

ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757 (online)

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И КОНСТРУКЦИИ**

Научный журнал

Выпуск № 1 (40), 2024

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения — Российская Федерация.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В. С., д-р техн. наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет

Зам. главного редактора: Козлов В. А., д-р физ.-мат. наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет

Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Антонов В. М., канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;

Беляева С. Ю., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Буренин А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;

Гриднев С. Ю., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет;

Зверев В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Ефрюшин С. В., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;

Кирсанов М. Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;

Колчунов В. И., д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;

Коробко А. В., д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;

Михайлов В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;

Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;

Нугужинов Ж. С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;

Овчинников И. Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;

Пшеничкина В. А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;

Свентиков А. А., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет;

Трещев А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;

Турищев Л. С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;

Шимановский А. О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;

Шитикова М. В., д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки - А.Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

Подписной индекс в «Каталоге периодических изданий. Газеты и журналы» ГК «Урал Пресс» - 66004

Физические лица могут оформить подписку в интернет-магазине «Деловая пресса»

<http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/>

Дата выхода в свет 29.03.2024. Усл. печ. л. 15,0. Формат 60×84/8. Тираж 65 экз. Заказ №.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018 г.

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

(строительный факультет, кафедра строительной механики)

тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»

394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

12+

ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2024

ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757(online)

**STRUCTURAL MECHANICS
AND STRUCTURES**

Scientific Journal
ISSUE № 1 (40), 2024

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.
Territory of distribution — Russian Federation.

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University

The deputy chief editor: Kozlov V. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University

Executive secretary: Gabrielyan G. E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Antonov V. M., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

Belyaeva S. Yu., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Burenin A. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

Gridnev S. Yu., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University;

Zverev V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Efryushin S. V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Kirsanov M. N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

Kolchunov V. I., Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

Korobko A. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenev;

Mikhailov V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Nguen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

Nuguxhinov Zh. S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

Ovchinnikov I. G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

Pshenichkina V. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

Sventikov A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University;

Trechshv A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

Turichshev L. S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

Shimanovsky A. O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

Shitikova M. V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A.R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

The journal "Structural mechanics and structures " is included into the list of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

Subscription index in the «Catalog of periodicals. Newspapers and magazines» of the «Ural Press»
Group of Companies - 66004

Individuals can subscribe to it in the online store "Business Press" <http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/>

Publication date 29.03.2024. Conventional printed sheets 15,0. Format 60×84/8. Numbers of copies 65. Order №.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 - 72895 or 22.05.2018.

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

<i>Курсанов М. Н., Цяо Д., Барченкова Н. А.</i> Формула для расчета первой частоты собственных колебаний арочной фермы.....	7
<i>Аверин А. Н., Аверина Т. А., Полушкина И. А.</i> Моделирование схем развития трещин в плите на одностороннем упругом основании при подвижной нагрузке.....	17
<i>Пахомова Л. В., Сажин П. В., Инкижинов Н. С.</i> Построение ядра сечения для поперечного сечения, ограниченного лемниской.....	36

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

<i>Осипова Е. И., Осипов С. А.</i> Численный анализ вынужденных колебаний нелинейной вязкоупругой пластинки....	45
--	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Чесноков А. В., Михайлов В. В.</i> Разработка вантовой конструкции с тентовым покрытием.....	56
<i>Черников А. В., Козлов В. А.</i> Численный расчёт гофрированных водопропускных труб с использованием МКЭ.....	68
<i>Свентиков А. А., Борзунова А. И.</i> Принципы формообразования топологии цилиндрических сетчатых стальных оболочек.....	80

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Глазков Д. С., Гребенкин С. Д., Козлов В. А.</i> Применение САД-программы Rhinoceros-3D для подготовки расчетно-аналитической модели здания сложной конфигурации.....	89
---	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

<i>Дереховский В. М., Скибин Г. М., Чутченко С. Г.</i> Предложения по оптимизации параметров свайного поля многоэтажного жилого дома.....	99
<i>Кукина О. Б., Волков В. В., Андреев А. В.</i> Проектирование грунтовых оснований зданий и дорожных одежд с верификацией на основе суррогатного моделирования.....	110

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

<i>Подольский В. П., Чудайкин А. Д., Константинова И. В.</i> Влияние инертных газов на свойства битумного вяжущего при RTFOT-состаривании	120
Правила оформления статей.....	129

CONTENTS

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

<i>Kirsanov M. N., Qiao D., Barchenkova N. A.</i> Formula for calculating the first frequency of natural vibrations of an arch truss.....	7
<i>Averin A. N., Averina T. A., Polushkina I. A.</i> Modeling of crack development patterns in a plate on a single -sided elastic base under a mobile load.....	17
<i>Pakhomova L. V., Sazhin P. V., Inkizhinov N. S.</i> Construction of a cross-section core for a cross-section bounded by a lemniscate.....	36

APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS OF SOLID BODY UNDER DEFORMATION

<i>Osipova E. I., Osipov S. A.</i> Numerical analysis of forced oscillations of a nonlinear viscoelastic plate.....	45
--	----

CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

<i>Chesnokov A. V., Mikhailov V. V.</i> Development of the cable structure with the tent roofing.....	56
<i>Chernikov A. V., Kozlov V. A.</i> Numerical calculation of corrugated cultural pipes using finite element method.....	68
<i>Sventikov A. A., Borzunova A. I.</i> Principles of shaping the topology of cylindrical mesh steel shells.....	80

CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

<i>Glazkov D. S., Grebenkin S. D., Kozlov V. A.</i> Application of the rhinoceros-3D CAD program for the preparation of a computational and analytical model of a complex configuration building.....	89
--	----

CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES

<i>Derekhovskii V. M., Skibin G. M., Chutchenko S. G.</i> Proposals for optimizing the pile field parameters of a multi-storey residential building.....	99
<i>Kukina O. B., Volkov V. V., Andreev A. V.</i> Design of soil foundations of buildings and road pavements with verification based on surrogate modeling.....	110

PILOT AND FIELD OBSERVATIONS OF STRUCTURES AND MATERIALS

<i>Podolsky V. P., Chudaykin A. D., Konstantinova I. V.</i> The effect of inert gases on the properties of bitumen binder during RTFOT aging.....	120
Requirements for articles to be published.....	129

ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов¹, Дай Цяо², Н. А. Барченкова³

Национальный исследовательский университет «МЭИ»^{1,2}
Россия, г. Москва

Воронежский государственный технический университет³
Россия, г. Воронеж

¹Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(965)183-35-34, e-mail: c216@ya.ru ru

²Аспирант кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(919)9909759, e-mail: 228441531@qq.com

³Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: barch_na@vgasu.vrn.ru

Предложена схема статически определимой безраспорной арочной фермы регулярного типа. Методом Донкерлея и его упрощенным вариантом дан вывод аналитической зависимости основной частоты собственных колебаний от числа панелей. В модели конструкции масса фермы равномерно распределяется по ее узлам, а колебания узлов предполагаются по вертикальной оси. Жесткость фермы рассчитывается по формуле Максвелла – Мора. Результаты аналитических решений сравниваются с численным расчетом первой частоты из спектра частот конструкции. Все аналитические преобразования выполнены в системе символьной математики Maple. Для обобщения решения на произвольное число панелей используется метод индукции. Пример расчета показывает хорошее совпадение приближенного аналитического метода с численным, выполненным при учете всех степеней свободы фермы. Проанализированы спектры собственных частот семейства регулярных ферм различного порядка. Найдены спектральные изолинии и константы, позволяющие экстраполировать решения на фермы высокого порядка регулярности.

Ключевые слова: плоская ферма, собственная частота, метод Донкерлея, индукция, Maple, приближенный метод, формула Максвелла – Мора, спектральные изолинии, спектральные константы.

Введение. Для расчета частот собственных колебаний инженерных сооружений и элементов конструкции на практике применяют численные методы с использованием метода конечных элементов [1-3]. Первая частота для статически определимых схем конструкций наиболее востребована при динамическом анализе. Ее приближенное значение можно найти аналитически методом Донкерлея (оценка снизу) или методом Рэлея для оценки сверху [4-7]. Эти методы определяют аналитические зависимости частоты от распределения масс по узлам для различных размеров и свойств материала, а также от числа панелей. Последнее существенно расширяет область применения формул. Аналитические зависимости первой частоты собственных колебаний получены для некоторых плоских и пространственных статически определимых регулярных ферм получены в [8-11]. Для таких решений используется, как правило, подход парциальных частот Донкерлея, дающий более простой вид решения, чем энергетический метод Рэлея [11-13]. Точность таких решений обычно составляет от 8 до 40%. В [14] для решения этой задачи используется метод динамической

жесткости. В [15] предлагается новый метод вывода аналитического выражения для первой частоты колебаний регулярных систем со многими степенями свободы.

Конструкция фермы. Симметричная статически определимая арочная ферма имеет треугольную решетку в ригеле и две опоры. Ферма порядка n состоит из $2n$ панелей длиной $2a$, в средней своей части и по три панели над опорами. Левая подвижная опора моделируется одним вертикальным стержнем, правая неподвижная — двумя стержнями. Высота фермы равна $3h$. Масса фермы условно распределена по узлам равными массами m , совершающими колебания по вертикали (рис. 1).

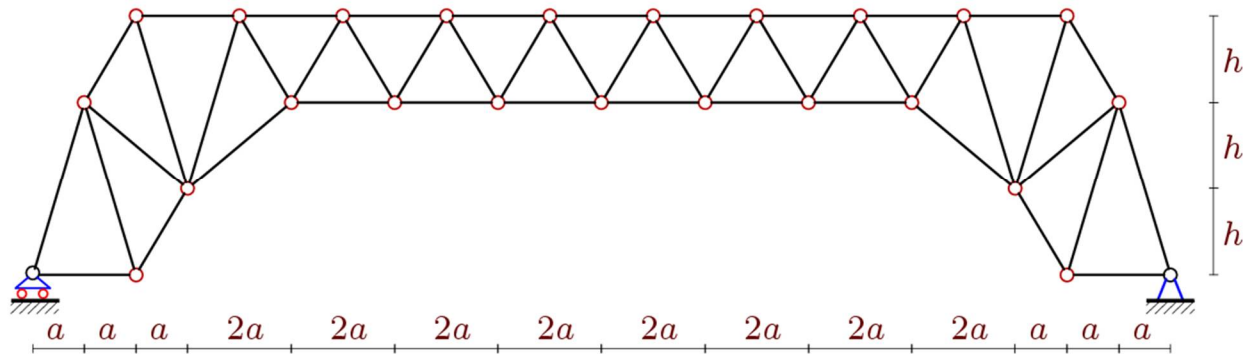


Рис. 1. Схема фермы, $n=3$

Число степеней свободы системы равно числу узлов конструкции: $K = 4n + 13$. В ферме содержится $\nu = 8n + 26$ стержней, включая и три опорные стержня.

Расчет усилий в стержнях. Усилия, необходимые для определения жесткости статически определимой системы, рассчитываются из условия равновесия узлов. Матрица системы уравнений равновесия составляется из направляющих косинусов усилий, которые вычисляются по данным о порядке соединения стержней в узлах и их координатах. Узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 2). Фрагмент программы, который вводит координаты в систему Maple, имеет вид:

```
L0:=4*n*a+10*a;
x[1]:=0;      y[1]:=0;
x[2]:=2*a;    y[2]:=0;
x[3]:=3*a;    y[3]:=h;
for i to 2*n+1 do x[i+3]:=2*a*i+3*a;y[i+3]:=2*h:end;
x[2*n+5]:=L0-3*a; y[2*n+5]:=h;
x[2*n+6]:=L0-2*a; y[2*n+6]:=0;
x[2*n+7]:=L0;    y[2*n+7]:=0;
x[2*n+8]:=a;     y[2*n+8]:=2*h;
for i to 2*n+4 do x[i+2*n+8]:=2*a*i;y[i+2*n+8]:=3*h:end;
x[4*n+13]:=L0-a; y[4*n+13]:=2*h;
x[m3-2]:=0;     y[m3-2]:=-h;
x[m3-1]:=L0;    y[m3-1]:=-h;
x[m3]:=L0+a;    y[m3]:=0;
```

Уравнения равновесия узлов — это система уравнений в векторном виде: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{R} — вектор узловых нагрузок, \mathbf{G} — матрица направляющих косинусов размером $\nu \times \nu$, \mathbf{S} — вектор неизвестных усилий в стержнях. В число неизвестных включаются и три опорные реакции. Элементы матрицы \mathbf{G} рассчитываются по координатам концов стержней, соединенных в соответствующих узлах.

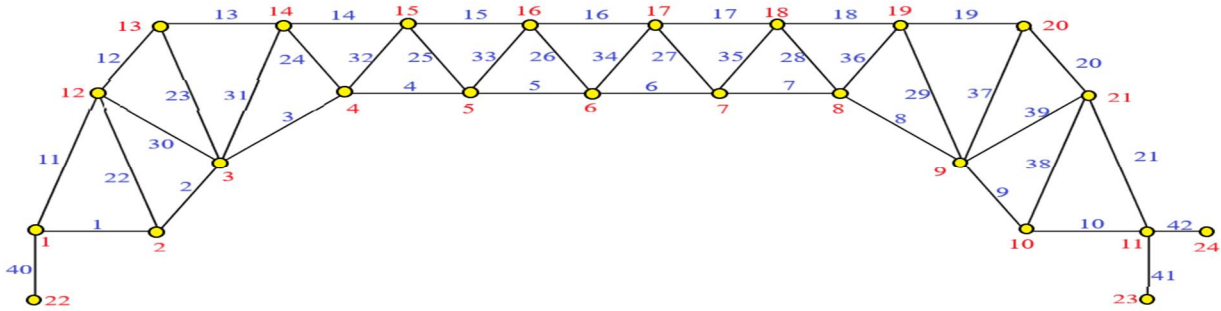


Рис. 2. Номера узлов и стержней, $n = 2$

Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея. Расчет первой собственной частоты ω_D производится по приближенной формуле [9-13]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где ω_p – частота колебаний одной массы m в узле с номером p , которая вычисляется из уравнения движения масс в узлах:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент D_p рассчитывается с помощью формулы Максвелла – Мора суммированием по всем усилиям в стержнях конструкции:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF), \quad (3)$$

где $S_{\alpha}^{(p)}$ – усилие в стержне α при действии на узел p единичной вертикальной силы, l_{α} – длина этого стержня. Жесткость EF стержней считается для всей фермы одинаковой. Из (3) следует формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Расчет сумм $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF)$ для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (517680a^3 + 28371c^3 + 8683d^3 + 8739f^3) / (18h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (2845566a^3 + 83143c^3 + 21337d^3 + 21265f^3) / (18h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (3419724a^3 + 63489c^3 + 14173d^3 + 14085f^3) / (6h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (29040354a^3 + 375175c^3 + 74405d^3 + 73885f^3) / (18h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (69982200a^3 + 66707c^3 + 119171d^3 + 118331f^3) / (18h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$, $f = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Для получения методами Maple общего члена этой последовательности потребовалось проанализировать не менее четырнадцати ферм различного порядка. В результате из решения линейных однородных рекуррентных уравнений, выведенных оператором `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` системы Maple, искомая формула принимает вид:

$$\Delta_n = \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3}{h^2 EF},$$

где коэффициенты имеют полиномиальный по числу панелей вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= (1024n^6 + 15360n^5 + 96160n^4 + 299040n^3 + 468286n^2 + 338505n + 75825) / 45, \\ C_2 &= (576n^4 + 6656n^3 + 24492n^2 + 35608n + 17781) / 54, \\ C_3 &= (1088n^3 + 6168n^2 + 11458n + 7503) / 54, \\ C_4 &= (1088n^3 + 6264n^2 + 11554n + 7143) / 54, \\ C_5 &= (64n^3 + 552n^2 + 1514n + 1359) / 6. \end{aligned} \quad (5)$$

Окончательно, согласно (4), расчетная формула для определения нижней оценки первой частоты по методу Донкерлею имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3)}}. \quad (6)$$

Упрощенный вариант метода Донкерлея. В [15] рассмотрен вариант метода Донкерлея для получения аналитической зависимости первой частоты колебаний от числа панелей. В этом методе не требуется такой сложный для аналитических преобразований этап, как суммирование по числу степеней свободы выражений с парциальными частотами. Если для численного решения такое суммирование не представляет никакой сложности, то применительно к задаче определения аналитической зависимости частоты от числа панелей, вычисление сумм в символьной форме, как правило, сложно. Метод [15] значительно упрощает решение. Согласно ему расчетная формула имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \Delta_n^*, \quad (7)$$

где δ^{\max} – наибольшее по всем узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на один из узлов фермы. Для расчета первой частоты по этому методу необходимо опытным путем (пробным численным расчетом) определить наиболее податливый узел. Для рассматриваемой конструкции это узел с номером $n+4$ в середине нижнего пояса (рис. 2). Расчет коэффициента Δ_n^* для последовательности ферм с увеличивающимся числом панелей дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= 5(1584a^3 + 77c^3 + 17f^3 + 17h^3) / (12h^2 EF), \\ \Delta_2^* &= 19(3906a^3 + 95c^3 + 17f^3 + 17h^3) / (36h^2 EF), \\ \Delta_3^* &= 23(7524a^3 + 113c^3 + 17f^3 + 17h^3) / (36h^2 EF), \\ \Delta_4^* &= 3(12176a^3 + 131c^3 + 17f^3 + 17h^3) / (4h^2 EF), \\ \Delta_5^* &= 31(19800a^3 + 149c^3 + 17f^3 + 17h^3) / (36h^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Общий вид элементов этой последовательности получается средствами Maple:

$$\Delta_n^* = (4n + 11)(B_1 a^3 + B_2 c^3 + B_3 d^3 + B_4 f^3) / (h^2 EF),$$

где коэффициенты существенно проще, чем (5):

$$\begin{aligned} B_1 &= (8n^3 + 60n^2 + 151n + 45) / 6, \quad B_2 = (18n + 59) / 36, \\ B_3 &= 17 / 36, \quad B_4 = 17 / 36. \end{aligned}$$

В результате имеем формулу:

$$\omega_D = 60h \sqrt{\frac{EF}{m(4n+1)(6(8n^3+60n^2+151n+45)a^3+(18n+59)c^3+17d^3+17f^3)}}. \quad (8)$$

Формула (8) имеет заметно более компактный вид, чем (6) с коэффициентами (5). Сравнить степень приближения полученных формул с численным методом, полученным без упрощений Донкерлея, можно на конкретном примере.

Численное решение. Для расчета приняты размеры панели фермы: $a = 3\text{м}$, $h = 2\text{м}$.

Материал стержней – сталь, модуль упругости $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, площадь поперечного сечения стержней $F = 4 \text{ см}^2$, в узлах расположены массы $m = 100\text{кг}$. На графике 3 кривые зависимости частот ω_D и ω_* от числа панелей по формулам (6) и (8) сопоставлены с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно. С ростом числа панелей все три решения сближаются, а частота уменьшается, стремясь асимптотически к нулю. Решение по методу Донкерлея, как и ожидалось, ограничивает численное решение снизу. Однако при этом решение (8) не только проще, чем по методу Донкерлея (6), но и ближе к численному решению.

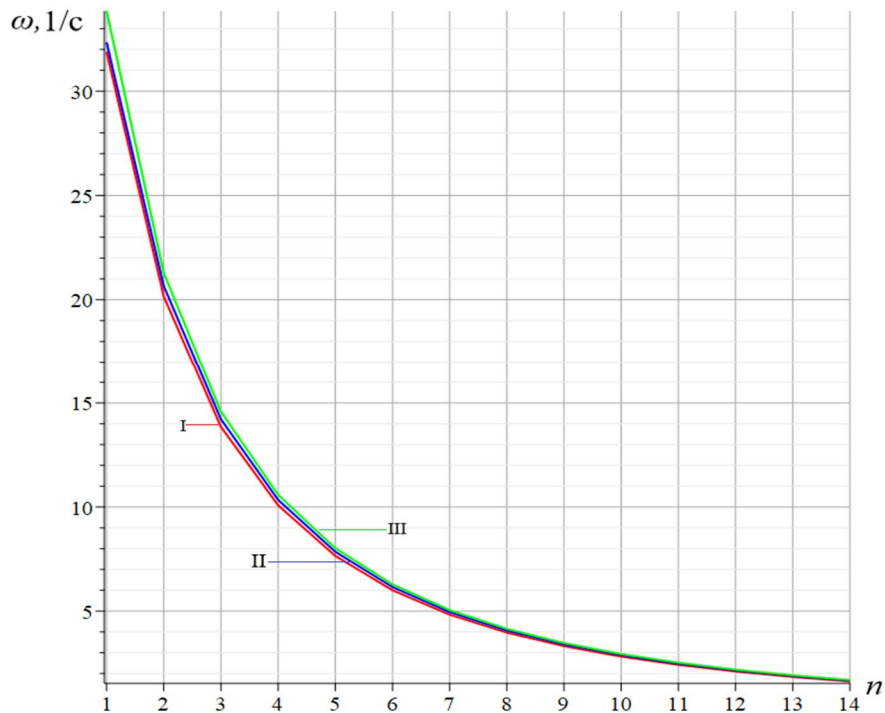


Рис. 3. Сравнение аналитических решений с численным:

I – нижняя оценка ω_D по Донкерлею (6), II – приближенный метод ω_* (8), III – первая частота спектра ω_1

Для более точной оценки погрешностей методов введем относительные величины:

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1, \quad \varepsilon_* = (\omega_* - \omega_1) / \omega_1.$$

На рис. 4 представлены зависимости погрешностей от числа панелей при $a = 3\text{м}$ для различных значений высоты h . Погрешность упрощенного решения в несколько раз меньше

погрешности метода Донкерлея и зависит от высоты фермы h . Особенно это заметно для небольшого числа панелей. С увеличением числа панелей кривые сближаются.

Спектр регулярных ферм. На рис. 5 отдельными точками обозначены частоты спектров собственных колебаний ферм различного порядка, рассчитанных для случая $a=3\text{м}$, $h = 1\text{м}$. Вычисления производились в численной моде той же программы системы Maple, что и при расчете аналитического выражения жесткости конструкции, необходимой для определения парциальных частот. Частоты спектра каждой фермы объединены условными кривыми. На оси абсцисс отложены номера частот в спектре. Порядок фермы $n=1, \dots, 20$ отмечен сверху соответствующего спектра.

На графике заметны некоторые закономерности зависимости частот от числа панелей. Высшая частота собственных колебаний фермы практически не зависит от порядка регулярной фермы. Для этой частоты, очевидно, существует какая-то аналитическая зависимость от размеров фермы и массы, однако обнаружить ее пока не удалось. Высшие частоты ферм низших порядков $n=1$, $n=2$, .. лишь немного отличаются от высших частот ферм порядка $n=19$, $n=20$, .. . Это дает возможность сравнительно легко оценить границы изменений собственных частот ферм большого порядка, для анализа которых требуются существенные вычислительные ресурсы и время, ориентируясь на расчет ферм с 1-2 панелями.

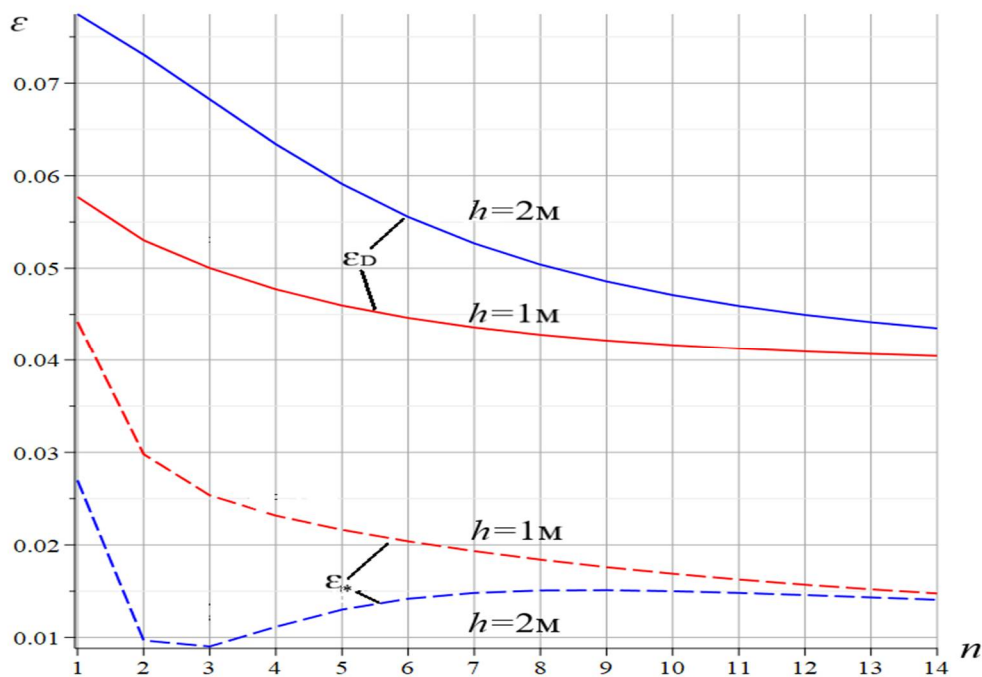


Рис. 4. Погрешность оценки основной частоты по Донкерлею ε_D и приближенному методу ε_*

Другая закономерность – наличие изолиний в общей картине распределения частот.

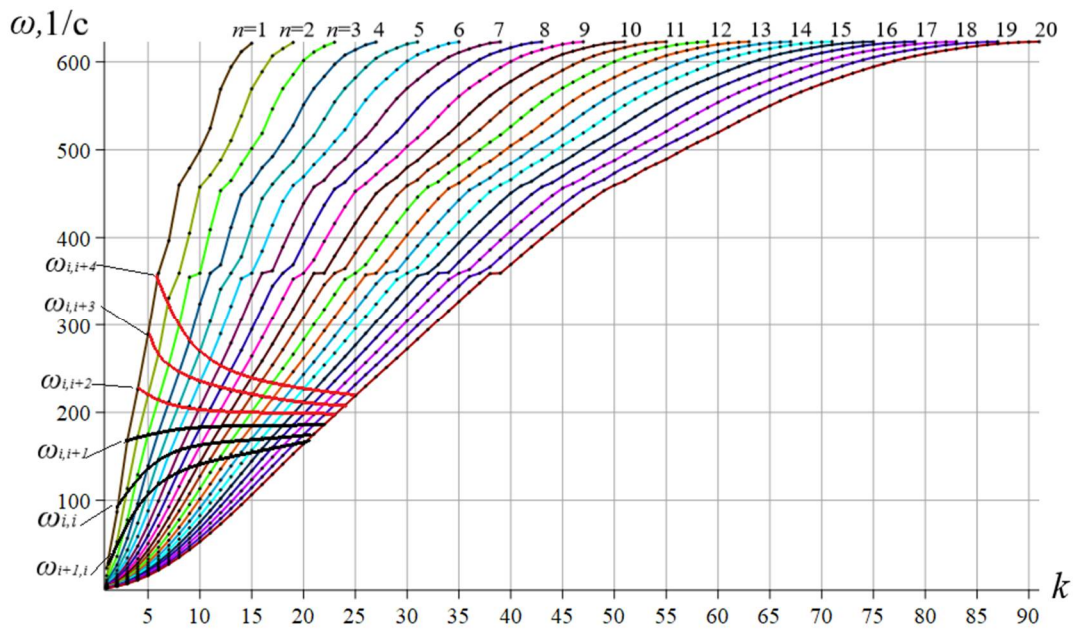


Рис. 5. Спектры семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 20$

Спектральные изолинии для низких частот показаны на рис. 6. Прослеживаются и спектральные константы $\omega_{7i,i}$, $\omega_{9i,i}$, $\omega_{11i,i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$. Изолинии асимптотически стремятся к спектральным константам.

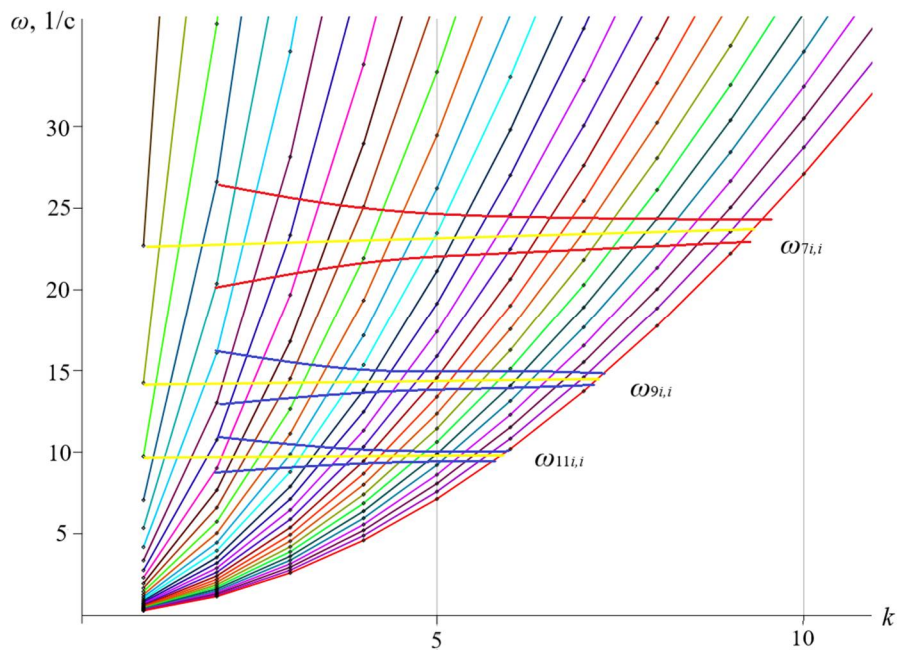


Рис. 6. Низкочастотные спектральные константы и изолинии семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 30$

Заключение. Рассмотрена новая схема арочной фермы. Различными методами получены две аналитические формулы зависимости основной частоты собственных колебаний плоской фермы от числа панелей. Замечено, что точность формул растет с увеличением числа панелей. Формула, альтернативная формуле Донкерлея, оказывается не только проще, но и точнее. В картине распределения собственных частот семейства

регулярных ферм различного порядка выявлены спектральные изолинии и спектральные константы, позволяющие получать решения для ферм высокого порядка регулярности по данным расчета ферм с небольшим числом панелей.

Библиографический список

1. Lardeur, P., Arnoult, É., Martini, L., Knopf-Lenoir, C. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012. 50. Pp. 231–242. DOI:10.1016/j.finel.2011.09.013.4
2. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
5. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29-37.
6. Комерзан Е. В., Ниналалов И.Г., Свириденко О. В. Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. №4(39). С. 27-34
7. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // *Строительная механика и конструкции*. 2023. №2(37). С.17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
9. Kirsanov M., Saypulaev G., Saypulaev M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss // *AlfaBuild*. 2023. 29 Article No 2902. doi: 10.57728/ALF.29.2
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109 Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12
12. Щиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // *Строительная механика и конструкции*. 2023. №2(37). С.46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. 17. Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
14. Liu X., Zhao Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // *Applied Mathematical Modelling*. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1

References

1. Lardeur, P., Arnoult, É., Martini, L., Knopf-Lenoir, C. The Certain Generalized Stresses Method for the static finite element analysis of bar and beam trusses with variability. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2012. 50. Pp. 231–242. DOI:10.1016/j.finel.2011.09.013.4
2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021)
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4
5. Komerzan E.V., Sviridenko O. V. Analytical calculation of the deflection of a plane external statically undetermined truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*, 2021. 2(29). 29-30.
6. Komerzan E.V., Ninalalov I.G., Sviridenko O.V. Calculation of the fundamental frequency of natural vibrations of a plane model of a composite truss. *Structural mechanics and structures*. 2023. No. 4(39). Pp. 27-34
7. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2(37). Pp. 17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
9. Kirsanov, M., Saypulaev, G., Saypulaev, M. Formula for estimating the fundamental frequency of a frame-type planar truss. *AlfaBuild*. 2023. 29 Article No 2902. doi: 10.57728/ALF.29.2
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109. Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12
12. Shchigol E.D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2(37). Pp. 46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. 2021. *AlfaBuild*. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
14. Liu X., Zhao, Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories. *Applied Mathematical Modelling*. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1

FORMULA FOR CALCULATING THE FIRST FREQUENCY OF NATURAL VIBRATIONS OF AN ARCH TRUSS

M. N. Kirsanov¹, Dai Qiao², N. A. Barchenkova³

National Research University «MPEI»^{1,2}
Moscow, Russia

Voronezh State Technical University³
Russia, Voronezh

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

²Graduate student of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(919)9909759; e-mail: 228441531@qq.com

³PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)271-52-30, e-mail: barch_na@vgasu.vrn.ru

A scheme of a statically determinate arched truss of a regular type is proposed. The Dunkerley method and its simplified version are used to derive the analytical dependence of the fundamental frequency of natural oscillations on the number of panels. In the structural model, the mass of the truss is evenly distributed over its nodes, and vibrations of the nodes are assumed along the vertical axis. The truss stiffness is calculated using the Maxwell–Mohr formula. The results of analytical solutions are compared with a numerical calculation of the first frequency from the frequency spectrum of the structure. All analytical transformations are performed in the Maple symbolic mathematics system. To generalize the solution to an arbitrary number of panels, the induction method is used. An example calculation shows good agreement between the approximate analytical method and the numerical one performed taking into account all degrees of freedom of the truss. The natural frequency spectra of a family of regular trusses of various orders are analyzed. Spectral isolines and constants are found that make it possible to extrapolate solutions to trusses of a high order of regularity.

Key words: planar truss, natural frequency, Dunkerley method, induction, Maple, approximate method, Maxwell-Mohr formula, spectral isolines, spectral constants.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СХЕМ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИН В ПЛИТЕ НА ОДНОСТОРОННЕМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКЕА. Н. Аверин¹, Т. А. Аверина², И. А. Полушкина³Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}

Россия, г. Воронеж

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(910)2875332, e-mail: an_averin@mail.ru²Канд. техн. наук, доцент кафедры управления, тел.: +7(910)3498953, e-mail: ta_averina@mail.ru³Магистр кафедры строительной механики, тел.: +7(919)1832591, e-mail: polushck.irina@yandex.ru

Описываются методика и её апробация для расчета плит на одностороннем (двустороннем) упругом основании на действие постоянной и временной нагрузок с учетом раскрытия трещин. Подвижная нагрузка моделирует передвижение по плите четырехколесной опоры летательного аппарата. Упругое основание моделируется с помощью пружин, поставленных в вершинах прямоугольного конечного элемента плиты. При каждом положении временной нагрузки определяется рабочая система объекта «плита на одностороннем упругом основании», строятся смешанные линии влияния перемещений характерных точек, траектории наибольших растягивающих напряжений, объемлющие эпюры эквивалентных напряжений по первой и второй теориям прочности. Приводится алгоритм расчета плиты на упругом основании с учетом раскрытия трещин при подвижной нагрузке.

Ключевые слова: плита на упругом основании, основание Винклера, односторонние связи, метод конечных элементов, напряженно-деформируемое состояние, траектории (схемы) развития трещин, подвижная нагрузка.

Введение. В последние годы активное развитие получило строительство искусственных покрытий на аэродромах. Увеличение взлетной массы самолетов потребовало усовершенствования конструкции искусственных покрытий (взлетно-посадочных полос, рулежных дорожек, перронов, мест стоянки самолетов) и, как следствие, совершенствования методов их расчета на прочность при подвижной нагрузке.

В строительной механике как науке о прочности и жесткости деформируемых твердых тел прочно обосновался и в настоящее время занимает лидирующее положение один из численных методов анализа напряженно-деформированного состояния конструкций различного класса и назначения – метод конечных элементов (МКЭ).

Современное состояние МКЭ ориентировано на решение нелинейных задач, часто возникающих в инженерной практике.

Задача расчета железобетонных плит на одностороннем упругом основании при подвижной нагрузке относится к классу конструктивно-нелинейных.

Анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) железобетонных конструкций следует выполнять по предельным состояниям первой и второй групп. Расчеты по предельным состояниям первой группы включают расчет на прочность и устойчивость. Расчеты по предельным состояниям второй группы производятся с учетом возникновения и раскрытия трещин. *Усилия и деформации допускается определять в предположении упругой работы железобетонных элементов, с последующей корректировкой результатов расчета для учета влияния нелинейности их работы [1, 2].*

Вопросы поведения железобетонных конструкций с трещинами, работающих в условиях двухосного напряженного состояния, анализировались в статьях [3, 4]. По результатам опытов с железобетонными плитами, армированными ортогональной арматурой, отмечалось, что с появлением трещин закон нарастания прогибов существенно меняется и *данные упругого расчета перестают соответствовать опыту*. Вместе с тем сопоставление графиков траекторий максимальных растягивающих напряжений со схемами развития трещин, полученных по результатам экспериментов, позволило авторам [3, 4] сделать вывод о том, что *траектории главных напряжений, построенные для упругой работы железобетонных плит, определяют общую направленность развития трещин на растянутой поверхности, а величина главных растягивающих напряжений – последовательность развития трещин*. Это положение использовалось нами при прогнозировании схем развития трещин в плитах с различными условиями закрепления по контуру и в пологих оболочках [5, 6, 7].

В данной статье мы вновь будем опираться на выводы, сделанные авторами в работах [3, 4], но применительно к расчету железобетонных плит на упругом двустороннем (одностороннем) основании Винклера.

Конечно-элементная модель плиты. Пластины считаются **тонкими**, если отношение характерного размера пластины a к её толщине h находится в диапазоне $8...10 \leq a/h \leq 80...100$. Тонкие пластины относятся к классу **жестких**, если отношение максимального прогиба w_{\max} к толщине h ограничено величиной из интервала $w_{\max}/h \leq 0,2...0,5$. При таких малых прогибах основную роль играют изгибные силовые факторы (деформациями в срединной поверхности и мембранными усилиями возможно пренебречь).

Железобетонные плиты обычно относят к классу тонких жестких пластин и для них справедливы гипотезы Кирхгофа [8].

Рассмотрим прямоугольный элемент пластины, изображенный на рис. 1 [9]. Обозначим через a, b, h размеры в плане конечного элемента и толщину, а через E, μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Вектор перемещений, принятых в качестве степеней свободы, имеет вид

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}, \quad \left(z_k = \begin{bmatrix} w_k \\ \varphi_k^x \\ \varphi_k^y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} w_k \\ -\frac{\partial}{\partial y} w_k \\ \frac{\partial}{\partial x} w_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (1)$$

В дальнейшем компоненты вектора перемещений узлов пластины будем представлять в виде составного списка

$$Z = [[w_1, \varphi_1^x, \varphi_1^y], [w_2, \varphi_2^x, \varphi_2^y], [w_3, \varphi_3^x, \varphi_3^y], [w_4, \varphi_4^x, \varphi_4^y]]. \quad (2)$$

Обозначим через c вектор коэффициентов

$$c = [c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}]^T. \quad (3)$$

Поля перемещений зададим с помощью базисных функции (неполный полином 4-й степени)

$$F = [1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^3y, y^3x]^T. \quad (4)$$

Функцию прогиба в точке конечного элемента пластины представим в виде

$$w = c_1 + c_2x + c_3y + c_4x^2 + c_5xy + c_6y^2 + c_7x^3 + c_8x^2y + c_9xy^2 + c_{10}y^3 + c_{11}x^3y + c_{12}xy^3. \quad (5)$$

Полином (5) удовлетворяет бигармоническому уравнению равновесия внутри элемента, обеспечивает непрерывность перемещений между элементами, однако допускает разрыв деформаций в углах поворота между смежными элементами.

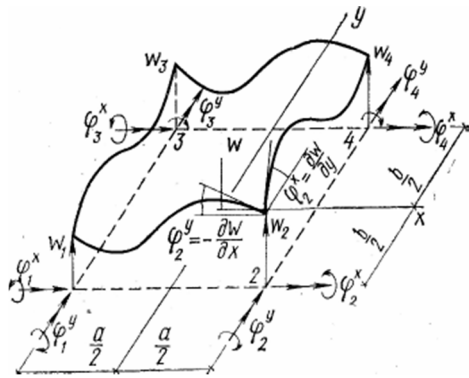


Рис. 1. Прямоугольный конечный элемент пластины

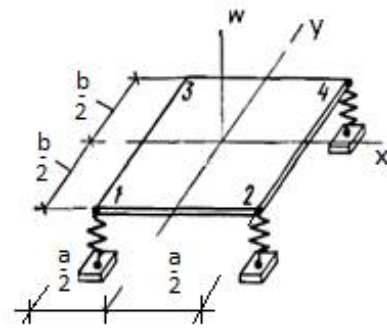


Рис. 2. Конечный элемент пластины на упругом основании

Матрица жесткости конечного элемента пластины (рис. 1) имеет вид

$$K = t \cdot r, \quad (6)$$

где r – матрица,

$$t = \frac{E h^3}{180 (-\mu^2 + 1) a b}, \quad \alpha = \frac{b}{a}, \quad \beta = \frac{a}{b}. \quad (7)$$

Формулы для вычисления элементов матрицы r в обозначениях (7) приведены в работе [9].

Упругое (винклеровское) основание можно моделировать с помощью пружин, поставленных в вершинах прямоугольного элемента (рис. 2). При этом жесткость каждой пружины определяется по формуле

$$C = (1/4) \cdot k \cdot a \cdot b, \quad (8)$$

где a, b – размеры КЭ, k – коэффициент постели [9].

Чтобы получить матрицу жесткости H для элемента пластины на упругом основании (рис. 2), необходимо к диагональным элементам матрицы жесткости (6), соответствующим вертикальным перемещениям (w_1, w_2, w_3, w_4), добавить жесткость пружин C

$$H = K + d, \quad (9)$$

$$d = \text{diag}(C, 0, 0, C, 0, 0, C, 0, 0, C, 0, 0),$$

где d – диагональная матрица коэффициентов жесткости пружин.

Покажем возможности воспроизведения конечным элементом пластины на упругих опорах форм деформации, которые возникают при действии на пластину простейших нагрузок.

Вычислим численные значения элементов матрицы жесткости H при фиксированных значениях размеров конечного элемента a, b, h и упругих характеристик E, μ, C .

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$H \cdot V = \lambda \cdot V. \quad (10)$$

Найдем собственные числа λ и собственные векторы V числовой матрицы H , используя стандартную команду системы Maple: $\lambda = \text{Eigenvals}(H, V)$. Компоненты собственного вектора $V^{<j>}$ – это возможные перемещения узлов $Z = [[w_1, \varphi_1^x, \varphi_1^y], [w_2, \varphi_2^x, \varphi_2^y], [w_3, \varphi_3^x, \varphi_3^y], [w_4, \varphi_4^x, \varphi_4^y]]$ конечного элемента пластины.

Отметим, что матрица жесткости H конечного элемента пластины на упругих опорах симметричная и положительно определенная, следовательно, её собственные значения $\lambda_j, (j=1, 2, \dots, 12)$ положительные числа, а собственные векторы $V^{<j>}$ линейно независимые и ортогональные. Будем считать, что собственные числа упорядочены по возрастанию $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{12}$, а номера собственных векторов $V^{<1>}, V^{<2>}, \dots, V^{<12>}$ согласованы с номерами собственных чисел.

Построим формы деформации конечного элемента пластины на упругих опорах по перемещениям ее узлов, значения которых задаются компонентами собственного вектора. Скалярно умножив вектор-функцию формы конечного элемента пластинки на собственный вектор матрицы жесткости $V^{<j>}$, получим поле деформаций (форму), отвечающее каждому собственному вектору. Вектор-функция формы имеет вид [9]

$$\phi = \left[\begin{aligned} & \frac{1}{4} - \frac{3x}{4a} - \frac{3y}{4b} + \frac{2xy}{ba} + \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} - \frac{2x^3y}{ba^3} - \frac{2y^3x}{b^3a} - \frac{b}{16} - \frac{xb}{8a} - \frac{y}{8} + \frac{xy}{4a} - \frac{y^2}{4b} + \frac{xy^2}{2ba} + \frac{y^3}{2b^2} - \frac{y^3x}{b^2a} - \frac{a}{16} + \frac{x}{8} + \frac{ya}{8b} + \frac{x^2}{4a} - \frac{xy}{4b} - \frac{x^3}{2a^2} - \frac{x^2y}{2ba} + \frac{x^3y}{ba^2} \cdot \frac{1}{4} \\ & + \frac{3x}{4a} - \frac{3y}{4b} - \frac{2xy}{ba} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} + \frac{2x^3y}{ba^3} + \frac{2y^3x}{b^3a} - \frac{b}{16} + \frac{xb}{8a} - \frac{y}{8} - \frac{xy}{4a} - \frac{y^2}{4b} - \frac{xy^2}{2ba} + \frac{y^3}{2b^2} + \frac{y^3x}{b^2a} - \frac{a}{16} + \frac{x}{8} - \frac{ya}{8b} - \frac{x^2}{4a} - \frac{xy}{4b} - \frac{x^3}{2a^2} + \frac{x^2y}{2ba} + \frac{x^3y}{ba^2} \cdot \frac{1}{4} \\ & + \frac{3x}{4a} + \frac{3y}{4b} + \frac{2xy}{ba} - \frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} - \frac{2x^3y}{ba^3} - \frac{2y^3x}{b^3a} - \frac{b}{16} - \frac{xb}{8a} - \frac{y}{8} - \frac{xy}{4a} + \frac{y^2}{4b} + \frac{xy^2}{2ba} + \frac{y^3}{2b^2} + \frac{y^3x}{b^2a} - \frac{a}{16} + \frac{x}{8} + \frac{ya}{8b} - \frac{x^2}{4a} + \frac{xy}{4b} - \frac{x^3}{2a^2} - \frac{x^2y}{2ba} - \frac{x^3y}{ba^2} \cdot \frac{1}{4} \\ & - \frac{3x}{4a} + \frac{3y}{4b} - \frac{2xy}{ba} + \frac{x^3}{a^3} - \frac{y^3}{b^3} + \frac{2x^3y}{ba^3} + \frac{2y^3x}{b^3a} - \frac{b}{16} + \frac{xb}{8a} - \frac{y}{8} + \frac{xy}{4a} + \frac{y^2}{4b} - \frac{xy^2}{2ba} + \frac{y^3}{2b^2} - \frac{y^3x}{b^2a} - \frac{a}{16} + \frac{x}{8} - \frac{ya}{8b} + \frac{x^2}{4a} + \frac{xy}{4b} - \frac{x^3}{2a^2} + \frac{x^2y}{2ba} - \frac{x^3y}{ba^2} \cdot \frac{1}{4} \end{aligned} \right] \quad (11)$$

Ниже приведен упорядоченный список собственных чисел матрицы N :

[[1., 1652.65], [2., 2008.76], [3., 2366.20], [4., 2540.42], [5., 3005.61], [6., 4155.83], [7., 4385.61], [8., 4627.79], [9., 35000.0], [10., 48704.6], [11., 76372.4], [12., 88147.3]].

На рис. 3 а представлена срединная поверхность пластинки (форма №1), отвечающая собственному вектору

$$V^{<1>} = [[0., -0.468051, -0.175863], [0., -0.468051, 0.175863], [0., 0.468051, 0.175863], [0., 0.468051, -0.175863]].$$

Уравнение срединной поверхности пластинки – гиперболический параболоид

$$w_1 = -0.1758633372x^2 + 0.3343224084y^2 - 0.1198521458. \quad (12)$$

При вычислении полинома (12) слагаемые с коэффициентами по модулю меньше $\varepsilon = 10^{-7}$ отброшены. Отметим, что точки опирания пластины на пружины не перемещаются, т.е. пружины не деформируются. Срединная поверхность пластинки принимает седлообразную форму. Такая форма возникает у пластинки, свободной от закрепления, если её загрузить моментами $M_x = m$ по двум противоположным кромкам контура (рис. 3 б). Благодаря влиянию коэффициента Пуассона пластина изгибается не только в плоскости действия моментов $M_x = m$, но и получает обратный выгиб в перпендикулярной плоскости.

На рис. 4 а представлена срединная поверхность пластинки (форма №6), отвечающая собственному вектору

$$V^{<6>} = [[0., -0.175863, 0.468051], [0., -0.175863, -0.468051], [0., 0.175863, -0.468051], [0., 0.175863, 0.468051]].$$

Уравнение срединной поверхности пластинки – параболоид вращения

$$w_6 = 0.4680513716x^2 + 0.1256166694y^2 - 0.1785650111. \quad (13)$$

Перемещения точек упругого опирания пластины равны нулю, пружины не деформируются. Такая форма возникает у пластинки, свободной от закрепления, если её загрузить моментами $M_x = m_1 = const, M_x = m_2 = const$ по двум противоположным кромкам контура рис. 4 б (чистый изгиб пластины).

На рис. 5 а представлена срединная поверхность пластинки (форма №9), отвечающая собственному вектору

$$V^{<9>} = [[0.5, 0, 0], [0.5, 0, 0], [0.5, 0, 0], [0.5, 0, 0]].$$

Уравнение срединной поверхности имеет вид

$$w_9 = 0.5 \quad (14)$$

Пластинка перемещается как твердое тело, а пружины в угловых точках сжимаются на одну и ту же величину. На рис. 5 б показана схема загрузки пластинки (равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , приведена к узловым силам $P = q \cdot a \cdot b / 4$).

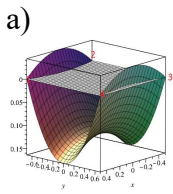


Рис. 3. Форма №1

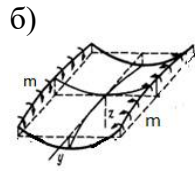


Рис. 4. Форма №6

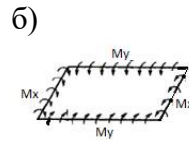
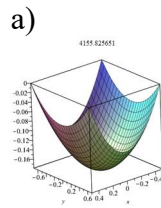
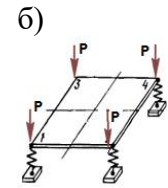
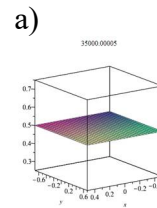


Рис. 5. Форма №9



На рис. 6, 7, 8 показаны срединные поверхности пластинок, отвечающие собственным векторам:

$$V_3 = [[0.010154, 0.49496, 0.0700237], [-0.0101545, -0.494968, 0.0700237], [-0.0101545, 0.494968, 0.0700237], [0.0101545, -0.494968, 0.0700237]]$$

$$V_{10} = [[0.490378, 0.0965888, -0.0141264], [0.490378, 0.0965888, 0.0141264], [-0.490378, 0.0965888, -0.0141264], [-0.490378, 0.0965888, 0.0141264]]$$

$$V_{12} = [[-0.478612, -0.0105934, 0.144286], [0.478612, 0.0105934, 0.144286], [0.478612, -0.0105934, 0.144286], [-0.478612, 0.0105934, 0.144286]]$$

Отметим, что абсолютные значения величин прогибов и углов поворота для каждого узла в пределах одного собственного вектора одинаковые и отличаются только знаком. Соответствующие срединные поверхности пластинок изгибаются по цилиндрическим поверхностям

$$\begin{aligned} w_3 &= (-0.09942934464 x^2 + 0.7070975038 y^2 - 0.3419294406) x, \\ w_{10} &= (0.02018059340 x^2 + 0.8133973949 y^2 - 1.104150562) y, \\ w_{12} &= (-2.203019869 x^2 - 0.01513344961 y^2 + 1.515393843) x. \end{aligned} \quad (15)$$

Цилиндрическим называется изгиб пластины, при котором её срединная поверхность изгибается по цилиндрической поверхности. При этом одна из кривизн изогнутой поверхности равна нулю. На рис. 6, 7, 8 упругие связи в угловых точках пластины попарно сжаты и растянуты на одну и ту же величину.

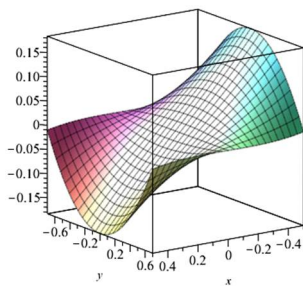


Рис. 6. Форма №3

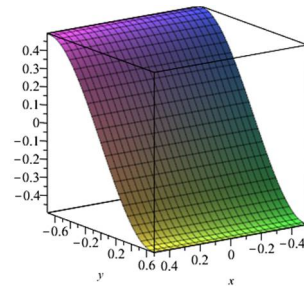


Рис. 7. Форма 10

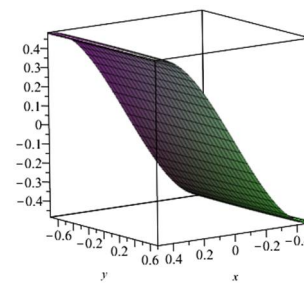


Рис. 8. Форма №12

На рис. 9, 10, 11 показаны срединные поверхности пластинок, отвечающие собственным векторам $V^{<4>}, V^{<5>}, V^{<11>}$. Соответствующие уравнения срединных поверхностей имеют вид

$$\begin{aligned} w_4 &= (0.2243611152 x^2 - 0.8932639025 y^2 + 0.2606727713) xy, \\ w_5 &= (1.025906526 x^2 - 0.2226849401 y^2 + 0.04711820054) xy, \\ w_{11} &= -(3.016829388 x^2 + 1.522724132 y^2 - 2.910437413) xy. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что упругие связи в смежных узлах пластинок работают на растяжение и сжатие в противофазе, а срединные поверхности подвергаются деформациям изгиба и кручения.

