

ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757 (online)

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И КОНСТРУКЦИИ**

Научный журнал

Выпуск № 4 (39), 2023

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения — Российская Федерация.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В. С., д-р техн. наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет

Зам. главного редактора: Козлов В. А., д-р физ.-мат. наук, профессор,
Воронежский государственный технический университет

Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Антонов В. М., канд. техн. наук, доц., Тамбовский государственный технический университет;
Беляева С. Ю., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;
Буренин А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии
Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре;
Гриднев С. Ю., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет;
Зверев В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;
Ефрюшин С. В., канд. техн. наук, доц., Воронежский государственный технический университет;
Кирсанов М. Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»;
Колчунов В. И., д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет;
Коробко А. В., д-р техн. наук, проф., Орловский государственный университет им. И. С. Тургенева;
Михайлов В. В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет;
Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам;
Нугужинов Ж. С., д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития
Карагандинского государственного технического университета, Казахстан;
Овчинников И. Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет;
Пшеничкина В. А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет;
Свентиков А. А., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет;
Трещев А. А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет;
Турищев Л. С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь;
Шимановский А. О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь;
Шитикова М. В., д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки - А.Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

Подписной индекс в «Каталоге периодических изданий. Газеты и журналы» ГК «Урал Пресс» - 66004
Физические лица могут оформить подписку в интернет-магазине «Деловая пресса»
<http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/>

Дата выхода в свет 20.12.2023. Усл. печ. л. 14,0. Формат 60×84/8. Тираж 65 экз. Заказ №.
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018 г.

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
(строительный факультет, кафедра строительной механики)
тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»
394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

12+

ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2023

ISSN 2219-1038 (print)
ISSN 2949-3757(online)

**STRUCTURAL MECHANICS
AND STRUCTURES**

Scientific Journal
ISSUE № 4 (39), 2023

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.
Territory of distribution — Russian Federation.

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University

The deputy chief editor: Kozlov V. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University

Executive secretary: Gabrielyan G. E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Antonov V. M., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Tambov State Technical University;

Belyaeva S. Yu., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Burenin A. A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur;

Gridnev S. Yu., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University;

Zverev V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Efryushin S. V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University;

Kirsanov M. N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»;

Kolchunov V. I., Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University;

Korobko A. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Orel State University named after I. S. Turgenev;

Mikhailov V. V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University;

Nguen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam;

Nuguxhinov Zh. S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan;

Ovchinnikov I. G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University;

Pshenichkina V. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University;

Sventikov A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University;

Trechshv A. A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University;

Turichshev L. S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus;

Shimanovsky A. O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus;

Shitikova M. V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A.R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

The journal "Structural mechanics and structures " is included into the list of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

Subscription index in the «Catalog of periodicals. Newspapers and magazines» of the «Ural Press»

Group of Companies - 66004

Individuals can subscribe to it in the online store "Business Press" <http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/>

Publication date 20.12.2023. Conventional printed sheets 14,0. Format 60×84/8. Numbers of copies 65. Order №.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate PI № FS 77 - 72895 or 22.05.2018.

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

<i>Курсанов М.Н.</i> Формула для расчета деформаций плоской многопролетной арочной фермы.....	7
<i>Культербаев Х. П., Барагунова Л. А., Пайзулаев М. М.</i> Продольные колебания вертикального континуально-дискретного стержня при сейсмических возмущениях.....	15
<i>Комерзан Е. В., Ниналов И. Г., Свириденко О. В.</i> Расчет основной частоты собственных колебаний плоской модели составной фермы..	27
<i>Черняев А. А.</i> Автоматизированный поиск вариантов геометрии пластинчато-стержневой конструкции с двумя параллельными направляющими из условия жесткости пластин.....	35
<i>Курсанов М. Н.</i> Формула для расчета первой частоты собственных колебаний фермы.....	42

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Лампси Б. Б., Маркина Ю. Д.</i> Жесткость узлов подкраново-подстропильной фермы в её плоскости.....	51
<i>Варнавский В. С., Конов А. В., Варнавская Е. В.</i> Исследование упругопластического деформирования пространственного стального каркаса при постоянной и ветровой нагрузке.....	64

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

<i>Флавианов В. М., Волков В. В., Козлов В. А., Ордян М. Г.</i> Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния водопропускных труб различного сечения.....	75
---	----

МЕХАНИКА ГРУНТОВ

<i>Александров А. С.</i> Трехпараметрический критерий Мора–Кулона с эффектом Баушингера для расчета дорожных одежд.....	85
--	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

<i>Козлов В. А., Меразка М., Мухтаров Р. А.</i> Влияние присоединённой консоли на несущую способность одиночной сваи под действием горизонтальной нагрузки.....	102
<i>Артыщенко С. В., Чудина Т. А., Гусев М. В.</i> Оценка энергетического состояния конструктивных слоёв метаморфизированных глинистых грунтов при проектировании оснований фундаментов.....	113
Правила оформления статей.....	120

CONTENTS

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

<i>Kirsanov M. N.</i> Formula for calculating the deformation of a planar multi-span arch truss.....	7
<i>Kulterbaev Kh. P., Baragunova L. A., Paizulaev M. M.</i> Longitudinal vibrations of a vertical continuous discrete rod under seismic disturbances.....	15
<i>Komerzan E. V., Ninalalov I. G., Sviridenko O. V.</i> Calculation of a planar model composite truss fundamental frequency.....	27
<i>Chernyaev A. A.</i> Automated search for geometry options plate-rod structure with two parallel guides from the condition of stiffness of the plates.....	35
<i>Kirsanov M. N.</i> Formula for calculating the truss natural oscillations first frequency.....	42

CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

<i>Lampsi B. B. Markina Yu. D.</i> Stiffness of the joints of a crane secondary truss in its plane.....	51
<i>Varnavsky V. S., Konov A. V., Varnavskaya E. V.</i> Investigation of elastic-plastic deformation of a spatial steel frame at constant and wind load..	64

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES

<i>Flavianov V. M., Volkov V. V., Kozlov V. A., Ordyan M. G.</i> Comparative analysis of stress-strain state of culver pipes of different sections.....	75
--	----

SOIL MECHANICS

<i>Aleksandrov A. S.</i> Three-parameter Mohr–Coulomb criterion with the Bauschinger effect for calculation of road pavements.....	85
---	----

CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES

<i>Kozlov V. A., Merazka M., Mukhtarov R. A.</i> Influence of the attached console on the bearing capacity of a single pile under horizontal load.....	102
<i>Artyshchenko S. V., Chudina T. A., Gusev M. V.</i> Assessment of the energy state of structural layers of metamorphised clay soils when designing foundations.....	113
Requirements for articles to be published.....	120

ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ МНОГОПРОЛЕТНОЙ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов^{1,2}

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹
Россия, г. Санкт-Петербург

Национальный исследовательский университет «МЭИ»²
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, профессор, научно-технологический комплекс «Цифровой инжиниринг в гражданском строительстве»; ²д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(965)183-35-34, e-mail: c216@ya.ru

Методом индукции в системе компьютерной математики выводятся аналитические зависимости от числа пролетов прогибов плоской статически определимой многопролетной шарнирной арочной фермы распорного типа. Верхний пояс конструкции прямолинейный. Отдельные арки шарнирно соединены. Для определения усилий в стержнях фермы применяется метод вырезания узлов. Показано, что при определенном числе пролетов система арок кинематически изменяема. Приведена соответствующая схема распределений виртуальных скоростей узлов. Прогибы ищутся по формуле Максвелла–Мора. Отдельные решения для ферм с различным числом пролетов обобщаются на произвольный случай. Коэффициенты искомым формул ищутся как решения линейных рекуррентных уравнений. Строится картина распределения усилий в стержнях фермы. Разыскиваются асимптотики решений по числу пролетов.

Ключевые слова: плоская ферма, арочная ферма, многопролетная ферма, индукция, прогиб, аналитическое решение, Maple, асимптотика.

Введение. Многопролетные ферменные конструкции чаще всего используются в мостостроении. Численный расчет деформаций таких конструкций традиционно выполняется в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1-3]. Однако современные системы символьных преобразований позволяют для статически определимых конструкций найти также и аналитические зависимости прогибов от размеров системы, свойств материала и нагрузок. Наиболее актуальны и практически важны решения, в которых определяются зависимости усилий в элементах конструкции и прогибов от числа пролетов. Это позволяет найти оптимальное число пролетов для каждого конкретного случая, не прибегая к численным расчетам. В справочниках [4,5] собраны формулы для расчета прогибов и смещений опор различных регулярных, в том числе и многопролетных систем. Формулы для прогиба многопролетной плоской фермы с произвольным числом панелей найдены в [6]. Оценка нижней границы собственной частоты двухпролетной фермы в аналитической форме получена в [7,8].

Отдельный класс решений задачи о колебании ферм — аналитический. В [9,10] для получения точных решений применен метод суперпозиции, реализованный в системе символьной математики Maple. Наиболее распространены аналитические решения, полученные методом индукции для ферм регулярного вида [11-15]. В настоящей работе предлагается схема статически определимой многопролетной арочной фермы. Выводятся формулы для ее прогибов под действием нагрузок. Отличительная особенность этой фермы

— элементы периодичности с большим числом стержней, что вызывает дополнительные сложности в аналитическом расчете. Обычно в регулярных фермах, для которых выводится формула зависимости прогиба или собственной частоты от числа панелей, каждая панель (элемент периодической структуры) имеет несколько стержней. Ферма с простой треугольной решеткой [4] содержит 4 стержня в панели. В [13] рассмотрена ферма с 11 стержнями в каждой панели. В рассматриваемой ферме 33 стержня в каждом элементе периодичности (арке).

Схема конструкции. Арки с горизонтальным верхним поясом, боковыми консолями длиной $4a$ и криволинейным нижним шарнирно соединены и образуют многопролетную конструкцию (рис. 1). Число опор n , число пролетов длиной $8a$ равно $n - 1$, общая длина конструкции $8na$.

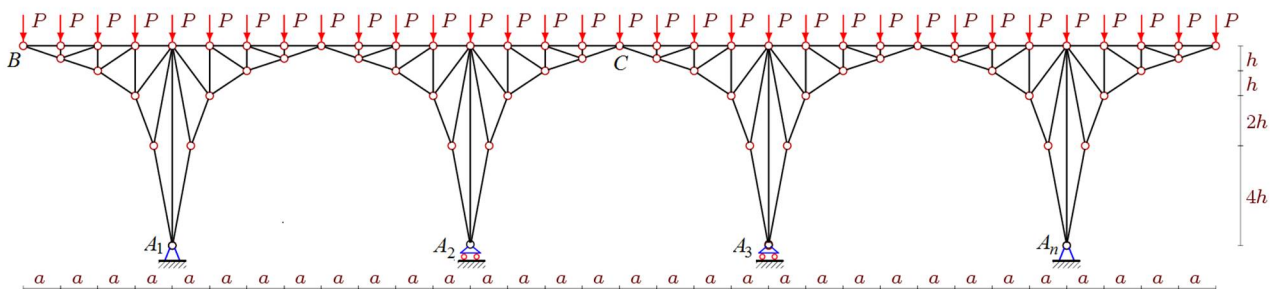


Рис. 1. Опора под действием равномерной нагрузки, $n=4$

Две боковые опоры — неподвижные шарниры, промежуточные $n - 2$ опоры подвижные. Конструкция статически определимая, симметричная. Высота фермы $8h$. Общее число стержней в конструкции $\eta = 34n + 2$. В это число входят $n+2$ стержня, моделирующие опорные стержни, закрепленные на основании.

Расчет усилий в статически определимой ферме выполняется методом вырезания узлов. Все математические действия, связанные с составлением системы уравнений равновесия узлов и ее решения производятся по программе, написанной на языке Maple. Реакции опор вводятся в число неизвестных усилий и определяются вместе с ними. Первые же расчеты усилий показали, что для нечетного порядка конструкции n определитель матрицы системы уравнений равновесия вырождается. Это свидетельствует о мгновенной кинематической изменяемости конструкции. Подтверждением этого является схема возможных скоростей узлов (рис. 2) при $n=3$. Центральная часть фермы совершает мгновенный поворот вокруг центра скоростей K , крайние — вокруг своих неподвижных опор. Для четных чисел n виртуальных скоростей нет, система неизменяема.

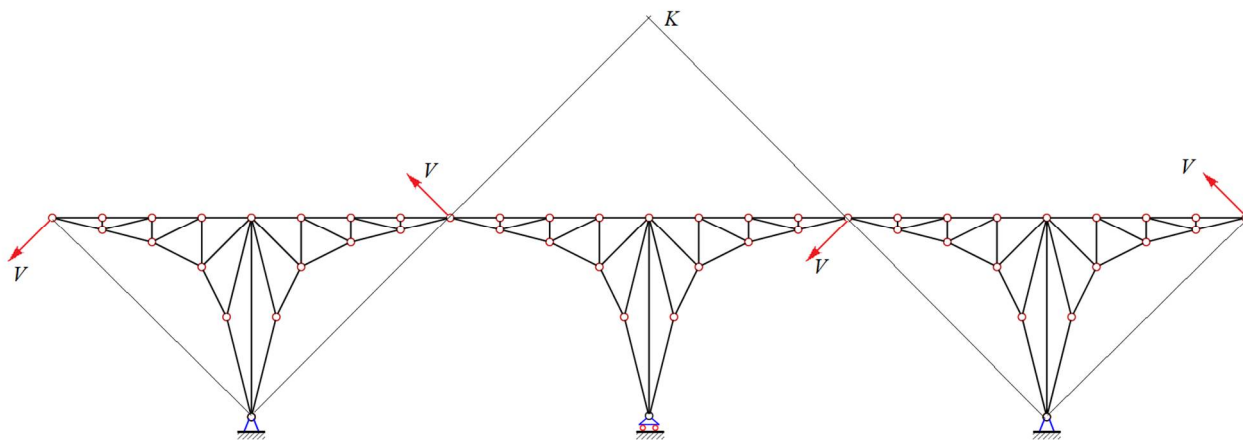


Рис. 2. Схема возможных скоростей фермы, $n=3$

Таким образом, рассматриваются только фермы с четным числом пролетов, или $n=2k$, $k=1,2,\dots$.

Усилия в стержнях от действия равномерно распределенной по узлам верхнего пояса нагрузки интенсивностью P получаются из решения системы линейных уравнений узлов [16]. При $P=1\text{кН}$ распределение усилий по стержням отображено на рисунке 3. Рассмотрен случай $a=h=3\text{м}$. Красным цветом выделены растянутые стержни, синим — сжатые. Усилия указаны в кН и округлены до двух значащих цифр. Ненапряженные стержни — тонкие отрезки черного цвета. Толщины линий, изображающих стержни, условно пропорциональны модулям усилий. Интересно отметить, что центральные стойки в опорных частях оказались растянутыми (9,5 кН). Верхний пояс фермы растянут, нижний — сжат. Вертикальные реакции от распределенной нагрузки боковых опор A_1, A_n вне зависимости от числа пролетов равны $17P/2$, реакции средних опор A_2, \dots, A_{n-1} одинаковы и равны $8P$. Распорные усилия в крайних неподвижных шарнирах A_1 и A_n равны $aP/(4h)$.

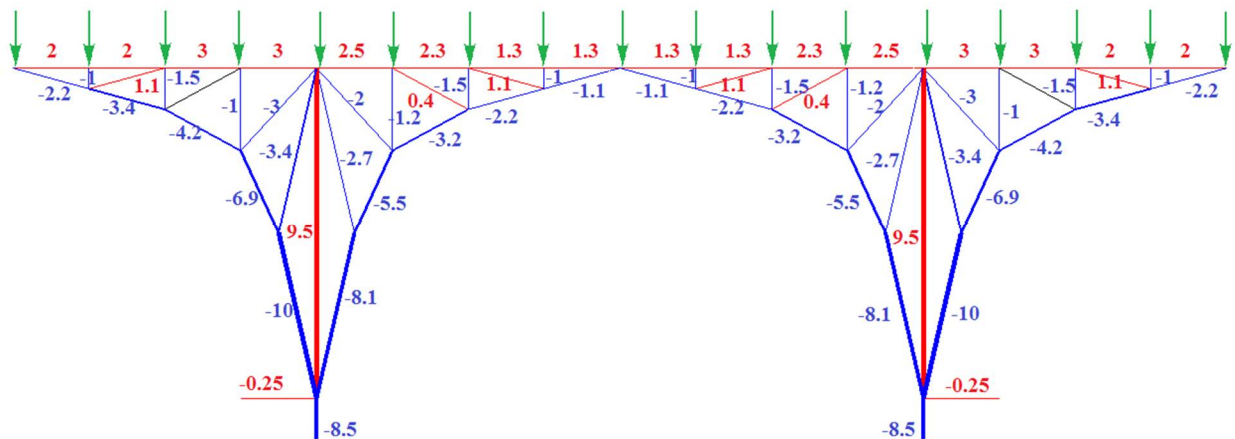


Рис. 3. Равномерная нагрузка по верхнему поясу. Усилия в стержнях фермы, $n=2$

Аналогичная картина распределения усилий при действии на консоль вертикальной силы P дана на рис. 4. Загружена только левая консоль. Стержни в правой консоли не напряжены. Левая часть верхнего пояса центральной арки растянута, правая сжата.

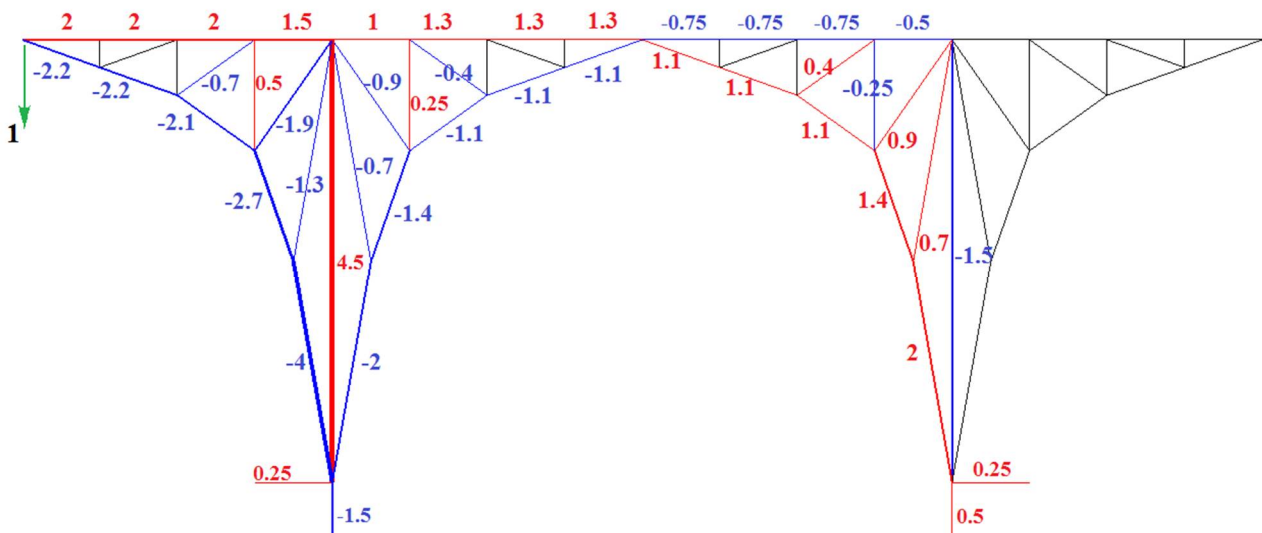


Рис. 4. Сосредоточенная нагрузка на консоли. Усилия в стержнях фермы, $n=2$

Расчет прогиба фермы (вертикальное смещение узла C в середине среднего пролета) выполняется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_D = \sum_{j=1}^n \frac{S_j s_j l_j}{EF},$$

где F — площадь поперечного сечений стержней (включая и опорные), E — модуль упругости их материала, S_j и l_j — усилие в j -м стержне от действия внешней нагрузки и его длина, s_j — усилие от единичной вертикальной силы, приложенной к среднему узлу C . Опорные стержни приняты длиной $h/2$. Ферма рассчитывается в аналитической форме в программе [16], написанной на языке Maple для разного числа k :

$$k = 1: \Delta_C = (684a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 16938h^3) / (72h^2 EF),$$

$$k = 2: \Delta_C = (1746a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 11682h^3) / (72h^2 EF),$$

$$k = 3: \Delta_C = (-360a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 16938h^3) / (72h^2 EF),$$

$$k = 4: \Delta_C = (2790a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 11682h^3) / (72h^2 EF),$$

$$k = 5: \Delta_C = (-1404a^3 + 54b^3 + 234c^3 + 32d^3 + 55f^3 + 20g^3 + 16938h^3) / (72h^2 EF), \dots$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 16h^2}$, $b = \sqrt{4a^2 + h^2}$, $g = \sqrt{a^2 + 64h^2}$, $f = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. В общем случае прогиб среднего узла C имеет вид:

$$\Delta_C = P(C_1 a^3 + C_2 b^3 + C_3 c^3 + C_4 d^3 + C_5 f^3 + C_6 g^3 + C_7 h^3) / (h^2 EF). \quad (1)$$

Методами компьютерной математики Maple находятся общие члены последовательностей коэффициентов при степенях размеров a , b , d , f , g и h . Для этого составляются рекуррентные уравнения [16], решение которых дает следующие зависимости:

$$C_1 = (29k(-1)^k - 14(-1)^k + 53) / 4,$$

$$C_2 = 3/4, C_3 = 13/4, C_4 = 4/9, C_5 = 55/72,$$

$$C_6 = 5/18, C_7 = (795 - 146(-1)^k) / 4.$$

Аналогичное решение получается для прогиба консоли сооружения от действия на нее одной силы P (рис. 4). Коэффициенты в (1) принимают вид:

$$C_1 = (61k + 27) / 4,$$

$$C_2 = k + 1/2, C_3 = 5(2k + 1) / 4, \quad (2)$$

$$C_4 = (2k + 1) / 9, C_5 = 25(2k + 1) / 72,$$

$$C_6 = 5(2k + 1) / 72, C_7 = (586k + 147) / 4.$$

На графике 5 для примера при $a = L / (16k)$, где $L=200$ м — общая длина всей фермы, представлены зависимости безразмерного прогиба

$$\Delta' = EF \Delta_C / (P_{sum} L), P_{sum} = P(8n + 1) \quad (3)$$

от числа пролетов. С увеличением числа пролетов прогиб, измеренный в среднем шарнире C , уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Но изменение это немонотонное, особенно при малых высотах h . Наиболее сильные скачки величины прогиба для небольшого числа пролетов. Так, при $h=1$ м относительный прогиб при $k=5$ в семь раз меньше, чем при $k=4$. Для больших высот конструкции кривая идет более ровно, почти монотонно.

Совершенно иная картина изменения прогиба на конце консоли от действия на нее силы P (рис. 6). В этом случае в формуле (3) принимается $P_{sum} = P$, а коэффициенты в (1) вычисляются по формуле (2). Прогиб консоли с увеличением числа пролетов начинает расти уже при малом числе пролетов, имея минимальное значение уже для четырех пролетов при

$h=3\text{м}$ и восьми пролетов при $h=1\text{м}$. При этом прогиб консоли во много раз больше прогиба в узле C от действия распределенной по узлам верхнего пояса силы.

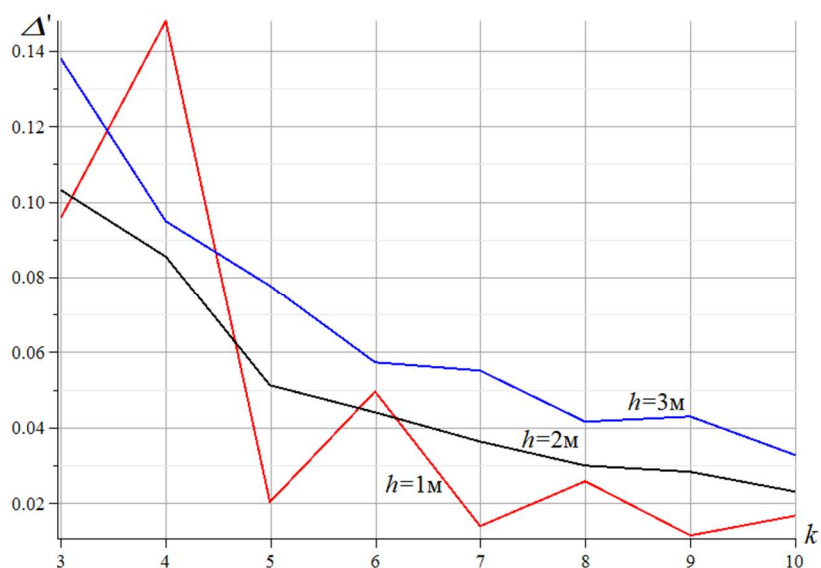


Рис. 5. Распределенная нагрузка. Зависимость прогиба от числа пролетов

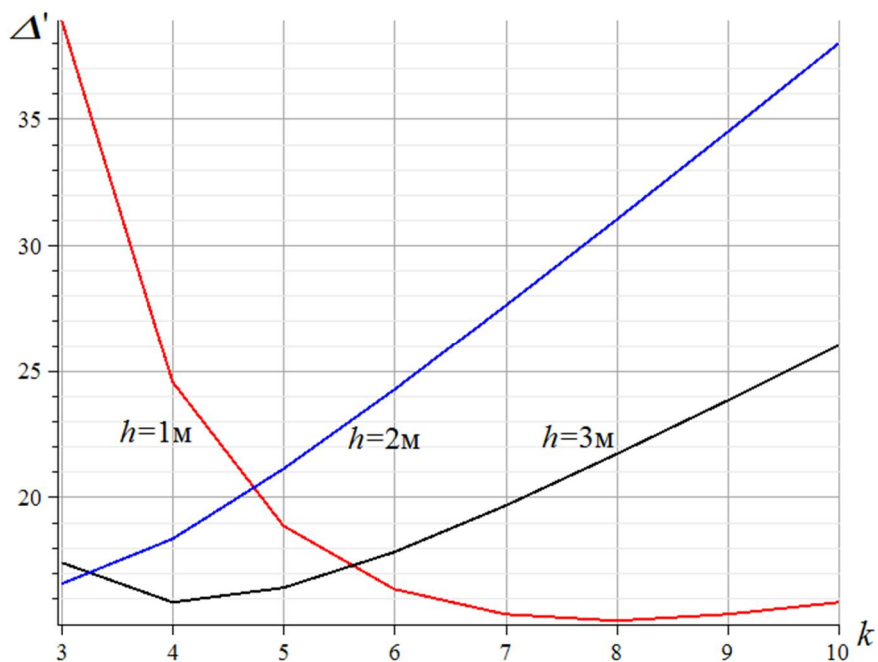


Рис. 6. Сосредоточенная нагрузка на консоль. Зависимость прогиба от числа пролетов

Решение обнаруживает наклонную асимптотику. В системе Maple по формуле (1) с коэффициентами (2) для относительного прогиба консоли находится предел $\lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta' / k) = 2168h / (9L)$. Для прогиба узла C от действия распределенной нагрузки наклонной асимптоты нет, относительный прогиб стремится к нулю.

Заключение. Предложена схема многопролетной фермы арочного типа. Показан случай кинематической изменяемости конструкции и приведены соответствующие векторы виртуальных скоростей. Методом индукции выведены формулы для прогибов от распределенной узловой нагрузки и нагрузки на консоль. Найдены асимптотики решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант «Самовосстанавливающиеся строительные материалы» (договор № 075-15-2021-590 от 04.06.2021).

Библиографический список

1. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с
2. Hu C. F., Huang Y. M. In-plane nonlinear elastic stability of pin-ended parabolic multi-span continuous arches // *Engineering Structures*. 2019. Т. 190. С. 435-446. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.04.013>
3. Картошина С. В., Сорокин А. П. Исследование работы металлических пространственных многопролетных ферм покрытия с затяжкой вдоль нижнего пояса и без нее // *Автомобиль. Дорога. Инфраструктура*. 2017. №. 4 (10). С. 7.
4. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. Том 2. М.: ИНФРА-М, 2019. 285 с. doi: 10.12737/1918490
5. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. Том 3. М.: ИНФРА-М, 2023. 178 с. doi: 10.12737/1939108
6. Кабрера П. Х. Х., Поддубный-Литвинов М. А. Индуктивный метод определения прогиба многопролетной плоской фермы // *Актуальные вопросы образования и науки*. 2014. С. 78-80.
7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
8. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учетом жесткости опор // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №4(31). С.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002
9. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com<http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211> (date of application: 06/17/2020).
10. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *International Conference on "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings*. 2015. pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
12. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106 Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04
13. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
14. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29–37.

15. Комерзан Е.В., Лушнов Н.А., Осипова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. №2(33). С. 17-25. doi: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002
16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Vestnik MGSU. 2020. (4). pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
2. Hu C. F., Huang Y. M. In-plane nonlinear elastic stability of pin-ended parabolic multi-span continuous arches. *Engineering Structures*. 2019. 190. P. 435-446. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.04.013>
3. Kartoshina S.V., Sorokin A.P. Study of the work of metal spatial multi-span covering trusses with and without tightening along the lower chord. *Automobile. Road. Infrastructure*. 2017. no. 4 (10). P. 7.
4. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Volume 2. M.: INFRA-M, 2019. 285 p. doi: 10.12737/1918490.
5. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Volume 3. M.: INFRA-M, 2023. 178 p. doi: 10.12737/1939108.
6. Cabrera P. Kh. Kh., Poddubny-Litvinov M. A. Inductive method for determining the deflection of a multi-span flat truss. *Current issues of education and science*. 2014. Pp. 78-80.
7. Petrenko V. The natural frequency of a two-span truss. *AlfaBuild*. 2021. 20 Article No 2001. doi: 10.34910/ALF.20.1
8. Petrenko V.F. Evaluation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the rigidity of the supports. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 4 (31). Pp.16-25. doi 10.36622/VSTU.2021.31.4.002.
9. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A Superposition Method in the Analysis of an Isotropic Rectangle. *Applied Mathematical Sciences*. 2016. 10(54). doi:10.12988/ams.2016.67211. URL: www.m-hikari.com/http://dx.doi.org/10.12988/ams.2016.67211 (date of application: 06/17/2020).
10. Goloskokov D.P., Matrosov A. V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. *International Conference on “Stability and Control Processes” in Memory of V.I. Zubov, SCP 2015. Proceedings*. 2015. pp. 382–385. doi:10.1109/SCP.2015.7342169.
11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022.111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
12. Kirsanov M., Luong C. Natural frequency spectra of spatial structure. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106 Article No 10604. doi: 10.4123/CUBS.106.04
13. Dai Qiao. Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. *AlfaBuild*. 2021. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1

14. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–37.
15. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a flat truss truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 2(33). Pp. 17-25. doi. 10.36622/VSTU.2022.33.2.002.
16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N., Serdjuks, D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2020. (4). Pp. 510–517. doi:10.22227/1997-0935.2020.4.510-517.

FORMULA FOR CALCULATING THE DEFORMATION OF A PLANAR MULTI-SPAN ARCH TRUSS

M. N. Kirsanov^{1,2}

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University¹
Russia, St. Petersburg

National Research University «MPEI»²
Moscow, Russia

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Scientific and Technological Complex «Digital Engineering in Civil Engineering»; ²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Using the induction method in a computer mathematics system, analytical dependences on the number of spans of deflections of a planar statically determinate multi-span hinged arch truss of a spacer type are derived. The upper chord of the structure is straight. The individual arches are hinged. To determine the forces in the truss rods, the method of cutting nodes is used. It is shown that for a certain number of spans the arch system is kinematically variable. The corresponding diagram of distributions of virtual speeds of nodes is given. Deflections are sought using the Maxwell – Mohr formula. Individual solutions for trusses with different numbers of spans are generalized to an arbitrary case. The coefficients of the required formulas are sought as solutions to linear recurrent equations. A picture of the distribution of forces in the truss rods is constructed. The asymptotic behavior of solutions with respect to the number of spans is sought.

Keywords: flat truss, arched truss, multi-span truss, induction, deflection, analytical solution, Maple, asymptotics

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО КОНТИНУАЛЬНО-ДИСКРЕТНОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Х. П. Культербаев¹, Л. А. Барагунова², М. М. Пайзулаев³

Северо-Кавказский федеральный университет¹

Россия, г. Ставрополь

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова²

Россия, г. Нальчик

Дагестанский государственный технический университет³

Россия, г. Махачкала

¹Д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник, тел.: +7(903)4943338, e-mail: kulthp@mail.ru

²Старший преподаватель кафедры строительных конструкций и механики, тел.: +7(928)0756299,
e-mail: baragunova@mail.ru

³Канд. техн. наук, заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, теоретическая и строительная механика», тел.: +7(960)4217275, e-mail: smdstu@mail.ru

В статье рассматриваются свободные, кинематически возбуждаемые гармонические и случайные колебания вертикального континуально-дискретного стержня при сейсмических возмущениях. В эпицентральной зоне землетрясений вертикальная составляющая доминирует над другими составляющими колебания. Определяются спектры собственных частот и собственные формы колебаний. Предложен и реализован метод определения дисперсии – наиболее важного параметра случайных колебаний. Использован численный метод конечных разностей, результаты получены в среде вычислительного комплекса Matlab. Рассмотрены три конкретных примера расчёта. Изучение продольных колебаний является актуальным. Продольные колебания вертикальных стержневых сооружений мало изучены. Понимание детерминированного представления сейсмического воздействия и реакции от него позволяет хорошо осмыслить сущность работы сооружения. Сооружения зачастую являются континуально-дискретными системами, состоящими из участков с распределённой массой и сосредоточенных масс. Свободные продольные колебания стержней описываются дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа. Начальные условия при свободных колебаниях не требуются, кинематические возмущения основания не учитываются. Краевая задача решается с помощью метода конечных разностей. Алгоритмы и программы легко адаптируются к колебаниям стержней переменного сечения, к вынужденным колебаниям от динамических и случайных нагрузок. Значения функции и производных заменяются приближёнными хорошо известными конечно-разностными значениями в узлах сетки. Сейсмические и техногенные возмущения, имеющие стохастический характер, могут быть описаны для предварительных расчётов в виде гармонического процесса.

Ключевые слова: задачи теории сейсмостойкости, поперечные изгибные колебания, вертикальный континуально-дискретный стержень, горизонтальные воздействия землетрясения на здания и сооружения, продольные колебания, случайные процессы, сейсмические возмущения, дискретные массы, спектральная плотность, собственные значения, собственные функции, метод конечных разностей, вычислительный комплекс Matlab, метод разделения переменных, собственная форма, частота колебаний, система уравнений, изучение продольных колебаний, основания и фундаменты, техногенные воздействия на основания и фундаменты.

Введение. Задачи теории сейсмостойкости относятся к одним из наиболее сложных современных задач строительного проектирования [1]. В настоящее время нормативы исследований сосредоточены в основном на поперечных изгибных колебаниях от горизонтальных воздействий землетрясения на здания и сооружения. Между тем продольные колебания представляют определённую опасность для вертикальных строительных сооружений, находящихся вблизи эпицентра землетрясений [2, 3]. В [3] утверждается, что в эпицентральной зоне вертикальная составляющая доминирует над другими составляющими

колебания. В известном Газлийском землетрясении 1976 г. вертикальные ускорения поверхности грунта значительно превосходили горизонтальные. В Спитакском землетрясении у основного толчка ускорения грунта в горизонтальном и вертикальном направлениях были близки и составляли 0,21g, 0,15g соответственно [4].

Изучение продольных колебаний является актуальным также при техногенных воздействиях на основания и фундаменты. Они возникают от движения транспорта, от машин и оборудования, работающих на близком расстоянии от строительных сооружений, и могут передавать значительные кинематические и динамические воздействия. В то же время продольные колебания вертикальных стержневых сооружений мало изучены и имеют незначительную библиографию [5].

Сейсмические и техногенные возмущения, имеющие стохастический характер, могут быть описаны для предварительных расчётов в виде гармонического процесса $u_0(t) = A_0 e^{i\omega t}$. Такая замена становится почти адекватной, если возмущения являются узкополосными случайными процессами с характерной частотой. В обоснование для такого детерминированного анализа сейсмических реакций можно утверждать, что понимание детерминированного представления сейсмического воздействия и реакции от него позволяет хорошо осмыслить сущность работы сооружения. Результаты, полученные ниже, подтверждают такое предположение.

Указанные сооружения зачастую являются континуально-дискретными системами, состоящими из участков с распределённой массой и сосредоточенных масс. Этой теме посвящены публикации [6–8].

Рассмотрим вертикальный однородный стержень (рис. 1) постоянного сечения, с участками длины l , из материала с модулем упругости E , с плотностью материала ρ , площадями поперечных сечений S_j , несущий на разных уровнях по высоте дискретные массы M_j и опирающийся на упругое основание с коэффициентом жёсткости c и фундамент массы M_0 . Динамические перемещения сечений описываются функцией $u(x, t)$. Статические перемещения, составляющие малую долю общих отклонений, здесь не рассматриваются.

