпов, А. О. Попов // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2008. – № 2 (10). – С. 75–80.
3. Татьянаников, Д. А. Анализ работы армированного песчаного основания на основе штамповых модельных испытаний / Д. А. Татьянаников, В. И. Клевеко, А. Б. Пономарев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Урбанистика. – 2012. – № 4 (8). – С. 92–102.
4. Пономарев, А. Б. Анализ работы песчаных подушек, армированных горизонтальными геосинтетическими элементами / А. Б. Пономарев, Д. А. Татьянаников // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2019. – № 6. – С. 2–7.
5. Мирсаяпов, И. Т. Экспериментальные исследования моделей, армированных горизонтальными сетками оснований при циклическом нагружении / И. Т. Мирсаяпов, И. И. Аллюшев // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2016. – № 3 (37). – С. 173–178.
6. Антонов, В. М. Экспериментальные исследования армированных оснований: монография / В. М. Антонов; В. М. Антонов. – Тамбов: Изд-во ГОУ ВПО ТГТУ, 2011. – 79 с.
7. Антонов, В. М. Влияние армирования на несущую способность и деформативность оснований, подверженных циклическим нагрузкам / В. М. Антонов, В. В. Леденев, И. А. Аль-Накди // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 2 (33). – С. 145–157.

References

1. Khryanina O. V. Joint operation of a flexible foundation with a reinforced base: monograph. Penza: PSUAS Publishing House, 2016. 203 p.
2. Mirsayapov I. T., Popov A. O. Experimental and theoretical studies of the operation of reinforced soil massifs. Bulletin of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering. No. 2(10). 2008. Pp. 75–80.
3. Tatyannikov D. A., Kleveko V. I., Ponomarev A. B. Analysis of the operation of a reinforced sand base based on stamp model tests. Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Urban Studies. No. 4(8). 2012. Pp. 92–102.
4. Ponomarev A. B., Tatyannikov D. A. Analysis of the performance of sand cushions reinforced with horizontal geosynthetic elements. Foundations, Bases and Soil Mechanics. No. 6. 2019. Pp. 2–7.
5. Mirsayapov I. T., Alyushev I. I. Experimental studies of models of foundations reinforced with horizontal grids under cyclic loading. Bulletin of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering. No. 3(37). 2016. Pp. 173–178.
6. Antonov V. M. Experimental studies of reinforced foundations: monograph. Tambov: Publishing house of the State Educational Institution of Higher Professional Education TSTU, 2011. 79 p.
7. Antonov V. M., Ledenev V. V., Al-Nakdi I. A. Influence of reinforcement on the bearing capacity and deformability of foundations subject to cyclic loads. Structural Mechanics and Structures. No. 2(33). 2022. Pp. 145–157.

**EXPERIMENTAL STUDIES OF THE EFFECT
OF HORIZONTAL REINFORCEMENT WITH VINYL SHEET
ON THE BEARING CAPACITY AND DEFORMABILITY OF SANDY FOUNDATION**

S. S. Kopylov ¹, V. M. Antonov ²

Tambov State Technical University ^{1,2}
Tambov, Russia

¹ Postgraduate Student of the Department “Constructions of Buildings and Structures”, tel.: +7(953) 722-78-22, e-mail: sergey.kopylov.2000@list.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department “Constructions of Buildings and Structures”, tel.: +7(920) 230-86-99, e-mail: antonov280562@mail.ru

Problem statement. Conducting experimental and numerical studies has reinforced foundations with subsequent multivariate analysis and comparison of the bearing capacity of the reinforced and unenforced foundation depending on the reinforcement parameters and backfill density.

Results. The article presents the results of testing surface rigid models of foundations on a sand base reinforced with horizontally located sheets of unplasticized polyvinyl chloride. A multivariate analysis of the dependence of the bearing capacity of the foundation on the depth of the reinforcement, its size, and the density of the backfill soil was carried out. In the Plaxis-3D software package, a finite element elastic-plastic model of the soil base with a stamp on the surface was developed and a comparison of the experimental data with the values obtained in the calculation complex was performed.

Optimal options for the location of the reinforcing element were found. The dependence of the bearing capacity and the modulus of the total deformation of the base on the size of the reinforcement and the density of the soil matrix was revealed. The nature of the loss of strength of the reinforced base was determined depending on the distance to the reinforcement. The effectiveness of reinforcing the base with a composite material was confirmed.

Keywords: reinforcing element, stamp, total deformation modulus, vertical displacement.