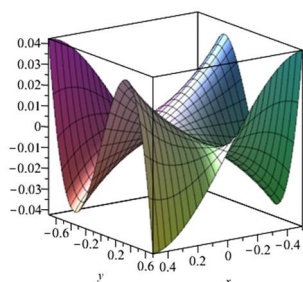


Рис. 9. Форма №4

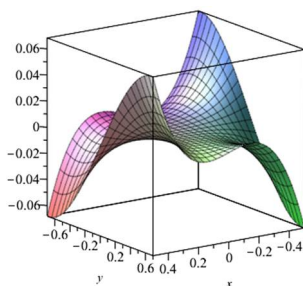


Рис. 10. Форма №5

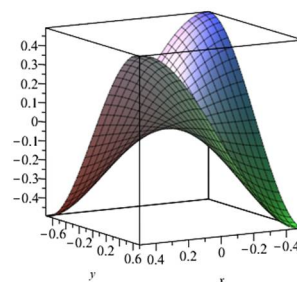


Рис. 11. Форма №11

На рис. 12, 13, 14 представлены формы № 2, 7, 8, отвечающие собственным векторам $V^{<2>}$, $V^{<7>}$, $V^{<8>}$. Уравнения изогнутых срединных поверхностей имеют вид

$$\begin{aligned} w_2 &= (-0.6908101532x^2 + 0.1131803737y^2 + 0.1329823702)y, \\ w_7 &= (-0.1804942046x^2 - 0.3422343064y^2 + 0.0742574277)y, \\ w_8 &= (0.3698881776x^2 + 0.09994088179y^2 + 0.1471929292)x. \end{aligned} \quad (17)$$

Упругие связи в угловых точках пластины (рис. 12, 13, 14) попарно сжаты и растянуты на одну и ту же величину.

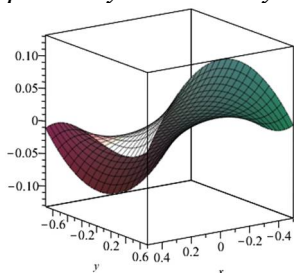


Рис. 12. Форма №2

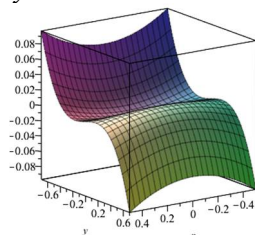


Рис. 13. Форма №7

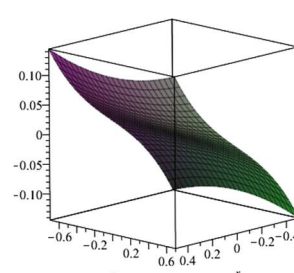


Рис. 14. Форма №8

Геометрические и жесткостные параметры плиты. Прямоугольная плита с размерами в плане 4×5.6 м, и толщиной $h = 0.15$ м, опирается по всей площади на двустороннее винклеровское основание с коэффициентом постели грунта $k = 10000$ кН/м³. Модуль упругости $E = 3.25 \cdot 10^7$ кН/м²; коэффициент Пуассона $\mu = 0.2$; удельный вес материала $\rho_0 = 2.75$ т/м³ = 26.9683 кН/м³. Плита изготовлена из бетона класса по прочности на растяжение при изгибе не ниже *B1b*4.0 и класса по прочности на сжатие не ниже *B*30, согласно ГОСТ 25912-2015. Армирование плиты производится в два ряда армирующей сетки (нижний слой и верхний слой) с применением арматуры класса А400.

Расчетные нагрузки. Расчет плиты выполняется на действие постоянной и временной нагрузок методом конечного элемента. Для плиты используется конечно-элементная сетка 16×16 . Размер КЭ 0.25×0.35 м.

Интенсивность постоянной нагрузки $q = \rho_0 \cdot h = 4.045245$ кН/м². Под действием постоянной нагрузки происходит равномерная осадка плиты на 0.405 мм.

Схема приложения временной нагрузки подобрана так, чтобы смоделировать передвижение по плите четырехколесной опоры летательного аппарата. На рис. 15 показана опора пассажирского самолета Boeing 767-300F.



Рис. 15. Четырехколесная опора пассажирского самолета Boeing 767-300

Временная нагрузка прикладывается на четыре участка плиты размерами 1×1.4 м (рис. 16). Каждый загруженный участок есть отпечаток пневматики колеса эквивалентной нагрузки (**пятно нагрузки** рис. 17). Участки с временной нагрузкой находятся на расстоянии $0,5$ м вдоль оси x и $0,7$ м в направлении оси y (рис. 16). Интенсивность поверхностных сил на каждом участке равна 150 кН/м^2 , равнодействующая 210 кН . Загруженный участок разбивается на 16 КЭ. Поверхностные силы приводится в узлы конечно-элементной сетки (рис. 17).

Временная нагрузка перемещается по плите слева направо с шагом 0.25 м. Таким образом, фиксируется 25 схем различных положений временной нагрузки на плите. Схеме расположения нагрузки по центру плиты (рис. 16) соответствует порядковый № 13.

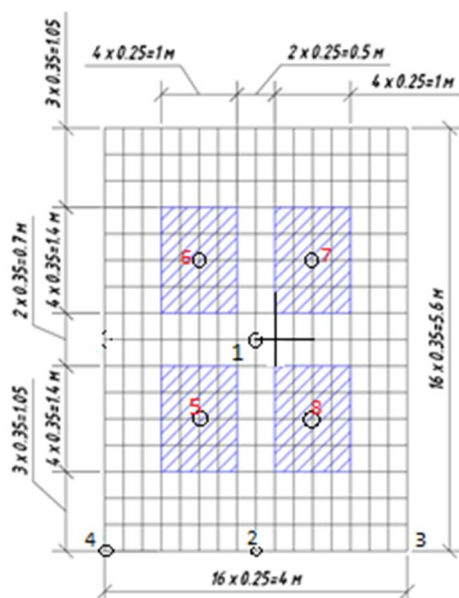


Рис. 16. Схема приложения подвижной нагрузки по центру плиты

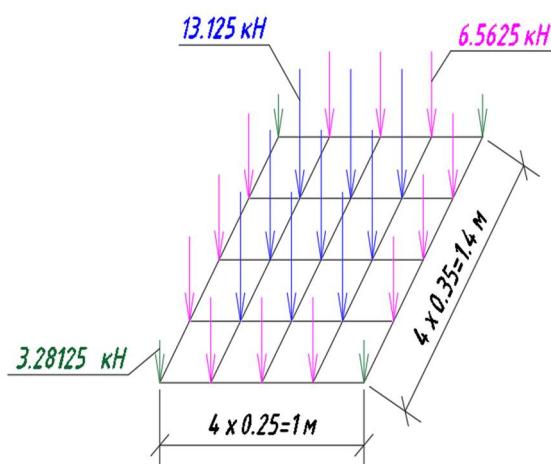


Рис. 17. Пятно нагрузки

Для оценки напряженно-деформированного состояния выберем на нижней ($z = -h/2$), срединной ($z = 0$) и верхней ($z = h/2$) поверхностях плиты две группы характерных точек (рис. 16). Точки с фиксированными координатами: $T_1(x = 2; y = 2.8)$ – центр плиты; $T_2(x = 0; y = 2.8)$ – середина короткой стороны $T_3(x = 0; y = 0)$ – угловая точка; $T_4(x = 0; y = 5.6)$ – угловая точка. Координаты точек 5, 6, 7, 8 меняются в зависимости от расположения подвижной нагрузки на плите: $T_{5,6,7,8}(x; y)$ – центры пятен нагрузки.

Алгоритм расчета на подвижную нагрузку плиты на двустороннем упругом основании Винклера

1. Фиксируем положение временной нагрузки на плите.
2. Формируем вектор узловых сил и решаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), определяем вектор перемещений узлов. Поле перемещений в пределах каждого КЭ определяется как скалярное произведение вектора перемещения узлов КЭ и вектора функции формы.

3. Вычисляем изгибающие M_x, M_y и крутящие M_{xy} моменты.

4. На нижней (верхней) поверхности плиты в центре тяжести КЭ вычисляем:

4.1. Нормальные и касательные напряжения:

$$\sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau_{xy} = \pm \frac{6M_{xy}}{h^2}; \quad (18)$$

4.2. Главные напряжения, положение главных площадок:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \operatorname{tg}(\alpha_{\max}) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_x}. \quad (19)$$

4.3. Определяем вид двухосного напряженного состояния в точке (рис. 18 а, 18 б, 18 в).

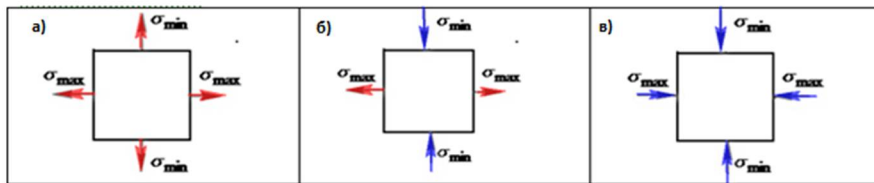


Рис. 18. Виды двухосного напряженного состояния в точке поверхности: «двухстороннее растяжение»; «растяжение-сжатие», «двухстороннее сжатие»

4.4. Строим картину напряженного состояния (КНС) – векторное поле главных напряжений $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$.

4.5. Выполняем переход от двухосного к трехосному напряженному состоянию с главными напряжениями $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ по формулам:

$$\begin{aligned} (\sigma_{\max} > 0; \sigma_{\min} > 0;), \quad \sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = \sigma_{\min}; \sigma_3 = 0; \\ (\sigma_{\max} < 0; \sigma_{\min} < 0;), \quad \sigma_1 = 0; \sigma_2 = \sigma_{\max}; \sigma_3 = \sigma_{\min}; \\ (\sigma_{\max} > 0; \sigma_{\min} < 0;), \quad \sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_{\min}. \end{aligned} \quad (20)$$

4.6. Изображаем траектории наибольших растягивающих напряжений σ_1 , строим схему развития трещин.

Под траекторией наибольших растягивающих напряжений будем понимать линию, в каждой точке которой касательная совпадает с направлением главной площадки, где действует главное напряжение σ_1 , определяемое по формулам (20).

4.7. Вычисляем эквивалентные напряжения по первой (критерий наибольших нормальных напряжений) и второй (критерий наибольших относительных удлинений) теориям прочности

$$\sigma_{\text{ЭК}}^{<1>} = \sigma_1, \quad (21)$$

$$\sigma_{\text{ЭК}}^{<2>} = \sigma_1 - \mu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3). \quad (22)$$

4.8. Определяем глобальные максимумы эквивалентных напряжений по всему полю напряжений: $\sigma_{об}^{<1>} = \max(\sigma_{ЭК}^{<1>}), \sigma_{об}^{<2>} = \max(\sigma_{ЭК}^{<2>})$. Фиксируем КЭ (номера КЭ), в центрах которых эквивалентные напряжения максимальны. Значения напряжений $\sigma_{об}^{<1>}, \sigma_{об}^{<2>}$ –

принимаются в качестве ординат *объемлющих* эпюр эквивалентных напряжений (при заданном положении временной нагрузки).

4.9. Определяем значения перемещений характерных точек срединной поверхности и напряжений в характерных точках нижней поверхности плиты. *Строим графики изменения искомых величин в зависимости от положения временной нагрузки (смешанные линии влияния).*

Алгоритм расчета на подвижную нагрузку плиты на одностороннем упругом основании. При расчете плиты на одностороннем упругом основании на подвижную нагрузку необходимо учитывать включение и выключение упругих опор в момент отрыва плиты от основания. Следовательно, будем решать поставленную задачу как конструктивно-нелинейную систему, применяя итерационный алгоритм, предложенный И.М. Рабиновичем [10].

На первой итерации алгоритма полагается, что связи в узлах двусторонние. В результате расчета находятся величины прогибов плиты в узлах. По знакам найденных прогибов отмечаются те из узловых связей, в которых возникли растягивающие усилия. Связи в зоне растягивающих усилий исключаются из расчетной схемы на второй итерации. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока в системе не останется «неправильно работающих» односторонних связей. Полученная таким образом расчетная схема объекта «плита на одностороннем упругом основании» называется рабочей системой (РС). *Исключение связей приводит к корректировке матрицы жесткости системы «плита на упругом основании», однако корректируются только отдельные элементы матрицы жесткости, стоящие на главной диагонали. В этом существенное преимущество модели одностороннего упругого основания Винклера.*

Алгоритм И.М. Рабиновича не гарантирует сходимости итерационного процесса и может приводить к закливанию, кроме того после удаления узловых связей полученная в результате система может оказаться геометрически изменяемой [11]. Возможна модификация алгоритма, позволяющая избежать закливания. В этом случае на итерации исключаются связи с максимальной величиной растягивающих усилий, а не все растянутые. Для расчета упругих систем с односторонними связями применяют математически обоснованные методы, которые сводят данную задачу к решению задачи квадратичного программирования [11]. В работе [12] для расчета систем с односторонними связями авторами также использовались итерационный алгоритм и метод квадратичного программирования.

Анализ НДС плиты при различных положениях временной нагрузки

На рис. 19 показана схема загрузки плиты по центру (схема № 13). На рис. 20 представлена изогнутая срединная поверхность, зеленым цветом отмечен уровень равномерной осадки плиты ($w_q = 0.405 \text{ мм}$) от действия постоянной нагрузки. *Отметим, что прогибы во всех точках плиты положительны и все упругие связи работают на сжатие, т.е. включены в работу.* Таким образом, рабочая система (РС) объекта «Плита на одностороннем упругом основании» найдена. Рабочую систему с полным набором упругих связей в узлах будем называть базисной рабочей системой (БРС).

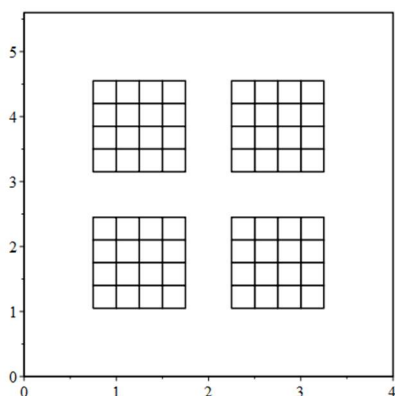


Рис. 19. Схема загрузки плиты № 13

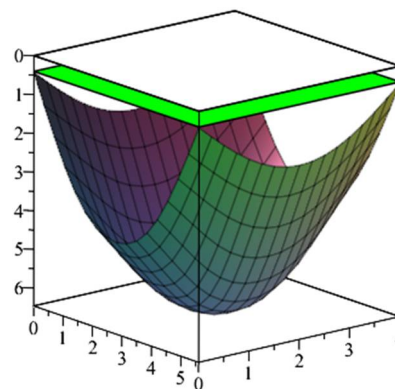


Рис. 20. Срединная поверхность плиты
 $0.405\text{ мм} \leq w(x, y) \leq 6.46\text{ мм}$

На рис. 21, 22 показаны поля главных напряжений $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ в точках нижней поверхности плиты. На рис. 23 представлено поле эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{эк}}^{<2>}$. Значение $\sigma_{об}^{<1>} = \max(\sigma_{\max}(x, y))$, принимается в качестве ординаты объемлющей эпюры эквивалентных напряжений (5.318 МПа) по первой теории прочности. Значение $\sigma_{об}^{<2>} = \max(\sigma_{\text{эк}}^{<2>}(x, y))$ принимается в качестве ординаты объемлющей эпюры эквивалентных напряжений (4.378 МПа) по второй теории прочности.

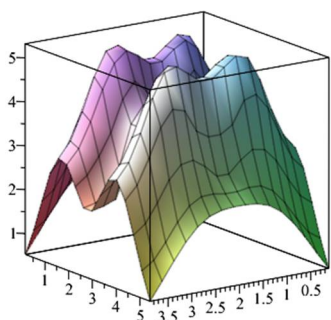


Рис. 21
 $0.524\text{ МПа} \leq \sigma_{\max} \leq 5.318\text{ МПа}$

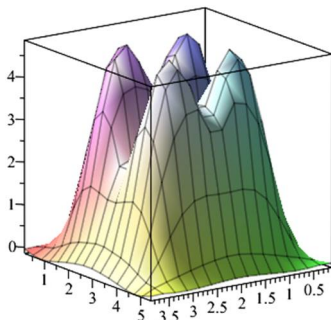


Рис. 22
 $-0.152\text{ МПа} \leq \sigma_{\min} \leq 4.866\text{ МПа}$

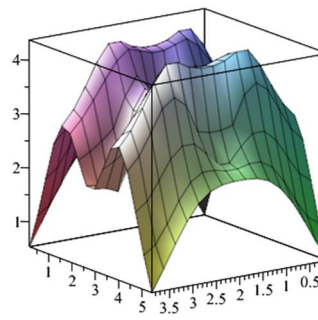


Рис. 23
 $0.533\text{ МПа} \leq \sigma_{\text{эк}}^{<2>} \leq 4.378\text{ МПа}$

На рис. 24 в окрестности точек нижней поверхности плиты показано векторное поле напряжений $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ – картина напряженного состояния (КНС). Растягивающие напряжения на рисунке отмечены красным цветом, а сжимающие – синим. О величинах интенсивности напряжений двухосного состояния можно судить по ординатам эпюр рис. 21, 22. Практически во всех точках нижней поверхности плиты имеет место двухстороннее растяжение ($\sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = \sigma_{\min}; \sigma_3 = 0$) и только в точках контура плиты (вблизи прямых углов) имеет место «растяжение - сжатие» ($\sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_{\min}$).

На рис. 25 показаны траектории наибольших растягивающих напряжений σ_1 . Линии траекторий (площадки, перпендикулярно которым действуют напряжения σ_1) окрашены в различные цвета в соответствии с мозаикой интенсивности напряжений σ_1 . Прямоугольниками черного цвета отмечены места приложения нагрузки. Наибольшие растягивающие напряжения $\sigma_1 = 5.318\text{ МПа}$ действуют на площадках, проходящих через центры тяжести четырех конечных элементов, которые на рис. 25 выделены прямоугольниками красного цвета.

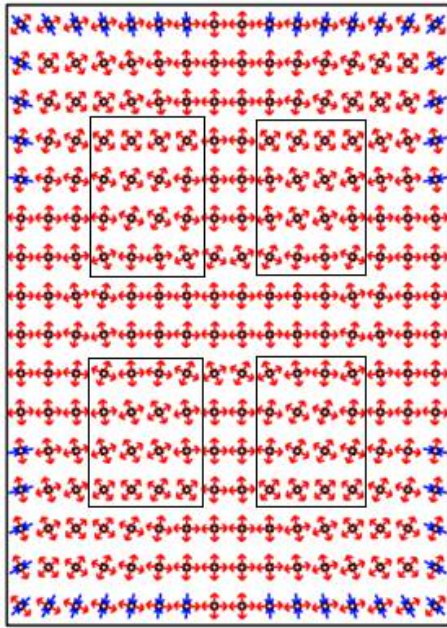


Рис. 24. Векторное поле σ_{\max} , σ_{\min} .

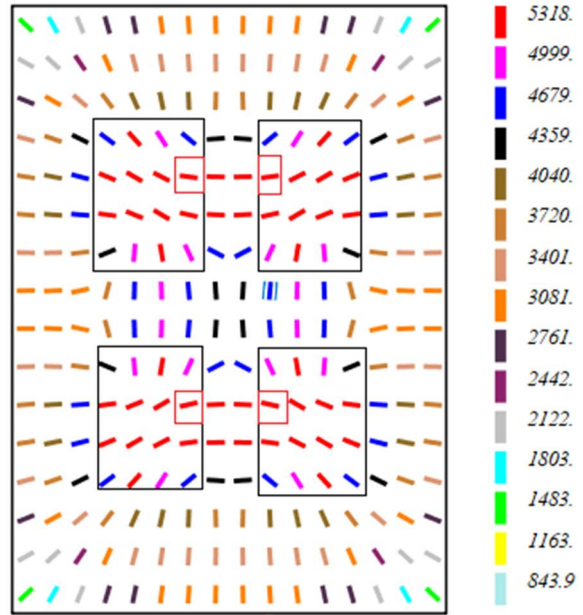


Рис. 25. Траектории σ_1

На рис. 26 показано загрузку плиты по схеме № 4. На противоположной стороне от места приложения нагрузки на срединной плоскости плиты отмечены узлы конечно-элементной сетки: 75 шт. – красным цветом; 32 шт. – синим; 17 шт. – зелёным. Отмеченные узлы удалялись из объектов «плита на двустороннем упругом основании» при поиске рабочей системы на 1-й, 2-й и 3-й итерациях соответственно. Искомая рабочая система объекта «плита на одностороннем упругом основании» получена в результате удаления из БРС 124 узловых связей. На рис. 27 представлены изогнутые срединные поверхности, полученные по результатам расчетов плит на одностороннем ($w_{одност}$) и двустороннем ($w_{двуст}$) основаниях.

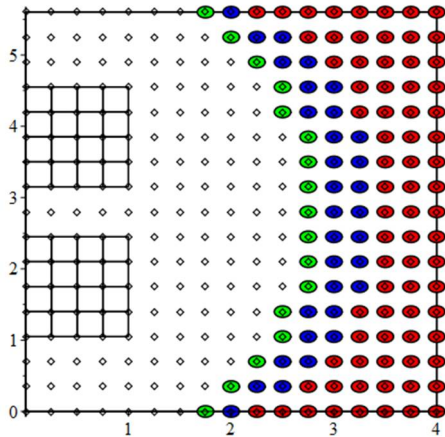


Рис. 26. Схема нагрузки № 4 и количество связей, удаляемых на итерациях при нахождении РС (75+32+17=124)

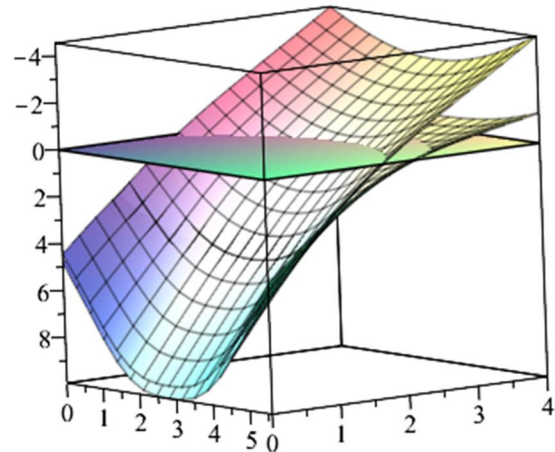


Рис. 27. Изогнутые срединные поверхности $-4.551\text{мм} \leq w_{одност}(x, y) \leq 9.950\text{мм}$
 $-1.285\text{мм} \leq w_{двуст}(x, y) \leq 9.414\text{мм}$

На рис. 28, 29, 30 показаны поля главных напряжений σ_{\max} , σ_{\min} и эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{эк}}^{<2>}$ в точках нижней поверхности плиты.

Наибольшее значение напряжения $\sigma_{об}^{<1>} = \max(\sigma_1(x, y))$ принимается в качестве ординаты объемлющей эпюры эквивалентных напряжений (5.414 МПа) по первой теории прочности.

Наибольшее значение напряжения $\sigma_{об}^{<2>} = \max(\sigma_{эк}^{<2>}(x, y))$ принимается в качестве ординаты объемлющей эпюры эквивалентных напряжений (5.395 МПа) по второй теории прочности.

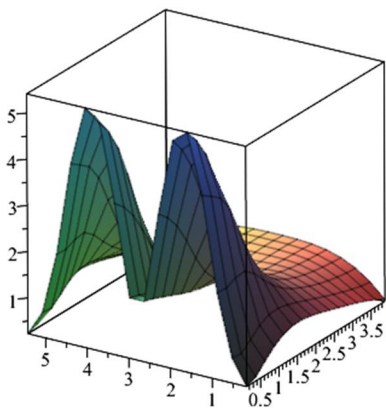


Рис. 28

$$0.228 \text{ МПа} \leq \sigma_{\max}(x, y) \leq 5.414 \text{ МПа}$$

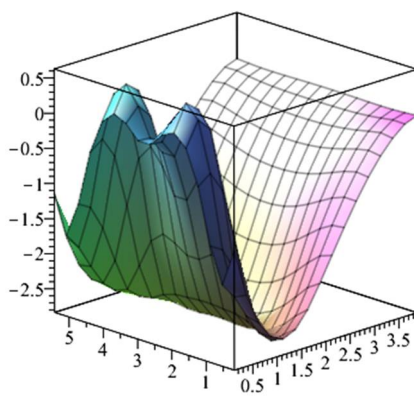


Рис. 29

$$-2.835 \text{ МПа} \leq \sigma_{\min}(x, y) \leq 0.629 \text{ МПа}$$

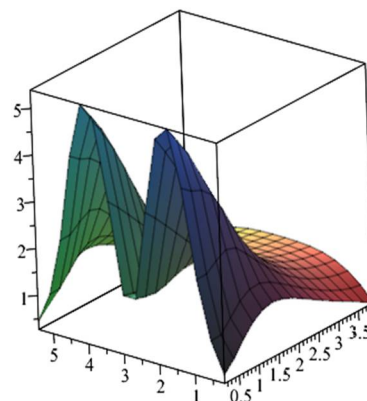


Рис. 30

$$0.275 \text{ МПа} \leq \sigma_{эк}^{<2>} \leq 5.395 \text{ МПа}$$

На рис. 31 в окрестности точек нижней поверхности плиты показано *векторное поле напряжений* σ_{\max} , σ_{\min} (КНС). О величинах интенсивности напряжений двухосного состояния можно судить по значениям ординат эпюр рис. 28, 29. В точках нижней поверхности плиты в зоне приложения нагрузки имеет место двухстороннее растяжение ($\sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = \sigma_{\min}; \sigma_3 = 0$), в остальных точка имеет место «растяжение - сжатие» ($\sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_{\min}$). На рис. 32 показаны траектории наибольших растягивающих напряжений σ_1 . Линии траекторий (площадки, перпендикулярно которым действуют напряжения σ_1) окрашены в различные цвета в соответствии с мозаикой интенсивности напряжений σ_1 . Наибольшие растягивающие напряжения $\sigma_1 = 5.414 \text{ МПа}$ действуют на площадках, проходящих через центры тяжести двух конечных элементов, которые на рис. 32 выделены прямоугольниками красного цвета.

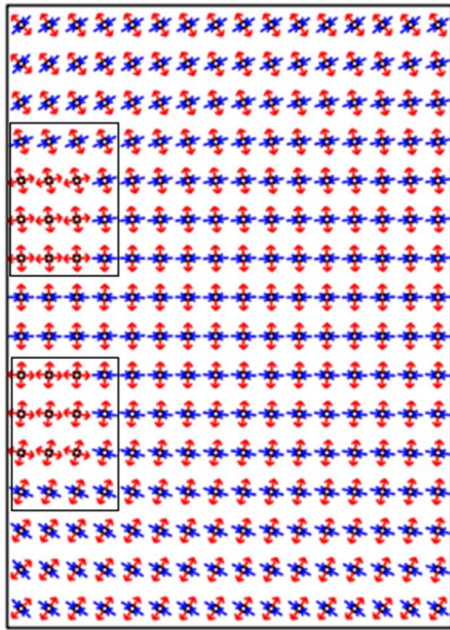


Рис. 31. КНС

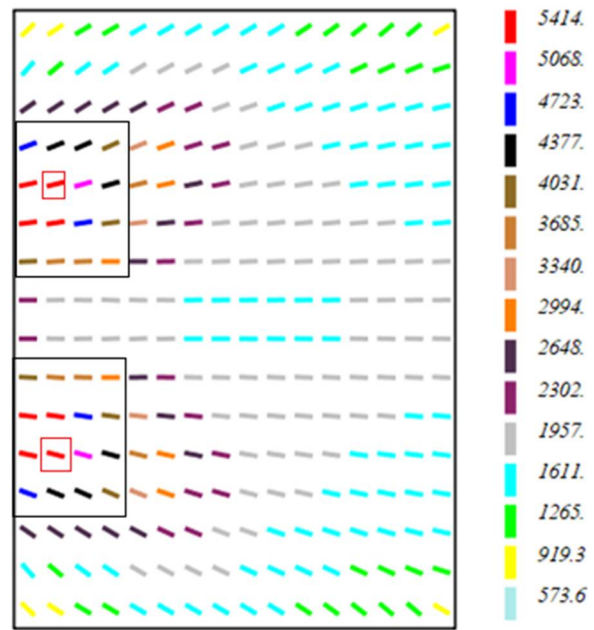


Рис. 32. Траектории σ_1

На рис. 33 показано загрузку плиты по схеме №10. На противоположной стороне от места приложения нагрузки на срединной плоскости плиты отмечены узлы конечно-элементной сетки: 24 шт. – красным цветом; 4 шт. – синим. Отмеченные узлы удалялись из объектов «плита на двустороннем упругом основании» при поиске рабочей системы на 1-й и 2-й итерациях соответственно. Искомая рабочая система объекта «плита на одностороннем упругом основании» получена в результате удаления из БРС 28 узловых связей.

На рис. 34 представлены изогнутые срединные поверхности, полученные по результатам расчетов плит на одностороннем ($w_{одност}$) и двустороннем ($w_{двуст}$) основаниях.

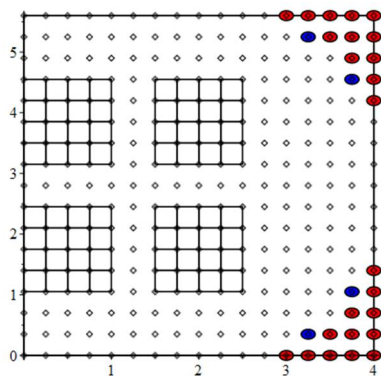


Рис. 33. Схема нагрузки № 10 и количество связей, удаляемых на итерациях при нахождении РС (24+4=28)

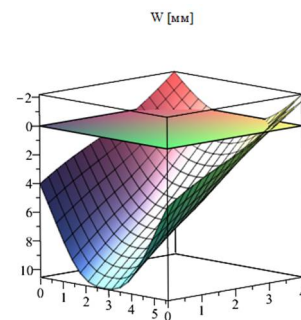
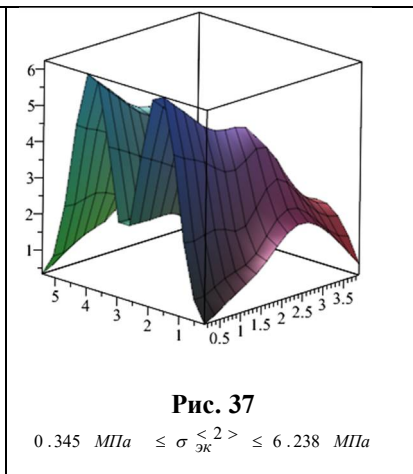
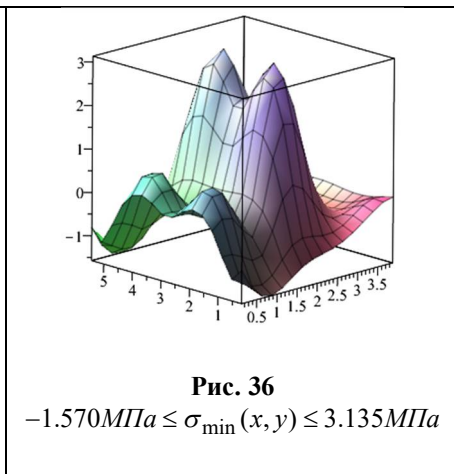
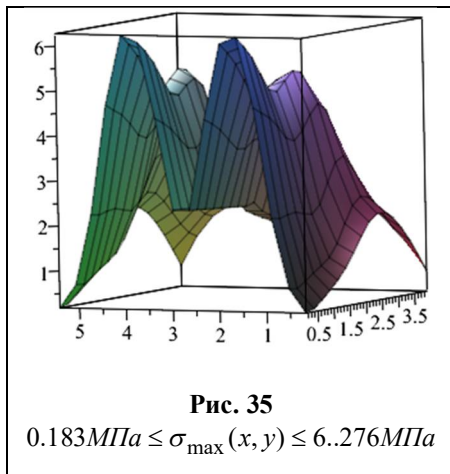


Рис. 34. Изогнутые срединные поверхности
 $-2.193\text{ мм} \leq w_{одност}(x, y) \leq 10.541\text{ мм}$
 $-1.285\text{ мм} \leq w_{двуст}(x, y) \leq 9.414\text{ мм}$

На рис. 35, 36, 37 показаны поля главных напряжений σ_{\max} , σ_{\min} и эквивалентных напряжений $\sigma_{\text{ЭК}}^{<2>}$ в точках нижней поверхности плиты.

Наибольшее значение напряжения $\sigma_{об}^{<1>} = \max(\sigma_1(x, y))$ принимается в качестве ординаты объемлющей эпюры эквивалентных напряжений (6.276МПа) по первой теории прочности.

Наибольшее значение напряжения $\sigma_{об}^{<2>} = \max(\sigma_{ЭК}^{<2>}(x,y))$ принимается в качестве ординаты объемлющей эпюры эквивалентных напряжений (6.238МПа) по второй теории прочности.



На рис. 38 в окрестности точек нижней поверхности плиты показано *векторное поле напряжений* σ_{\max} , σ_{\min} (КНС). О величинах интенсивности напряжений двухосного состояния можно судить по рис. 35, 36. В точках нижней поверхности плиты в зоне вблизи места приложения нагрузки имеет место двухстороннее растяжение ($\sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = \sigma_{\min}; \sigma_3 = 0$), а также «растяжение - сжатие» ($\sigma_1 = \sigma_{\max}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \sigma_{\min}$). На рис. 39 показаны траектории наибольших растягивающих напряжений σ_1 . Линии траекторий (площадки, перпендикулярно которым действуют напряжения σ_1) окрашены в различные цвета в соответствии с мозаикой интенсивности напряжений σ_1 . Наибольшие растягивающие напряжения $\sigma_1 = 6.276\text{МПа}$ действуют на площадках, проходящих через центры тяжести двух конечных элементов, которые на рис. 39 выделены прямоугольниками красного цвета.

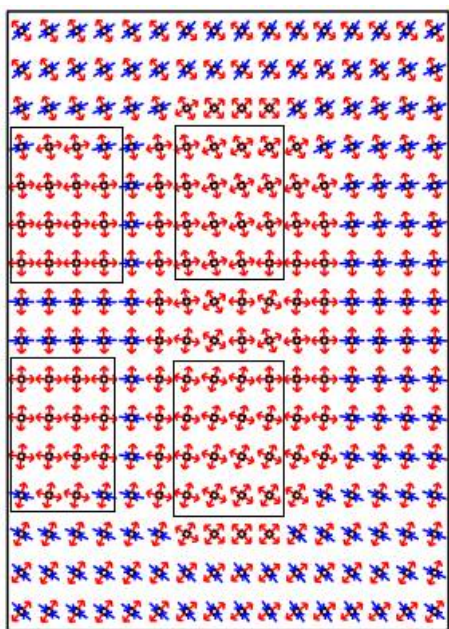


Рис. 38

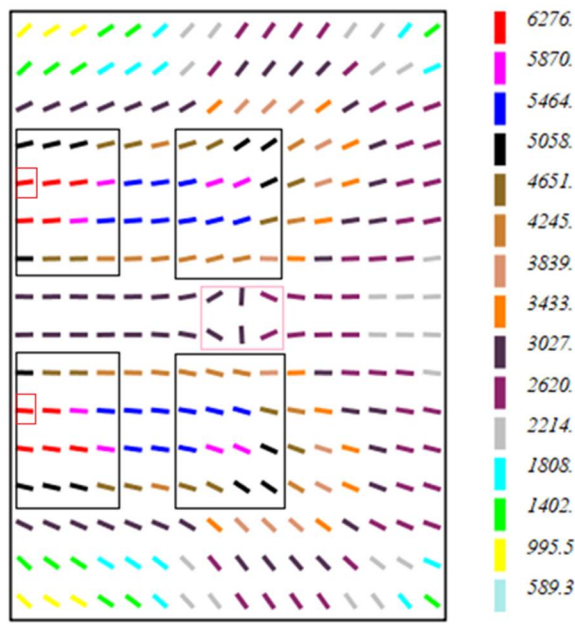


Рис. 39

На рис. 40 показан график изменения числа выключаемых связей упругого основания (при поиске рабочей системы) в зависимости от положения нагрузки на плите (номера схемы загрузки).

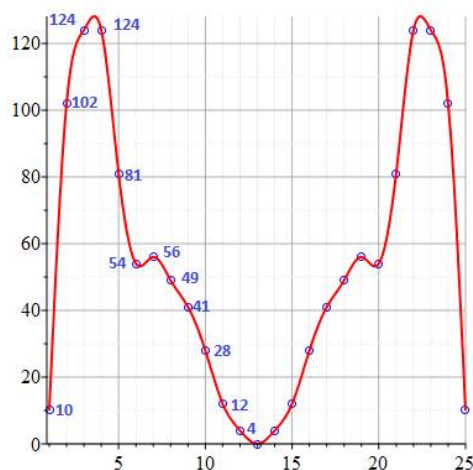


Рис. 40

По результатам расчетов были построены графики изменения перемещений характерных точек 1, 2, 3 (рис. 41, 42, 43) в зависимости от положения временной нагрузки (смешанные линии влияния). Для сравнения результатов расчета плиты на двустороннем и одностороннем основаниях полученные графики накладываем друг на друга (односторонним связям отвечает красный цвет, двусторонним – зеленый).

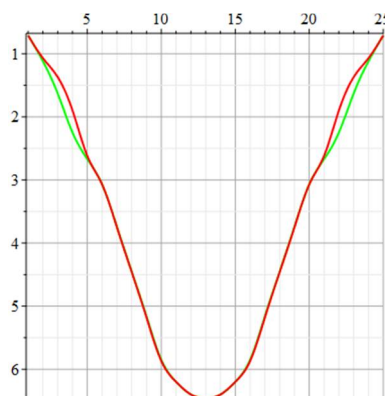


Рис. 41. Перемещения т. 1

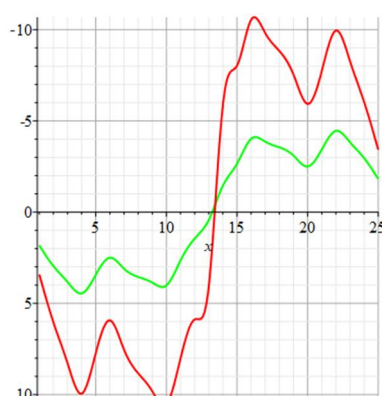


Рис. 42. Перемещения т. 2

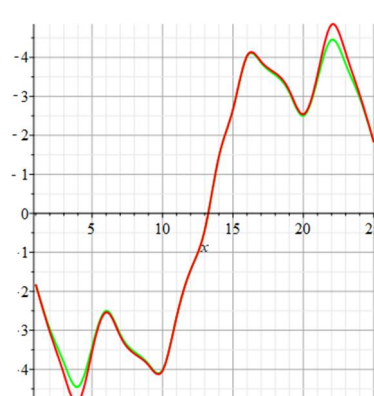


Рис. 43. Перемещения т. 3

На рис. 44 показан момент перехода нагрузки с плиты № 1 на рядом расположенную плиту № 2 (точки 1, 2, 3, 4 отмечены красным цветом). На рис. 45 показана изогнутая срединная поверхность нагруженной плиты № 1. Плита № 2 равномерно проседает под действием сил собственного веса $w_q = 0.405 \text{ мм}$. Таким образом, при переходе нагрузки с плиты № 1 на плиту № 2 четырехколесная опора (рис. 15) преодолевает неровность (высота неровности в т. 2 равна $10.541 - 0.405 = 10.126 \text{ мм}$, в т. 3, т. 4 – 4 мм). При решении задачи колебаний плит на одностороннем упругом основании под действием подвижной нагрузки неровность необходимо учитывать при задании профиля проезжей части в функции динамического давления на путь [13,14,15].

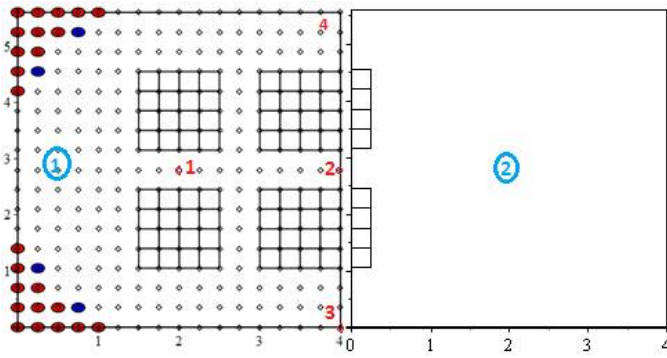


Рис. 44. Момент перехода нагрузки на рядом расположенную плиту. Схема нагрузки № 16 (24+4=28)

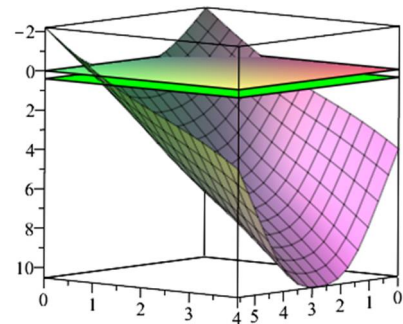


Рис. 45

$$-2.193\text{мм} \leq w_{\text{одност}}(x, y) \leq 10.541\text{мм}$$

$$-1.285\text{мм} \leq w_{\text{двуст}}(x, y) \leq 9.414\text{мм}$$

Объемлющая эпюра эквивалентных напряжений $\sigma_{об}^{<1>}$ по первой теории прочности (зеленый цвет – односторонние связи) представлена на рис. 46. На рис. 47 показана объемлющая эпюра эквивалентных напряжений $\sigma_{об}^{<2>}$ по второй теории прочности. На рис. 48 объемлющие эпюры эквивалентных напряжений по первой (красный цвет) и второй (синий) теориям прочности совмещены.

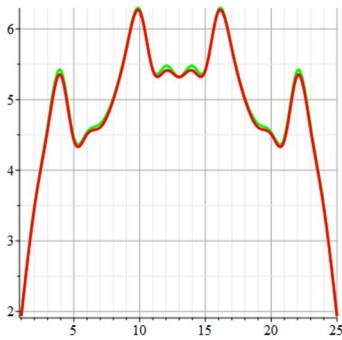


Рис. 46. $\sigma_{об}^{<1>}$

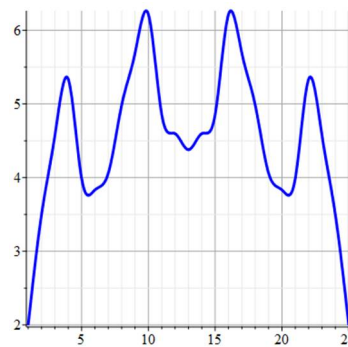


Рис. 47. $\sigma_{об}^{<2>}$

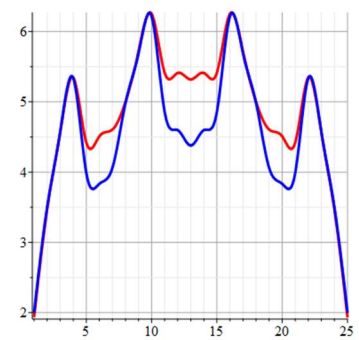


Рис. 48. $\sigma_{об}^{<1>}, \sigma_{об}^{<2>}$

Трещины понижают жесткость конструкции, облегчают доступ влаги и агрессивных газов к арматуре. В процессе образования трещин различают три этапа: возникновение трещин, когда они могут быть невидимыми, появление трещин, когда они видны невооруженным глазом (шириной 0,05...0,1мм), и раскрытие трещин до предельного возможного значения. Для конструкций с обычным содержанием арматуры можно считать, что появление трещин совпадает с их возникновением, и поэтому можно говорить о двух этапах развития трещин – их появления и раскрытия.

Для систем с односторонними связями характерно полностью обратимое упругое поведение (см. рис. 46, 47). Это свойство теряется, если допустить возможность появления трещин вдоль траекторий наибольших растягивающих напряжений при перемещении по плите сверхнормативной нагрузки. В работах [16, 17] фактор появления трещин в элементах неразрезного тонкостенного стержня учитывался понижением их изгибной жесткости, после чего корректировалась матрица жесткости стержня.

Выводы

1. Различия в ординатах объемлющих эпюр эквивалентных напряжений, вычисленных на основе первой и второй теорий прочности, для плит на двустороннем и одностороннем упругом основаниях незначительны. Поэтому момент наступления предельного состояния в точках нижней поверхности плиты (момент появления трещин)

можно фиксировать по ординатам объемлющих эпюр, построенных на основе первой (второй) теории прочности с использованием модели двустороннего упругого основания.

2. Модель двустороннего упругого основания может также быть использована при расчете плит на подвижную нагрузку с учетом раскрытия трещин.

Библиографический список

1. Методическое пособие по проектированию железобетонных пространственных конструкций покрытий и перекрытий / Б.С. Соколов и др. – М., 2019. – 210 с.
2. СП 63.13330.2018 «СНиП 52-01-2003 Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения» (с изменением № 1).
3. Гвоздев А.А., Карпенко Н.И., Крылов С.М. Теоретическое и экспериментальное исследование работы железобетона с трещинами при плоском однородном и неоднородном напряженном состояниях // Совершенствование расчета статически неопределимых железобетонных конструкций: сб. ст. НИИЖБ. – М.: Стройиздат, 1968. – С. 5-43.
4. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 206 с.
5. Аверин А.Н., Аверина Т.А. Моделирование схем развития трещин в пологих оболочках на основе траекторий наибольших растягивающих напряжений // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 3 (30). – С. 15-25.
6. Averin A., Averina T. Modeling of Crack Propagation Patterns in Reinforced Concrete Slabs Based on Principal Stress Trajectories // Proceedings - 2021 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency, SUMMA– 2021. – 2021. – № 3. – С. 105-109.
7. Аверина Т.А. Моделирование схем развития трещин в плитах и пологих оболочках на основе траекторий наибольших растягивающих напряжений // Системы управления и информационные технологии. – 2022. – № 2 (88). – С. 4-8.
8. Александров А.В., Потапов В.Д. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учебник для строит. спец. вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с.
9. Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: учебник для вузов; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
10. Рабинович И.М. Вопросы теории статического расчета сооружений с односторонними связями. – М.: Стройиздат, – 1975. – 144 с.
11. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – 4-е изд., перераб. – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2011. – 736 с.
12. Аверин А.Н., Пузаков А.Ю. Расчет систем с односторонними связями // Строительная механика и конструкции. – 2015. – № 1 (10). – С. 15-32.
13. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов. – М.: Транспорт, 1976. – 199 с.
14. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. – Воронеж: ВГУ, 1983. – 194 с.
15. Аверин А.Н. Экспериментально-теоретические исследования колебаний неразрезного пролетного строения моста под действием подвижной нагрузки // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 1 (20). – С. 41-51.
16. Аверин А.Н., Рыдченко Д.Г., Провоторова М.В. . Расчет неразрезной сталежелезобетонной балки на подвижную нагрузку с учетом раскрытия трещин // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 4 (23). – С.63-74.

17. Аверин А.Н. Расчет неразрезных тонкостенных сталежелезобетонных балок на подвижную нагрузку с учетом конструктивной нелинейности // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 1 (28). – С. 45-54.

References

1. Sokolov B.S. Methodological manual for the design of reinforced concrete spatial structures of coatings and ceilings. M., 2019. 210 p.
2. Set of Rules 63.13330.2018 "SNiP 52-01-2003 Concrete and reinforced concrete structures. Basic provisions" (amendment No. 1).
3. Gvozdev A.A., Karpenko N.I., Krylov S.M. Theoretical and experimental study of the work of reinforced concrete with cracks under flat homogeneous and inhomogeneous stress states. Improving the calculation of statically indeterminate reinforced concrete structures: collection. Art. NIIZHB. M.: Stroyizdat, 1968. Pp. 5-43.
4. Karpenko N.I. Theory of deformation of reinforced concrete with cracks. M.: Stroyizdat, 1976. 206 p.
5. Averin A.N., Averina T.A. Modeling of crack development patterns in shallow shells based on the trajectories of the highest tensile stresses. Construction Mechanics and Structures. No. 3(30). 2021. Pp. 15-25.
6. Averin A., Averina T. Modeling of Crack Propagation Patterns in Reinforced Concrete Slabs Based on Principal Stress Trajectories. Proceedings of 3rd International Conference on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency. 2021. No. 3. Pp. 105-109.
7. Averina T.A. Modeling patterns of crack development in slabs and flat shells based on trajectories of the highest tensile stresses. Control Systems and Information Technologies. No. 2(88). 2022. Pp. 4-8.
8. Aleksandrov A.V., Potapov V.D. Strength of materials. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity: a textbook for construction. M.: Higher. school, 2002. 400 p.
9. Aleksandrov A.V., Lashchenikov B.Ya., Shaposhnikov N.N. Structural Mechanics. Thin-walled spatial systems. M.: Stroyizdat, 1983. 488 p.
10. Rabinovich I.M. Questions of the theory of static calculation of structures with one-way connections. M.: Stroyizdat, 1975. 144 p.
11. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Calculation models of structures and the possibility of their analysis. 4th ed., revised. M.: SKAD SOFT Publishing House, 2011. 736 p.
12. Averin A.N., Puzakov A.Yu. Calculation of systems with one-way connections. Construction Mechanics and Structures. No. 1(10). 2015. Pp. 15-32.
13. Barchenkov A.G. Dynamic calculation of road bridges. M.: Transport, 1976. 199 p.
14. Safronov V.S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges for moving loads. Voronezh: VSU, 1983. 194 p.
15. Averin A.N. Experimental and theoretical studies of vibrations of a continuous bridge superstructure under the action of a moving load. Construction Mechanics and Structures. No. 1(20). 2019. Pp. 41-51.
16. Averin A.N., Rydchenko D.G., Provotorova M.V. Calculation of a continuous steel-reinforced concrete beam for a moving load taking into account crack opening. Construction Mechanics and Structures. No. 4(23). 2019. Pp. 63-74.
17. Averin A.N. Calculation of continuous thin-walled steel-reinforced concrete beams for moving loads taking into account structural nonlinearity. Construction Mechanics and Structures. No. 1(28). 2021. Pp. 45-54.

MODELING OF CRACK DEVELOPMENT PATTERNS IN A PLATE ON A SINGLE-SIDED ELASTIC BASE UNDER A MOBILE LOAD

A. N. Averin¹, T. A. Averina², I. A. Polushkina³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(910)2875332, e-mail: an_averin@mail.ru

²PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Management, Tel.: +7(910)3498953, e-mail: ta_averina@mail.ru

³Master of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(919)1832591, e-mail: polushck.irina@yandex.ru

The methodology and its testing for calculating slabs on a one-sided (two-sided) elastic foundation under the action of permanent and temporary loads taking into account crack opening are described. The moving load simulates the movement of a four-wheeled aircraft support on a plate. The elastic base is modeled using springs placed at the vertices of the rectangular finite element of the slab. For each position of the temporary load, the working system of the object "slab on a one-sided elastic foundation" is determined, mixed lines of influence of the movements of characteristic points, trajectories of the highest tensile stresses, and enclosing diagrams of equivalent stresses according to the first and second theories of strength are constructed. An algorithm is presented for calculating a slab on an elastic foundation taking into account crack opening under moving load.

Keywords: slab on an elastic foundation, Winkler foundation, one-way connections, finite element method, stress-strain state, crack development trajectories (patterns), moving load.

**ПОСТРОЕНИЕ ЯДРА СЕЧЕНИЯ ДЛЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ,
ОГРАНИЧЕННОГО ЛЕМНИСКАТОЙ**Л. В. Пахомова¹, П. В. Сажин², Н. С. Инкижинов³Сибирский государственный университет водного транспорта^{1,2,3}
Россия, г. Новосибирск

¹ Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой «Сопrotивление материалов и подъемно-транспортные машины», тел.: +7(913)9040057, e-mail: Пахомова_1_v@mail.ru² Канд. техн. наук, доцент, преподаватель кафедры «Сопrotивление материалов и подъемно-транспортные машины», тел.: +7(913)9563998, e-mail: pavel301080@mail.ru³ Старший преподаватель кафедры «Сопrotивление материалов и подъемно-транспортные машины», тел.: +7(913)7998152, e-mail: inkizhinov47@bk.ru

В данной работе приведен пример построения ядра сечения для поперечного сечения стержня, ограниченного кривой линией. Построение ядра сечения проводится непрерывным методом. Этот метод, в отличие от широко известного в классической литературе по сопроотивлению материалов – дискретного метода, стал применяться недавно, менее 10 лет. Используется он пока только в научных статьях в целях популяризации. Единственное отличие непрерывного метода от дискретного – в знаменателях в формулах координат ядра сечения. В непрерывном методе знаменателем является отрезок a_u или a_v , отсекаемый касательной на главных центральных осях u, v . В непрерывном методе знаменателем является двучлен $v - uv'$. Как было доказано в источнике [2], для обоих методов эти знаменатели являются тождественно равными. Однако, как следует из названий, непрерывный метод позволяет определить координаты ядра сечения аналитически, что приводит к тому, что ядро сечения становится гладкой кривой, в то время как в дискретном методе ядро сечения является многоугольником, вписанным в гладкое ядро сечения, получаемое непрерывным методом. Каковы преимущества и недостатки этих методов? Дискретный метод: преимуществом является отсутствие математики в нахождении отрезков a_u и a_v ; недостатки – необходимость построения в масштабе поперечного сечения для измерения отрезков a_u, a_v и приближенная форма ядра сечения. Непрерывный метод: преимуществами являются отсутствие необходимости построения поперечного сечения в масштабе и точное изображение ядра сечения; недостатки – дополнительное математическое действие, необходимое для вычисления производной $v' = \frac{dv}{du}$ в двучлене $a_v, v - uv'$. Однако это дополнительное действие очень мало по сравнению с определением геометрических характеристик в интегральном виде, которые необходимо определять как в дискретном, так и в непрерывном методах.