Свободные колебания. Известно, что свободные продольные колебания стержней описываются дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа относительно перемещения сечения в продольном направлении $u(x, t)$,

$$\ddot{u} - a^2 u'' = 0, \quad a^2 = E / \rho, \quad x \in (0, l), \quad t > -\infty. \quad (1)$$

Точка над символом соответствует производной по времени, штрихи в верхнем индексе – дифференцированию по аргументу x . Расчётная схема даёт граничные условия, вытекающие из условий закрепления концов стержня

$$b_1 u'(0, t) - M_0 \ddot{u}(0, t) - cu(0, t) = 0, \quad b_j = ES_j. \quad (2)$$

$$b_r u'(l, t) + M_r \ddot{u}(l, t) = 0, \quad t > -\infty. \quad (3)$$

Здесь $1, j, r$ в нижних индексах – номера соответствующих участков. Ещё требуются дополнительные условия, обеспечивающие сопряжения участков стержня, разделённых сосредоточенными массами. Найдём их, составляя по принципу Даламбера уравнение движения данных масс (рис. 2)

$$N_+ - N_- - D_j = 0, \quad (4)$$

состоящее в том, что внутренние и инерционные силы должны быть уравновешены. N_+, N_- – продольные силы в верхнем и нижнем сечениях, D_j – даламберова сила инерции. Заменим силы в (4) их выражениями и запишем

$$b_{j+1} u'_+(x_j, t) - b_j u'_-(x_j, t) - M_j \ddot{u}(x_j, t) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r-1. \quad (5)$$

Начальные условия при свободных колебаниях не требуются, кинематические возмущения основания не учитываются $u_0(t) \equiv 0$.

Уравнения (1) – (3), (5) образуют математическую модель свободных колебаний. Решение задачи запишем с помощью метода разделения переменных как произведение

$$u(x,t) = X(x) e^{i\omega t}, \quad (6)$$

где $X(x)$, ω – собственная форма и частота колебаний. Подстановка (6) в (1) – (3), (5) даёт

$$\omega^2 X + a^2 X'' = 0, \quad x \in (0, l). \quad (7)$$

$$b_1 X'(0) + \omega^2 M_0 X(0) - c X(0) = 0, \quad b_r X'(l) - \omega^2 M_r X(l) = 0. \quad (8)$$

$$b_{j+1} X'_+ - b_j X'_- + \omega^2 M_j X = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r-1. \quad (9)$$

Краевая задача (7) – (9) далее решается с помощью метода конечных разностей [9]. Такой выбор обоснован тем, что алгоритмы и программы, получаемые при этом, легко адаптируются к колебаниям стержней переменного сечения, к вынужденным колебаниям от динамических и случайных нагрузок. С этой целью вместо непрерывной области определения переменной x введём дискретную область L_h в виде узлов равномерной сетки с шагом h , где n – количество узлов сетки. Значения функции и производных заменим приближёнными, хорошо известными конечно-разностными значениями в узлах сетки с точностью $O(h^2)$. Для уравнения (7) будут применяться центральные разностные производные во внутренних точках $i = 2, 3, \dots, n-1$, для концевых точек $i = 1, n$ – односторонние разностные производные. В точках с координатами сосредоточенных масс имеются разрывы первой производной функции $X(x)$ первого рода, т. е. она не является гладкой. Поэтому здесь следует применить односторонние производные для $X'(x)$. В результате получена система алгебраических уравнений в матрично-векторной форме

Пример 1. Пусть на рис. 1 представлен стержень из стандартной стальной трубы с длинами участков $l = 3$ м, при количестве участков $r = 4$, диаметром $D = 102$ мм и толщинами стенки $\delta = [3,2; 2,8; 2,2; 1,8]$ мм по убыванию вверх. Стержень опирается на фундамент с массой $M_0 = 10000$ кг и основание с коэффициентом жёсткости $c = 10^6$ Н/м. Дискретные массы даны вектором $M = [2000; 4000; 1000; 3000]$ кг.

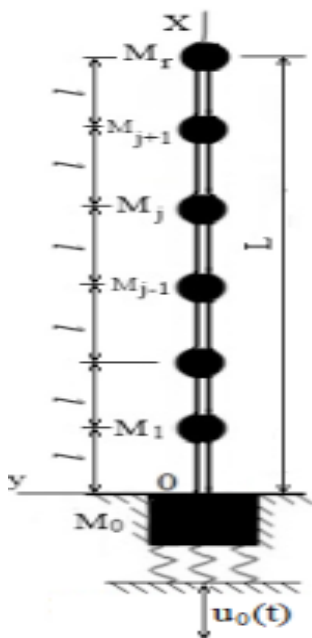


Рис. 1. Расчетная схема

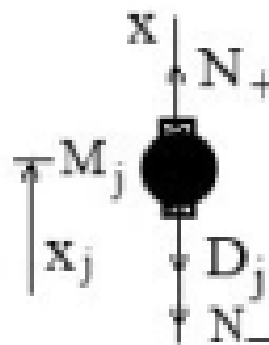


Рис. 2. Сопряжение участков

$$L_h = [x_i : x_i = (i-1)h, i = 1, 2, \dots, n], \quad h = L/(n-1), \quad (10)$$

$$B(\omega)X = 0.$$

Здесь B – квадратная матрица порядка n , $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ – транспонированный вектор, компонентами которого являются перемещения стержня в узлах сетки.

Система уравнений (10) имеет тривиальное решение, $X(x) \equiv 0$, что соответствует статической задаче и не представляет интереса. Ненулевые решения могут существовать, если определитель матрицы A равен нулю, т. е.

$$\det B(\omega) = 0. \quad (11)$$

Характеристическое уравнение (11) является алгебраическим уравнением относительно ω . Его корни образуют числовое множество мощности n . При определении элементов этого множества можно обойтись без составления этого уравнения, пользуясь возможностью построения высокоточного графика $\omega - \det B(\omega)$, например, в среде вычислительного комплекса Matlab. Абсциссы пересечения графиком оси ω определяют вектор собственных частот Ω .

Результаты, полученные в среде вычислительного комплекса Matlab, даны на рис. 3. Первые три собственных значения, прочитанные с экрана монитора, равны

$$\Omega = [9,9; 70,9; 132,7] \text{ c}^{-1}.$$

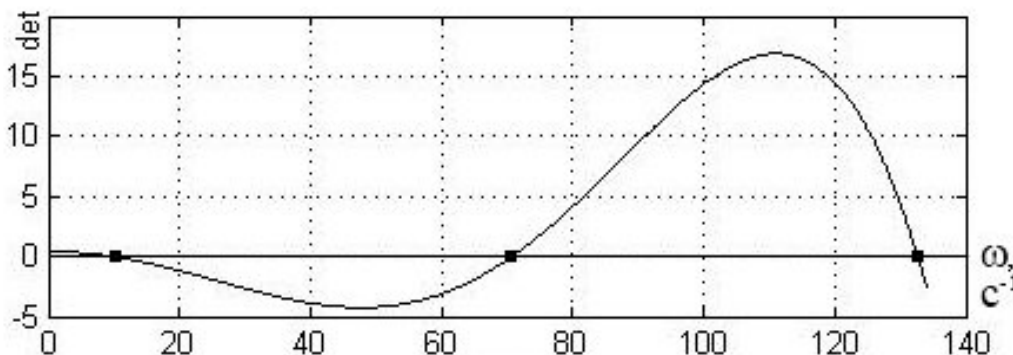


Рис. 3. Собственные значения

Сейсмические кинематические воздействия на основания строительных сооружений являются случайными процессами с непрерывным неравномерным спектром частот. Доминирующие частоты при этом находятся в области небольших значений: $0 \dots 30 \text{ c}^{-1}$. В данном случае первая собственная частота попадает в эту зону, что может привести к опасным резонансным колебаниям. Следовательно, необходимо принимать меры для отстройки собственных частот от доминирующих сейсмических частот. Это может быть выполнено различными способами: повышением жёсткости конструкции, уменьшением масс и т.д.

Вторая и третья частоты опасности для сейсмостойкости сооружения не создают, так как на этих частотах спектральная плотность случайного процесса возмущений очень мала.

Далее задача состоит в том, чтобы найти собственные векторы Y_k ($k = 1, 2, 3, \dots n$) матрицы B , представляющие собственные формы колебаний. Их можно определить хорошо известными методами линейной алгебры матриц. Заметим при этом, что определитель матрицы B равен нулю и поэтому собственные векторы могут быть вычислены лишь с точностью до множителя. В таком случае одну из ненулевых компонент вектора Y_k можно принять равной произвольному числу, например, единице. Тогда при подстановке единицы и исключения одного из элементов вектора Y_k уравнение (10) преобразуется к виду

$$D(\Omega_m)Y_m = d_m. \quad (12)$$

Здесь D – квадратная матрица порядка $n-1$, Y_m , d_m – мерные векторы, полученные при подстановке единицы в уравнение (10).

Теперь обычная ситуация состоит в том, что определитель матрицы D не равен нулю, Y_m вычисляется легко, к нему добавляется произвольно выбранная единичная компонента и образуется искомая собственная функция Y_k .

По данным примера, приведённого выше, с помощью такого алгоритма и системы (12) получены собственные формы колебаний, показанные на рис. 4.

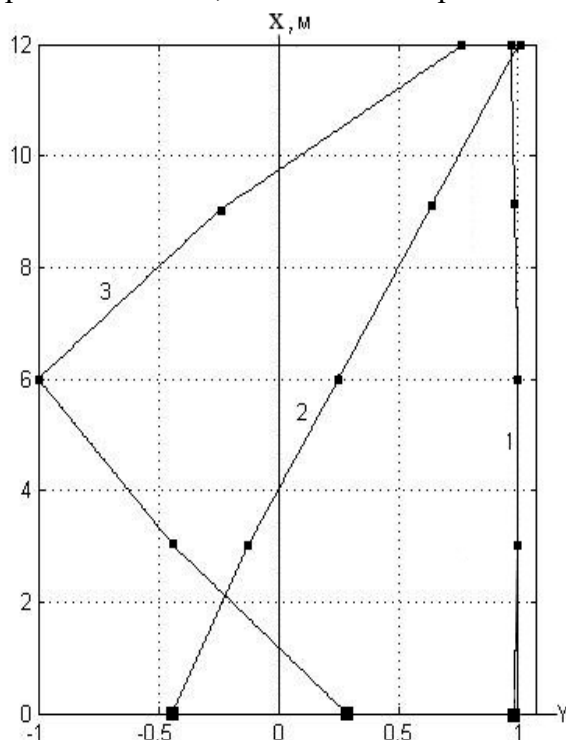


Рис. 4. Собственные функции

Анализ кривых показывает, что априорное предположение о негладкости собственных функций оправдано. Производная $X'(x)$ в местах сосредоточения дискретных масс имеет разрывы первого рода.

Видно, что континуальная часть сооружения незначительно влияет на свободные колебания, что объясняется её малой массой по сравнению с дискретными массами.

По графику первой формы колебаний видно, что перемещения всех сечений почти одинаковые. Следовательно, динамические деформации и напряжения при низких частотах возмущений будут незначительными.

Колебания по второй форме происходят таким образом, что нижняя и верхняя части движутся в противоположных направлениях с разграничительной точкой на высоте 4 метра. Аналогичные явления наблюдаются и в колебаниях по третьей форме, но уже с тремя зонами чередующихся фаз перемещений. Дискретная масса M_2 , значительно превосходящая остальные, доминирует в определении этой формы колебаний. Аналогичные явления имеются в колебаниях по третьей форме, но уже с тремя зонами перемещений. Заметно, что фундамент с большой массой M_0 оказывает существенное влияние на формы колебаний.

Дополнительное рассмотрение более высоких собственных значений и функций показал, что эти спектральные пары делятся на два множества. В первом множестве находятся пары, образованные дискретными массами, и их количество равно числу таких масс. Второе множество бесконечной, но счётной мощности соответствует колебаниям континуальной части сооружения. Такое чёткое разграничение имеет место в случаях, рассмотренных здесь, когда дискретные массы существенно превосходят массы континуальных участков. Заслуживает внимания изучение данного вопроса при свободных колебаниях механических систем смешанного характера, где распределённые и сосредоточенные массы сравнимы по величине.

толщинами стенки $\delta = [3,2; 2,8; 2,2; 1,8]$ мм по убыванию вверх. Стержень опирается на фундамент с массой $M_0 = 10000$ кг и основание с коэффициентом жёсткости $c = 10^6$ Н/м. Заданы вектор дискретных масс $M = [2000; 4000; 1000; 3000]$ кг и амплитуда гармонических кинематических возмущений $A_0 = 10$ см.

Для данного стержня выше получен начальный фрагмент спектра собственных частот $\omega = [9,9; 70,9; 132,7]$ с⁻¹. (26)

Результаты решения системы уравнений (25) представлены формами вынужденных гармонических колебаний $X(x)$ на рис. 5, построенными при значениях частот возмущений $\Omega = [5; 69; 132,5]$ с⁻¹.

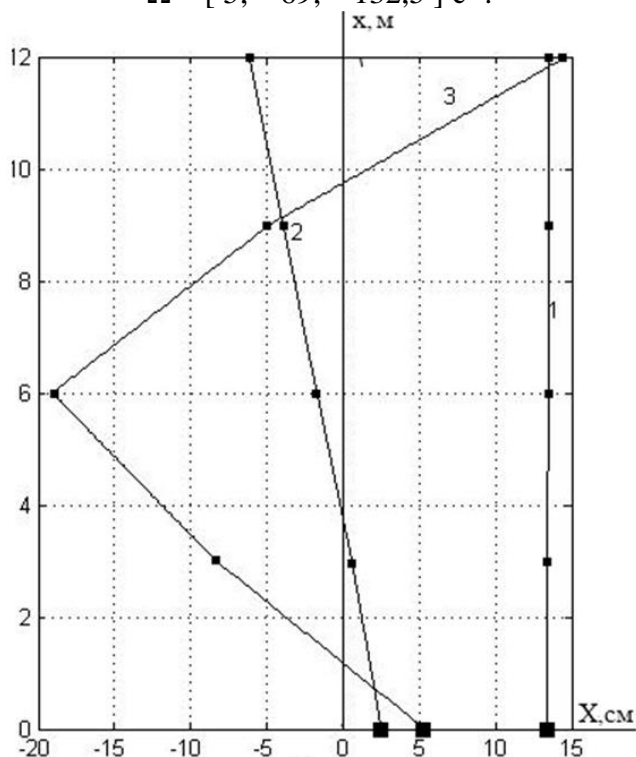


Рис. 5. Формы гармонических колебаний

Характер кривых существенно образом зависит от расположения Ω внутри спектра собственных частот (26). Из анализа кривых рис. 5 следует, что при частотах возмущений $\Omega < \omega_1$ (кривая 1) изогнутая ось стержня является почти прямой линией, отклонения стержня с сосредоточенными массами по всей длине синфазны. При частоте возмущений $\Omega > \omega_1$ движения концов стержня становятся встречными (кривая 2) т. е. находятся в противофазе. При приближении Ω к ω_3 форма кривой становится близкой к третьей форме свободных колебаний (кривая 3), показанной на рис. 4. Также заметно сильное влияние наиболее тяжёлых масс M_0 и M_2 .

Во всех случаях линии $X(x)$ по форме сходны с собственными функциями, изображёнными на рис. 4. При обсуждаемых частотах влияние континуальных участков почти незаметно. Как показали дополнительные расчёты, криволинейность в формах вынужденных колебаний появляется при больших частотах возмущений, неактуальных для сейсмических колебаний.

Случайные колебания. Пусть теперь кинематическое возмущение $u_0(t)$ будет стационарным случайным центрированным процессом. При установившемся режиме колебаний выходная функция $u(x, t)$ будет центрированным пространственно-временным

случайным полем, стационарным, центрированным во времени и неоднородным по пространственной координате. Найдём дисперсию перемещений $D_u(x)$ сечений стержня.

При вычислении дисперсий используем алгоритм и программу, разработанные для гармонических колебаний в п. III. Рассмотрим вопрос подробно. Известно, что непрерывный случайный центрированный стационарный процесс $u_0(t)$, данный выше, можно представлять в виде ряда Фурье [10]

$$u_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} (W_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t). \quad (27)$$

Здесь W_i и V_i – некоррелированные случайные величины. Несложные преобразования, учитывающие взаимосвязь между дисперсией и корреляционной функцией стационарного случайного процесса и некоррелированность коэффициентов ряда (27), дают

$$D[u_0(t)] = \sum_{i=1}^{\infty} D_i. \quad (28)$$

Этот результат показан графически на рис. 6 в виде так называемого дискретного линейчатого спектра дисперсий. Получается так, что имеется бинарное соотношение между дисперсиями и частотами, т. е. каждой дисперсии соответствует определённая частота. Нетрудно заметить, что предельный переход от дискретных значений ω_i к континууму ω приведёт к непрерывной функции спектральной плотности. При этом дисперсия случайного процесса входного процесса $u_0(t)$ представляется несобственным интегралом

$$D_0 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega. \quad (29)$$

Теперь каждой дискретной частоте ставится в соответствие элементарная дисперсия $S(\omega)d\omega$, заштрихованная на рис. 7).

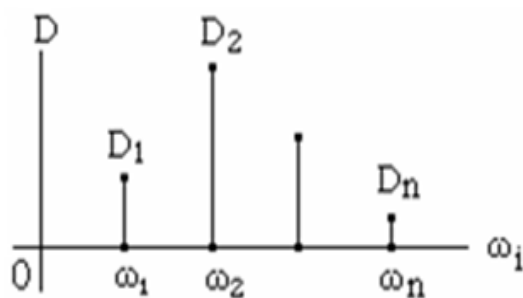


Рис. 6. Дискретный спектр

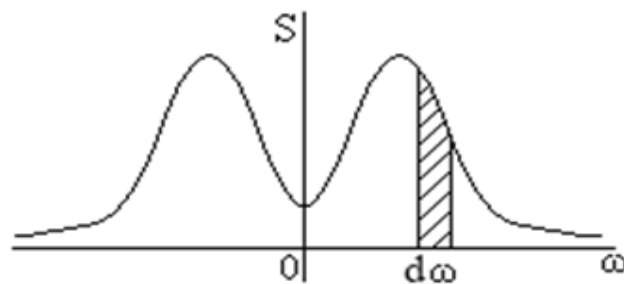


Рис. 7. Спектральная плотность

Если элементарную дисперсию взять взамен амплитуды входного гармонического процесса A_0 (п. III), то на выходе задачи будет получена элементарная дисперсия отклонений $dD_u(\omega_k, x)$. Последующее суммирование по ω_k даёт дисперсию отклонений $D_u(x)$.

Учтём, что дисперсия входных возмущений распределена на частотой оси ω по рис. 7 и поставим сплошной спектральной плотности в соответствие дискретную, вычисляемую на бесконечном счётном множестве положительных частот

$$S = \{S_1, S_2, S_3, \dots\}, \quad S_i = S(\omega_i), \quad \omega_i > 0.$$

Всю дисперсию входного процесса представим в виде суммы элементарных дисперсий гармоник, составляющих случайный процесс

$$D_0 \approx 2h_{\omega} \sum_k S_k. \quad (30)$$

Здесь h_ω – малый шаг разбивки частотной оси, множитель 2 учитывает левую отрицательную полуось частот.

Далее вычисления проводятся, как в примере 2, а именно вместо A_0 в алгоритм и программу вставляется элементарная дисперсия возмущений $h_\omega S_k$. Результаты суммируются как дисперсия выходного процесса перемещений

$$D_u(x_i) = \sum_k D_k.$$

Пример 3. Используются данные примеров, приведённых выше.

В качестве входных кинематических сейсмических воздействий возьмём случайный процесс со скрытой периодичностью (характерной частотой). Его спектральная плотность имеет вид

$$S(\omega) = \frac{2\alpha\theta^2\sigma^2}{\pi[(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2]}; \quad \theta^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Здесь α – параметр широкополосности, β – характерная частота, σ – среднеквадратическое отклонение. Выясним зависимость дисперсии перемещений $D_u(x)$ случайных колебаний от характерной частоты возмущений β . При этом коэффициент широкополосности α возьмём сравнительно небольшим. Тогда случайные возмущения являются узкополосными и близкими к гармоническим. Как следствие, случайные колебания стержня также должны быть близкими к гармоническим колебаниям, рассмотренным выше. С этой целью при прежних параметрах, дополненных параметрами широкополосности и среднеквадратического отклонения

$$\alpha = 0,1 \text{ с}^{-1}; \quad \sigma = 10 \text{ см},$$

проведены вычисления при возрастающих значениях характерной частоты β , совпадающих с частотами детерминированных возмущений Ω_k в примере 2, приведённом выше.

$$\beta = [5; 69; 132,5] \text{ с}^{-1}.$$

В целях удобства сравнения с амплитудами гармонических колебаний вычисленные дисперсии заменены среднеквадратическими отклонениями $\sigma_u(x)$ и представлены графиками рис. 8. С учётом, что среднеквадратические отклонения случайного процесса могут принимать лишь положительные значения, можно утверждать, что кривые линии идентичны в качественном и количественном отношениях с соответствующими графиками амплитуд на рис. 5. Причина состоит в том, что при малых значениях параметра широкополосности, как в данном случае ($\alpha \ll \beta$), возмущающий процесс близок к гармоническому. Как следствие, все выводы, сделанные по рис. 5 для гармонических колебаний, остаются в силе, но в терминах характерной частоты и среднеквадратических отклонений. Предположение о тесной связи между детерминистическими и стохастическими колебаниями, таким образом, подтверждается.

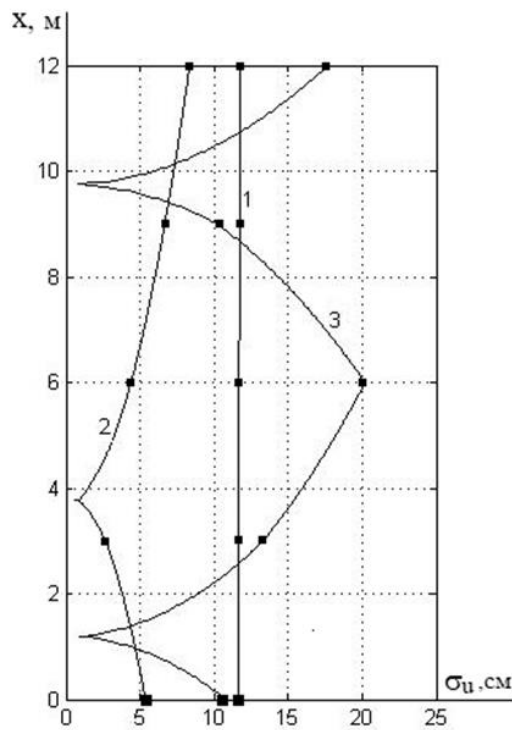


Рис. 8. Среднеквадратическое отклонения

Выводы

1. В эпицентральной зоне землетрясений продольные колебания, вызванные сейсмическими возмущениями, представляют серьезную опасность для прочности и устойчивости вертикальных стержней.

2. Спектральные пары собственных значений и функций свободных колебаний делятся на два множества. В первом множестве находятся пары, образованные дискретными массами, и их количество равно числу таких масс. Второе множество бесконечной, но счётной мощности соответствует колебаниям континуальной части сооружения.

3. Предварительное рассмотрение краевой задачи о вынужденных гармонических колебаниях существенно упрощает решение сложных сейсмических стохастических краевых задач.

4. Численный метод конечных разностей позволяет создавать универсальные алгоритмы и компьютерные программы, легко адаптирующиеся к разнообразным сложным задачам о колебаниях вертикальных стержней: о свободных, вынужденных колебаниях, о колебаниях стержней переменного сечения, о сочетаниях поперечных и продольных колебаний и т. д.

5. Разработан и реализован простой эффективный метод определения дисперсии – наиболее важного параметра случайных колебаний.

Библиографический список

1. Назаров Ю.П. Аналитические основы расчёта сооружений на сейсмические воздействия. – М.: Наука, 2010. – 468 с.
2. Культербаев Х.П., Абдул Салам И.М. Продольные свободные колебания стержня с дискретными массами // Проблемы механики и управления: материалы Междунар. конф.; под ред. И.Г. Горячева. – М. Издательство Московского университета, 2018. – С. 2007-2010.

3. Назаров Ю.П. Расчётные параметры волновых полей сейсмических движений грунта. – М.: Наука, 2015. – 374 с.
4. Хачиян Э.Я. Спитакское землетрясение 7 декабря 1988 года: основные сейсмологические характеристики и анализ его разрушительных последствий (к тридцатилетию землетрясения) // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2018. – № 4. – С. 9-30.
5. Longitudinal seismic vibration of continuous system / Z. Yong-Jun, H. Shuan-Hai, S. Yi-Fan, Z. Xiao-Xing // Journal of Chang'an University (natural science edition). – 2008. – Vol. 2 (28). – P. 49-52.
6. Культербаев Х.П. Кинематически возбуждаемые колебания непрерывно-дискретной многопролётной балки // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4 (2). – С. 198-200.
7. Мкртычев О.В., Решетов А.А. Сейсмические нагрузки при расчёте зданий и сооружений. – М.: Издательство АСВ, 2017. – 140 с.
8. Амосов А.А., Синицын С.Б. Основы теории сейсмостойкости сооружений: учеб. пособие. – М.: Издательство АСВ, 2010. – 136 с.
9. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высш. шк., 2002. – 840 с.
10. Хрущёва И.В. Основы математической статистики и теории случайных процессов: учеб. пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2009. – 336 с.

References

1. Nazarov Yu.P. Analytical basis for calculating structures for seismic impacts. M.: Science, 2010. 468 p.
2. Kulterbaev Kh.P., Abdul Salam I.M. Longitudinal free vibrations of a rod with discrete masses. Problems of Mechanics and Control: Materials of the International. Conf.; Edited by I.G. Goryacheva. Moscow University Publishing House, 2018. Pp. 2007-2010.
3. Nazarov Yu.P. Calculated parameters of wave fields of seismic ground motions. M.: Science, 2015. 374 p.
4. Khachiyani E.Ya. Spitak earthquake of December 7, 1988: main seismological characteristics and analysis of its destructive consequences (on the thirtieth anniversary of the earthquake). Seismic Construction. Safety of Structures. No. 4. 2018. Pp. 9-30.
5. Yong-Jun Z., Shuan-Hai H., Yi-Fan S., Xiao-Xing Z. Longitudinal seismic vibration of continuous system. Journal of Chang'an University (Natural Science Edition). Vol. 2(28). 2008. Pp. 49-52.
6. Kulterbaev Kh.P. Kinematically excited vibrations of a continuous-discrete multi-span beam. Bulletin of the Nizhny Novgorod University named after N.I. Lobachevsky. No. 4(2). 2011. Pp. 198-200.
7. Mkrtychev O.V., Reshetov A.A. Seismic loads in the calculation of buildings and structures. M.: ASV Publishing House, 2017. 140 p.
8. Amosov A.A., Sinitsyn S.B. Fundamentals of the theory of seismic resistance of structures: textbook. M.: ASV Publishing House, 2010. 136 p.
9. Verzhbitsky V.M. Fundamentals of numerical methods. M.: High School, 2002. 840 p.
10. Khrushcheva I.V. Fundamentals of mathematical statistics and the theory of random processes: textbook. St. Petersburg: Lan Publishing House, 2009. 336 p.

LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A VERTICAL CONTINUOUS DISCRETE ROD UNDER SEISMIC DISTURBANCES

Kh. P. Kulterbaev¹, L. A. Baragunova², M. M. Paizulaev³

North Caucasus Federal University¹
Russia, Stavropol

Kabardino-Balkarian State University named after Kh. M. Berbekov²
Russia, Nalchik

Dagestan State Technical University³
Russia, Makhachkala

¹Dr. of Tech. Sciences, Leading Researcher, Tel.: +7(903)4943338, e-mail: kulthp@mail.ru

²Assistant Professor of the Department of Building Structures and Mechanics, Tel.: +7(928)0756299, e-mail: baragunova@mail.ru

³PhD of Tech. Sciences, Head of the Department of Strength of Materials, Theoretical and Structural Mechanics, Tel.: +7(960)4217275, e-mail: smdstu@mail.ru

The article examines free, kinematically excited harmonic and random vibrations of a vertical continuous-discrete rod under seismic disturbances. In the epicentral zone of earthquakes, the vertical component dominates over other vibration components. The spectra of natural frequencies and natural vibration modes have been determined. A method for determining dispersion, the most important parameter of random oscillations, has been proposed and implemented. The numerical finite difference method was used, the results were obtained in the Matlab computer environment. Three specific calculation examples have been considered. The study of longitudinal vibrations is relevant. Longitudinal vibrations of vertical rod structures haven't been fully studied. Understanding the deterministic representation of seismic action and the response from it allows us to understand better the essence of the operation of a structure. Structures are often continuous-discrete systems, consisting of areas with distributed mass and concentrated masses. Free longitudinal vibrations of the rods are described by a partial differential equation of hyperbolic type. Initial conditions for free vibrations are not required; kinematic disturbances of the base are not taken into account. The boundary value problem is solved using the finite difference method. Algorithms and programs easily adapt to vibrations of bars of variable cross-section, to forced vibrations from dynamic and random loads. The values of the function and derivatives are replaced by approximate well-known finite-difference values at the grid nodes. Seismic and man-made disturbances that are stochastic in nature can be described for preliminary calculations in the form of a harmonic process.

Keywords: problems of the theory of seismic stability, transverse bending vibrations, vertical continuous-discrete rod, horizontal earthquake impacts on buildings and structures, longitudinal vibrations, random processes, seismic disturbances, discrete masses, spectral density, eigenvalues, eigenfunctions, finite difference method, Matlab computing complex, method of separation of variables, eigenform, vibration frequency, system of equations, study of longitudinal vibrations, foundations and foundations, man-made impacts on foundations and foundations.

РАСЧЕТ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ СОСТАВНОЙ ФЕРМЫ

Е. В. Комерзан¹, И. Г. Ниналалов², О. В. Свириденко³

Национальный исследовательский университет «МЭИ»^{1,2,3}
Россия, г. Москва

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

² Аспирант, тел.: +7(985)906-36-23, e-mail: ninalalovig@mpei.ru

³Канд. техн. наук, доцент кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: SviridenkoOV@mpei.ru

Дан вывод формулы зависимости частоты колебаний статически определимой фермы в предположении, что масса конструкции равномерно распределена по ее узлам. Ферма составлена из двух шарнирно соединенных ферм и имеет две неподвижные шарнирные опоры. Жесткость фермы определяется по формуле Максвелла–Мора. Для нахождения усилий в стержнях используется метод вырезания узлов, реализуемый в системе компьютерной математики Maple. Наименьшая собственная частота рассчитывается по методу Донкерлея. Серия решений для ферм с различным числом панелей обобщается на произвольное число панелей методом индукции. Решение сравнивается с первой частотой всего спектра собственных частот фермы, найденной методом конечных элементов в системе SolidWorks Simulation. Показывается высокая точность полученной оценки частоты.

Ключевые слова: число панелей, составная плоская ферма, индукция, Maple, собственная частота, метод Донкерлея, МКЭ, SolidWorks Simulation.

Введение. При расчете собственных частот крупномасштабных регулярных стержневых конструкций, используемых как в строительстве (ангары, перекрытия, мосты) так и в машиностроении и робототехнике (манипуляторы, подъемные механизмы), широко используется метод конечных элементов [1]. Для контроля численных решений, имеющих естественную погрешность для большого числа ее элементов (панелей, стержней), используются аналитические решения, реализуемые в виде конечных формул, зависящих от числа элементов периодичности регулярных конструкций [2, 3]. Справочник [4] содержит схемы различных конструкций плоских регулярных ферм и формулы для вычисления прогибов в случае действия распределенных узловых или сосредоточенных нагрузок. Для пространственных ферм с произвольным числом панелей решения редки. В [5] найдено аналитическое решение задачи о прогибе купола шестигранной формы и формула для оценки основной частоты собственных колебаний снизу. Аналитическое решение для статических деформаций стержневой конструкции составной пространственной рамы получено в [6]. Расчет прогиба пространственного покрытия с периодической структурой произведен в [7]. Прогиб внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей в аналитическом виде найден с использованием системы Maple в [8]. Задача о первой собственной частоте консольной фермы решена в аналитической форме в [9]. Формула для расчета прогиба плоской рамы с произвольным числом панелей выведена методом индукции в [10]. Первая собственная частота плоской регулярной фермы в зависимости от числа панелей выведена в аналитической форме в [11]. Общие вопросы существования и анализа периодических статически определимых стержневых конструкций

рассмотрены в [12-14]. В [15] рассчитана первая частота колебаний пространственного шестигранного купола и проанализирован спектр всех собственных частот.

В настоящей работе задача о первой собственной частоте фермы решается методом Донкерлея аналитически и методом конечных элементов. Оценивается погрешность приближенного аналитического решения.

Конструкция фермы. Ферма состоит из двух шарнирно соединенных частей (рис. 1). Опорные стержни моделируют цилиндрические шарниры. Число узлов в конструкции фермы с $2n$ панелями равно $K = 4n + 3$. Высота фермы b . Конструкция состоит из $\eta = 8n + 6$ стержней. Масса фермы концентрируется в ее узлах. Число степеней свободы системы масс при вертикальном их движении равно K . Стержни предполагаются упругими одинакового сечения.

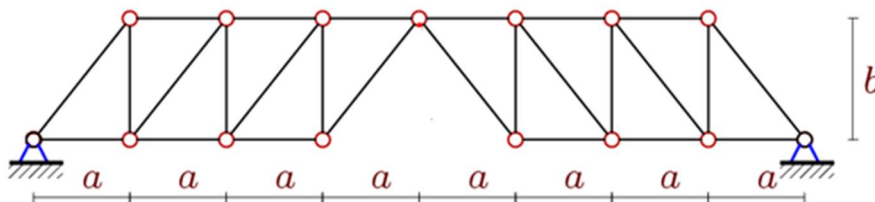


Рис. 1. Схема фермы, $n=3$

Расчет частоты выполняется в системе символьных вычислений Maple по программе [16]. В программу вводятся координаты узлов верхнего и нижнего пояса (рис. 2):

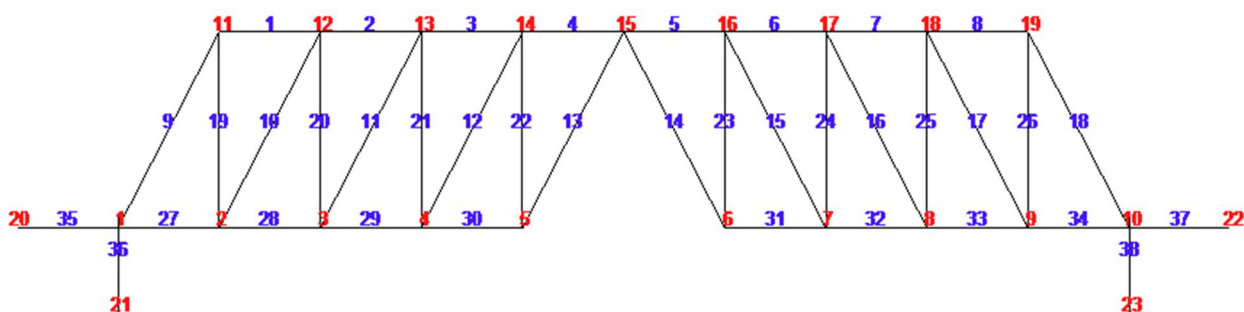


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы, $n=4$

Структура соединения стержней в узлах организуется специальными списками номеров концов соответствующих стержней [5-11]. Например, стержни нижнего пояса левой части фермы кодируются списками: $\Phi_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, n + 1$. Система уравнений равновесия узлов составляется в матричном виде $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$. Здесь \mathbf{G} — матрица системы, состоящая из направляющих косинусов усилий в стержнях, \mathbf{S} — вектор неизвестных усилий и реакций опор.

Для оценки первой частоты колебаний по Донкерлею известна формула [7, 9, 11]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где ω_p — парциальная частота, рассчитанные для массы в узле с номером p . Уравнение колебаний массы m имеет вид:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент жесткости D_p рассчитывается по формуле Максвелла – Мора, как величина обратная к коэффициенту податливости:

$$\delta_p = 1/D_p = \sum_{i=1}^{\eta} (S_i)^2 l_i / (EF). \quad (3)$$

Здесь введены обозначения: S_i — усилие в стержне i от действия вертикальной единичной силы, приложенной к узлу p , EF — продольная жесткость стержня. Формула для первой частоты колебаний по Донкерлею имеет вид: $\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n$. Последовательное вычисление величины Δ_n (фактически, прогиба) для ферм различного порядка n дает последовательность формул:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (8a^3 + 4c^3 + 7b^3) / (b^2 EF), \\ \Delta_2 &= (719a^3 + 183c^3 + 255b^3) / (18b^2 EF), \\ \Delta_3 &= (127a^3 + 19c^3 + 24b^3) / (b^2 EF), \\ \Delta_4 &= (3129a^3 + 305c^3 + 365b^3) / (10b^2 EF), \\ \Delta_5 &= (5890a^3 + 402c^3 + 465b^3) / (9b^2 EF), \dots \end{aligned}$$

Здесь обозначена длина раскоса: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. В общем случае коэффициент имеет вид: $\Delta_n = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b^3) / (EFb^2)$.

$$\begin{aligned} C_1 &= (49n^4 + 166n^3 + 259n^2 + 201n + 45) / 90, \\ C_2 &= (8n^2 + 13n + 3) / 6, \\ C_3 &= (8n^2 + 19n + 15) / 6. \end{aligned} \quad (4)$$

Таким образом, для расчета первой частоты колебаний фермы формула будет иметь вид

$$\omega_D = b \sqrt{\frac{EF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 b^3)}}, \quad (5)$$

где коэффициенты C_1, C_2, C_3 вычисляются по формулам (4).

Пример. Численное решение. Полученное приближенное аналитическое решение можно сравнить с численным, найденным также в системе Maple, но без предположений Донкерлея. Первая частота всего спектра получается по значению собственного числа матрицы жесткости, вычисленному оператором *Eigenvalues* системы Maple из пакета *LinearAlgebra*. Примем размеры: $a = b = 1$ м, модуль упругости стали $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, массы в узлах $m = 50$ кг, площадь поперечных сечений стержней $F = 1$ см². На рис. 3 отображены кривые зависимости частоты ω_D , рассчитанной по Донкерлею, и первая частота спектра ω_1 , полученная численно. Первая собственная частота закономерно уменьшается при увеличении числа панелей. При этом аналитическое решение, оставаясь нижней границей численного, быстро с ним сближается. Более точно можно проследить изменение погрешности, введя относительную величину

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1.$$

На рис. 4 показана зависимость погрешности аналитического расчета основной частоты от числа панелей, вычисленная для разных значений высоты фермы.