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ, КОНТАКТИРУЮЩИХ С ФУНДАМЕНТНЫМИ КОНСТРУКЦИЯМИ

Н. Н. Некрасова¹, Г. Е. Габриелян²

Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры прикладной математики и механики, тел.: +7(473)271-53-62,
e-mail: Nekrasova-N@yandex.ru

² Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30,
e-mail: grayr2010@rambler.ru

В практике строительства железобетонные плиты являются широко распространенными конструктивными элементами. Когда плиты служат фундаментом здания или сооружения, их работа существенным образом влияет на напряженно-деформированное состояние всей конструкции. При этом расчетные усилия и их распределение в значительной степени зависят от используемой расчетной модели грунтового основания. В работе обосновывается необходимость рассмотрения неоднородных оснований в виде упругого полупространства с переменными по глубине деформационными характеристиками. Проведено сравнение результатов применения основных моделей грунтовых оснований, представленных в виде неоднородных упругих полупространств, а также соответствующих им ядер.

Ключевые слова: упругое основание, слой постоянной и переменной толщины, слоистое полупространство, фундаментная плита.

В последнее время проблема выбора расчетной модели основания приобретает еще большую остроту в связи с тем, что расширяется строительство в сложных инженерно-геологических условиях (неоднородных, вечномёрзлых, просадочных, усыхающих, илистых, насыпных грунтах). Модели грунтовых оснований, используемые при расчете сооружений, должны выбираться с учетом реальных деформационных и прочностных свойств грунтов и точности их количественной оценки. В настоящее время наибольшее распространение в практике строительного проектирования имеют модели переменного коэффициента постели, упругого однородного полупространства, а также упругого слоя конечной толщины.

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности ортотропной плиты, находящейся под действием поперечной нагрузки и опирающейся на упругое основание, имеет вид [1]:

$$D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = q(x, y) - p(x, y), \quad (1)$$

где $W(x, y)$ – вертикальное перемещение срединной плоскости плиты; $q(x, y)$ – интенсивность внешней нагрузки; $p(x, y)$ – контактное давление; D_1, D_2 – цилиндрические жесткости изгиба для главных направлений упругости; $D_3 = D_1 \cdot \nu_2 + 2D_k = D_2 \cdot \nu_1 + 2D_k$; $D_k = \frac{Gh^3}{12}$ – жесткость кручения; E_1, E_2, ν_1, ν_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона материала плиты соответственно; G – модуль сдвига, h – толщина плиты.

Как и в традиционных подходах [1, 2], трение в области контакта не учитываем и считаем, что плита полностью примыкает к основанию, т. е. вертикальные перемещения плиты и

поверхности основания равны между собой. Для пространственной контактной модели равенство вертикальных перемещений плиты и поверхности упругого основания приводит [2] к интегральному уравнению для определения контактного давления:

$$W(x, y) = \bar{W}(x, y) + A + B \cdot x + C \cdot y = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0} \iint_S \omega(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2)$$

где A, B, C – параметры перемещения плиты как жесткого целого; E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона основания; S – область контакта. Функция $\omega(x, y, \xi, \eta)$ выбирается в зависимости от используемой модели упругого основания.

Первой по времени, не потерявшей своей значимости и сейчас, является модель основания, характеризующаяся одним коэффициентом постели [1]:

$$p(x, y) = k \cdot W(x, y). \quad (3)$$

Идея прямой зависимости между деформацией грунта и действующей на него нагрузкой, выдвинутая в 1801 году в России академиком Н. М. Фуссом [3], оказалась весьма плодотворной. В 1867 году она была использована Винклером при расчете железнодорожных шпал, позднее Винклер и Циммерман дали математическую формулировку задачи о расчете балки на упругом основании. Модель Винклера удобна для расчетов, но не прогнозирует реальное распределение напряжений и деформаций в грунте и может дать представление лишь о изгибных характеристиках плиты. Тем не менее эта модель еще входит в нормы проектирования фундаментов.

Самое широкое распространение получила теория упругого полупространства [1, 4], отвечающая гипотезе общих упругих деформаций и основанная на анализе контактного взаимодействия плит на поверхности упругой, однородной, изотропной, непрерывной полубесконечной среды. При использовании модели упругого полупространства стало возможным предсказывать осадки поверхности грунта за пределами площадки опирания плиты. В расчетные формулы стали входить величины модуля сжимаемости E_0 и коэффициент Пуассона ν_0 грунта основания, которые в отличие от коэффициента постели являются физическими характеристиками грунта и не зависят от способа их определения.

Функция влияния упругого полупространства, соответствующая решению Буссинеска, имеет вид [1]:

$$\omega(x, y, \xi, \eta) = \left(\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Введение в расчет конструкций на упругом основании модели полупространства значительно расширило возможности теории. В то же время решение конкретных задач по новой теории стало значительно труднее, т. к. дифференциальное уравнение для прогибов превратилось в интегродифференциальное. Точное решение такого уравнения удалось получить лишь для некоторых частных случаев (осесимметричное деформирование круглой плиты). Но эти недостатки не исчерпались математическими трудностями. Представление о том, что грунт под сооружением деформируется на бесконечную глубину, привело к завышению теоретической деформативности основания. Обойти эту трудность позволила модель основания в виде упругого слоя постоянной толщины [5].