Ключевые слова: ядро сечения, лемниската, петля лемнискаты, непрерывный метод, геометрические характеристики, координаты ядра сечения.

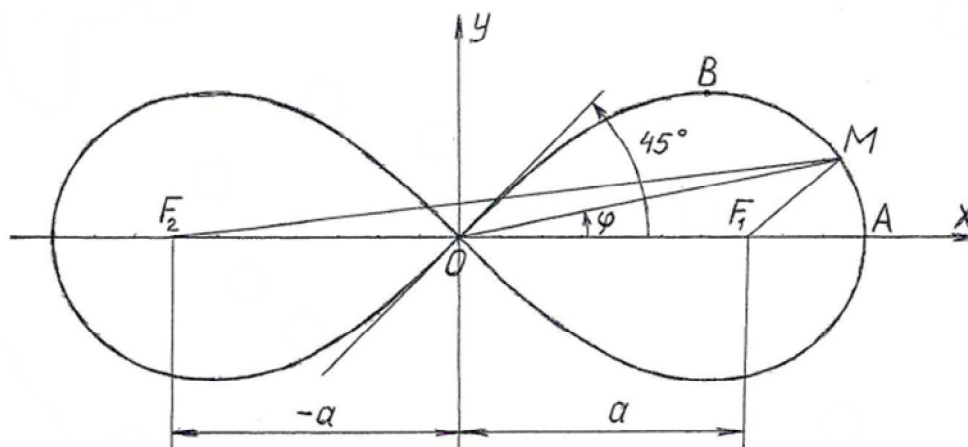


Рис. 1. Лемниската

Лемниската – это кривая, имеющая два фокуса F_1 и F_2 , лежащих на оси Ox . Эти фокусы отстоят от начала координат O на расстояние a (рис. 1). Уравнение лемнискаты в декартовых осях координат:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0. \quad (1)$$

Лемниската имеет две оси симметрии: x и y . Произведение отрезков MF_1 и MF_2 .

$$MF_1 \cdot MF_2 = a^2, \quad (2)$$

где M – текущая точка лемнискаты. Координаты точек A и B лемнискаты наиболее удаленных от осей y и x : $A(a\sqrt{2}; 0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{a}{2})$. Полярное расстояние точки M :

$$OM = \rho = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}. \quad (3)$$

Построение ядра сечения будем проводить непрерывным способом, описанным в [2]. В качестве поперечного сечения примем петлю лемнискаты, расположенную справа от оси симметрии y .

Определение геометрических характеристик

Вторая ось симметрии x позволяет провести расчет геометрических характеристик для одной из половин петли, например, для верхней полупетли.

Центр тяжести петли ввиду ее симметрии относительно оси Ox находится на этой оси. Значит, $y_c = 0$. Для определения другой координаты x_c нужно найти площадь A и статический момент площади S_y . Для нахождения геометрических характеристик будем использовать как полярные, так и декартовы координаты. Изобразим на рис. 2 верхнюю полупетлю с нанесенными полярными координатами.

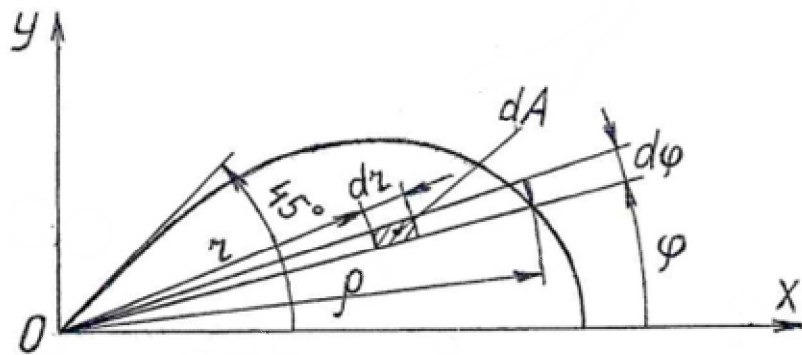


Рис. 2. Полупетля лемнискаты

Определим площадь полупетли с помощью полярных координат.

$$dA = r \cdot d\varphi \cdot dr;$$

$$A = \iint_A dA = \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\rho} r \cdot dr = \int_0^{\pi/4} d\varphi \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\rho} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} d\varphi \cdot a^2 \cdot 2 \cos 2\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi \cdot d2\varphi = \frac{a^2}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2}.$$

$$A = \frac{a^2}{2}.$$

Найдем статический момент S_y полупетли методом интегрирования в декартовых координатах (рис. 3).

$$S_y = \int_A dA \cdot x_{cp}; \quad dA = (x_2 - x_1) \cdot dy; \quad x_{cp} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Из уравнения (1) определим x и y .

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 + y^2) = 0; \tag{4}$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 = 0.$$

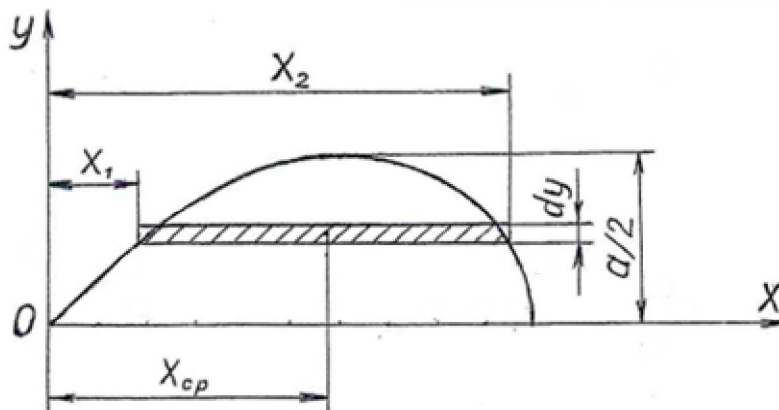


Рис. 3. Полупетля лемнискаты в декартовых координатах

Из уравнения (4) определим x , обозначив $x^2 = k$.

$$k^2 + 2ky^2 + y^4 - 2a^2k + 2a^2y^2 = 0;$$

$$k^2 - 2(a^2 - y^2)k + y^4 + 2a^2y^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= a^2 - y^2 \pm \sqrt{(a^2 - y^2)^2 - y^4 - 2a^2y^2} = a^2 - y^2 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2y^2 + y^4 - y^4 - 2a^2y^2} = \\ &= a^2 - y^2 \pm \sqrt{a^4 - 4a^2y^2} = a^2 - y^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4y^2}. \end{aligned}$$

$X = \pm\sqrt{k_{1,2}}$. Знак «минус» перед корнем принадлежит левой петле. Правой петле соответствует знак «плюс». Тогда

$$x_{1,2} = \sqrt{a^2 - y^2 \pm a\sqrt{a^2 - 4y^2}}. \quad (5)$$

Используя в уравнении (5) знак «минус», получим x_1 , а для x_2 надо использовать знак «плюс». Таким образом запишем

$$x_{1,2} = \sqrt{a^2 - y^2 - a\sqrt{a^2 - 4y^2}}; \quad (6)$$

$$x_{1,2} = \sqrt{a^2 - y^2 + a\sqrt{a^2 - 4y^2}}. \quad (7)$$

Эти величины x_1 и x_2 указаны на рис. 3.

Теперь из уравнения (4) определим y , приняв $y^2 = t$:

$$x^4 + 2x^2t + t^2 - 2a^2x^2 + 2a^2t = 0;$$

$$t^2 + 2(a^2 + x^2)t + x^4 - 2a^2x^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= -(a^2 + x^2) \pm \sqrt{(a^2 + x^2)^2 - x^4 + 2a^2x^2} = -(a^2 + x^2) \pm \sqrt{a^4 + 2a^2x^2 + x^4 - x^4 + 2a^2x^2} = \\ &= -(a^2 + x^2) \pm \sqrt{a^4 + 4a^2x^2} = -(a^2 + x^2) \pm a\sqrt{a^2 + 4x^2}. \end{aligned}$$

Так как $t = y^2 > 0$, то $t = a\sqrt{a^2 + 4x^2} - (a^2 + x^2)$;

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{t}.$$

Для верхней полупетли перед корнем надо ставить знак «плюс». Тогда

$$y = \sqrt{a\sqrt{a^2 + 4x^2} - (a^2 + x^2)}. \quad (8)$$

Возвратимся к определению S_y .

$$\begin{aligned} S_y &= \int_A (x_2 - x_1) \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} dy = \frac{1}{2} \int_A (x_2^2 - x_1^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^{a/2} \left[\left(\sqrt{a^2 - y^2 + a\sqrt{a^2 - 4y^2}} \right)^2 - \right. \\ &\left. - \left(\sqrt{a^2 - y^2 - a\sqrt{a^2 - 4y^2}} \right)^2 \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^{a/2} \left(a^2 - y^2 + a\sqrt{a^2 - 4y^2} - a^2 + y^2 + a\sqrt{a^2 - 4y^2} \right) dy = \\ &= a \int_0^{a/2} \sqrt{a^2 - 4y^2} dy \Big|_y = \frac{a}{2} \cos t, \sqrt{a^2 - 4y^2} = \sqrt{a^2 - 4 \frac{a^2}{4} \cos^2 t} = a \cdot \sin t, dy = -\frac{a}{2} \sin t \cdot dt; \end{aligned}$$

$$y_1 = 0 = \frac{a}{2} \cos t_1, \cos t_1 = 0, t_1 = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned}
y_2 &= \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cos t_2, \cos t_2 = 1, t_2 = 0 \left| a \int_{\pi/2}^0 \left(-\frac{a^2}{2} \cdot \sin^2 t \cdot dt \right) = \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cdot dt = \right. \\
&= \frac{a^3}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2t}{2} \cdot dt = \frac{a^3}{4} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t) \cdot dt = \frac{a^3}{4} \left| \pi/2 - \frac{a^3}{8} \int_0^{\pi/2} \cos 2t \cdot d2t = \right. \\
&= \frac{a^3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{a^3}{8} \sin 2t \left| \pi/2 - \frac{\pi a^3}{8} - \frac{a^3}{8} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi a^3}{8}.
\end{aligned}$$

Координата x_c центра тяжести полупетли (петли) – $x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\pi a^3}{8} : \frac{a^2}{2} = \frac{\pi a}{4}$.

Определение осевых моментов инерции I_x и I_y в полярных координатах (см. рис. 2).

$$\begin{aligned}
I_x &= \iint_A dA \cdot y^2 = \iint_A dA \cdot (r \cdot \sin \varphi)^2 = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\rho} r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot r^2 \cdot \sin^2 \varphi = \\
&= \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \int_0^{\rho} r^3 \cdot dr = \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi \cdot \frac{r^4}{4} \left| a\sqrt{2 \cos 2\varphi} = \frac{1}{4} a^4 \cdot 4 \int_0^{\pi/4} \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 2\varphi \cdot d\varphi = \right. \\
&= a^4 \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \cdot \cos^2 2\varphi \cdot \frac{2}{2} \cdot d\varphi = \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} (\cos^2 2\varphi - \cos^3 2\varphi) \cdot d2\varphi = \\
&= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \cdot d2\varphi - \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} \cos 2\varphi (1 - \sin^2 2\varphi) \cdot d2\varphi = \\
&= \left(\frac{a^4}{4} \cdot \varphi + \frac{a^4}{16} \cdot \sin 4\varphi \right) \left| \pi/4 - \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 2\varphi) \cdot d \sin 2\varphi = \frac{a^4}{16} \cdot \pi - \right. \\
&- \frac{a^4}{4} \left(\sin 2\varphi - \frac{\sin^3 2\varphi}{3} \right) \left| \pi/4 = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{a^4}{4} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{a^4}{6} = \frac{3\pi - 8}{48} a^4; \\
I_x &= \frac{3\pi - 8}{48} a^4 \approx 0,029682874 \cdot a^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y &= \iint_A dA \cdot x^2 = \iint_A dA \cdot (r \cdot \cos \varphi)^2 = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\rho} r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot r^2 \cdot \cos^2 \varphi = \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi \int_0^{\rho} r^3 \cdot dr = \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \frac{r^4}{4} \left| a\sqrt{2 \cos 2\varphi} = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi \left(a\sqrt{2 \cos 2\varphi} \right)^4 = \right. \\
&= a^4 \int_0^{\pi/4} \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 2\varphi \cdot d\varphi = a^4 \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \cdot \cos^2 2\varphi \cdot \frac{1}{2} \cdot d2\varphi = \\
&= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} \cos^2 2\varphi \cdot d2\varphi + \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 2\varphi) \cdot \cos 2\varphi \cdot d2\varphi = \\
&= \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} \cdot d2\varphi + \frac{a^4}{4} \int_0^{\pi/4} (1 - \sin^2 2\varphi) \cdot d \sin 2\varphi = \left(\frac{a^4}{4} \cdot \varphi + \frac{a^4}{16} \cdot \sin 4\varphi \right) \left| \pi/4 + \right. \\
&- \frac{a^4}{4} \left(\sin 2\varphi - \frac{\sin^3 2\varphi}{3} \right) \left| \pi/4 = \frac{\pi a^4}{16} - \frac{a^4}{4} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a^4}{4} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} \right) = \frac{3\pi + 8}{48} a^4; \\
I_y &= \frac{3\pi + 8}{48} a^4 \approx 0,363016207 \cdot a^4.
\end{aligned}$$

Главные центральные моменты инерции петли лемнискаты относительно главных центральных осей uCv (рис. 4).

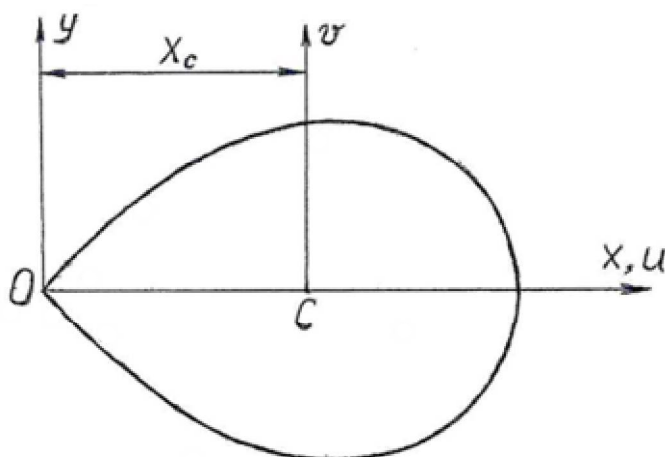


Рис. 4. Правая петля лемнискаты

$$I_u = I_x = 0,029682874 \cdot a^4;$$

$$I_v = I_y = A \cdot x_c^2 = \frac{3\pi + 8}{48} a^4 - \frac{a^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi a}{4}\right)^2 = 0,054591069 \cdot a^4.$$

Квадраты радиусов инерции петли:

$$i_u^2 = \frac{I_u}{A} = \frac{0,029682874 \cdot a^4}{0,5 \cdot a^2} = 0,053965748 \cdot a^2;$$

$$i_v^2 = \frac{I_v}{A} = \frac{0,054591069 \cdot a^4}{0,5 \cdot a^2} = 0,109182138 \cdot a^2.$$

Координаты ядра сечения:

$$\begin{aligned} u_{я} &= i_v^2 \cdot \frac{v'}{v - uv'}, \\ v_{я} &= -i_u^2 \cdot \frac{1}{v - uv'}, \\ \frac{dv_{я}}{du_{я}} &= -\frac{i_u^2}{i_v^2} \cdot \frac{u}{v}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из рисунка видно, что оси x, u совпадают, а оси y, v параллельны между собой. При параллельном переносе осей

$$\begin{aligned} u &= x - x_c, \\ v &= y, \\ x &= u + x_c. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда уравнение лемнискаты в главных центральных осях uCv при использовании формулы (8) будет иметь вид:

$$v = \sqrt{a\sqrt{a^2 + 4(u + x_c)^2} - a^2 - (u + x_c)^2}. \quad (11)$$

Или

$$y = \sqrt{a\sqrt{a^2 + 4x^2} - a^2 - x^2}. \quad (12)$$

Производная $\frac{dv}{du} = \frac{dv}{dx}$, так как $x_c = const$. Найдем $v' = \frac{dv}{dx}$.

$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{2\sqrt{a\sqrt{a^2 + 4x^2} - a^2 - x^2}} \cdot \left(\frac{a}{2\sqrt{a^2 + 4x^2}} \cdot 8x - 2x \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a\sqrt{a^2 + 4x^2} - a^2 - x^2}} \cdot \left(\frac{2a}{2\sqrt{a^2 + 4x^2}} - 1 \right); \\ v' &= \frac{1}{2\sqrt{a\sqrt{a^2 + 4x^2} - a^2 - x^2}} \cdot \left(\frac{2a}{2\sqrt{a^2 + 4x^2}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Подставив в уравнения (9) величины u , v , v' из формул (10-13), найдем координаты ядра сечения в табличном виде. При этом разделим отрезок АО на оси x (см. рис. 1) на 10 равных частей. В таблицу подставим величины с округлением в четыре знака после запятой.

Учтем, что $\frac{x_i}{a} = \frac{i}{10} \cdot \sqrt{2}$.

Результаты расчетов

i	$\frac{u_i}{a} = \frac{x_i - x_c}{a}$	$\frac{v_i}{a} = \frac{y_i}{a}$	$v'_i = y'_i$	$\frac{u_{яi}}{a}$	$\frac{v_{яi}}{a}$	$\frac{dv_{яi}}{du_{яi}}$
0	-0,7854	0	1	0,1390	-0,0687	∞
1	-0,6440	0,1387	0,9428	0,1380	-0,0724	2,2953
2	-0,5026	0,2625	0,7981	0,1313	-0,0813	0,9462
3	-0,3611	0,3626	0,6142	0,1148	-0,0923	0,4923
4	-0,2197	0,4359	0,4212	0,0870	-0,1021	0,2492
5	-0,0783	0,4817	0,2271	0,0496	-0,1080	0,0803
6	0,0631	0,4998	0,0261	0,0057	-0,1083	-0,0624
7	0,2046	0,4880	-0,1195	-0,0412	-0,1021	-0,2072
8	0,3460	0,4403	-0,4922	-0,0880	-0,0884	-0,3884
9	0,4874	0,3391	-1,0088	-0,1326	-0,0650	-0,7105
10	0,6288	0	∞	-0,1736	0	$-\infty$

Используя расчетные величины, приведенные в таблице, изображаем на рис. 5 ядро сечения для петли лемнискаты.

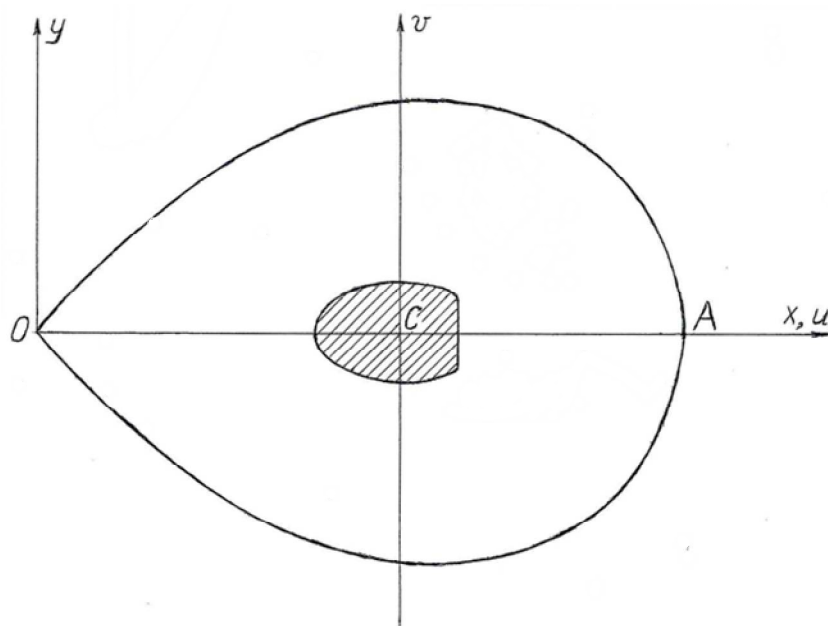


Рис. 5. Ядро сечения

Библиографический список

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов – М.: Высш. шк., 2009. – 559 с.
2. Викулов С.В., Пахомова Л.В., Инкижинов Н.С. Сопоставление двух способов построения ядра сечения: дискретного и непрерывного // Строительная механика и конструкции. – 2023. – №1 (36). – С. 38-41.
3. Инкижинов Н.С. О построении ядра сечения для стержней с криволинейной частью поперечного сечения // Сибирский научный вестник. – Новосибирск: Изд. СГУВТ, 2018. – Вып. XXII. – С. 16-18.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наука, 1980. – 976 с.
5. Брычков Ю.А., Маричев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределенных интегралов: справочник. – М.: Наука, 1986. – 192 с.

References

1. Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Strength of materials. M.: High School, 2009. 559 p.
2. Vikulov S.V., Pakhomova L.V., Inkizhinov N.S. Comparison of two methods for constructing a section core: discrete and continuous. Construction Mechanics and Structures. No. 1(36). 2023. Pp. 38-41.
3. Inkizhinov N.S. On the construction of the core section for rods with a curvilinear part of the cross section. Siberian Scientific Bulletin. Novosibirsk: Publishing house. SGUVT, 2018. Issue. XXII. Pp. 16-18.
4. Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of mathematics for engineers and students of technical colleges. M.: Nauka, 1980. 976 p.
5. Brychkov Yu.A., Marichev O.I., Prudnikov A.P. Tables of indefinite integrals: reference book. M.: Nauka, 1986. 192 p.

CONSTRUCTION OF A CROSS-SECTION CORE FOR A CROSS-SECTION BOUNDED BY A LEMNISCATE

L. V. Pakhomova¹, P. V. Sazhin², N. S. Inkizhinov³

Siberian State University of Water Transport^{1,2,3}

Novosibirsk, Russia

¹PhD of Technical Sciences, Head of the Department of Resistance of Materials and Lifting and Transport Machines, Tel.: +7(913)9040057, e-mail: Pahomova_l_v@mail.ru

²PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the the Department of Resistance of Materials and Lifting and Transport Machines, Tel.: +7(913)9563998, e-mail: pavel301080@mail.ru

³Assistant Professor of the the Department of Resistance of Materials and Lifting and Transport Machines, Tel.: +7(913)7998152, e-mail: inkizhinov47@bk.ru

Abstract. This paper provides an example of constructing a cross-section core for a cross-section of a rod bounded by a curved line. The construction of the core of the section is carried out by a continuous method. This method, unlike the discrete method, widely known in the classical literature on the resistance of materials, has been used recently – less than 10 years. It is used so far only in scientific articles for the purpose of popularization. The only difference between the continuous method and the discrete one is in the denominators in the formulas of the coordinates of the core of the section. In the continuous method, the denominator is a segment a_u or a_v , cut off by a tangent on the main central axes u, v . In the continuous method, the denominator is a binomial $v - uv'$. As it was proved in the source [2] for both methods, these denominators are identically equal. However, as the names imply, the continuous method allows you to determine the coordinates of the core of the section analytically, which leads to the fact that the core of the section becomes a smooth curve, while in the discrete method the core of the section is a multi-gon inscribed in the smooth core of the section obtained by the continuous method. What are the advantages and disadvantages of these methods? Discrete method: the advantage is the lack of mathematics in finding the segments a_u and a_v . The disadvantages are the need to build a cross-section on a scale to measure segments, and the approximate shape of the cross-section core. Continuous method: the advantages are that there is no need to build a cross-section at scale and an accurate image of the cross-section core. The disadvantage is the additional mathematical action required to calculate the derivative $v' = \frac{dv}{du}$ in the binomial a_v , $v - uv'$. However, this additional action is very small compared to determining geometric characteristics in an integral form, which must be determined in both discrete and continuous methods.

Keywords: cross-section core, lemniscate, lemniscate loop, continuous method, geometric characteristics, coordinates of the cross-section core.

**ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ
ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ**

Е. И. Осипова¹, С. А. Осипов²

Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(960)1002544,
e-mail: eosipova@cchgeu.ru

²Старший преподаватель кафедры строительной механики, тел.: +7(915)5802819, e-mail: sosipov@cchgeu.ru

В данной работе рассматриваются нелинейные вынужденные колебания вязкоупругой пластинки под действием вертикальной гармонической силы. Демпфирующие свойства пластинки описываются с помощью дробных производных. Уравнения движения пластин представляют собой систему пяти нелинейных дифференциальных уравнений относительно трех перемещений и двух углов поворота, учитывающих инерцию вращения и деформации сдвига. Для решения используется метод многих временных масштабов. Исследуются колебания в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов. Получены численные результаты зависимости амплитуд колебаний от времени для различных значений параметра дробности, величины внешней нагрузки и значения начального параметра. Рассматривается влияние размеров пластинки на характер изменения амплитуд.

Ключевые слова: модель Кельвина-Фойгта с дробной производной, вынужденные нелинейные колебания, внутренний и внешний резонанс, обобщенный метод многих временных масштабов

Введение. Изучение динамического поведения элементов конструкций типа пластин и оболочек имеет большое прикладное значение в различных областях строительства, аэрокосмической и авиационной промышленности.

С развитием производства новых материалов для композиционных и слоистых конструкций вырос интерес к исследованию нелинейных колебаний вязкоупругих пластин и оболочек, которые описываются неклассическими моделям [1-6]. Обзору нелинейных колебаний пластин и оболочек посвящены работы [7-9].

Согласно классической модели Кельвина-Фойгта демпфирующие свойства вязкоупругих пластин и оболочек определяются слагаемыми, пропорциональными производной первого порядка по времени от перемещений [10, 11]. Анализ экспериментальных данных, полученных при исследовании колебаний подвесных мостов Винсент-Томас [12] и Золотые ворота [13], показал, что каждому режиму колебаний соответствуют свои значения коэффициентов демпфирования, с увеличением собственной частоты колебаний коэффициент демпфирования уменьшается. На основании этого для описания процесса внутреннего трения в висячих комбинированных системах [14] было предложено использовать дробные производные [15]. Такой подход позволил получить результаты, показывающие зависимость коэффициента демпфирования от собственных частот, что соответствует экспериментальным данным. Примеры применения дробного исчисления в построении модели Кельвина-Фойгта, Максвелла, стандартного линейного

твердого тела для стержней, пластин и оболочек подробно изложены в обзорных статьях Россихина и Шитиковой [16, 17].

Колебания систем могут сопровождаться явлениями внутреннего и внешнего резонансов, что приводит к обмену энергией между взаимодействующими модами. В работах [10, 11] были проанализированы нелинейные колебания металлических пластин в условиях внутреннего резонанса под действием гармонических сил. В работе [10] колебания описываются 3 уравнениями относительно 3 перемещений. В [11] уравнения движения составлены относительно 5 неизвестных, учитывающих деформацию сдвига.

Исследование нелинейных колебаний пластин в условиях резонансов с использованием модели Кельвина-Фойгта, включающей дробные производные, был выполнен в работах [18–22]. Россихиным и Шитиковой [18–21] был рассмотрен тип внутреннего резонанса, когда одна частота колебаний в плоскости равна (внутренний резонанс 1:1 [19, 21]) или в два раза больше (внутренний резонанс 1:2 [18, 20]), чем частота из плоскости колебаний. При этом была решена система из трех нелинейных дифференциальных уравнений относительно трех перемещений. Авторами также изучены комбинационные резонансы аддитивного и разностного типов [21, 22]. В работе [20] предложен новый подход к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений, который позволяет разделить систему так, что линейные части получаются самостоятельными, а уравнения взаимосвязаны только нелинейными слагаемыми. В [23] на основе обобщенной системы нелинейных дифференциальных уравнений Муштари-Власова-Доннела, в которой силы диссипации описываются реологической моделью Кельвина-Фойгта с дробной производной по времени, исследована задача о нелинейных вынужденных затухающих колебаниях тонкой прямоугольной шарнирно опертой пластинки под действием внешней гармонической силы. В [24] рассматриваются нелинейные свободные колебания пластины, уравнения движения которой представлены в виде пяти связанных между собой уравнений относительно трех перемещений и двух углов поворота. Определены собственные частоты колебаний для пластин разного размера и проведен анализ проявления различных типов внутренних резонансов.

В данной работе выполнен численный анализ задачи о нелинейных вынужденных колебаниях прямоугольной шарнирно опертой пластинки под действием гармонической силы [25] в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов. Уравнения движения пластинки представлены 5 уравнениями относительно трех перемещений вдоль осей и двух углов поворота.

Постановка и решение задачи. Рассматриваются нелинейные колебания шарнирно опертой прямоугольной в плане пластинки с учетом деформации сдвига и инерции вращения под действием вертикальной гармонической силы. Уравнения движения пластинки [1] в безразмерном виде имеют вид

$$u_{,xx} + 0.5(1 - \mu)\beta_1^2 u_{,yy} + 0.5(1 + \mu)\beta_1 v_{,xy} + w_{,x} (w_{,xx} + 0.5(1 - \mu)\beta_1^2 w_{,yy}) + 0.5(1 + \mu)\beta_1^2 w_{,y} w_{,xy} = \ddot{u} + \chi_1 D^\gamma u, \quad (1)$$

$$\beta_1^2 v_{,yy} + 0.5(1 - \mu)v_{,xx} + 0.5(1 + \mu)\beta_1 u_{,xy} + \beta_1 w_{,y} (\beta_1^2 w_{,yy} + 0.5(1 - \mu)w_{,xx}) + 0.5(1 + \mu)\beta_1 w_{,x} w_{,xy} = \ddot{v} + \chi_2 D^\gamma v, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& k^2 0.5(1-\mu) \left(w_{,xx} + \beta_1^2 w_{,yy} + \psi_{x,x} + \beta_1 \psi_{y,x} \right) + w_{,xx} \left(u_{,x} + \mu \beta_1 v_{,y} \right) + \\
& + \beta_1^2 w_{,yy} \left(\mu u_{,x} + \beta_1 v_{,y} \right) + w_{,xy} \left(1-\mu \right) \beta_1 \left(u_{,y} \beta_1 + \mu v_{,x} \right) + \\
& + w_{,x} \left(u_{,xx} + 0.5(1-\mu) \beta_1^2 u_{,xx} + 0.5(1+\mu) \beta_1 v_{,xy} \right) + \tag{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \beta_1 w_{,y} \left(0.5(1-\mu) v_{,xx} + \beta_1^2 v_{,yy} + 0.5(1+\mu) \beta_1 u_{,xy} \right) + \\
& + F \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \cos \Omega_F t = \ddot{w} + \chi_3 D^\gamma w,
\end{aligned}$$

$$\psi_{x,xx} + \frac{1-\mu}{2} \beta_1^2 \psi_{x,yy} + \frac{1+\mu}{2} \beta_1 \psi_{y,xy} - 6k^2 \frac{1-\mu}{\beta_2^2} \left(w_{,x} + \psi_x \right) = \ddot{\psi} + \chi_4 D^\gamma \psi_x, \tag{4}$$

$$\beta_1^2 \psi_{y,yy} + \frac{1-\mu}{2} \psi_{y,xx} + \frac{1+\mu}{2} \beta_1 \psi_{x,xy} - 6k^2 \frac{1-\mu}{\beta_2^2} \left(\beta_1 w_{,y} + \psi_y \right) = \ddot{\psi} + \chi_5 D^\gamma \psi_y, \tag{5}$$

где $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$ и $w(x, y, t)$ – перемещения точек, расположенных в срединной плоскости пластины в направлении осей x , y и z ; $\psi_x(x, y, t)$ и $\psi_y(x, y, t)$ – углы поворота нормали у срединной поверхности и в плоскости, касательной к линиям z и x ; k – коэффициент сдвига; μ – коэффициент Пуассона; h – толщина; t – безразмерное время; $\beta_1 = a/b$, $\beta_2 = h/a$ – параметры, определяющие размеры пластины; a и b – размеры пластины в направлениях осей x и y ; F и Ω_F – амплитуда и частота внешней гармонической силы; $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ – функция Дирака; χ_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) – коэффициент демпфирования, точки обозначают производные по времени, а нижние индексы – производные по соответствующим координатам; D^γ – дробная производная Римана-Лиувилля порядка γ [15]

$$D^\gamma F = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{F(t-t') dt'}{\Gamma(1-\gamma) t'^{\gamma}}. \tag{6}$$

Функции перемещений точек пластинки, удовлетворяющие начальным и граничным условиям, раскладываем по собственным формам колебаний

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{1mn}(t) \eta_{1mn}(x, y), \quad v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{2mn}(t) \eta_{2mn}(x, y), \\
w(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{3mn}(t) \eta_{3mn}(x, y), \tag{7} \\
\psi_x(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{4mn}(t) \eta_{4mn}(x, y), \quad \psi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} x_{5mn}(t) \eta_{5mn}(x, y),
\end{aligned}$$

где $x_{imn}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) – обобщенные перемещения, соответствующие перемещениям в плоскости пластинки, ее прогибу и углам поворота; m и n – целые числа, соответствующие числу учитываемых мод колебаний, собственные формы имеют вид

$$\begin{aligned}
\eta_{1mn}(x, y) &= \cos \pi m x \sin \pi n y, \quad \eta_{2mn}(x, y) = \sin \pi m x \cos \pi n y, \\
\eta_{3mn}(x, y) &= \sin \pi m x \sin \pi n y, \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\eta_{4mn}(x, y) = \cos \pi mx \sin \pi ny, \quad \eta_{5mn}(x, y) = \sin \pi my \cos \pi nx.$$

Учитывая (7-8) и используя условия ортогональности линейных мод в пределах областей $0 \leq x, y \leq 1$, приходим к связанным нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка относительно x_{imn} ($i=1,2,3,4,5$). Первые два уравнения связаны между собой линейной частью, с третьим уравнением связь проявляется через нелинейные слагаемые. Четвертое и пятое уравнения связаны между собой и с третьим уравнением только линейными слагаемыми. Решая линейную задачу на собственные значения, определяем собственные частоты колебаний ω_{imn} ($i=1,2,3,4,5$).

Используя подход, предложенный в работе [20], раскладываем искомое решение по собственным функциям и получаем систему пяти нелинейных уравнений:

$$\ddot{X}_1 + \chi_1 D^\gamma X_1 + \omega_1^2 X_1 + \zeta_1 X_3^2 = 0, \quad (9)$$

$$\ddot{X}_2 + \chi_2 D^\gamma X_2 + \omega_2^2 X_2 + \zeta_2 X_3^2 = 0, \quad (10)$$

$$\ddot{X}_3 + \chi_3 D^\gamma X_3 + X_3 (\zeta_{13} X_1 + \zeta_{23} X_2) - 4\bar{f} \cos \Omega_f t = 0, \quad (11)$$

$$\ddot{X}_4 + \chi_4 D^\gamma X_4 + \omega_4^2 X_4 = 0, \quad (12)$$

$$\ddot{X}_5 + \chi_5 D^\gamma X_5 + \omega_5^2 X_5 = 0, \quad (13)$$

где $\bar{f} = F \sin \pi mx_0 \sin \pi ny_0$, $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_{13}, \zeta_{23}$ – коэффициенты, зависящие от номеров взаимодействующих мод [24].

Для решения системы уравнений (9) – (13) применяется метод многих временных масштабов [26], в соответствии с которым обобщенные перемещения раскладываются в ряд по малому параметру:

$$X_i(t) = \varepsilon X_{i1}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^2 X_{i2}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \varepsilon^3 X_{i3}(T_0, T_1, T_2 \dots) + \dots, \quad (14)$$

где $i=1,2,3,4,5$, ε – малый безразмерный параметр, $T_n = \varepsilon^n t$ – новые независимые переменные. Разложение производных выполняется следующим образом [18, 27]:

$$\begin{aligned} d/dt &= D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \\ (d/dt)^\gamma &= (D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots)^\gamma = D_{0+}^\gamma + \varepsilon \gamma D_{0+}^{\gamma-1} D_1 + \\ &+ 0.5 \varepsilon^2 \gamma [(1-\gamma) D_{0+}^{\gamma-2} D_1^2 + 2D_{0+}^{\gamma-1} D_2] + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

где $D_0 = \partial/\partial T_0$, $D_1 = \partial/\partial T_1$, $D_2 = \partial/\partial T_2$.

Вязкость среды и амплитуду внешней силы полагаем малыми величинами $\chi_i = \varepsilon_i^k \mu_i \tau_i^\gamma$ и $\bar{f} = \varepsilon_i^{k+1} f$, где τ_i – время ретардации; μ_i и f – конечные величины. Подставляя разложения (14) – (15) в уравнения (9) – (13), приравнявая коэффициенты у слагаемых с одинаковыми степенями ε к нулю, получаем системы уравнений разного порядка [22, 26]. Решение полученных систем уравнений будем искать в виде

$$X_{j1} = A_j(T_1, T_2) \exp(i\omega_j T_0) + \bar{A}_j(T_1, T_2) \exp(-i\omega_j T_0), \quad (16)$$

где $A_j(T_1, T_2)$ ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) – неизвестные комплексные функции; $\bar{A}_j(T_1, T_2)$ – сопряженные функции с $A_j(T_1, T_2)$, с учетом соотношения [16–18]

$$D_0^\gamma e^{i\omega_j t} = (i\omega_j)^\gamma e^{i\omega_j t}. \quad (17)$$

Исследуем сочетание внутреннего два-к-одному и внешнего резонансов

$$\omega_1 = 2\omega_3 \quad (\omega_1 \neq \omega_2, \quad \omega_2 \neq 2\omega_3) \quad \text{и} \quad \omega_3 = \Omega. \quad (18)$$

Используя на каждом последующем шаге решение с предыдущего шага, исключая вековые члены во время интегрирования, получаем систему уравнений для случая с вязкостью порядка ε при $k=1$. Для устранения вековых членов в полученных уравнениях приравняем коэффициенты при $\exp(\pm i\omega_1 T_0)$ к нулю. В результате получим следующие уравнения:

$$2i\omega_1 D_1 A_1(T_1) + \zeta_1 A_3^2 + \mu_1 (i\omega_1 \tau_1)^\gamma A_1 = 0, \quad (19)$$

$$2i\omega_2 D_1 A_2(T_1) + \mu_2 (i\omega_2 \tau_2)^\gamma A_2 = 0, \quad (20)$$

$$2i\omega_3 D_1 A_3(T_1) + \mu_3 (i\omega_3 \tau_3)^\gamma A_3 + \zeta_{13} A_1 \bar{A}_3 - 2f = 0, \quad (21)$$

$$2i\omega_4 D_1 A_4(T_1) + \mu_4 (i\omega_4 \tau_4)^\gamma A_4 = 0, \quad (22)$$

$$2i\omega_5 D_1 A_5(T_1) + \mu_5 (i\omega_5 \tau_5)^\gamma A_5 = 0. \quad (23)$$

Умножим уравнения в (19) – (23) на $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4, \bar{A}_5$ соответственно и найдем сопряженные к ним уравнения. Представляя функции $A_i(T_1)$ в полярной форме $A_i = a_i e^{i\varphi_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$), где $a_i = a_i(T_1)$ и $\varphi_i = \varphi_i(T_1)$ – функции амплитуд и фаз колебаний, складывая каждую пару взаимно сопряженных уравнений и вычитая одно из другого, в результате получаем следующую систему уравнений относительно амплитуды и фаз нелинейных колебаний:

$$\begin{aligned} (a_1^2)^\cdot + s_1 a_1^2 + \omega_1^{-1} \zeta_1 a_1 a_3^2 \sin \delta &= 0, \\ (a_3^2)^\cdot + s_3 a_3^2 - \omega_3^{-1} \zeta_{13} a_1 a_3^2 \sin \delta + 2f \omega_3^{-1} a_3 \sin \varphi_3 &= 0, \\ (a_2^2)^\cdot + s_2 a_2^2 = 0, \quad (a_4^2)^\cdot + s_4 a_4^2 = 0, \quad (a_5^2)^\cdot + s_5 a_5^2 = 0, \\ \dot{\varphi}_1 - 0.5\lambda_1 - 0.5\zeta_1 \omega_1^{-1} a_1^{-1} a_3^2 \cos \delta &= 0, \\ \dot{\varphi}_3 - 0.5\lambda_3 - 0.5\zeta_{13} \omega_3^{-1} a_1 \cos \delta + f(\omega_3 a_3) \cos \varphi_3 &= 0, \\ \dot{\varphi}_2 - 0.5\lambda_2 = 0, \quad \dot{\varphi}_4 - 0.5\lambda_4 = 0, \quad \dot{\varphi}_5 - 0.5\lambda_5 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где точка обозначает дифференцирование по T_1 , $\delta = 2\varphi_3 - \varphi_1$ – разность фаз колебаний, $s_i = \mu_i \tau_i^\gamma \omega_i^{\gamma-1} \sin \psi$, $\lambda_i = \mu_i \tau_i^\gamma \omega_i^{\gamma-1} \cos \psi$, $\psi = 0.5\pi\gamma$, ($i = 1, 2, 3$).

Численные исследования. Для численного анализа полученных уравнений (24) используется вычислительный комплекс Wolfram Mathematica.

На рис. 1 и 2 представлены зависимости амплитуд колебаний a_1 и a_3 от времени T_1 в безразмерном виде для пластинки с характеристиками: $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0.1$, $k = 5/6$, $\mu = 0.3$, $\chi = 0.25$, $m = n = m_1 = n_1 = 3$, $m_2 = 3$, $n_2 = 5$, $\omega_1 = 2\omega_3 = 13.33$, $\Omega = \omega_3$.

Влияние величины параметра дробности γ на изменение амплитуд свободных и вынужденных колебаний приведено на рис. 1, а и на рис. 1, б соответственно. В условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов при наличии внешней силы изменяется характер поведения амплитуд с течением времени. Это связано с тем, что затухающий процесс энергообмена становится неустойчивым. С увеличением параметра дробности усиливается процесс диссипации и увеличивается период изменения амплитуд колебаний.

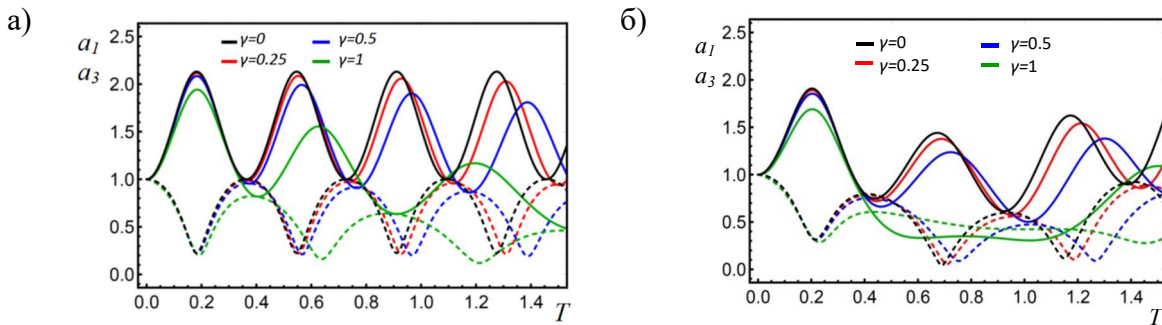


Рис. 1. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_3 от безразмерного времени T_1 при $a_{10} = a_{30} = 1$ для свободных (а) и вынужденных при $f = 15$ (б) колебаний, сплошная линия – a_3 , пунктирная линия – a_1

На рис. 2, а построена зависимость амплитуды от времен для вынужденных колебаний при параметре дробности $\gamma = 0.75$ и $a_{10} = a_{30} = 1$. На графике показано влияние величины вынужденной силы на значения амплитуд в условиях рассматриваемого резонанса $\omega_1 = 2\omega_3$, $\omega_3 = \Omega$. С увеличением амплитуды внешней силы усиливается дестабилизация затухающего процесса колебаний.

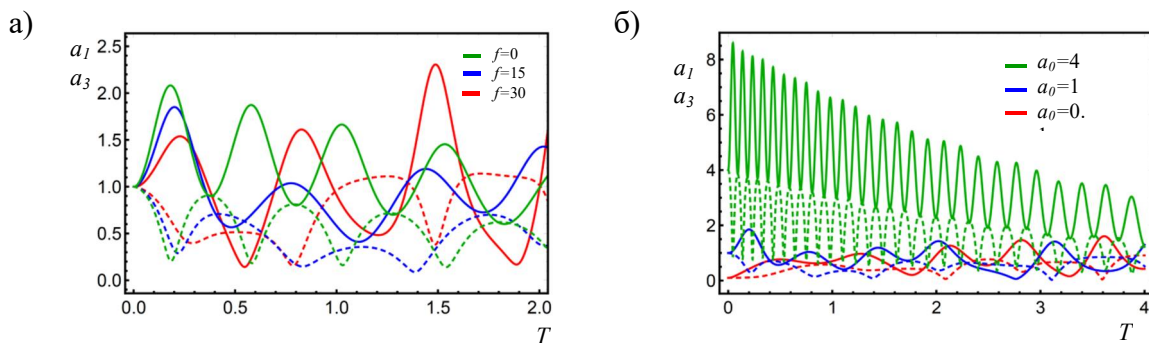


Рис. 2. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_3 от безразмерного времени T_1 при $\gamma = 0.75$ для различных значений вынужденной силы при $a_{10} = a_{30} = 1$ (а) и начальных параметров амплитуды $a_0 = a_{10} = a_{30}$ при $f = 15$ (б), сплошная линия – a_3 , пунктирная линия – a_1

На рис. 2, б показано поведение амплитуды вынужденных колебаний при $f = 15$ и $\gamma = 0.75$ для различных начальных параметров $a_0 = a_{10} = a_{30}$. С увеличением значений a_{10} и a_{30} уменьшается влияние внешней силы, затухающий процесс становится более стабильным.

На рис. 3 показан характер изменения амплитуды колебаний пластинки разного размера с характеристиками: $k = 5/6$, $\mu = 0.35$, $\chi = 0.25$, при этом частоты колебаний разных пластин близки по значениям. На рис. 3, а отражено влияние размеров элемента в плане для случаев: $\beta_1 = a/b = 2$, $\omega_1 = 2\omega_3 = 2\Omega = 13.9$; $\beta_1 = 1$, $\omega_1 = 2\omega_3 = 2\Omega = 13.33$; $\beta_1 = 0.5$, $\omega_1 = 2\omega_3 = 2\Omega = 13.84$. С увеличением размера пластины, соответствующего направлению колебаний в плоскости с частотой ω_1 , значение амплитуды увеличивается, а период ее изменения уменьшается. На рис. 3, б изображена зависимость амплитуды от времени для различных вариантов толщины квадратной пластинки $\beta_2 = h/a = 0.05$ и $\beta_2 = 0.1$ при $\omega_1 = 2\omega_3 = 2\Omega = 13.33$. Увеличение толщины пластины приводит к уменьшению амплитуды и росту периода изменения характеристики, соответственно, к перестраиванию процесса диссипации в системе.

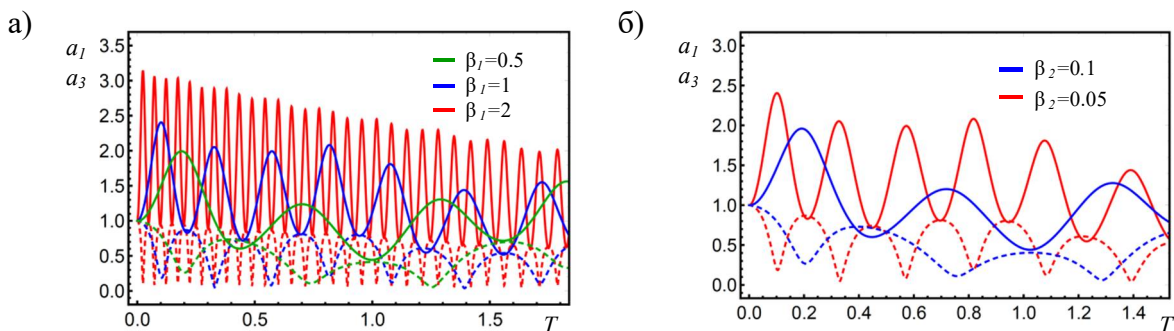


Рис. 3. Зависимость безразмерных амплитуд a_1 и a_3 от безразмерного времени T_1 для пластинок с разными параметрами $\beta_1 = a/b$ (а) и $\beta_2 = h/a$ (б) при $\gamma = 0.75$, $a_{10} = a_{30} = 1$, $f = 15$, сплошная линия – a_3 , пунктирная линия – a_1

Вывод. Численный анализ вынужденных нелинейных затухающих колебаний прямоугольной пластинки с учетом деформации сдвига и инерции вращения в условиях сочетания внутреннего и внешнего резонансов показывает влияние параметра дробности вязкоупругого оператора, описывающего вязкоупругие свойства пластинки, на характер затухающих колебаний. Характер изменения амплитуд колебаний, а соответственно, и процесса энергообмена между взаимодействующими модами системы, зависит от соответствия значений вынужденной силы и размеров пластины.

Библиографический список

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. Юлдашев А.Ю., Пирматов Ш.Т. Алгоритмизация решения динамических краевых задач теории гибких пластин с учетом сдвига и инерции вращения // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – № 75. – С. 150–165.

3. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
4. Уточненная теория нелинейного изгиба трехслойных пластин из функционально-градиентного материала / А. Каси, К. Драйхе, М. Зиди, М.С.А. Хуари, А. Тунси // Прикладная механика и техническая физика. – 2013. – Т. 54. – №5. – С. 187–198.
5. Éshmatov В.К. Nonlinear vibrations of viscoelastic cylindrical shells taking into account shear deformation and rotatory inertia // Nonlinear Dynamics. – 2007. – V. 50. – № 1. – P. 353–361.
6. Леоненко Д.В. Маркова М.В. Колебания круговой трехслойной пластины под действием линейной во времени внешней нагрузки // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2023. – Т. 1. – С. 49–63.
7. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates. – London: Cambridge University Press, 2008. – 374 p.
8. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор) // Известия МГТУ «МАМИ». – 2014. – Т. 4. – № 1. – С. 55–70.
9. Nayfeh А.Н. Nonlinear interaction: Analytical, computational, and experimental methods. – Wiley, New York, 2000. – 760 p.
10. Anlas G., Elbeyli O. Nonlinear vibrations of a simply supported rectangular metallic plate subjected to transverse harmonic excitation in the presence of a one- to-one internal resonance // Nonlinear Dynamics. – 2002. – Vol. 30. – P. 1–28.
11. Hao Y.X., Zhang W., Ji X.L. Nonlinear dynamic response of functionally graded rectangular plates under different internal resonances // Mathematical Problems in Engineering. – 2010. – Article ID 738648.
12. Abdel-Ghaffar A.M., Housner G.W. Ambient vibration tests of suspension bridge // ASCE Journal of Engineering Mechanics. – 1978. – Vol. 104. – P. 983–999.
13. Abdel-Ghaffar A.M., Scanlan R.H. Ambient vibration studies of Golden Gate bridge: I. Suspended structure // ASCE Journal of Engineering Mechanics. – 1985. – Vol. 111. – P. 463–482.
14. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges // ASCE Journal of Engineering Mechanics. – 1998. – Vol. 124. – P. 1029–1036.
15. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 689 с.
16. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Fractional calculus in structural mechanics. In: Baleanu, 76 Volume 16, Issue 3, 2020 D., Lopes, A.M. (eds.) Handbook of Fractional Calculus with Applications. Applications in Engineering, Life and Social Sciences. – Berlin: De Gruyter, 2019. – Vol. 7. – Part A. – P. 159–192.
17. Шитикова М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2022. – № 1. – С. 3–40.
18. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Free damped non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the two-to-one internal resonance // Materials Science Forum. – 2003. – Vol. 440–441. – P. 29–36.
19. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances // International Journal of NonLinear Mechanics. – 2006. – Vol. 2. – P. 313–325.

20. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. A new approach for studying nonlinear dynamic response of a thin fractionally damped plate with 2:1 and 2:1:1 internal resonances // *Advanced Structured Materials*. – 2015. – Vol. 45. – P. 267–288.
21. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Ngenzi J.Cl. A new approach for studying nonlinear dynamic response of a thin plate with internal resonance in a fractional viscoelastic medium // *Shock and Vibration*. – 2015. – Vol. 2015. – Article ID 795606.
22. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Ngenzi J.Cl. Phenomenological analysis of the additive combinational internal resonance in nonlinear vibrations of fractionally damped thin plates // *WSEAS Transactions of Applied and Theoretical Mechanics*. – 2015. – Vol. 10. – P. 260–276.
23. Шитикова М.В., Канду В.В. Численный анализ вынужденных колебаний нелинейных пластинок в вязкоупругой среде при наличии внутреннего резонанса один к одному // *Известия вузов. Строительство*. – 2018. – №12. – С. 9–22.
24. Shitikova M.V., Osipova E.I. Classification of internal resonances in nonlinear fractionally damped Uflyand-Mindlin plates // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. – 2020. – Vol. 16 (3). – P. 60–77.
25. Шитикова М.В., Осипова Е.И. Анализ вынужденных колебаний нелинейной вязкоупругой пластинки с учетом сдвига и инерции вращения // *Известия вузов. Строительство*. – 2024. – №1. – С. 15–29.
26. Найфэ А.Х. Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

References

1. Vol'mir A.S. *Nonlinear dynamics of plates and shells*. Moscow: Science, 1972. 432 p. (in Russ.).
2. Yuldashev A.Yu., Pirmatov Sh.T. Algorithmization for solving dynamic boundary value problems of the theory of flexible plates taking shear and rotational inertia into account. *Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics*. No. 75. 2022. Pp. 150–165. (in Russ.).
3. Grigolyuk E.I., Kulikov G.M. *Calculation of pneumatic tires*. M.: Mechanical Engineering, 1988. 288 p. (in Russ.).
4. Kasi A., Draykhe K., Zidi M., Khuari M.S.A., Tunsu A. Refined theory of nonlinear bending of three-layer plates made of functional-gradient material. *Applied Mechanics and Technical Physics*. No. 54(5). 2013. Pp. 187–198. (in Russ.).
5. Éshmatov B.K. Nonlinear vibrations of viscoelastic cylindrical shells taking into account shear deformation and rotatory inertia. *Nonlinear Dynamics*. No. 50(1). 2007. Pp. 353–361.
6. Leonenko D.V., Markova M.V. Oscillations of a circular three-layer plate under external linear in time load. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. No.1. 2023. Pp. 49–63.
7. Amabili M. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. London: Cambridge University Press, 2008. 373 p.
8. Kogan E.A., Yurchenko A.A. Nonlinear oscillations of a three-layer and multi-layer plates and shells during periodic impacts (survey). *News of MSTU*. No. 4(1). 2014. Pp. 55–70. (in Russ.).
9. Nayfeh A.H. *Nonlinear interaction: Analytical, computational, and experimental methods*. Wiley, New York, 2000. 760 p.
10. Anlas G., Elbeyli O. Nonlinear vibrations of a simply supported rectangular metallic plate subjected to transverse harmonic excitation in the presence of a one-to-one internal resonance. *Nonlinear Dynamics*. No. 30. 2002. Pp. 1–28.
11. Hao Y.X., Zhang W., Ji X.L. Nonlinear dynamic response of functionally graded

- rectangular plates under different internal resonances. *Mathematical Problems in Engineering*. 2010. Article ID 738648.
12. Abdel-Ghaffar A.M., Housner G.W. Ambient vibration tests of suspension bridge. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. No. 104. 1978. Pp. 983–999.
 13. Abdel-Ghaffar A.M., Scanlan R.H. Ambient vibration studies of Golden Gate bridge: I. Suspended structure. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. No.111. 1985. Pp. 463–482.
 14. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Application of fractional calculus for analysis of nonlinear damped vibrations of suspension bridges. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. No. 124. 1998. Pp. 1029–1036.
 15. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 1006 p.
 16. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Fractional calculus in structural mechanics. In: Baleanu, 76 Volume 16. Issue 3. 2020 D. Lopes A.M. (eds.) *Handbook of Fractional Calculus with Applications. Applications in Engineering. Life and Social Sciences*. Berlin: De Gruyter. 2019. 7 (Part A). Pp. 159–192.
 17. Shitikova M.V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: A review. *Mechanics of Solids*. No. 57(1). 2022. Pp. 1–33. (in Russ.).
 18. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Free damped non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the two-to-one internal resonance. *Materials Science Forum*. 440–44: 2003. Pp. 29–36.
 19. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analysis of free non-linear vibrations of a viscoelastic plate under the conditions of different internal resonances. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. No. 2. 2006. Pp. 313–325.
 20. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. A new approach for studying nonlinear dynamic response of a thin fractionally damped plate with 2:1 and 2:1:1 internal resonances. *Advanced Structured Materials*. No. 45. 2015. Pp. 267–288.
 21. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Ngenzi J.Cl. A new approach for studying nonlinear dynamic response of a thin plate with internal resonance in a fractional viscoelastic medium. *Shock and Vibration*. 2015. Article ID 795606.
 22. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V., Ngenzi J.Cl. Phenomenological analysis of the additive combinational internal resonance in nonlinear vibrations of fractionally damped thin plates. *WSEAS Transactions of Applied and Theoretical Mechanics*. No.10. 2015. Pp. 260–276.
 23. Shitikova M.V., Kandu V.V. Force driven nonlinear vibrations of a thin plate in one-to-one internal resonance in a fractional viscoelastic medium. *News of Universities. Construction*. No. 12. 2018. Pp. 9–22. (in Russ.).
 24. Shitikova M.V., Osipova E.I. Classification of internal resonances in nonlinear fractionally damped Uflyand-Mindlin plates. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. No.16(3). 2020. Pp. 60–77.
 25. Shitikova M.V., Osipova E.I. Analysis of Forced Vibrations of a Nonlinear Viscoelastic Plate Taken into Account of Shear and Rotational Inertia. *News of Higher Educational Institutions. Construction*. No.1. 2024. Pp. 15–29.
 26. Nayfeh A. H. *Perturbation Methods*. New York: Wiley, 1973. 425 p.

NUMERICAL ANALYSIS OF FORCED OSCILLATIONS OF A NONLINEAR VISCOELASTIC PLATE

E. I. Osipova¹, S. A. Osipov²

Voronezh State Technical University^{1,2}
Russia, Voronezh

¹PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(960)1002544, e-mail: eosipova@cchgeu.ru

²Assistant Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(915)5802819, e-mail: sosipov@cchgeu.ru

Abstract. In this paper nonlinear forced vibrations of viscoelastic plate under the action of vertical harmonic force are considered. The damping properties of the plate are described by fractional derivatives. The equations for the movement of the plates are a system of five non-linear differential equations with respect to three movements and two rotation angles, taking into account the inertia of rotation and shear deformation. The solution is based on a method of many time scales. Fluctuations in the combination of internal and external resonances are investigated. The numerical results of dependence of amplitude of oscillations from time for various values of the fractional parameter, the value of external load and the value of the initial parameter are obtained. The influence of plate size on the character of amplitude change is considered.

Keywords: Fractional derivative Kelvin-Voigt model, nonlinear forced vibrations, internal and external resonances, generalized method of multiple time scales.

РАЗРАБОТКА ВАНТОВОЙ КОНСТРУКЦИИ С ТЕНТОВЫМ ПОКРЫТИЕМ

А. В. Чесноков¹, В. В. Михайлов²

Липецкий государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Липецк

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры строительного производства, тел.: +7(4742) 328-074,
e-mail: andreychess742@gmail.com

²Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой строительного производства, тел.: +7(4742) 328-074,
e-mail: mmvv46@rambler.ru

Предложена вантовая конструкция, предназначенная для прямоугольных в плане зданий с укрупнённой сеткой основных несущих колонн. Вантовая конструкция состоит из решётчатого опорного контура, предварительно напряжённого каркаса и тентового покрытия. Предварительно напряжённый каркас относится к так называемым «tensegrity»-системам, в которых отдельные сжатые распорки объединяют непрерывные растянутые ванты. Тентовое покрытие, опирающееся на вершины распорок вантовой конструкции, состоит из мягкой оболочки и поддерживающих её арочных и балочных элементов.

Предложено усовершенствованное конструктивное решение вантового каркаса, включающего торцевые секции для перехода от рядовых секций к опорному контуру, а также дополнительные связи в виде оттяжек и распорок. Выполнен совместный численный анализ вантового предварительно напряжённого каркаса, тентовой конструкции покрытия и решётчатого опорного контура. Учтены внешние воздействия по всей площади покрытия, загрузка полупролёта и нагрузки, действующие в отдельных секторах. Оценена материалоемкость покрытия. Подтверждён положительный эффект предложенных связей, выражающийся в снижении деформативности и в уменьшении отклонения рёбер вантовой конструкции от вертикальной плоскости.

Предложенная вантовая конструкция может быть применена для покрытия зданий спортивного и торгового назначения, объектов транспортной инфраструктуры, а также в промышленном строительстве для производственных цехов и складских сооружений.

Ключевые слова: конструкция покрытия здания, вантовая конструкция, tensegrity-система, конструкция строительная тентовая, арка, мягкая оболочка, предварительное напряжение, металлоёмкость, деформативность

Введение

Вантовые конструкции состоят из высокопрочных стальных тросов (вант), объединённых распорками, растяжками или балочными элементами [1]. Они находят широкое применение в мостостроении, позволяя перекрывать пролёты в сотни метров при относительно малых трудозатратах и низкой материалоемкости [2].

В покрытиях зданий применение вантовых систем сдерживается значительной габаритной высотой покрытия. Минимальная относительная стрела провисания гибких нитей оценивается величиной в $1/20$ от размера свободного пролёта L . При этом рекомендуемая стрела находится в диапазоне $(1/10...1/6) \cdot L$ [3]. Уменьшение габарита покрытия за счёт сокращения расстояний между опорными конструкциями приводит к частой сетке несущих колонн, что неприемлемо для зданий, требующих свободной внутренней планировки.

Одним из решений данной проблемы можно считать появление многоярусных вантовых систем, среди которых выделяются тросовые купола систем Гайгера, Леви и Кастро [4-7]. Купола, предназначенные для зданий на круглом или эллиптическом плане, состоят из тросового верхнего пояса, оттяжек и вантовых колец, а также сжатых стоек-распорок, на вершины которых опираются ограждающие конструкции покрытия.

Для зданий на прямоугольном плане следует отметить решение [8], в котором непрерывные ванты огибают распорки попеременно с нижнего и верхнего концов, образуя компактное по высоте покрытие. Конструкция покрытия, состоящая из двух семейств несущих вант, распорок и связей предложена в [9-11] для зданий с укрупнённой сеткой колонн. Главные несущие ванты, непосредственно закреплённые за колонны здания, воспринимают нагрузку от второстепенных несущих вант перпендикулярного направления, которые, в свою очередь, поддерживают относительно часто расположенные распорки, что способствует уменьшению габарита покрытия по высоте.

Приведённые решения относятся к т.н. «tensegrity»-системам, в которых отдельные, относительно короткие стойки объединяют непрерывные ванты, охватывающие конструкцию в целом [12, 13]. Сокращение доли сжатых элементов, по сравнению с традиционными конструкциями покрытия, делает tensegrity-системы перспективными для большепролётных зданий с редкой сеткой опорных конструкций.

Вантовые системы, обладающие малым собственным весом, находят применение совместно с мягкими оболочками, образуя, т.н. тентовые конструкции покрытия [14, 15]. Тентовые конструкции также используют в фасадах зданий как при новом строительстве, так и при реконструкции [16].

Мягкие оболочки совмещают несущую и ограждающую функции. Они светопроницаемы и обладают высокой прочностью. В отличие от сборных железобетонных плит или металлических щитов покрытия мягкие оболочки не требуют применения тяжелых грузоподъёмных механизмов для укладки в проектное положение.

Мягкие оболочки должны иметь криволинейную форму отрицательной Гауссовой кривизны. Создание необходимой кривизны обеспечивается элементами, поддерживающими оболочку в проектное положение. Поддерживающие элементы в виде гибких тросов-подборов формируют бескаркасные тентовые покрытия, находящие применение в зданиях и сооружениях сезонного назначения [17]. Гибкие ванты, расположенные поперёк перекрываемого пролёта, образуют складчатые покрытия в форме «гармоники» [14]. Вместе с тем гибкие ванты деформативны из-за возникающих кинематических перемещений. Они передают большие распоры на колонны здания. Значительная габаритная высота конструкции, складывающаяся из стрелок попеременно выпуклых вверх и вниз вант, также является сдерживающим фактором для покрытия зданий складчатыми системами.

В тентовых конструкциях каркасного типа элементы, несущие мягкую оболочку покрытия, решаются в виде прямолинейных балок, арок и жёстких на изгиб рёбер сложной формы. Жёсткие балки и арочные элементы делят поверхность покрытия на множество секторов [18-20]. Варьируя шаг арок, можно добиться необходимой кривизны мягкой оболочки, обеспечив при этом приемлемую по эксплуатационным соображениям габаритную высоту покрытия. Натяжение мягкой оболочки производится её вытяжкой вдоль арок при помощи специальных приспособлений [21].

Равновесная форма поверхности мягкой оболочки покрытия напрямую зависит от распределения мембранных напряжений. Анализ процесса проектирования мягкой оболочки с выделением основных этапов выполнен в [22]. Влияние формы поверхности мягкой оболочки на работу несущего каркаса покрытия исследовано в [23]. Выполнено численное моделирование поверхности оболочки с определением оптимальных геометрических параметров конструкции.

Исследование влияния мягкой оболочки на устойчивость опорных арок выполнено в [24]. Численные расчёты в специализированном программном комплексе и натурные испытания лабораторных моделей подтвердили существенный положительный эффект оболочки как на плоскую форму потери устойчивости, так и на искривление арок из их плоскостей. В работе [25] поиск критических нагрузок для арок, стабилизированных мягкой оболочкой, выполнен решением проблемы поиска собственных значений. Делается вывод, что несмотря на нелинейное поведение конструкции, данный метод позволяет получить надёжные результаты, обеспечивающие сохранение арками работоспособного состояния.

Применение метода конечных элементов для численного моделирования мягкой оболочки рассмотрено в [26]. Анализ взаимодействия мягкой оболочки и опорных конструкций выполнен в [18, 19, 27, 28].

Исходя из приведённого литературного обзора следует вывод об актуальности проблемы применения вантовых систем с тентовым покрытием в конструкциях зданий. С одной стороны, вантовые и тентовые конструкции обладают преимуществами, по сравнению с традиционными, «жёсткими», решениями из бетона и стали. Вместе с тем вопросы, связанные с ограничением деформативности и обеспечением геометрической неизменяемости гибкого покрытия, не находят исчерпывающего отражения в имеющихся литературных источниках. Совершенствование конструктивных решений несущего вантового каркаса и каркаса тентового покрытия, моделирование совместной работы мягкой оболочки и поддерживающих её элементов, учёт податливости опорного контура и разработка эффективных способов предварительного напряжения требуют в настоящее время глубокой проработки.

Постановка цели и задач

Цель предлагаемой работы заключается в разработке вантовой конструкции с тентовым покрытием, предназначенной для прямоугольных в плане зданий с укрупнённой сеткой основных несущих колонн.

Для достижения поставленной цели были выделены следующие задачи:

- предложить решения по снижению деформативности вантовой конструкции от неравномерных воздействий;
- выполнить совместный численный анализ вантового предварительно напряжённого каркаса, тентовой конструкции покрытия и решётчатого опорного контура;
- выполнить оценку материалоёмкости рассматриваемой вантовой конструкции покрытия.

Описание конструкции покрытия

Предлагаемая строительная конструкция состоит из решётчатого опорного контура, вантового предварительно напряжённого каркаса и тентового покрытия (рис. 1, 2). Опорный контур рассматриваемой конструкции представляет собой пространственную коробчатую ферму, расположенную по периметру. Пространственная ферма состоит из трубчатых поясов, стоек, раскосов и связей. Данное решение позволяет опорному контуру воспринимать продольные силы, изгибающие и крутящие моменты, создаваемые горизонтальными распорами и вертикальными реакциями вантового каркаса.

Вантовый каркас состоит из растянутых тросовых поясов и связей, а также сжатых стоек-распорок. Тросовые пояса, лежащие в вертикальных плоскостях, разделяются на два семейства несущих и стабилизирующих вант. Несущие ванты, в свою очередь, делятся на главные 1 и второстепенные 4 [9]. Второстепенные ванты расположены вдоль пролёта (в направлении оси X). Они поддерживаются наклонными стойками 5 в узлах «а» (рис. 1).

Главные несущие ванты 1 расположены поперёк пролёта (в направлении оси Y). Плоскости главных несущих вант разделяют рассматриваемую строительную конструкцию на ряд секций: рядовые и торцевые. На колонны здания опорный контур рассматриваемой

строительной конструкции опирается в узлах, расположенных на границах секций, а также в углах торцевых секций (рис. 1).

Торцевые секции предназначены для перехода от регулярной структуры рядовых секций к торцевым решётчатым фермам опорного контура. Рядовые секции последовательно соединены между собой. При воздействии преобладающих равномерных нагрузок на покрытие продольные горизонтальные распоры (направленные по оси X) вантовых поясов соседних секций взаимно компенсируются, а распоры от вантового каркаса в целом передаются на опорный контур торцевыми секциями. Для уравнивания продольных распоров при неравномерном загрузении покрытия предусмотрены связи 8, проходящие насквозь рассматриваемые секции и соединяющие вершины стоек 5 (узлы «а»). В торцевых секциях связи 8 напрямую соединены с опорным контуром.

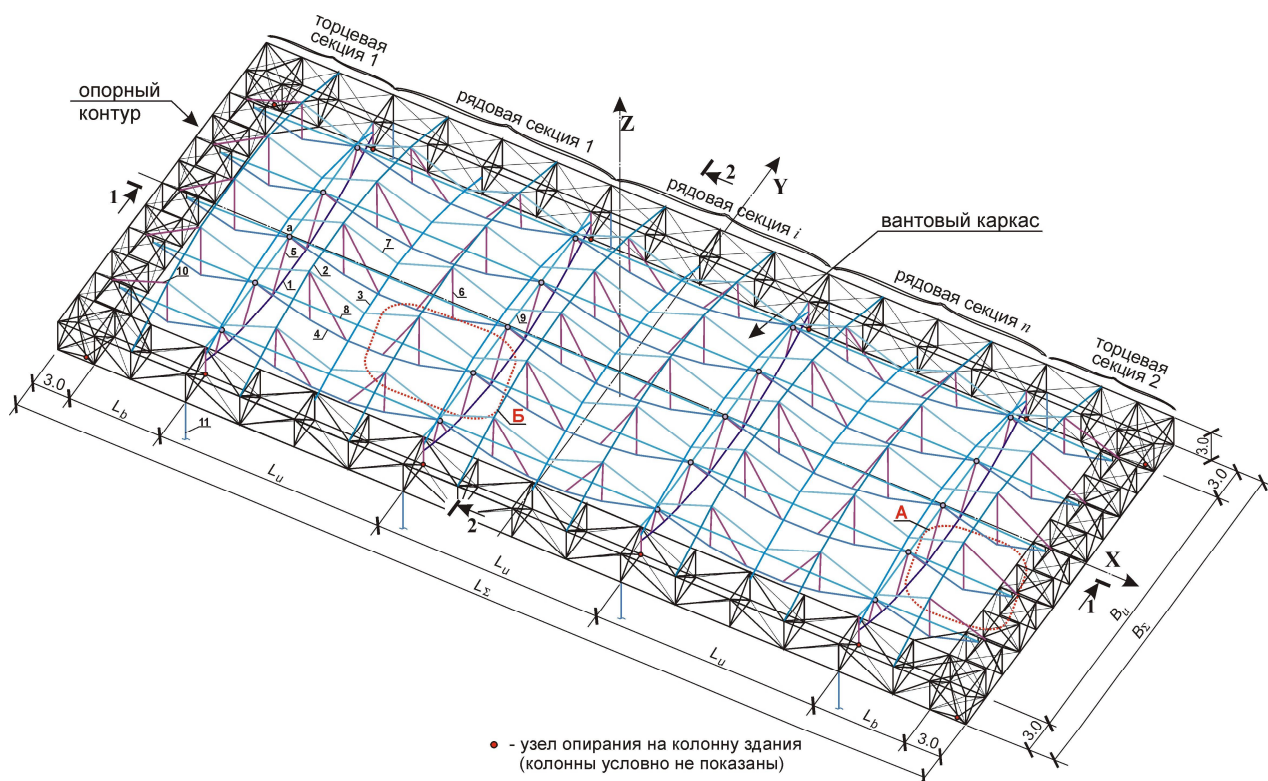


Рис. 1. Общий вид вантового каркаса и решётчатого опорного контура: 1 – главные несущие ванты поперечного направления; 2, 3 – стабилизирующие ванты поперечного направления; 4 – второстепенные несущие ванты продольного направления; 5, 6 – стойки; 7...9 – гибкие вантовые связи; 10 – распорки; 11 – вертикальные оттяжки до фундаментов; перемещения узлов верхнего пояса в сечениях 1-1 и 2-2 показаны на рис. 6, фрагменты А и Б приведены на рис. 4 и 5

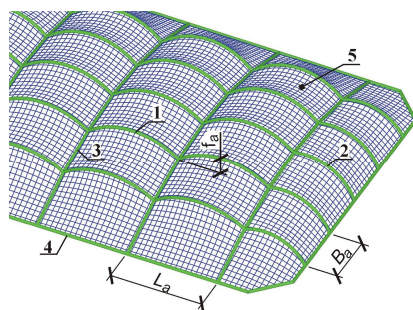


Рис. 2. Фрагмент тентовой конструкции покрытия: 1, 2 – основная и торцевая арки; 3 – поперечная балка; 4 – обвязочная балка по периметру; 5 – сектор мягкой оболочки

Предварительное напряжение рассматриваемой вантовой конструкции создаётся натяжением главных несущих вант 1. При этом вершины стоек 5 (узлы «а») перемещаются вверх, увлекая за собой второстепенные ванты 4 и стойки 6, вершины которых, в свою очередь, принадлежат стабилизирующим вантам 2. Ванты 2 образуют выпуклые вверх вертикальные рёбра поперечного направления, концы которых закреплены за опорный контур. Устойчивость рёбер, образуемых вантами 2, из их плоскостей обеспечивается связями 7, соединёнными со стабилизирующими вантами 3 и натягиваемыми совместно с основной системой вант.

Тентовое покрытие, опирающееся на вершины стоек вантовой конструкции, состоит из мягкой оболочки и поддерживающих её элементов. Оболочка разделена на прямоугольные в плане секторы, расположенные между арками и прямолинейными балками. Арки установлены в продольном направлении (вдоль оси X). Шарнирные балки уложены в поперечном направлении (вдоль оси Y) и имеют уклон вдоль ската покрытия. По периметру тентового покрытия расположена обвязочная балка (рис. 2). Монтаж тентового покрытия производится после завершения работ по монтажу и созданию предварительного напряжения в основном вантовом каркасе.

В качестве примера рассмотрена вантовая конструкция, состоящая из трёх рядовых секций с размерами в плане $L_u \times B_u = 18 \times 25$ м (в направлении осей X и Y, соответственно) и торцевых секций размером $L_b \times B_u = 7.5 \times 25$ м (рис. 1). Поперечное сечение опорного контура принято квадратным с размерами 3×3 м. Таким образом, габаритные размеры в плане конструкции покрытия составляют: $L_\Sigma \times B_\Sigma = 75 \times 31$ м. Задавшись отношением стрелы основных вант рассматриваемой конструкции покрытия к пролёту в диапазоне $f/l = [1/10 \dots 1/8]$, примем начальные стрелы несущих вант 1 и 4: $f_1 = 3.0$ и $f_4 = 2.0$ м. Для стабилизирующих вант 2 и 3 начальные стрелы составляют: $f_2 = 3.5$ и $f_3 = 2.5$ м.

Пролёт основных арок, несущих мягкую оболочку и опирающихся на стойки вантового каркаса, составляет $L_a = 9.0$ м, а их шаг принят равным $B_a = 5$ м. Отношение стрелы арок f_a к их пролёту $k_f = f_a / L_a$, а также уровень предварительного напряжения мягкой оболочки P_r приняты следующими: $k_f = 0.2$ и $P_r = 6.0$ кН/м.

Выполнение численного анализа потребовало предварительного задания основных параметров рассчитываемого вантового каркаса, включающих жесткостные характеристики элементов и величины предварительного напряжения гибких тросов. Площади поперечных сечений основных вант определены методом покоординатного спуска [11].

Главные несущие ванты поперечного направления приняты из двух стальных тросов закрытого типа диаметром 50 мм общей площадью $A_1 = 33$ см². Второстепенные несущие ванты состоят из одного троса диаметром 50 мм с площадью поперечного сечения $A_4 = 16.5$ см². Стабилизирующие ванты поперечного направления и вантовые связи по верхнему поясу приняты из троса диаметром 31 мм с площадью поперечного сечения $A_2 = A_3 = A_7 = 6.34$ см². Предварительное натяжение ΔL_p главных несущих вант поперечного направления (элементы 1, рис. 1) составляет 160 и 190 мм (для вант, лежащих между торцевой и рядовой секциями, и для вант, лежащих между рядовыми секциями, соответственно).

Статический анализ вантовой конструкции покрытия выполнен численно в специализированном лицензионном программном комплексе EASY.2020 [29]. Совместный расчёт вантового каркаса, тентового покрытия и решётчатого опорного контура выполнен с целью учёта взаимного влияния мягкой оболочки и поддерживающих её конструкций.

В статическом расчёте учтены равномерные снеговые S_n и ветровые W воздействия по всей площади покрытия интенсивностью 1.8 кН/м² и 0.5 кН/м², соответственно, а также

загружение снегом половины перекрываемой площади ($S_{n,x}$ и $S_{n,y}$, рис. 3,а и 3,б) и загрузе-
ние отдельных секций покрытия ($S_{n,m}$ и $S_{n,s}$, рис. 3,в и 3,г).

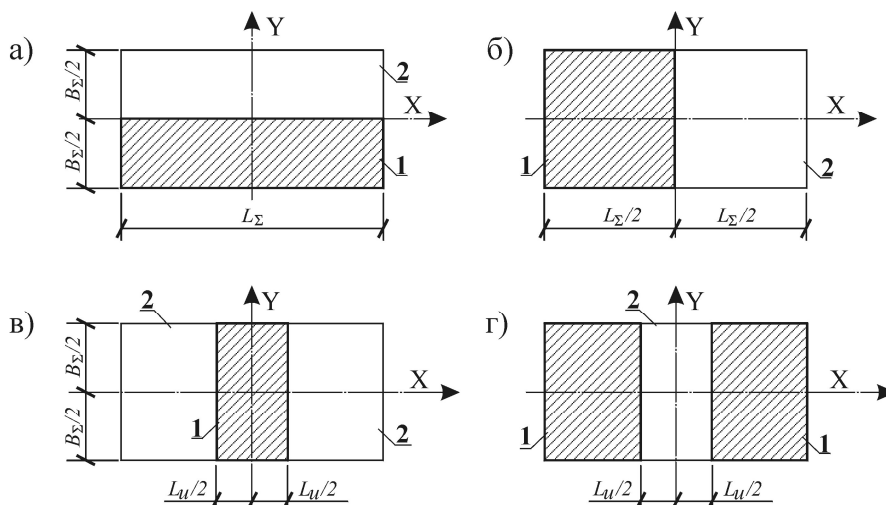


Рис. 3. Схемы действия снеговой нагрузки: а) нагрузка $S_{n,x}$ (загружение половины перекрываемой площади относительно оси X); б) нагрузка $S_{n,y}$ (загружение половины перекрываемой площади относительно оси Y); в) загрузе-
ние центральной рядовой секции (нагрузка $S_{n,m}$); г) загрузе-
ние всей площади покрытия, кроме
центральной рядовой секции (нагрузка $S_{n,s}$); 1 – загруженная зона, 2 – незагруженная зона

Результаты исследования

Численные исследования показали, что рассматриваемая вантовая конструкция обладает геометрической неизменяемостью, сохраняя равновесное положение в пространстве под действием внешних нагрузок.

Вместе с тем, рёбра торцевых секций имеют тенденцию к искривлению из вертикальной плоскости. Перемещение узлов верхнего пояса данных рёбер в горизонтальном направлении вдоль оси X достигает 380 мм (рис. 4,а). Замена крайних участков гибких связей по верхнему поясу на распорки, воспринимающие сжимающие воздействия, приводит к уменьшению горизонтальных деформаций до 72 мм.

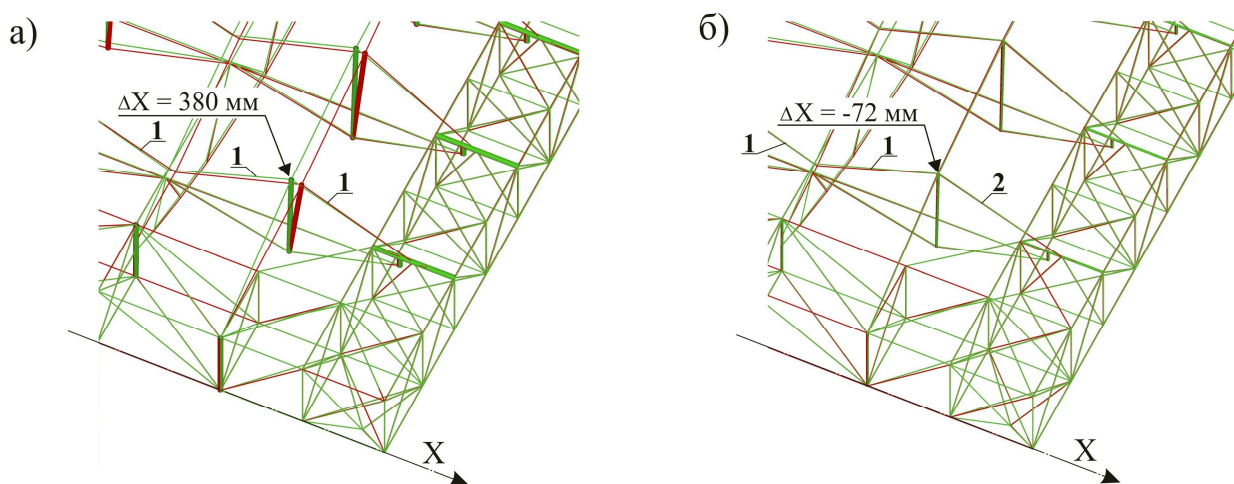


Рис. 4. Деформации вертикального ребра торцевой секции вантовой конструкции под действием снеговой нагрузки (фрагмент А, рис. 1): а) все связи по верхнему поясу – гибкие ваны 1; б) крайние участки связей – распорки 2; зелёным цветом обозначена недеформированная схема конструкции покрытия, а красным цветом – конструкция под действием внешних нагрузок

Наклонные стойки 5 (рис. 1), установленные вместо вертикальных стоек, предложенных в [9], работают эффективно в качестве связей в направлении оси Y на равномерные воздействия. От предварительного напряжения вантовой конструкции горизонтальные перемещения по оси Y вершин стоек (узлы «а», рис. 1) составляют 125 мм, а от равномерной снеговой нагрузки – 110 мм, что не превышает $1/200$ от размера свободного пролёта B_u .

Вместе с тем загрузка снегом половины пролёта относительно продольной оси X вызывает перемещение до 450 мм вершин стоек вдоль оси Y . Это вызывает выход из вертикальной плоскости второстепенных несущих вант продольного направления (элементы 4, рис. 1) до 630 мм (рис. 5). Установка горизонтальных связей (элементы 9, рис. 1) способствует уменьшению смещений вершин наклонных стоек до 81 мм. При этом выход из вертикальной плоскости несущих вант продольного направления не превышает 130 мм.

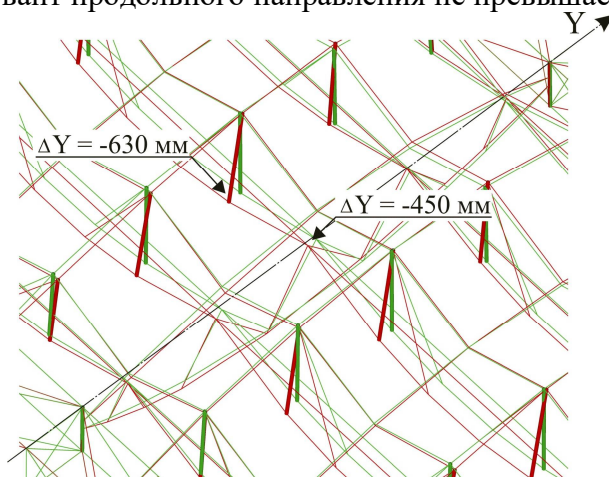


Рис. 5. Деформации вантовой конструкции без установки горизонтальных связей по оси Y (фрагмент Б, рис. 1)

Вертикальные перемещения узлов верхнего пояса рассматриваемой конструкции, находящейся под действием внешних нагрузок, приведены на рис. 6. Схема расположения сечений – на рис. 1.

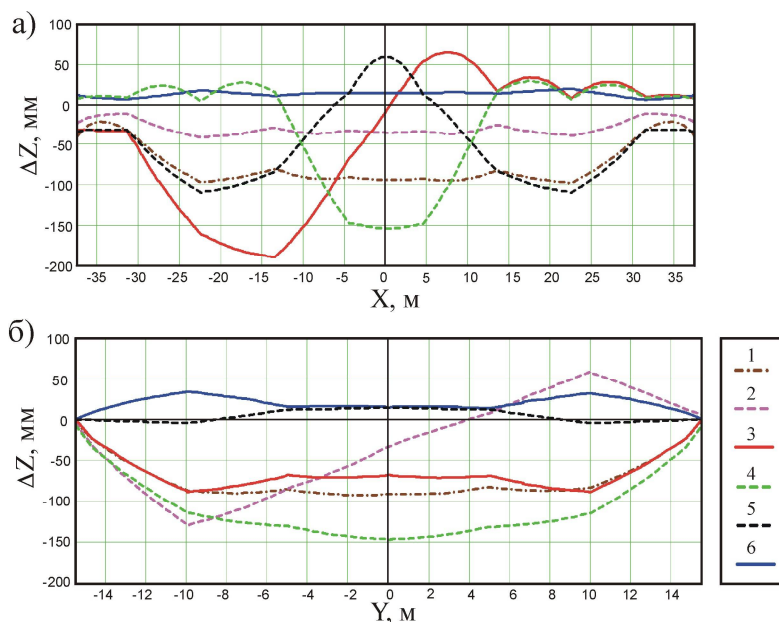


Рис. 6. Вертикальные перемещения узлов верхнего пояса: а – сечение 1-1, б – сечение 2-2; 1...5 – снеговые нагрузки $S_n, S_{n,x}, S_{n,y}, S_{n,m}, S_{n,s}$, соответственно; 6 – ветровая нагрузка W

Из рис. 6 видно, что максимальные вертикальные перемещения верхнего пояса вантовой конструкции имеют место при действии неравномерных внешних нагрузок. Вместе с тем пиковые значения перемещений не превышают 1/150 пролёта.

Удельная металлоёмкость рассматриваемой вантовой конструкции составляет 43.9 кг/м². При этом расход стали на решётчатый опорный контур составляет 18 кг/м², металлоёмкость несущих вант, связей и распорок равна 13.6 кг/м², а металлоёмкость каркаса тентового покрытия составляет 12.3 кг/м². Материалоёмкость мягкой оболочки, с учётом кривизны поверхности покрытия, оценивается в 1.5-2.0 кг/м².

Выводы

1. Предложено усовершенствованное конструктивное решение вантового каркаса, включающего торцевые секции для перехода от рядовых секций к опорному контуру, а также дополнительные связи в виде оттяжек и распорок.

2. Применение распорок, воспринимающих сжимающие воздействия, вместо гибких связей на крайних участках верхнего пояса способствует уменьшению горизонтальных перемещений вантовой конструкции с 380 до 72 мм.

3. Установка горизонтальных связей, объединяющих вершины наклонных стоек, расположенных в плоскостях несущих вант поперечного направления, способствует уменьшению горизонтальных перемещений вершин от неравномерных воздействий с 450 до 81 мм, а также, снижает отклонение от вертикальной плоскости второстепенных несущих вант продольного направления с 630 до 130 мм.

4. Выполнен совместный численный анализ вантового предварительно напряжённого каркаса, тентовой конструкции покрытия и решётчатого опорного контура. Подтверждено, что рассматриваемая вантовая конструкция обладает геометрической неизменяемостью и сохраняет равновесное положение в пространстве под действием внешних воздействий, включающих загрузку полупролёта и отдельных секторов покрытия.

5. Удельная металлоёмкость рассматриваемой вантовой конструкции составляет 43.9 кг/м². Она складывается из металлоёмкости решётчатого опорного контура (41%), металлоёмкости преднапряжённого вантового каркаса (31%) и металлоёмкости каркаса тентового покрытия (28%).

6. Предложенная вантовая конструкция предназначена для прямоугольных в плане зданий с укрупнённой сеткой основных несущих колонн, в т.ч. в промышленном строительстве. Её применение позволит расширить область эффективного использования высокопрочных стальных тросов.

Библиографический список

1. Кирсанов Н.М. Висячие и вантовые конструкции. – М.: Стройиздат, 1981. – 158 с.
2. Blockley D. Bridges. The science and art of the world's most inspiring structures. – Oxford University Press, 2010. – 312 p.
3. Bridgens B., Birchall M. Form and function: the significance of material properties in the design of tensile fabric structures // Engineering Structures. – 2012. – № 44. – P. 1 - 12. DOI: 10.1016/j.engstruct.2012.05.044
4. Geiger D., Stefaniuk A., Chen D. The design and construction of two cable domes for the Korean Olympics // Proceedings IASS Symposium on Membrane Structures and Space Frames. – Osaka, Japan, 1986. – P. 265-272.
5. Zhang Z., Dong S., Fu X. Structural design of lotus arena: a large-span suspen-dome roof // International Journal of Space Structures. – 2009. – Vol. 24. – № 3. – P. 129-142.

6. Levy M.P. Triangulated roof structure. Патент США №5259158, 1990.
7. Castro G. Dome roof structure and method of designing and constructing same. Патент США №5857294, 1994.
8. А.с. СССР №. 535398. Висячее покрытие / Л.Г. Дмитриев, Г.Б. Гильман, А.В. Касилов, 1974.
9. Пат. RU Вантовая конструкция покрытия / А.В. Чесноков, В.В. Михайлов. – №169612; заявл. 27.10.2016; опубл. 24.03.2017.
10. Chesnokov A.V., Mikhaylov V.V. Cable roof structure with flexible fabric covering // Proc. of the VIII international conference on textile composites and inflatable structures. – Munich, Germany, 2017. – P. 436 – 447. URL: <http://congress.cimne.com/membranes2017/frontal/Doc/Ebook2017.pdf> (дата обращения 17.12.2023)
11. Чесноков А.В., Михайлов В.В., Долматов И.В. Численный алгоритм определения жесткостных параметров и величины предварительного напряжения вантовой конструкции покрытия // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Сер. Строительство и архитектура. – 2018. – Вып. 52(71). – С. 61-70. URL: [https://vgasu.ru/upload/files/science/vestnik_52\(71\).pdf](https://vgasu.ru/upload/files/science/vestnik_52(71).pdf) (дата обращения 17.12.2023)
12. Еремеев П.Г. Вантовая комбинированная конструктивная система «Тенсегрители» // Промышленное и гражданское строительство. – 2021. – № 1. – С. 21-27. doi: 10.33622/0869-7019.2021.01.21-27
13. Snelson K. The art of tensegrity // International journal of space structures. – 2012. – Vol. 27. – № 2-3. – P. 71-80.
14. Блинов Ю.И. Тентовые здания и сооружения (аспекты мягких покрытий и перспектив развития): Дис. ... д-ра техн. наук. – М.: МИСИ, 1991. – 401 с.
15. Wagner R. Bauen mit seilen und membranen. – Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2016. – 517 p. [in German].
16. Stimpfle B., Trenkle J. Textile akademie Monchengladbach, job report // Proceedings of the TensiNet Symposium. Softening the Habitats. – Milan, Italy, 2019. – P. 453-464.
17. Мыскова О.В. Архитектура тентовых сооружений: проблемы формообразования (1990 – 2000 гг.): Дис. ... канд. архитектуры. – М.: НИИ теории архитектуры и градостроительства, 2003. – 279 с.
18. Jermoljev D., Machacek J. Steel structures with prestressed linear and membrane elements // Procedia Engineering. – 2012. – № 40. – P. 171-176. doi: 10.1016/j.proeng.2012.07.075.
19. Machacek J., Jermoljev D. Steel structures in interaction with non-metallic membranes // Journal of Civil Engineering and Management. – 2017. – Vol. 23. – № 3. – P. 368-377. doi: 10.3846/13923730.2015.1128482.
20. Barozzi M., Viscuso S., Zanelli A. Design novel covering system for archaeological areas // Proc. of the VII international conference on textile composites and inflatable structures. – Barcelona, Spain, 2015. – P. 105 – 114. URL: <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/109301> (дата обращения 17.12.2023).
21. Seidel M. Tensile surface structures: a practical guide to cable and membrane construction. – Wien: Ernst & Sohn, 2009. – 229 p.
22. Analysis and design of fabric membrane structures: a systematic review on material and structural performance / J. Xu, Y. Zhang, Q. Yu, L. Zhan // Thin-Walled Structures. – 2022. – № 170. – P. 1-17. doi: 10.1016/j.tws.2021.108619.
23. Membrane roof for an amphitheater in Brazil: searching for the optimal design / E. Nunes, J.B.M. Sousa, B. Baier, A.M.S. Freitas // International Journal of Space Structures. – 2015. – Vol. 30. – № 3-4. – P. 261-271. doi: 10.1260/0266-3511.30.3-4.261.
24. Svoboda O., Machacek J. Tubular steel arch stabilized by textile membranes // Advances in Technology Innovation. – 2016. – Vol. 1. – № 2. – P. 50-52.

25. Hegyi D. Numerical stability analysis of arch-supported membrane roofs // Structures. – 2021. – № 29. – P. 785-795. doi: 10.1016/j.istruc.2020.11.025.
26. Industrial design and analysis of structural membranes / E. Haug, P. De Kermel, B. Gawenat, A. Michalski // International Journal of Space Structures. – 2009. – Vol. 24. – № 4. – P. 191-204. doi: 10.1260/026635109789968227.
27. Llorens J.I. Appropriate design of structural membranes // Proceedings of X International Conference on textile composites and inflatable structures. Structural membranes 2021. – Munich, Germany, 2021. – 12 p. doi: 10.23967/membranes.2021.008.
28. Stroebel D., Holl J. On the calculation of textile halls // Proceedings of X International Conference on textile composites and inflatable structures. Structural membranes 2021. – Munich, Germany, 2021. – 7 p. – doi: 10.23967/membranes.2021.043
29. Easy 2020. Program Description. Technet GmbH, 2019. – URL: <https://www.technet-gmbh.com/en/products/easy/> (дата обращения 17.12.2023).

References

1. Kirsanov N.M. Visyachiye i vantovyye konstruksii [Hanging and cable structures]. M.: Stroyizdat, 1981. 158 s. (In Russian)
2. Blockley D. Bridges. The science and art of the world's most inspiring structures. Oxford University Press, 2010. 312 p.
3. Bridgens B., Birchall M. Form and function: the significance of material properties in the design of tensile fabric structures // Engineering Structures. 2012. № 44. Pp. 1 - 12. doi: 10.1016/j.engstruct.2012.05.044
4. Geiger D., Stefaniuk A., Chen D. The design and construction of two cable domes for the Korean Olympics // Proceedings IASS Symposium on Membrane Structures and Space Frames, Osaka, Japan, 1986. p. 265-272.
5. Zhang Z., Dong S., Fu X. Structural design of lotus arena: a large-span suspen-dome roof // International Journal of Space Structures. 2009. Vol. 24, № 3. Pp. 129-142.
6. Levy M.P. Triangulated roof structure. US patent №5259158, 1990.
7. Castro G. Dome roof structure and method of designing and constructing same. US patent №5857294, 1994.
8. Dmitriyev L.G., Gil'man G.B, Kasilov A.V. Visyacheye pokrytiye [Hanging roof]. A.s. USSR №. 535398, 1974. (In Russian)
9. Chesnokov A.V., Mikhailov V.V. Vantovaya konstruksiya pokrytiya [Cable roof structure]. Utility model patent RU №169612, 2016. (In Russian)
10. Chesnokov A.V., Mikhailov V.V. Cable roof structure with flexible fabric covering // Proc. of the VIII international conference on textile composites and inflatable structures. Munich, Germany, 2017. Pp. 436 – 447. URL: <http://congress.cimne.com/membranes2017/frontal/Doc/Ebook2017.pdf> (date of application: 18.12.2023)
11. Chesnokov A.V., Mikhailov V.V., Dolmatov I.V. Chislennyy algoritm opredeleniya zhestkostnykh parametrov i velichiny predvaritel'nogo napryazheniya vantovoy konstruksii pokrytiya [Numerical algorithm for estimation of stiffness parameters and pre-stress values of the pre-stressed cable roof structure] // Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura. 2018. Vyp. 52(71). S. 61-70. (In Russian) [https://vgasu.ru/upload/files/science/vestnik_52\(71\).pdf](https://vgasu.ru/upload/files/science/vestnik_52(71).pdf) (date of application: 18.12.2023)
12. Yeremeyev P.G. Cable-Stayed Combined Structural System "Tensegrity". Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and Civil Engineering], 2021, no. 1, pp. 21–27. (In Russian). doi: 10.33622/0869-7019.2021.01.21-27.

13. Snelson K. The art of tensegrity // *International journal of space structures*, Vol. 27, № 2-3, 2012. P. 71-80.
14. Blinov YU.I. Tentovyye zdaniya i sooruzheniya (aspekty myagkikh pokrytiy i perspektiv razvitiya) [Tent buildings and structures (the aspects of soft roofs and perspectives of the development)]: Diss. ... d-r tekhn. nauk. Moskva,, MISI, 1991. 401 p. (In Russian)
15. Wagner R. Bauen mit seilen und membranen. Berlin: Beuth Verlag GmbH, 2016. 517 p. (in German).
16. Stimpfle B., Trenkle J. Textile akademie Monchengladbach, job report // *Proceedings of the TensiNet Symposium. Softening the Habitats*. Milan, Italy, 2019. Pp. 453-464. URL: https://www.tensinet.com/files/Tensinet_Symposia/TensiNet_Softening-the-habitats_916.32456_def-1.pdf (date of application: 18.12.2023)
17. Myskova O.V. Arkhitektura tentovykh sooruzheniy: problemy formoobrazovaniya (1990 – 2000 gg.) [Architecture of tent constructions: the problems of shape determination]: Diss. ... kand. arkhitektury. Moskva, NII teorii arkhitektury i gradostroitel'stva, 2003. 279 c. (In Russian)
18. Jermoljev D., Machacek J. Steel structures with prestressed linear and membrane elements // *Procedia Engineering*. 2012. № 40. Pp. 171-176. doi: 10.1016/j.proeng.2012.07.075
19. Machacek J, Jermoljev D. Steel structures in interaction with non-metallic membranes // *Journal of Civil Engineering and Management*. 2017. Vol. 23, № 3. Pp. 368-377. doi: 10.3846/13923730.2015.1128482
20. Barozzi M., Viscuso S., Zanelli A. Design novel covering system for archaeological areas // *Proc. of the VII international conference on textile composites and inflatable structures*. Barcelona, Spain, 2015. Pp. 105 – 114. URL: <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/109301> (date of application: 18.12.2023)
21. Seidel M. *Tensile surface structures: a practical guide to cable and membrane construction*. Wien: Ernst & Sohn, 2009. 229 p.
22. Xu J., Zhang Y., Yu Q., Zhan L. Analysis and design of fabric membrane structures: A systematic review on material and structural performance // *Thin-Walled Structures*. 2022. № 170. Pp. 1-17. doi: 10.1016/j.tws.2021.108619
23. Nunes E., Sousa J.B.M, Baier B., Freitas A.M.S. Membrane roof for an amphitheater in Brazil: searching for the optimal design // *International Journal of Space Structures*. 2015. Vol. 30, № 3-4. Pp. 261-271. doi: 10.1260/0266-3511.30.3-4.261
24. Svoboda O., Machacek J. Tubular steel arch stabilized by textile membranes // *Advances in Technology Innovation*. 2016. Vol. 1, № 2. Pp. 50-52.
25. Hegyi D. Numerical stability analysis of arch-supported membrane roofs // *Structures*. 2021. №. 29. Pp. 785-795. doi: 10.1016/j.istruc.2020.11.025
26. Haug E., De Kermel P., Gawenat B., Michalski A. Industrial design and analysis of structural membranes // *International Journal of Space Structures*. 2009. Vol. 24, № 4. Pp. 191-204. doi: 10.1260/026635109789968227
27. Llorens J.I. Appropriate design of structural membranes // *Proceedings of X International Conference on textile composites and inflatable structures. Structural membranes 2021*. Munich, Germany, 2021. 12 p. doi: 10.23967/membranes.2021.008
28. Stroebel D., Holl J. On the calculation of textile halls // *Proceedings of X International Conference on textile composites and inflatable structures. Structural membranes 2021*. Munich, Germany, 2021. 7 p. doi: 10.23967/membranes.2021.043
29. Easy 2020. Program Description. Technet GmbH, 2019. <https://www.technet-gmbh.com/en/products/easy/> (date of application: 18.12.2023)

DEVELOPMENT OF THE CABLE STRUCTURE WITH THE TENT ROOFING

A. V. Chesnokov¹, V. V. Mikhailov²

Lipetsk State Technical University^{1,2}
Russia, Lipetsk

¹PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Building Manufacturing Department, Tel.: +7(4742) 328-074,
e-mail: andreychess742@gmail.com

²Doctor of Technical Sciences, Head of the Building Manufacturing Department, Tel.: +7(4742) 328-074,
e-mail: mmvv46@rambler.ru

Cable structure for rectangular buildings with large column spacing is proposed. The structure consists of the lattice supporting contour, pre-stressed framework and the tent roofing. The framework is a tensegrity system. It comprises continuous tensile cables joined by discontinuous compressed struts. The roofing is arranged at the tops of the struts. It consists of soft membrane, supporting arches and beam elements.

Structural solution for improving the pre-stressed framework is proposed. The solution includes the end sections for linking the ordinary sections with the supporting contour. Extra ties and struts are also proposed. Holistic numerical analysis of the pre-stressed cable framework, the tent roofing and the lattice supporting contour is performed. External impacts on the entire roof surface, as well as half-span loads and loads on particular membrane sectors are considered. Material capacity of the roof structure is estimated. The favorable effect brought about by the extra ties is confirmed. The effect includes reduction of deformations and mitigation of structural ribs inclination.

The cable roof structure proposed is intended for sport and commercial buildings, as well as for transport infrastructure facilities. It is well fit for industrial construction, e.g. for workshops and warehouses.

Key words: roof of the building, cable structure, tensegrity-system, tent building construction, arch, soft membrane, pre-stress, material capacity, deformability

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЁТ ГОФРИРОВАННЫХ ВОДОПРОПУСКНЫХ ТРУБ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МКЭ

А. В. Черников¹, В. А. Козлов²

Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(920)246-70-77, e-mail: chernickov-andrei@yandex.ru

²Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

В статье рассматриваются способы моделирования и расчёта цилиндрической гофрированной водопропускной трубы, предлагается методика моделирования безотпорной зоны металлических гофрированных труб в расчётном конечно-элементном комплексе с целью верификации разработанного авторами метода расчёта таких конструкций на базе полубезмоментной теории оболочек. На примерах исследуется процесс образования пластических зон грунтовой обоймы.

Ключевые слова: металлическая гофрированная труба (МГТ), метод конечных элементов (МКЭ), безотпорная зона, пластические зоны в грунте

Введение. Метод конечных элементов (МКЭ) является точным и самое главное универсальным инструментом в области расчётов строительных конструкций. В настоящее время конечно-элементные комплексы занимают ведущее место и позволяют решить практически любую задачу строительной механики. С их помощью произведено большое количество численных исследований металлических гофрированных водопропускных труб (МГТ) [1, 5, 9-11]. Действующие нормативные документы (ОДМ 218.2.001-2009, ОДМ 218.2.087-2017) применительно к расчёту МГТ дают следующие рекомендации: МКЭ целесообразно применять при расчёте труб диаметром 3 м и более, при расчёте труб в районе вечной мерзлоты, при расчёте труб в сейсмических районах, а также при расчёте труб на косогорных участках и в горной местности.

Однако при использовании МКЭ для расчёта гофрированных труб, возникают свои сложности, например при моделировании безотпорной зоны. А при моделировании действительной формы гофры, в случае использования пространственной расчётной схемы, кратно возрастает размер расчётной схемы. Помимо этого, использование комплексов МКЭ требует высокой квалификации инженера расчётчика и хорошего понимания особенностей деформирования тонкостенных металлических структур.

В настоящей статье рассматриваются способы моделирования и расчёта цилиндрической гофрированной водопропускной трубы; предлагается простая методика моделирования безотпорной зоны МГТ в комплексе МКЭ; выполняется верификация метода расчёта на базе полубезмоментной теории оболочек, описанного в работах [6-8], а также исследуется образование пластических зон грунтовой обоймы.

1. Объект исследования. В качестве объекта исследования выступает водопропускное сооружение, конструкция которого состоит из металлической гофрированной трубы (МГТ) круглого очертания с размерами гофра 152x34 диаметром 1,2 м,

толщиной 2 мм и грунтовой обоймы из песков средней крупности равномерно уплотнённой по периметру МГТ.