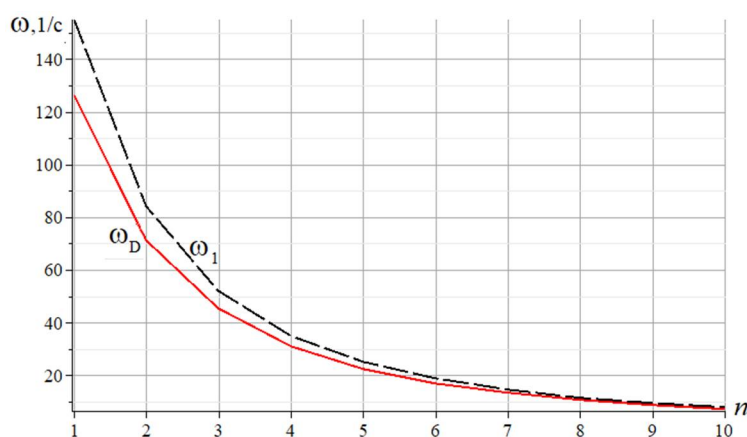


Рис. 3. Зависимость собственной частоты от числа панелей

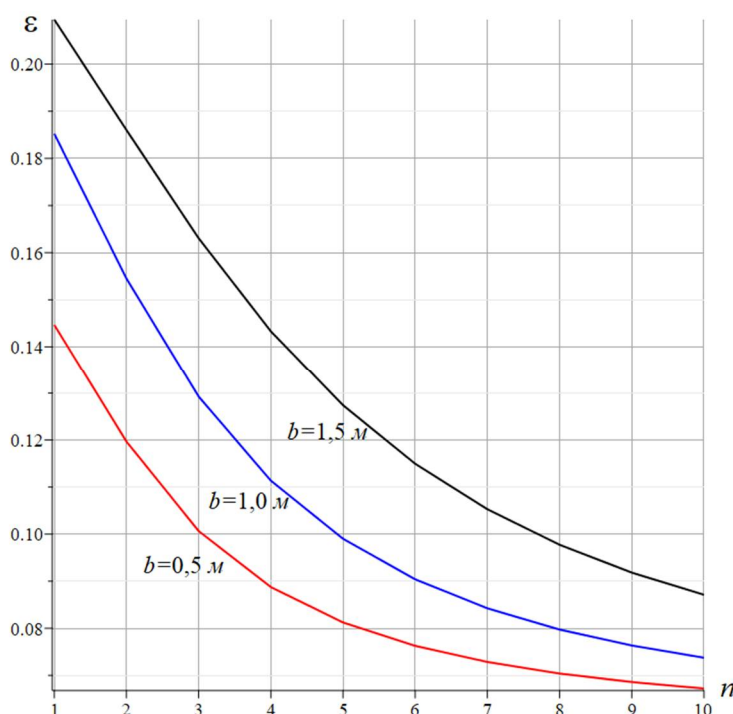


Рис. 4. Зависимость погрешности аналитического решения от числа панелей

Величина погрешности вполне позволяет применять выведенную формулу на практике для расчета частоты собственных колебаний фермы как на этапе ее проектирования при выборе оптимального числа панелей, так и на этапе проверки численных расчетов, например, методом конечных элементов.

Расчет частоты колебаний методом конечных элементов (МКЭ). На рис. 5 показана зависимость основной частоты от длины панели a для различных значений высоты в сравнении с решением, полученным методом конечных элементов в программном комплексе моделирования SolidWorks 2023 [17].

В системе SolidWorks сначала создается 3D модель плоской фермы (рис. 6.) по эскизу в соответствии с размерами фермы, и выполняется операция “Основание по траектории” с указанием диаметра стержней фермы. Суммарная масса узлов распределялась равномерно по стержням фермы.

Ферма разбивается на 19053 элемента и 33618 узлов. Размеры элементов от 1,36546 мм до 4,09641 мм. Рассматривались различные варианты сетки конечных элементов. Материал стержней — легированная сталь с ручной настройкой параметров (с заданными коэффициентами). Время численных вычислений в системе SOLIDWORKS Simulation для модели с габаритными размерами 2,4 м было значительно больше, чем при аналитическом решении в Maple. Увеличение числа панелей в 2 и более раз существенно увеличивает число КЭ и время численного решения, что требует значительно большей мощности и производительности компьютера. Увеличение числа панелей фермы до 50 и более для обычного компьютера может приводить к неспособности решать задачу численно в SOLIDWORKS Simulation из-за недостаточной производительности. Система может выдавать такую ошибку – сообщение: «недостаточно оперативной памяти», и расчет останавливается на начальном этапе решения.

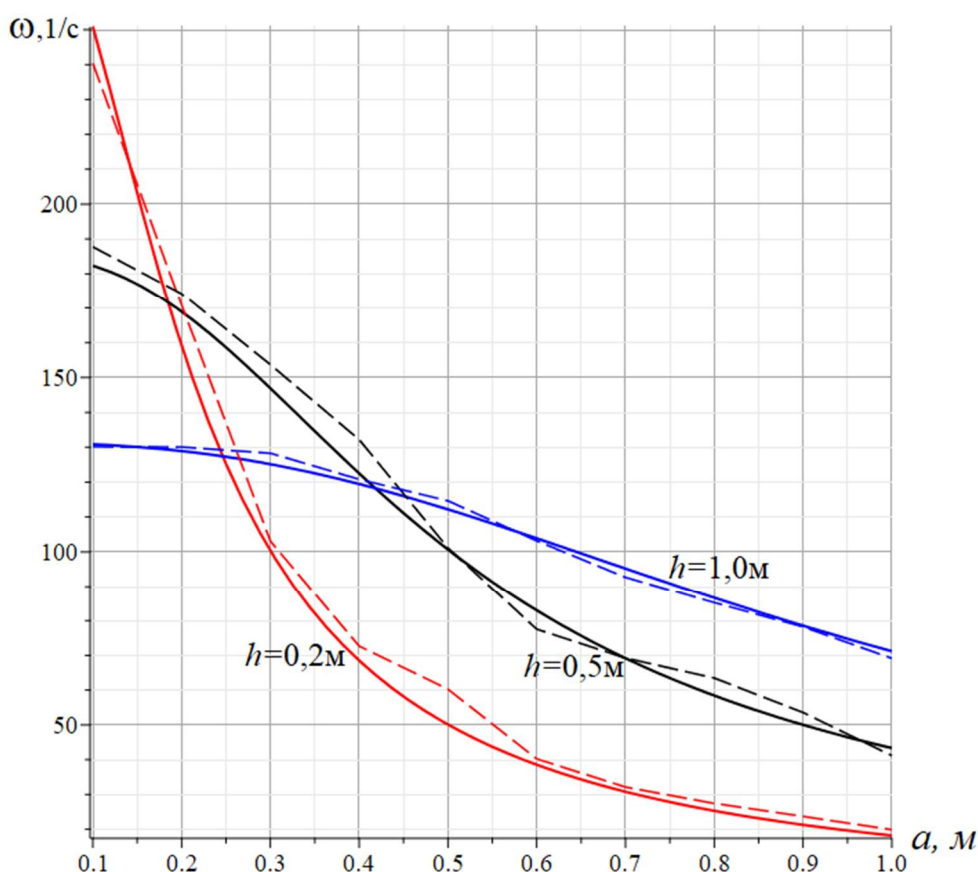


Рис. 5. Сравнение аналитического решения и решения МКЭ

Аналогичные численные расчеты можно проводить и в программе КОМПАС-3D [18] в приложении АРМ FEM. АРМ FEM — система прочностного анализа, предназначенная для работы в интерфейсе российской САD-системы КОМПАС-3D. Преимуществом системы КОМПАС-3D является возможность применения параметризации элементов ферм и компоновочной геометрии. Эти функции позволяют быстро перестраивать типовые сборки ферм, изменяя автоматически для массива элементов геометрические размеры, число панелей, сечение профилей, что значительно облегчает подготовку 3D модели к численному расчету, разбиению ее на конечные элементы и дальнейший расчет собственных частот. В системе АРМ FEM возможны варианты задания с 4 и 10 узловыми тетраэдрами и предусмотрена возможность задания фактически любых значений длин сторон конечных элементов. При выполнении расчетов в АРМ FEM увеличение числа КЭ фактически кратно

снижает скорость выполнения численных расчётов, а при значительном (в десятки раз) увеличении числа панелей фермы снижает скорость расчетов в геометрической прогрессии.

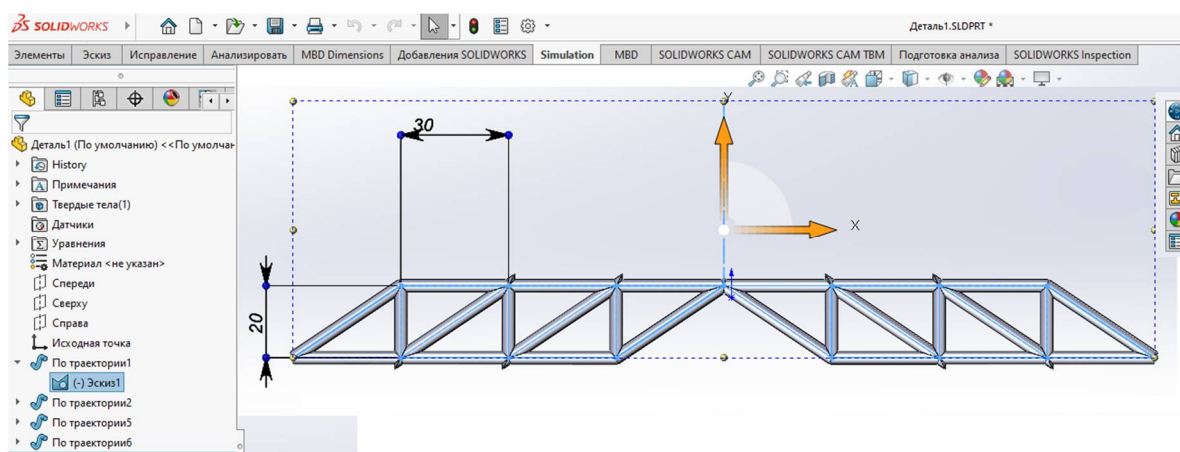


Рис. 6. 3D модель фермы в среде САПР SolidWorks 2023

Результаты численного расчета (рис. 5, пунктиры) показывают хорошее совпадение с аналитическим решением. За исключением небольших флуктуаций кривые хорошо ложатся на теоретические результаты. Изломы на кривых по МКЭ можно объяснить неточностью аппроксимации стержневой модели стандартными элементами системы SolidWorks.

Заключение. Рассмотрена схема статически определимой плоской фермы, состоящей из двух шарнирно соединенных частей. Методом индукции выведена формула для первой частоты собственных колебаний в зависимости от числа панелей. Показано хорошее совпадение результат с численным решением, полученным без каких-либо предположений о форме решения. Для сравнения выполнен расчет с использованием МКЭ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
2. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
3. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
4. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 с.
5. Кирсанов М.Н. Модель и аналитический расчет фермы пространственного шестигранного купола // Строительная механика и конструкции. 2022. №1(32). С.39-47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
6. Комерзан Е. В., Свириденко О.В. Статические деформации фермы составной пространственной рамы. Аналитические решения // Строительная механика и конструкции. 2022. №4(35). С. 40-48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
7. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 8. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
8. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне

- статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2021. №2 (29). С. 29-37.
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
 10. Иваницкий А.Д. Формулы для расчета деформаций плоской рамы // *Строительная механика и конструкции*. 2022. №3(34). С.90-98.
 11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005; 9(85): 607–617.
 13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4): 756–782.
 14. Zok F.W., Lattice R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016; 96: 184–203.
 15. Kirsanov M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum // *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.1
 16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuks, D.O. Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels // *Vestnik MGSU*, 2020. 4, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
 17. Алямовский А. А. SolidWorks 2007/2008. Компьютерное моделирование в инженерной практике. БХВ-Петербург, 2008.1040 с.
 18. Герасимов А. А. Самоучитель Компас 3D. БХВ-Петербург, 2022. V. 20. 656 с.

References

1. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
2. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a multi-lattice truss. *Structural mechanics and calculation of structures*. 2014. No. 6 (257). Pp. 2–6.
3. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial rod system. *Structural mechanics of engineering structures and structures*. 2012. No. 1. P. 49-53.
4. Kirsanov M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020. 178 с.
5. Kirsanov M.N. Model and analytical calculation of the truss of a spatial hexagonal dome. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 1(32). Pp.39–47. doi 10.36622/VSTU.2022.32.1.003
6. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Static deformations of the truss of a composite spatial frame. Analytical solutions. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 4(35). Pp. 40–48. doi 10.36622/VSTU.2022.35.4.005.
7. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 8. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
8. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2021. No. 2 (29). Pp. 29–37.
9. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*.

2022. 101 Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1
10. Ivanitsky A.D. Formulas for calculating deformations of a flat frame. *Structural mechanics and structures*. 2022. No. 3(34). Pp.90–98.
 11. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14
 12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005; 9(85): 607–617.
 13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4): 756–782.
 14. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. 96. 184–203.
 15. Kirsanov, M. Model of a hexagonal prismatic truss. Oscillation frequency spectrum. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 106. Article No 10601. doi: 10.4123/CUBS.106.1
 16. Buka-Vaivade, K., Kirsanov, M.N. and Serdjuk, D.O. Calculation of Deformations of a Cantilever-Frame Planar Truss Model with an Arbitrary Number of Panels. *Vestnik MGSU*, 2020.4, 510–517. <https://doi.org/10.22227/1997-0935.2020.4.510-517>.
 17. Alyamovsky A. A. *SolidWorks 2007/2008. Computer modeling in engineering practice*. BHV-Petersburg, 2008. 1040 p.
 18. Gerasimov A. A. *Self-instruction manual Compass 3D*. BHV-Petersburg, 2022. V. 20. 656 p.

CALCULATION OF A PLANAR MODEL COMPOSITE TRUSS FUNDAMENTAL FREQUENCY

E. V. Komerzan¹, I. G. Ninalalov², O. V. Sviridenko³

National Research University «MPEI»^{1,2,3}
Moscow, Russia

¹PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: KomerzanYV@mpei.ru

²Postgraduate student of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(985)906-36-23; e-mail: ninalalovig@mpei.ru

³PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, Tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: SviridenkoOV@mpei.ru

A derivation of the formula for the dependence of the vibration frequency of a statically determinate truss is given under the assumption that the mass of the structure is uniformly distributed over its nodes. The truss is made up of two hinged trusses and has two fixed hinged supports. The stiffness of the truss is determined by the Maxwell – Mohr formula. To find the forces in the rods, the method of cutting nodes is used, implemented in the Maple computer mathematics system. The lowest natural frequency is calculated using the Dunkerley method. A series of solutions for trusses with different numbers of panels is generalized to an arbitrary number of panels by induction. The solution is compared with the first frequency of the entire spectrum of natural frequencies of the truss, found by the finite element method in the Solid Works Simulation system. The high accuracy of the obtained frequency estimate is shown.

Key words: number of panels, composite planar truss, induction, Maple, natural frequency, Dunkerley method, FEM, Solid Works Simulation.

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ПОИСК ВАРИАНТОВ ГЕОМЕТРИИ ПЛАСТИНЧАТО-СТЕРЖНЕВОЙ КОНСТРУКЦИИ С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ НАПРАВЛЯЮЩИМИ ИЗ УСЛОВИЯ ЖЕСТКОСТИ ПЛАСТИН

А. А. Черняев

Орловский государственный университет имени И. С. Тургенева
Россия, г. Орел

Канд. техн. наук, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства,
тел.: +7(4862)73-43-95, e-mail: Chernyev87@yandex.ru

В работе рассматривается задача автоматизированного поиска возможных вариантов геометрии пластинчато-стержневой конструкции с двумя параллельными опорными направляющими из условия жесткости пластин на поперечный изгиб. Для ее решения предлагается использование разработанной на языке Delphi авторской программы для ЭВМ. Заложенный алгоритм вычислений опирается на полученные ранее с использованием методов и приемов геометрического моделирования формы плоской области аналитические результаты, разработанные А. В. Коробко для решения двумерных задач теории упругости и строительной механики. Программа позволяет осуществлять автоматизированный поиск геометрических параметров различных форм пластин: прямоугольных, треугольных, ромбовидных, параллелограммных, трапециевидных и др. в составе пластинчато-стержневой конструкции на заданное значение прогиба в общем либо относительном виде при их поперечном изгибе равномерно распределенной по всей площади нагрузкой. Показаны порядок операций и пример вычислений в программе. Дана оценка точности их результатов путем сравнения с результатами, полученными численно в программе конечно-элементного анализа SCAD.

Ключевые слова: пластинчато-стержневая конструкция, вариантное проектирование, геометрические параметры, прогиб, поперечный изгиб, автоматизированный поиск.

Введение. При проектировании пластинчато-стержневых конструкций на начальном этапе расчетов стоит задача определения наиболее рациональных или оптимальных геометрических параметров как контура конструкции в целом, если не заданы ее границы, так и ее возможных вариантов конфигурации соединения элементов внутри. И одним из необходимых условий, учитываемых при проектировании, является условие жесткости, причем как всей конструкции в целом, так и отдельных ее элементов.

Для решения подобного рода задач могут быть применены различные методы. Так, в задачах оптимизации в проектировании конструкций различных видов могут быть использованы численные методы [1], которые нашли самое широкое применение в настоящее время. Однако, по мнению авторов, занимающихся подобными задачами, например [2], прямое заимствование из математики универсальных численных методов оптимизации, которые в ряде работ называют «поисковыми методами оптимизации», приводит к проблеме повышения размерности задач и значительному росту выполняемых вычислений при увеличении числа проектных переменных.

Из математических работ по методам оптимизации для целей проектирования и конструирования различных конструкций можно отметить методы нелинейного математического программирования [3]. Однако их использование требует четкой формализации при постановке оптимизационной задачи.

В целом, набор методов, которые могут быть использованы в проектировании конструкций, очень широк. От относительно универсальных, таких как отмеченное выше нелинейное программирование и генетические алгоритмы [4], до проблемно-ориентированных. Каждые из них имеют свои достоинства и недостатки, а также средства для настройки. И от правильного их использования может сильно зависеть скорость работы методов и правильность результатов.

Также в научных публикациях можно встретить и отдельные авторские разработки, реализованные в различных средствах программирования.

Методы исследования. В предыдущих работах [5, 6] и др. для целей математического описания геометрии плоской односвязной двумерной области контура пластины были применены параметры, известные из теории конформных отображений в виде конформных радиусов, которые еще называют внутренние \dot{r} и внешние \bar{r} радиусы плоской области [7]. И была рассмотрена задача поперечного изгиба, в которой из дифференциального уравнения была выведена физико-математическая взаимосвязь максимального прогиба w_0 при поперечном изгибе пластины с конформными радиусами, а точнее их отношением \dot{r}/\bar{r} как безразмерной величиной, которая численно характеризует геометрическую форму пластины [5, 6]:

$$w_0 = k_w \frac{\dot{r}}{\bar{r}} \cdot \frac{qA^2}{D}, \quad (1)$$

где k_w – числовое значение прогиба в общем безразмерном виде; q – интенсивность равномерно распределенной по всей площади нагрузки; A – площадь пластинки; D – цилиндрическая жесткость пластинки:

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2), \quad (2)$$

где E – модуль упругости материала первого рода; h – толщина пластинки; ν – коэффициент Пуассона.

Эта взаимосвязь (1), а также методы и приемы геометрического моделирования формы плоской области, разработанные А. В. Коробко для решения различных задач теории упругости и строительной механики [8], позволили составить аналитические алгоритмы вычислений геометрических параметров различных форм пластин (прямоугольных, треугольных, ромбовидных, параллелограммных, трапециевидных и др.) в составе пластинчато-стержневой конструкции на заданное значение прогиба [9] и на их основе разработать программную реализацию [10] на языке Delphi [11].

Результаты и обсуждение. Рассмотрим в качестве числового примера следующие исходные данные пластинчато-стержневой конструкции:

1) пластинчато-стержневая конструкция с двумя параллельными опорными направляющими (основными балками, лонжеронами поз. 1, пластинами заполнения поз. 2, поперечными меньшего сечения вспомогательными стержнями поз. 3, рис. 1);

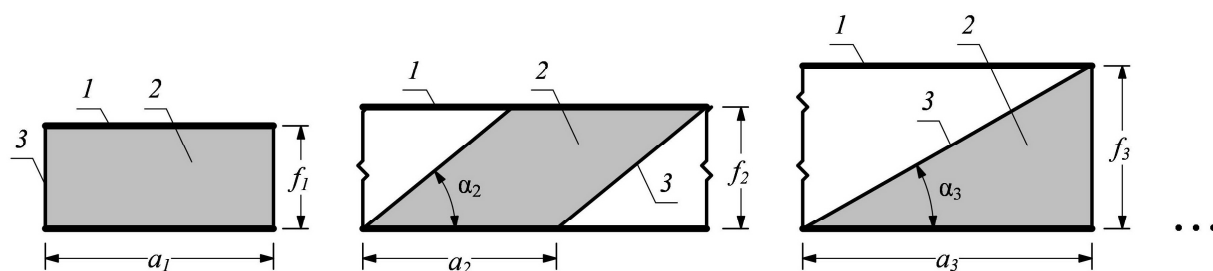


Рис. 1. Схема пластинчато-стержневой конструкции

- 2) закрепление пластин в составе пластинчато-стержневой конструкции по контуру (к поз. 1, 3 на рис. 1) шарнирное;
- 3) варианты форм пластин: прямоугольные, треугольные (равнобедренные, прямоугольные), ромбовидные, параллелограммные, трапециевидные (равнобокая трапеция, прямоугольная трапеция);
- 4) возможная ориентация пластин вдоль параллельных опорных направляющих как горизонтальная, так и вертикальная;
- 5) значение прогиба задаем абсолютным значением, примем $w_0 = 1$ мм;
- 6) материал – сталь: $\nu = 0,3$, $E = 206000$ МПа;
- 7) толщина пластин $h = 5$ мм;
- 8) интенсивность действующей поперечной равномерно распределенной нагрузки $q = 5$ кН/м².

Исходные данные заносятся в левом столбце входных значений в программе (рис. 2).

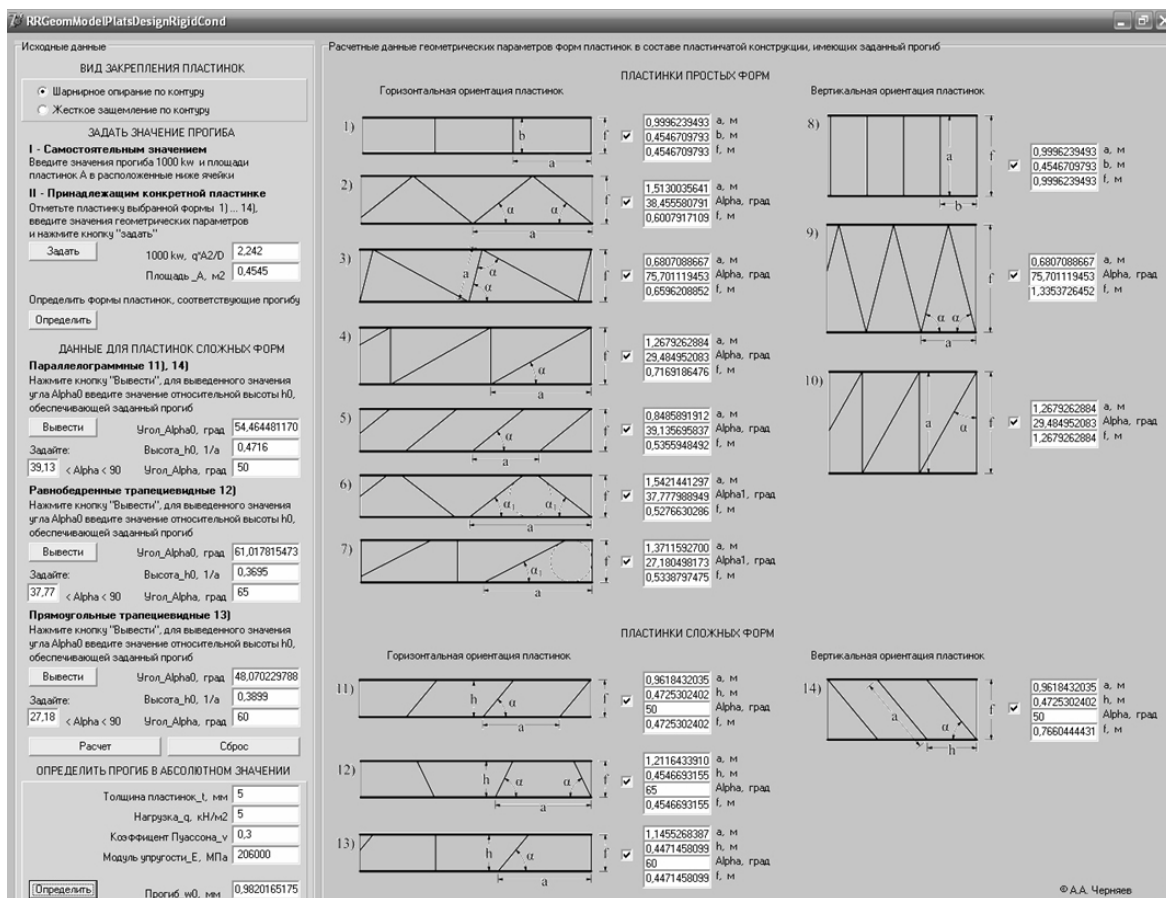


Рис. 2. Экранное представление работы программы

При занесении числовых значений для задания прогиба программа автоматически вычисляет и выводит его в общем безразмерном виде k_w из (1). Таким образом, для числовых значений исходных данных имеем $k_w = 2,242$. Здесь следует отметить, что задавать значение прогиба можно и в обратном порядке.

Далее следует нажать «определить» (определить форму пластинок, соответствующих прогибу). Программа отметит значком «галка» те формы пластин и выведет в советующие поля их значения геометрических параметров, которые обеспечивают заданное значение прогиба $w_0 = 1$ мм.

Если среди пластин оказались пластины сложных форм, которые могут также дать заданное значение прогиба, в данном числовом примере они отметились программой, то следует задать отдельные числовые параметры для пластинок сложных форм (параллелограммных, трапециевидных). Такими значениями заложены и являются угол α и значение относительной высоты h_0 . Одно из этих значений следует ввести, чтобы программа автоматически определила второе значение и вывела геометрические параметры таких пластин в общую панель отображения. Здесь следует отметить, что программа определила все семейства параллелограммных и трапециевидных пластин, которые дают заданное значение прогиба, но вывести она может по очереди отдельные значения с различными соотношениями α и h_0 , так как те взаимозависят друг от друга, подробнее это описано в работе [10].

Полученные результаты геометрических параметров пластинчато-стержневой конструкции с различными вариантами геометрии показаны на рис. 2 на правом поле и в масштабе на рис. 3.

Как видно из рис. 3 основной размер – ширина f_i (рис. 1) между двумя параллельными опорными направляющими пластинчато-стержневой конструкции получаются различными.

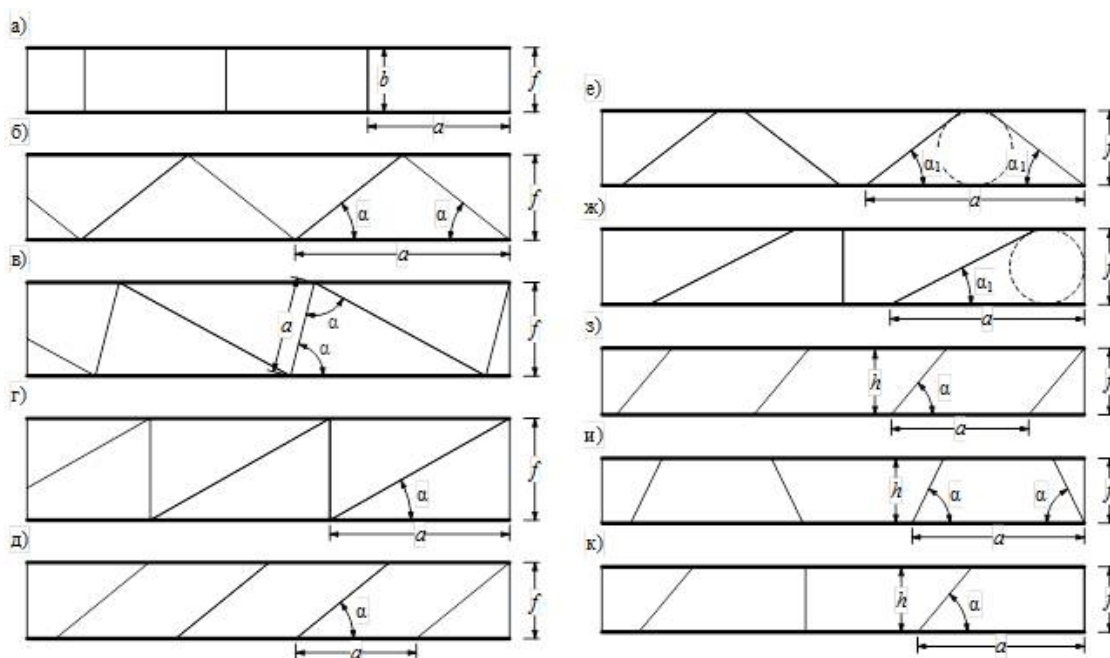


Рис. 3. Варианты геометрии пластинчато-стержневой конструкции с одинаковым прогибом пластин

Для анализа точности результатов полученные варианты пластинчато-стержневой конструкции создадим в программе конечно-элементного анализа SCAD [12]. Тип конечного элемента 5 для стержневых элементов поз. 1, 3 (рис. 1); тип конечного элемента 44 поз. 2 (рис. 1). Число КЭ для разбиения пластин ~ 500 .

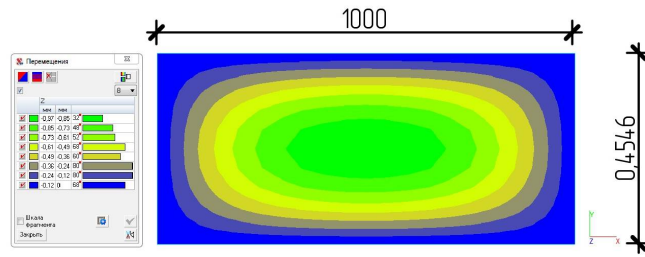
Фрагменты результатов прогибов (перемещений по z) для простых геометрических форм пластин а) – д) (рис. 3) показаны на рис. 4. Для остальных форм е) – к) (рис. 3) результаты были аналогичными.

Отклонение значений прогиба при данном разбиении схем на указанное число КЭ от заданного значения $w_0 = 1$ мм составило:

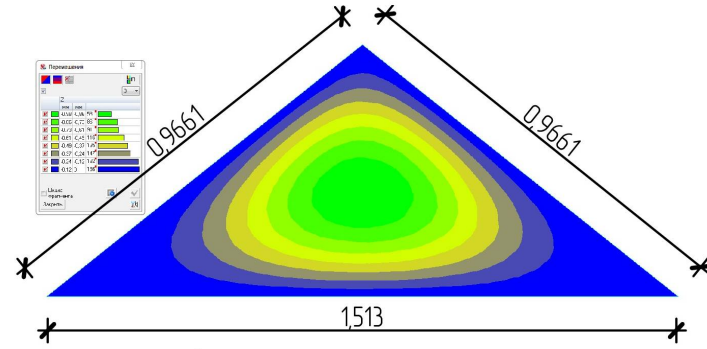
- в меньшую сторону до 0,97 мм,
- в большую сторону до 1,01 мм.

Таким образом, отклонение составило приемлемое значение менее 5%.

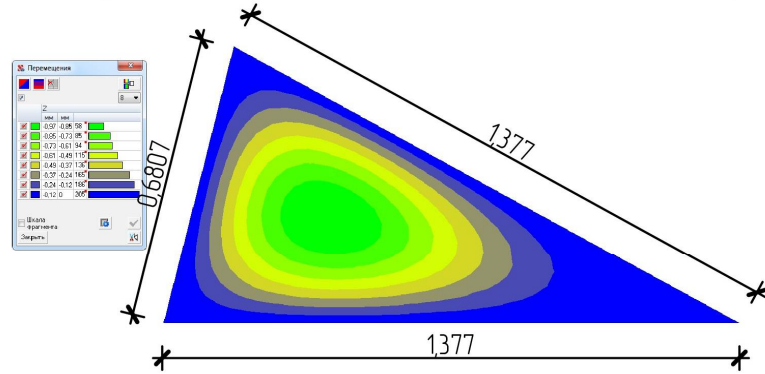
a)



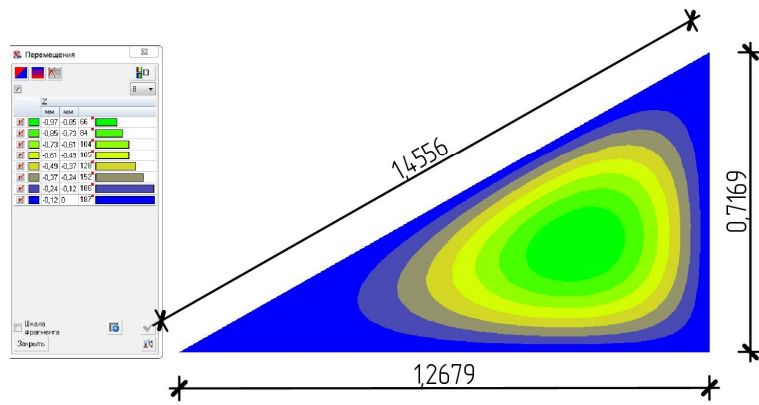
б)



в)



г)



д)

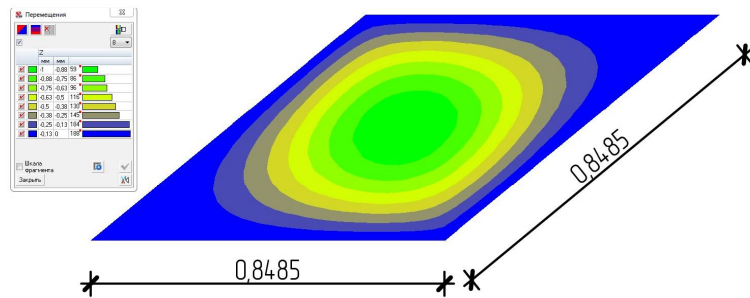


Рис. 4. Прогибы (перемещения по z) пластин, мм в SCAD

Заключение. Рассмотренный в работе числовой расчет в разработанной ранее программе показал возможности ее использования в решении задачи автоматизированного поиска вероятных вариантов геометрии пластинчато-стержневой конструкции с двумя параллельными опорными направляющими из условия жесткости пластин при поперечном изгибе. Преимуществом рассмотренного подхода в отличие от других существующих является то, что искомая геометрия на заданное значение прогиба определяется прямым путем без перебора различных вариантов и итерационных процедур. Сопоставление с результатами, полученными с помощью конечно-элементного анализа в программе SCAD, показало их приемлемое отклонение менее 5%.

Сведения о финансировании. Работа выполнена в рамках НИР при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации СП-1485.2021.3, конкурс 2021-2023 года.

Библиографический список

1. Дмитриева Т.Л. Адаптивные многоуровневые математические модели в численной оптимизации пластинчато-стержневых конструкций: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.13.18. – М., 2012. – 38 с.
2. Комаров В.А. Безразмерный критерий силового совершенства конструкций // Механика твердого тела. – 2018. – № 4. – С 34-47.
3. Дмитриева Т.Л., Ле Чан Минь Дат. Алгоритм оптимизации на основе аппроксимаций // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2012. – № 12 (71). – С. 134-140.
4. Серпик И.Н., Алексейцев А.В., Лелетко А.А. Генетические алгоритмы оптимизации металлических строительных конструкций: монография; под общ. ред. И.Н. Серпика. –Брянск: Изд-во БГИТА, 2010. – 187 с.
5. Коробко В.И., Черняев А.А. Решение задач поперечного изгиба пластинок с использованием конформных радиусов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – № 6. – С. 16-22.
6. Черняев А.А. Решение двумерных задач теории упругости и строительной механики методом интерполяции с использованием конформных радиусов // Строительная механика и конструкции. – 2017. – № 2 (15). – С. 32-44.
7. Полия Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. – 2-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.
8. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 320 с.
9. Черняев А.А. Геометрическое моделирование пластинчатых конструкций из условия жесткости // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2012. –Vol. 8. – Issue 4. – P. 66-77.
10. Черняев А.А. Построение алгоритма и разработка программы для ЭВМ по вариантно-му проектированию пластинчато-стержневых силовых конструкций из условий жесткости пластин путем геометрического моделирования их формы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2016. – Vol. 12. – Issue 2. – С. 147-157.
11. Галисеев Г.В. Программирование в среде Delphi 7. – М.: Вильямс, 2004. – 288 с.
12. SCAD Office. Версия 21. Вычислительный комплекс SCAD++ / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, С.Ю. Фиалко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2015. – 848 с.

References

1. Dmitrieva T.L. Adaptive multilevel mathematical models in numerical optimization of plate-rod structures. Dr. of tech. sciences dis. abstr. 05.13.18. M. 2012. 38 p.