М. М. Филоненко-Бородич [5] предложил модель в виде модели Фусса-Винклера, перекрытой гибкой мембраной. В. З. Власов [6] выдвинул теорию, в которой плиту на упругом основании предлагается считать лежащей на слое с переменными упругими параметрами. П. Л. Пастернак [7] предложил модель с двумя упругими параметрами, характеризующими

сжатие и сдвиг основания. Комбинированная модель Г. К. Клейна [8] и И. И. Черкасова [3] учитывает отдельно восстанавливающуюся и остаточную деформацию, а также нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями.

Несмотря на внешнее различие подходов, все исследователи пришли к выражению вида:

$$q(x, y) = K_1(x, y)W(x, y) - K_2(x, y)\Delta W(x, y), \quad (5)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; $K_1(x, y)$ – первый коэффициент постели; $K_2(x, y)$ – второй коэффициент постели.

Последнее равенство в правой части (5) выражает сопротивление поверхности основания сдвигу в вертикальном направлении. Если в формуле (5) положить $K_2(x, y) = 0$, мы снова возвращаемся к гипотезе Винклера (3). Отметим, что результаты расчета плит, свободно лежащих на грунтовом основании, с двумя коэффициентами постели и по модели Винклера имеют принципиальные отличия. Так, например, равномерно нагруженная плита на винклеровском основании, в силу отсутствия распределительных свойств основания, вообще не изгибается, а только оседает, что противоречит действительности.

По сравнению с моделями упругого полупространства [1] или слоя конечной толщины [5], использование модели основания с двумя коэффициентами постели существенно упрощает алгоритм программы для ЭВМ и, что особенно важно, сокращает объем машинного времени, оставляя практически неизменной точность решения. При этом практические расчеты показывают хорошее соответствие не только прогибов и реактивных давлений, но и изгибающих моментов, действующих по сечениям фундаментных плит [9, 10].

Если представить основание в виде упругого слоя конечной толщины H , лежащего, в свою очередь, на абсолютно жестком основании, то, как указано в работах [5, 8, 11], можно установить некоторые приближенные связи между коэффициентами постели и механическими характеристиками упругого слоя. Коэффициенты постели $K_1 = K_1(x, y)$, $K_2 = K_2(x, y)$ определяются по формулам:

$$K_1 = \frac{E^*}{H}; \quad K_2 = \frac{G_0}{H} \int_0^H \left[\int_0^z \frac{f(pH - pz)}{f(pH)} dz \right] dz, \quad (6)$$

где $E^* = \frac{E_0(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}$; $G_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$; E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала основания; $f(pH - pz)$ – убывающая функция аргумента $p(H - z)$, обращающаяся в нуль при $z = H$. Здесь p – параметр, определяющий степень затухания перемещений плиты.

Если в качестве первого приближения положить в (6) $f(pH - pz) = H - z$, то

$$K_2 = \frac{G_0}{H} \int_0^H \left[\int_0^z \frac{H-z}{H} dz \right] dz = \frac{G_0 H}{3},$$

где H – глубина упругого слоя, которая в общем случае является функцией положения.

Недостатком модели с двумя коэффициентами постели является то, что расчет по ней дает, кроме распределений по всей подошве плиты реакции основания, дополнительную сосредоточенную погонную реакцию, распределенную по внешнему контуру плиты. Это при-

водит к завышению расчетных усилий в плите вблизи ее краев. А если учесть недостаточную надежность методики определения величины второго коэффициента постели, то следует признать, что вопрос об использовании в расчетах модели с двумя коэффициентами постели представляет интерес лишь с теоретической точки зрения.

Кроме вышеупомянутых моделей известны: модель упругого слоя переменной толщины [12, 13], слоистое упругое полупространство [14], линейно-упругое двухфазное полупространство с ползучестью, полупространство с модулем деформации, меняющимся по глубине [15], и другие модели упругих оснований.

В то же время хорошо известно [1, 15], что до сих пор не найдена определяющая контактную модель основания функция влияния $\omega(x, y, \xi, \eta)$, которая позволила бы описывать поведение различных грунтов в широком диапазоне условий деформирования. Приведенные в многочисленных литературных источниках данные по результатам сравнения различных функций влияния не позволяют определить, какая из имеющихся функций влияния является наилучшей по удовлетворительному описанию перемещений и напряжений для конструкций, расположенных на упругих основаниях. Хотя каждая функция влияния $\omega(x, y, \xi, \eta)$ имеет свои физические предпосылки, в настоящее время невозможно отдать предпочтение какой-либо из этих функций. Поэтому выбор функции влияния $\omega(x, y, \xi, \eta)$ не выходит за пределы личной интуиции исследователя на основе разумного компромисса между сложностью математических представлений и результатами прогнозирования работы оснований зданий и сооружений. Еще раз отметим, что использование той или иной функции влияния $\omega(x, y, \xi, \eta)$ существенно влияет на решение контактной задачи или, что то же, на степень неравномерности распределения контактных давлений по подошве фундамента.