Исходные данные для расчёта представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметр	Условное обозначение	Значение	Единицы измерения
<i>Параметры МГТ:</i>			
Типоразмер гофра	—	152x34	мм
Диаметр МГТ	$D_{\text{МГТ}}$	1,2	м
Длина МГТ	L	6,0	м
Толщина стенки	h	2,0	мм
Погонный момент инерции	$J_{\text{гофр}}$	3,199E-007	м ⁴ /м
Модуль упругости материала МГТ	E	210000	МПа
Коэффициент Пуассона	μ	0,3	—
Удельный вес	γ	7850	кг/м ³
<i>Параметры грунтовой обоймы:</i>			
Модуль деформации грунта	$E_{\text{гр}}$	15000	МПа
Коэффициент Пуассона грунта	$\mu_{\text{гр}}$	0,27	—
Удельный вес грунта	$\gamma_{\text{гр}}$	1900	кг/м ³
Высота насыпи	$H_{\text{гр}}$	5	м
Угол внутреннего трения	φ	30	град.
Удельное сцепление	c	1	кПа

2. Численное моделирование. Численное моделирование и расчет водопропускного сооружения выполнены в программном комплексе Midas GTS NX, который имеет развитый функционал для геотехнических и гидротехнических расчётов. Были рассмотрены две расчётные схемы: классическая схема с полным моделированием грунтового массива и предлагаемая авторами схема, где насыпь выше отпорной зоны представлена в виде эквивалентной нагрузки, которая позволяет более корректно отразить работу безотпорного участка МГТ.

Первая расчётная схема представляет собой пространственную модель участка насыпи с водопропускной трубой. Боковые и нижние границы рассматриваемого грунтового массива были приняты в соответствии с требованиями ОДМ 218.2.087-2017 (прил. Е) – 1,5 диаметра МГТ от боковых и нижней границ конструкции трубы (для грунтов с модулем деформации менее 20 МПа). Таким образом исключается влияние граничных условий, накладываемых по сторонам массива грунта, на результаты статического расчёта. Верхняя граница грунтового массива определяется высотой насыпи.

Грунтовой массив трёхмерной модели был смоделирован твердотельными элементами (solid elements) – 15-узловыми тетраэдрами. Элементы гофрированной оболочки были заданы треугольными оболочечными элементами (shell elements) – с заданной толщиной, которая соответствует толщине гофрированного листа МГТ. При этом для оболочки МГТ была смоделирована действительная форма гофрирования с учётом принятого типоразмера гофра. Расчёт был выполнен только на нагрузку от собственного веса грунтовой обоймы и насыпи.

Дискретизация модели была выполнена таким образом, чтобы в области с наиболее сложной геометрией (гофрированная оболочка МГТ и прилегающий грунт) размер

конечного элемента позволял описать её с необходимой точностью. А по мере удаления от МГТ размер сетки конечных элементов постепенно увеличивался. Подробная информация по дискретизации расчётной схемы находится в табл. 2. Общий вид расчётной схемы представлен на рис. 1, а фрагмент конечно-элементной модели оболочки МГТ представлен на рис. 2. Задача решалась в нелинейной упругопластической постановке. Условие предельного напряжённого состояния и описание деформирования грунта на пластической стадии приняты в соответствии с уравнением Мора-Кулона.

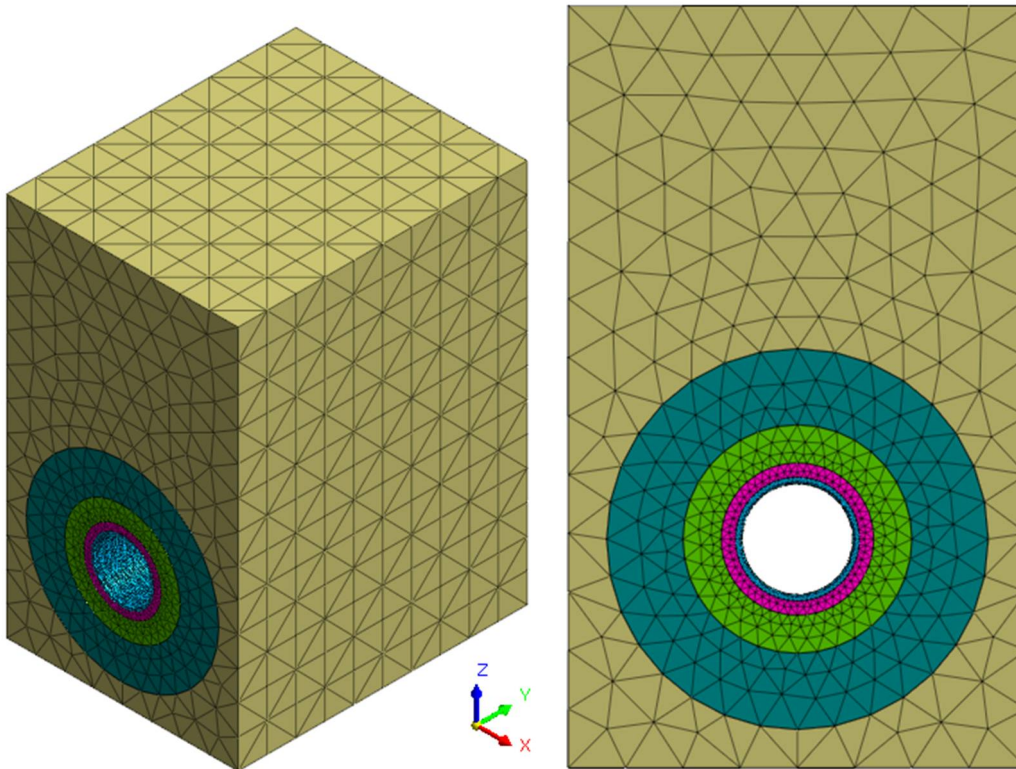


Рис. 1. Общий вид расчётной схемы с полным моделированием насыпи

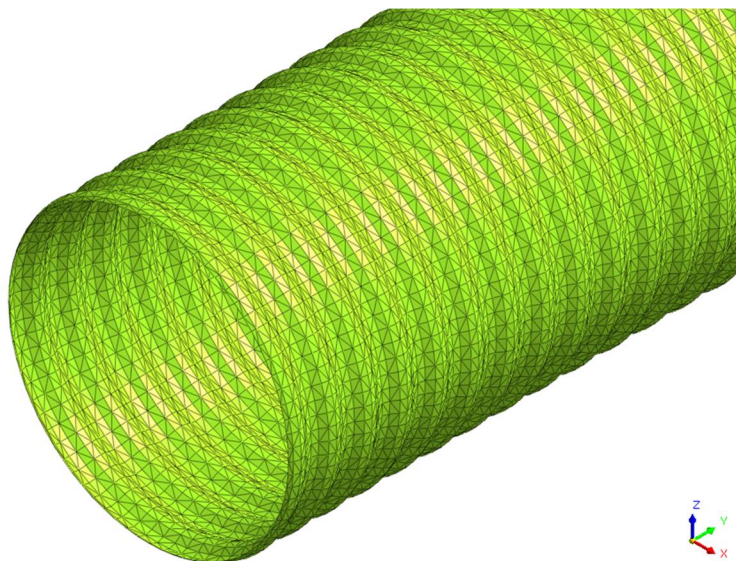


Рис. 2. Фрагмент конечно-элементной модели оболочки МГТ

Таблица 2

Участок расчётной схемы	Размер КЭ, м	Толщина слоя, м	Кол-во элементов
Оболочка МГТ	0,05	-	36024
1-ый слой грунта вокруг МГТ	0,05	0,05	84154
2-й -//-	0,1	0,15	65671
3-й -//-	0,2	0,4	21250
4-й -//-	0,4	0,8	8076
5-й -//-	0,6	До границы расчётной области	5441
Сумма:			220616

Вторая расчётная схема также представляет собой пространственную модель участка насыпи с водопропускной трубой. Боковые и нижние границы рассматриваемого грунтового массива определены так же, как и в первом случае. Верхняя граница моделируемого участка массива определяется положением безотпорной зоны МГТ. Грунт, расположенный в отпорной зоне МГТ, моделируется объёмными конечными элементами, а весь вышележащий грунт заменяется эквивалентной фиктивной поверхностной нагрузкой. Общий вид описанной расчётной схемы представлен на рис. 3.

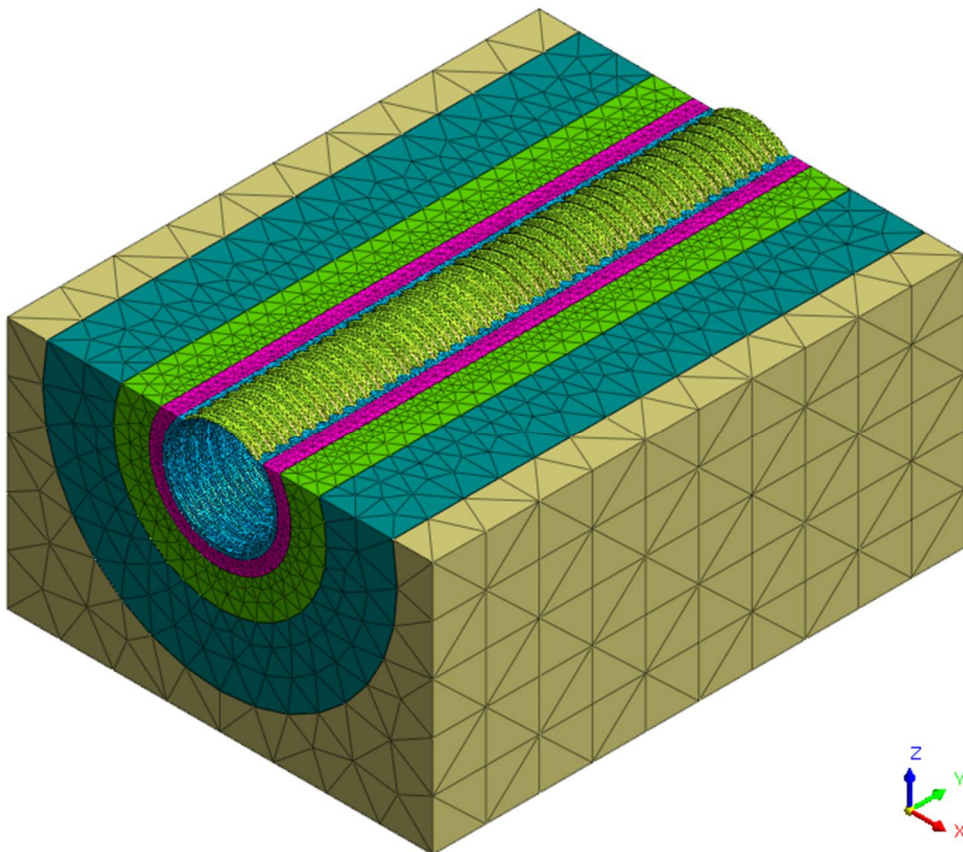


Рис. 3. Общий вид расчётной схемы с насыпью в виде фиктивной нагрузки

Предлагаемая схема позволяет решить проблему, связанную с моделированием работы безотпорного участка МГТ, когда замковая часть водопропускной трубы не может свободно перемещаться к центру оболочки и как бы “повисает” на вышележащем грунте (при этом грунт начинает работать на растяжение). Данную проблему также можно решить с использованием односторонних упругих связей, наложенных в месте контакта оболочки МГТ и грунтового массива. Однако не все конечно-элементные комплексы обладают подобными инструментами, помимо этого задача усложняется сложной формой гофрированной оболочки и высокой дискретизацией модели. Поэтому приём с использованием фиктивной нагрузки в безотпорной зоне МГТ представляется достаточно простым и удобным и легко реализуется в любом конечно-элементном комплексе.

Среднее значение безотпорной зоны цилиндрических МГТ, исходя из статистических данных [2-3], составляет 90°. Для точного же определения безотпорной зоны МГТ можно решить вспомогательную задачу [6, 8].

3. Результаты численного расчёта. Расчёт водопропускного сооружения был выполнен для двух описанных моделей, а также по предложенной авторами в работах [6-8] методике расчёта МГТ на базе полубезмоментной теории оболочек. Основные результаты расчёта представлены в табл. 3 и на рис. 4-5.

Таблица 3

Компонент НДС	Модель с полной насыпью	Модель с фиктивной нагрузкой	Аналитический метод [6-8]
$w_{\text{верт.}}$ (мм)	6,3	6,8	6,13
$\sigma_q(0)$ (замок)	51435,332	83141,422	78631,503
$\sigma_q(\pi/2)$ (гор. диам.)	26911,258	24757,496	12508,715
$\sigma_q(\pi)$ (лоток)	56061,410	49504,004	7638,337

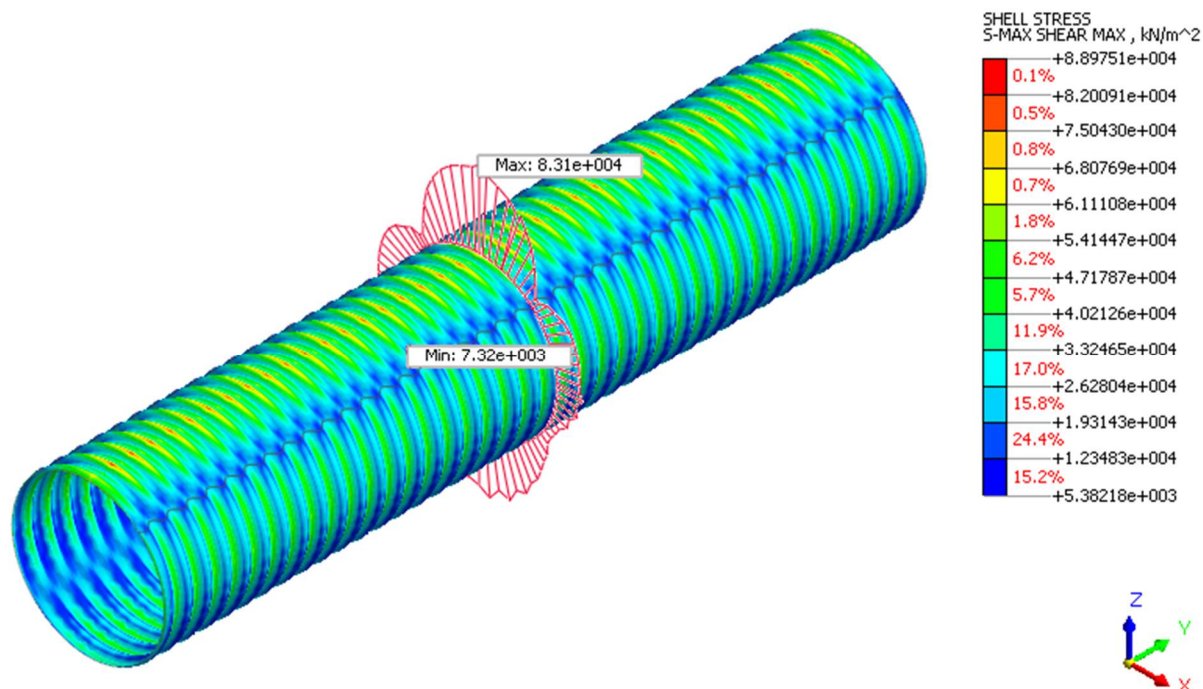


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений для схемы с фиктивной нагрузкой

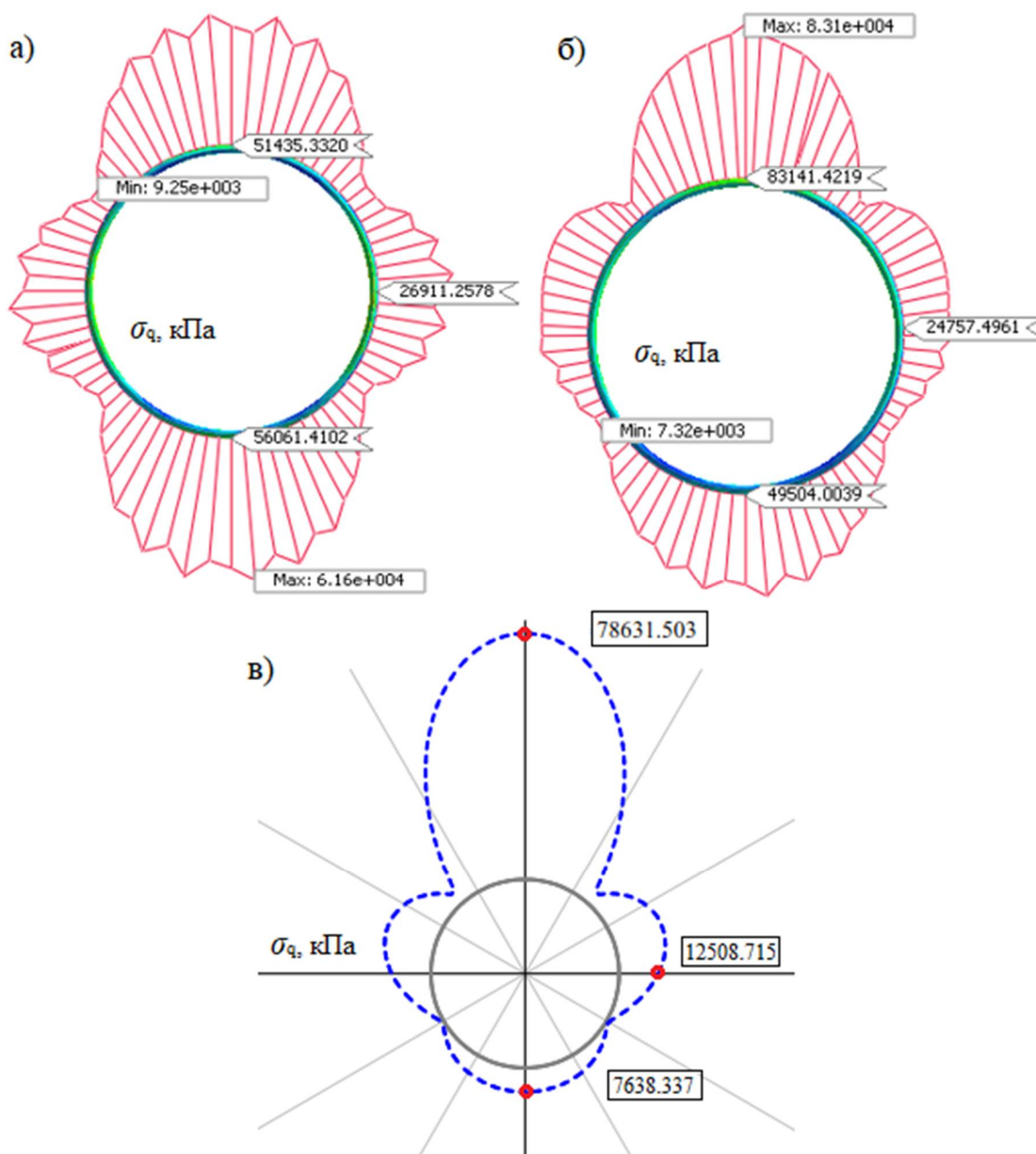


Рис. 5. Эпюры эквивалентных напряжений для среднего сечения МГТ:
а) модель с полной насыпью, б) модель с фиктивной нагрузкой, в) аналитический метод на базе полубезмоментной теории

Из анализа результатов видно, что для всех расчётных случаев (МКЭ и аналитический расчёт) получены близкие значения для вертикальных перемещений (полное уменьшение вертикального диаметра МГТ) в диапазоне 6,1 – 6,8 мм.

Сравнивая две конечно-элементные модели (с полной насыпью и фиктивной нагрузкой), можно отметить, что при близких значениях перемещений распределение напряжений по периметру МГТ существенно отличается. Для модели с полной насыпью в замке и лотке трубы получены близкие значения эквивалентных напряжений, 51435,332 кПа и 56061,410 кПа соответственно, тогда как для модели с фиктивной нагрузкой напряжения в замке в 1,7 раз превышают напряжения в лотке трубы: 83141,422 кПа и 49504,004 кПа соответственно. Опираясь на опытные и экспериментальные данные [2-3] отметим, что замковая часть сечения МГТ является наиболее напряжённым участком конструкции и модель с фиктивной нагрузкой в данном случае более точно описывает напряжённое

состояние МГТ, позволяя корректно учесть безотпорную зону в замке трубы. При этом для обеих моделей получены близкие значения напряжений в области горизонтального диаметра.

Сопоставляя результаты аналитического расчёта (полубезмоментная теория оболочек) с результатами конечно-элементного расчёта, можно отметить, что напряжения в замке трубы близки к значениям, которые получены для модели с фиктивной нагрузкой (78631,503 кПа – аналитический метод, 83141,422 кПа – КЭ расчет). В области же горизонтального диаметра и лотка трубы значения напряжений получены ниже значений, определённых с помощью МКЭ. По всей видимости, это связано с моделированием действительной формы гофрирования МГТ в КЭ комплексе, что приводит к формированию более сложных контактных участков в отпорной зоне МГТ с грунтом засыпки, что отражается на картине НДС.

4. Оценка пластических зон в грунтовой обойме МГТ. Помимо оценки напряженно-деформированного состояния МГТ была произведена оценка предельного напряженного состояния грунтовой обоймы. Для этого использовалась расчётная схема с полным моделированием насыпи. Расчёт был выполнен в линейной и нелинейной постановках. В нелинейной постановке была принята модель грунта по Морю–Кулону. Результаты расчёта НДС МГТ представлены в табл. 4.

Таблица 4

Компонент НДС	Линейный расчёт	Нелинейный расчёт	Разница
$w_{\text{верт.}}$ (мм)	6,0	6,3	4,76 %
$\sigma_q(0)$ (замок) (кПа)	49274,621	51435,332	4,20 %
$\sigma_q(\pi/2)$ (гор. диам.) (кПа)	25286,606	26911,258	6,04 %
$\sigma_q(\pi)$ (лоток) (кПа)	54349,578	56061,410	3,05 %

Разница в расчётах напряженно-деформированного состояния МГТ по линейной и нелинейной теориям составила 3-6%. Причём по нелинейной теории получены более высокие значения эквивалентных напряжений и перемещений, из чего можно сделать вывод, что в грунтовой обойме МГТ присутствуют пластические зоны. Для того чтобы определить их в линейной постановке, следует произвести оценку предельного состояния из условия прочности грунта в точке (элементарном объеме грунтового массива) по Морю–Кулону [4]:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \cdot \sin \varphi - c \cdot \cos \varphi = 0. \quad (1)$$

где σ_1 , σ_2 – главные (максимальное и минимальное) напряжения; φ – угол внутреннего трения; c – удельное сцепление.

Главные максимальные и минимальные напряжения σ_1 , σ_2 определяются следующим образом [4]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}. \quad (2)$$

где σ_x , σ_z , τ_{xz} – нормальные и касательные напряжения в точке в заданной системе координат.

Программный комплекс Midas GTS NX позволяет выполнять дополнительные вычисления с использованием пользовательских функций. Таким образом, линейная расчётная модель была дополнена функциями (1) и (2), аргументами которых выступили

нормальные и касательные напряжения σ_x , σ_z , τ_{xz} , полученные в результате конечно-элементного расчёта. Пластические зоны, определённые по линейному расчёту, представлены на рис. 6. На представленной эпюре отражены пластические области в грунтовой обойме МГТ, в которых не выполняется условие прочности грунта по Морю–Кулону (1).

Однако следует понимать, что определённый таким образом размер пластических областей меньше фактического, поскольку в линейной постановке определить фактические пластические области не представляется возможным. По своей сути, пластические участки, рассчитанные в линейной постановке, это лишь первая итерация для нелинейного расчёта, в ходе которого внутренние усилия в грунте с пластических участков перераспределяются на соседние участки, после чего новая расчётная схема проверяется на прочность. Расчёт продолжается до тех пор, пока рост пластических зон в последующих итерациях не прекратится.

Для нелинейной постановки пластические зоны были также определены с использованием модели Мора–Кулона, но уже при помощи инструментов ПК Midas GTS NX. Результат расчёта пластических зон по нелинейной теории представлены на рис. 7.

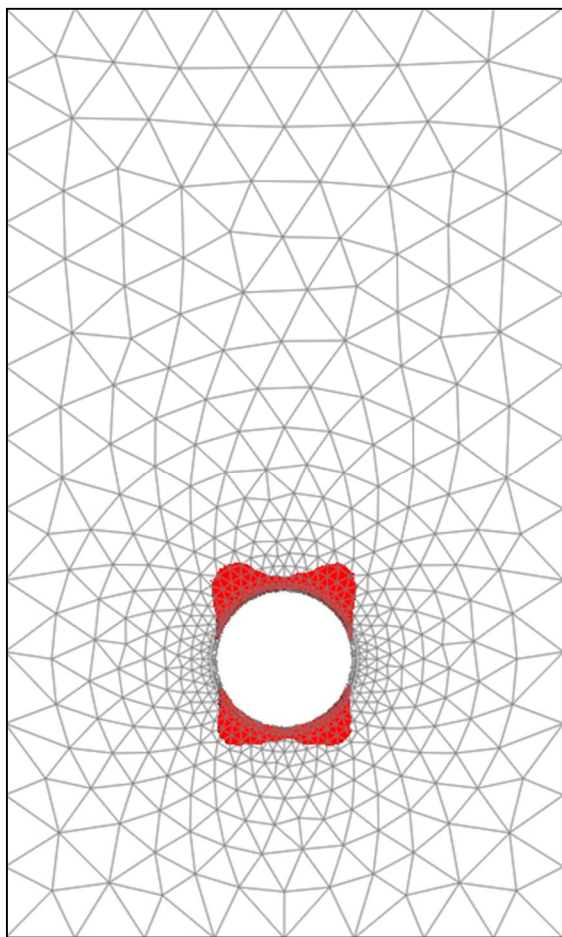


Рис. 6. Пластические зоны грунтовой обоймы для линейной расчётной модели

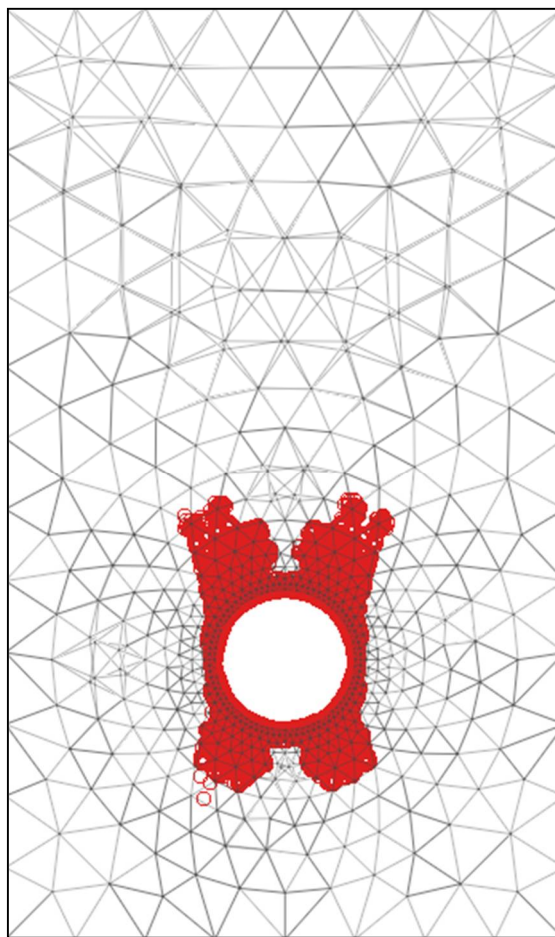


Рис. 7. Пластические зоны грунтовой обоймы для нелинейной расчётной модели

Можно отметить, что пластические зоны существенно увеличились в ходе нелинейного расчёта. Однако даже наличие таких пластических зон по периметру МГТ не оказывает существенного влияния на напряженно-деформированное состояние водопропускной трубы. Как было показано выше, прирост напряжений и перемещений составил 3-6 %.

Результаты расчёта пластических деформаций в грунтовой обойме в нелинейной постановке представлены на рис. 8-9.

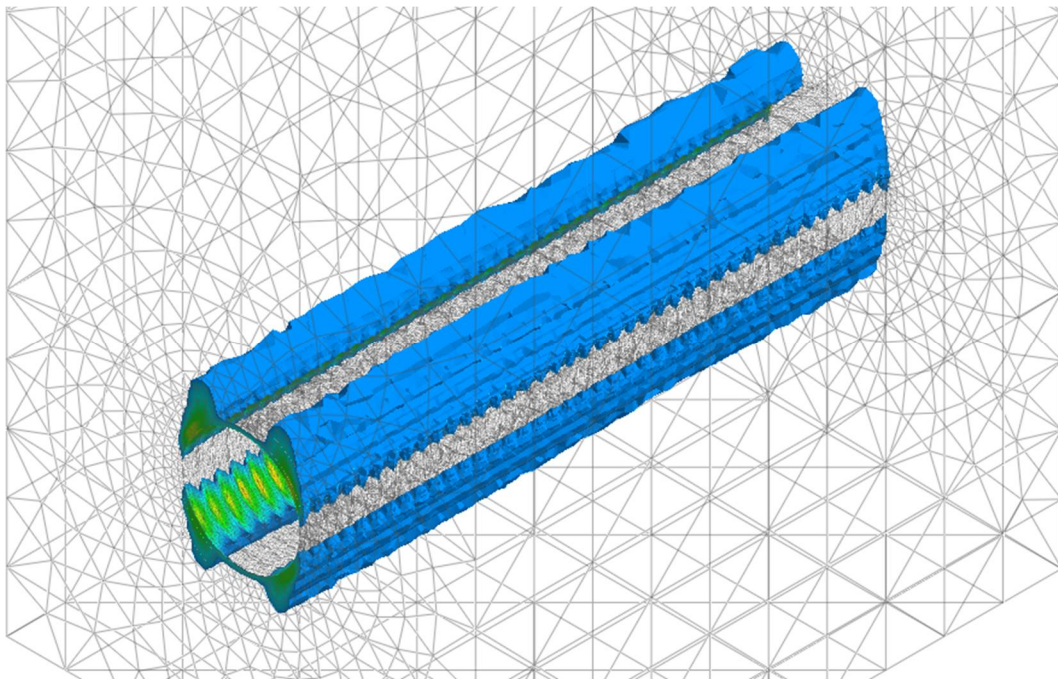


Рис. 8. Пластические деформации грунтовой обоймы МГТ. Общий вид

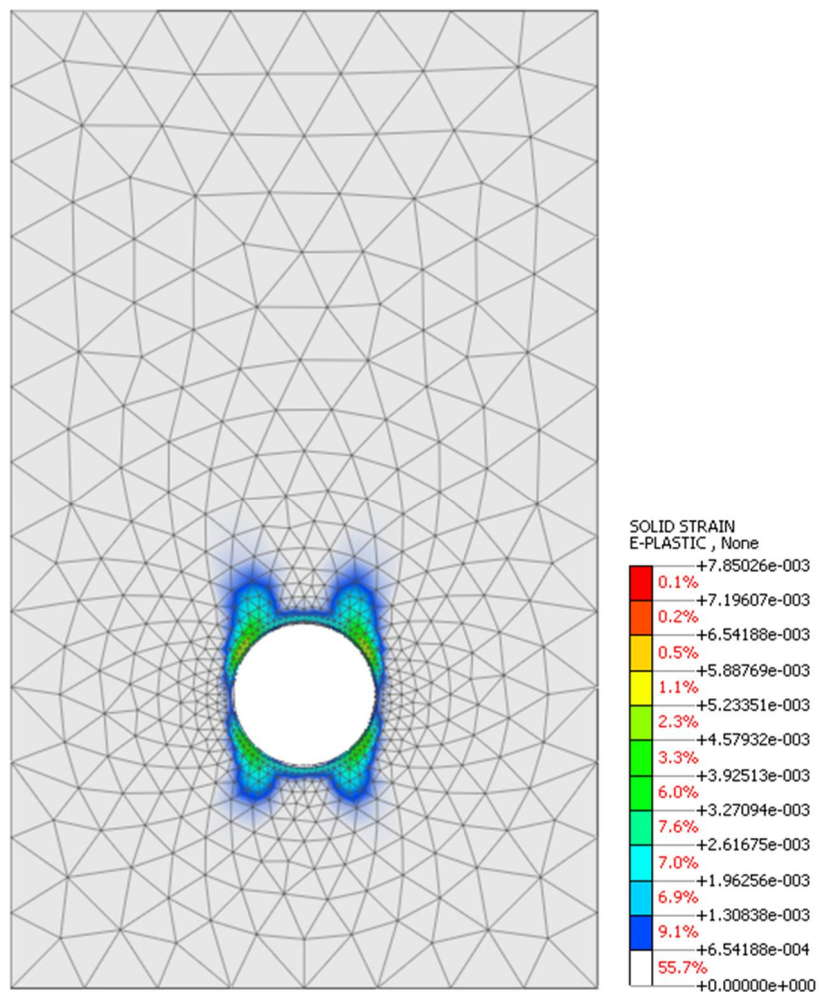


Рис. 9. Пластические деформации грунтовой обоймы МГТ

Выводы. В данной статье рассмотрено применение комплексов МКЭ к расчёту МГТ круглого поперечного сечения. Было произведено сравнение двух вариантов пространственных конечно-элементных расчётных схем: с полным моделированием насыпи объёмными конечными элементами и с моделированием насыпи выше отпорной зоны МГТ в виде эквивалентной поверхностной нагрузки. Для обоих вариантов получены близкие значения вертикальных перемещений (полное уменьшение вертикального диаметра МГТ). Однако картина распределения напряжений отличается. Для модели с полной насыпью в замке и лотке трубы получены близкие значения эквивалентных напряжений, тогда как для модели с фиктивной нагрузкой напряжения в замке в 1,7 раз превышают напряжения в лотке трубы. Опираясь на опытные и экспериментальные данные [2-3] отметим, что замковая часть сечения МГТ является наиболее напряжённым участком конструкции и модель с фиктивной нагрузкой в данном случае более точно описывает напряжённое состояние МГТ, позволяя корректно учесть безотпорную зону в замке трубы.

Также выполнено сопоставление результатов конечно-элементного расчёта и аналитического расчёта по предложенной авторами методике на базе полубезмоментной теории оболочек [6-8]. Для полного уменьшения вертикального диаметра МГТ получены близкие значения для всех расчётных схем: 6,1 – 6,8 мм. Напряжения в замковой части сечения МГТ, полученные аналитическим методом, соответствуют данным КЭ расчёта по схеме с фиктивной нагрузкой (78631,503 кПа и 83141,422 кПа (разница $\approx 5\%$)). В области горизонтального диаметра и лотка трубы значения напряжений, полученные аналитическим методом, существенно ниже значений, полученных с помощью МКЭ.

Дополнительно было рассмотрено образование пластических зон в теле грунтовой обоймы. Для этого был произведён расчёт схемы с полной насыпью в линейной и нелинейной постановках. Оценка предельного состояния была произведена из условия прочности грунта в точке (элементарном объёме грунтового массива) по Мору–Кулону. Разница в расчётах напряженно-деформированного состояния МГТ по линейной и нелинейной теориям составила 3-6%. При этом размер пластических зон в ходе нелинейного расчёта увеличился в 2,5-3 раза. Характер распределения пластических деформаций соответствует расположению максимальных эквивалентных напряжений в грунтовой обойме вблизи МГТ.

Библиографический список

1. Гришина А.С., Бирин А.С. Анализ напряженно-деформированного состояния водопропускного сооружения из металлических гофрированных структур // Транспорт. Транспортные сооружения. Экология. – 2017. – № 4. – С. 76-90. – DOI 10.15593/24111678/2017.04.06.
2. Водопропускные трубы под насыпями / Е.А. Артамонов, Г.Я. Волченков, Р.С. Клейнер, Р.Е. Подвальный, А.С. Потапов, К.Б. Щербина, О.А. Янковский. – М.: Транспорт, 1982. – 232 с.
3. Металлические гофрированные трубы под насыпями / Н.М. Колоколов, О.А. Янковский, К.Б. Щербина, С.Э. Черняховская. – М.: Транспорт, 1973. – 120 с.
4. Шапиро Д.М. Теория и расчётные модели оснований и объектов геотехники. – Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. – 164 с.
5. Шапиро Д.М., Тютин А.П. Численный упругопластический расчет дорожных водопропускных труб // Строительная механика и конструкции. – 2015. – № 2(11). – С. 66-71.
6. Черников А.В., Козлов В.А. Нелинейный алгоритм оценки несущей способности гофрированных водопропускных труб на основе теории оболочек // Строительная

- механика и конструкции. – 2023. – № 1(36). – С. 75-83. – DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.008.
7. Черников А.В., Козлов В.А. Определение напряженно-деформированного состояния гофрированных водопропускных труб с эксплуатационными дефектами на основе полубезмоментной теории оболочек // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 2(29). – С. 12-28.
 8. Черников А.В., Козлов В.А. Учет одностороннего упругого основания при расчете гофрированных водопропускных труб по полубезмоментной теории // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 2(33). – С. 87-97. – DOI 10.36622/VSTU.2022.33.2.008.
 9. Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Buried Corrugated Steel Culvert Failure Mechanisms Due to Environmental Deteriorations // International Conference on Sustainable Infrastructure. – 2019. – P. 29-40.
 10. Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Numerical Performance Assessment of Buried Corrugated Metal Culvert Subject to Service Load Conditions // Canadian Journal of Civil Engineering. – 2021. – Vol. 48. – №2. – Pp. 99-114.
 11. Research on design parameters of double hole corrugated pipe culvert / C. Hao, L. Liu, Z. Wang, S. Wan // Advances in Engineering Research. 7th International Conference on Energy and Environmental Protection (ICEEP 2018). 2018. Vol. 170. Pp. 184-189.

References

1. Grishina A.S., Birin A.S. Analysis of the stress-strain state of a culvert made of metal corrugated structures. Transport. Transport facilities. Ecology. No. 4. 2017. Pp. 76-90. DOI 10.15593/24111678/2017.04.06.
2. Artamonov E.A., Volchenkov G.Ya., Kleiner R.S., Podvalny R.E., Potapov A.S., Shcherbina K.B., Yankovsky O.A. Culverts under embankments. M.: Transport, 1982. 232 p.
3. Kolokolov N.M., Yankovsky O.A., Shcherbina K.B., Chernyakhovskaya S.E. Metal corrugated pipes under embankments. M.: Transport, 1973. 120 p.
4. Shapiro D.M. Theory and calculation models of foundations and geotechnical objects. Voronezh: IPC “Scientific Book”, 2012. 164 p.
5. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Numerical Elastoplastic Calculation of Road Culverts. Construction Mechanics and Structures. No. 2(11). 2015. Pp. 66-71.
6. Chernikov A.V., Kozlov V.A. Nonlinear algorithm for assessing the load-bearing capacity of corrugated culverts based on shell theory. Construction Mechanics and Structures. No. 1(36). 2023. Pp. 75-83. DOI 10.36622/VSTU.2023.36.1.008.
7. Chernikov A.V., Kozlov V.A. Determination of the stress-strain state of corrugated culverts with operational defects based on the semi-momentless theory of shells. Construction Mechanics and Structures. No. 2(29). 2021. Pp. 12-28.
8. Chernikov A.V., Kozlov V.A. Taking into account a one-sided elastic foundation when calculating corrugated culverts using the semi-momentless theory. Construction Mechanics and Structures. No. 2(33). 2022. Pp. 87-97. DOI 10.36622/VSTU.2022.33.2.008.
9. Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Buried corrugated steel culvert failure mechanisms due to environmental deteriorations. International Conference on Sustainable Infrastructure. 2019. Pp. 29-40.
10. Nakhostin E., Kenny S., Sivathayalan S. Numerical performance assessment of buried corrugated metal culvert subject to service load conditions. Canadian Journal of Civil Engineering. Vol. 48. No. 2. 2021. Pp. 99-114.

11. Hao S., Liu L., Wang Z., Wan S. Research on design parameters of double hole corrugated pipe culvert. *Advances in Engineering Research. 7th International Conference on Energy and Environmental Protection (ICEEP 2018)*. 2018. Vol. 170. Pp. 184-189.

NUMERICAL CALCULATION OF CORRUGATED CULTURAL PIPES USING FINITE ELEMENT METHOD

A. V. Chernikov¹, V. A. Kozlov²

Voronezh State Technical University^{1,2}
Russia, Voronezh

¹Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(920)2467077, e-mail: chernikov-andrei@yandex.ru

²Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

The article discusses methods for modeling and calculating cylindrical corrugated culvert, and proposes a methodology for modeling the pressure-free zone of metal corrugated pipes in a finite element calculation complex in order to verify the method developed by the authors for calculating such structures based on the semi-momentless theory of shells. The process of formation of plastic zones in the soil casing is studied using examples.

Keywords: metal corrugated pipe (MCP), finite element method (FEM), unconfined zone, plastic zones in the soil.

ПРИНЦИПЫ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ТОПОЛОГИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СЕТЧАТЫХ СТАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

А. А. Свентиков¹, А. И. Борзунова²

Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹Д-р техн. наук, профессор кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7(473)207 22 20,
e-mail: svarka@vgasu.vrn.ru

²Магистрант кафедры металлических и деревянных конструкций, тел.: +7(473)207 22 20,
e-mail: svarka@vgasu.vrn.ru

Рассмотрено формообразование топологии цилиндрических сетчатых стальных оболочек. В основе методики формообразования лежит принцип наложения планов. В качестве исходных данных принято рассмотрение несущей конструкции покрытия, находящейся на цилиндрической поверхности и имеющей один слой расположения конструктивных элементов. Предложенные принципы проиллюстрированы на примере формирования топологии несущей системы покрытия. Разработанные предложения могут быть использованы для несущих сетчатых стальных конструкций как с регулярной структурой, так и с отличиями в ней на некоторых участках покрытия.

Ключевые слова: несущая конструкция, покрытие, сетка, цилиндрическая оболочка, формообразование, топология покрытия

Введение

Сетчатая оболочка представляет собой инновационное и перспективное решение в области строительства, позволяющее создавать универсальные по своей форме и функциональности объекты. Основная конструктивная идея таких систем заключается в том, что несущая конструкция состоит из взаимопересекающихся стержневых элементов, расположенных определенным образом на некоторой поверхности [1,2,3,4,5].

Главным преимуществом сетчатых оболочек является высокая эффективность работы, которая достигается пространственным перераспределением усилий в несущей системе. Следует отметить, что одновременно с этим связан и основной недостаток данных конструктивных систем: сложная топология несущей системы, создающая значительные сложности при их проектировании.

В настоящей работе предложены принципы формообразования одного из широко применяемых в строительной практике видов сетчатых конструкций: стальных сетчатых оболочек цилиндрического вида (рис. 1) [3,5,7,8,12].



Рис. 1. Примеры построенных сетчатых оболочек цилиндрического типа

1. Принципы формирования топологии

В настоящей работе рассмотрим цилиндрические сетчатые оболочки кругового вида: поперечник данной системы представляет собой дугу окружности. Также несущая система однопоясная или плоскостная: несущие элементы расположены на одной плоскости

Формирование топологии цилиндрической сетчатой оболочки предлагаем осуществлять в следующей последовательности.

Этап 0. Предварительный

Отметим, что в качестве основного исходного компоновочного параметра при проектировании здания выступает его пролет l . На основании общих конструктивных соображений о формировании оболочек назначаем стрелу подъема f [8].

Учитывая, что оболочка цилиндрическая, т.е. в поперечном отношении несущая конструкция представляет собой дугу окружности (рис. 2), из геометрических соображений (рис. 2) вычисляем радиус закругления R , угол при вершине закругления γ и длину развертки оболочки $L_{\text{раз}}$.

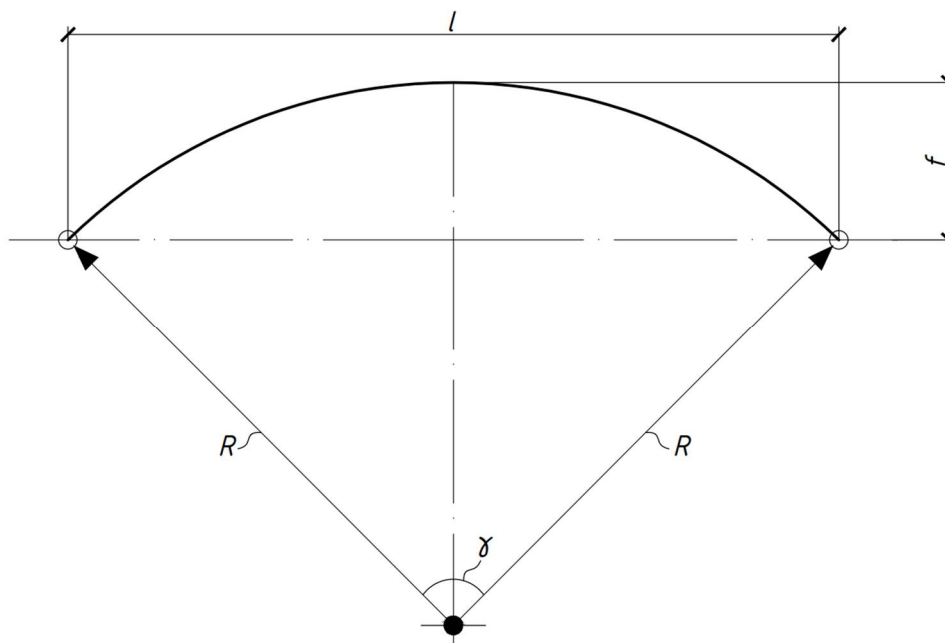


Рис. 2. Поперечная схема цилиндрической оболочки

$$R = \frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + f^2}{2f}; \quad (1)$$

$$\gamma = 2 \arcsin\left(\frac{l}{2R}\right); \quad (2)$$

$$L_{\text{раз}} = \pi R \frac{\gamma}{180^\circ}. \quad (3)$$

Основным результатом данного этапа является формирование плоскости несущей системы.

Этап 1. Формирование основных координационных осей

На данном этапе из соображений оптимальности основных компоновочных параметров каркасов зданий [9] назначается шаг поперечных осей B , т.е. места расположения опорных закреплений оболочки (фундаментов) (рис. 3). Основным итогом является создание разбивочных линий несущей системы.

Этап 2. Формирование основной сетки оболочки

На данном этапе на развертке цилиндрической оболочки из условия обеспечения оптимального значения угла наклона диагональных элементов α_n назначаем шаг основных узлов пересечения этих элементов l_0 (рис. 4).

Дополнительно отметим, что узлы пересечения диагональных элементов формируются в местах пересечения поперечных координационных осей и продольных осей оболочки, расположенных на развертке с шагом l_0 .

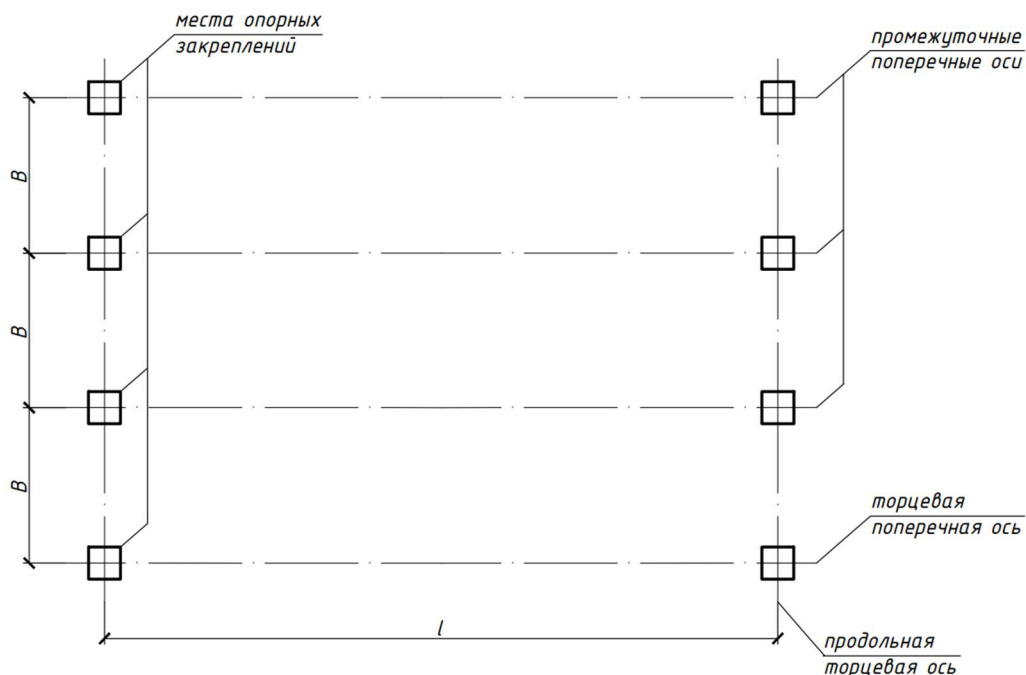


Рис. 3. Основные координационные оси цилиндрической оболочки

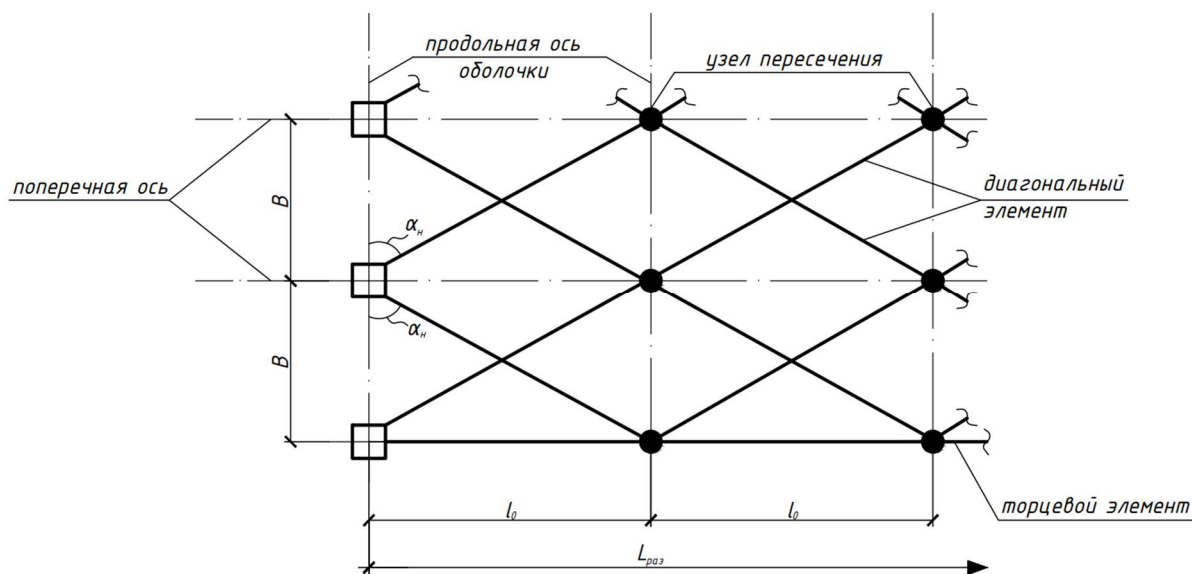


Рис. 4. Фрагмент основной сетки цилиндрической оболочки

Сформированная сетка несущих перекрестных элементов является «основной» в формировании топологии оболочки, так как она связывает опорные узлы покрытия. Таким образом, результатом данного этапа является создание формообразующих линий несущей системы.

Также для обеспечения конструктивной связанности оболочки в ее торце размещается плоский торцевой элемент (расположен по торцевой поперечной оси).

Этап 3. Формирование дополнительной сетки оболочки

В случае достаточно больших значений l_0 и (или) для более равномерного прикрепления конструкций ограждения возникает необходимость в формировании дополнительных сеток на несущей системе покрытия.

Для данной ситуации используем принцип «наложения сеток». Из условия обеспечения конструктивных требований назначается шаг промежуточных узлов пересечения диагональных элементов l_1 . Затем по данным промежуточным узлам располагаем диагональные элементы, таким образом формируя дополнительную сетку (рис. 5). Отметим, что в дополнительной сетке диагональные элементы будут расположены под тем же углом α_n , что и в основной сетке, обеспечивая хорошую совместность работы элементов обеих сеток (рис. 4).

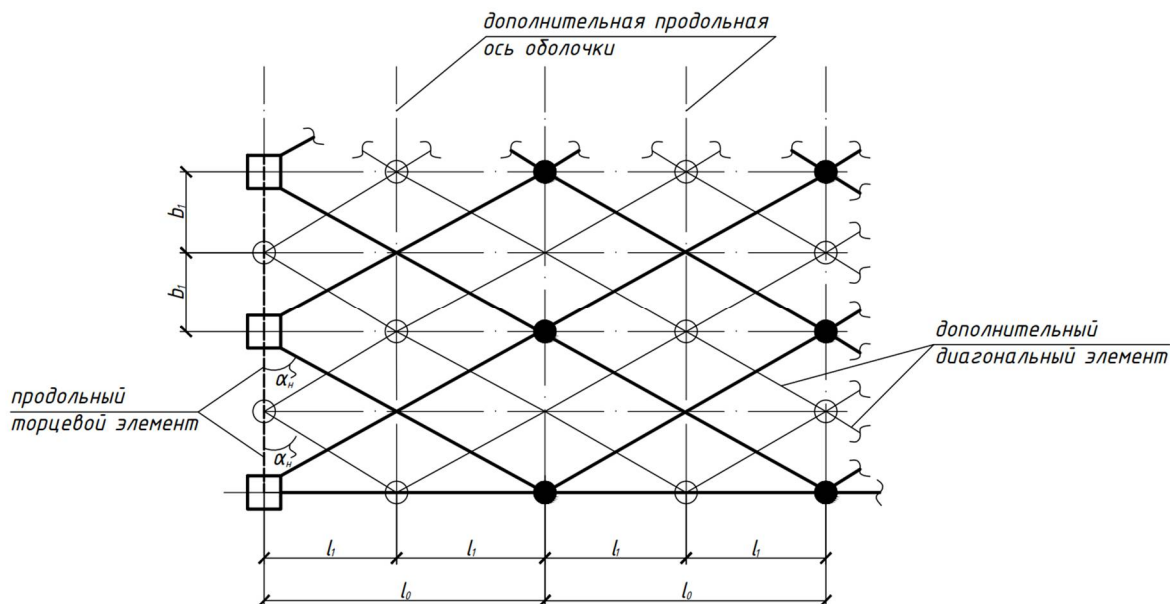


Рис. 5. Фрагмент основной сетки цилиндрической оболочки с дополнительной сеткой

После описанного топологического построения на оболочке формируются дополнительные продольные и поперечные оси. Дополнительные узлы пересечения диагональных элементов для обеспечения прикрепления конструкции ограждения формируются на узлах пересечения поперечных координационных осей и дополнительных продольных осей.