2. Komarov V.A. Dimensionless criterion of power perfection of constructions. *Mechanics of Solids*. No. 4. 2018. Pp. 34-47.
3. Dmitrieva T.L., Le Chang Min Dat. Optimization algorithm based on approximations. *Bulletin of Irkutsk State Technical University*. No. 12(71). 2012. Pp. 134-140.
4. Serpik I.N., Aleksetsev A.V., Leletko A.A. Genetic algorithms for optimization of metal building structures: monograph; under the general editorship of I.N. Serpik. Bryansk: Publishing house of BGITA, 2010. 187 p.
5. Korobko V.I., Chernyaev A.A. Solving problems of transverse bending of plates using conformal radii. *Construction Mechanics and Calculation of Structures*. No. 6. 2011. Pp. 16-22.
6. Chernyaev A.A. Solving two-dimensional problems of the theory of elasticity and structural mechanics by interpolation using conformal radii. *Construction Mechanics and Structures*. No. 2(15). 2017. Pp. 32-44.
7. Polia G., Sege G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. 2nd ed. M.: KomKniga, 2006. 33 p.
8. Korobko A.V. *Geometric modeling of the shape of a region in two-dimensional problems of elasticity theory*. Moscow: Publishing House of the ASV, 1999. 320 p.
9. Chernyaev A.A. Geometric modeling of plate structures from rigidity conditions. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Vol. 8. Issue 4. 2012. Pp. 66-77.
10. Chernyaev A.A. Construction algorithms and development of a computer program for the variant design of plate-rod power structures from rigidity conditions plates by geometric modeling of their shape. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. Vol. 12. Issue 2. 2016. Pp. 147-157.
11. Galiseev G.V. *Programming in Delphi 7*. M.: Williams, 2004. 288 p.
12. Karpilovsky V.S., Kriksunov E.Z., Malyarenko A.A., Fialko S.Yu., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. *SCAD Office. Version 21. Computing complex SCAD++*. Moscow: SCAD SOFT Publishing House, 2015. 848 p.

AUTOMATED SEARCH FOR GEOMETRY OPTIONS PLATE-ROD STRUCTURE WITH TWO PARALLEL GUIDES FROM THE CONDITION OF STIFFNESS OF THE PLATES

A. A. Chernyaev

Orel State University named after I.S. Turgenev
Russia, Orel

PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial and Civil Engineering,
Tel.: +7(4862)734395, e-mail: Chernyev87@yandex.ru

The paper considers the problem of automated search for possible geometry options of a plate-rod structure with two parallel support guides from the condition of plate stiffness to transverse bending. To solve it, it is proposed to use the author's computer program developed in Delphi. The calculation algorithm is based on previously obtained analytical results using methods and techniques of geometric modeling of the shape of a flat area, developed by A.V. Korobko for solving two-dimensional problems of elasticity theory and structural mechanics. The program allows us to perform an automated search for geometric parameters of various shapes of plates: rectangular, triangular, diamond-shaped, parallelogram, trapezoidal, etc. as part of a plate-rod structure for a given deflection value in general or relative form when they are transversely bent by a load evenly distributed over the entire area. The order of operations and an example of calculations in the program are shown. The accuracy of the obtained results is estimated by comparing them with the results obtained numerically in the SCAD finite element analysis program.

Keywords: plate-rod structure, variant design, geometric parameters, deflection, transverse bending, automated search.

**ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ФЕРМЫ**М. Н. Кирсанов^{1,2}Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого¹
Россия, г. Санкт-ПетербургНациональный исследовательский университет «МЭИ»²
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, профессор, научно-технологический комплекс «Цифровой инжиниринг в гражданском строительстве»; ²д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, тел.: + 7(965)183-35-34, e-mail: c216@ya.ru

На основе метода Донкерлея применительно к расчету плоской статически определимой регулярной фермы разработан метод вывода аналитической зависимости первой частоты собственных колебаний от числа панелей. Основа метода — вычисление суммы, связанной с парциальными частотами, по теореме о среднем. Предполагается что масса фермы равномерно распределена по ее узлам, а колебания происходят только по вертикальному направлению. Для определения жесткости конструкции используется интеграл Мора. Результаты сравниваются с методом Донкерлея и численным расчетом первой частоты всего спектра частот. Для аналитических преобразований применяются операторы системы символьной математики Maple. Обобщение результатов на произвольное число панелей выполняется методом индукции. Расчеты показывают хорошее совпадение приближенного метода с численным, выполненным с учетом всех степеней свободы конструкции. Исследованы спектры частот семейства регулярных ферм различного порядка. Обнаружены спектральные изолинии и константы.

Ключевые слова: плоская ферма, собственная частота, метод Донкерлея, индукция, Maple, приближенный метод, спектральные изолинии, спектральные константы.

Введение. В инженерной практике для расчета частот собственных колебаний инженерных сооружений и элементов конструкции применяют численные методы, основанные на методе конечных элементов [1-3]. Значение первой частоты для статически определимых моделей конструкций, наиболее востребованной в динамическом анализе, можно найти и аналитически, например, методом парциальных частот Донкерлея, если требуется оценка снизу, или энергетическим методом Рэлея для оценки сверху [4-7]. На основе этих методов определяются аналитические зависимости основной частоты не только от распределения масс, размеров и свойств материала, но и от числа панелей, что существенно расширяет область применения искомых формул. Некоторые аналитические решения задач о первой частоте собственных колебаний получены для ряда плоских и пространственных статически определимых регулярных ферм [8-11]. Как правило, для таких решений используется подход Донкерлея, дающий более компактный вид решения, чем метод Рэлея [11-13]. Точность этих решений, как правило, составляет от 8 до 40%. В [14] для решения задачи о собственных частотах рассмотрен метод динамической жесткости. В [15] предложен упрощенный метод Донкерлея оценки снизу частоты собственных колебаний систем со многими степенями свободы.

Конструкция фермы. Ферма с параллельными поясами и треугольной решеткой имеет две опоры и заниженную высоту крайних панелей. В ферме порядка n содержится $2n$

панелей длиной $2a$, кроме крайних длиной a . Высота фермы в ее средней части равна $3h$. Инерционные свойства конструкции моделируются равными массами m , совершающими вертикальные колебания в ее узлах (рис. 1).

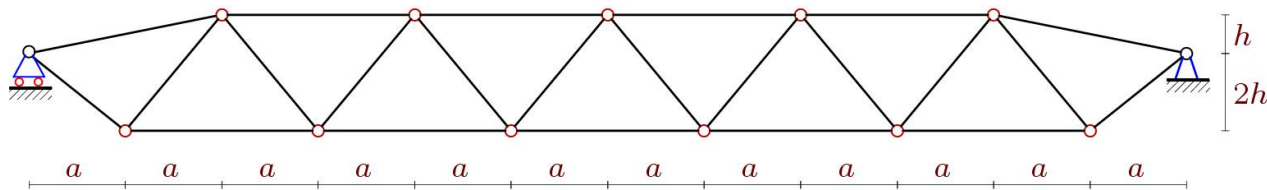


Рис. 1. Схема фермы, $n=3$

Число степеней свободы системы равно числу узлов фермы: $K = 4n + 1$. Ферма содержит $\nu = 8n + 2$ стержней, включая и три стержня, соответствующие опорам.

Расчет усилий в стержнях. Усилия в статически определимой ферме рассчитываются методом вырезания узлов. Направляющие косинусы усилий в уравнениях равновесия узлов, записанных в проекциях на оси координат, вычисляются по данным о координатах узлов и порядку соединения стержней в них. Узлы фермы и стержни нумеруются (рис. 2). Координаты имеют вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, y_1 = 2h, \\ x_{i+1} &= a(2i - 1), y_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \\ x_{2(n+1)} &= 4na, y_{2(n+1)} = 2h, \\ x_{i+2n+2} &= 2ai, y_{i+2n+2} = 3h, \quad i = 1, \dots, 2n - 1. \end{aligned}$$

Схема соединения стержней организуется с помощью списков с номерами концов стержней. Стержни нижнего пояса соответствуют следующим спискам: $Z_i = [i, i + 1]$, $i = 1, \dots, 2n + 1$, верхнего — $Z_{i+2n+2} = [i + 2n + 2, i + 2n + 3]$, $i = 1, \dots, 2n - 2$.

Для задания раскосов используются списки: $Z_{i+4n+1} = [i + 1, i + 2n + 2]$, $Z_{i+6n} = [i + 2, i + 2n + 2]$, $i = 1, \dots, 2n - 1$. Уравнения равновесия узлов — это система уравнений в векторном виде: $\mathbf{GS} = \mathbf{R}$, где \mathbf{G} — это матрица размером $\nu \times \nu$, \mathbf{R} — вектор узловых нагрузок, \mathbf{S} — вектор, неизвестных усилий в стержнях, включая три опорные реакции. Элементы матрицы \mathbf{G} — это направляющие косинусы усилий, которые рассчитываются по координатам концов стержней, соединенных в соответствующих узлах [11].

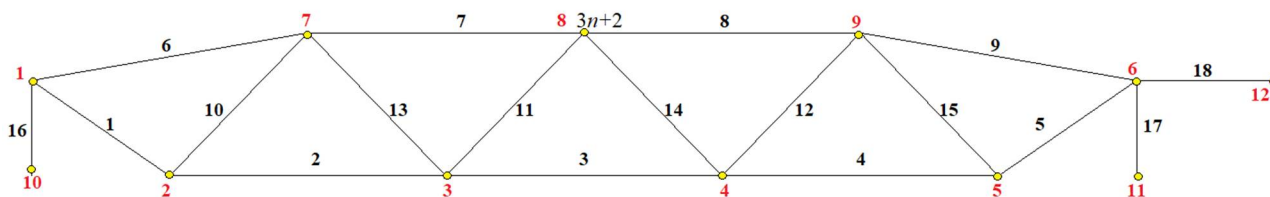


Рис. 2. Номера узлов и стержней, $n = 2$

Оценка первой частоты собственных колебаний по методу Донкерлея. Расчет приближенного значения наименьшей собственной частоты ω_D производится по формуле [14]:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \quad (1)$$

где ω_p — частота колебаний одной массы m в узле с номером p , которая вычисляется из уравнения движения отдельной массы:

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K. \quad (2)$$

Коэффициент D_p — величина обратная податливости (деформации), рассчитываемая с помощью интеграла Мора (суммирование по всем усилиям в стержнях конструкции):

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF). \quad (3)$$

Здесь $S_{\alpha}^{(p)}$ — усилие в стержне с номером α от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу p , l_{α} — длина стержня. Жесткость EF стержней принимается для всей конструкции одинаковой. Отсюда следует формула для нижней границы первой собственной частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_n. \quad (4)$$

Последовательный расчет сумм $\Delta_n = \sum_{\alpha=1}^{\nu} \left(S_{\alpha}^{(p)} \right)^2 l_{\alpha} / (EF)$ с увеличивающимся числом панелей дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (100a^3 + 24c^3 + 84d^3 + 21f^3 + 2250h^3) / (300EF), \\ \Delta_2 &= (3430a^3 + 210c^3 + 252d^3 + 63f^3 + 4590h^3) / (360EF), \\ \Delta_3 &= (409200a^3 + 13508c^3 + 9108d^3 + 2277f^3 + 146250h^3) / (8100EF), \\ \Delta_4 &= (116090a^3 + 2406c^3 + 1116d^3 + 279f^3 + 16830h^3) / (720EF), \\ \Delta_5 &= (1776500a^3 + 25232c^3 + 8892d^3 + 2223f^3 + 129150h^3) / (4500EF), \dots \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{a^2 + 9h^2}$, $d = \sqrt{a^2 + 4h^2}$, $f = \sqrt{4a^2 + h^2}$. Для получения методами Maple общего члена этой последовательности необходимо рассчитать не менее двенадцати ферм различного порядка. В итоге из решения рекуррентных уравнений, выведенных оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc`, искомая формула приобретает вид:

$$\Delta_n = \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3}{nh^2 EF},$$

где коэффициенты имеют вид полиномов по числу панелей:

$$\begin{aligned} C_1 &= (4n - 3)(4n - 1)(32n^3 + 32n^2 + 31n - 5) / 810, \\ C_2 &= (4n - 1)(100n^2 - 111n + 47) / 1350, \\ C_3 &= (4n - 1)(8n - 1) / 75, \\ C_4 &= C_3 / 4, \\ C_5 &= (4n + 1)(8n + 1) / 6. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, согласно (4), формула для нахождения нижней оценки первой частоты по Донкерлею имеет вид:

$$\omega_D = h \sqrt{\frac{nEF}{m(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 d^3 + C_4 f^3 + C_5 h^3)}}. \quad (6)$$

Упрощенный вариант метода Донкерлея. В [15] предложен вариант метода Донкерлея для вывода аналитического выражения первой частоты колебаний. В этом методе не требуется суммирование по числу степеней свободы выражений, содержащих парциальные частоты. Если для численного решения такое суммирование не представляет никакой сложности, то применительно к задаче определения аналитической зависимости частоты от числа панелей, вычисление сумм в символьной форме либо сложно, либо даже невозможно. Подход [15] существенно упрощает решение. Согласно ему расчетная формула имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \delta^{\max} K / 2 = m \Delta_n^*, \quad (7)$$

где δ^{\max} — максимальное по узлам значение прогиба δ_p , $p = 1, \dots, K$ от действия вертикальной единичной силы на один из узлов конструкции. Для рассматриваемой фермы это узел в середине пролета с номером $3n+2$ (рис. 2). Последовательный расчет коэффициента Δ_n^* для ферм с увеличивающимся числом панелей дает:

$$\begin{aligned} \Delta_1^* &= (100a^3 + 16c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (180EF), \\ \Delta_2^* &= 3(350a^3 + 22c^3 + 12d^3 + 3f^3 + 150h^3) / (100EF), \\ \Delta_3^* &= 13(3600a^3 + 116c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (900EF), \\ \Delta_4^* &= 17(8550a^3 + 166c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (900EF), \\ \Delta_5^* &= 7(16700a^3 + 216c^3 + 36d^3 + 9f^3 + 450h^3) / (300EF), \dots \end{aligned}$$

Обобщение этой последовательности средствами Maple имеет вид:

$$\Delta_n^* = (4n + 1)(B_1 a^3 + B_2 c^3 + B_3 d^3 + B_4 f^3 + B_5 h^3) / (h^2 EF),$$

где коэффициенты значительно проще, чем (5):

$$\begin{aligned} B_1 &= (8n^3 + n - 3) / 54, \quad B_2 = (25n - 17) / 450, \\ B_3 &= 1 / 25, \quad B_4 = 1 / 100, \quad B_5 = 1 / 2. \end{aligned}$$

В результате имеем формулу:

$$\omega_D = 10h \sqrt{\frac{EF}{m(4n + 1)(50(8n^3 + n - 3)a^3 / 27 + 2(25n - 17)c^3 / 9 + 4d^3 + f^3 + 50h^3)}}. \quad (8)$$

Формула (8) имеет более компактный вид, чем (6) с коэффициентами (5). На конкретном примере можно сравнить степень их приближения с численным методом, полученным как минимальная частота всего спектра частот.

Численное решение. Приняты следующие размеры панели фермы: $a = 3\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Модуль упругости материала стержней (сталь) $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{МПа}$, площадь поперечного сечения стержней $F = 4\text{см}^2$, массы в узлах $m = 100\text{кг}$. На рисунке 3 сопоставлены кривые зависимости частот ω_D и ω_* от числа панелей по формулам (6) и (8) с первой частотой спектра ω_1 , полученной численно. С увеличением числа панелей все три решения сближаются, частота уменьшается, асимптотически стремясь к нулю. Решение по методу Донкерлея закономерно ограничивает численное снизу. При этом решение (8) не только проще, чем (6), но и ближе к численному решению. Более точную оценку погрешностей методов можно получить по значениям относительных величин:

$$\varepsilon_D = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1, \quad \varepsilon_* = (\omega_* - \omega_1) / \omega_1.$$

На рис. 4 представлены зависимости этих величин от числа панелей при $a = 3\text{м}$ для различных значений высоты h . Погрешность упрощенного решения в несколько раз меньше погрешности метода Донкерлея и зависит от высоты фермы h . Особенно это заметно для небольшого числа панелей. С увеличением числа панелей кривые сближаются.

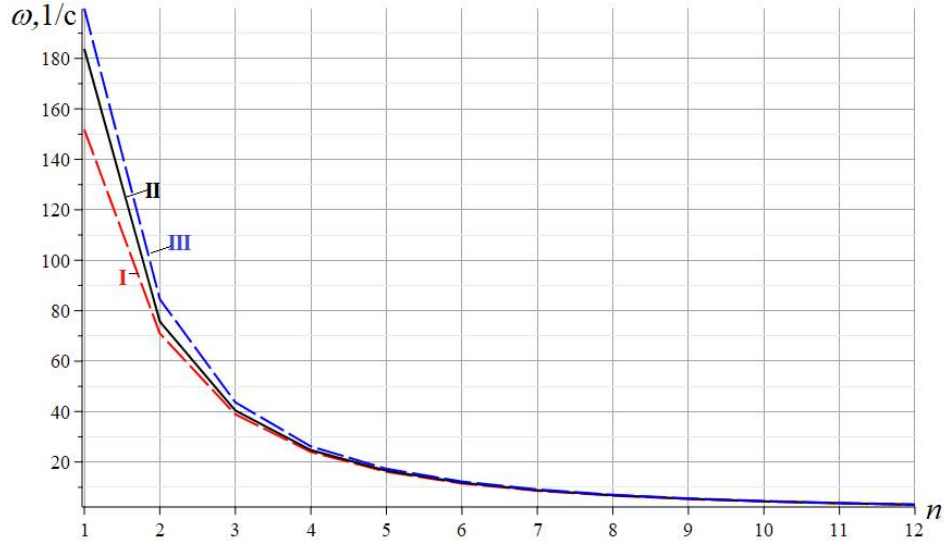


Рис. 3. Сравнение аналитических решений с численным:

I — нижняя оценка ω_D по Донкерлею (6), II — приближенный метод ω_* (8), III — первая частота спектра ω_1

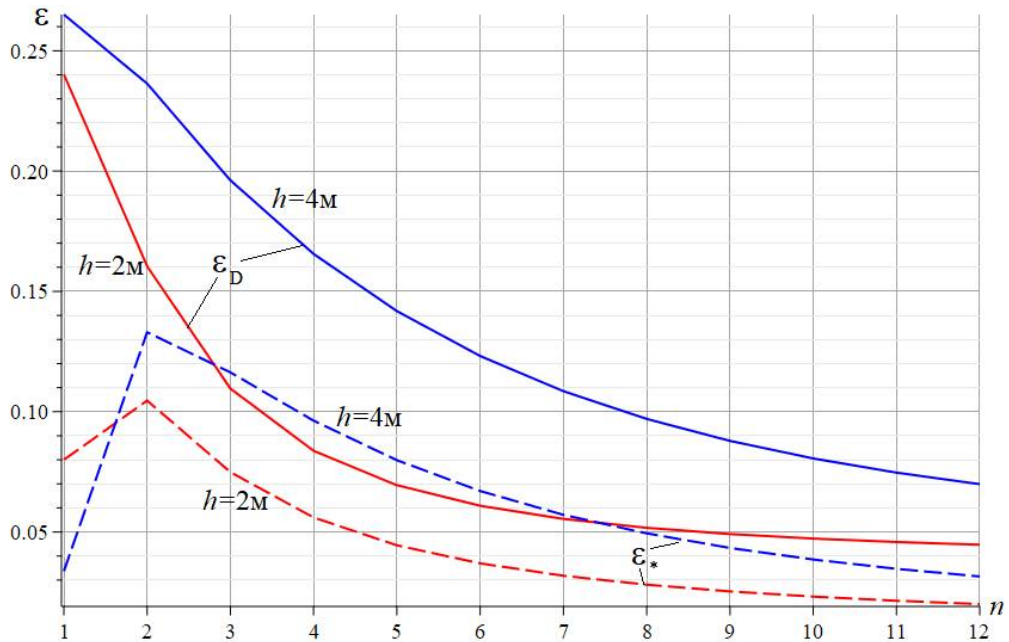


Рис. 4. Погрешность оценки основной частоты по Донкерлею ε_D и приближенному методу ε_*

Спектр регулярных ферм. На рис. 5 отдельными точками обозначены частоты спектров собственных колебаний ферм различного порядка, рассчитанных для случая $a=3\text{м}$, $h = 2\text{м}$. Вычисления производились в численной моде той же программы системы Maple, что и при расчете аналитического выражения жесткости конструкции, необходимой для

определения парциальных частот. Частоты спектра каждой фермы объединены условными кривыми.

Заметны некоторые закономерности. Прежде всего очевидно, что высшая частота колебаний почти не зависит от порядка фермы. Высшие частоты ферм порядков $n=1, n=2, \dots$ с небольшой погрешностью совпадают с высшими частотами ферм $n=19, n=20, \dots$. Это позволяет легко оценить границы собственных частот ферм с большим числом панелей, для расчета которых требуются значительные вычислительные ресурсы и время, ориентируясь на расчет ферм с 1-2 панелями. Другая закономерность — наличие изолиний в общей картине распределения частот. Введено обозначение $\omega_{i,j}$ — частота с номером j в упорядоченном по возрастанию спектре фермы порядка i . Кривая, соединяющая точки $\omega_{i,f(i)}$, — это некоторая изолиния объединенного спектра частот. Например, при $f(i) = i$ кривая $\omega_{i,i}, i = 1, 2, 3, \dots$ соединяет частоты 1, 2, 3, ... ферм порядков 1, 2, 3... . Аналогично, кривая $\omega_{i,i+1}, i = 1, 2, 3, \dots$ проходит через точки, соответствующие частотам 2, 3, 4, ... ферм порядка 1, 2, 3,

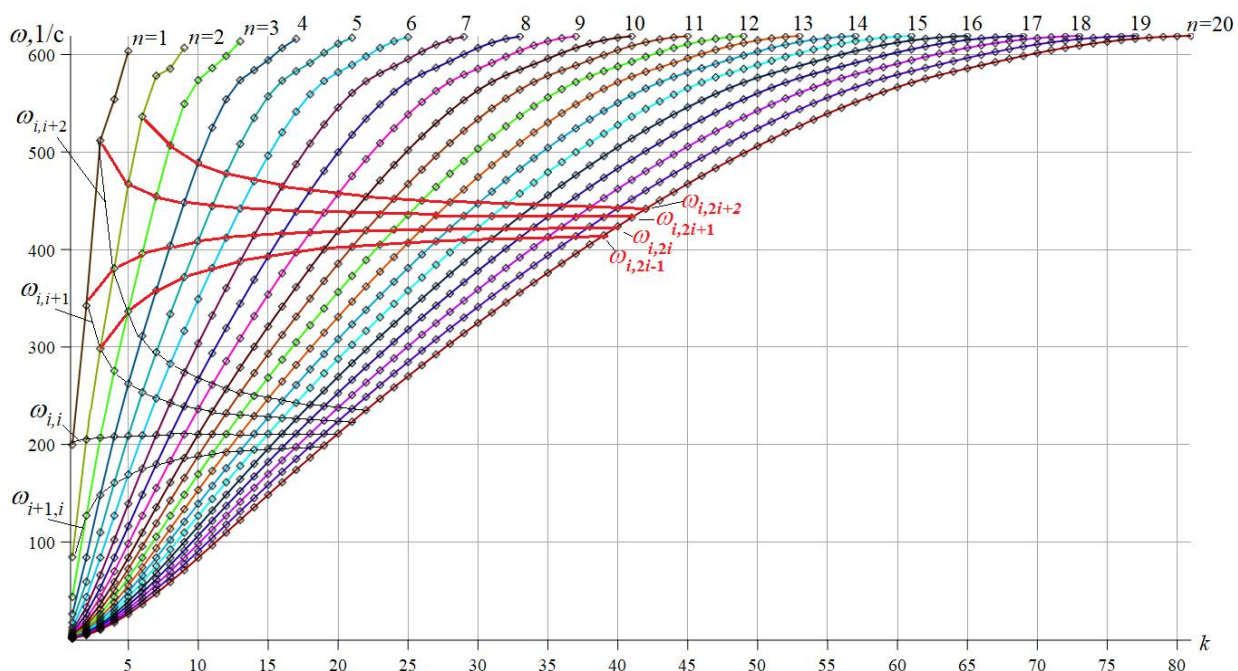


Рис. 5. Спектры семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 20$

Спектральные изолинии в области низких частот изображены на рис. 6. Здесь также прослеживаются и спектральные константы $\omega_{2i,i}, \omega_{3i,i}, \omega_{4i,i}, i = 1, 2, 3, \dots$. Изолинии асимптотически стремятся к спектральным константам.

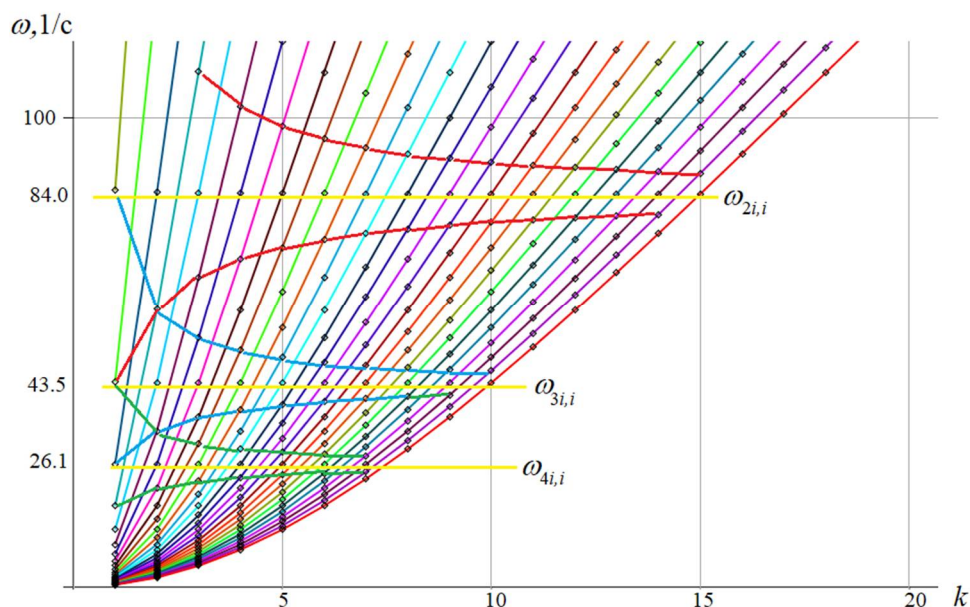


Рис. 6. Низкочастотные спектральные константы и изолинии семейства регулярных ферм порядков $n=1 - 30$

Заключение. Двумя методами выведены две формулы зависимости основной частоты плоской фермы балочного типа от числа панелей. Показано, что точность формул растет с увеличением числа панелей, при этом предложенная формула, альтернативная формуле Донкерлея, оказывается не только проще, но и точнее.

В хаотичном, на первый взгляд, распределении собственных частот семейства регулярных ферм выявлены некоторые закономерности — изолинии и константы. На практике знание этих закономерностей позволит легко находить собственные частоты ферм большого порядка по данным расчетов простых ферм с небольшим числом панелей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ 22-21-00473.

Библиографический список

1. Агапов В. П., Айдемиров К. Р. Расчет ферм методом конечных элементов с учетом геометрической нелинейности // Промышленное и гражданское строительство. 2016. №. 11. С. 4–7.
2. Игнатъев В.А., Игнатъев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М.: Издательство АСВ, 2022. 306 с.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section // Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021).
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4.
5. Воробьев О.В. Оценка основной частоты двузвенного манипулятора // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов двадцать седьмой международной научно-технической конференции студентов и аспирантов. Москва, 2021. С. 1013.
6. Вычужина З.К. Расчет значения первой частоты собственных колебаний плоской фермы с грузом // Строительная механика и конструкции. 2023. №3(38). С. 136-142. doi: 10.36622/VSTU.2023.38.3.013.

7. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С.17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.
8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels // Construction of Unique Buildings and Structures. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels // AlfaBuild. 2022. 25. Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7.
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum // Magazine of Civil Engineering. 2022. 111(3). Article No. 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14.
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 109 Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12.
12. Щиголь Е.Д. Формула для нижней оценки собственных колебаний плоской регулярной балочной фермы с прямолинейным верхним поясом // Строительная механика и конструкции. 2023. №2(37). С.46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels // AlfaBuild. 2021. 17. Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1.
14. Liu X., Zhao Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories // Applied Mathematical Modelling. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.

References

1. Agapov V.P., Aydemirov K.R. Calculation of trusses using the finite element method taking into account geometric nonlinearity. Industrial and Civil Construction. 2016. 11. Pp. 4–7.
2. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. Finite element method in the form of a classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms). Moscow: ASV Publishing House, 2022. 306 p.
3. Vatin N.I., Sinelnikov A.S. Footway bridges: cold formed steel cross-section. Construction of Unique Buildings and Structures. 2012. 3(3). Pp. 39–51. doi:10.18720/CUBS.3.5. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2012.3.5> (date of application: 17.04.2021).
4. Vorobev O. Bilateral analytical estimation of first frequency of a plane truss. Construction of Unique Buildings and Structures. 2020. Vol. 92. Article No 9204 doi: 10.18720/CUBS.92.4.
5. Vorobyov O.V. Estimation of the fundamental frequency of a two-link manipulator. In the book: Radioelectronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the twenty-seventh international scientific and technical conference of students and graduate students. Moscow, 2021. Pp. 1013.
6. Vychuzhina Z.K. Calculation of the value of the first natural vibration frequency of a flat truss with a load. Structural mechanics and structures. 2023. 3(38). Pp. 136-142. doi: 10.36622/VSTU.2023.38.3.013.
7. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. Structural mechanics and structures.2023. 2(37). Pp. 17-26. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.002.

8. Sviridenko O., Komerzan E. The dependence of the natural oscillation frequency of the console truss on the number of panels. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2022. 101. Article No 10101. doi: 10.4123/CUBS.101.1.
9. Kirsanov M., Luong C.L. Deformations and natural frequency spectrum of a planar truss with an arbitrary number of panels. *AlfaBuild*. 2022. 25. Article No 2507. doi: 10.57728/ALF.25.7.
10. Kirsanov M.N., Safronov V.S. Analytical estimation of the first natural frequency and analysis of a planar regular truss oscillation spectrum. *Magazine of Civil Engineering*. 2022. 111(3). Article 11114. doi: 10.34910/MCE.111.14.
11. Maslov A. The first natural frequency of a planar regular truss. Analytical solution. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 109. Article No 10912. doi: 10.4123/CUBS.109.12.
12. Shchigol E.D. The formula for the lower estimate of the natural oscillations of a flat regular girder truss with a rectilinear upper belt. *Structural mechanics and structures*. 2023. 2(37). Pp. 46-53. doi 10.36622/VSTU.2023.37.2.005.
13. Dai Qiao Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels. 2021. *AlfaBuild*. 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1.
14. Liu X., Zhao, Y., Zhou W., Banerjee J.R. Dynamic stiffness method for exact longitudinal free vibration of rods and trusses using simple and advanced theories. *Applied Mathematical Modelling*. 2022. 104. Pp. 401–420. doi:10.1016/J.APM.2021.11.023.
15. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023. 108. Article No 10801. doi: 10.4123/CUBS.108.1.

FORMULA FOR CALCULATING THE TRUSS NATURAL OSCILLATIONS FIRST FREQUENCY

M. N. Kirsanov^{1,2}

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University¹
Russia, St. Petersburg

National Research University «MPEI»²
Moscow, Russia

¹Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Scientific and Technological Complex «Digital Engineering in Civil Engineering»; ²Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

Based on the Dunkerley method as applied to the calculation of a planar statically determinate regular truss, a method has been developed for deriving the analytical dependence of the first natural frequency on the number of panels. The basis of the method is the calculation of the sum associated with the partial frequencies using the mean value theorem. It is assumed that the mass of the truss is evenly distributed over its nodes, and vibrations occur only in the vertical direction. To determine the rigidity of the structure, the Mohr's integral is used. The results are compared with the Dunkerley method and numerical calculation of the entire frequency spectrum. For analytical transformations, operators of the Maple symbolic mathematics system are used. The results are generalized to an arbitrary number of panels using the induction method. Calculations show good agreement between the approximate method and the numerical one, performed taking into account all degrees of freedom of the structure. The frequency spectra of a family of regular trusses of various orders have been studied. Spectral isolines and constants discovered.

Key words: planar truss, natural frequency, Dunkerley method, induction, Maple, approximate method, spectral isolines, spectral constants.

ЖЕСТКОСТЬ УЗЛОВ ПОДКРАНОВО-ПОДСТРОПИЛЬНОЙ ФЕРМЫ В ЕЁ ПЛОСКОСТИ

Б. Б. Лампси¹, Ю. Д. Маркина²

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет^{1,2}
Россия, г. Н. Новгород

¹Канд. техн. наук, зав. кафедрой теории сооружений и технической механики, тел.: +7(831) 430-54-96,
e-mail: lampsi@yandex.ru

²Старший преподаватель кафедры теории сооружений и технической механики, тел.: +7 (908) 237-35-81,
e-mail: poluektoff@bk.ru

В соответствии с рекомендациями по расчету подкраново-подстропильных ферм жесткость узловых соединений ездового пояса с элементами решетки в расчете не учитывается. В данной статье предложена уточнённая расчётная схема ездового пояса с учетом упругой податливости решетки в плоскости фермы, представлены метод определения жесткости упругих опор, имитирующих работу решетки, и результаты аналитической методики подбора сечения и определения жесткости упругих опор пояса в плоскости фермы.

Ключевые слова: подкраново-подстропильная ферма, упругие опоры, линейная податливость, жесткость, ездовой пояс, жесткость упругих опор.

Введение. Под подкраново-подстропильными фермами (ППФ) в металлостроительстве понимают конструкции, совмещающие в себе функции подкрановых систем [1], т. е. систем, поддерживающих крановые пути и обеспечивающих возможность перемещения по ним мостовых кранов, и функции подстропильных систем, поддерживающих стропильные фермы и конструкции покрытия. Компонировка ППФ представляет собой сочетание развитой балки жесткости (ездового пояса) и стержневой системы усиления [2].

В соответствии с рекомендациями по расчету ППФ, приведенными в [3]:

- нормальные силы в элементах ППФ определяются по расчетной схеме, представляющей собой ферму с шарнирными узлами и с центровкой раскосов по оси ездового пояса;
- изгибающие моменты в ездовом поясе состоят из трех компонентов: моментов в неразрезной балке на жестких опорах; моментов от прогиба фермы, возникающих вследствие неразрезности ездового пояса; моментов от внецентренного примыкания элементов решетки к ездовому поясу [4-7];
- жесткость узловых соединений ездового пояса с элементами решетки ППФ в расчете не учитывается [8-10].

В данной статье предложена уточнённая расчётная схема ездового пояса с учетом упругой податливости решетки в плоскости ППФ, представлен метод определения жесткости упругих опор, имитирующих работу решетки ППФ и результаты аналитической методики подбора сечения и определения жесткости упругих опор нижнего пояса ППФ в её плоскости.

Методы исследования. Объектом исследования является подкраново-подстропильная ферма с неразрезным нижним поясом коробчатого сечения. Пролёт между

опорами – 36 метров (рис. 1). Конструкция расположена в здании производственного назначения – литейном цехе металлургического предприятия. Нижний пояс ППФ выполняется сварным в виде тонкостенной оболочки прямоугольного сечения с размерами 3.0 × 2,01 м. Раскосы и стойки стержневой решётки выполняются из сварных Н-образных двутавров, стенки двутавров – из листовой стали 600×14 мм, полки – из листовой стали 400×14 мм.

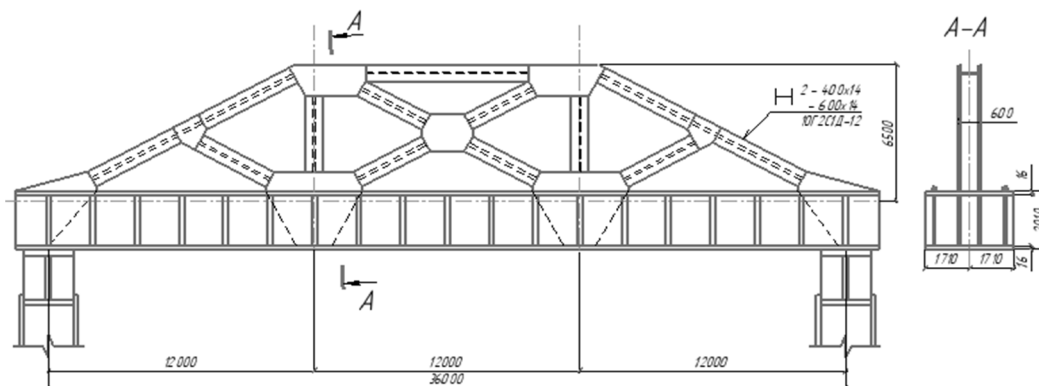


Рис. 1. ППФ пролетом 36 м, высотой 6,5 м

Предлагаемая расчётная схема (РС) ездового пояса с учетом упругой податливости решетки в плоскости ППФ – балка на упругих опорах, имитирующих работу элементов решетки (рис. 2).

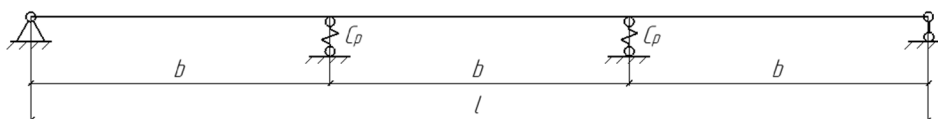


Рис. 2. Расчетная схема балки на упругих опорах

Жесткость упругих опор, имитирующих работу решетки ППФ, определяется по формуле [11]:

$$C_p = F \left(\frac{1}{f_{\text{ППФ}}} - \frac{1}{f_6} \right) \left[\frac{\text{кН}}{\text{м}} \right]; \quad (1)$$

где $f_{\text{ППФ}}$ – прогиб ППФ в точке приложения силы F (рис. 3, а),

f_6 – прогиб эквивалентной балки в точке приложения силы F (рис. 3, б).