Рассмотрим более подробно формулировки пространственных контактных моделей для грунтовых оснований, обладающих неоднородными по глубине механическими свойствами.

Слой постоянной толщины. Модель слоя конечной толщины H является одной из простых моделей неоднородного упругого полупространства. Предполагается, что слой однороден и закреплен на нижней границе. Эту модель можно условно интерпретировать как упругое неоднородное полупространство, модуль упругости которого постоянен до глубины H ,

а далее скачкообразно возрастает до бесконечности.

В соответствии с [5] функция влияния $\omega(x, y, \xi, \eta)$, определяющая вертикальные перемещения точек поверхности линейно-деформируемого слоя конечной толщины, лежащего без трения на абсолютно жестком основании, вызванные действием единичной нормальной сосредоточенной силы на его поверхности, имеет вид:

$$\omega(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^4 \frac{B_k}{\sqrt{(A_k H)^2 + R^2}}, \quad (7)$$

где коэффициенты $A_k, B_k, k = \overline{1, 4}$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

Аппроксимационные параметры контактной модели
для упругого слоя постоянной толщины

k	1	2	3	4
A_k	0,8	1,4	2,0	2,6
B_k	0,426	-6,051	7,395	-2,770

Первый член в уравнении (7) соответствует решению Буссинеска, а остальные слагаемые, которые зависят от глубины слоя H , можно рассматривать как уточняющие члены.

Модель упругого слоя конечной толщины является в математическом смысле более общей, чем модель упругого полупространства. При достаточно большой толщине слоя $H \gg a$, где a – характерный линейный размер плиты в плане, представление (7) переходит в

$$(4),$$

т. е. вычисления, основанные на формуле (7), приводят к решениям контактных задач для полупространства.

Следует отметить, что H определяется достаточно точно, когда известны конкретные инженерно-геологические условия. Наиболее распространены ситуации, когда, например, под сжимаемым грунтом на определенной глубине залегают практически несжимаемые горные породы, в этом случае под сооружением часто происходит сезонное оттаивание на конечную глубину, ниже которой располагаются вечномёрзлые грунты. Тогда сжимаемой толщиной естественно считать весь сжимаемый слой. Кроме того, имеется большое число [16] способов расчета, по которым определяется мощность сжимаемой толщи: по ширине фундамента; штамповыми испытаниями в сочетании с решениями теории упругости; из сопоставления природного и избыточного давлений. Однако ни один из известных приемов назначения мощности сжимаемой толщи не свободен от недостатков. Значения глубины сжимаемой толщи, найденные для одинаковых условий различными способами, расходятся иногда в 2–5 раз. Таким образом, мощность сжимаемой толщи является условной величиной, которая вводится в расчет вследствие отличия реальных условий от расчетной модели и должна устанавливаться исходя из требования совпадения расчетных и фактических осадок. Поэтому величину H удобно включать в число параметров контактной модели, а далее находить ее значение из условий приближения расчетных осадок к натурным. При таком подходе естественным образом будут учтены нелинейный характер наблюдаемого возрастания толщи с увеличением нагрузки, влияние площади штампа, уплотненности грунта и ряда других факторов.

Слой переменной толщины. Используемая в литературе и нормативных документах модель упругого слоя конечной, но постоянной толщины, подстилаемого несжимаемым основанием, несмотря на ее известную условность, лучше, чем модель упругого полупространства, отражает реальные условия работы грунта под нагрузкой. В большинстве исследований общие решения для слоя постоянной толщины получены на основе строгих методов теории упругости и предполагают, что поверхность недеформируемого слоя является горизонтальной. На практике, как правило, подстилающий слой залегает наклонно, что приводит к необходимости учитывать изменение толщины сжимаемого слоя грунта под подошвой большемерных фундаментов. Рассматриваемая здесь нами ситуация возникает в случае если сжимаемый слой грунта расположен на совершенно жестком (скального типа) основании или когда различие в деформационных свойствах слоев достаточно велико. Наличие несжимаемого подстилающего основания приводит к тому, что осадки поверхности грунта тем больше, чем больше толщина деформируемого слоя.