2. Пример формирования топологии

Проиллюстрируем сформулированные принципы построения топологии сетчатой оболочки на примере здания с пролетом $l = 72$ м.

Как для пологой оболочки, назначаем стрелу подъема:

$$f = \frac{l}{5} = \frac{72}{5} = 14,4 \text{ м.}$$

Вычисляем основные компоновочные параметры несущей конструкции:

$$R = \frac{(\frac{l}{2})^2 + f^2}{2f} = \frac{36^2 + 14,4^2}{2 \cdot 14,4} = 52,2 \text{ м;}$$

$$\gamma = 2 \arcsin\left(\frac{l}{2R}\right) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{72}{2 \cdot 52,2}\right) = 87,21^\circ ;$$

$$L_{\text{раз}} = \pi R \frac{\gamma}{180^\circ} = \pi \cdot 52,2 \cdot \frac{87,21^\circ}{180^\circ} = 79,45 \text{ м.}$$

Примем шаг опорных закреплений оболочки (поперечных осей) $B = 6$ м.

Из условия обеспечения оптимального угла наклона диагональных элементов определим параметры основной сетки:

$$l_0 = \frac{L_{\text{раз}}}{8} = \frac{79,45}{8} = 9,93 \text{ м};$$

$$\alpha_n = \arctg \frac{l_0}{B} = \arctg \frac{9,93}{6} = 58,9^\circ.$$

Для обеспечения равномерности прикрепления конструкции ограждения покрытия к несущей конструкции разрабатываем два конструктивных решения несущей системы: с одной и двумя дополнительными сетками. Фрагменты топологии сформированных покрытий приведены на рис. 6.

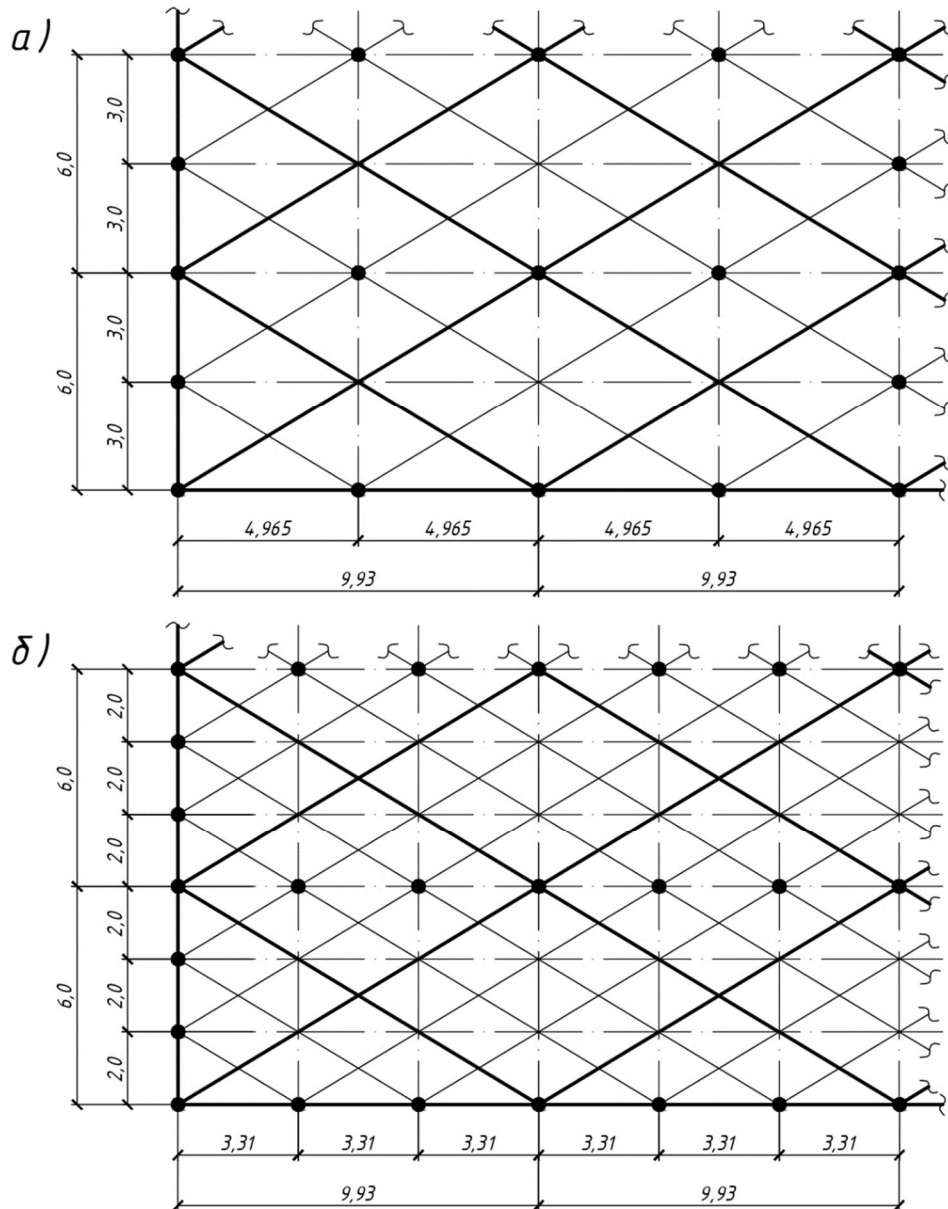


Рис. 6. Фрагмент сформированной топологии покрытия сетчатой цилиндрической оболочки:
а – с одной дополнительной сеткой; б – с двумя дополнительными сетками

Отметим, что с использованием предложенного подхода возможна разработка конструктивных систем с нерегулярной топологией, это позволяет более точно учитывать требования проекта и нагрузки на конструкцию. Например, известно, что на торцах покрытия и по его контуру целесообразно создавать участки с повышенной жесткостью несущей конструк-

ции. На рис. 7 показан пример топологии конструктивной системы сетчатой оболочки с нерегулярной структурой.

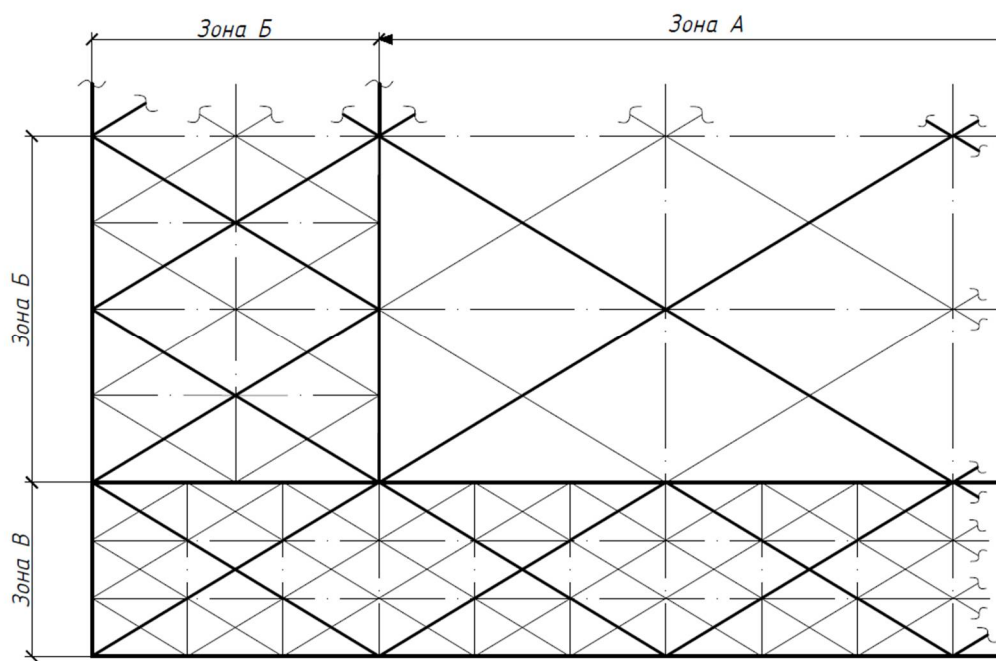


Рис. 7. Фрагмент топологии оболочки с нерегулярной структурой:
зона А – без дополнительных сеток; зона Б – с одной дополнительной сеткой; зона В – с двумя дополнительными сетками

Заключение

На основании проведенных исследований можно сделать следующие выводы.

1. Предложена методика формирования цилиндрических однослойных сетчатых оболочек в основе которой лежит формирование основной и дополнительных сеток, а также принцип наложения планов.

2. Пример построения топологии сетчатой оболочки подтвердил ее достаточную эффективность для применения в строительной практике.

3. Предложенная методика формирования топологии может быть использована для сетчатых оболочек как с регулярной, так и с нерегулярной структурой.

Библиографический список

1. Металлические конструкции: спецкурс / Е.И. Беленя, Н.Н. Стрелецкий, Г.С. Ведяков и др.; под ред. Е.И. Беленя. – М.: Стройиздат, 1991. – 687 с.
2. Металлические конструкции: в 3 т. Т. 2. Конструкции зданий / В.В. Горев, Б.Ю. Уваров, В.В. Филиппов, Г.И. Белый и др.; под ред. В.В. Горева. – М.: Высш. шк., 1999. – 528 с.
3. Тапров В.Д. Сетчатые пространственные конструкции. – К.: Из-во Будивельник, 1966. – 73 с.
4. Лебедев В.А., Лубо Л.Н. Сетчатые оболочки в гражданском строительстве на севере. – Л.: Стройиздат, 1982. – 136 с.

5. Еремеев В.Г. Уникальные большепролетные металлические конструкции покрытий. От олимпийских игр 1980 в Москве до 2014 в Сочи // Вестник НИЦ Строительство. – 2014. – № 11. – С. 93-102.
6. Еремеев П.Г., Ведяков И.И. Проектирование и возведение металлических конструкций большепролетных уникальных зданий и сооружений // Строительные материалы. – 2017. – № 4. – С. 55-58.
7. Еремеев П.Г. Современные пространственные металлические конструкции: изготовление и монтаж // Вестник НИЦ Строительство. – 2020. – № 2 (25). – С.12-25.
8. Кривошапко С.Н. Металлические ребристо-кольцевые и сетчато-стержневые оболочки XIX первой половины XX-го веков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 6. – С.4.
9. Кривошапко С.Н., Алборова Л.А., Мамиева И.А. Оболочечные структуры: генезис, материалы и подвиды. Часть 1. Подвиды и направления // Academia. Архитектура и строительство. – 2021. – № 3. – С. 125-134.
10. Кривошапко С.Н., Алборова Л.А., Мамиева И.А. Оболочечные структуры: генезис, материалы и подвиды. Часть 2. Конструкционные строительные материалы // Academia. Архитектура и строительство. – 2021. – № 4. – С.110-119.
11. Трущев А.Г. Пространственные металлические конструкции. – М.: Стройиздат, 1983.
12. Леденев В.В., Худяков А.В. Оболочечные конструкции в строительстве. Теория, проектирование, конструкции, примеры расчета. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2016.
13. Развитие архитектурной и конструктивной форм уникального покрытия здания аэровокзала «Внуково-1» в процессе проектирования / Л.Л. Борзенков, Д.Л. Мосянин, А.Б. Павлов, И.Л. Ружанский // Academia. Архитектура и строительство. – 2011. – № 4. – С. 89-96.
14. Ивахнюк В.А. Рациональное проектирование несущих конструкций (идеи В.Г. Шухова и их последующее развитие) // Сооружения, конструкции, технологии и строительные материалы XXI века: сб. докл. II медунар. науч.-практ. семинара: в 3 ч. – Белгород, 1999. – Ч. 1. – С.54-58.
15. Семашкина Д.О., Назмеева Т.В. Диагонально-сетчатые оболочки в качестве несущих систем зданий // Alfabuild. – 2019. – № 2. – С. 40-61.
16. Семашкина Д.О. Сетчатые оболочки в качестве каркаса невысоких зданий // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2018. – № 1 (64). – С.36-49.
17. Сиянов А.И. Исследование цилиндрической сетчатой оболочки с повышенной жесткостью опорных ребер // Инженерный вестник Дона. – 2019. – № 9 (60). – С. 45.
18. Практика применения сетчатых оболочек в архитектуре / А.Д. Зефирова, Е. Хабидуллаулы, Д.В. Быстрова, Е.А. Миронова // Научный журнал. – 2019. – № 5 (39). – С. 85-93.

References

1. Belenya E.I., Streletsky N.N., Vedyakov G.S. Metal structures: special course. M.: Stroyizdat, 1991. 687 p.
2. Gorev V.V., Uvarov B.Yu., Filippov V.V., Bely G.I. Metal structures: in 3 volumes. Vol. 2. Building structures. M.: High School, 1999. 528 p.
3. Taprov V.D. Mesh spatial structures. K.: Budivel'nik, 1966. 73 p.
4. Lebedev V.A., Lubo L.N. Mesh shells in civil engineering in the north. L.: Stroyizdat, 1982. 136 p.
5. Eremeev V.G. Unique long-span metal roof structures. From the 1980 Olympic Games in Moscow to 2014 in Sochi. Bulletin of the Scientific Research Center Construction. No. 11. 2014. Pp. 93-102.

6. Ereemeev P.G., Vedyakov I.I. Design and construction of metal structures of large-span unique buildings and structures. *Construction Materials*. No. 4. 2017. Pp. 55-58.
7. Ereemeev P.G. Modern spatial metal structures: manufacturing and installation. *Bulletin of the Scientific Research Center Construction*. No. 2(25). 2020. Pp. 12-25.
8. Krivoshapko S.N. Metal ribbed-ring and mesh-rod shells of the 19th and first half of the 20th centuries. *Structural Mechanics of Engineering Structures and Structures*. No. 6. 2014. P. 4.
9. Krivoshapko S.N., Alborova L.A., Mamieva I.A. Shell structures: genesis, materials and subtypes. Part 1. Subtypes and directions. *Academy. Architecture and Construction*. No. 3. 2021. Pp. 125-134.
10. Krivoshapko S.N., Alborova L.A., Mamieva I.A. Shell structures: genesis, materials and subtypes. Part 2. Structural building materials. *Academy. Architecture and Construction*. No. 4. 2021. Pp.110-119.
11. Trushchev A.G. *Spatial metal structures*. M.: Stroyizdat, 1983.
12. Ledenev V.V., Khudyakov A.V. *Shell structures in construction. Theory, design, structures, calculation examples*. Tambov: TSTU Publishing House, 2016.
13. Borzenkov L.L., Mosyanin D.L., Pavlov A.B., Ruzhansky I.L. Development of architectural and structural forms of the unique coating of the Vnukovo-1 airport terminal building in the design process. *Academy. Architecture and Construction*. No. 4. 2011. Pp. 89-96.
14. Ivakhnyuk V.A. Rational design of load-bearing structures (ideas of V.G. Shukhov and their subsequent development). *Structures, Structures, Technologies and Building Materials of the XXI Century: Collection. Report. II International Scientific and Practical Seminar*. Belgorod, 1999. Part 1. Pp. 54-58.
15. Semashkina D.O., Nazmeeva T.V. Diagonal mesh shells as load-bearing systems for buildings. *Alfabuild*. No. 2. 2019. Pp. 40-61.
16. Semashkina D.O. Mesh shells as a frame for low-rise buildings. *Construction of unique buildings and structures*. No. 1(64). 2018. Pp. 36-49.
17. Siyanov A.I. Study of a cylindrical mesh shell with increased rigidity of supporting ribs. *Engineering Bulletin of the Don*. 2019. No. 9(60). P. 45.
18. Zefirova A.D., Khabi-dullauly E., Bystrova D.V., Mironova E.A. Practice of using mesh shells in architecture. *Scientific Journal*. No. 5(39). 2019. Pp. 85-93.

PRINCIPLES OF SHAPING THE TOPOLOGY OF CYLINDRICAL MESH STEEL SHELLS

A. A. Sventikov¹, A. I. Borzunova²

Voronezh State Technical University^{1,2}
Russia, Voronezh

¹Dr. of Tech. Sciences, Professor of the Department of Metal and Wooden Structures, Tel.: +7(473)2072220, e-mail: svarka@vgasu.vrn.ru

²MA Student of the Department of Metal and Wooden Structures, Tel.: +7(473)2072220, e-mail: svarka@vgasu.vrn.ru

The shaping of the topology of cylindrical mesh steel shells is considered. The shaping technique is based on the principle of overlapping plans. As a starting point, it is accepted to consider the bearing structure of the coating, located on a cylindrical surface and having a single layer of structural elements. The proposed principles are illustrated by the example of the formation of the topology of the carrier coating system. The developed proposals can be used for load-bearing mesh steel structures with both a regular structure and differences in it in some areas of the coating.

Keywords: load-bearing structure, coating, mesh, cylindrical shell, shaping, coating topology.

DOI 10.36622/2219-1038.2024.40.1.008

УДК 004.94:69.04

ПРИМЕНЕНИЕ САД-ПРОГРАММЫ RHINOCEROS-3D ДЛЯ ПОДГОТОВКИ РАСЧЕТНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЗДАНИЯ СЛОЖНОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Д. С. Глазков¹, С. Д. Гребенкин², В. А. Козлов³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(915)5421705, e-mail: glazckov.mitia@yandex.ru

²Инженер кафедры строительной механики, тел.: +7(960)1221336, e-mail: serg.grebionkin@yandex.ru

³Д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30,
e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

Статья посвящена проблеме подготовки расчетно-аналитической модели здания сложной конфигурации для дальнейшего расчёта на устойчивость к прогрессирующему обрушению в ПК ЛИРА-САПР, а также различным аспектам создания аппроксимированной геометрии объекта при помощи параметрического моделирования.

В части моделирования пространственных конструкций показана принципиальная возможность использования программы Rhinoceros-3D и её плагина Grasshopper в качестве препроцессора для ПК ЛИРА-САПР с целью создания аналитической схемы здания без первоначальной разработки физической модели. Также разработана методика и приведено описание алгоритма создания пространственных нагрузок в обозначенной выше САД-программе и их перенос в КЭ-комплекс. Представлено взаимодействие связки программ Rhinoceros-3D - Сапфир-3D – ЛИРА-САПР для поэтапного создания конечной расчётной схемы.

По итогам создания и анализа разработанной аналитической модели сделаны выводы о преимуществах и особенностях использования указанной связки программ при моделировании отдельно взятого здания сложной конфигурации, а также аналогичных объектов нелинейного очертания.

Ключевые слова: параметрическое моделирование, метод конечных элементов, расчётная модель, пространственные нагрузки, САПР

Введение. Современная парадигма проектирования зданий состоит из нескольких этапов [1, 2, 3, 4, 5]:

- 1) создание физической модели в какой-либо САПР;
- 2) преобразование данной модели в аналитическую (промежуточный этап, необходимый для грамотного представления объекта в КЭ-комплексе);
- 3) передача и доработка расчётной модели здания в таком комплексе.

Рассмотрим ряд проблем численного моделирования на примере русскоязычных программ Сапфир-3D и Лира-САПР.

Во-первых, при преобразовании разработанной физической модели в аналитическую в Сапфир-3D возникают сложности с доработкой сопряжений конструктивных элементов между собой, связанные с особенностями представления объёмных физических конструктивных элементов в виде плоских и линейных (например, пластин и стержней), свойственных уже расчётной модели.

Во-вторых, при создании КЭ-сетки для нелинейных математических поверхностей, которыми часто описываются, например, покрытия большепролётных зданий, может возникать большое количество плоских конечных элементов с низким качеством (острые

углы, вырожденные элементы и др.)

Также существует ряд иных проблем: трудоёмкий и времязатратный процесс программной реализации объекта нелинейной геометрической формы; необходимость ручной корректировки параметров конструкций или целого здания на стадии разработки нового проекта или изменении проектного решения, например, при реконструкции здания; корректность представления конструкций объекта в виде тех или иных конечных элементов (линейных, плоских, объёмных).

Постановка задачи. В качестве возможного решения обозначенных выше проблем и разработки альтернативного подхода моделирования зданий и сооружений в линейных и плоских КЭ в данной работе авторы отходят от привычной методики создания моделей для расчётного комплекса Лира-САПР. В качестве иницилирующего этапа в разработке модели предлагается реализация сразу аналитической модели объекта без предварительного создания физической версии. Также рассматривается возможность задания пространственных нагрузок с помощью САД-программ без необходимости применения упрощающей методики грузовых площадей.

Реализация данных задач становится возможна при использовании инструментов программы Rhinoceros-3D. Основной идеей, лежащей в использовании данной программы, является параметрическое моделирование – представление взаимосвязей между отдельными конструкциями, между конструкциями и нагрузкой и др. в виде визуального кода – набора «нодов» [6, 7, 8, 9, 10]. Процесс моделирования здания кратко можно обозначить следующим образом (рис. 1): создание модели здания с необходимыми для проектировщика или исследователя взаимосвязями между элементами посредством визуального кода в Rhinoceros-3D (Grasshopper), передача модели и её доработка с включением дополнительных факторов, например характеристик материалов, нагрузок, грунта основания и др. в Сапфир-3D, в завершение – реализация модели в КЭ-комплексе ЛИРА-САПР, в котором и происходят все дальнейшие инженерные расчёты. Между программами наблюдается взаимосвязь при помощи специальных надстроек, так что процесс моделирования можно автоматизировать весьма существенно.

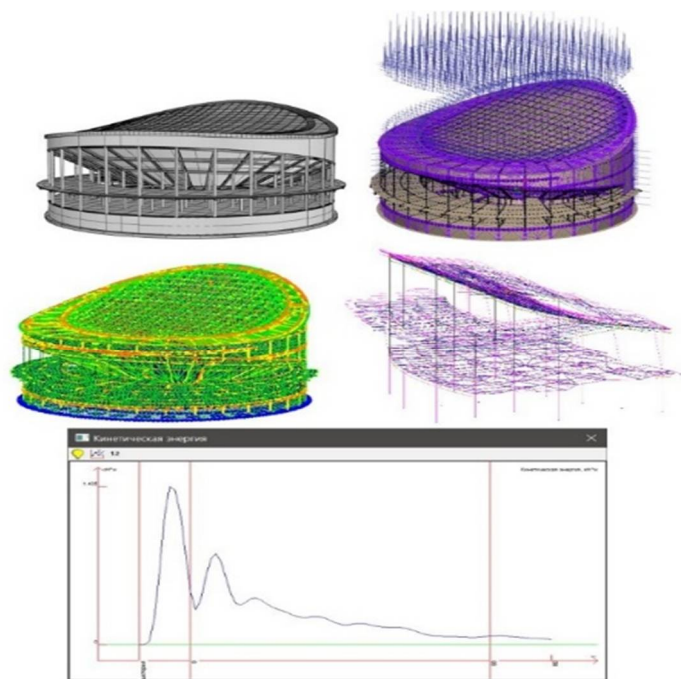


Рис. 1. Краткое представление последовательных этапов реализации расчёта на устойчивость к прогрессирующему обрушению от создания модели до динамического анализа

Объект исследования и программные комплексы. В качестве объекта исследования выбрано здание Воронежского цирка по типовому проекту 1960-1970-х годов проектной организации «Гипроттеатр». Основные несущие конструкции каркаса – монолитные железобетонные ригели и колонны – расположены по радиальным и круговым осям, в плане здание имеет форму окружности. Перекрытие амфитеатра депланировано в пространстве, поэтому его несущие балки имеют разные начальные и конечные высотные отметки. Покрытие здания представляет собой часть поверхности второго рода – гиперболического параболоида в виде предварительно напряжённой железобетонной оболочки с несущими монолитными спаренными канатами и уложенными по ним сборными плитами покрытия. Распор вантовой сети воспринимается депланированным в пространстве железобетонными контуром.

Выбранный комплекс Rhinoceros-3D позволяет программируемо оперировать линиями и поверхностями различного рода, свойственными представлению плоской аналитической модели здания. В свою очередь Лира-САПР наиболее удобно реализует процесс создания плоских конечных элементов, однако создание больших пространственных схем в самом КЭ-комплексе затруднительно и требует больших временных затрат в связи с ограниченностью инструментов геометрического моделирования. Реализация объёмных конечных элементов специфична и для масштабных схем требует рассмотрения каждой отдельной конструкции. Реализация физической модели и экспорт 3D-конструкций из сторонних САД-систем и последующий их импорт в Лира-САПР не рассматривается.

САД-комплекс Rhinoceros-3D с возможностью визуального программирования, которое можно представить в виде создания последовательных блок-схем, в них отдельный блок, называемый «нодом», служит для создания или какого-либо преобразования списков из линий, точек и поверхностей различного рода с помощью математических, логических и иных операций. Дискретность модели достигается аппроксимацией NURBS-кривых полилиниями, а также разбиением прямых линий точками с заданным шагом. Согласованность КЭ-сетки программируется взаимосвязью точек аппроксимированных и разбитых на более мелкие кривых и отрезков со вновь создаваемыми.

Методика построения аналитической модели. В целом разработанный алгоритм создания аналитической модели выглядит следующим образом.

1. На первом этапе для создания согласованной и качественной сетки конечных элементов необходимо создать основные несущие линейные конструкции здания, к которым впоследствии привязывается геометрия поверхностей (перекрытий, стен, покрытия).

2. После создания криволинейных форм несущих конструкций (кольцевых стен, ригелей) была произведена аппроксимация неоднородных рациональных В-сплайнов (которые используются для математически точного представления поверхностей произвольной формы) в полилинии с шагом точек около 0,6 м (1/10 пролёта конструкций для создания оптимальной расчётной модели).

3. Для создания качественной КЭ-сетки поверхностей, привязанных к полилиниям, аппроксимирующим ригели и колонны, необходимо заполнить пространство между кольцевыми и радиальными ригелями (и другими «опорными» конструкциями) точками, по которым будет производиться создание пластин на основе алгоритма триангуляции Б.Н. Делоне (рис. 2, 3), полученные треугольные КЭ в дальнейшем попарно объединяются в четырехугольные.

4. Так как вышележащие конструкции, как правило, в плановом положении совпадают с расположением нижележащих, то полученные точки сетки проецируются на вышележащие криволинейные поверхности перекрытий (например, амфитеатр) (рис. 3).

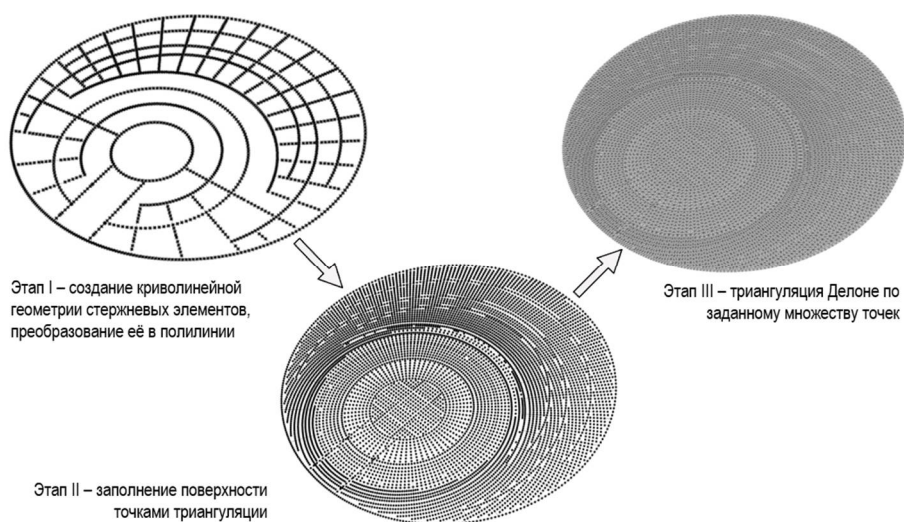


Рис. 2. Этапы создания КЭ-сети

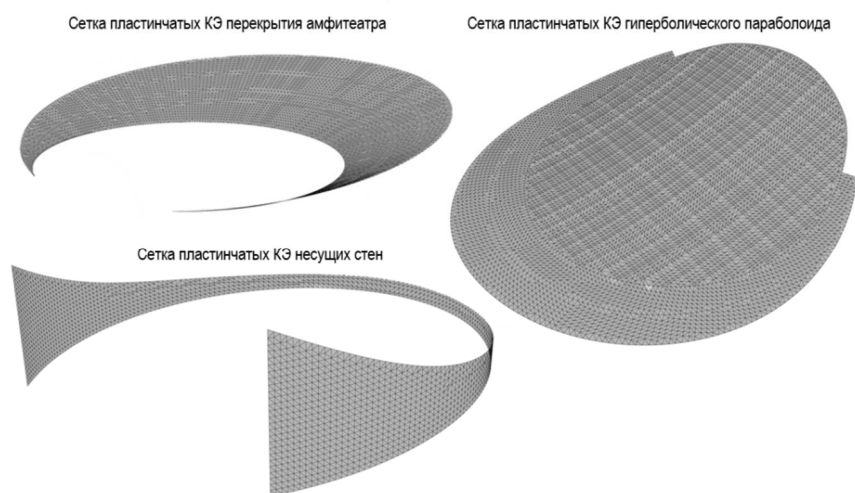


Рис. 3. Полученная методом проецирования точек КЭ-сеть вышележащих конструкций

В работе также реализована возможность создания пространственных нагрузок, например, климатических с последующим их экспортом сначала в Сапфир-3D, затем в Лира-САПР. При задании ветровой нагрузки (рис. 4) покрытие в виде гипары разбивалось на сеть мелких поверхностей-элементов для аппроксимации пространственной распределенной нагрузки мелкой сетью сосредоточенных сил. Из центра каждой элементарной поверхности по нормали к поверхности откладывался вектор сосредоточенной силы, численно равный нормативному значению составляющей ветровой нагрузки в соответствующей области, умноженному на площадь элементарной поверхности. Принцип задания снеговых нагрузок аналогичен.

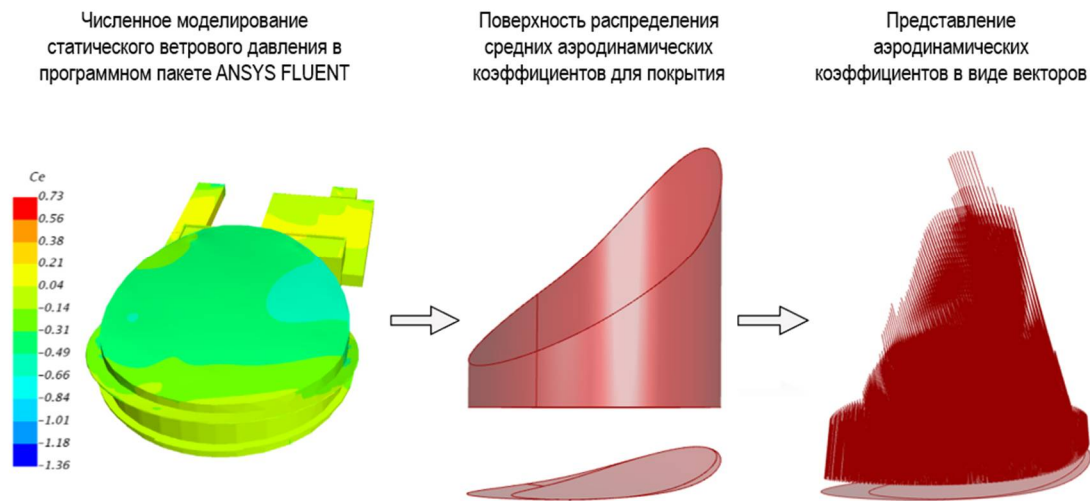


Рис. 4. Формирование пространственной ветровой нагрузки на покрытие

Ветровые нагрузки на фасады здания (рис. 5) также собирались в виде сети сосредоточенных сил. В области расположения несущих кирпичных стен аналогично покрытию фасад разбивался на мелкую сеть поверхностей, к каждой из которой прикладывался соответствующий вектор сосредоточенной силы. Поскольку в работе не стояла задача учитывать жёсткость стеклянных фасадов и их вклад в несущую способность здания, то нагрузка на прилегающие к ним колонны собиралась по грузовым площадям и распределялась на 11 узловых точек каждой из колонн для имитирования распределенной нагрузки.

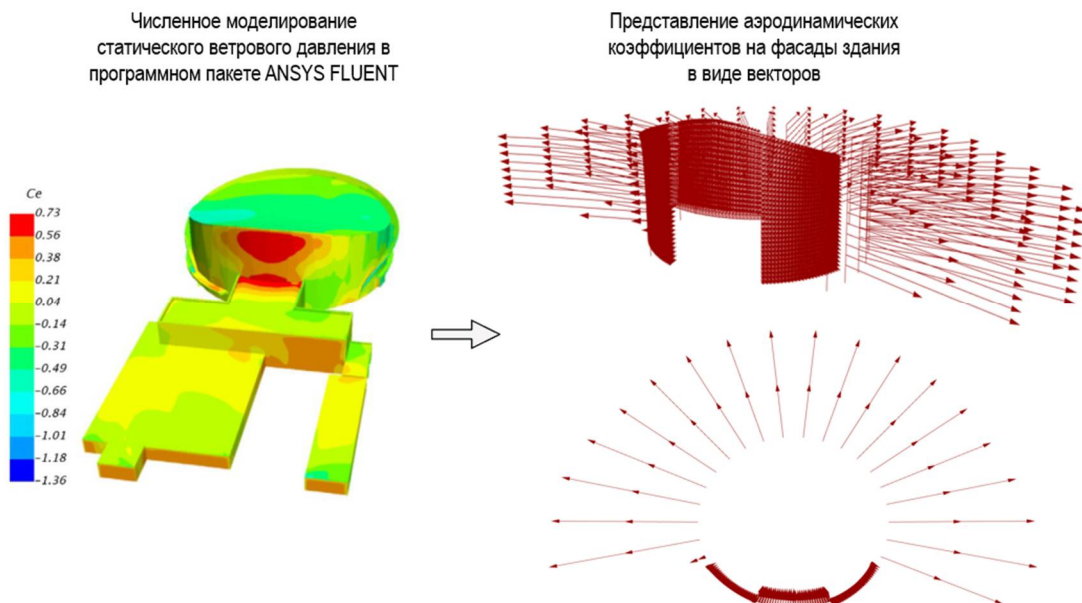
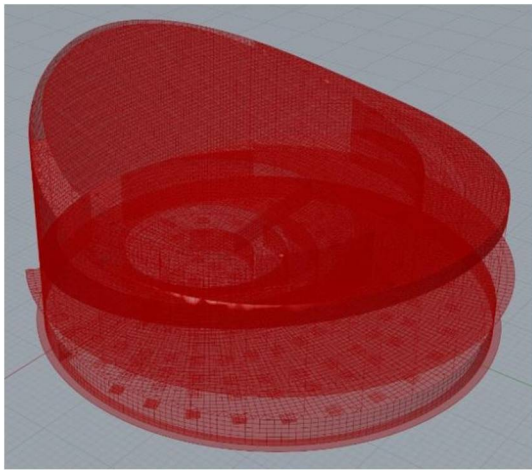
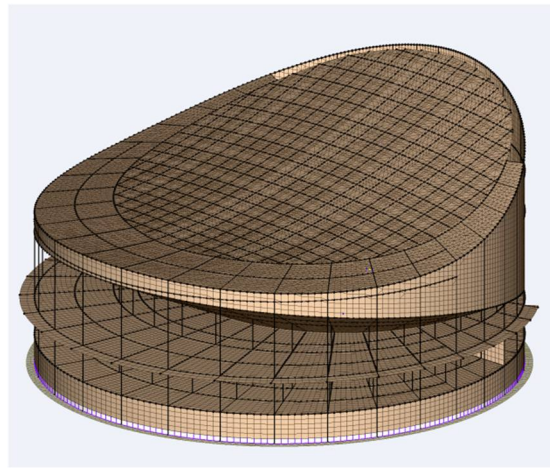


Рис. 5. Формирование пространственной ветровой нагрузки на фасад здания цирка

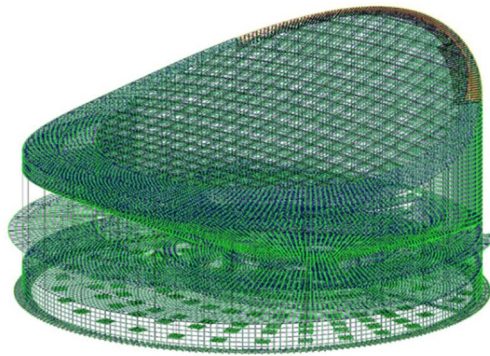
Сапфир-3D служила как промежуточная программа-редактор для переноса смоделированных нагрузок и аналитической модели в Лира-САПР. Итоговая КЭ-модель представлена на рис. 6.



а



б



в

Рис. 6. Готовые модели: а) Rhinoceros-3D; б) Сапфир-3D; в) Лира-САПР

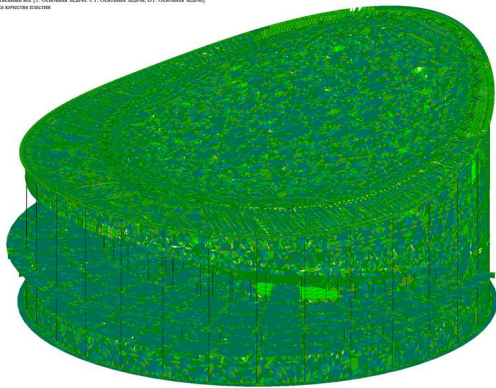


Рис. 7. Качество пластин для КЭ-сети, созданной автоматическим методом в Сапфир-3D

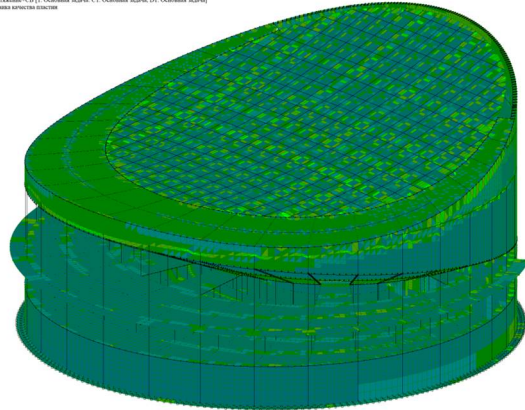


Рис. 8. Качество КЭ-сети, созданной при помощи разработанной методики

На рис. 7 представлена шкала качества пластин для КЭ-модели, сеть которой создавалась в Сапфир-3D автоматическим разбиением, на рис. 8 – для разработанной модели. Анализ модели производится на основании встроенных инструментов ПК Лира-САПР.

Как видно из рис. 7, создаваемая автоматическими методами КЭ-сеть неструктурированная, что может отрицательно сказаться на скорости вычислений и на повышенном использовании ОЗУ, так как в среднем при одинаковом шаге разбиения неструктурированные сети содержат больше КЭ, чем структурированные. Присутствует большое количество элементов с низким качеством (на рисунке представлены спектром

цветов от красно-оранжевого до бледно-жёлтого). Качество от 0,938 до 1 имеют лишь 22% от общего числа пластин. Также порядка 15% элементов имеют качество менее 0,5, то есть неудовлетворительное (рис. 9). При этом располагаются данные КЭ не только в пролётах, но также часто и на стыках конструктивных элементов, что существенным образом может сказаться на точности вычислений, в том числе по причине возможной концентрации экстремальных усилий в данных местах. Расчётная модель, полученная стандартным разбиением физической модели на КЭ, имеет порядка 65% пластин с качеством более 0,75 (рис. 11).

Модель, полученная при помощи разработанной методики, имеет структурированную КЭ-сеть и характеризуется преимущественно высоким качеством конечных элементов с соотношением сторон, близким к правильному четырёхугольнику. Разработанные алгоритмы составлялись таким образом, чтобы избежать возникновения КЭ неудовлетворительного качества в местах сопряжения конструктивных элементов и, следовательно, предотвратить возможные в этих местах скачки усилий. Графическое представление полученной сети показано на рис. 8, на котором 99% элементов изображаются в диапазоне зелёного спектра, то есть имеют качество выше или равное 0,5. Лишь 1% элементов находится в диапазоне цветов от красно-оранжевого до бледно-жёлтого и, соответственно, имеет неудовлетворительное качество с точки зрения расчётного комплекса. При этом 49% от общего числа КЭ имеют качество от 0,938 до 1 (рис. 10), а 88% КЭ имеют качество более 0,75 (рис. 11).

Таким образом, удовлетворительное качество в разработанной модели имеют 99% конечных элементов, в модели, полученной автоматическим разбиением – 85%, неудовлетворительное – 1% и 15% соответственно. Среднее взвешенное качество пластин для разработанной модели – 0,887, для модели на основе автоматического разбиения – 0,73.

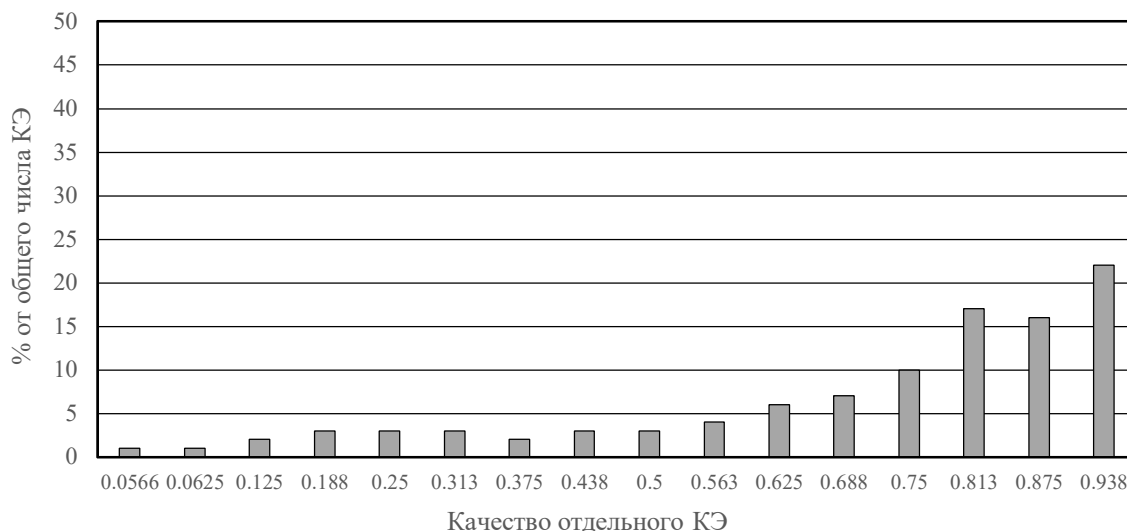


Рис. 9. Диаграмма разброса качества КЭ в сети, созданной в Сапфир-3D

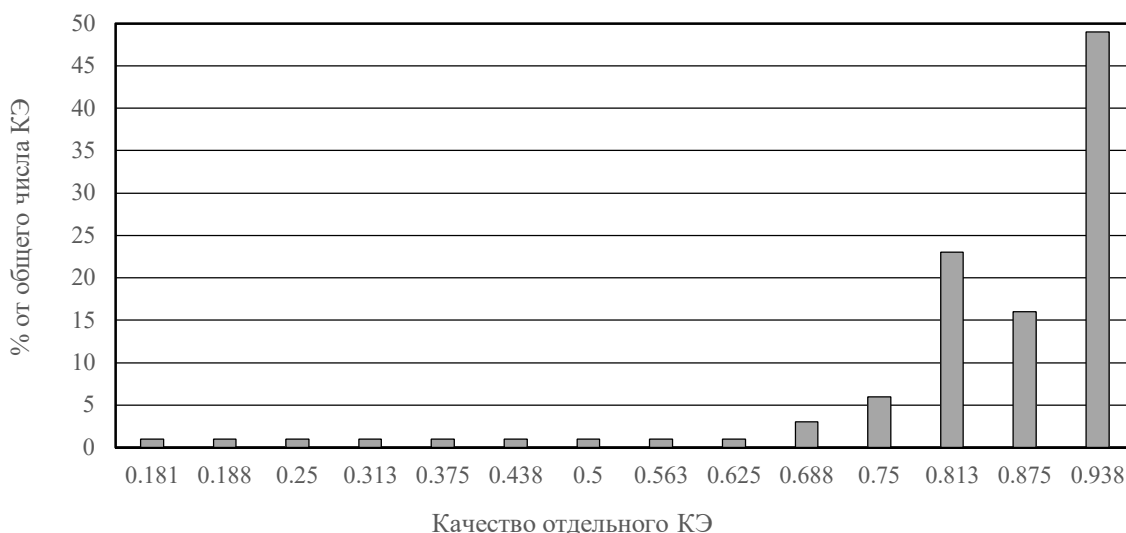


Рис. 10. Диаграмма разброса качества КЭ в сети разработанной модели

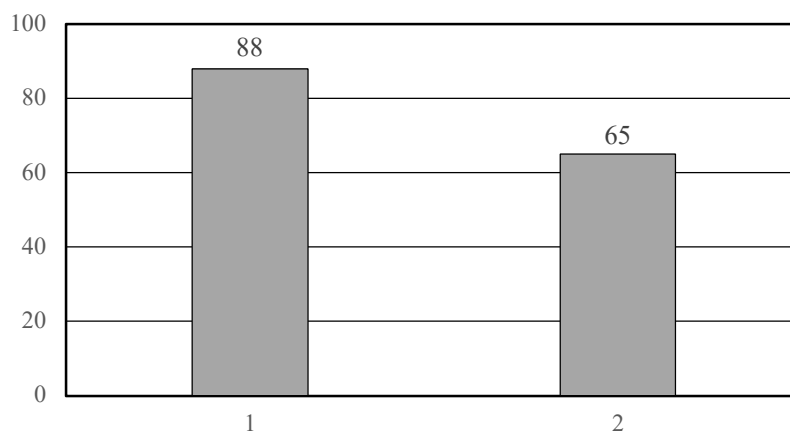


Рис. 11. % от общего числа элементов с качеством пластин > 0,75:
1 – для КЭ-сети в разработанной модели; 2 – для КЭ-сети, созданной в Сапфир-3D

Выводы. В части моделирования расчётной схемы использование связки программ Rhinoceros-3D-Сапфир-3D-Лира-САПР показало свою эффективность.

Поставленные задачи обеспечения неразрывности и плавного сопряжения конструктивных элементов в разработанной аналитической модели, а также повышения качества итоговой КЭ-сети выполнены в полном объёме. Методика непосредственно аналитического моделирования позволяет добиться контроля качества КЭ-сети уже на начальном этапе расчётных изысканий. Также методика позволяет избежать построения физической модели, зачастую ненужной при проведении научных исследований или инженерных расчётов, что позволяет перераспределить время с рутинного процесса создания КЭ-модели на анализ её поведения в расчётном комплексе.

Алгоритмы создания КЭ-сетей и моделирования пространственных нагрузок, разработанные для рассмотренного в работе конкретного объекта, могут быть адаптированы и применены впоследствии для расчётов других объектов сложной геометрической формы с различными конструктивными элементами.

Библиографический список

1. Шумилов К.А., Гурьева Ю.А. Применение Grasshopper, Rhino, Archicad для моделирования различных форм архитектурных объектов, содержащих элементы

- сложной геометрии // Инженерно-строительный вестник Прикаспия: научно-технический журнал. – 2022. – №3 (41). – С. 92-95.
2. Шумилов К.А., Гурьева Ю.А. Моделирование сложных архитектурных объектов с использованием Grasshopper, Rhino и Archicad // Инженерно-строительный вестник Прикаспия: научно-технический журнал. – 2022. – №2 (40). – С. 145-150.
 3. Рогожников П.С. GDL-проектирование моделей на основе программного комплекса Rhinoceros и Grasshopper // Сборник трудов Международной научно-технической конференции молодых ученых БГТУ им. В.Г. Шухова. – Белгород, 2019. – С. 1032-1035.
 4. Дагаев В.А., Школяр Ф.С. Построение конечно-элементной схемы вантового покрытия двоякой кривизны с помощью Grasshopper // Неделя науки ИСИ: сб. материалов Всерос. конф.– СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2022. – Ч. 2. – С. 322-325.
 5. Шумилов К.А., Гурьева Ю.А. Использование визуального программирования в графических пакетах (Grasshopper – Rhino – Archicad – Revit) при проектировании различных архитектурных форм // Перспективы развития строительного комплекса. – Астрахань, 2022. – С. 592-596.
 6. Бушминский К.И. Возможности применения инженерных расчетов в архитектурном проектировании с помощью плагина Grasshopper программы Rhinoceros // Наука, образование и экспериментальное проектирование в МАРХИ. – М., 2018. – С. 292.
 7. Лещенко Е. Параметрическое проектирование и высокотехнологичное информационное моделирование строительных конструкций на основе программного решения Tekla и Grasshopper // САПР и графика. – 2017. – №8 (250). – С. 31-33.
 8. Вологина В.А., Шайманова Е.Н. Использование плагина «Grasshopper» при разработке корпусного изделия // Всероссийская научно-инженерная конференция имени профессора А.И. Комиссарова. – М., 2023. – С. 35-39.
 9. Ларин В.С., Клашанов Ф.К. Параметрическое моделирование в связке трех аппаратных комплексов Archicad, Rhinoceros, Grasshopper // Студенческий. – 2019. – №10 (54). – С. 6-11.
 10. Шумилов К.А., Гурьева Ю.А. Моделирование стержневых и полигональных конструкций с использованием программы Grasshopper // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2023. – №3 (65). – С. 257-268.

References

1. Shumilov K.A., Guryieva Yu.A. Application of Grasshopper, Rhino and Archicad for modeling various shapes architectural objects containing elements of complex geometry. Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region: Scientific Journal. 3(41). 2022. Pp. 92-95.
2. Shumilov K.A., Guryieva Yu.A. Modeling complex architectural objects using Grasshopper, Rhino and Archicad. Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region: Scientific Journal. 2(40). 2022. Pp. 145-150.
3. Rogozhnikov P.S. GDL-model design based on Rhinoceros and Grasshopper software package. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference of Young Scientists of BSTU named after V.G. Shukhov. 2019. Pp. 1032-1035.
4. Dagaev V.A., Shkolyar F.S. Construction of a finite element scheme of a double-curvature cable-stayed coating using Grasshopper. Science week of the ICE. 2022. Pp. 322-325.
5. Shumilov K.A., Guryieva Yu.A. Application of visual programming in graphics packages (Grasshopper - Rhino - Archicad - Revit) when designing various architectural forms. Prospects for the development of the construction complex. 2022. Pp. 592-596.

6. Bushminsky K.I. Possibilities of applying engineering calculations in architectural design using the Grasshopper plugin of the Rhinoceros program. Science, education and experimental design in the MArchI. 2018. Pp. 292.
7. Leshchenko E. Parametric design and high-tech information modeling of building structures based on Tekla and Grasshopper software solutions. CAD and Graphics. 8(250). 2017. Pp. 31-33.
8. Vologina V.A., Shamanova E.N. Using the Grasshopper plugin when developing a case product. All-Russian Scientific and Engineering Conference named after Professor A.I. Komissarov. 2023. Pp. 35-39.
9. Larin V.S., Klashanov F.K. Parametric modelling on the example of a binding of three Archicad, Rhinoceros 3D and Grasshopper apparatus complexes. Student. 10(54). 2019. Pp. 6-11.
10. Shumilov K.A., Guryieva Yu.A. Modelling of rod and polygonal structures using the Grasshopper program. News of the Kazan State University of Architecture and Engineering. 3(65). 2023. Pp. 257-268.

APPLICATION OF THE RHINOCEROS-3D CAD PROGRAM FOR THE PREPARATION OF A COMPUTATIONAL AND ANALYTICAL MODEL OF A COMPLEX CONFIGURATION BUILDING

D. S. Glazkov¹, S. D. Grebenkin², V. A. Kozlov³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(915)5421705, e-mail: glazkov.mitia@yandex.ru

²Engineer of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(960)1221336, e-mail: serg.grebionkin@yandex.ru

³Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: vakozlov@cchgeu.ru

The article is devoted to the problem of preparation a computational and analytical model of a complex configuration building for further calculation of resistance to progressive collapse in a LIRA-SAPR program, as well as various aspects of creation an approximated geometry of an object using parametric modeling.

In terms of modeling spatial structures, the fundamental possibility of using the Rhinoceros-3D program and its Grasshopper plug-in as a preprocessor for a LIRA-SAPR in order to create an analytical model of a building without the initial development of a physical model is shown. A methodology has also been developed and a description of the algorithm for creating spatial loads in the above-mentioned CAD program and their transfer to the CE complex is given. The interaction of a bunch of Rhinoceros-3D - Sapphire-3D – LIRA-SAPR programs for the step-by-step creation of the final calculation scheme is presented.