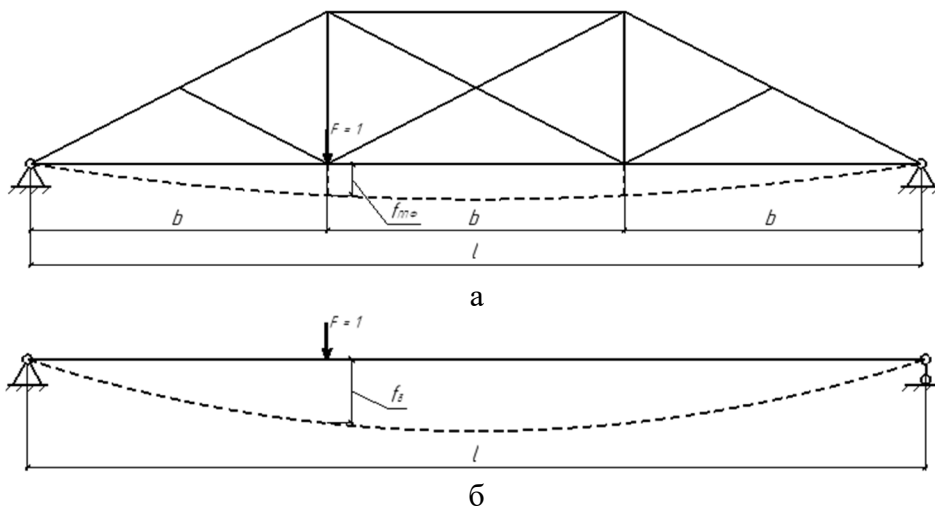


Рис. 3. Расчетные схемы для определения податливости ППФ (а) балки, сечением эквивалентной ездовому поясу ППФ опорам (б)

Прогиб эквивалентной балки f_6 определяется по формуле Мора-Максвелла [12]

$$f_6 = \int_0^l \frac{[\overline{M}_6^0]^2}{EI_{y_6}} [M]; \quad (2)$$

где \overline{M}_6^0 – изгибающий момент в балке, вызванный действием единичной силы $F=1$, приложенной по направлению искомого перемещения (рис. 4);

l – длина эквивалентной балки;

EI_{y_6} – жесткость балки (ездового пояса ППФ) на изгиб в её плоскости.

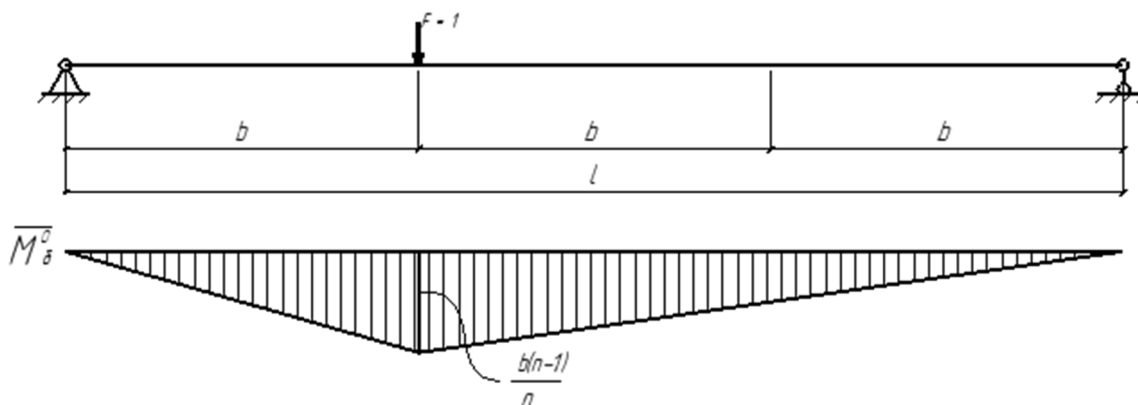


Рис. 4. К определению прогиба эквивалентной балки f_6

Упрощая формулу (2) по правилу Верещагина, приводим её к виду:

$$f_6 = \frac{(n-1)^2 b^3}{3nEI_{y_6}} [M]; \quad (3)$$

где n – количество панелей ездового пояса ППФ;

b – длина панели ППФ.

Прогиб ППФ $f_{\text{ППФ}}$ определен шестью методами для выбора оптимального аналитического метода расчета:

1. Аналитическим с определением внутренних усилий по методике [3].
2. Аналитическим с определением внутренних усилий по внутренне статически неопределимой шарнирно-стержневой модели с неразрезным нижним поясом (рис. 5).

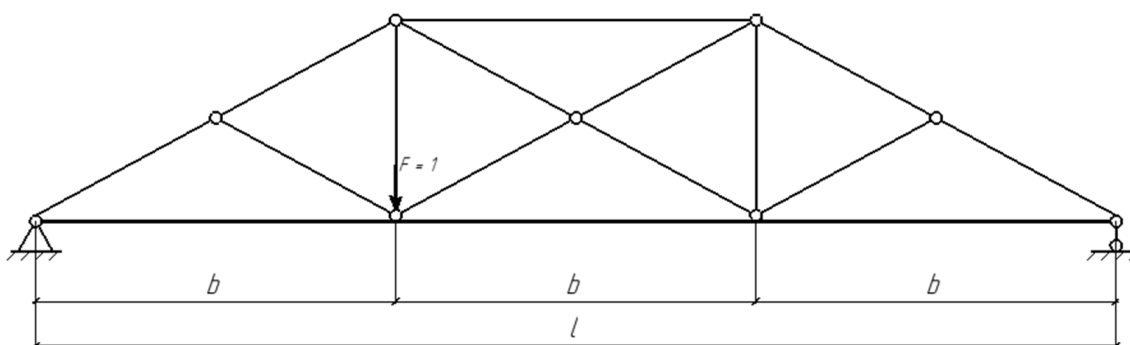


Рис. 5. Расчетная схема с неразрезным нижним поясом

3. Аналитическим с определением внутренних усилий по внешне и внутренне статически неопределимой шарнирно-стержневой модели с неразрезным нижним поясом и двумя шарнирно-неподвижными опорами (рис. 6).

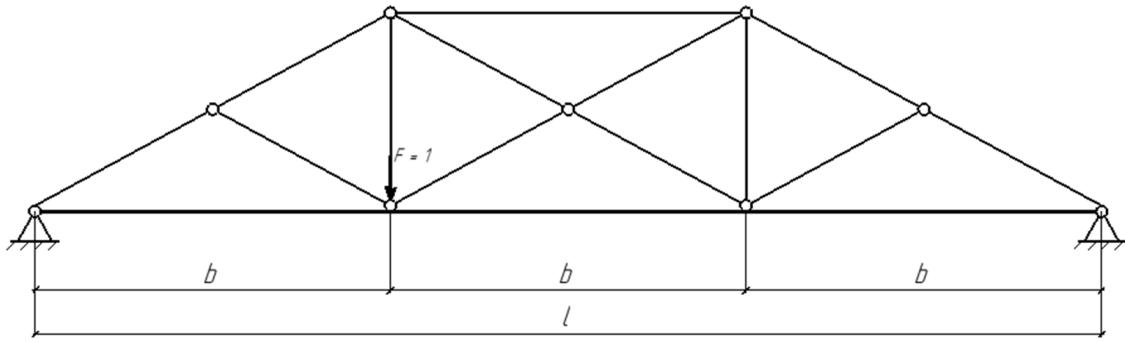


Рис. 6. Расчетная схема с неразрезным нижним поясом и шарнирно-неподвижными опорами

4. Аналитическим с определением внутренних усилий по статически неопределимой модели с жесткими узлами сопряжения всех элементов.

5. Численным с использованием пространственной РС с пластинчатыми элементами поясов, решетки, ребрами жесткости и фасонками (рис. 7) в ПК SCAD.

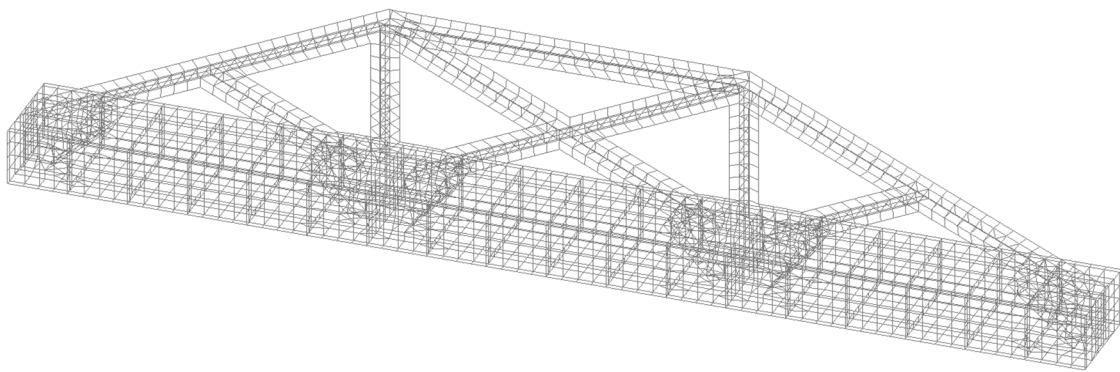


Рис. 7. Пространственная расчетная схема ППФ

6. Численным с использованием плоской РС с жесткими узлами с учетом эксцентриситета крепления решетки (рис. 8) в ПК SCAD (дает минимальную погрешность при определении перемещений по сравнению с пространственной РС [13]).

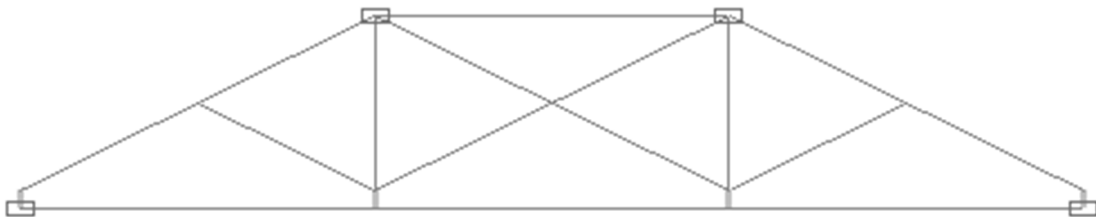


Рис. 8. Плоская расчетная схема ППФ

Во всех аналитических методах прогиб ППФ $f_{\text{ППФ}}$ определяется по формуле Мора-Максвелла:

$$f_{\text{ППФ}} = \sum_1^m \int_0^l \frac{[\overline{M}_{\text{НП}}^0]^2}{EI_{y\text{НП}}} ds + \sum_1^m \int_0^l \frac{[\overline{N}_i^0]^2}{EA} ds \text{ [м]}; \quad (4)$$

где $\overline{M}_{\text{НП}}^0$ и \overline{N}_i^0 – изгибающий момент в элементах нижнего пояса и продольные усилия в стержнях ППФ, вызванные действием единичной силы $P = 1$, приложенной по направлению искомого перемещения;

l – длина стержня фермы, а суммирование выполняется по всем стержням.

По первой аналитической методике изгибающий момент в нижнем поясе определяется как алгебраическая сумма трех составляющих:

- а) M'_{zn} – момента, возникающего вследствие неразрезности нижнего пояса;
- б) M''_z – момента в неразрезной балке на жестких опорах;
- в) M'''_z – момента от внецентренного примыкания элементов решетки к нижнему поясу.

$$M'_{zn} = \frac{\overline{M}_6^0 I_{y \text{ НП}}}{0,6 I_{y \text{ ППФ}}} \text{ [кН} \cdot \text{м]}; \quad (5)$$

где $I_{y \text{ ППФ}}$ – приведённая изгибная жесткость в плоскости ППФ, определяемая в соответствии с [14]:

$$I_{y \text{ ППФ}} = A_{f1} z_1^2 + A_{f2} z_2^2 \text{ [м}^4\text{]}; \quad (6)$$

где A_{f1} и A_{f2} – площади сечения нижнего и верхнего поясов ППФ;

z_1 и z_2 – расстояния от центра тяжести поясов до нейтральной оси фермы в сечении посередине пролета.

Момент в неразрезной многопролетной балке $M''_z = 0$ при узловой нагрузке.

Момент от внецентренного примыкания элементов решетки M'''_z определяется по формуле:

$$M'''_z = e(N_{\text{п}} - N_{\text{л}}) \text{ [кН} \cdot \text{м]}; \quad (7)$$

где e – эксцентриситет центровки решетки по отношению к геометрической оси пояса;

$N_{\text{п}}$ и $N_{\text{л}}$ – нормальные силы в ездовом поясе справа и слева от узла.

Произведена численная проверка данной методики. Рассчитаны две стержневые модели ППФ с жестким соединением узлов. В первой РС эксцентриситет учтен с помощью жестких вставок (рис. 6), во второй – не учтен. Эпюра M'''_z построена как разность эпюр первой и второй РС.

Нормальные силы в элементах ППФ определяются по РС фермы с шарнирными узлами и с центровкой раскосов по оси ездового пояса (рис. 9).

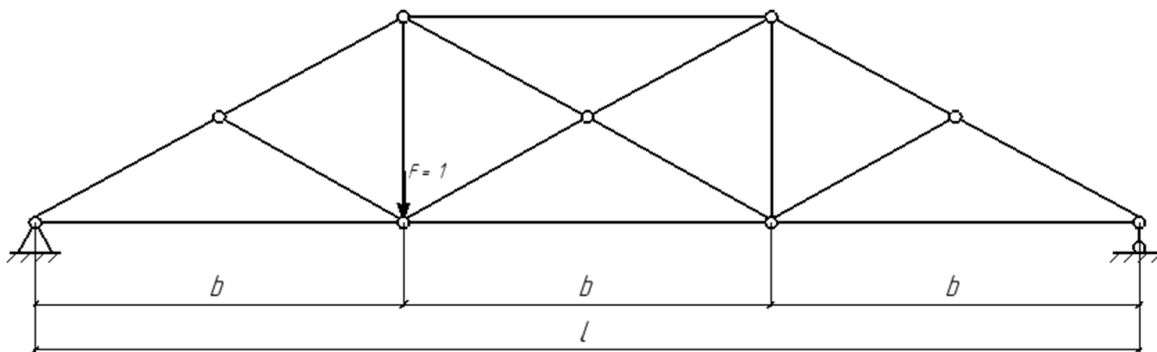


Рис. 9. К определению продольных усилий по методу расчета №1

При расчете по первой аналитической методике формула (4) после упрощения принимает вид:

$$f_{\text{ППФ}} = \frac{(n-1)^2 b^3 I_{y \text{ НП}}}{1,8 n E I_{y \text{ ППФ}}} + \frac{\sum_1^m l_{i \text{ п}} [N_{i \text{ п}}]^2}{E A_{\text{п}}} + \frac{b \sum_1^m [N_{i \text{ НП}}]^2}{E A_{\text{НП}}} \text{ [м]}. \quad (8)$$

По второй и третьей методикам внутренние усилия определяются из расчета методом сил. РС на рис. 5 внутренне статически неопределима $(n-1)$ раз. РС на рис. 6 внутренне статически неопределима $(n-1)$ раз и внешне статически неопределима 1 раз.

Упрощая формулу (4), приводим её к виду:

$$f_{\text{ППФ}} = \frac{2b \sum_1^m [M_{i\text{НП}}]^2}{3EI_{y\text{НП}}} + \frac{\sum_1^m l_{i\text{р}} [N_{i\text{р}}]^2}{EA_{\text{р}}} + \frac{b \sum_1^m [N_{i\text{НП}}]^2}{EA_{\text{НП}}} \quad [\text{м}]; \quad (9)$$

где $M_{i\text{НП}}$ и $N_{i\text{НП}}$ – изгибающие моменты и продольные усилия в i -м узле нижнего пояса ППФ;

$N_{i\text{р}}$ – продольные усилия в i -х элементах решетки и верхнего пояса;

$l_{i\text{р}}$ – длина i -го элемента решетки или верхнего пояса;

$I_{y\text{НП}}$ – момент инерции относительно оси «у» нижнего (ездового) пояса;

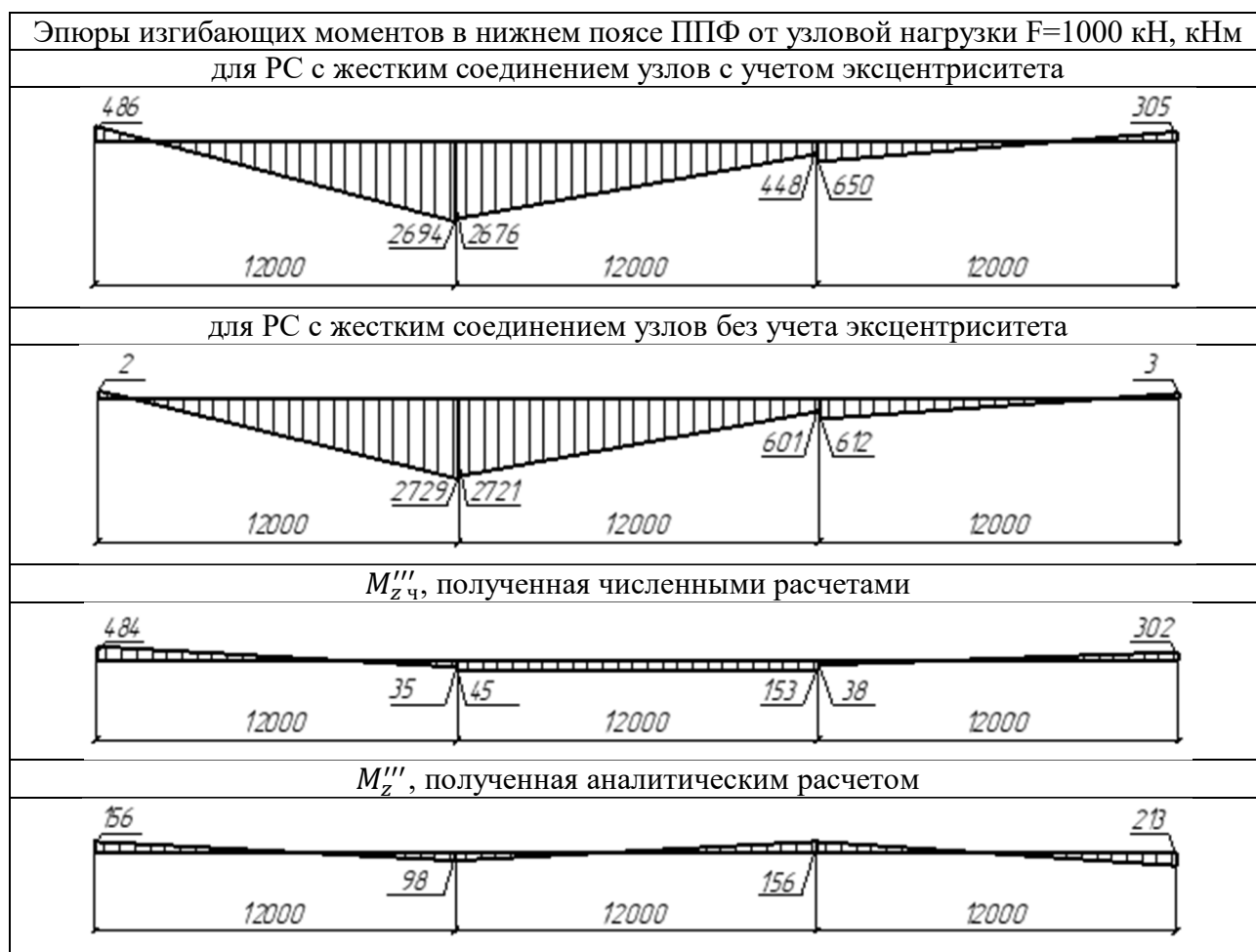
$A_{\text{р}}$ и $A_{\text{НП}}$ – площади элементов решетки и нижнего пояса.

По четвертому методу аналитическое определение внутренних усилий трудоемко, эпюры построены численным методом. Перемещение определено по формуле (4).

Результаты. Результаты оценки влияния эксцентриситета крепления решетки на податливость ездового пояса приведены в табл. 1.

Таблица 1

Момент от внецентренного примыкания элементов решетки



Эпюры $M_{z\text{ч}}''''$ и M_z'''' не совпадают. Продольные усилия $N_{\text{п}}$ и $N_{\text{л}}$ для определения M_z'''' рассчитаны по методике [3] по РС фермы с шарнирными узлами и с центровкой раскосов по оси ездового пояса. Далее доказано, что определение продольных усилий данным методом дает высокую погрешность и не может использоваться для расчета ППФ. На расчет податливости нижнего пояса ППФ эксцентриситет центровки решетки не оказывает существенного

влияния. Для определения жесткости упругих опор, эмитирующих работу решетки ППФ, им пренебрегаем.

Внутренние усилия, определенные по различным методам расчета от узловой нагрузки $F=1000$ кН, приведены в табл. 2 и 3.

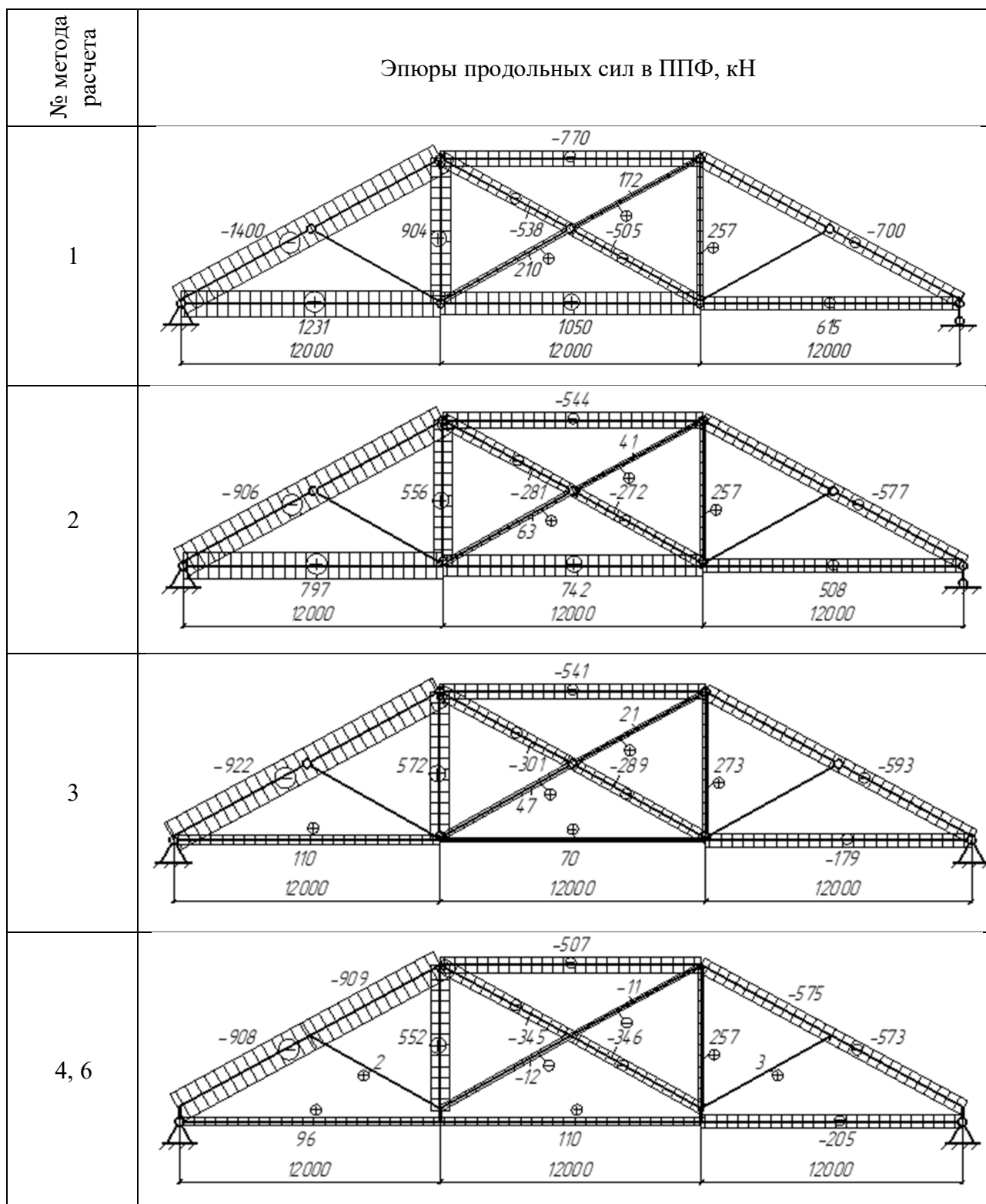
Таблица 2

Момент в нижнем поясе ППФ при разных методах расчета

№ метода расчета	Эпюры изгибающих моментов в нижнем поясе ППФ, кНм
1	
2	
3	
4, 6	

Сравнение перемещений ППФ при различных методах расчета приведены в табл. 4 и на рис. 10-13. Перемещение от изгиба нижнего пояса достаточно точно определяется всеми аналитическими методами. Перемещение от продольных сил, рассчитанных по статически-определимой шарнирно-стержневой РС методом №1, дает значительное отклонение. Данный метод неприменим для определения податливости ППФ, т. к. перемещения ППФ от узловой нагрузки в наибольшей степени зависят от продольных усилий в решетке и верхнем поясе (рис. 10, 11). Из трех оставшихся методов наименее трудоемким является метод №2, по которому внутренние усилия определяются по дважды статически-неопределимой РС. В сравнении с более точными и сложными методами №3 и №4, он дает большую погрешность только в определении продольных усилий в нижнем поясе ППФ. Т. к. вклад в перемещение ППФ от продольных усилий в нижнем поясе близок к 0% (табл. 4, рис. 10), исключаем эту составляющую из формулы определения податливости ППФ.

Продольные силы ППФ при разных методах расчета



Перемещения ППФ при разных методах расчета

№ метода расчета	Перемещение от М нижнего пояса, мм	Перемещение от N решетки и верхнего пояса, мм	Перемещение от N нижнего пояса, мм	Перемещение ППФ, мм	Отклонение от наиболее точного аналитического метода, %	Отклонение от пространственной РС
1	2,39	12,84	0,06	15,29	45,45	53,50
2	2,60	5,85	0,43	8,89	6,20	20,04
3	2,41	6,10	0,01	8,52	2,15	16,60
4	2,44	5,88	0,02	8,34	-	14,76
5				7,11		-
6				7,99		11,00
Принятый	2,60	5,85	-	8,46	1,39	15,95

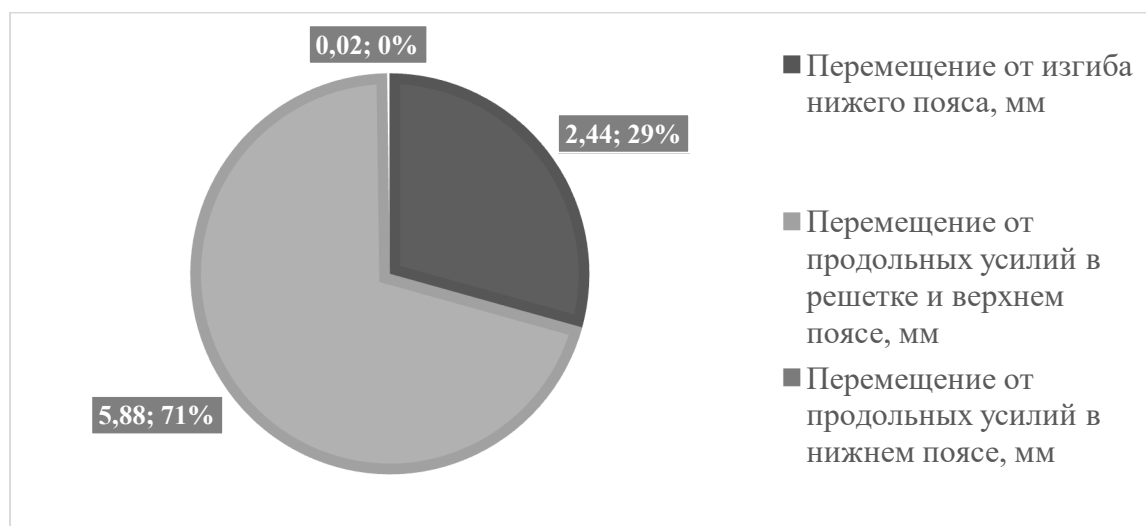


Рис. 10. Составляющие перемещения ППФ по методу расчета №4

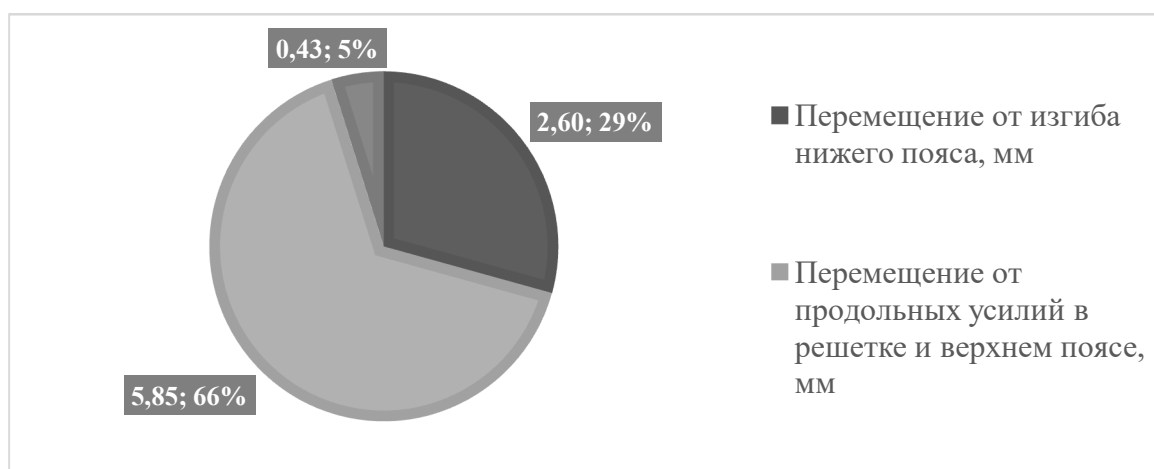


Рис. 11. Составляющие перемещения ППФ по методу расчета №2

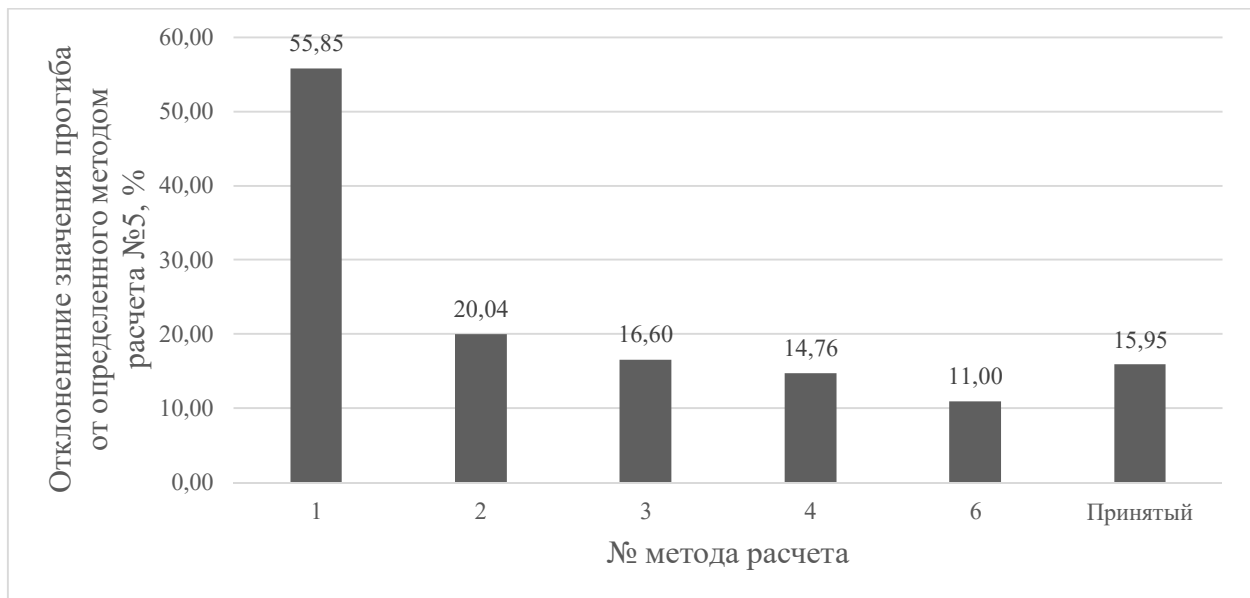


Рис. 12. Точность определения перемещения ППФ

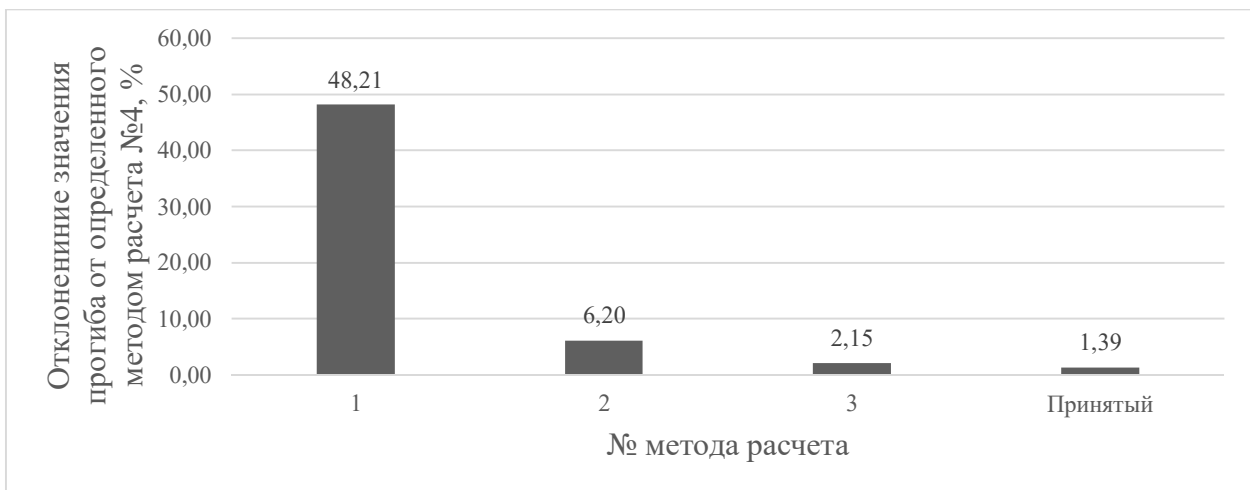


Рис. 13. Точность аналитического расчета перемещения ППФ

Для расчета податливости ППФ принимаем формулу:

$$\delta_{\text{ППФ}} = \frac{2b \sum_1^m [M_{i \text{ НП}}]^2}{3EI_{y \text{ НП}}} + \frac{\sum_1^m l_{i \text{ п}} [N_{i \text{ п}}]^2}{EA_{\text{п}}}; \quad (10)$$

С учетом формулы (10) жесткость упругих опор, имитирующих работу решетки в плоскости ППФ будем определять по формуле:

$$C_{\text{п}} = \frac{EA_{\text{п}}}{\sum_1^m l_{i \text{ п}} [N_{i \text{ п}}]^2} + \frac{3EI_{y \text{ НП}}}{b} \left(\frac{1}{2 \sum_1^m [M_{i \text{ НП}}]^2} - \frac{n}{(n-1)^2 b^2} \right) \left[\frac{\text{кН}}{\text{м}} \right]. \quad (11)$$

Определение внутренних усилий $M_{i \text{ НП}}$ и $N_{i \text{ п}}$ производится для $(n-1)$ раз внутренне статически неопределимой шарнирно-стержневой РС ППФ с неразрезным нижним поясом (рис. 5), где n – количество панелей ППФ.

Заключение

1. Предложена уточнённая расчётная схема ездового пояса с учетом упругой податливости решетки в плоскости ППФ.
2. Проведена проверка рекомендованной [3] методики определения внутренних усилий в ППФ.
3. Произведена численная проверка метода определения изгибающего момента в нижнем поясе ППФ от внецентренного примыкания элементов решетки.
4. Проанализирован вклад перемещений от изгибающего момента и поперечных сил в нижнем поясе и других элементах фермы в общую податливость ППФ.
5. Выполнено сравнение результатов определения податливости ППФ шестью методами.
6. Выбран аналитический метод расчета податливости нижнего пояса ППФ.
7. Выведена формула для определения жесткости упругих опор, имитирующих работу решетки в плоскости ППФ.