В качестве иллюстрации возможностей предложенной численной методики расчета рассмотрим пространственную контактную модель упругого слоя переменной толщины или, другими словами, однородный упругий континуум, имеющий форму пространственного клина $0 \leq x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leq z \leq x \cdot \operatorname{tg} \alpha$ с центральным углом α при ребре, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (рис.). Наклонная плоскость, ограничивающая клин снизу, полностью заземлена. Выражение функции влияния $\omega(x, y, \xi, \eta)$ для контактной модели такого основания получено в [16] и имеет вид:

$$\omega = (x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{\sqrt{(R/R_1)^2 + (kb)^2}}, \quad (8)$$

где a_k ($k = \overline{1,4}$), b – коэффициенты, зависящие от α и ν_0 ;

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad R_1 = \sqrt{(x+\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

Параметры b , a_k ($k = \overline{1,4}$) в рассматриваемой контактной модели могут быть найдены методом наименьших квадратов для различных значений угла α и коэффициента Пуассона ν_0 . В [16] и [17] приводятся составленные на основе численных расчетов подробные таблицы их значений для $\alpha = 5^\circ (5^\circ) 89^\circ$ и $\nu_0 = 0; 0,25; 0,35; 0,5$.

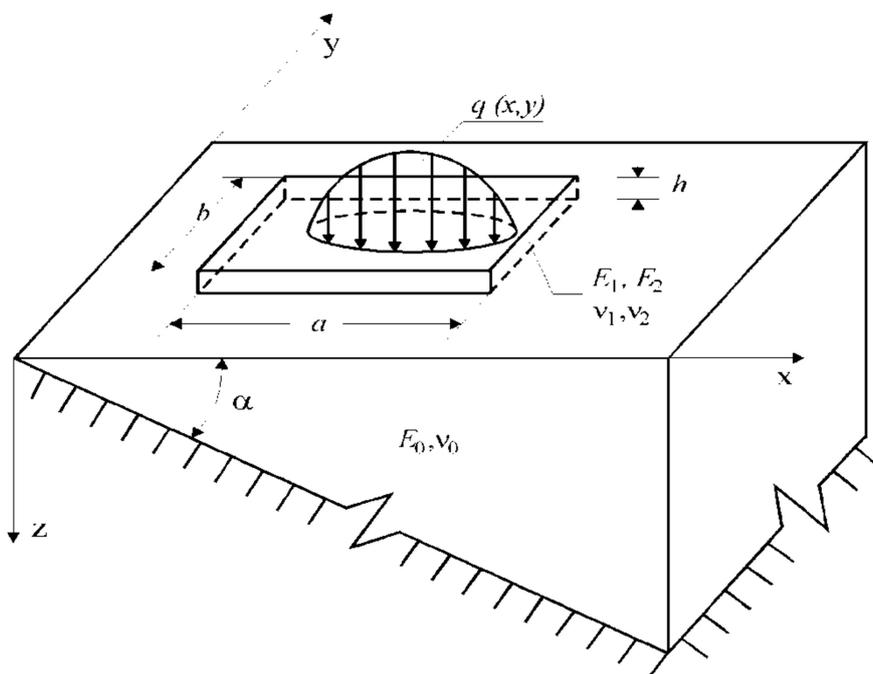


Рис. Расчетная схема упругосжимаемого клина

Модельные параметры b , a_k , $k = \overline{1,4}$, использованные нами при расчетах, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Значения коэффициентов a_k , b контактной модели (8)

α°	ν_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b
5°	0	-0,1859	4,179	-4,415	1,410	0,0194
	0,25	-0,2084	0,3373	3,587	-2,765	0,0194
	0,35	-0,2371	-2,584	9,778	-6,037	0,0194
	0,50	-0,2084	-10,09	26,03	-14,75	0,0194
10°	0	-0,4148	7,066	-22,45	17,04	0,0107
	0,25	-0,0127	0,4136	-2,21	2,887	0,0107
	0,35	0,6502	-0,5888	0,7272	0,8904	0,0107
	0,50	0,1230	-1,663	3,62	-0,9275	0,0107
15°	0	0,1013	-1,751	5,778	-3,129	0,0405
	0,25	-0,0877	-1,77	6,412	-3,755	0,0405

	0,35	-0,0889	-1,966	7,389	-4,553	0,0405
	0,50	-0,1008	-2,589	10,34	-6,928	0,0405
20°	0	0,0211	-0,7522	4,894	-3,208	0,0697
	0,25	-0,0326	-0,1323	4,086	-2,984	0,0697
	0,35	-0,0645	0,2019	3,911	-3,127	0,0697
	0,50	0,1405	0,9806	3,894	-3,849	0,0697