Based on the results of the creation and analysis of the developed analytical model, conclusions were drawn about the advantages and features of using the abovementioned programs when modeling a single building of complex configuration, as well as similar objects of nonlinear shape.

Keywords: parametric modeling, finite element method, computational model, spatial loads, CAD.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

DOI 10.36622/2219-1038.2024.40.1.009
УДК 624.154.1

ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПО ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СВАЙНОГО ПОЛЯ МНОГОЭТАЖНОГО ЖИЛОГО ДОМА

В. М. Дереховский¹, Г. М. Скибин², С. Г. Чутченко³

Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова
Россия, г. Новочеркасск

¹Аспирант кафедры «Промышленное, гражданское строительство, геотехника и фундаментостроение»,
тел.: +7(8635) 25 54 16, e-mail: vitalyderex@gmail.com

²Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Промышленное, гражданское строительство, геотехника
и фундаментостроение», тел.: +7(8635) 25 54 16, e-mail: skibingm@mail.ru

³Старший преподаватель кафедры «Промышленное, гражданское строительство, геотехника и
фундаментостроение», тел.: +7(8635) 25 54 16, e-mail: frizula@yandex.ru

В данной статье сравниваются методы оптимизации свайного поля в составе плитно-свайного фундамента многоэтажного здания за счет изменения шага, расположения и длины свай, показано влияние этих изменений на осадку свайного фундамента и на общую устойчивость и жесткость здания. Производится попытка введения критериев оптимизации свайного поля с целью более точного определения понятий, приведенных в действующих нормативных документах. Итоговые результаты исследования могут предоставить важные рекомендации для инженеров и проектировщиков, помогая им выбирать оптимальные параметры свайного фундамента, чтобы обеспечить безопасность, устойчивость и долговечность многоэтажных зданий. Тема работы актуальна ввиду повышенного спроса на использование свайных фундаментов из-за большого количества строящихся многоэтажных жилых домов.

Ключевые слова: сравнение методов, оптимизация, свайный фундамент, многоэтажное здание, численное моделирование, сваи разной длины, осадка свайного фундамента.

1. Введение

Существуют разные виды фундаментов, но для многоэтажных зданий в основном применяются плитно-свайные фундаменты. [1] Проектирование и расчет свайных фундаментов – не самая простая задача ввиду вариативности расположения, шага, диаметра и длин свай.

Множество научных исследований, проведенных как в России, так и за рубежом, посвящены вопросам взаимодействия одиночных свай с окружающими и подстилающими грунтами. На основе эмпирических, численных и теоретических исследований были разработаны разнообразные методы и подходы, которые позволяют более точно прогнозировать осадку и несущую способность таких свай. Эти исследования остаются актуальными, поскольку точное определение осадки свай и изучение механизма распределения нагрузки, передаваемой ей, имеют ключевое значение в проектировании свайных фундаментов [2].

© Дереховский В. М., Скибин Г. М., Чутченко С. Г., 2024

2. Основная часть

Для определения количества свай в плитно-свайных фундаментах можно использовать простое алгебраическое выражение, которое представляет собой дробь. В числителе этой дроби находится расчетная сила, которая передается на свайный ростверк в уровне его подошвы, а в знаменателе стоит допускаемая нагрузка $F_d/\gamma_{c,g}$ на одну свая (2). Которая, в свою очередь, определяется из условия (1):

$$\gamma_n \cdot N \leq \frac{F_d}{\gamma_{c,g}}, \quad (1)$$

где N – расчетная нагрузка, передаваемая на свая от наиболее невыгодного сочетания нагрузок, действующих на фундамент; F_d – предельное сопротивление грунта основания одиночной сваи, называемое в дальнейшем несущей способностью сваи; γ_n – коэффициент надежности по ответственности сооружения; $\gamma_{c,g}$ – коэффициент надежности по грунту.

$$n \leq \frac{N_d}{\frac{F_d}{\gamma_{c,g}}}, \quad (2)$$

где n – количество свай; N_d – расчетная сжимающая сила, передаваемая на свайный ростверк в уровне его подошвы; $\frac{F_d}{\gamma_{c,g}}$ – допускаемая нагрузка на одну свая.

Конструктивные требования к расположению свай пункта 8.13 СП24.13330.2011 [3] определяют расстояния между различными видами свай. Но усилия в сваях не могут распределяться равномерно из-за действия горизонтальных нагрузок и конструктивной схемы здания, особенно это касается высотных зданий [4].

Поэтому следует проводить оптимизацию свайных полей для достижения наилучших показателей разностей осадок фундаментного плитного ростверка и деформаций всего здания.

Рассмотрим пример многоэтажного жилого дома, расположенного в городе Батайск Ростовской области. Конструктивная схема этого здания представляет собой каркасно-монолитную систему на плитно-свайном фундаменте. Свайные элементы этого фундамента имеют форму буронабивных свай круглого сечения диаметром $\varnothing 350$ мм. Вертикальные несущие конструкции здания включают монолитные железобетонные пилоны, толщиной 200 мм и 250 мм, а также диафрагмы жесткости, имеющие толщину 200 мм и 250 мм. Подвальные ограждающие стены имеют толщину 250 мм. Горизонтальные несущие конструкции состоят из монолитных железобетонных перекрытий с толщиной 180 мм и 220 мм (см. рис. 1). Допускаемая нагрузка на одну свая, длиной 12 метров, составляет – 66,5 т.

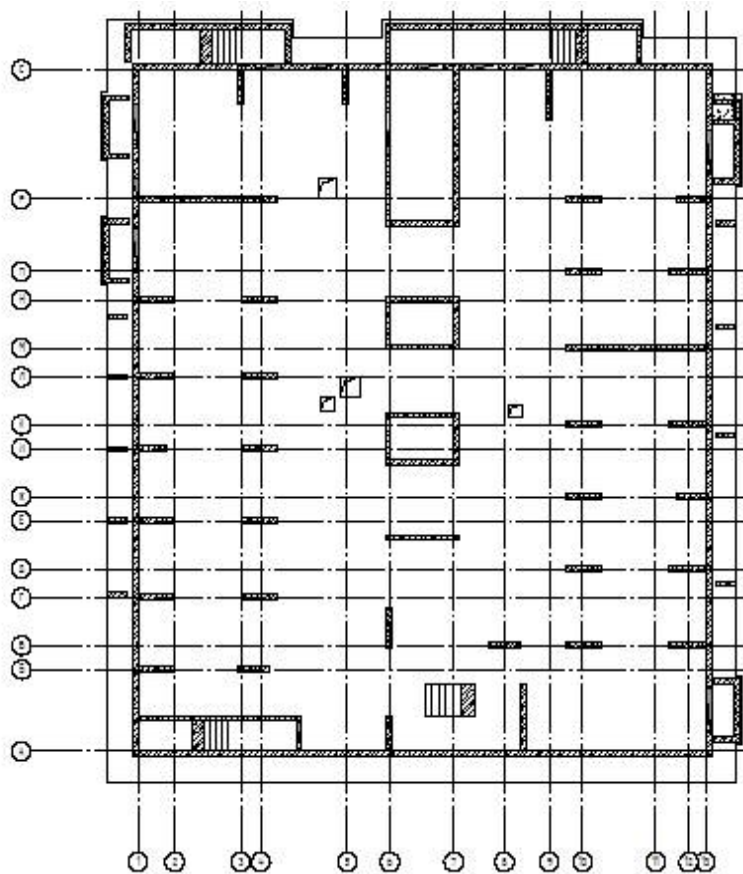


Рис. 1. Несущие конструкции в плане

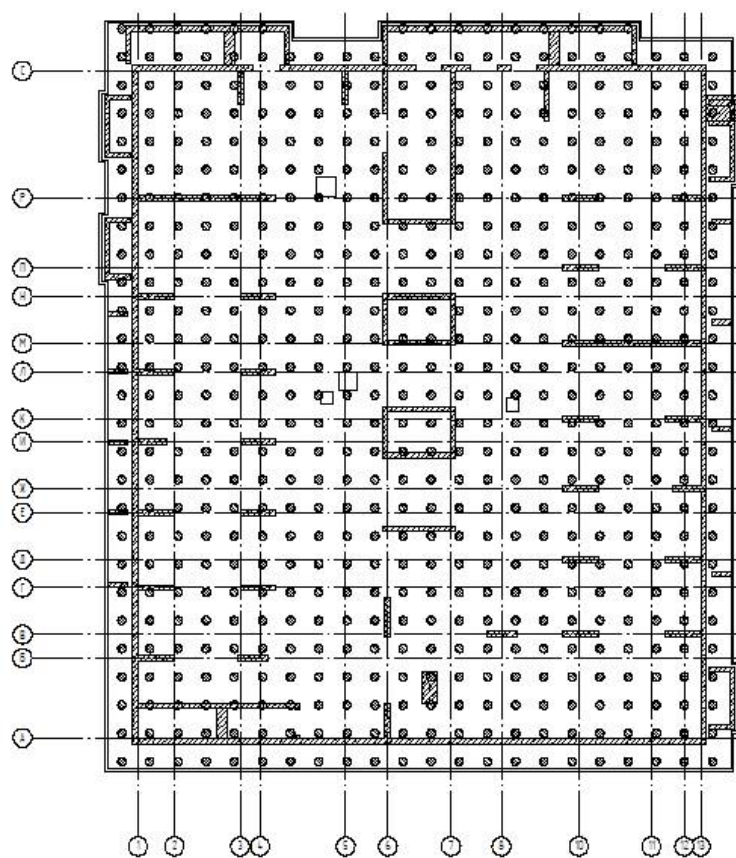


Рис. 2. Исходная схема свайного поля

Система свай в данном проекте представляет собой регулярную сетку свай круглого сечения диаметром $\varnothing 300$ мм с интервалом 1200 мм между сваями. Общее количество свай в этой сетке составляет 586 шт. Исходная схема расположения свайного поля до проведения оптимизации представлена на рис. 2.

Для расчета несущих конструкций здания был использован программно-вычислительный комплекс, основанный на методе конечных элементов. Моделирование одиночных свай, входящих в состав группы, осуществлялось с использованием одноузловых элементов конечной жесткости в направлении вертикальной оси Z [5].

3. Результаты и обсуждение

Результатом расчета является мозаика усилий в сваях при наилучшем сочетании усилий согласно РСУ (рис. 3).

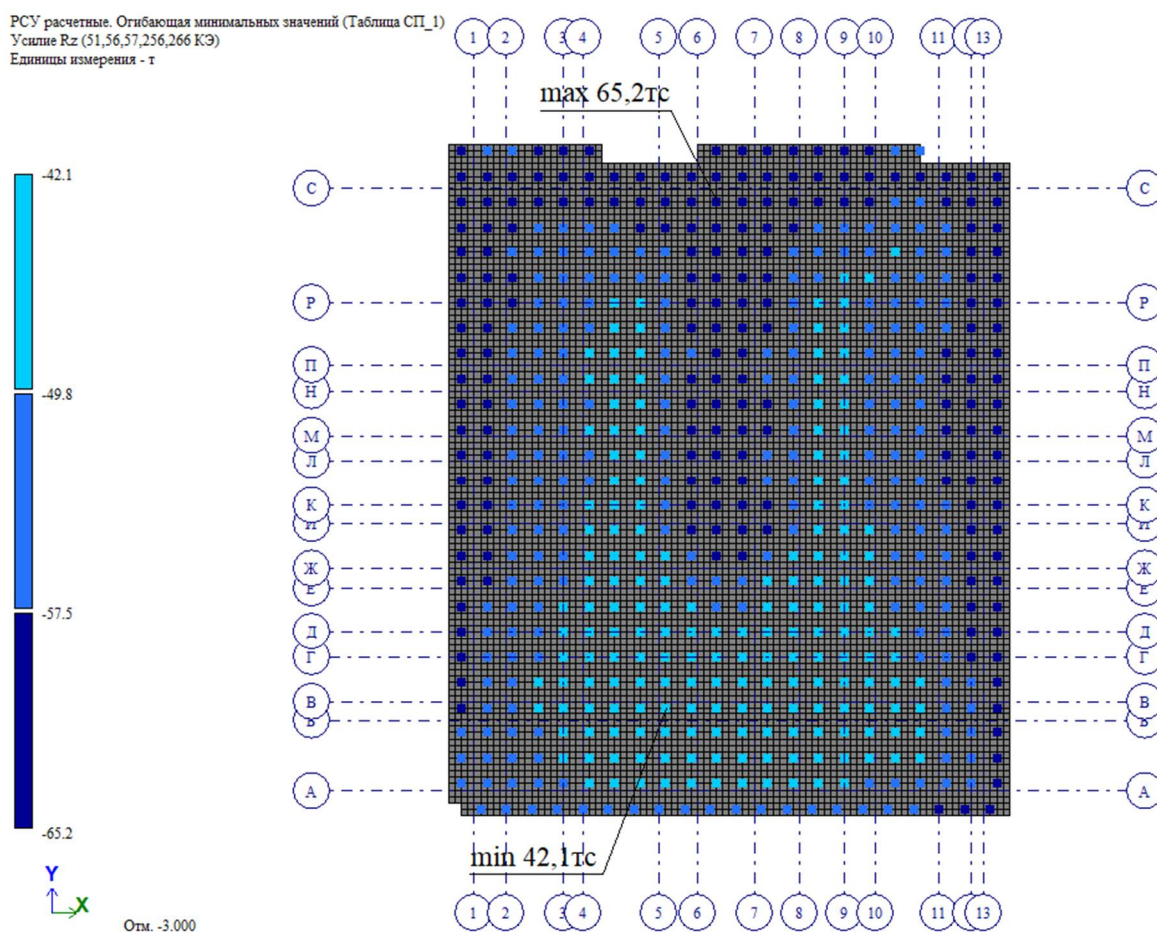


Рис. 3. Мозаика усилий в сваях до оптимизации

По результатам расчета видно, что расчетная нагрузка на сваи, расположенные в районе осей 4-10, Б-Д, примерно в полтора раза ниже предельно допускаемой нагрузки.

То есть посчитав нагрузку в уровне обреза плитного ростверка $N_d=29591$ т и разделив её на предельно допустимую нагрузку на одиночную сваю 66,5 т, получим $29591/66,5=445$ шт. Значит, в идеальных условиях количество свай должно составлять 445 шт., а не 586 шт., однако такого количества свай невозможно достичь из-за неравномерного распределения вертикальных несущих конструкций и наличия горизонтальных нагрузок. Тем не менее целью является максимальное использование несущей способности каждой сваи согласно пункту 8.7 [3].

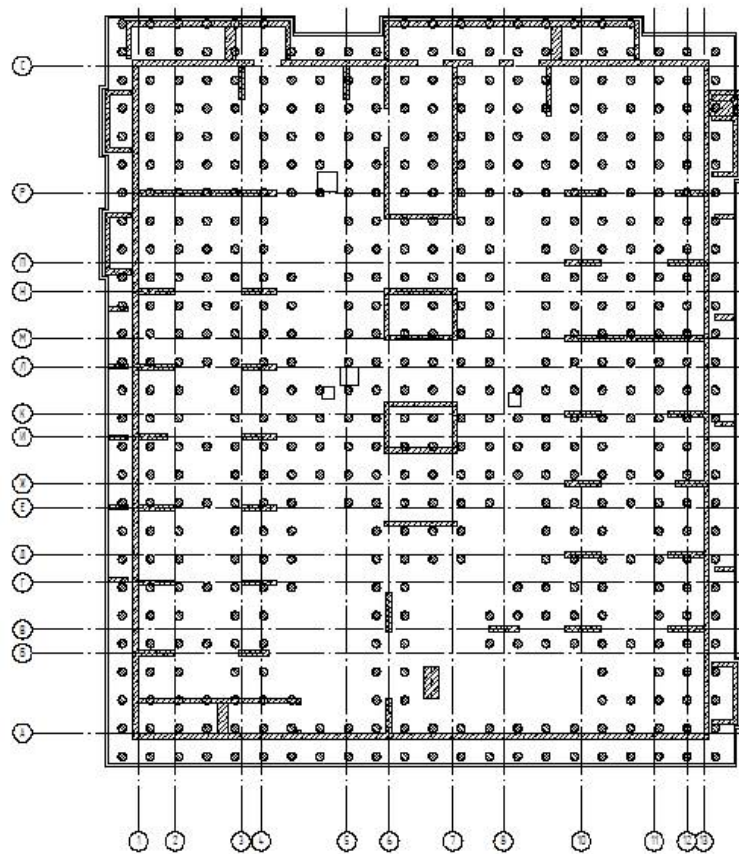


Рис. 4. Схема расположения свайного поля после оптимизации

PCU расчетные. Оптимизация минимальных значений (Таблица СП_1)
 Усилие Rz (51,56,57,256,266 КЭ)
 Единицы измерения - т

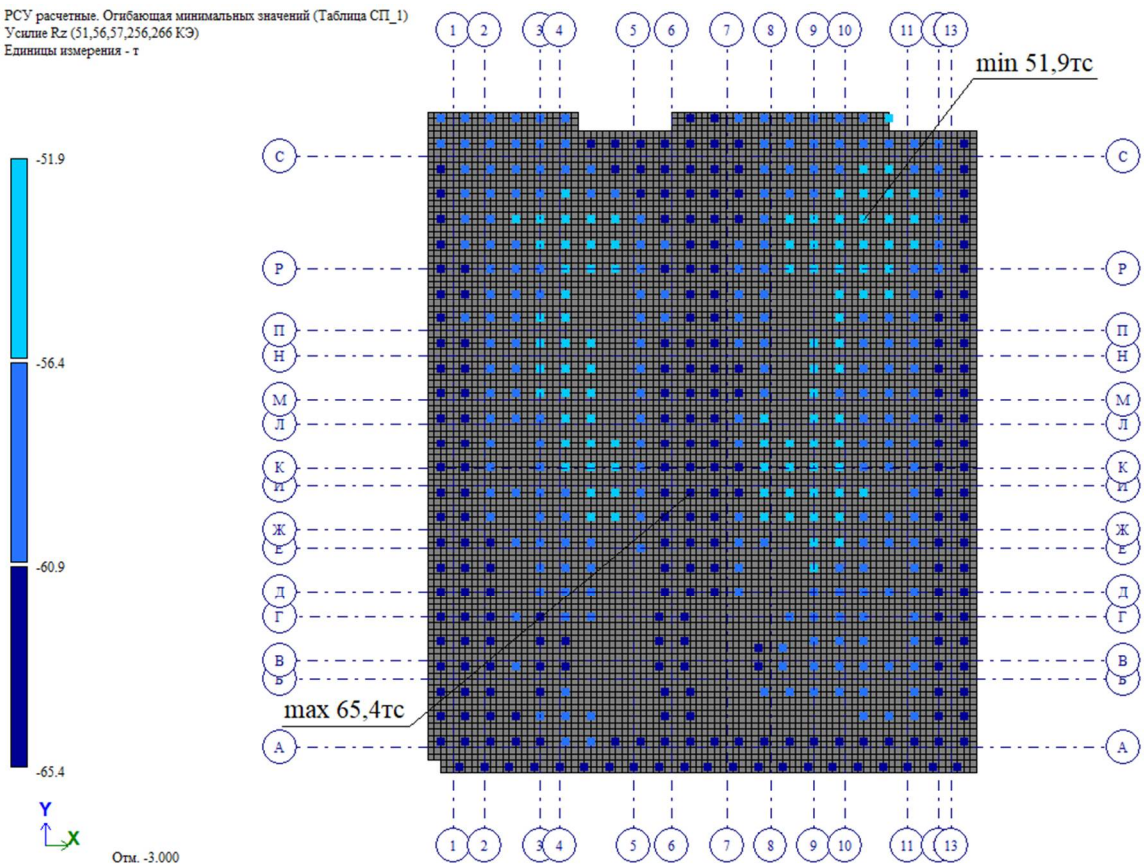


Рис. 5. Мозаика усилий в сваях после оптимизации

Путем оптимизации свайного поля за счет изменения шага и расположения свай (см. рис. 4 и 5) удалось в несколько итераций снизить количество свай с 586 до 522 единиц. В результате этой оптимизации нагрузка на наиболее нагруженные сваи увеличилась всего на 0,3%, что оставалось в пределах допустимой нагрузки для свай. С другой стороны, нагрузка на наименее нагруженные сваи выросла на 14,7%. В среднем нагрузка на все сваи возросла на 9,7% и составляет 90,1% от максимальной несущей способности одиночной сваи вместо исходных 79,8%. Подробные данные об оптимизации свайного поля представлены в таблице 1.

Таблица 1

Сравнение показателей свайного поля исходной схемы и схемы после оптимизации

Вид нагрузки	Исходная схема		После оптимизации	
	Rz, т	% от Fd/γс, g	Rz, т	% от Fd/γс, g
Суммарная нагрузка на сваи	31079,0		31064,1	
Средняя нагрузка на сваю	53,0	79,8%	59,9	90,1%
Максимальная нагрузка на сваю	65,2	98,0%	65,4	98,3%
Минимальная нагрузка на сваю	42,1	63,3%	51,9	78,0%

Рассмотрим еще один вариант оптимизации свайного поля, который включает в себя снижение несущей способности недогруженных свай путем уменьшения их длины. Уменьшение длины свай будет сопровождаться изменением их расчетной осадки, а следовательно, и изменением их жесткости. Все эти изменения также необходимо учесть в расчетной схеме.

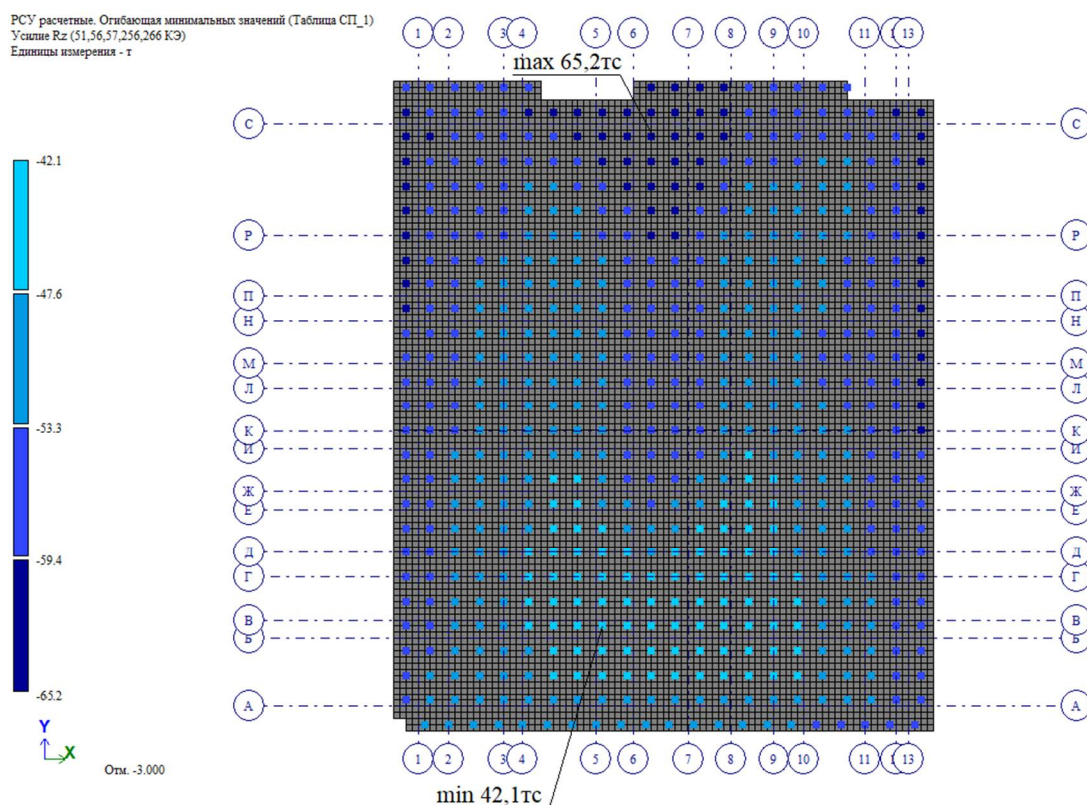


Рис. 6. Мозаика усилий в сваях до оптимизации

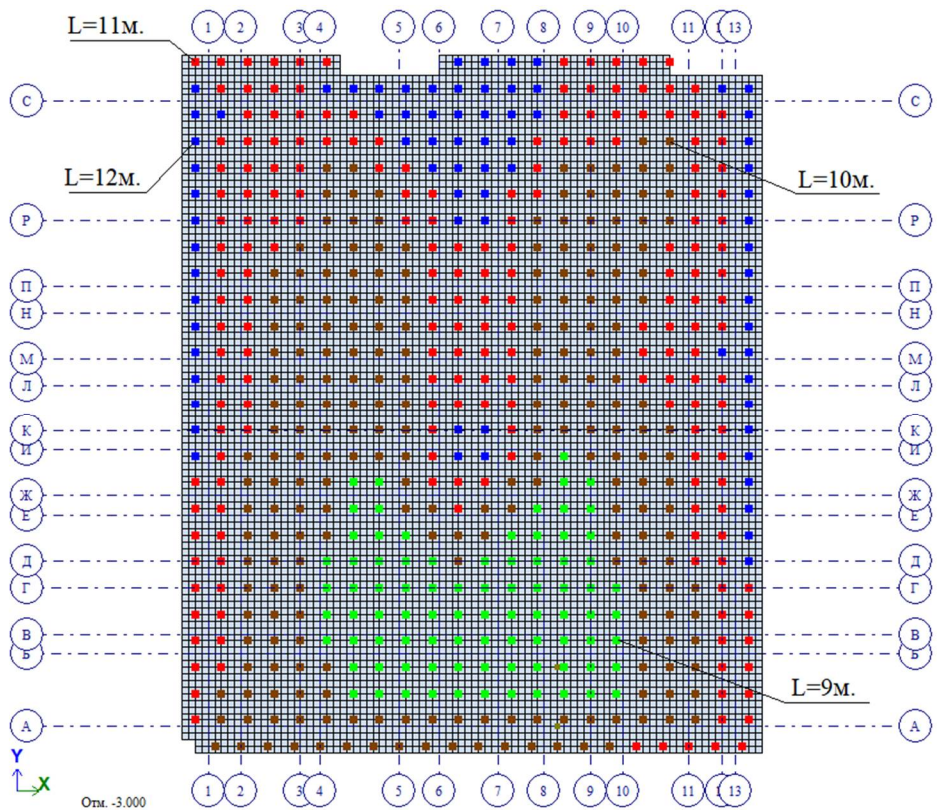


Рис. 7. Схема расположения свай различной длины после оптимизации

PCU расчеты. Огибающая минимальных значений (Таблица СП_1)
 Усилие Rz (51,56,57,256,266 КЭ)
 Единицы измерения - т

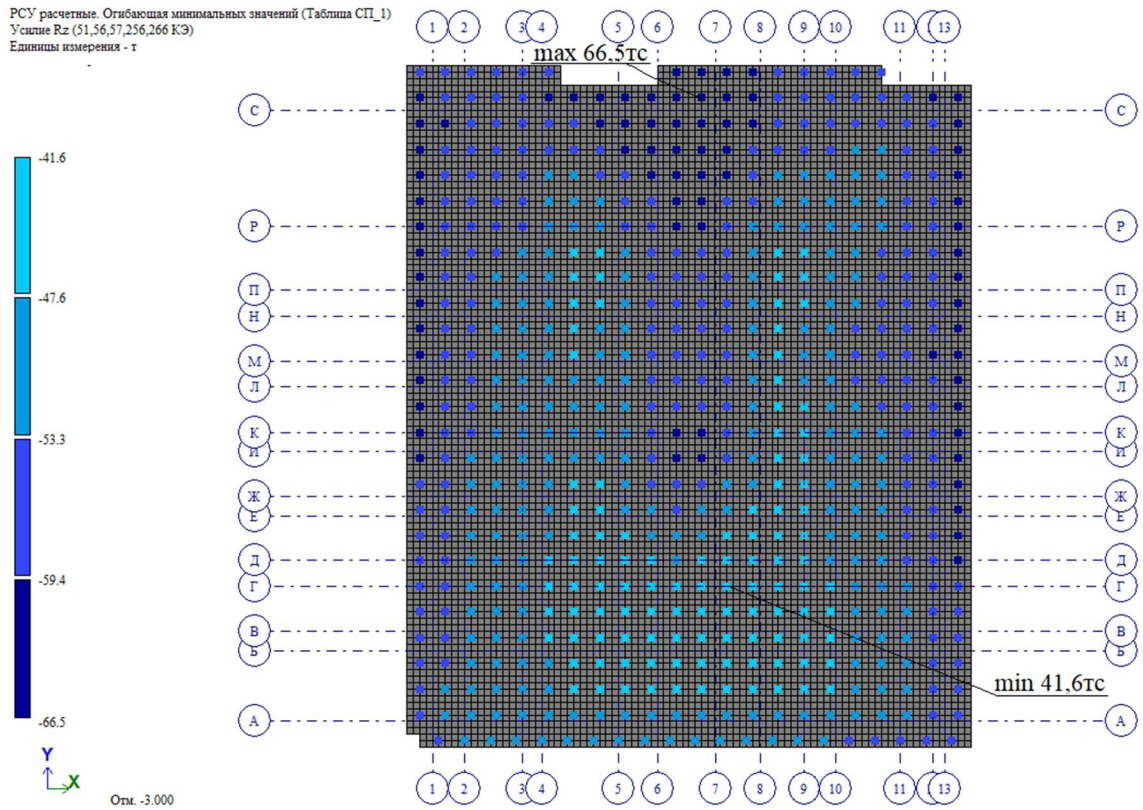


Рис. 8. Мозаика усилий в сваях после оптимизации

Длина свай принимается различной с шагом в 1 метр. По расчету допускаемая нагрузка на сваи длиной 11 метров – 59,4 т; длиной 10 метров – 53,3 т; 9 метров – 47,6 т. Исходная мозаика усилий в сваях до оптимизации с учетом несущей способности свай разной длины, представлена на рис. 6.

После многократной оптимизации свайного поля, учитывающей изменение длины свай и их жесткости в зависимости от нагрузки на каждую сваю, полученный результат представлен на рис. 7. На этом рисунке сваи длиной 12 метров обозначены черным цветом, сваи длиной 11 метров – темно-серым, сваи длиной 10 метров – светло-серым, а сваи длиной 9 метров – белым. На рис. 8 представлена мозаика усилий в сваях после оптимизации. В табл. 2 представлены характеристики оптимизации.

Таблица 2

Сравнение показателей свайного поля исходной схемы и схемы после оптимизации за счет изменения длины свай

Вид нагрузки	Исходная схема		После оптимизации за счет изменения длины свай									
			L=12м.		L=11м.		L=10м.		L=9м.		Итого	
	Rz,т	% от Fd/γс,г	Rz,т	% от Fd/γс,г	Rz,т	% от Fd/γс,г	Rz,т	% от Fd/γс,г	Rz,т	% от Fd/γс,г	Rz,т	% от Fd/γс,г
Суммарная нагрузка на сваи	31079		4761		10344		11425		3571		31139	
Средняя нагрузка на сваю	53,0	79,8%	63,5	95,5%	50,2	94,2%	49,9	93,6%	42,0	88,2%	53,1	92,9%
Максимальная нагрузка на сваю	65,2	98,0%	66,4	99,8%	59,3	99,8%	53,0	99,4%	45,4	95,4%	66,4	99,8%
Минимальная нагрузка на сваю	42,1	63,3%	60,5	91,0%	47,5	89,1%	45,4	85,2%	41,7	87,6%	41,7	85,2%

Еще одним вариантом оптимизации свайного поля является совокупность методов, то есть, в первой итерации уменьшаем количество свай, а во второй – уменьшаем длину оставшихся недогруженных свай (рис. 9).

При применении 3 варианта оптимизации удалось ещё немного снизить материалоемкость по сравнению со 2 вариантом, при этом не превысив допускаемой нагрузки на сваи.

В конечном итоге имеем возможность сравнить 3 метода оптимизации свайного поля многоэтажного жилого дома, результаты оптимизации приведены в табл. 3. По результатам сравнения видно, что во всех вариантах оптимизации максимальная нагрузка на сваю незначительно увеличивается, но также находится в пределах допускаемой нагрузки на одну сваю, средняя нагрузка на сваи также увеличивается, в свою очередь минимальная нагрузка увеличивается значительно, что приближает нас к максимальному использованию несущей способности, как этого требует СП.

При анализе осадок видно, что максимальная осадка фундамента незначительно увеличивается, что логично, так как повышается и максимальная нагрузка на сваю, но в то же время максимальная осадка фундамента находится в допустимых пределах. Но стоит заметить, что минимальная осадка возрастает еще больше, а значит, выравнивается разность осадок, что положительно влияет на устойчивость всего здания. Это подтверждается данными из последней колонки табл. 3.

Таким образом, посредством оптимизации свайного поля повышается экономическая эффективность строительства, при этом здание не просто не потеряет в устойчивости, а даже наоборот, станет устойчивее.

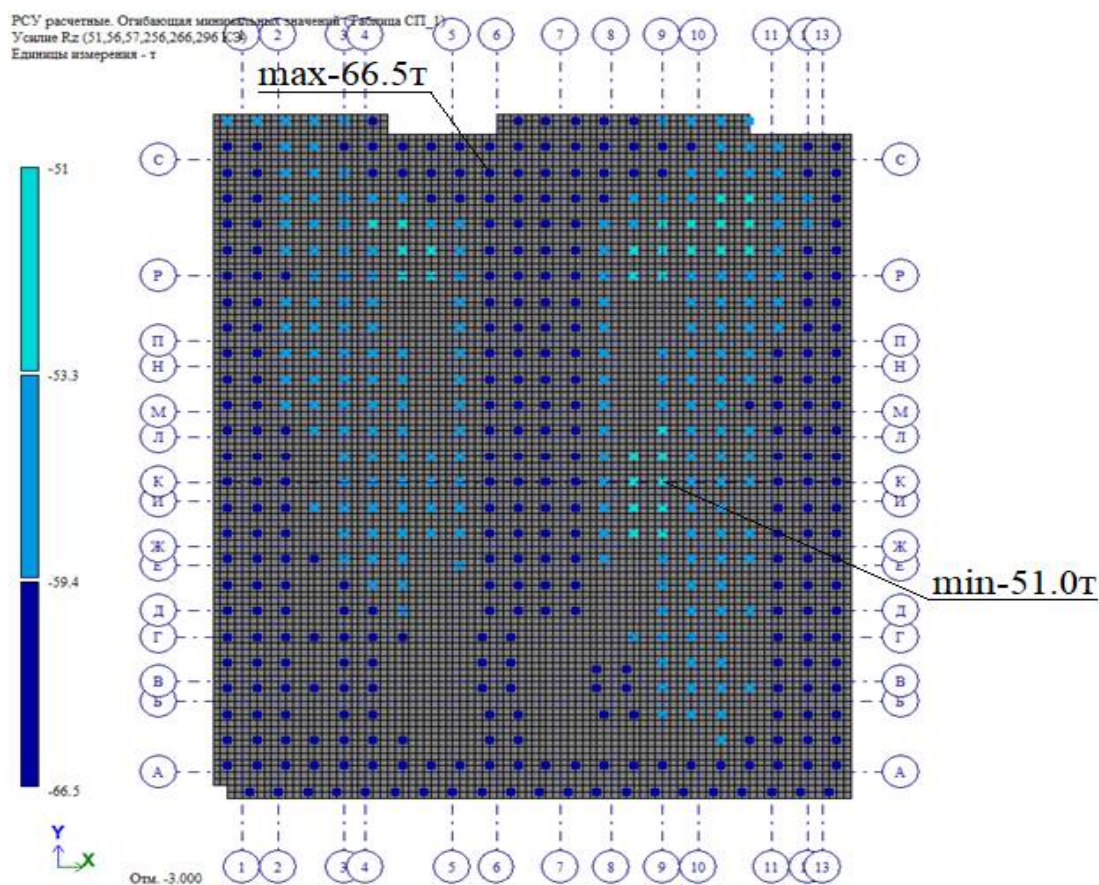


Рис. 9. Мозаика усилий в сваях после оптимизации

Таблица 3

Сравнение методов оптимизации свайного поля

№ п.п.	Кол-во свай, шт.	Длина свай, м	Допускаемая нагрузка на сваю, т	Нагрузка на одну сваю, т			Осадка одной свай, мм		
				min	max	средняя	min	max	Δ
1	586	12	66.5	42.1	65.2	53	20.6	31.1	10.5
2	522	12	66.5	51.9	65.4	59.9	24	32	8
3	586	12-9	66.5; 59.4; 53.3; 47.6	41.7	65.4	53.1	23.7	32	8.3
4	522	12-10	66.5; 59.4; 53.3	51	65.5	56.3	24.7	32.5	7.8

Продолжение табл. 3

Расстояние между сваями, м.			Площадь фундаментной плиты, м ²	Кол-во свай на 1м ² плиты, шт.	Максимальный крен здания, мм.
min	max	среднее			
-	-	1.05	839.5	1.43	50.3
1.05	4.2	-	839.5	1.61	38.9
-	-	1.05	839.5	1.43	45.9
1.05	4.2	-	839.5	1.61	39.7

4. Заключение

В данной работе были рассмотрены способы оптимизации свайного поля многоэтажного жилого дома и представлено их сравнение по показателям экономической эффективности, максимальному использованию несущей способности свай, а также влиянию жесткости фундамента на жесткость надземной части здания. По результатам видно, что за счет оптимизации свайного поля повышается не только экономическая эффективность конструкции фундамента, но и увеличивается устойчивость фундамента, а значит, и всего здания к действию горизонтальных нагрузок, хоть при этом и незначительно увеличивается осадка фундамента.

Библиографический список

1. Сорочан Е.А. Основания, фундаменты и подземные сооружения. – М.: Стройиздат, 1985. – 479 с.
2. Скибин Г.М., Чутченко С.Г. Оценка эффективности параметров свайных фундаментов на стадии проектирования // Механика грунтов в геотехнике и фундаментостроении: материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Новочеркасск, 2022. – С. 224-228.
3. СП 24.13330.2011 "СНиП 2.02.03-85 Свайные фундаменты". – М.: ОАО "НИЦ "Строительство" Минрегион России, 2010. – 85 с.
4. Heinrich M., Beutler S. Foundations of High Rise Buildings around the World Best Practice and New Developments. – Moscow, 2015. – 43 p.
5. Применение метода конечных элементов в геотехнических расчетах по первому предельному состоянию / В.Г. Федоровский, Г.А. Бобырь, И.А. Боков, С.В. Ильин // Вестник НИЦ. Строительство. – 2019. – №1 (20). – С. 102-112.

References

1. Sorochan E.A. Bases, foundations and underground structures. M.: Stroyizdat, 1985. 479 p.
2. Skibin G.M., Chutchenko S.G. Assessing the effectiveness of the parameters of pile foundations at the design stage. Soil Mechanics in Geotechnics and Foundation Engineering: Materials of the International Scientific and Practical Conf. Novocherkassk, 2022. Pp. 224-228.
3. Set of Rules 24.13330.2011. "SNiP 2.02.03-85 Pile Foundations". M.: OJSC "National Research Center "Construction"" Ministry of Regional Development of Russia, 2010. 85 p.
4. Heinrich M., Beutler S. Foundations of High-Rise Buildings Around the World Best Practice and New Developments. Moscow, 2015. 43 p.
5. Fedorovsky V.G., Bobyr G.A., Bokov I.A., Ilyin S.V. Application of the finite element method in geotechnical calculations based on the first limit state. Bulletin of the Scientific Research Center. Construction. No. 1(20). 2019. Pp. 102-112.

PROPOSALS FOR OPTIMIZING THE PILE FIELD PARAMETERS OF A MULTI-STOREY RESIDENTIAL BUILDING

V. M. Derekhovskii¹, G. M. Skibin², S. G. Chutchenko³

Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI)^{1,2,3}
Novocherkassk, Russia

¹Postgraduate Student of the Department of Industrial, Civil Engineering, Geotechnics and Foundation Engineering, Tel.: +7(8635) 25 54 16, e-mail: vitaliyderex@gmail.com

²Dr. of Tech. Sciences, Professor, Head of the Department of Industrial, Civil Engineering, Geotechnics and Foundation Engineering, Tel.: +7(8635) 25 54 16, e-mail: skibingm@mail.ru

³Assistant Professor of the Department of Industrial, Civil Engineering, Geotechnics and Foundation Engineering, Tel.: +7(8635) 25 54 16, e-mail: frizula@yandex.ru

This article compares methods for optimizing a pile field as part of a slab-pile foundation of a multi-storey building by changing the pitch, location and length of the piles. It shows the influence of these changes on the pile foundation settlement and on the overall stability and rigidity of the building. This article also discusses current regulatory documents and attempts to introduce criteria for optimizing a pile field in order to more accurately define the concepts given in regulatory documents. The final results of this study can provide important guidance to engineers and designers, helping them select optimal pile foundation parameters to ensure the safety, stability and durability of multi-storey buildings. The topic of the work is relevant due to the increased demand for the use of pile foundations because of large number of multi-storey residential buildings.

Keywords: comparison of methods, optimization, pile foundation, multi-storey building, numerical modelling, piles of different length, pile foundation settlement.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГРУНТОВЫХ ОСНОВАНИЙ ЗДАНИЙ И ДОРОЖНЫХ ОДЕЖД С ВЕРИФИКАЦИЕЙ НА ОСНОВЕ СУРРОГАТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯО. Б. Кукина¹, В. В. Волков², А. В. Андреев³Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры химии и химической технологии материалов, тел.: +7(910)3452888, e-mail: okukina@cchgeu.ru²Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(910)2402587, e-mail: kotlac@yandex.ru³Канд. техн. наук, доцент кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов, тел.: +7(910)3497256, e-mail: aavturbo@yandex.ru

В статье рассматривается вопрос выбора технологии укрепления грунтового основания зданий и дорожных одежд с заданными физико-механическими свойствами. Данное научное исследование посвящено внедрению в проектную основу технологий замкнутого цикла, позволяющих вторично использовать строительные материалы, изделия и конструкции с применением методов суррогатного моделирования и баз данных при строительстве сооружений. Использование этого подхода позволяет осуществлять более точное проектирование оснований фундаментов и дорожных одежд с оптимизацией энергоэффективности технологий строительства объектов на слабых грунтах, включая новые технологии смежных отраслей. Верификация проектных решений на основе суррогатного моделирования физических свойств грунтовых оснований зданий и дорожных одежд позволяет выявить неточности проекта, а также вторично использовать строительные материалы, изделия и конструкции.

Ключевые слова: механохимическая активация, энергетическое состояние, метаморфизация, глинистые грунты, грунтовые подушки.

Введение. При организации строительства в сложных инженерно-геологических условиях необходимо использовать технологии, обеспечивающие безопасность объектов, попадающих в зону влияния работ. В связи с неоднородностью напряженно-деформированного состояния грунтов, не равномерной нагрузкой фундаментов и дополнительным влиянием технологических процессов для возведения фундаментов на конструкции действующих объектов существенно негативно влияет неравномерность вертикальных деформаций. Вместе с тем возникает необходимость в дополнительных исследованиях компенсационных мероприятий, исключающих данный вид деформаций, направленных на изучение процессов уплотнения грунтов с использованием современных методов и материалов, повышающих значения физико-механических характеристик слабых пылевидных грунтов.

Анализ литературных данных. На сегодняшний день строительный сектор начал активно осваивать новые сложные направления, ранее недоступные из-за недостаточного развития строительных процессов и технологий работы со слабыми грунтами. Для эксплуатации этих территорий необходимо провести специальную подготовку по улучшению качества и свойств грунтов, которые впоследствии станут естественной основой для сооружений. При устройстве глубоких котлованов в местах слабых пылевидных и

водонасыщенных грунтов в качестве ограждающей конструкции часто используют шпунтовое ограждение, конструкцию из расколотых буронабивных свай, закрепление грунтового массива с помощью инъекционных технологий (Jet grouting) [1-8]. Немалую популярность в настоящий момент набирает конструкция ограждения котлована «стена в грунте» (далее СВГ), исключая большую часть деформаций массива грунта за пределами разрабатываемого котлована. Однако стоит отметить, что основная часть дополнительных осадков окружающей застройки составляет технологическая осадка, которая приходит непосредственно на саму конструкцию СВГ.

Проанализировав все данные, становится ясно, что каждая из предложенных технологий имеет как свои преимущества, так и определенные недостатки, из чего следует, что самым оптимальным решением может быть комбинирование отдельных технологических элементов, что позволит в максимальном объеме реализовать все преимущества различных технологий цементационного закрепления грунтов [7-8].

Следует отметить, что при современном подходе к подземному строительству одним из лучших способов возведения котлована также является технология «стена в земле» [9].

Возвращаясь к методам цементации, можно сказать, что хороших результатов удалось достичь комбинированными составами мелкодисперсного вяжущего (микроцемента) и активированного бентонита [10-15].

Таким образом, при выборе технологии цементации почвы в большинстве случаев стоит рассмотреть различные комбинации отдельных технологических методов, которые обеспечат гарантированное достижение параметров проектирования разработанного грунта [16].

В современном мире также происходит активная разработка нового программного обеспечения, в том числе того, которое основано на суррогатном моделировании, значительно упрощающем процесс создания инструментов программистами и Data Scientist's. Суррогатное моделирование – это метод машинного обучения, применяемый в области инженерного проектирования. Такие популярные методы машинного обучения, как полиномиальная регрессия, SVM, гауссовский анализ, нейронные сети и т. д., широко используются в качестве суррогатных моделей для ускорения процессов проектирования и анализа продукции [17-18]. Рассмотрим наиболее популярные CASE-средства для проектирования инженерных продуктов, включающих суррогатное моделирование систем [19].

MySQL Workbench (MySQL WB) – инструмент, использующийся для визуального проектирования, моделирования, создания и эксплуатации баз данных. MySQL WB позволяет не только моделировать данные, но и разрабатывать SQL, а также комплексные приложения администрирования, создавать графические модели различной сложности, предоставляет визуальные инструменты для создания и редактирования объектов баз данных.

Oracle SQL Developer Data Modeler (OSQL DDM) – графический инструмент, который повышает производительность и облегчает моделирование данных. Используя OSQL DDM, пользователи и разработчики способны создавать, просматривать и редактировать различные модели данных, менять и налаживать выполнение сценариев инструкций PL, SQL и других языках. Data Modeler предоставляет возможности прямого и обратного проектирования, а также поддерживает совместную разработку с помощью интегрированного управления исходным кодом, облегчая работу проектировщикам.

HeidiSQL – многофункциональное ПО с доступным исходным кодом, которое включает в себя объемный набор инструментов для операций с таблицами. Из-за отсутствия в HeidiSQL средств визуального проектирования данное ПО используется чаще всего для администрирования [16].

В ходе проведения анализа данных систем можно сделать вывод о том, что MySQL Workbench показывает наилучший результат для охвата большинства функций систем проектирования, а также является почти универсальным и доступным бесплатным аналогом коммерческих систем Erwin и Sybase PD.

Рабочая гипотеза. В процессе проектирования грунтовых оснований исследователь сталкивается со многими неопределенностями, вызванными неточностью формулировок исходных документов, разбросом параметров и их значений, а также большим количеством перекрестных ссылок. Это требует не только знаний в области проектирования грунтовых оснований, но и формирования новых связей между объектами исследования и последующих инженерных расчетов.

Объектом данных исследований является внедрение в технологии замкнутого цикла, позволяющие вторично использовать строительные материалы, изделия и конструкции, программных продуктов на основе искусственного интеллекта и баз данных. Такие процессы позволят достичь:

- более точного и быстрого проектирования оснований фундаментов и дорожных одежд;
- оптимизировать энергоэффективность технологий строительства объектов на слабых грунтах;
- интегрировать строительство объектов с другими смежными технологиями;
- учитывать индивидуальные особенности и требования заказчиков строительства.

Материалы и методы исследований. Бывает сложно проанализировать механическое поведение образца камня, песка или грунта. Даже если на первый взгляд грунт кажется устойчивым, позже в процессе строительства он может подвергнуться сдвигам и неравномерному распределению нагрузки. Эта популярная туристическая достопримечательность была построена на довольно мягком грунте (глина, песок и ракушки), который со временем скользил и смещался, заставляя башню наклоняться. При типичном трехосном испытании образец грунта помещается внутрь резиновой мембраны и затем сжимается в осевом направлении при поддержании постоянного радиального давления. Если грунт является сцепленным, вы можете приготовить образцы непосредственно из насыщенных, уплотненных образцов. Если грунту не хватает сцепления, вы можете использовать специальную форму, которая позволит вам сохранить необходимую конфигурацию объекта для теста [20].

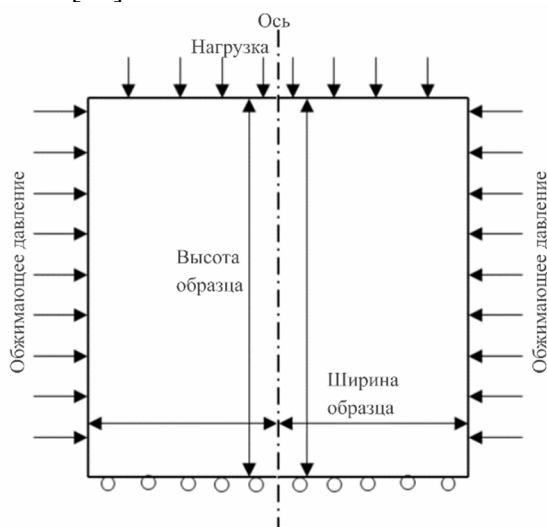


Рис. 1. Схема испытания образца модифицированного грунта при циклическом нагружении

Уплотнённый и осушенный образец подвергается медленному сдвигу при сжатии, что позволяет поровому давлению рассеиваться, а образцу приспосабливаться к окружающим

напряжениям, в последующем он сжимается с постоянной скоростью, и нагрузки прикладываются быстро, не давая образцу возможности уплотниться.

На приведенной на рис. 1 схеме видны условия на границах при воздействии нагрузки. На первом этапе используется медленное увеличение вертикального смещения верхней границы образца. Эта модель является важной точкой для исследования параметров модели почвы, укрепленной дополнительными материалами. На втором этапе осуществляется многократное нагружение образца. Свойства почвы соответствуют стандартному глинистому материалу. Данная модель использует суррогатное моделирование материала Soil Plasticity с критерием Друкера-Прагера. Перебор основных параметров осуществляется на основе предварительно обученной суррогатной модели.

Исходные данные указаны в таблице.

Исходные параметры моделирования

Название физической константы	Параметр	Величина
Плотность	Rho	2200 кг/м ³
Коэффициент Пуассона	Nu	0,29
Начальная жесткость для первичного нагружения	Eiref	6,6E7 Па
Угол дилатации	Psi	0,31416 рад
Угол внутреннего трения	Phi	0,75049 рад
Жесткость при разгрузке и перегрузке	Eurref	9,2E7 Па
Начальная пористость	e0	0,65
Коэффициент нелинейности грунта	m	0,55
Коэффициент компрессии	rc	1,84
Адгезия	c	1000 Па
Поровая деформация	gamma a	2,00E-04
Начальная деформация сдвига	gammaR	5,1948E-4
Коэффициент эллиптичности	Rc	0,68027
Давление	p0	3,0E5 Па
Начальное значение модуля Юнга	E0ref	2,7E8 Па

Предельное напряжённое состояние грунта

В отличие от этого в теории предельного напряжённого состояния равенство активных сил и сил сопротивления сдвигу (формоизменению) рассматривается на точечном уровне: в элементарном объёме грунтового массива. Под напряжённым состоянием в точке (на плоскости или в пространстве) понимается совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем возможным площадкам, пересекающимся в этой точке [21-22].

Компоненты напряжений σ_n , τ_n на произвольной площадке могут быть определены, если известны напряжения (например σ_x , σ_z , τ_{xz}) на двух взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через ту же точку (1):

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_z \sin^2 \alpha + \tau_{xz} \sin 2\alpha; \tau_n = (\sigma_x - \sigma_z) \sin \alpha \cos \alpha - \tau_{xz} \cos 2\alpha. \quad (1)$$

Если предположить, что две взаимно перпендикулярные площадки являются главными, то в соответствии с (1) можно записать

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1; \tau_n = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1. \quad (2)$$

Если принять, что $x_1 = \sigma_1$, $x_2 = \sigma_2$, $x_n = \sigma_n$, $z_n = \tau_n$, то произведя соответствующие замены можно получить запись, тождественную (2):

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha_1 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1;$$

$$\tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha_1 = (\sigma_1 - \sigma_2) \sin \alpha_1 \cos \alpha_1. \quad (3)$$

где α_1 – угол [21].

Здесь сжатие считается отрицательно направленным напряжением и деформацией грунтового массива: $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$, $|\sigma_3| \geq |\sigma_2| \geq |\sigma_1|$; $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, $|\varepsilon_3| \geq |\varepsilon_2| \geq |\varepsilon_1|$ [21-22].

Результаты исследований. Анализ результатов расчёта грунтового массива, укрепленного вторичным строительным материалом.

После приложения вертикального смещения и ограничивающего давления к образцу вы можете изучить результаты статического отклика и нагрузки на сжатие для различных значений ограничивающего давления.