Библиографический список

1. Ельников Н.А., Кочетова Е.А. Анализ применения систем типа «подкраново-подстропильные фермы» в большепролетных цехах одноэтажных промышленных зданий // Труды научного конгресса 14-го российского архитектурно-строительного форума. 2016. – С. 143–146.
2. Лампси Б.Б. Расчет подкраново-подстропильных ферм. – Горький, 1978. – 52 с.
3. Руководство по проектированию стальных подкрановых конструкций. – М.: ЦНИИпроектстальконструкция, 1976. – 112 с.
4. Еремин К.И., Шульга С.Н. Влияние эксцентриситета на напряженно-деформированное состояние верхней зоны стенок подкраново-подстропильных ферм // Наука и безопасность. – 2015. – № 5(18). – С. 49–52.
5. Tusnina O.A. Finite element analysis of crane secondary truss // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – № 1(77). – P. 68-89. doi: 10.18720/MCE.77.7.
6. Еремин К.И. Предотвращение разрушений строительных металлических конструкций. – Магнитогорск: МГТУ им. Г.И. Носова, 2004. – 235 с.
7. Еремин К.И., Шульга С.Н. Моделирование развития усталостных повреждений в подкраново-подстропильных фермах // Вестник МГСУ. – 2014. – № 2. – С. 30–38.
8. Туснина О.А., Такки В.Ф., Егоров И.Ф. Опыт замены нижнего пояса находящейся под нагрузкой подкраново-подстропильной фермы // Промышленное и гражданское строительство. – 2023. – № 4. – С. 21-28. doi: 10.33622/0869-7019.2023.04.21-28.
9. Еремин К.И., Шульга С.Н. Напряженно-деформированное состояние узлов подкраново-подстропильных ферм // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – № 4. – С. 52–54.
10. Особенности эксплуатации металлических конструкций промышленных зданий / К.И. Еремин, А.Н. Шувалов, Г.А. Павлова, С.А. Матвеевский, М.В. Нащекин, Е.Л. Алексеева. – М.: Издательство МИСИ, МГСУ, 2012. – 248 с.
11. Влияние жесткости элементов решетки на податливость ездового пояса подкраново-подстропильной фермы (ППФ) / Б.Б. Лампси, П.А. Хазов, Ю.Д. Маркина, Д.М. Бриккель // Приволжский научный журнал. – 2022. – № 2. – С. 29–37.
12. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: Госстройиздат, 1962. – 475 с.
13. Александров Б.Я., Лашеников, Н.Н. Шапошников А.В. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.

14. Лампси Б.Б., Маркина Ю.Д., Хазов П.А. Влияние высоты подкраново-подстропильной фермы (ППФ) на податливость ездового пояса // Приволжский научный журнал. – 2023. – № 1. – С. 28–34.
15. Горев В.В. Металлические конструкции. Т. 2. Конструкции зданий. – М.: Высш. шк., 2004. – 551 с.

References

1. Elnov N.A., Kochetova E.A. Analysis of the use of systems such as “crane-rafter trusses” in long-span workshops of one-story industrial buildings. Proceedings of the Scientific Congress of the 14th Russian Architectural and Construction Forum. 2016. Pp. 143–146.
2. Lampsi B.B. Calculation of crane and rafter trusses. Gorky, 1978. 52 p.
3. Guidelines for the design of steel crane structures. M.: TsNIIproektstalkonstruksiya, 1976. 112 p.
4. Eremin K.I., Shulga S.N. The influence of eccentricity on the stress-strain state of the upper zone of the walls of crane-rafter trusses. Science and Safety. No. 5(18). 2015. Pp. 49–52.
5. Tushina O.A. Finite element analysis of crane secondary truss. Journal of Civil Engineering. No. 1(77). 2018. Pp. 68-89. doi: 10.18720/MCE.77.7.
6. Eremin K.I. Prevention of destruction of building metal structures. Magnitogorsk: MSTU named after G.I. Nosov, 2004. 235 p.
7. Eremin K.I., Shulga S.N. Modeling the development of fatigue damage in crane-rafter trusses. Bulletin of MSCU. No. 2. 2014. Pp. 30–38.
8. Tushina O.A., Takki V.F., Egorov I.F. Experience in replacing the lower chord of a crane-rafter truss under load. Industrial and Civil Construction. No. 4. 2023. Pp. 21-28. doi: 10.33622/0869-7019.2023.04.21-28.
9. Eremin K.I., Shulga S.N. Stress-strain state of crane-rafter truss units. Industrial and Civil Construction. No. 4. 2012. Pp. 52–54.
10. Eremin K.I., Shuvalov A.N., Pavlova G.A., Matveyushkin S.A., Nashchekin M.V., Alekseeva E.L. Features of the operation of metal structures of industrial buildings. M.: Publishing house MSCU, 2012. 248 p.
11. Lampsi B.B., Khazov P.A., Markina Yu.D., Brickel D.M. The influence of the rigidity of lattice elements on the compliance of the driving belt of a crane-under-rafter truss. Volga Region Scientific Journal. No. 2. 2022. Pp. 29–37.
12. Bychkov D.V. Structural mechanics of thin-walled rod structures. M.: Gosstroyizdat, 1962. 475 p.
13. Aleksandrov B.Ya., Lashchenikov, N.H. Shaposhnikov A.V. Structural mechanics. Thin-walled spatial systems. M.: Stroyizdat, 1983. 488 p.
14. Lampsi B.B., Markina Yu.D., Khazov P.A. The influence of the height of the crane-sub-rafter truss on the compliance of the driving belt. Volga Scientific Journal. No. 1. 2023. Pp. 28–34.
15. Gorev V.V. Metal structures. Vol. 2. Building structures. M.: High school, 2004. 551 p.

STIFFNESS OF THE JOINTS OF A CRANE SECONDARY TRUSS IN ITS PLANE

B. B. Lampsi¹, Yu. D. Markina²

Nizhny Novgorod State University of Architecture, Building and Civil Engineering^{1,2}
Russia, Nizhny Novgorod

¹PhD of Technical Sciences, Head of the Department of Theory of Structures and Technical Mechanics,
Tel.: +7(831)4305496, e-mail: lampsi@yandex.ru

²Assistant Professor of the Department of Theory of Structures and Technical Mechanics, Tel. +7 (908)2373581,
e-mail: poluektoff@bk.ru

According to the recommendations for the calculation of crane-rafter trusses the stiffness of the node connections of the driving belt with the lattice elements is not taken into account in the calculation. This article proposes a refined design diagram of the driving belt taking into account the elastic compliance of the lattice in the plane of the truss, presents a method for determining the rigidity of elastic supports that simulate the operation of the lattice and the results of an analytical technique for selecting a section and determining the stiffness of the elastic supports of the belt in the plane of the truss.

Keywords: crane secondary truss, elastic supports, linear pliability, stiffness, lower belt, stiffness of elastic supports.

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТАЛЬНОГО КАРКАСА ПРИ ПОСТОЯННОЙ И ВЕТРОВОЙ НАГРУЗКЕ

В. С. Варнавский¹, А. В. Конов², Е. В. Варнавская³

Воронежский государственный технический университет^{1,2}

Воронежский государственный медицинский университет им. Н.Н. Бурденко³
Россия, г. Воронеж

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(473)2715230, e-mail: mailVVS@inbox.ru

²Магистрант кафедры строительной механики, тел.: +7(953)7192881, e-mail: kav.9@mail.ru

³Канд. филол. наук, старший преподаватель кафедры иностранных языков, тел.: +7(473) 2531294,
e-mail: mailvev@mail.ru

Исследуется упругопластическое деформирование и находится несущая способность стального пространственного каркаса на основе принципа предельного равновесия при совместном действии постоянной и ветровой нагрузки. Исследован поэтапный характер нагружения сооружения при действии сверхнормативной ветровой нагрузки. Приведена оценка достоверности численного алгоритма расчёта. Расчёты выполнены с использованием ПК ЛИРА.

Ключевые слова: стальной пространственный каркас, упругопластическое деформирование, принцип предельного равновесия, ПК ЛИРА.

Введение

В ходе эксплуатации многих строительных конструкций возникают исключительные случаи, когда на сооружение начинает действовать нагрузка, которая по своей величине намного выше её нормативных значений. Одной из них является ветровая нагрузка. Проектирование конструкции изначально с большим запасом прочности на действие ветровой нагрузки, значительно превышающей известные её параметры для данного климатического района, является невыгодным с экономической точки зрения. Поэтому актуальным становится подход, когда сооружение проектируется согласно установленным строительным нормам. Но дополнительно применяется метод расчёта, позволяющий оценить живучесть конструкции при величинах ветровой нагрузки в несколько раз больших её нормативных значений.

Исследование упругопластического деформирования пространственного стального каркаса

Объектом расчёта в настоящей работе является несущий пространственный стальной каркас реально существующего промышленного здания, предназначенного для приёма и очистки зерновых культур. Цель исследования состоит в оценке способности конструкции сопротивляться высоким ветровым нагрузкам.

В методике расчёта учитываются пластические свойства стали и явление перераспределения усилий в статически неопределимой системе в ходе её деформирования. Допускается нагружение стержневых элементов каркаса вплоть до появления в них пластических шарниров. Критерием разрушения по прочности считается превращение всего каркаса или отдельной его части в механизм вследствие появления пластических шарниров [1,2].

Данная работа является новым этапом в совершенствовании методики расчёта стальных каркасов на основе принципа предельного равновесия с применением программно-вычислительного комплекса Лира [3-9].

Общий вид конструкции несущего пространственного металлического каркаса и расположение основного технологического оборудования изображены на рис. 1. На рис. 2 показана пространственная стержневая расчётная схема всей конструкции. Основная высотная часть имеет высоту 25 м и размеры в плане: фронтальный – 12 м; боковой – 14 м. Основная часть включает в себя четыре уровня площадок по высоте (т.е. четыре этажа) и конструкцию кровли. Уровень земли этажом не считается. Стилобатная часть, т.е. пристройка, имеет высоту 8 м и фронтальный размер 11.7 м. Стержневая расчётная схема несущей конструкции площадки второго этажа изображена на рис. 3. В табл. 1 представлены спецификации поперечных сечений стержневых элементов системы. Расчётные схемы остальных этажей имеют аналогичную структуру.

Пространственный каркас высотной части состоит из трёх фронтальных (вдоль продольных осей А, Б, В) основных несущих плоских рам, включающих в себя колонны, главные балки и диагональные связи. В поперечном направлении (вдоль осей 1, 2, 3) эти основные рамы объединяются жёстко также главными балками. В конструкции горизонтальных площадок второстепенные балки шарнирно опираются на продольные главные балки. Опираие балок настила на главные и второстепенные балки также шарнирное.

На конструкцию действуют следующие нагрузки:

- 1) собственный вес конструкции;
- 2) нагрузка от технологического оборудования;
- 3) временная нагрузка на перекрытие горизонтальных площадок;
- 4) временная ветровая нагрузка.

На рис. 4 изображена нагрузка от технологического оборудования на втором и третьем этажах и отмечены цветом основные узлы конечно-элементного разбиения каркаса для наименее плотной конечно-элементной сетки (КЭ-сетки №1). С целью обеспечения наибольшей наглядности на рис. 4 часть второстепенных элементов схемы не показана.

В работе было выполнено исследование на воздействие ветровой нагрузки вдоль оси У, когда ветровое давление оказывалось на фронтальную плоскость сооружения. Данное направление ветра является наиболее опасным с точки зрения нарушения прочности и деформативности конструкции. На рис. 5 представлено распределение ветровой нагрузки по элементам каркаса в виде мозаики.

При упругопластическом расчёте считается, что вся перечисленная действующая нагрузка, кроме ветровой, является нормативной, т.е. взята по действующим нормативно-техническим документам для данного сооружения. В ходе пошагового нагружения возрастает только ветровая нагрузка. Величина ветровой нагрузки на каждом этапе нагружения вычисляется как $W = kW_0$. Здесь W_0 – это нормативная (проектная) нагрузка. Коэффициент k показывает насколько может увеличиваться нагрузка W по сравнению с начальной нагрузкой W_0 , взятой из линейно-упругого расчёта, за счёт учёта пластических свойств стали.

Для изучения поведения каркаса используется пошаговый метод нагружения, эффективный для решения физически нелинейных задач. Поэтому для обеспечения

достоверности численной схемы решения были проанализированы результаты для трёх вложенных конечно-элементных сеток и трёх шагов нагружения ветровой нагрузки ΔW . КЭ-сетка №2 является в два раза более плотной, чем КЭ-сетка №1. КЭ-сетка №3 является также в два раза более плотной, чем КЭ-сетка №2. Шаги нагружения ветровой нагрузки брались равными $\Delta W=0.1W_0$, $\Delta W=0.02W_0$, $\Delta W=0.005W_0$.

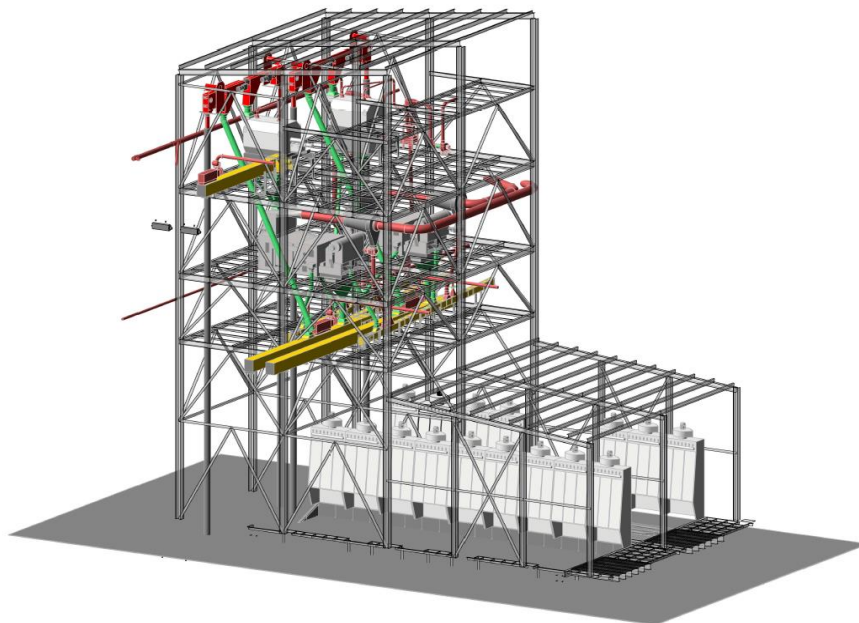


Рис. 1. Общий вид конструкции стального каркаса и расположение оборудования

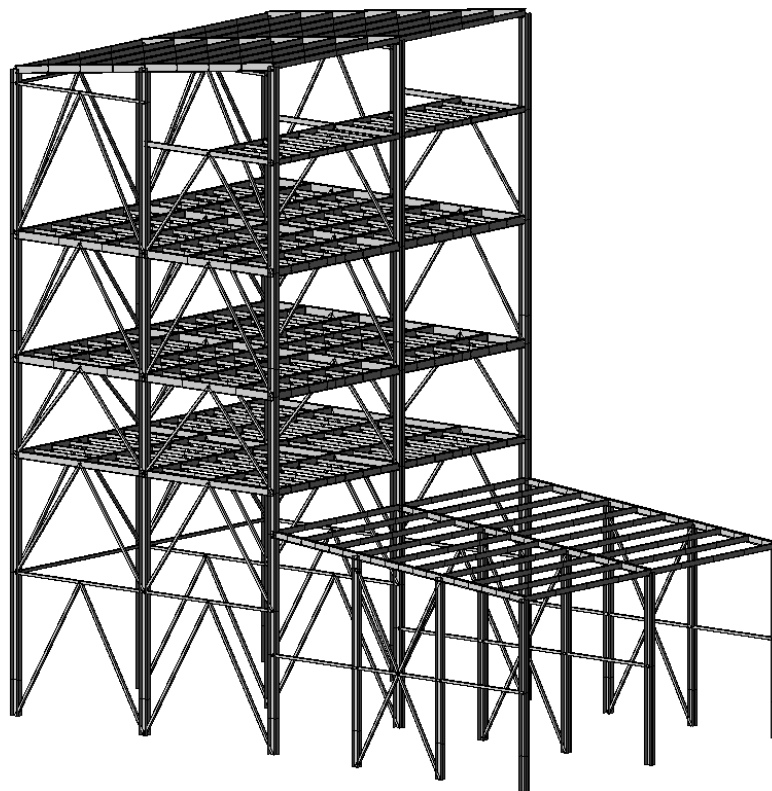


Рис. 2. Пространственная стержневая расчетная схема конструкции

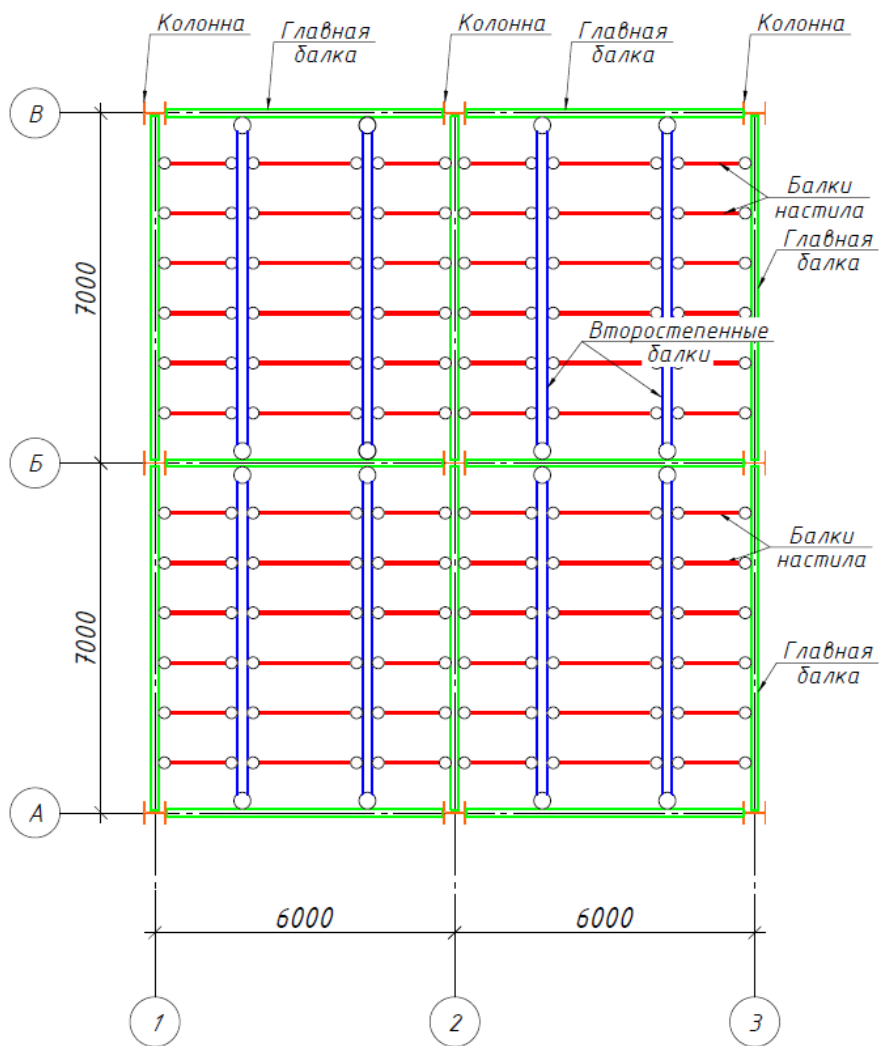


Рис. 3. Расчётная схема конструкции площадки второго этажа

Таблица 1

Поперечные сечения элементов стального каркаса

Вид элемента	Сечение элемента
Колонна	Двутавр 30К1
Главная балка	Двутавр 30Б1
Второстепенная балка	Двутавр 30Ш1
Балка настила	Швеллер 6.5П

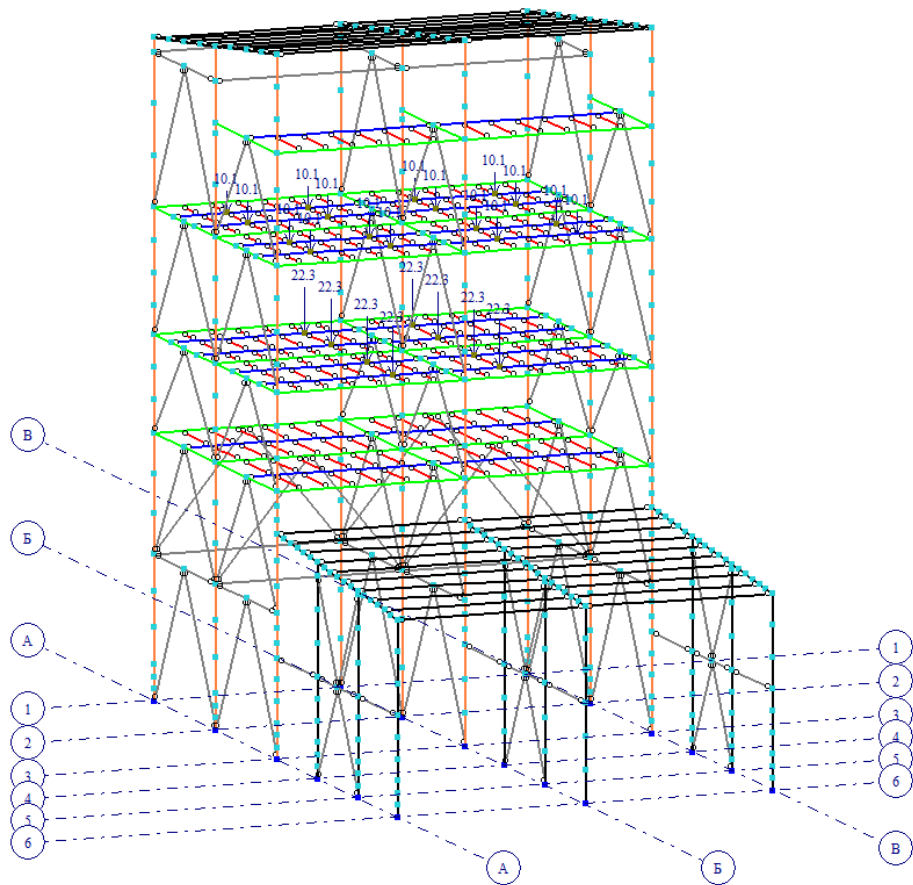


Рис. 4. Конечно-элементное разбиение и нагрузка (в кН) от технологического оборудования (часть элементов схемы условно не показана)

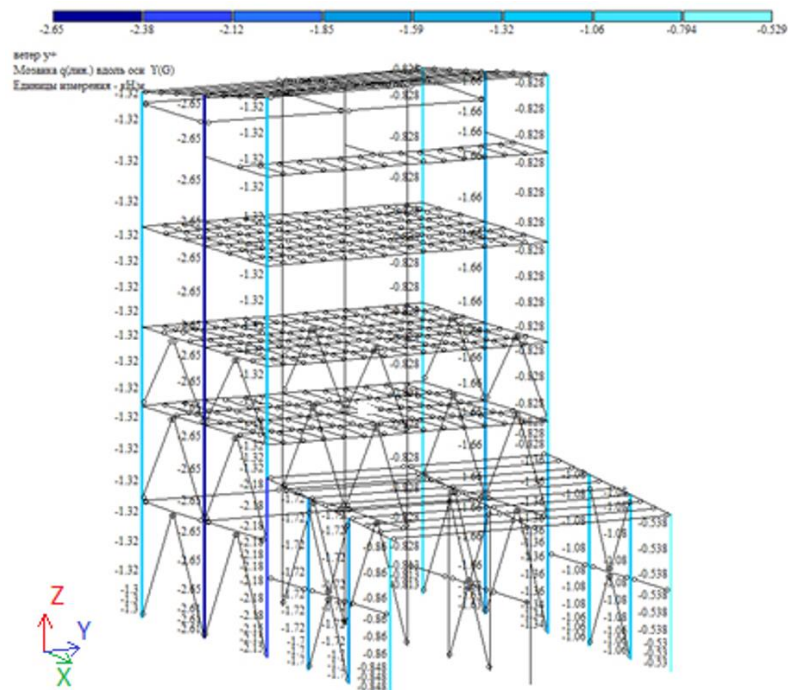


Рис. 5. Распределение ветровой нагрузки, направленной вдоль оси Y (часть элементов схемы условно не показана)

На рис. 6, 7 показаны места, направление и порядок возникновения пластических шарниров в конструкции. Так как происходит пространственное деформирование каркаса, то плоские пластические шарниры образуются в двух плоскостях: либо при изгибе колонны относительно глобальной оси X , либо при изгибе ригеля (главной балки) относительно глобальной оси Z . Для лучшей наглядности направления, по которому пластический шарнир удаляет в стержне каркаса угловую связь, на рисунках в месте образования пластического шарнира изображена ось, относительно которой происходит изгиб, и направление изгибающего момента относительно этой оси.

С целью облегчения понимания последовательности возникновения пластических шарниров они разбиваются на несколько групп. Каждая группа шарниров образуется на определённом этапе нагружения при очень близких нагрузках, т.е. почти одновременно. В табл. 2, 3 приведены значения коэффициента k , характеризующие величину нагрузки на каждом этапе нагружения. Обозначенный интервал коэффициента k позволяет оценить диапазон фактической ветровой нагрузки, вызывающей появление группы пластических шарниров на каждой стадии нагружения. Этап образования пластических шарниров иллюстрируется соответствующим цветом на рисунках и в таблицах.

На рис. 6,7 и в табл. 2, 3 представлены результаты расчётов, полученные для КЭ-сеток №1, №2 и шагов нагружения $\Delta W=0.1W_0$, $\Delta W=0.02W_0$. В действительности исследования носили более широкий характер. Для каждой из трёх первоначально подобранных КЭ-сеток выполнялись расчёты с тремя указанными шагами нагружения ΔW . Проведённый анализ результатов показал, что наблюдается хорошее совпадение мест и порядка возникновения пластических шарниров, а также величин соответствующих нагрузок для трёх вложенных КЭ-сеток и трёх шагов по нагрузке ΔW . Таким образом, можно сделать вывод о достоверности численной схемы решения поставленной физически нелинейной задачи.

На рис. 8 изображено деформированное состояние конструкции при действии нормативной ветровой нагрузки ($k=1$) и при действии нагрузки, близкой к предельной разрушающей ($k=3.3$).

При исследовании упругопластического деформирования пространственного металлического каркаса в случае воздействия сверхнормативной ветровой нагрузки на фронтальную плоскость сооружения (т.е. вдоль оси Y) можно сделать следующие основные выводы:

- 1) первые пластические шарниры появляются при ветровой нагрузке, превышающей нагрузку, установленную нормативными документами, в 2.2-2.3 раза;
- 2) в ходе первых трёх этапов нагружения образование пластических шарниров не приводит к возникновению в раме локальных механизмов и, следовательно, не происходит обрушения отдельных частей рам;
- 3) на последнем четвёртом этапе нагружения пространственная конструкция за счёт новых пластических шарниров превращается в механизм и происходит её полное обрушение;
- 4) запас прочности конструкции при действии ветровой нагрузки вдоль оси Y с учётом использования всего пластического резерва стали относительно небольшой и является трёхкратным.

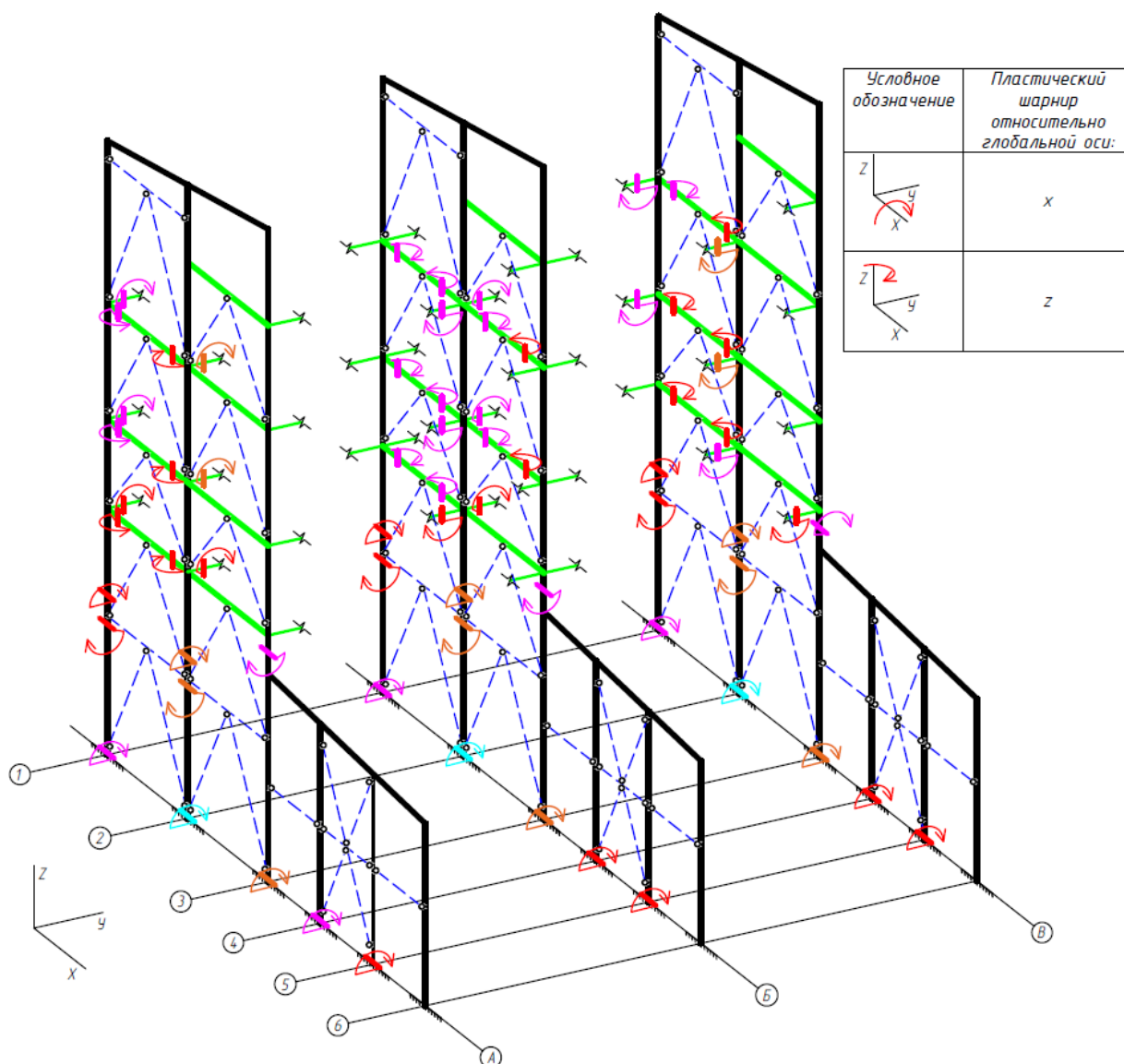


Рис. 6. Схема поэтапного нагружения каркаса с образованием пластических шарниров для ветровой нагрузки вдоль оси Y; КЭ-сетка №1

Таблица 2
Результаты расчёта для ветровой нагрузки вдоль оси Y для разных шагов приращения нагрузки ΔW ; КЭ-сетка №1

Номер этапа нагружения	Коэффициент нагрузки k, где $W=kW_0$	
	$\Delta W=0.1W_0$	$\Delta W=0.02W_0$
1 	2.2-2.3	2.24-2.36
2 	2.7-2.9	2.70-3.00
3 	3.0-3.1	3.04-3.20
4 	3.2-3.3	3.22-3.34

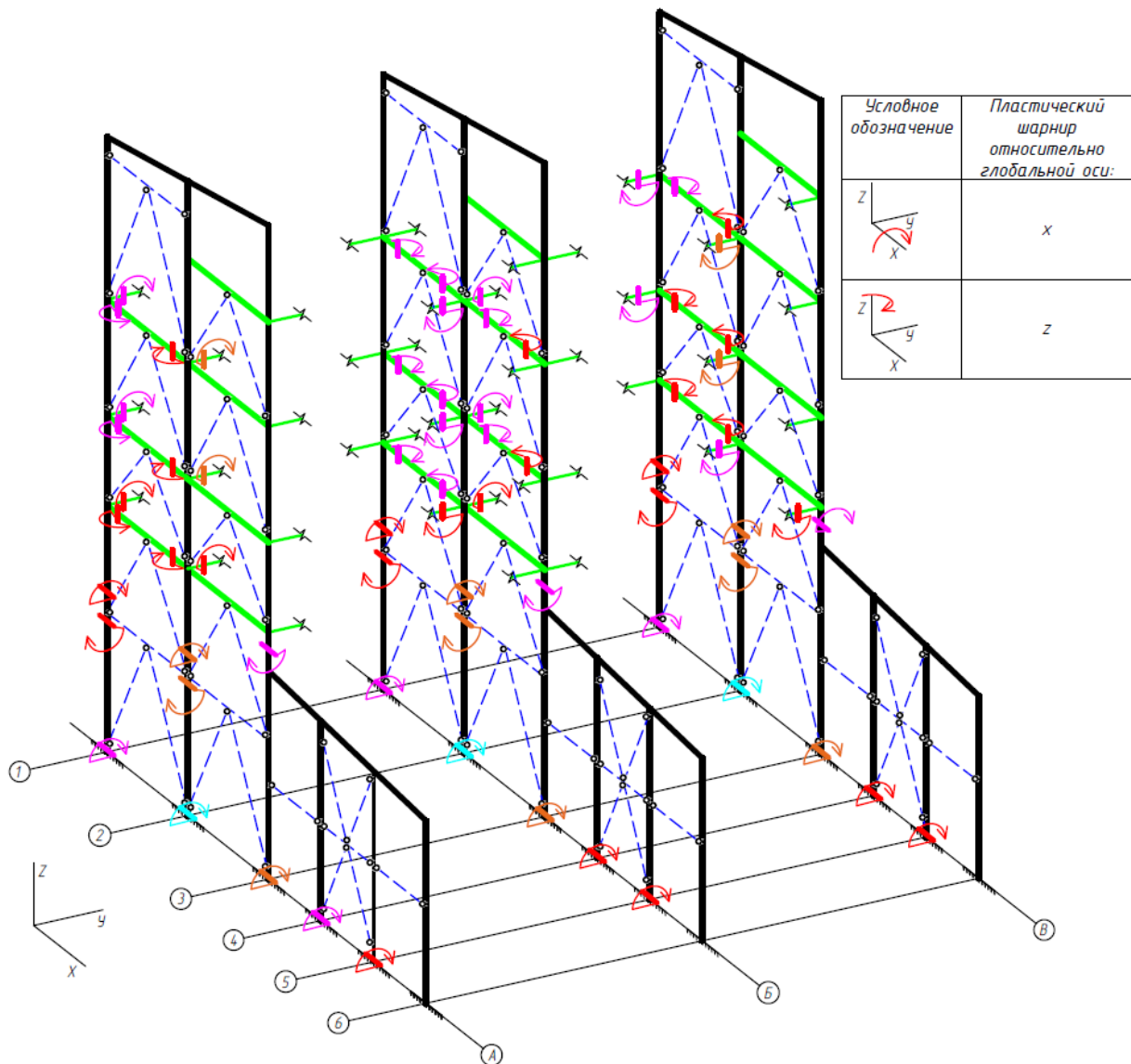






Рис. 7. Схема поэтапного нагружения каркаса с образованием пластических шарниров для ветровой нагрузки вдоль оси Y; КЭ-сетка №2

Таблица 3
 Результаты расчёта для ветровой нагрузки вдоль оси Y для разных КЭ-сеток; шаг $\Delta W=0.02W$

Номер этапа нагружения	Коэффициент k, где $W=kW_0$	
	КЭ-сетка №1	КЭ-сетка №2
1 	2.24-2.36	2.24-2.40
2 	2.70-3.00	2.70-3.02
3 	3.04-3.20	3.04-3.22
4 	3.22-3.34	3.24-3.36

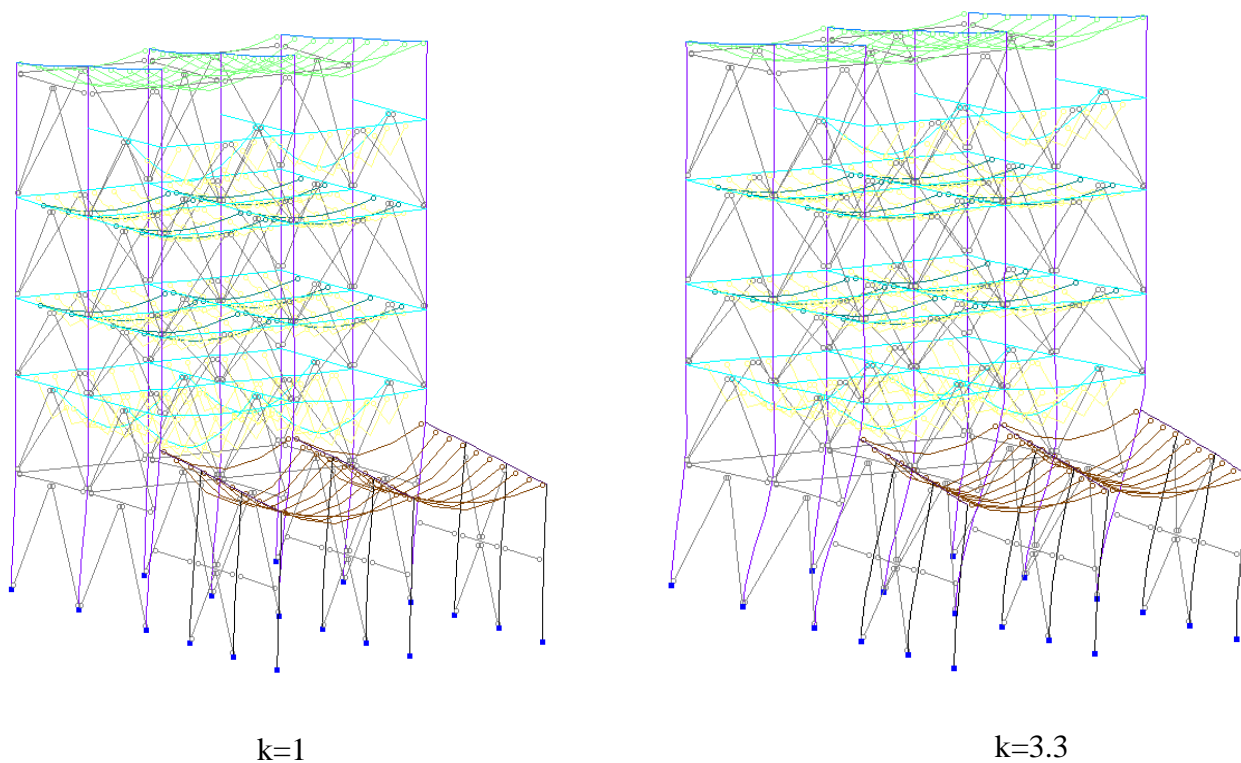


Рис. 8. Деформированный вид каркаса при действии ветровой нагрузки вдоль оси Y для двух её характерных значений: нормативного (слева) и предельного (справа)

Заключение

1. Выполнено исследование упругопластического деформирования пространственного стального каркаса многоэтажного промышленного здания при постоянной и ветровой нагрузке. Произведена оценка численной достоверности предлагаемой схемы расчёта.
2. Выявлены порядок и местоположение образования пластических шарниров в конструкции в ходе возрастания ветровой нагрузки выше нормативных значений. Вычислены значения нагрузок, вызывающих предельные состояния сечений в виде образования пластических шарниров.
3. Найдена предельная нагрузка, вызывающая предельное состояние всего стального каркаса в виде превращения его в геометрически изменяемую систему.