Окончание табл. 2

α°	ν_0	a_1	a_2	a_3	a_4	b
25°	0	-0,020	-0,1491	4,187	-3,096	0,0979
	0,25	-0,0799	0,6939	2,76	-2,458	0,0979
	0,35	-0,1181	1,212	2,120	-2,312	0,0979
	0,50	-0,2112	2,505	0,8496	-2,279	0,0979
30°	0	-0,1261	3,619	-2,193	0,6272	0,175
	0,25	-0,0916	1,019	2,277	-2,313	0,125
	0,35	0,1324	1,636	1,368	-1,992	0,125
	0,50	0,2345	3,220	-0,6396	-1,504	0,125
35°	0	-1,066	13,47	-31,86	22,04	0,1507
	0,25	-0,0849	1,004	2,455	-2,514	0,1507
	0,35	-0,1252	1,655	1,436	-2,117	0,1507
	0,50	-0,2281	3,349	-0,8726	-1,451	0,1507
40°	0	-0,0918	2,183	0,7424	-2,08	0,2249
	0,25	-0,0684	0,7601	3,108	-2,977	0,1749
	0,35	-0,1063	1,394	2,106	-2,594	0,1749
	0,50	-0,2040	3,050	-0,1037	-2,015	0,1749
45°	0	-0,1033	3,971	-3,079	-0,0604	0,2974
	0,25	-0,1224	2,935	-1,224	-0,7867	0,2474
	0,35	-0,0803	0,9443	3,195	-3,308	0,1974
	0,50	-0,1687	2,445	1,412	-3,053	0,1974
50°	0	-0,0764	2,395	1,674	-3,531	0,3182
	0,25	-0,0886	1,869	1,589	-2,687	0,2681
	0,35	-0,1297	2,915	-0,7536	-1,318	0,2681
	0,50	-0,1268	1,640	3,401	-4,384	0,2181
60°	0	0,0555	-1,580	8,086	-5,799	0,2531
	0,25	-0,0596	1,341	4,130	-5,023	0,3531
	0,35	-0,010	2,585	0,9658	-2,980	0,3531
	0,50	-0,1309	2,378	2,644	-4,627	0,3031
70°	0	0,0638	-1,685	7,262	-4,693	0,2788
	0,25	0,0415	-1,266	6,281	-4,133	0,2788
	0,35	0,0333	-1,189	6,653	-4,679	0,2788
	0,50	-0,0885	1,434	6,024	-7,473	0,3788
75°	0	0,0596	-1,527	6,112	-3,550	0,2880
	0,25	0,0416	-1,179	5,223	-3,012	0,2880
	0,35	0,0369	-1,166	5,702	-3,607	0,2880
	0,50	0,0335	-1,432	8,570	-6,614	0,2880
80°	0	0,0509	-1,253	4,590	-2,123	0,2946
	0,25	0,0338	-0,9102	3,591	-1,457	0,2946
	0,35	0,0299	-0,909	4,009	-1,966	0,2946
	0,50	-0,0325	-1,287	6,968	-4,941	0,2946
89°	0	0,0215	-0,4724	1,099	0,9120	0,2999
	0,25	0,0206	-0,4447	1,020	0,8807	0,2999
	0,35	0,0237	-0,5434	1,548	0,3678	0,2999
	0,50	0,0375	-0,9932	3,905	-1,785	0,2999

Слоистое полупространство. Как было отмечено ранее, проведенные нами расчеты получены в предположении, что между упругим слоем и жестким основанием отсутствует

трение. Однако наличие в грунте на глубине H контактной поверхности между упругим слоем и несжимаемым основанием приводит к неоднородности напряженно-деформированного состояния. Исследованиями ряда авторов [15] установлено, что влияние несжимаемого основания на концентрацию напряжений внутри слоя становится малозначительным лишь при $s = H/a > 5$, где a – характерный размер плиты в плане. Степень концентрации при $s < 5$ существенно зависит от условий скольжения упругого слоя по несжимаемому основанию. В частности, детальный анализ показывает, что условие отсутствия касательных напряжений по сравнению с условием отсутствия перемещений (защемлением) на нижней границе слоя вызывает увеличение вертикальных перемещений и сжимающих напряжений. Для реальных грунтовых условий, видимо, следует пользоваться предложенным в [11] граничным условием типа упругих связей между упругим и абсолютно жестким телами при контакте:

$$u_j(x, y, H) = -\frac{1-\nu_0}{G} \mu \cdot \tau_{jz}(x, y, H), \quad j = x, y, \quad u_z(x, y, H) = 0,$$

где μ – коэффициент сцепления, приводящий к росту абсолютных значений напряжений и перемещений. Предельными случаями таких условий является сцепление и гладкий контакт: при $\mu = 0$ получается случай сцепления слоя и основания; при $\mu \rightarrow \infty$ слой и основание могут без трения проскальзывать вдоль всей своей общей границы.