На рис. 2 показана зависимость осевого напряжения от осевой деформации в монотонном трехосном испытании для трех различных грунтов. Кривая зависимости напряжения от деформации является гиперболической, свидетельствуя о нелинейности свойств, увеличение осевого смещения напряжение гиперболически возрастает, стремясь к напряжению разрушения. Модели нелинейной деформации грунта с критериями разрушения Mohr–Coulomb и Matsuoka–Nakai близки по полученным характеристикам для всех образцов грунта.

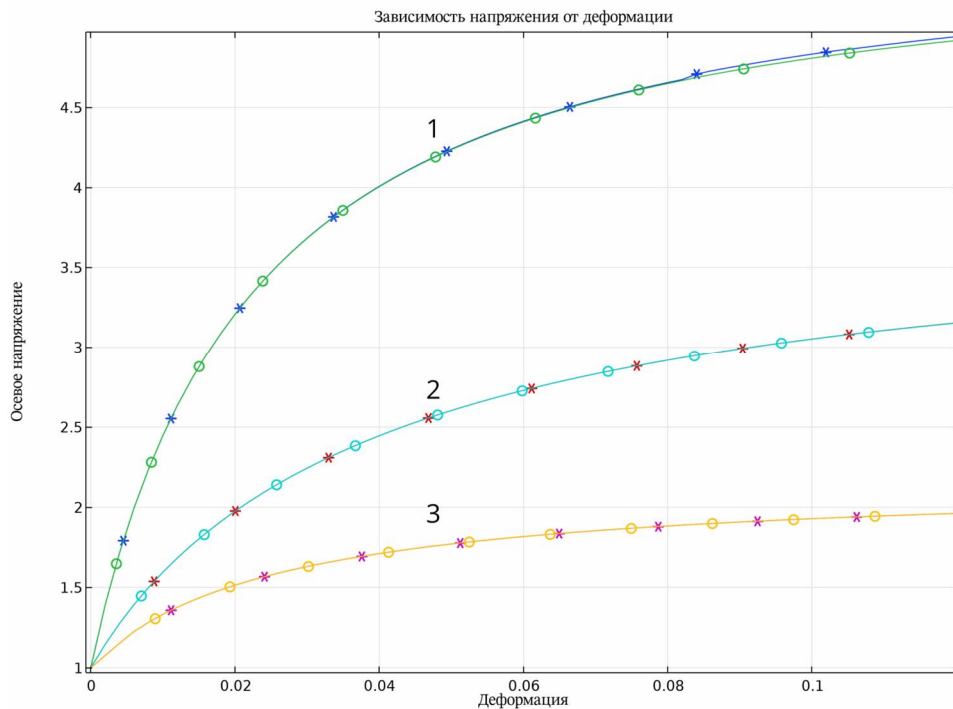


Рис. 2. Зависимость напряжения в грунтовом массиве от деформации: 1 – упрочненный грунт; 2 – увлажненный упрочненный грунт; 3 – исходный глинистый грунт

На рис. 3 показаны изменения объемной деформации при приложенной осевой деформации для трехосного испытания. Объемная деформация проявляет нелинейное поведение по отношению к осевой деформации, используется формулировка угла мобилизации дилатансии Soreide, поскольку она численно более стабильна по сравнению с формулировками Rowe, модифицированными Rowe и Row–Li–Dafalias. Объемная деформация модели упрочняющегося грунта с критериями разрушения Мора–Кулона и Matsuoka–Nakai совпадают друг с другом, так как пластический потенциал и формулировка угла мобилизованного дилатанса совпадают. Анализ полученных результатов показывает

влияние угла внутреннего трения на предельные значения напряжений в грунтовом массиве, это влияет на пластические потенциал и деформацию.

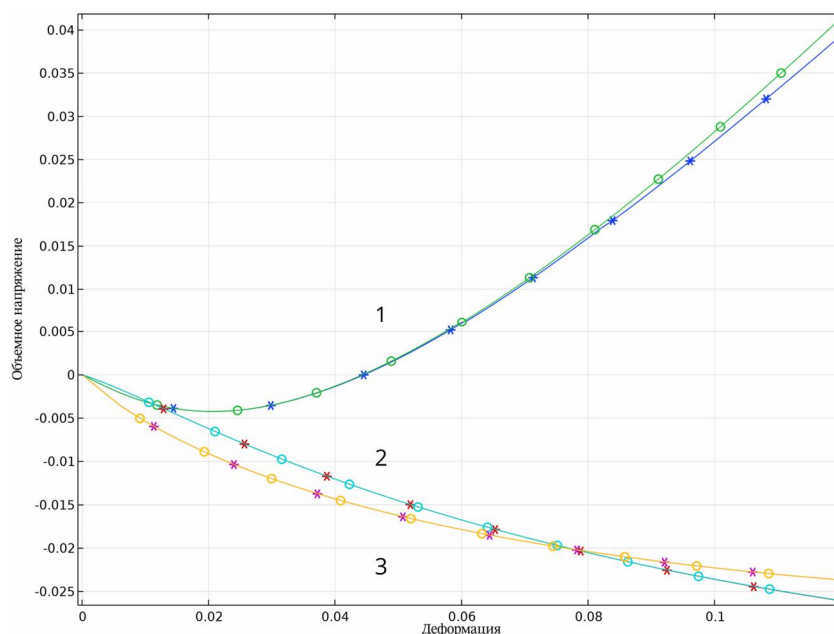


Рис. 3. Зависимость напряжения в грунтовом массиве при объемной деформации: 1 – упрочненный грунт; 2 – увлажненный укрепленный грунт; 3 – исходный глинистый грунт

На рис. 4 показано изменение модуля Юнга в зависимости от осевой деформации. Жесткость при первичном нагружении и перегрузке различна и ухудшается с увеличением осевой деформации.

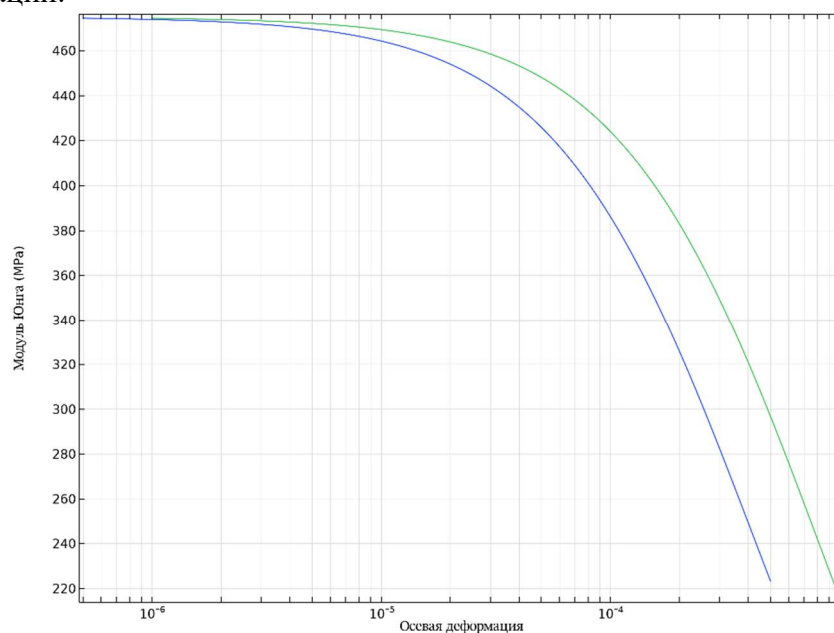


Рис. 4. Зависимость модуля Юнга от осевой деформации: 1 – многократное нагружение; 2 – однократное приложение нагрузки на глинистый грунт

Изменение свойств грунтового массива при циклическом нагружении требует осторожного подхода при проектировании оснований сооружений, включая высокие насыпи. Для примера произведено проектирование высокой насыпи из естественного глинистого грунта высотой 12 м и шириной проезжей части 8 м. После воздействия 20 циклов нагружения вдоль участка длиной 60 м образовалась область пластической деформации с

просадкой 85 мм и перемещением до 250 мм. На рис. 5 отчетливо виден деформированный грунтовый массив высокой насыпи без перетока естественных вод.

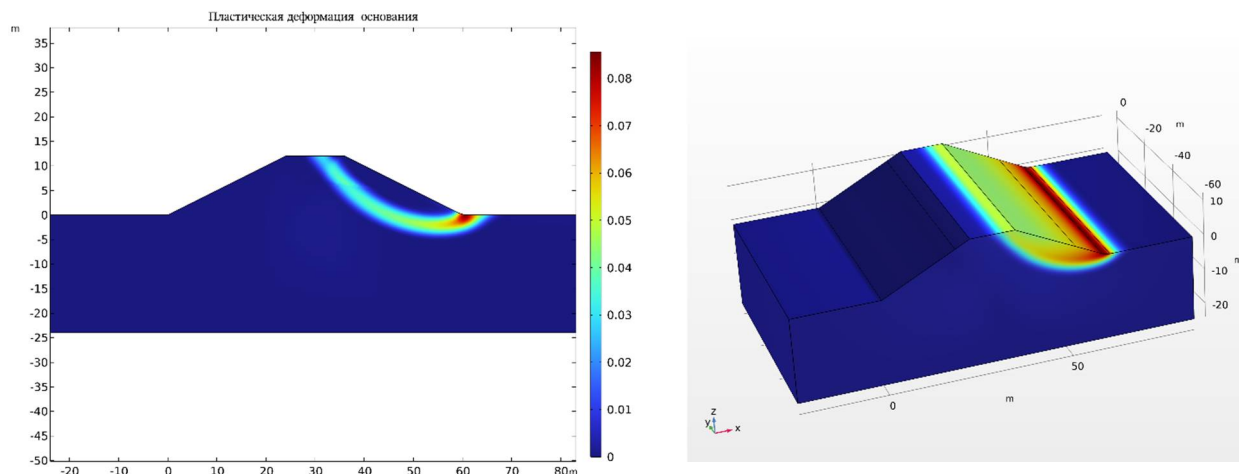


Рис. 5. Пластическая деформация основания и смещение грунтового массива

Укрепление грунтового массива вторичными материалами увеличивает прочностные свойства оснований до 3-5 раз, препятствуя развитию процессов разрушения структуры. Увеличивает углы внутреннего трения, снижает водопоглощение и т.д. [20]. Выбор необходимых величин приводит к задаче использования материалов с заданными физико-механическими свойствами, параметры которых можно адаптировать к существующим местным и вносимым вторичным материалам.

Выводы

Реализацию вторичного использования строительных материалов, изделий и конструкции для формирования основания здания и дорожных одежд необходимо проектировать с использованием современных информационных технологий, включая методы суррогатного моделирования и применения баз данных. Это позволяет оптимизировать множественные параметры исходных данных, необходимых при проектировании и последующей эксплуатации сооружений.

Использование местных материалов, а в особенности глинистых грунтов, требует точного учета многих параметров при проектировании, включая угол мобилизации дилатансии. Многократное нагружение грунтовых массивов оснований, особенно в условиях обводнения, приводит к их значительным пластическим деформациям. Уменьшить деградацию грунтового массива возможно внесением материалов, стабилизирующих его физико-механические свойства.

Библиографический список

1. Нурмухаметов Р.Р. Уменьшение деформативности водонасыщенных глинистых грунтов путем армирования // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2019. – № 9(84). – С. 22-33. – DOI 10.18720/CUBS.84.2.
2. Калач Ф.Н. Оценка эффективности использования технологии инъекционного укрепления слабых грунтов в основании фундаментов мелкого заложения саморасширяющимися растворами // Construction and Geotechnics. – 2020. – Т. 11. – № 2. – С. 62-77. – DOI 10.15593/2224-9826/2020.2.06.
3. Сапин Д.А. Осадки фундаментов зданий соседней застройки при устройстве траншейной "стены в грунте" // Жилищное строительство. – 2015. – № 4. – С. 8-13.
4. Некоторые особенности технологии закрепления грунтов "манжетной" инъекцией с использованием микроцемента / Э.С. Аргал, В.М. Королев, О.Е. Смирнов, В.А. Ашихмен // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2008. – № 1. – С. 25-28.

5. Ибрагимов М.Н., Семкин В.В., Шапошников А.В. Некоторые проблемы закрепления грунтов растворами из микроцементов // *Academia. Архитектура и строительство*. – 2016. – № 4. – С. 114-120.
6. Special Aspects of Hydration Process of Microfine Cement / I. Ivanova, A. Pustovgar, A. Eremin, A. Adamtsevich // *Applied Mechanics and Materials*. – 2015. – Vol. 725-726. – P. 578-583. – DOI 10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.578.
7. Soft ground technology // *Proceedings of the soft ground technology Conference in Noordwijkerhout*. – Netherland, 2000.
8. Харченко И.Я., Алексеев С.В. Комбинированная цементация грунтов при освоении подземного пространства в условиях плотной городской застройки // *Метро и тоннели*. – 2013. – № 5. – С. 18-20.
9. Осокин А.И., Денисова О.О., Шахтарина Т.Н. Технологическое обеспечение подземного строительства в условиях городской застройки // *Жилищное строительство*. – 2014. – № 3. – С. 16-24. – №4(34). – С. 200-205.
10. Баженова О.Ю., Баженова С.И., Баженов М.И. Исследование некоторых свойств цементов с тонкодисперсной добавкой // *Молодой ученый*. – 2013. – № 10. – С. 96-97.
11. Ahmed A. Compressive strength and microstructure of soft clay soil stabilized with recycled basanite // *Applied Clay Science*. – 2015. – P. 27-35.
12. Шакиров И.Ф., Гарифуллин Д.Р. Исследование несущей способности и деформаций песчаных грунтов, укрепленных напорной цементацией // *Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета*. – 2015. – № 4(34). – С. 200-205.
13. Шашкин А.Г. Проектирование зданий и подземных сооружений в сложных инженерно-геологических условиях Санкт-Петербурга. – М.: Академическая наука - Геомаркетинг, 2014. – 352 с.
14. Болдырев Г.Г. Мельников А.В., Новичков Г.А. Часть 4. Интерпретация результатов лабораторных испытаний с целью определения деформационных характеристик грунтов // *Инженерные изыскания*. – 2014. – № 5-6. – С. 98-105.
15. Болдырев Г.Г., Колесников А.С., Новичков Г.А. Часть 2. Интерпретация результатов лабораторных испытаний с целью определения прочностных характеристик грунтов // *Инженерные изыскания*. – 2014. – № 5-6. – С. 78-85.
16. Современные технологии цементационного закрепления грунтов / И.Я. Харченко, В.А. Алексеев, К.А. Исафилов, А.С.Э. Бетербиев // *Вестник МГСУ*. – 2017. – Т. 12, № 5(104). – С. 552-558.
17. Баров Д.Н. Теория проектирования и организация баз данных и знаний, системы искусственного интеллекта // *Методы и средства обработки и хранения информации: межвуз. сб. науч. тр.; под ред. Б.В. Кострова*. – Рязань: Редакционно-издательский центр РГРТУ, 2019. – С. 81-87.
18. Sobester A., Forrester A., Keane A. *Engineering design via surrogate modelling: a practical guide*. – John Wiley & Sons, 2008.
19. Перекатов А.С., Чалов А.С., Гринченко Н.Н. CASE-средства для проектирования информационных систем // *Методы и средства обработки и хранения информации: межвуз. сб. науч. тр.; под ред. Б.В. Кострова*. – Рязань: Редакционно-издательский центр РГРТУ, 2019. – С. 64-69.
20. Thomas Forrister. Метод трехосных испытаний в геомеханике. [Электронный ресурс]: – URL: <https://www.comsol.ru/>.
21. Шапиро Д.М. Теория и расчётные модели оснований и объектов геотехники: монография. – Изд. 2-е, доп. – М.: АСВ, 2016. – 180 с. // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. – URL :

<https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432301543.html> (дата обращения: 29.02.2024).

22. Нелинейные методы расчёта в современном проектировании (на примерах объектов геотехники и мостовых сооружений) / Д.М. Шапиро, А.В. Агарков, Н.Н. Мельничук, Т.Т. В. Чан // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2009. – № 3(15). – С. 85-94.

References

1. Nurmukhametov R.R. Reducing the deformity of water-saturated clay soils by reinforcement. *Construction of Unique Buildings and Structures*. No. 9(84). 2019. Pp. 22-33. DOI 10.18720/CUBS.84.2.
2. Kalach F.N. Assessing the effectiveness of using the technology of injection strengthening of soft soils at the base of shallow foundations with self-expanding solutions. *Construction and Geotechnics*. Vol. 11. No. 2. 2020. Pp. 62-77. DOI 10.15593/2224-9826/2020.2.06.
3. Sapin D.A. Settlement of foundations of neighboring buildings during the construction of a trench “wall in the ground”. *Housing Construction*. No. 4. 2015. Pp. 8-13.
4. Argal E.S., Korolev V.M., Smirnov O.E., Ashikhmen V.A. Some features of the technology for consolidating soils with “cuff” injection using microcement. *Foundations, Bases and Soil Mechanics*. No. 1. 2008. Pp. 25-28.
5. Ibragimov M.N., Semkin V.V., Shaposhnikov A.V. Some problems of fixing soils with solutions of microcements. *Academy. Architecture and Construction*. No. 4. 2016. Pp. 114-120.
6. Ivanova I., Pustovgar A., Eremin A., Adamtsevich A. Special aspects of hydration process of microfine cement. *Applied Mechanics and Materials*. Vol. 725-726. 2015. Pp. 578-583. DOI 10.4028/www.scientific.net/AMM.725-726.578.
7. Soft ground technology. *Proceedings of the soft ground technology Conference in Noordwijkerhout*. Netherland, 2000.
8. Kharchenko I.Ya., Alekseev S.V. Combined cementation of soils during the development of underground space in conditions of dense urban development. *Metro and Tunnels*. No. 5. 2013. Pp. 18-20.
9. Osokin A. I., Denisova O.O., Shakhtarina T.N. Technological support of underground construction in urban development. *House Building*. No. 3. 2014. Pp. 16-24. EDN RXOKJB.4(34). – pp. 200-205.
10. Bazhenova O.Yu., Bazhenova S.I., Bazhenov M.I. Study of some properties of cements with finely dispersed additives. *Young Scientist*. No. 10. 2013. Pp. 96-97.
11. Ahmed A. Compressive strength and microstructure of soft clay soil stabilized with recycled basanite. *Applied Clay Science*. 2015. Pp. 27-35.
12. Shakirov, I.F., Garifullin D.R. Study of bearing capacity and deformation of sandy soils strengthened by pressure cementation. *News of the Kazan State University of Architecture and Civil Engineering*. No. 4(34). 2015. Pp. 200-205.
13. Shashkin A.G. *Design of buildings and underground structures in difficult engineering and geological conditions of St. Petersburg*. M.: Academic Science - Geomarketing, 2014. 352 p.
14. Boldyrev G.G., Melnikov A.V., Novichkov G.A. Interpretation of the results of laboratory tests to determine the deformation characteristics of soils. *Engineering Surveys*. Part 4. 2014. No. 5-6. Pp. 98-105.

15. Boldyrev G.G., Kolesnikov A.S., Novichkov G.A. Interpretation of laboratory test results to determine the strength characteristics of soils. Engineering surveys. Part 2. 2014. No. 5 -6. Pp. 78-85.
16. Kharchenko I.Ya., Alekseev V.A., Israfilov K.A., Beterbiev A.S.E. Modern technologies for cementation consolidation of soils. Bulletin of MGSU. Vol. 12. No. 5(104). 2017. Pp. 552-558.
17. Barov D. N. Theory of design and organization of databases and knowledge, artificial intelligence systems. Methods and Means of Processing and Storing Information: Interuniversity Collection of Scientific Papers. Ryazan: Editorial and Publishing Center RSRTU, 2019. Pp. 81-87.
18. Sobester A., Forrester A., Keane A. Engineering design via surrogate modeling: a practical guide. John Wiley & Sons, 2008.
19. Perekatov A.S., Chalov A.S., Grinchenko N.N. CASE tools for designing information systems. Methods and Means for Processing and Storing Information: Interuniversity Collection of Scientific Papers. Ryazan: Editorial and Publishing Center RSRTU, 2019. Pp. 64-69.
20. Thomas Forrester. Method of triaxial tests in geomechanics. [Electronic resource]: Site access mode: <https://www.comsol.ru/>.
21. Shapiro D.M. Theory and calculation models of foundations and geotechnical objects: monograph. 2nd ed. Moscow: DIA, 2016. 180 p. ISBN 978-5-4323-0154-3. Text: electronic // EBS "Student Consultant": [website]. URL: <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432301543.html> (access date: 02/29/2024).
22. Shapiro D.M., Agarkov A.V., Melnichuk N.N., Chan T.T.V. Nonlinear calculation methods in modern design (using examples of geotechnical objects and bridge structures). Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture. No. 3(15). 2009. Pp. 85-94.

DESIGN OF SOIL FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND ROAD PAVEMENTS WITH VERIFICATION BASED ON SURROGATE MODELING

O. B. Kukina¹, V. V. Volkov², A. V. Andreev³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Voronezh, Russia

¹PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Chemistry and Chemical Technology of Materials, Tel.: +7(910)3452888, e-mail: okukina@cchgeu.ru

²PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(910)2402587, e-mail: kotlac@yandex.ru

³PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Highways and Bridges Design, Tel.: +7(910)3497256, e-mail: aavturbo@yandex.ru

The article considers the issue of choosing a technology for strengthening the soil foundation of buildings and road pavements with specified physical and mechanical properties. This scientific research is devoted to the introduction of closed-cycle technologies into the design framework, allowing for the reuse of building materials, products and structures using surrogate modeling methods and databases during the construction of structures. The use of this approach allows for more accurate design of foundations and road pavements with optimization of the energy efficiency of technologies for constructing facilities on soft soils, including new technologies in related industries. Verification of design solutions based on surrogate modeling of the physical properties of the soil foundations of buildings and road pavements allows us to identify design inaccuracies, as well as reuse building materials, products and structures.

Keywords: mechanochemical activation, energy state, metamorphization, clay soils, soil cushions.

**ВЛИЯНИЕ ИНЕРТНЫХ ГАЗОВ НА СВОЙСТВА БИТУМНОГО
ВЯЖУЩЕГО ПРИ RTFOT-СОСТАРИВАНИИ**

В. П. Подольский¹, А. Д. Чудайкин², И. В. Константинова³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹Д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой строительства и эксплуатации автомобильных дорог, тел.: +7 (980) 555 0285, e-mail: ecodogvrn@mail.ru

²Старший преподаватель кафедры строительства и эксплуатации автомобильных дорог, тел.: +7(906)590-05-35, e-mail: a.chudaykin777@mail.ru

³ Инженер научно-образовательной лаборатории «ДорНИИ ВГТУ», тел.: +7 (915) 589 3064, e-mail: miroslava36@mail.ru

Скорость старения (термоокисления) битумного вяжущего является максимальной на этапе производства асфальтобетона, поскольку технология предполагает длительный нагрев и контакт с открытым кислородом воздуха. Одним из инновационных вариантов решения данной проблемы является заполнение бункера-смесителя и бункеров хранения инертными газами-ингибиторами окислительных реакций. Перед апробированием данной технологии в заводских условиях проведен ряд лабораторных опытов. Последовательно проводились эксперименты с исходным битумом, вяжущим в кислородсодержащей и инертной среде по методу RTFOT-состаривания. Опытные образцы исследовались на предмет определения коэффициента пенетрации и изменения массы образцов битума после имитации состаривания. Установлено, что термоокисление битума при смешивании и хранении асфальтобетонной смеси можно значительно замедлить путем введения инертного газа и перевести процесс в термостарение.

Ключевые слова: битум, асфальтобетон, старение битумного вяжущего, вязкость, пенетрация, реология, инертный газ.

Введение. Еще Г.С. Бахрах в своих работах отмечал, что, говоря о термоокислении битумного вяжущего, нужно прежде всего оценивать такой фактор, как воздуходоступность, то, в каком объеме и как интенсивно поступает свободный кислород к тонким пленкам битума, распределенным по минеральной составляющей [1]. И если в бункере хранения для окисления доступен только верхний слой вяжущего, то при перемешивании весь объем битума окисляется не в объеме, а именно в тонких пленках (50 мкм), что вызывает усиленное образование асфальтенов [2, 3, 4].

Если обратиться к Методическим рекомендациям по обеспечению устойчивости битумов против старения при производстве асфальтобетонной смеси (ОДМ 218.03.20-2012) [5], то в данном документе одним из вариантов решения проблемы старения предлагается, в частности, заполнение бункера-накопителя различными газами с целью вытеснения кислорода воздуха. Развивая данную научную гипотезу, можно предположить, что для данной задачи наиболее подходят инертные газы. Таким образом, можно не только решить задачу снижения воздействия окисления при смешивании и хранении смеси именно с точки зрения доступности воздуха к смеси, но и непосредственно ингибировать окислительные реакции.

Материалы и методы. Наиболее подходящими веществами являются азот (для подачи в смеситель) и углекислота (для заполнения бункеров хранения).

Хотя продолжительность термоокисления в смесителе и в бункерах значительно отличается по времени, но сама степень воздействия кислорода на битум в миксере значительно выше, а интенсивность в разы больше [6, 7, 8]. Поэтому при проведении лабораторных опытов время подачи инертных газов было условно разделено: азот подавался 1 час, углекислота – 25 мин. и углекислота (для заполнения бункеров хранения).

С целью выявления влияния инертных газов на реологию битумного вяжущего были проведены следующие эксперименты (рис. 1).



Рис. 1. Порядок проведения экспериментов по RTFOT-состариванию битума в разных средах

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ИСХОДНОГО БИТУМА

Для изучения термоокислительного старения исследовались вязкий битум БНД 60/90, который является одним из самых распространенных вяжущих в дорожном покрытии, а также образцы асфальтобетонной смеси, приготовленной в лабораторных условиях из ускоренно состаренного битума.

Прежде всего были исследованы образцы исходного битума, и для них определялись базовые показатели, которые в дальнейшем использовались для сравнения с характеристиками состаренного в различных условиях.

2. СОСТАРИВАНИЕ МЕТОДОМ RTFOT В КИСЛОРОДСОДЕРЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ ПО ГОСТУ.

Проводилось состаривание по методу RTFOT для имитации прокатки тонких пленок, то есть ускоренного старения битума при смешивании асфальтобетонной смеси в миксере. Опыты выполнялись стандартным методом.

3. СОСТАРИВАНИЕ МЕТОДОМ RTFOT – В ИНЕРТНОЙ СРЕДЕ.

При первом, кратковременном, RTFOT-состаривании в испытательную печь InfraTest с помощью компрессора, подающего воздух при стандартном методе, подавался азот в течение часа, а в конце эксперимента – углекислота (в течение 25 минут) (рис. 2). Определялись показатели.

Имитация в лабораторных условиях тех процессов, которые происходят на АБЗ при реальном производстве асфальтобетонных смесей, позволяет провести опыты и сравнить результаты искусственного состаривания битума по ГОСТу и состаривания в присутствии инертной среды, определить и сравнить все базовые показатели, оценить степень изменения различных реологических характеристик [9].



Рис. 2. Испытательная печь RTFOT InfraTest 20-25720 и баллоны с азотом и углекислотой

Базовым понятием реологии являются ньютоновские и неньютоновские жидкости, то есть такие жидкие вещества, в которых скорость течения пропорциональна или не пропорциональна касательным напряжениям.

Реология битумного вяжущего до сих пор недостаточно исследована, хотя очевидно, что данное вяжущее может вести себя, как обе жидкости [10, 11, 12]. Это связано с количеством асфальтенов и термодинамическим состоянием вещества в каждый момент времени. Большое количество асфальтенов в состаренном битуме увеличивает вязкость, плотность вещества, снижает текучесть. Сильно нагретый битум находится в жидком состоянии, при пониженных температурах становится более вязким.

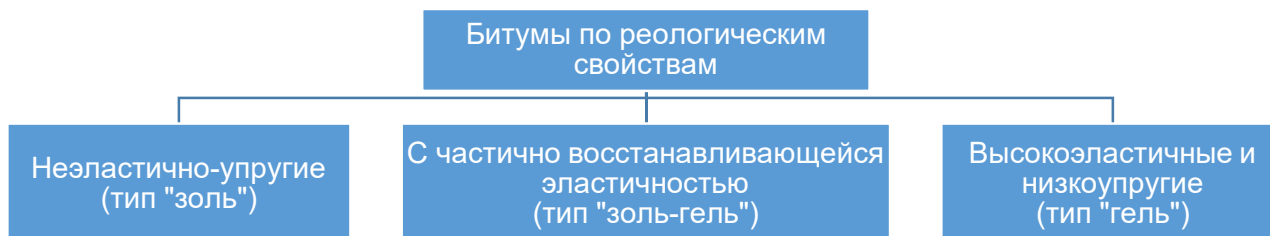


Рис. 3. Классификация битумов по упругим свойствам

К базовым реологическим характеристикам битума относят прежде всего пенетрацию, или, иначе, глубину погружения иглы в опытную пробу вяжущего. Это исследование проводится с целью определения твердости битумов. Определяют пенетрацию, в том числе, остаточную после старения, то есть степени твердости битума аппаратом для определения пенетрации нефтепродуктов ПН-106 по ГОСТ 33136-2014 [13]. Кроме того, определяют изменение массы вяжущего [14].

Основная часть. Приведем результаты проведенных опытов и проанализируем данные, полученные в ходе исследования пенетрации и изменения массы на пенетрометре по ГОСТ 33136-2014, а также температуры размягчения методом КиШ по ГОСТ 33142-2014 [15].



Рис. 4. Пенетрометр ПН-10Б и аппарат КиШ-20

На пенетрометре ПН-10Б исследовались пенетрация и изменение массы образцов битума БНД 60/90 после состаривания. На аппарате КиШ-20 определялась температура размягчения (рис. 4).

Битум, помещенный в специальное кольцо, под действием температуры становился мягче. На вязущее воздействовал металлический шар, после чего размягченный битум касался нижней пластины. Отметим, что эксперименты делались с упором на метод RTFOT, как соответствующий процессу термоокисления при замешивании и хранении асфальтобетонной смеси. Требования к битуму БНД 60/90 до и после RTFOT-состаривания приведены в табл. 1, основные результаты испытаний – в табл. 2.

Таблица 1

Требования к битуму БНД 60/90 до и после RTFOT-состаривания

Показатель	Товарный битум БНД 60/90	Допустимое изменение параметров после RTFOT с доступом кислорода
Глубина проникания иглы, (пенетрация), при 25°C	61-90	Не менее 46 %
Изменение массы, %		Не более 0,8%
Температура размягчения по КиШ, ° С,	Не ниже 47	
Изменение t размягчения по КиШ, ° С		Не более 5

Результаты испытаний битума БНД 60/90 до и после RTFOT-состаривания
в разных газовых средах

Номер образца исходного битума	Удельный расход воздуха, подаваемого на стандартное окисление, м ³ /м ³	Свойства исходных образцов БНД 60/90		Свойства образцов БНД 60/90 после RTFOT-состаривания в кислородсодержащей среде				Свойства окисленных битумов после RTFOT-состаривания в присутствии инертной среды			
		Пенетрация при 25°C, 0,1 мм	Температура размягчения, °C	Остаточная пенетрация при 25°C,		Изменение массы, %	Изменение температуры размягчения, °C	Остаточная пенетрация при 25°C,		Изменение массы, %	Изменение температуры размягчения, °C
				0,1 мм	%			0,1 мм	%		
Образец 1	133	82,1	48,0	47,70	58,1	-0,12	4,6	62,97	76,7	-0,02	3,5
Образец 2	118	81,4	50,0	53,07	65,2	-0,07	4,3	61,21	75,2	-0,03	3,9
Образец 3	140	80,2	47,5	45,07	56,2	-0,14	4,9	62,88	78,4	-0,04	3,2
Образец 4	84	86,6	49,0	62,61	72,3	-0,07	4,0	70,32	81,2	-0,03	4,0
Образец 5	114	87,5	50,0	63,35	72,4	-0,12	5,0	65,98	75,4	-0,03	3,8
Образец 6	114	77,0	51,0	53,59	69,6	-0,08	4,4	59,06	76,7	-0,02	4,0

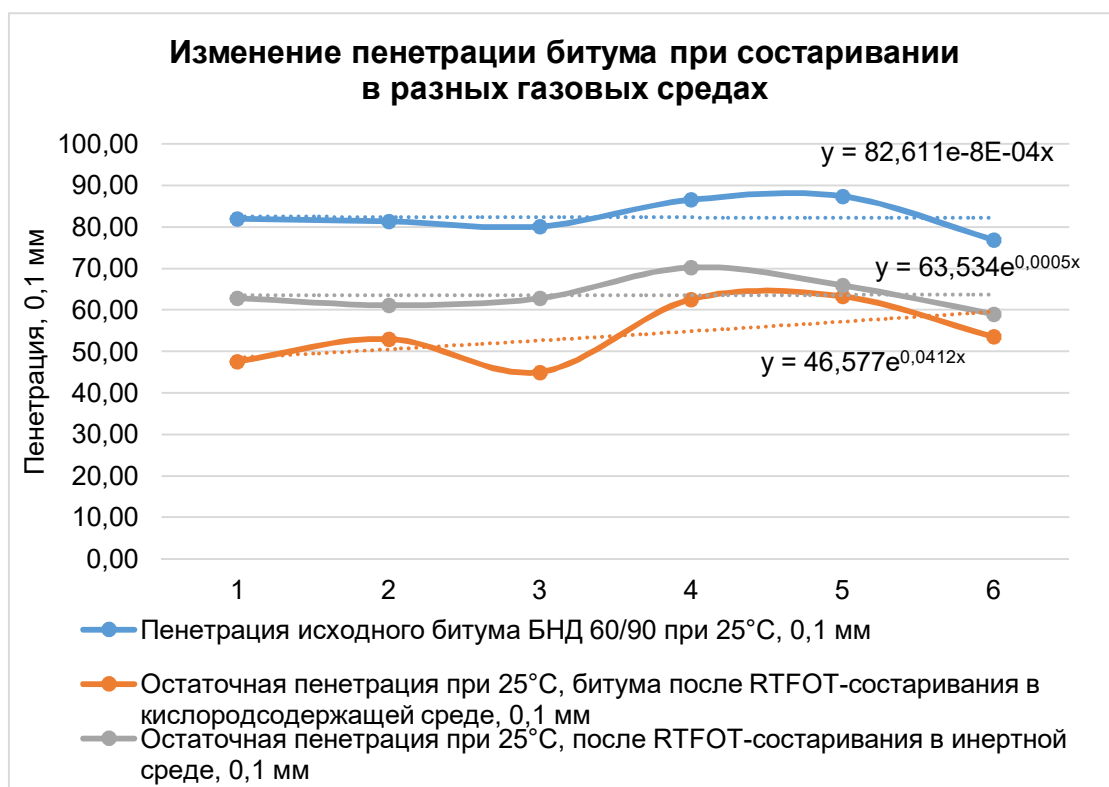


Рис. 5. Изменение пенетрации битума при состаривании в разных газовых средах

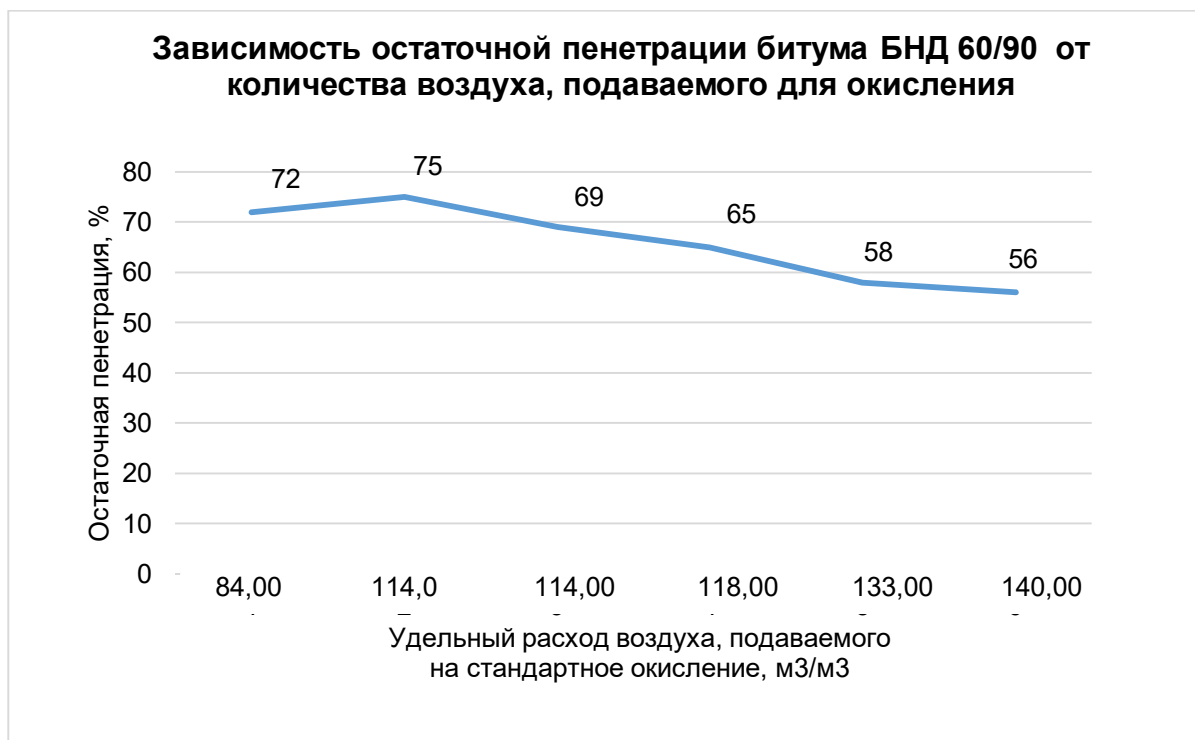


Рис. 6. Зависимость остаточной пенетрации битума БНД 60/90 от количества воздуха, подаваемого для окисления

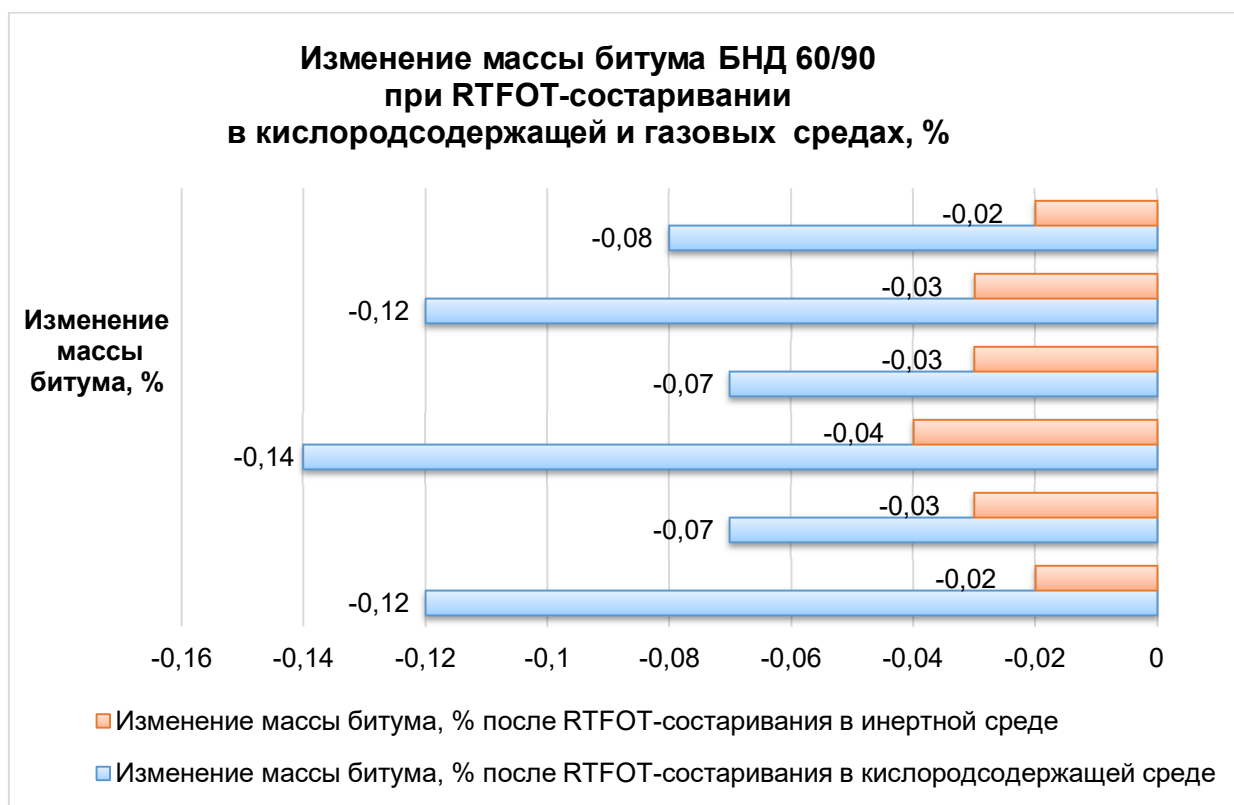


Рис. 7. Изменение массы битума БНД 60/90 при RTFOT-состаривании в кислородсодержащей и газовых средах

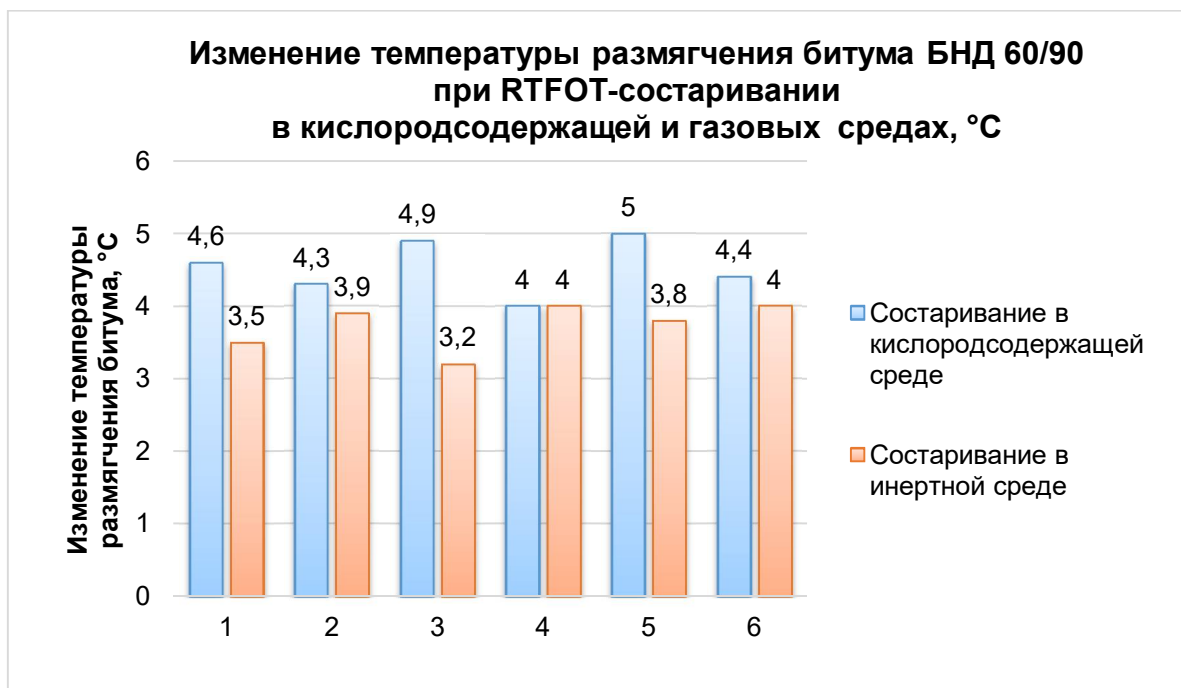


Рис. 8. Изменение температуры размягчения битума БНД 60/90 при RTFOT-состаривании в кислородсодержащей и газовых средах

Выводы. Анализ графика на рис. 5 позволяет сделать вывод, что хотя нормативному показателю удовлетворяют оба результата, но глубина проникания иглы, то есть остаточная пенетрация при состаривании в кислородсодержащей среде ниже, чем в инертной [3, 9].

Кривая на графике на рис. 6 свидетельствует о том, что с увеличением удельного расхода воздуха остаточная пенетрация пропорционально снижается, поскольку чем больше объем подаваемого кислорода, тем интенсивнее происходит состаривание.

Графики на рис. 7 и 8 показывают, что потеря массы в инертной среде замедлилась, а температура размягчения повысилась менее значительно, чем при старении в условиях окисления воздухом. Последнее связано с ростом термостойкости более состаренного битума, следовательно, нужна более высокая температура для его размягчения, поскольку отношение насыщенных соединений к асфальтенам уменьшилось.

Можно сделать общий вывод, что термоокисление битума при смешивании и хранении асфальтобетонной смеси можно значительно замедлить путем введения инертного газа и перевести процесс в термостарение.

Источник финансирования. Собственные средства авторов.

Библиографический список

1. Бахрах Г.С. Проектирование нежестких дорожных одежд по критерию усталостного растрескивания // Наука и техника в дорожной отрасли. – 2008. – №2. – С. 51-59.
2. Колесникова Ю.А. Влияние свойств асфальтобетона и слоев основания на эксплуатационно-прочностные показатели покрытий // Молодой ученый. – 2022. – № 52 (447). – С. 28-31. – URL: <https://moluch.ru/archive/447/98373/> (дата обращения: 07.02.2024).
3. Руденская И.М., Руденский А.В. Состав, структура и физико-механические свойства нефтяных дорожных битумов // Дороги и мосты: сб. науч. тр. – М., 2009. – № 2. – С. 278–295. – URL: <http://www.rosdornii.ru/UserFiles/File/dim/22-2/20.pdf>(дата обращения: 07.02.2024).
4. Формирование структуры композиционных материалов и их свойств / Б.В. Гусев,

- В.И. Кондращенко, Б.П. Маслов и др. – М.: Научный мир, 2006. – 560 с.
5. ОДМ 218.03.20-2012 Методические рекомендации по обеспечению устойчивости битумов против старения в технологических процессах изготовления и применения асфальтобетонных смесей / Федеральное дорожное агентство Росавтодор. – 2012. – 38 с.
 6. Илиополов С.К., Никулин Ю.Я., Саенко С.С. Старение битума в рабочем котле АБЗ // Дороги и мосты. – 2009. – Вып. 21/1. – С. 208-219.
 7. Лукашевич В.Н., Ефанов И.Н. Исследование влияния технологии приготовления асфальтобетонных смесей на процессы старения асфальтового вяжущего при использовании волокнистых сорбентов в качестве дисперсной арматуры // Вестник ТГАСУ. – 2012. – № 2. – С. 191-196.
 8. Саенко С.С., Никулин Ю.Я. Пережиток прошлого. Способы усовершенствования технологии подачи битума в дозатор // Автомобильные дороги. – 2011. – №7 (956). – С. 84-85.
 9. Котлярский Э.В. Структурно-механические свойства асфальтобетонных смесей и асфальтобетона // Вестник БГТУ имени В. Г. Шухова. – 2008. – №4. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/strukturno-mehaniicheskie-svoystva-asfaltobetonnyh-smesey-i-asfaltobetona> (дата обращения: 07.02.2024).
 10. Золотарев В.А. Технологические, реологические и поверхностные свойства битумов. Избранные труды. – С-Пб.: Славутич, 2012. – Т. 1. – 148 с.
 11. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения: пер. с англ. – СПб.: Профессия, 2007. – 560 с.
 12. Давлятова Д.Ю., Котлярский Э.В. Прогноз показателей: методы нормирования реологических характеристик вязких дорожных битумов // Автомобильные дороги. – 2013. – № 1 (974). – С. 75–78.
 13. ГОСТ 33140-2014 Дороги автомобильные общего пользования. Битумы нефтяные дорожные вязкие. Метод определения старения под воздействием высокой температуры и воздуха (метод RTFOT). URL: <https://files.stroyinf.ru/Data/601/60105.pdf> (дата обращения: 25.01.2024).
 14. Углова Е.В. Дровлева О.В. Расчет усталостной долговечности асфальтобетонных покрытий: учеб. пособие. – Ростов н/Д: РГСУ, 2008. – 104 с.
 15. ГОСТ 33142-2014 Дороги автомобильные общего пользования. Битумы нефтяные дорожные вязкие. Метод определения температуры размягчения. Метод Кольцо и Шар. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293763/4293763526.pdf> (дата обращения: 25.01.2024).

References

1. Bakhrakh G.S. Design of flexible road pavements according to the criterion of fatigue cracking. Science and Technology in the Road Industry. No. 2. 2008. Pp. 51-59.
2. Kolesnikova Yu.A. The influence of the properties of asphalt concrete and base layers on the performance and strength indicators of coatings. Young scientist. No. 52(447). 2022. Pp. 28-31. URL: <https://moluch.ru/archive/447/98373/> (access date: 02/07/2024).
3. Rudenskaya I.M., Rudensky A.V. Composition, structure and physical and mechanical properties of petroleum road bitumen. Roads and Bridges. No. 2. 2009. Pp. 278–295. URL: <http://www.rosdornii.ru/UserFiles/File/dim/22-2/20.pdf> (access date: 02/07/2024).
4. Gusev B.V., Kondrashchenko V.I., Maslov B.P. Formation of the structure of composite materials and their properties. M.: Scientific World, 2006. 560 p.
5. Industry road methodological document 218.03.20-2012. Methodological recommendations for ensuring the stability of bitumen against aging in technological processes for the production and use of asphalt concrete mixtures. Federal Road Agency Rosavtodor. 2012.

- 38 p.
6. Iliopolov S.K., Nikulin Yu.Ya., Saenko S.S. Aging of bitumen in the working boiler of the asphalt plant. *Roads and Bridges*. Issue. 21/1. 2009. Pp. 208-219.
 7. Lukashevich V.N., Efanov I.N. Study of the influence of technology for preparing asphalt concrete mixtures on the aging processes of asphalt binder when using fibrous sorbents as dispersed reinforcement. *Bulletin of TGASU*. No. 2. 2012. Pp. 191-196.
 8. Saenko S.S., Nikulin Yu.Ya. A relic of the past. Ways to improve the technology of supplying bitumen to the dispenser. *Highways*. No. 7(956). 2011. Pp. 84-85.
 9. Kotlyarsky E.V. Structural and mechanical properties of asphalt concrete mixtures and asphalt concrete. *Bulletin of BSTU named after V. G. Shukhov*. No. 4. 2008. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/strukturno-mehhanicheskie-svoystva-asfaltobetonyh-smesey-i-asfaltobetona> (date of access: 02/07/2024).
 10. Zolotarev V.A. Technological, rheological and surface properties of bitumen. *Selected Works*. St. Petersburg: Slavutich, T. 1. 2012. 148 p.
 11. Malkin A.Ya., Isaev A.I. *Rheology: concepts, methods, applications: trans. from English*. St. Petersburg: Profession, 2007. 560 p.
 12. Davlyatova D.Yu., Kotlyarsky Z.V. Forecast of indicators: methods for standardizing the rheological characteristics of viscous road bitumen. *Highways*. No. 1(974). 2013. Pp. 75–78.
 13. Federal Standard 33140-2014. Public Highways. Viscous petroleum road bitumens. Method for determining aging under the influence of high temperature and air (RTFOT method). URL: <https://files.stroyinf.ru/Data/601/60105.pdf> (access date: 01/25/2024).
 14. Uglova E.V. Drovleva O.V. *Calculation of fatigue life of asphalt concrete pavements: textbook*. Rostov: RGSU, 2008. 104 p.
 15. Federal Standard 33142-2014 Public Highways. Viscous petroleum road bitumens. Method for determining softening temperature. Ring and Ball method. URL: <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293763/4293763526.pdf> (access date: 01/25/2024).

THE EFFECT OF INERT GASES ON THE PROPERTIES OF BITUMEN BINDER DURING RTFOT AGING

V. P. Podolsky¹, A. D. Chudaykin², I. V. Konstantinova³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹Dr. of Tech. Sciences, Professor, Head of the Department of Construction and Operation of Highways, Tel.: +7(980)5550285, e-mail: ecodorvrn@mail.ru

²Assistant Professor of the Department of Construction and Operation of Highways, Tel.: +7(906)5900535, e-mail: a.chudaykin777@mail.ru

³Engineer of the Scientific and Educational Laboratory "DorNII VSTU", Tel.: +7 (915)5893064, e-mail: miroslava36@mail.ru

The rate of aging (thermal oxidation) of bitumen binder is maximum at the stage of asphalt concrete production, since the technology involves prolonged heating and contact with open air oxygen. One of the innovative solutions to this problem is to fill the mixing bunker and storage bins with inert gases that are inhibitors of oxidation reactions. Before testing this technology in a factory environment, a number of laboratory experiments were carried out. Consistently, experiments were carried out with the original bitumen binder in an oxygen-containing and inert environment using the RTFOT aging method. Test samples were examined to determine the penetration coefficient and changes in the mass of bitumen samples after simulating aging. It has been established that the thermal oxidation of bitumen during mixing and storage of asphalt concrete mixtures can be significantly slowed down by introducing an inert gas and transferring the process to thermal aging.

Keywords: bitumen, asphalt concrete, aging of bitumen binder, viscosity, penetration, rheology, inert gas.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).

Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф.,
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.