Библиографический список

1. Ржаницын А.Р. Строительная механика: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.
2. Строительная механика: программы и решения задач на ЭВМ: учеб. пособие для вузов / Р.П. Каркаускас, А.А. Критинис, Ю.Ю. Аткачюнас и др.; под общ. ред. А.А. Чираса. – М.: Стройиздат, 1990. – 360 с.
3. Варнавский В. С., Поворин А.С. Определение несущей способности металлического рамного каркаса с применением программного комплекса Лира // Строительная механика и конструкции. – 2011. – № 2(3). – С. 113-121.

4. Варнавский В.С., Болотов А.О. Численное исследование несущей способности металлической рамы на основе программного комплекса Лира // Строительная механика и конструкции. – 2014. – № 1(8). – С. 117-125.
5. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Мартынова М.М. Расчёт плоского стального каркаса на статическую нагрузку с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. – 2018. – № 3(18). – С. 51-60.
6. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Востриков В.В. Расчёт плоского стального каркаса на постоянную и временную нагрузку с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 3(22). – С. 76-86.
7. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Востриков В.В. Расчётный анализ распределения усилий в металлическом рамном каркасе с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 1(28). – С. 76-86.
8. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Малыхина А.С. Определение несущей способности железобетонной стоечно-ригельной опоры путепровода с учётом неупругих деформаций материала // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 4 (31). – С. 56-69.
9. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Ненашев Д.С. Исследование упругопластического деформирования плоского стального каркаса при постоянной и крановой нагрузке // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 2 (33). – С. 110-122.

References

1. Rzhantsyn A.R. Structural mechanics: textbook. M.: High School, 1982. 400 p.
2. Karkauskas R.P., Kritinis A.A., Atkociunas Yu.Yu. Structural mechanics: programs and solutions to computer problems: textbook. Ed. A.A. Chiras. M.: Stroyizdat, 1990. 360 p.
3. Varnavsky V.S., Povorin A.S. Determination of the load-bearing capacity of a metal frame using the Lira software package. Construction Mechanics and Structures. No. 2(3). 2011. Pp. 113-121.
4. Varnavsky V.S., Bolotov A.O. Numerical study of the load-bearing capacity of a metal frame based on the Lira software package. Construction Mechanics and Structures. No. 1(8). 2014. Pp. 117-125.
5. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Martynova M.M. Calculation of a flat steel frame for static load taking into account plastic deformations of the material. Construction Mechanics and Structures. No. 3(18). 2018. Pp. 51-60.
6. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Vostrikov V.V. Calculation of a flat steel frame for permanent and temporary loads taking into account plastic deformations of the material. Construction Mechanics and Structures. No. 3(22). 2019. Pp. 76-86.
7. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Vostrikov V.V. Calculation analysis of force distribution in a metal frame frame taking into account plastic deformations of the material. Construction Mechanics and Structures. No. 1(28). 2021. Pp. 76-86.
8. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Malykhina A.S. Determination of the load-bearing capacity of a reinforced concrete post-transom support of an overpass taking into account inelastic deformations of the material. Construction Mechanics and Structures. No. 4(31). 2021. Pp. 56-69.
9. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Nenashev D.S. Study of elastoplastic deformation of a flat steel frame under constant and crane loads. Construction Mechanics and Structures. No. 2(33). 2022. Pp. 110-122.

INVESTIGATION OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION OF A SPATIAL STEEL FRAME AT CONSTANT AND WIND LOAD

V. S. Varnavsky¹, A. V. Konov², E. V. Varnavskaya³

Voronezh State Technical University^{1,2}

Voronezh State Medical University named after N.N. Burdenko³
Russia, Voronezh

¹PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230,
e-mail: mailVVS@inbox.ru

²MA Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(953)7192881, e-mail: kav.9@mail.ru

³PhD of Philological Sciences, Assistant Professor of the Department of Foreign Languages, Tel.: +7(473)2531294,
e-mail: mailvev@mail.ru

The elastic-plastic deformation is investigated and the bearing capacity of a steel spatial frame is found on the basis of the principle of ultimate equilibrium under the combined action of a constant load and wind load. The step-by-step nature of the loading of the structure under the action of an excess wind load is investigated. The estimation of the reliability of the numerical calculation algorithm is given. The calculations were performed using PC LIRA.

Keywords: steel spatial frame, elastic-plastic deformation, the principle of ultimate equilibrium, design-computational complex LIRA.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВОДОПРОПУСКНЫХ ТРУБ РАЗЛИЧНОГО СЕЧЕНИЯ

В. М. Флавианов¹, В. В. Волков², В. А. Козлов³, М. Г. Ордян⁴

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3,4}
Россия, г. Воронеж

¹Старший преподаватель кафедры строительной механики, тел.: +7(910)3414014, e-mail: flav@inbox.ru

²Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(910)2402587, e-mail: kotlac@yandex.ru

³Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

⁴Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30, e-mail: omg84@mail.ru

В статье проведён сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния водопропускных труб различного сечения, выполненных из ПВХ по навивной технологии и из гофрированного металла. Выполнен анализ деформированных схем и значений осадки грунта под действием собственного веса трубы, дорожной конструкции над трубой и полезной нагрузки от грузового автомобиля. Представлены выводы о наиболее предпочтительном сечении водопропускных труб для дорожного строительства.

Ключевые слова: ПВХ навивная труба, металлическая гофрированная труба, водопропускная труба, напряженно-деформированное состояние трубы и грунта.

Постановка задачи. Для определения наиболее оптимального сечения водопропускных труб для дорожного строительства необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние водопропускных труб различного сечения, выполненных из ПВХ по навивной технологии [16] и из гофрированного металла [6]. При выборе основных типовых форм сечения водопропускных труб был рассмотрен зарубежный и отечественный опыт строительства подобных сооружений в дорожном хозяйстве. На рис. 1 представлены наиболее часто встречающиеся типы сечений ПВХ навивных труб.

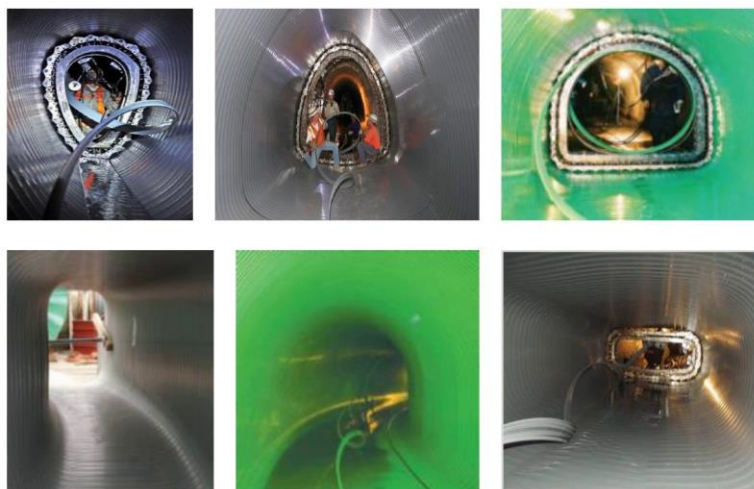


Рис. 1. ПВХ навивные трубы различных сечений

По результатам анализа различных типов и форм сечений водопропускных труб к дальнейшему моделированию были приняты три наиболее распространённых сечения: круглое, сводчатое с плоским основанием, каплевидное. При этом сечения эквивалентны между собой по пропускной способности, диаметр круглого сечения $d = 1,5$ м [10].

Расчетная модель. Расчетное моделирование выполнено в среде проектно-вычислительного комплекса Лира-САПР [5]. Для моделирования сечения труб использовался стержневой конечный элемент «Универсальный стержень», для моделирования грунта вокруг сечения трубы – конечные элементы плоской задачи различной формы (балка-стенка). Совместная работа этих элементов реализована с помощью специальных конечных элементов «Связь конечной жесткости» [5, 1], при этом для жесткости принято значение $s = 1200$ кН/м. В качестве жесткостных характеристик для выбранных конечных элементов приняты соответствующие коэффициенты постели, определяемые по методу Завриева [1]. Направления связей в горизонтальной и вертикальной плоскостях приняты в соответствии с направлением отпора грунта на тело водопропускной трубы [1]. В расчетных моделях применяются следующие жесткостные и физико-механические характеристики материалов:

- грунт – песок средней крупности, средней плотности, маловлажный; приведенный модуль упругости $E = 37,2$ МПа; приведенный коэффициент Пуассона $\nu = 0,408$; объемный вес $\gamma = 16,8$ кН/м³;

- ПВХ труба – приведенная толщина сечения $s = 1,67$ см; приведенный модуль упругости $E = 3400$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; объемный вес $\gamma = 13,5$ кН/м³;

- металлическая гофрированная труба – приведенная толщина сечения $s = 0,6$ см; приведенный модуль упругости $E = 220000$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$; объемный вес $\gamma = 17,8$ кН/м³.

В расчетных моделях учтены следующие нагрузки [4],[6]: собственный вес грунта и трубы; собственный вес покрытия из асфальтобетона; полезная нагрузка над конструкцией трубы (нагрузка на двухосную тележку грузового автомобиля $P = 80 \times 2 = 160$ кН = 16 Т).

Вид расчетных моделей с полезной нагрузкой представлен на рис. 2.

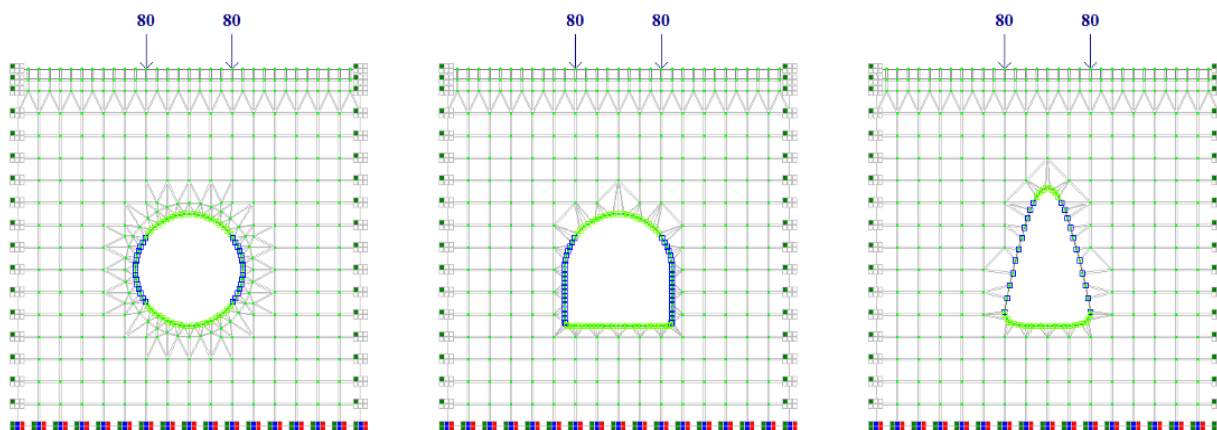


Рис. 2. Вид расчетных моделей различных сечений водопропускных труб с нагрузкой

Анализ полученных результатов. По результатам расчета были получены следующие данные: деформированные схемы со значениями осадок грунта от собственного веса (рис. 3, рис. 5) и полезной нагрузки (рис. 4, рис. 6) для ПВХ труб и гофрированных металлических соответственно; эпюры распределения внутренних усилий (рис. 7), качественно одинаковые для ПВХ навивных труб и гофрированных металлических (отличия в численных значениях).

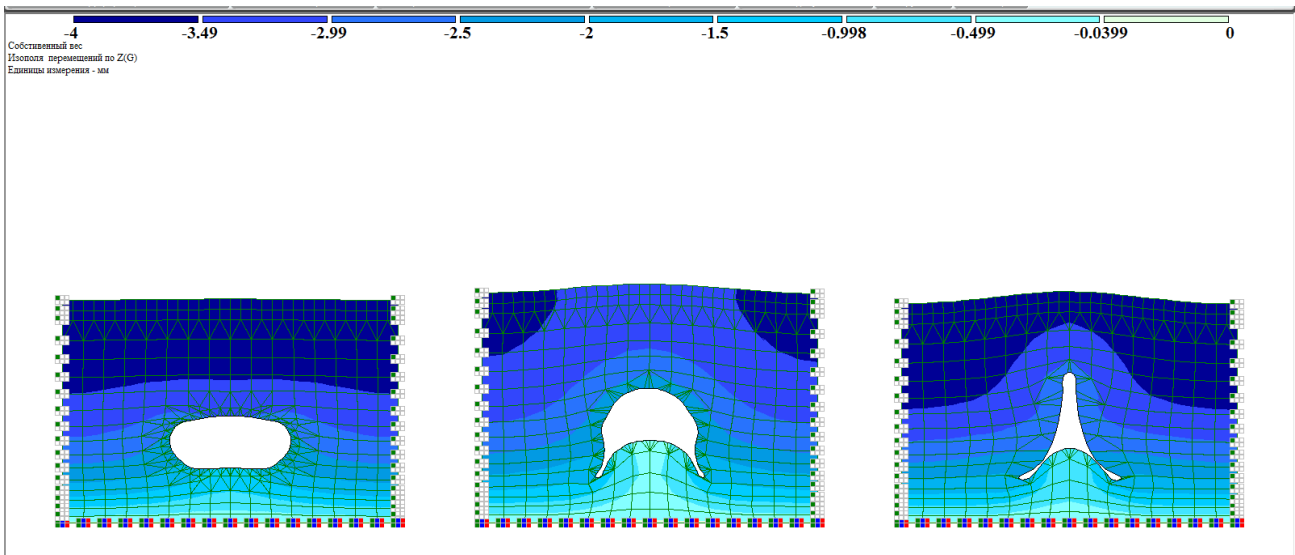


Рис. 3. Осадка грунта основания от собственного веса (трубы ПВХ)

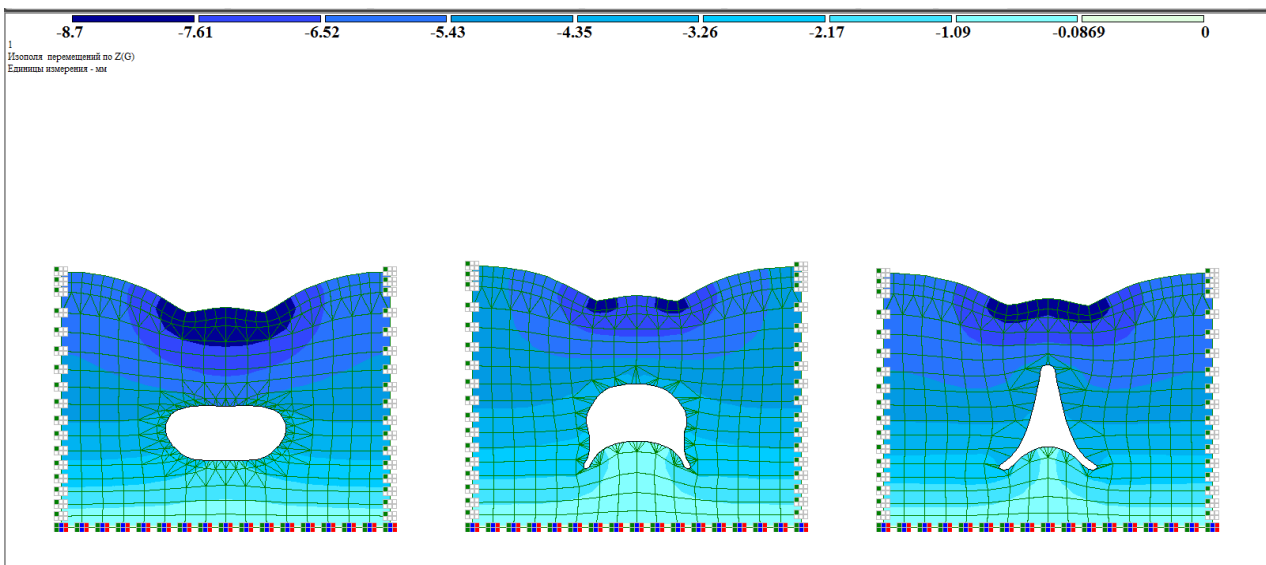


Рис. 4. Осадка грунта основания от комбинации нагрузок (трубы ПВХ)

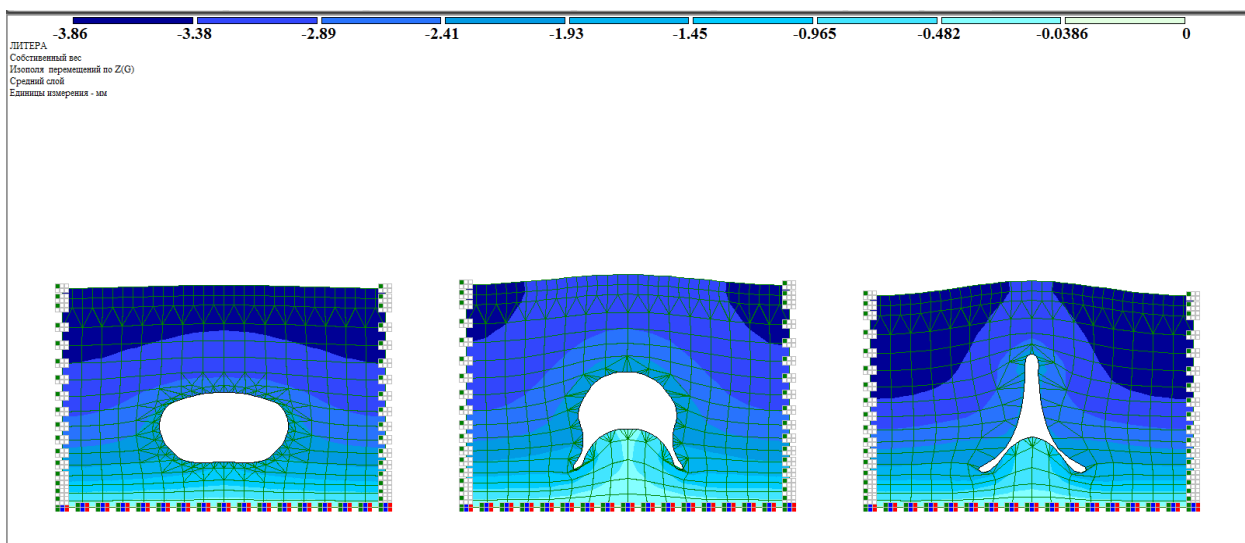


Рис. 5. Осадка грунта основания от собственного веса (металлические трубы)

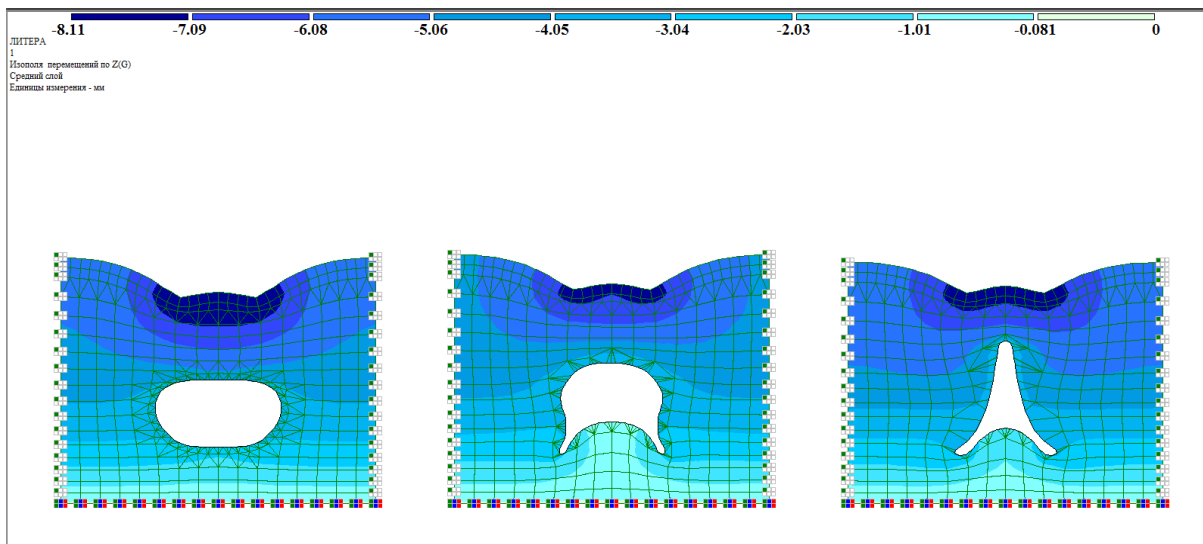


Рис. 6. Осадка грунта основания от комбинации нагрузок (металлические трубы)

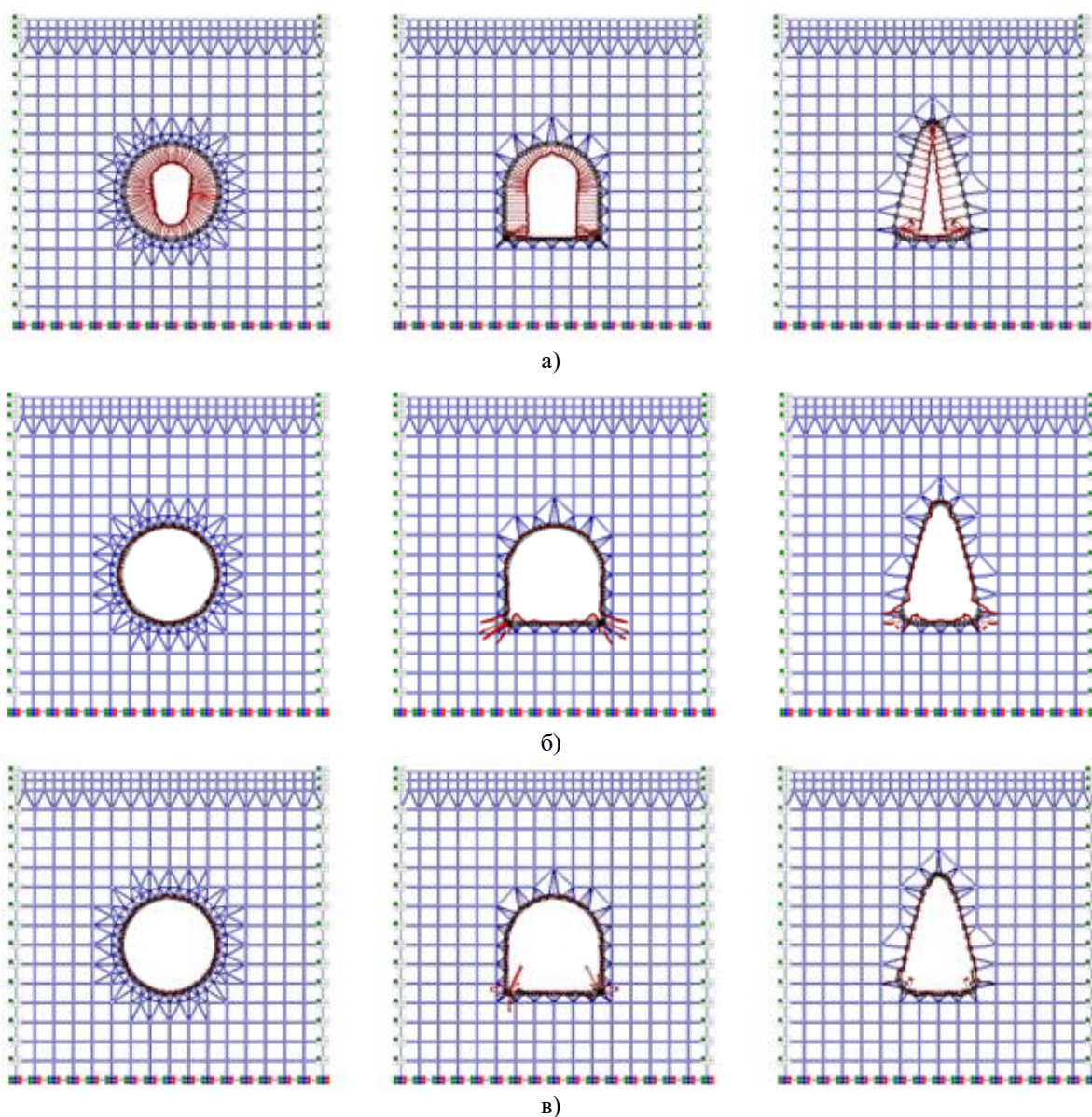


Рис. 7. Эпюры продольных сил (а), изгибающих моментов (б) и поперечных сил (в)

На рис. 8, 9 представлены главные напряжения в грунте вокруг рассматриваемых сечений труб из ПВХ и металла.

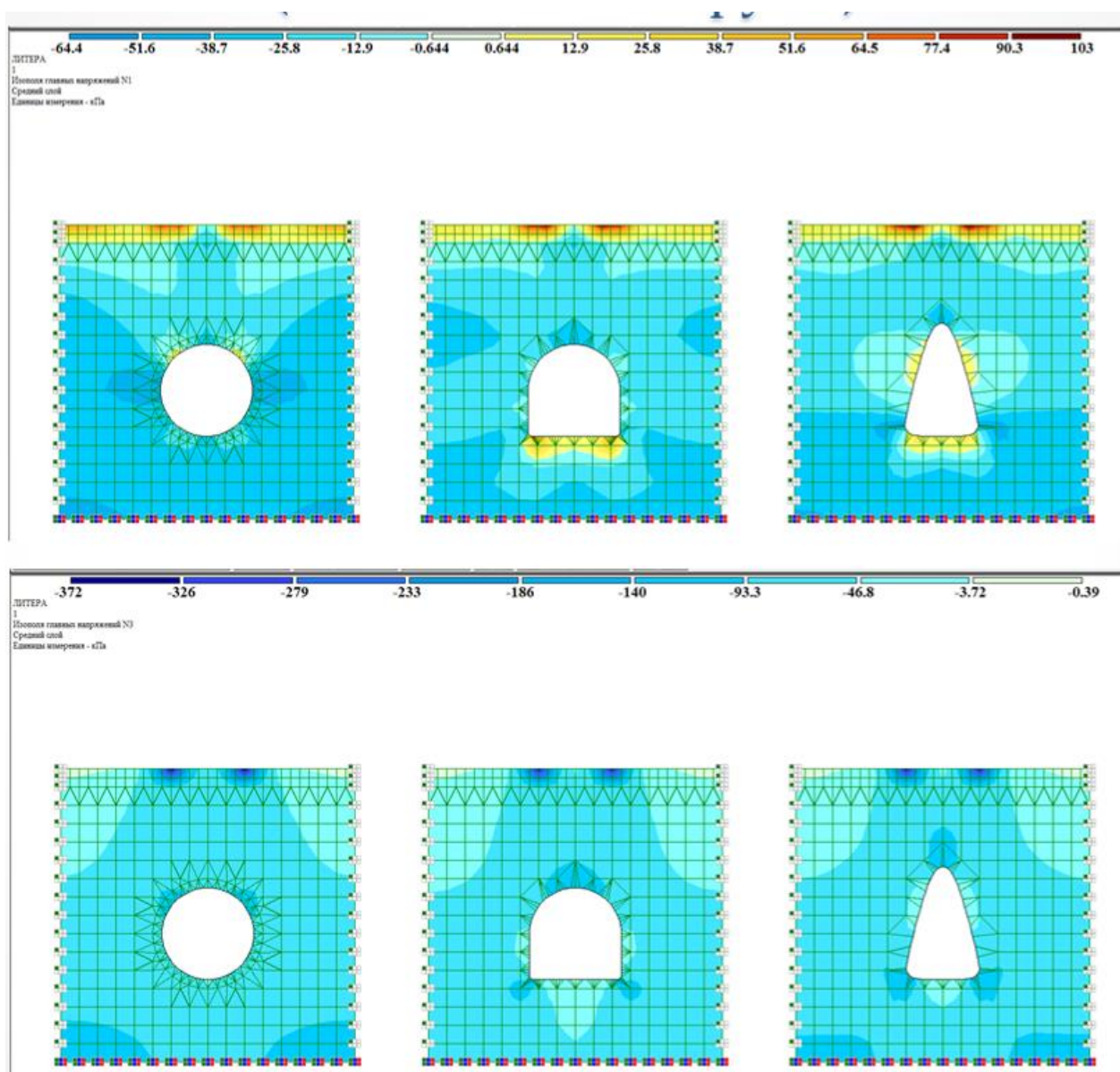


Рис. 8. Главные напряжения в грунте (трубы ПВХ)

Анализ деформированных схем и значений осадки грунта показывает, что водопропускные трубы из ПВХ обладают несколько меньшей жесткостью, чем металлические. Наибольшее значение осадки грунта вокруг ПВХ труб составляет 8,7 мм, вокруг металлических труб – 8,1 мм. Но такая незначительная разница в значениях осадок доказывает возможность и эффективность применения навивных ПВХ труб в дорожном строительстве в сравнении с привычным гофрированным металлом.

Анализ распределения внутренних усилий и главных напряжений показал, что наиболее плавное распределение наблюдается в круглом сечении, так как отсутствуют зоны локальных концентраторов. Однако круглое сечение менее удобно по доступности для мониторинга или ремонта. Сводчатое сечение обладает большим удобством для доступа специалистов, но характеризуется локальными скачками изгибающего момента и поперечной силы в зонах перехода основания к стенкам. Каплевидное сечение обладает

наибольшими локальными зонами концентрации внутренних усилий и напряжений, уступая по всем параметрам рассмотренным ранее двум сечениям.

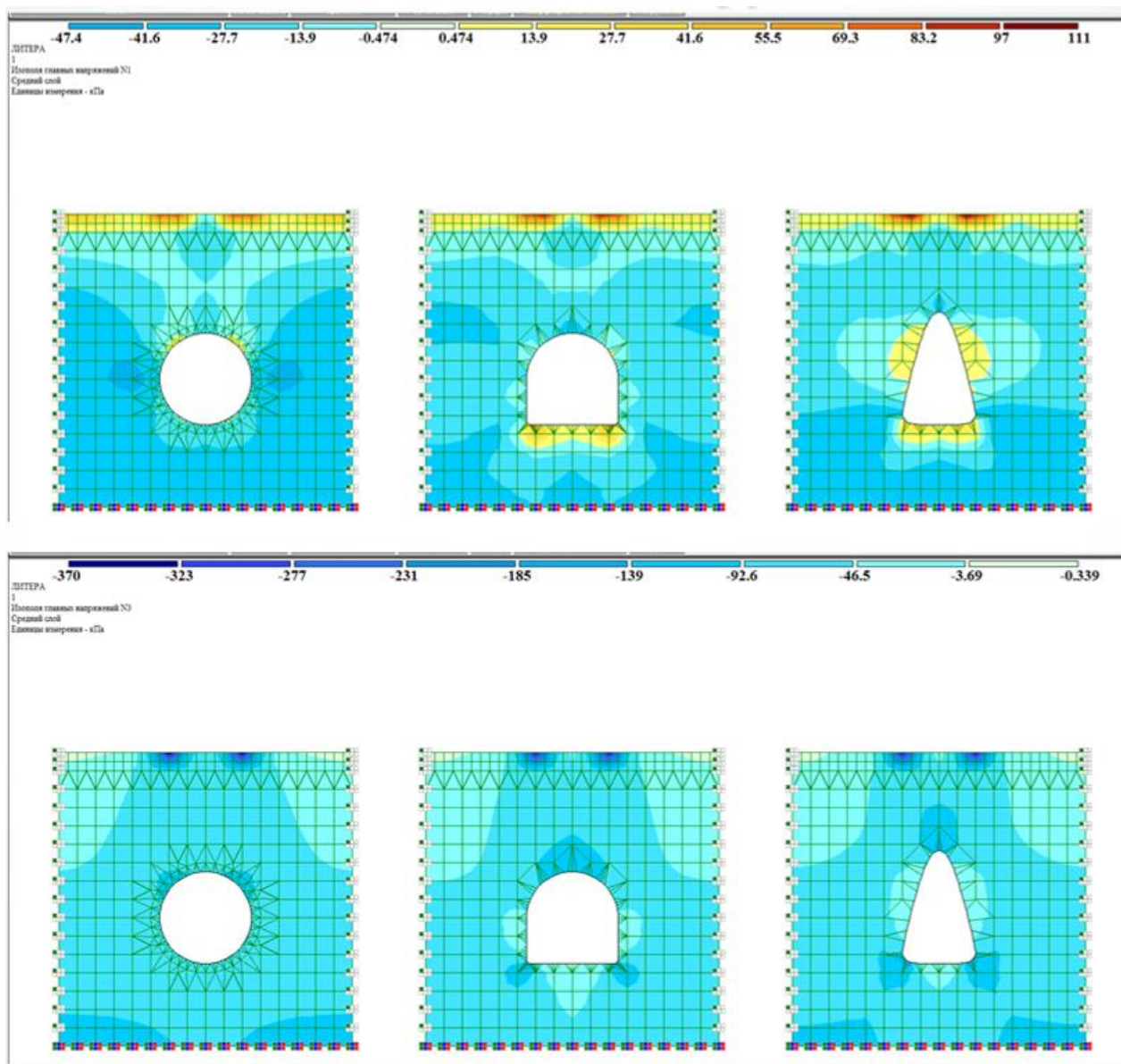


Рис. 9. Главные напряжения в грунте (металлические трубы)

Ниже представлена сводная таблица, содержащая результаты расчета основных характеристик напряжённо-деформированного состояния (НДС) различных сечений водопропускных труб из ПВХ (первая строка значений в соответствующей характеристике НДС) и гофрированных металлических (вторая строка значений в соответствующей характеристике НДС).

Анализ внутренних усилий показал, что за счет своих жесткостных и физико-механических характеристик ПВХ навивные трубы [16] являются более эффективными. Значения внутренних усилий в сравнении с металлическими гофрированными сечениями отличаются более чем на 20% в меньшую сторону. Также следует отметить, что за счет податливости конструкций из ПВХ отмечается снижение главных напряжений в грунте. Наибольшая разница в распределении напряжений наблюдается для сечения №3.

Основные характеристики НДС	Сечение		
	№1	№2	№3
Вертикальные перемещения от собственного веса грунта, мм	-3,87	-3,64	-4,00
	-3,60	-3,49	-3,86
Вертикальные перемещения от комбинации загрузений, мм	-8,70	-7,90	-8,22
	-8,11	-7,56	-7,80
Продольная сила N , кН	-57,23	-47,593	-53,929
	-75,426	-62,783	-70,208
Изгибающий момент M_y , кН·м	-0,021	-0,205	-0,136
	-0,048	-0,501	-0,347
Поперечная сила Q_z , кН	0,433	5,27	2,391
	0,893	10,846	4,819
Главное напряжение σ_1 , КПа	-49,1 – 5,04	-47,2 – 97,9	-62,8 – 31,1
	-44,7 – 5,72	-39,1 – 89,1	-45,7 – 46,4
Главное напряжение σ_3 , КПа	-110 – -45	-204 – -2,74	-154 – -11,2
	-108 – -54	-215 – -1,23	-168 – -9,36

Выводы. Проведя комплексный анализ расчетных моделей различных сечений водопропускных труб, можно сделать следующие выводы:

– ПВХ навивные трубы не уступают по своим характеристикам аналогичным металлическим гофрированным сечениям, при этом в силу податливости материала конструкции распределение усилий в ПВХ навивных трубах происходит более равномерно.

– Наиболее эффективным сечением по распределению внутренних усилий и напряжений является круглое сечение, не обладающее значительными зонами концентрации усилий и напряжений. По удобству эксплуатации и обслуживания наиболее выгодным следует признать сводчатое сечение с плоским основанием. Данное сечение менее склонно к размыву грунта основания, наиболее удобно для доступа специалистов в тело трубы для осуществления мониторинга и ремонта, может быть использовано как переход или скотопрогон.

– Каплевидное сечение является наименее эффективным и не рекомендуется к применению в дорожном строительстве.

– ПВХ навивные трубы значительно превосходят иные типы труб за счет технологичности и экономической эффективности укладки закрытым способом. Устройство труб по навивной технологии не требует масштабных работ по извлечению грунта с последующей обратной засыпкой, а также сохраняет исходный природный ландшафт над сооружением.

Библиографический список

1. Шапиро Д.М., Тютин А.П. Численный упругопластический расчет дорожных водопропускных труб // Строительная механика и конструкции. – 2015. – № 2 (11). – С. 66-71.
2. Осокин И.А. Применение теории оболочек вращения к расчету гофрированных водопропускных труб // Наукоедение. – 2013. – Вып. 2. – 13 с.
3. Паршин С.В. Разработка технологии и машины для производства низкопрофильных витых труб: дис.... канд. техн. наук: (05.23.05). – Екатеринбург, 2003. – 201 с.