Дальнейшим приближением к реальным условиям деформирования следует, по-видимому, признать моделирование естественного основания в виде схемы «упругий слой конечной толщины на упругом полупространстве». Например, когда упругий слой свободно ($\mu = 0$) лежит на упругом полупространстве, функция влияния имеет вид [18]:

$$Q(\alpha, \chi) = \frac{ch2\alpha - 1 + \chi(2\alpha + sh2\alpha)}{2\alpha + sh2\alpha + \chi(ch2\alpha - 1 - \alpha^2)}. \quad (9)$$

В такой модели основания в рассмотрение входит отношение $\chi = \theta_1/\theta_2$, где $\theta_i = E_i/2(1-\nu_i^2)$, $i = 1, 2$ – механические характеристики слоя и полупространства соответственно. При $\chi \rightarrow 0$ приходим к схеме «упругий слой на жестком основании», при $H/a \rightarrow \infty$ – к схеме однородного полупространства.

Предложенные подходы к расчету деформации двухслойной системы без труда обобщаются на случай существования упругих связей между слоями в многослойном полупространстве следующим образом [18]. Предполагается, что i и $(i+1)$ -й слои соединены упругими связями с коэффициентом μ_i , т. е. напряжения $\sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}$ и вертикальные перемещения W на их общей границе совпадают, а

$$u_{j,i+1}(x, y, 0) - u_{j,i}(x, y, 0) = \frac{1-\nu_i}{G_i} \cdot \mu_i \cdot \tau_{jz}(x, y, 0),$$

где ν_i – коэффициент Пуассона 1-го слоя; $j = x, y$. При $\mu_i = 0$ получается случай сцепления полупространств, при $\mu_i \rightarrow \infty$ полупространства могут без трения проскальзывать вдоль всей своей общей границы. Таким образом, граничные условия сопряжения контактирующих слоев в матричной форме примут вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{z,i+1} \\ \tau_{yz,i+1} \\ \tau_{xy,i+1} \\ u_{x,i+1} \\ u_{y,i+1} \\ u_{z,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{z,i} \\ \tau_{yz,i} \\ \tau_{xz,i} \\ u_{x,i} \\ u_{y,i} \\ u_{z,i} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\psi = \frac{1-\nu_i}{G_i} \cdot \mu_i$. Предельными случаями таких условий совместности деформации слоев являются сцепление и гладкий контакт.

Использование функции влияния для любой обобщенной модели слоистого линейно-деформируемого основания типа (9) или (10) не приведет к возникновению принципиальных трудностей вычислительного характера, а скажется лишь на общем увеличении затрат расчетного времени.

Выводы. Теория расчета сооружений на деформируемом основании ставит как одну из первых задач выбор расчетной модели грунтового основания. Механические свойства основания существенно влияют на изгиб фундаментных конструкций.

Несмотря на проведенные к настоящему времени обширные экспериментальные исследования, остается актуальным дальнейшее изучение реалистичного изменения деформационных характеристик грунта, обусловленного историей напластования, распределением влажности, химическим закреплением, уплотнением и т. д.

При решении задач взаимодействия фундаментных конструкций с грунтом предпочтительно прямое использование методов механики твердых деформируемых тел.

Библиографический список

1. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В. И. Расчет конструкций на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1984. – 679 с.
2. Соломин В. И., Шматков С. Б. Методы расчета и оптимальное проектирование железобетонных фундаментных конструкций. – М.: Стройиздат, 1986. – 208 с.
3. Черкасов И. И. Механические свойства грунтовых оснований. – М.: Автотрансиздат, 1958. – 238 с.
4. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.
5. Филоненко-Бородич М. М. Простейшая модель упругого основания, способная распределить нагрузку // Сб. тр. МЭМИИТ. – 1945. – Вып. 53. – С. 21–27.
6. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Стройиздат, 1960. – 305 с.
7. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – М.: Стройиздат, 1954. – 54 с.
8. Клейн Г. К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и другие механические свойства грунта при расчете сооружений на сплошном основании // Сб. тр. МИСИ. – 1956. – Вып. 14. – С. 13–17.
9. Бирман С. Е. Об осадке жесткого штампа на упругом слое, расположенном на нежимаемом основании. – Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 93, № 5. – С. 791–794.
10. Алейников С. М., Иконин С. В. Пространственная деформация поверхности упругого слоя переменной толщины // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1990. – № 5.

– С. 21–23.

11. Годес Ю. Я. Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями / Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости. – Днепропетровск, ДГУ, 1987. – С. 92–97.

12. Рекомендации по расчету осадок и кренов прямоугольных фундаментов на клиновидном основании // НИИОСП Госстроя СССР. – М.: 1985. – 29 с.

13. Бородачев Н. М. О возможности замены сложных моделей упругого основания более простыми // Строит. механика и расчет сооружений. – 1975. – № 4. – С. 37–38.

14. Раппопорт Р. М. Задача Буссинеска для слоистого упругого полупространства // Тр. Ленинград. политех. ин-та. – 1948. – Вып. 5. – С. 3–18.

15. Дураев А. Е. Расчет конструкций на грунтовом основании с возрастающим по глубине модулем деформации. – Саранск: изд-во Мордовского ун-та, 1991. – 192 с.

16. Варвак П. М., Варвак Л. П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 154 с.

17. Коренев Б. Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1954. – 245 с.

18. Александрова Г. П. Контактные задачи изгиба плит, лежащих на упругом основании // Изв. АН СССР. Механика тверд. тела. – 1973. – № 1. – С. 97–106.

References

1. Gorbunov-Posadov M. I., Malikova T. A., Solomin V. I. Calculation of structures on an elastic foundation. Moscow: Stroyizdat, 1984. 679 p.

2. Solomin V. I., Shmatkov S. B. Calculation methods and optimal design of reinforced concrete foundation structures. Moscow: Stroyizdat, 1986. 208 p.

3. Cherkasov I. I. Mechanical properties of soil foundations. Moscow: Avtotransizdat, 1958. 238 p.

4. Lurye A. I. Spatial problems of elasticity theory. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 491 p.

5. Filonenko-Borodich M. M. The simplest model of an elastic foundation capable of distributing the load. Coll. of MEIRE. Issue 53. 1945. Pp. 21–27.

6. Vlasov V. Z., Leontiev N. N. Beams, slabs and shells on an elastic foundation. Moscow: Stroyizdat. 1960. 305 p.

7. Pasternak P. L. Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic foundation using two bedding coefficients. Moscow: Stroyizdat, 1954. 54 p.

8. Klein G. K. Accounting for heterogeneity, discontinuity of deformations and other mechanical properties of soil in the calculation of structures on a solid foundation. Coll. of MCEI. Issue 14. 1956. Pp. 13–17.

9. Birman S. E. On the settlement of a rigid stamp on an elastic layer located on an incompressible foundation. Reports of the USSR Academy of Sciences. Vol. 93. No. 5. 1953. Pp. 791–794.

10. Aleinikov S. M., Ikonin S. V. Spatial deformation of the surface of an elastic layer of variable thickness. Foundations, Bases and Soil Mechanics. No. 5. 1990. Pp. 21–23.

11. Godes Yu. Ya. Compliance functions of a multilayer foundation with elastic bonds between layers. Nonlinear Problems of Hydroaeromechanics and Elasticity Theory. Dnepropetrovsk. DSU, 1987. Pp. 92–97.

12. Recommendations for Calculating Settlements and Inclinations of Rectangular Foundations on a Wedge-Shaped Foundation. NIIOSPE Gosstroy USSR. M.: 1985. 29 p.

13. Borodachev N. M. On the possibility of replacing complex models of elastic foundations with simpler ones. Construction Mechanics and Calculation of Structures. No. 4. 1975. Pp. 37–38.

14. Rappoport R. M. Boussinesq problem for a layered elastic half-space. Proceedings of the Leningrad Polytechnic Institute. Issue 5. 1948. Pp. 3-18.
15. Duraev A. E. Calculation of structures on a soil foundation with an increasing modulus of deformation with depth. Saransk: Publishing house of the Mordovian University, 1991. 192 p.
16. Varvak P. M., Varvak L. P. The grid method in problems of calculating building structures. M.: Stroyizdat, 1977. 154 p.
17. Korenev B. G. Calculation of beams and slabs on an elastic foundation. M.: Gosstroyizdat, 1954. 245 p.
18. Aleksandrova G. P. Contact problems of bending of slabs lying on an elastic foundation. Bulletin of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of Solids. No. 1. 1973. Pp. 97–106.

**IMPROVEMENT OF CALCULATION MODELS OF SOIL BASES
IN CONTACT WITH FOUNDATION STRUCTURES**

N. N. Nekrasova ¹, G. E. Gabrielyan ²

Voronezh State Technical University ^{1,2}
Russia, Voronezh

¹ PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Mechanics, tel.: +7(473)271-53-62, e-mail: Nekrasova-N@yandex.ru

² PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: grayr2010@rambler.ru

In construction practice, reinforced concrete slabs are widely used structural elements. When slabs serve as the foundation of a building or structure, their operation significantly affects the stress-strain state of the entire structure. In this case, the calculated forces and their distribution largely depend on the used calculation model of the soil foundation. The paper substantiates the need to consider heterogeneous foundations in the form of an elastic half-space with deformation characteristics that vary in depth. A comparison of the results of applying the main models of soil foundations presented in the form of heterogeneous elastic half-spaces, as well as the corresponding cores, is carried out.

Keywords: elastic foundation, layer of constant and variable thickness, layered half-space, foundation slab.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).

Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, доц.,
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егисеевич, канд. техн. наук, доц.

Почтовый адрес редакции: 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.