4. Молчанов В.С., Симонов А.А., Просеков С.А. Переустройство малых мостов на автомобильных дорогах Новосибирской области в водопропускные трубы из гофрированного металла // Вестник Сибирского государственного университета путей сообщения. – 2009. – № 21. – С. 156-163.
5. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. – 4-е изд., перераб. – М.: СКАД СОФТ, 2011. – 736 с.
6. Лисов В.М. Дорожные водопропускные трубы. – М.: Информ.-изд. центр «ТИМР», 1998. – 140 с
7. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты балочной клетки при воздействии переменных нагрузок / Г.Е. Габриелян, В.С. Варнавацкий, В.М. Флавианов, О.И. Пехник // Строительная механика и конструкции. – 2018. – Вып. 3. – С. 102-111.
8. Справочник инженера-дорожника. Строительство автомобильных дорог / под ред. Н.В. Горельшева. – М.: Транспорт, 1991. – 484 с.
9. Водопропускные трубы под насыпями / Е.А. Артамонов, Г.Я. Волченков, Р.С. Клейнер, Р.Е. Подвальный, А.С. Потапов, К.Б. Щербина, О.А. Янковский. – М.: Транспорт, 1982. – 232 с.
10. Емельянов Л.М. О расчете подземных гибких труб // Строительная механика и расчет сооружений. – 1961. – Вып. 1. – С. 1-7.
11. Кисельников О.В. Недостатки в проектировании и строительстве дорожных труб // Автомобильные дороги. – 1970. – Вып. 3. – С. 10-11.
12. Клейн Г.К. Расчет подземных трубопроводов. – М.: Стройиздат, 1969. – 240 с.
13. Лисов В.М. Совершенствование водопропускных труб // Автомобильные дороги. – 1982. – Вып. 7. – С. 9-10.
14. Расчетные показатели для составления проектов организации строительства. – М.: Стройиздат. – Ч. X.
15. Сиденко В.М. и др. Организация, планирование и управление дорожным строительством. – Киев: Высш. шк., 1978. – 272 с.
16. Айвазов А.А. Исследование и разработка технологии спирально-витых поливинилхлоридных труб строительного назначения: автореф. дис.... канд. техн. наук: (05.23.05). – Киев, 1979. – 22 с.
17. Шендрик В.А. Совершенствование конструкции и методика расчета стоек мостовых сооружений с применением композитных материалов: автореф. дис.... канд. техн. наук: (05.23.11). – Санкт-Петербург, 2020. – 22 с.
18. Kolisoja P., Kalliainen A. Modelling of Plastic Culvert and Road Embankment Interaction in 3D // Procedia Engineering. Advances in Transportation Geotechnics 3. The 3rd International Conference on Transportation Geotechnics (ICTG 2016). – 2016. – Vol. 143. – P. 427-434.
19. Piratla, K.R., Jin H., Y. Sepideh A Failure Risk-Based Culvert Renewal Prioritization Framework // Infrastructures. – 2019. – Vol. 4. – №3. – 14 p.
20. Research on design parameters of double hole corrugated pipe culvert / C. Hao, L. Liu, Z. Wang, S. Wan // Advances in Engineering Research. 7th International Conference on Energy and Environmental Protection (ICEEP 2018). – 2018. – Vol. 170. – P. 184-189.

References

1. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Numerical elastoplastic calculation of road culverts. Structural Mechanics and Structures. No. 2(11). 2015. Pp. 66-71.

2. Osokin I.A. Application of the theory of shells of revolution to the calculation of corrugated culverts. Science. Issue. 2. 2013. 13 p.
3. Parshin S.V. Development of technology and machines for the production of low-profile twisted pipes: dis.... Ph.D. tech. Sciences. 05.23.05. Ekaterinburg, 2003. 201 p.
4. Molchanov V.S., Simonov A.A., Prosekov S.A. Reconstruction of small bridges on highways of the Novosibirsk region into culverts made of corrugated metal. Bulletin of the Siberian State Transport University. No. 21. 2009. Pp. 156-163.
5. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Calculation models of structures and the possibility of their analysis 4th ed., revised. M.: SKAD SOFT, 2011. 736 p.
6. Lisov V.M. Road culverts. M.: Inform. Ed. center "TIMR", 1998. 140 p.
7. Gabrielyan G.E., Varnavsky V.S., Flavianov V.M., Pekhnic O.I. Finite element modeling of the stress-strain state of the foundation slab of a beam cage under the influence of variable loads. Structural Mechanics and Structures. Issue. 3. 2018. Pp. 102-111.
8. Gorelysheva N.V. Handbook of a road engineer. Construction of highways. M.: Transport, 1991. 484 p.
9. Artamonov E.A., Volchenkov G.Ya., Kleiner R.S., Podvalny R.E., Potapov A.S., Shcherbina K.B., Yankovsky O.A. Culverts Under Embankments. M.: Transport, 1982. 232 p.
10. Emelyanov L.M. On the calculation of underground flexible pipes. Structural Mechanics and Calculation of Structures. Issue. 1. 1961. Pp. 1-7.
11. Kisel'nikov O.V. Disadvantages in the design and construction of road pipes. Highways. Issue. 3. 1970. Pp. 10-11.
12. Klein G.K. Calculation of underground pipelines. M.: Stroyizdat, 1969. 240 p.
13. Lisov V.M. Improving culverts. Highways. Vol. 7. 1982. Pp. 9-10.
14. Estimated indicators for drawing up construction organization projects. M.: Stroyizdat.
15. Sidenko V.M. and others. Organization, planning and management of road construction. Kyiv: High School, 1978. 272 p.
16. Aivazov A.A. Research and development of technology for spirally twisted polyvinyl chloride pipes for construction purposes: abstract of thesis. dis.... Ph.D. tech. Sciences. 05.23.05. Kyiv, 1979. 22 p.
17. Shendrik V.A. Improving the design and methods for calculating piers of bridge structures using composite materials: abstract of thesis. dis.... Ph.D. tech. Sciences. 05.23.11. St. Petersburg, 2020. 22 p.
18. Kolisoja P., Kalliainen A. Modeling of plastic culvert and road embankment interaction in 3D. Procedia Engineering. Advances in Transportation Geotechnics 3. The 3rd International Conference on Transportation Geotechnics (ICTG 2016). Vol. 143. 2016. Pp. 427-434.
19. Piratla, K.R., Jin H., Sepideh Y. A failure risk-based culvert renewal prioritization framework. Infrastructures. Vol. 4. No. 3. 2019. 14 p.
20. Hao S., Liu L., Wang Z., Wan S. Research on design parameters of double hole corrugated pipe culvert. Advances in Engineering Research. 7th International Conference on Energy and Environmental Protection (ICEEP 2018). Vol. 170. 2018. Pp. 184-189.

COMPARATIVE ANALYSIS OF STRESS-STRAIN STATE OF CULVER PIPES OF DIFFERENT SECTIONS

V. M. Flavianov³, V. V. Volkov², V. A. Kozlov¹, M. G. Ordyan⁴

Voronezh State Technical University^{1,2,3,4}
Russia, Voronezh

¹Assistant Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(910)3414014, e-mail: flav@inbox.ru

²PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(910)2402587, e-mail: kotlac@yandex.ru

³Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

⁴PhD of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: omg84@mail.ru

The article provides a comparative analysis of the stress-strain state of culverts of various sections, made of PVC using wound technology and of corrugated metal. An analysis of deformed patterns and values of soil settlement under the influence of the pipe's own weight, the road structure above the pipe and the payload from a truck was carried out. Conclusions about the most preferable cross-section of culverts for road construction are presented.

Keywords: PVC coiled pipe, metal corrugated pipe, culvert, stress-strain state of pipe and soil.

ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ МОРА–КУЛОНА С ЭФФЕКТОМ БАУШИНГЕРА ДЛЯ РАСЧЕТА ДОРОЖНЫХ ОДЕЖД

А. С. Александров

Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет (СибАДИ)
г. Омск, Россия

Канд. техн. наук, доцент кафедры строительства и эксплуатации дорог, тел.: +7(3812) 65-15-63,
e-mail: aleksandrov00@mail.ru

В классическом критерии Мора–Кулона центр вращения предельной прямой принят на оси нормальных напряжений в неподвижной точке, абсцисса которой соответствует сопротивлению всестороннему растяжению и вычисляется произведением сцепления и котангенса угла внутреннего трения. Поэтому в классическом критерии Мора–Кулона не учитывается эффект И. Баушингера, согласно которому предварительная пластическая деформация одного знака обуславливает уменьшение сопротивления пластическому деформированию противоположного знака. Для учета эффекта Баушингера нами предложена новая гипотеза упрочнения грунта и трехпараметрический критерий Мора–Кулона, в котором третий параметр материала d зависит от деформации образца. Центр вращения прямой Кулона принят на оси касательных напряжений в точке с ординатой, соответствующей величине сцепления при предельной деформации. Используя наш критерий, можно вычислять значения угла внутреннего трения традиционного двухпараметрического условия Мора–Кулона, но как функцию от параметра d .

Ключевые слова: критерий Мора–Кулона, угол внутреннего трения, трехосное сжатие.

1. Введение

В практике проектирования автомобильных дорог критерий Мора–Кулона используют при проверке достаточности толщины дорожных одежд по сопротивлению сдвигу в грунте, а также для проверки устойчивости откосов. Условие пластичности Мора – Кулона имеет графическую интерпретацию, построенную на τ - σ плане, и состоящую из кругов предельных напряжений Мора и касательной к ним, называемой предельной прямой Ш. Кулона. Уравнения предельной прямой Кулона и предельного состояния критерия Мора–Кулона в главных осях приведены в табл. 1 [1].

Таблица 1

Наименование уравнения	Формула
Уравнение предельной прямой Кулона	$\tau = \sigma \cdot \operatorname{tg} \varphi + c$
Уравнение предельного состояния критерия Мора–Кулона	$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cdot \cos \varphi} - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi = c$
	$\frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_1 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}} \cdot \sigma_3 \right) = c$
где c и φ – параметры сопротивления сдвигу критерия Мора–Кулона, называемые сцеплением и углом внутреннего трения	

Применительно к грунтам и зернистым материалам критерий Мора–Кулона оказался настолько удачным, что его стали применять как в качестве самостоятельного критерия расчета, так и для построения предельных поверхностей современных условий пластичности. Предельная прямая Кулона является касательной к кругам предельных напряжений Мора, построенным в τ - σ плане, но ее можно построить и в q - p плане. Такое перестроение выполняется пересчетом параметров сопротивления сдвигу на τ - σ плане (c и φ) в аналогичные характеристики (a и b) для q - p плана. Расчет параметров сопротивления сдвигу (a и b) выполняется по известным формулам:

$$b = \operatorname{arctg} M = \operatorname{arctg} \frac{6 \cdot \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}; \quad a = \frac{6 \cdot c \cdot \cos \varphi}{3 - \sin \varphi}, \quad (1)$$

где M – постоянная трения в критическом состоянии, определяющая тангенс угла наклона предельной прямой к оси абсцисс q - p плана.

На рис. 1 приведены графические иллюстрации результатов расчета угла b и относительной величины сцеплений a/c , полученных по формулам (1).

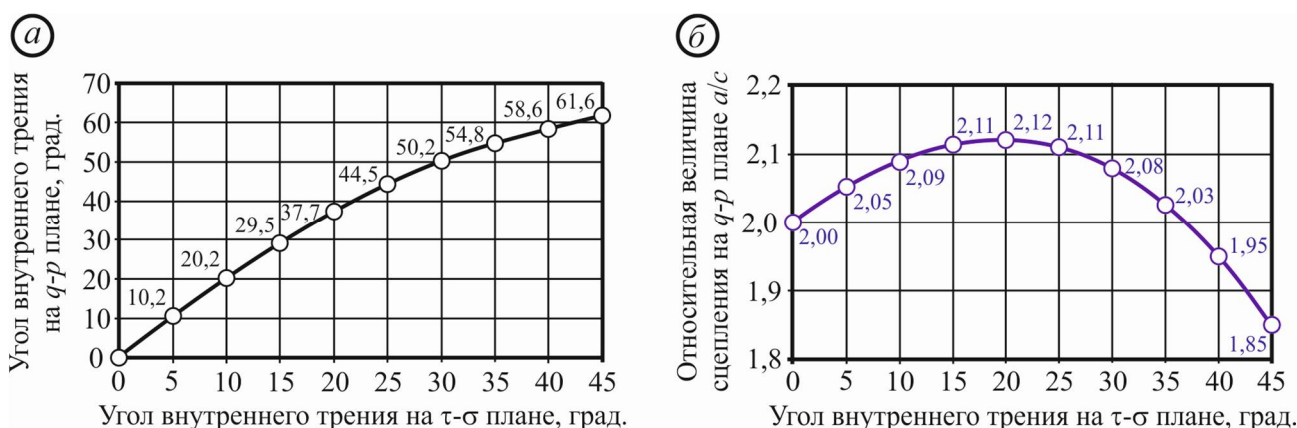


Рис. 1. Зависимость параметров сопротивления сдвигу для q - p плана от их аналогов на τ - σ плане:

а – зависимость угла внутреннего трения $b = \operatorname{arctg} M$ на q - p плане от его аналога φ на τ - σ плане; б – зависимость относительной величины сцеплений a/c на q - p плане от угла внутреннего трения φ для τ - σ плана

Постоянная трения M является параметром предельных прямых модели Гранта Грэвел (Granta Gravel) [2, 3], оригинальной и модифицированной моделей Кэм Клай (Cam clay) [2, 4-6] и их более современной модификации (Nor-Sand Model) [7, 8]. Особенность моделей Granta Gravel, Cam clay и Nor-Sand состоит в том, что их предельное состояние описывается двумя уравнениями. Это обусловлено тем, что линия предельного состояния этих моделей расположена в пространстве, а ее проекция на одну из двух плоскостей (q - p план) описывается уравнением прямой. Это уравнение при осесимметричном трехосном сжатии содержит девиатор напряжений $q = \sigma_1 - \sigma_3$ и среднее нормальное напряжение $p = (\sigma_1 + 2 \cdot \sigma_3) / 3$, а также параметр M и имеет вид:

$$q = M \cdot p; \quad M = \frac{6 \cdot \sin \varphi}{3 - \sin \varphi}. \quad (2)$$

Из уравнений (2) следует, что в трактовке упомянутых нами моделей грунт не обладает сцеплением, что вытекает из анализа формул (1), в которых параметр связности a обращается в ноль только при условии равенства нулю сцепления, то есть $a=0$ при $c=0$. При $\varphi=0$ уравнение предельного состояния (2) приобретает вид третьей теории прочности $q=2 \cdot c$.

Поверхность текучести критерия Мора–Кулона на девиаторной плоскости имеет форму шестигранника с тремя углами сжатия и тремя углами растяжения. Шестигранник Мора стали применять для построения поверхностей текучести других условий пластичности, проводя их, как показано на рис. 2, через углы сжатия и/или углы растяжения.

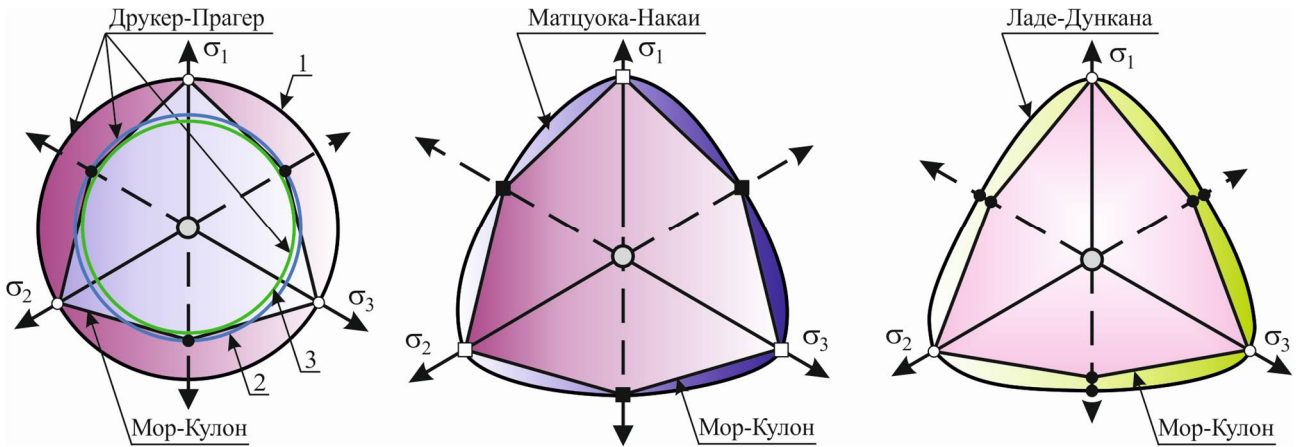


Рис. 2. Сравнение поверхностей текучести различных критериев пластичности:

- 1 – поверхность Друкера–Прагера описана вокруг шестигранника Мора, пересекая его в углах сжатия;
- 2 – поверхность Друкера–Прагера проведена через углы растяжения шестигранника Мора;
- 3 – поверхность Друкера–Прагера вписана в шестигранник Мора

Иллюстрации, представленные на рис. 2, показывают способы построения поверхностей текучести. Независимо от способа построения поверхности текучести, создаваемого критерием, относительно шестигранника Мора, параметры, получаемого условия пластичности аппроксимируются через параметры критерия Мора–Кулона (c и ϕ). Получаемые для разных критериев формулы различны, но их членами всегда является либо угол внутреннего трения, как в критериях Ладе–Дункана [9], Матцуока–Накаи [10, 11], либо угол внутреннего трения и сцепления, как это имеет место в критерии Друкера–Прагера [12]. Критерии Друкера–Прагера, Ладе–Дункана и Матцуока–Накаи достаточно широко применяются при расчете грунтов и зернистых материалов по сопротивлению сдвигу [13–17].

При расчете устойчивости откосов земляного полотна применяется оригинальный критерий Мора–Кулона, а при проектировании дорожной одежды используется модифицированное уравнение, предполагающее зависимость c и ϕ от числа нагрузок. В обоих расчетах используется понятие предельного и допредельного состояния грунта, графические интерпретации которых приведены на рис. 3.

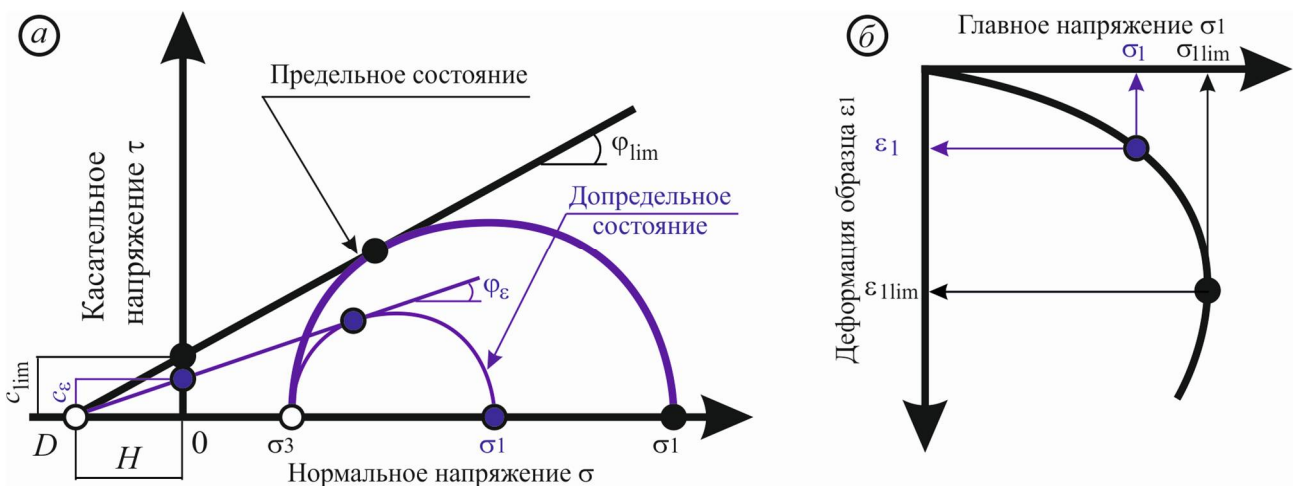


Рис. 3. Графическая интерпретация результатов статических трехосных испытаний в полных напряжениях: а – предельные и допредельные круги напряжений Мора и касательные Кулона к ним; б – зависимость деформации образца от напряжения σ_1 при заданной величине минимального главного напряжения σ_3

Круги напряжений и касательные к ним, показанные на рис. 3 а, являются иллюстрацией упрочнения грунта в условиях трехосных испытаний по схеме консолидированного недренированного (КН) или консолидированного дренированного (КД) теста. Такие тесты состоят из подготовительных и основных испытаний. Девиаторное напряжение $q = \sigma_1 - \sigma_3$ прикладывается в основных испытаниях, которые проводят либо до разрушения образца, либо до его деформирования на предельную величину, обозначенную на рис. 3 б ε_{lim} . До приложения девиатора q минимальное главное напряжение доводят до требуемой величины σ_3 , показанной на рис. 3 а, но делают это синхронно с увеличением напряжения σ_1 . До тех пор, пока напряжение σ_3 не достигнет заданной величины значение девиатора напряжения равно нулю, что обусловлено равенством главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_3$. Так как величина девиатора $q = \sigma_1 - \sigma_3$ определяет диаметр круга напряжений, то при $\sigma_1 = \sigma_3$ круг сходится в точку. В этой же точке находится центр круга, местоположение которого определяется половиной суммы главных напряжений $(\sigma_1 + \sigma_3)/2$. Следовательно, пока девиатор равен нулю, круг напряжений представляет собой точку, находящуюся на оси нормальных напряжений. По мере повышения напряжений гидростатического сжатия ($\sigma_1 = \sigma_3$) эта точка смещается по оси абсцисс в направлении требуемой величины σ_3 . В этом случае прямая Кулона лежит на оси абсцисс, а образец испытывает только объемную деформацию. После доведения напряжения σ_3 до требуемой величины появляется девиаторная нагрузка, обусловленная тем, что $\sigma_1 > \sigma_3$. В этом случае по мере возрастания девиатора напряжения увеличивается диаметр круга напряжений. Следовательно, круг напряжений, зарождаясь в точке, постоянно увеличивается, достигая предельного размера при разрушении образца или достижения им предельной деформации. В процессе деформирования для любой величины девиатора напряжений ($\sigma_1 - \sigma_3 > 0$) можно построить круг напряжений и провести к нему касательную Кулона. Согласно общепринятым представлениям все такие касательные, включая предельную прямую, имеют один центр вращения, расположенный в точке D . На рис. 3 а показан отрезок, ограниченный началом координат и точкой D , длина которого H для всех касательных одинакова. Этот отрезок представляет собой сопротивление всестороннему растяжению. Местоположение каждой касательной на τ - σ плане характеризуется двумя параметрами c_ε и φ_ε , значения которых при отказе образца достигают предельных величин c_{lim} и φ_{lim} . Таким образом, согласно модели упрочнения, показанной на рис. 3 а, в процессе увеличения девиатора напряжений и деформации ε_1 значения сцепления c_ε и угла внутреннего трения φ_ε тоже возрастают, а сопротивление всестороннему растяжению H всегда одинаково и не зависит от деформации сжатия. Следовательно, согласно теории Мора–Кулона грунты и зернистые материалы не обладают эффектом Баушингера, согласно которому даже малая пластическая деформация одного знака приводит к снижению сопротивления пластическому деформированию при последующем приложении напряжений другого знака [18, 19]. Согласно И. Баушингеру, уменьшение сопротивления малым пластическим деформациям тем больше, чем больше была предварительная пластическая деформация противоположного знака. Такого объяснения вполне достаточно для предположения, что точка D , показанная на рис. 3 а, должна смещаться в сторону начала координат по мере увеличения деформации сжатия, описываемого подъемом касательной и возрастанием угла φ_ε . При таком поведении касательной в процессе роста деформации сжатия угол внутреннего трения φ_ε будет повышаться, а сопротивление всестороннему растяжению H , наоборот, будет уменьшаться. Такая модификация оригинальной модели, показанной на рис. 3 а, приведет к учету эффекта Баушингера в классическом условии пластичности Мора–Кулона.

Вторым доводом в пользу необходимости модификации критерия Мора–Кулона служит противоречие, возникающее между теоретической гипотезой изменения параметров φ_ε и c_ε , показанного на рис. 3 а, и их значениями, полученными в результате эксперимента. Из анализа рис. 3 а следует, что в результате непрерывного вращения касательной относительно

точки D параметры φ_ε и c_ε повышаются так, что сопротивление всестороннему растяжению H всегда одинаковое. Это сопротивление определяется по формулам:

$$H = c_\varepsilon \cdot \operatorname{ctg} \varphi_\varepsilon = \frac{c_\varepsilon}{\operatorname{tg} \varphi_\varepsilon}; \quad H = c_{\text{lim}} \cdot \operatorname{ctg} \varphi_{\text{lim}} = \frac{c_{\text{lim}}}{\operatorname{tg} \varphi_{\text{lim}}}. \quad (3)$$

Из тождеств (3) следует, что во сколько раз изменится отношение $c_{\text{lim}}/c_\varepsilon$ во столько же раз изменится соотношение коэффициентов трения $\operatorname{tg} \varphi_{\text{lim}}/\operatorname{tg} \varphi_\varepsilon$ или отношение котангенсов $\operatorname{ctg} \varphi_\varepsilon/\operatorname{ctg} \varphi_{\text{lim}}$. Однако результаты экспериментов позволяют утверждать, что при ступенчатом или кинематическом приложении нагрузки в условиях трехосного сжатия увеличению деформации образца всегда сопутствует возрастание величины угла внутреннего трения, а сцепление может как возрастать, так и уменьшаться или оставаться неизменным. В этом случае тождеств (3) не существует, а данные экспериментов опровергают гипотезу упрочнения грунта, показанную на рис. 3 *a*, которая постулирует увеличение сцепления c_ε при возрастании деформации сжатия.

На рис. 4 приведены общепринятые графические интерпретации результатов динамических испытаний грунтов и зернистых материалов повторной нагрузкой.

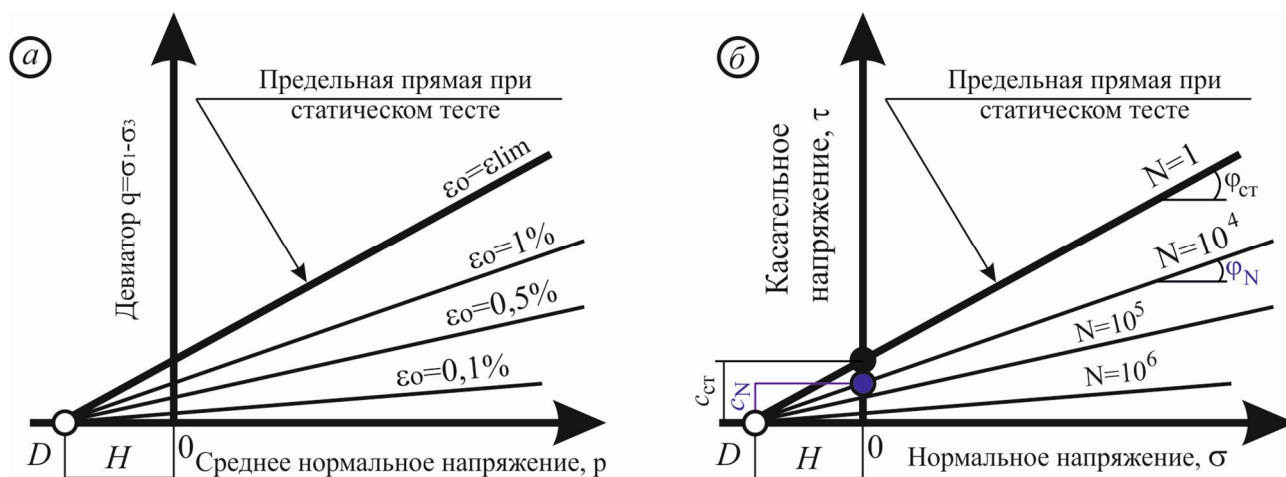


Рис. 4. Графическая интерпретация результатов динамических трехосных испытаний:

a – предельные прямые Кулона для статического теста и динамического теста при различной величине накопленной остаточной деформации; *б* – предельные прямые Кулона для статического теста и динамического теста при различном количестве приложенных нагрузок

Иллюстрации, представленные на рис. 4, отображают общепринятое мнение об упрочнении грунта и зернистых материалов в процессе накопления остаточной деформации от многократно прикладываемой нагрузки. Для таких испытаний применяются динамические приборы трехосного сжатия. В процессе тестирования образцы подвергаются многократному воздействию девиатора напряжений, вследствие чего накапливают остаточную деформацию. Величина этой деформации тем больше, чем больше число приложенных нагрузок N или величина девиатора. Испытание проводят либо до разрушения образца либо до его деформирования до некоторой критической величины $\varepsilon_{\text{кр}}$, которая в пределе может достигать предельной деформации статического теста ε_{lim} . При обработке данных эксперимента, показанных на рис. 4 *a*, на оси абсцисс необходимо найти центр круга напряжений и построить его. Из центра круга к предельной прямой статического теста, параметры которой вычисляют по формулам (1), проводят перпендикуляр. Далее из точки D , полученной при построении предельной прямой статического теста, к кругу напряжений, соответствующему величине рассматриваемой остаточной деформации, проводят касательную, параметры которой являются характеристиками сопротивления сдвигу на q - p плане. Используя эти параметры, а также правила их пересчета в характеристики сопротивления сдвигу на τ - σ плане вы-

числяют c и φ . Эти вычисления применимы к любой касательной, показанной на рис. 4 а. Более подробную информацию о правилах такого определения параметров сопротивления сдвигу можно почерпнуть из работ авторов этой идеи [20] и специалистов, использовавших данный способ [21–24]. Модель упрочнения, показанная на рис. 4 а, предполагает увеличение обоих параметров сопротивления сдвигу по мере накапливания остаточной деформации. Тестирование зернистых материалов, выполненное в работах [23, 24], показало, что в процессе накапливания остаточной деформации угол внутреннего трения всегда возрастает с увеличением деформации, а сцепление может как возрастать, так и уменьшаться или же оставаться неизменным. Таким образом, модель динамического упрочнения, показанная на рис. 4 а, содержит такой же недостаток, как модель статического упрочнения, представленная на рис. 3 а.

В России модель динамического упрочнения грунта была модифицирована в модель с динамическими параметрами сопротивления сдвигу. Такая модель приведена на рис. 4 б, она легла в основу расчета напряжения сдвига от временной (транспортной) нагрузки, применяемого в нормативных документах XXI века (ОДН 218.046-2001, ПНСТ 265-2018 и ПНСТ 542-2021). Суть модели состоит в том, что накапливаемая деформация описывается функциональной зависимостью от параметров материала, количества нагрузок и главных напряжений, определяющих характеристику напряженного состояния, например, эквивалентное напряжение критерия Мора–Кулона. В первых моделях использовали понятие уровня напряженного состояния, в котором предельной мерой напряжения сдвига служило условие пластичности Мора–Кулона для статического теста. В настоящее время моделей накапливания деформаций известно много и понятие уровня напряженного состояния из многих моделей ушло, а осталась только характеристика напряженного состояния. Тем не менее если любую из этих моделей ограничить предельной величиной накапливаемой деформации, то для заданного числа нагрузок при известных параметрах материала и заданного напряжения σ_3 можно произвести расчет величины напряжения σ_1 . После этого можно строить круги напряжений, проводить к ним касательные и вычислять сцепление и угол внутреннего трения. При таком подходе с увеличением числа нагрузок значение напряжения σ_1 уменьшается, стремясь к величине напряжения σ_3 при $N=\infty$. Поэтому для применения к расчету дорожных одежд такая гипотеза упрочнения потребовала адаптации, связанной с вводом ряда ограничений и допущений, приведших к недостаткам. Приведем эти недостатки:

1. Из анализа данных рис. 4 б следует, что положение касательных ограничено либо предельной прямой статического теста, либо осью абсцисс. При этом чем больше число приложенных нагрузок N , тем ближе положение касательной к оси абсцисс и меньше значения параметров сопротивления сдвигу c_N и φ_N . С уменьшением значений параметров сопротивления сдвигу c_N и φ_N толщина дорожной одежды возрастает, принимая неприемлемо большие значения. Эта специфика упрочнения грунта потребовала ограничения числа нагрузок N , которым стало количество 1 млн расчетных единиц. Обратим внимание, что модели упрочнения, показанные на рис. 4 а и рис. 4 б, ограничений по накапливаемой деформации и числу нагрузок не требуют. В этих моделях в качестве такого ограничения служит ось абсцисс. Поэтому введение ограничения по числу нагрузок N сводит на нет применение модели упрочнения, показанной на рис. 4 б.

2. Ограничение количества нагрузок до 1 млн воздействий оказалось недостаточным, толщина проектируемых дорожных одежд все равно получалась нереально большой. Поэтому для компенсации этого недостатка пришлось модифицировать расчет напряжения сдвига от постоянной нагрузки, то есть от веса дорожной одежды. Для этого ввели допущение, что главные напряжения от веса дорожной одежды равны, то есть ввели закон гидростатики А. Гейма. Если в уравнениях предельного состояния Мора–Кулона, представленных в табл. 1, положить такое равенство, то касательное напряжение (уменьшаемое) обратится в ноль, а нормальное напряжение (вычитаемое) примет отрицательное значение, определяемое

произведениями $\sigma_1 \times \operatorname{tg} \varphi$ или $\sigma_3 \times \operatorname{tg} \varphi$, которые при гидростатическом сжатии равны. Так как отрицательное значение всегда меньше положительного, то условие прочности выполняется всегда, а предельное состояние не возникает. При суммировании напряжений сдвига от временной и постоянной нагрузок нормальное напряжение $\sigma_1 \times \operatorname{tg} \varphi$ или $\sigma_3 \times \operatorname{tg} \varphi$ либо вычитаются из напряжения сдвига от транспортной нагрузки, либо переносятся в правую часть критерия Мора–Кулона и прибавляются к сцеплению. В ОДН 218.046-2001, ПНСТ 265-2018 и ПНСТ 542-2021 реализован второй способ. Такой прием позволил увеличить предельное сопротивление сдвигу. Однако этот прием содержит недостаток, состоящий в том, что гидростатическое сжатие является частным случаем компрессионного сжатия. При компрессионном сжатии минимальное главное напряжение σ_3 определяется произведением коэффициента бокового давления ξ и максимального главного напряжения σ_1 . При гидростатическом сжатии $\xi=1$, а $\sigma_1=\sigma_3$. Равенство коэффициента бокового давления единице имеет место при коэффициенте Пуассона $\mu=0,5$, что не соответствует значениям μ для большинства грунтов. Например, общепринятыми значениями коэффициента Пуассона являются: для крупнообломочных грунтов $\mu=0,27$, песков и супесей $\mu=0,3$, суглинков $\mu=0,35$ и глин $\mu=0,42$. Кроме того, известны модели вычисления коэффициента бокового давления через функцию угла внутреннего трения. Особенностью большинства таких моделей является условие, что $\xi=1$ при $\varphi=0$. Из уравнений предельного состояния, показанных в табл. 1, следует что $\varphi=0$ критерий Мора–Кулона обращается в третью теорию прочности, то есть гипотезу максимального касательного напряжения, которое действует вдоль площадки, повернутой к главным осям под углом 45 градусов. В этом случае напряжение сдвига (эквивалентное напряжение Мора–Кулона) от транспортной нагрузки складывается из касательного и нормального напряжений, действующих вдоль и перпендикулярно площадкам, повернутым к главным осям под углами $45 \pm \varphi/2$, а напряжение от постоянной нагрузки действует на другой площадке. Суммировать или сравнивать напряжения на разных площадках нельзя.

3. Проверка толщин дорожных одежд, выполненная по методике с указанными нами допущениями, показала, что и второго допущения мало, толщина дорожных одежд все равно получалась неприемлемо большой и нереальной. Поэтому в расчет главных напряжений от постоянной нагрузки ввели максимальную величину угла внутреннего трения, соответствующую предельной прямой статического теста $\varphi_{ст}$. В результате напряжения сдвига от временной нагрузки определяются для площадки, повернутой к главным осям под углами $45 \pm \varphi_N/2$, а напряжения сдвига от постоянной нагрузки вычисляются для площадки, повернутой к главным осям под углами $45 \pm \varphi_{ст}/2$. Так как $\varphi_{ст} > \varphi_N$, то напряжения сдвига от временной и постоянной нагрузок действуют на разных площадках, проведенных через одну и ту же точку.

По нашему мнению, сделанные нами замечания по расчету дорожных одежд явным образом свидетельствуют о необходимости совершенствования критерия Мора–Кулона, которое может состоять в изменении модели упрочнения грунта. Предлагаемая в следующей части статьи модель предназначена для узкой области строительства, а именно для проектирования дорожных одежд. Этим самым мы хотим показать, что никоим образом не вторгаемся в другие области строительства.

2. Методы исследования

2.1. Постановка задачи и гипотеза упрочнения материала

Целью настоящей работы является разработка модифицированного критерия пластичности грунта и зернистого материала, обладающего эффектом И. Баушингера, в котором

процессу деформирования при трехосном сжатии сопутствует уменьшение сопротивления всестороннему растяжению.

Для достижения цели необходимо выполнить последовательное решение трех задач:

1. Разработать гипотезу упрочнения грунта, описывающую уменьшение сопротивления всестороннему растяжению при увеличении пластической деформации в условиях трехосного сжатия.

2. Разработать трехпараметрический критерий пластичности, третий параметр которого зависит от деформации образца в условиях трехосного сжатия.

3. Разработать способ вычисления угла внутреннего трения критерия Мора–Кулона с использованием величины третьего параметра модифицированного критерия.

Идея предлагаемой модификации состоит в изменении центра вращения касательной к кругам напряжений. Реализация этой идеи требует формулировки новой гипотезы упрочнения грунта, иллюстрация которой приведена на рис. 5.

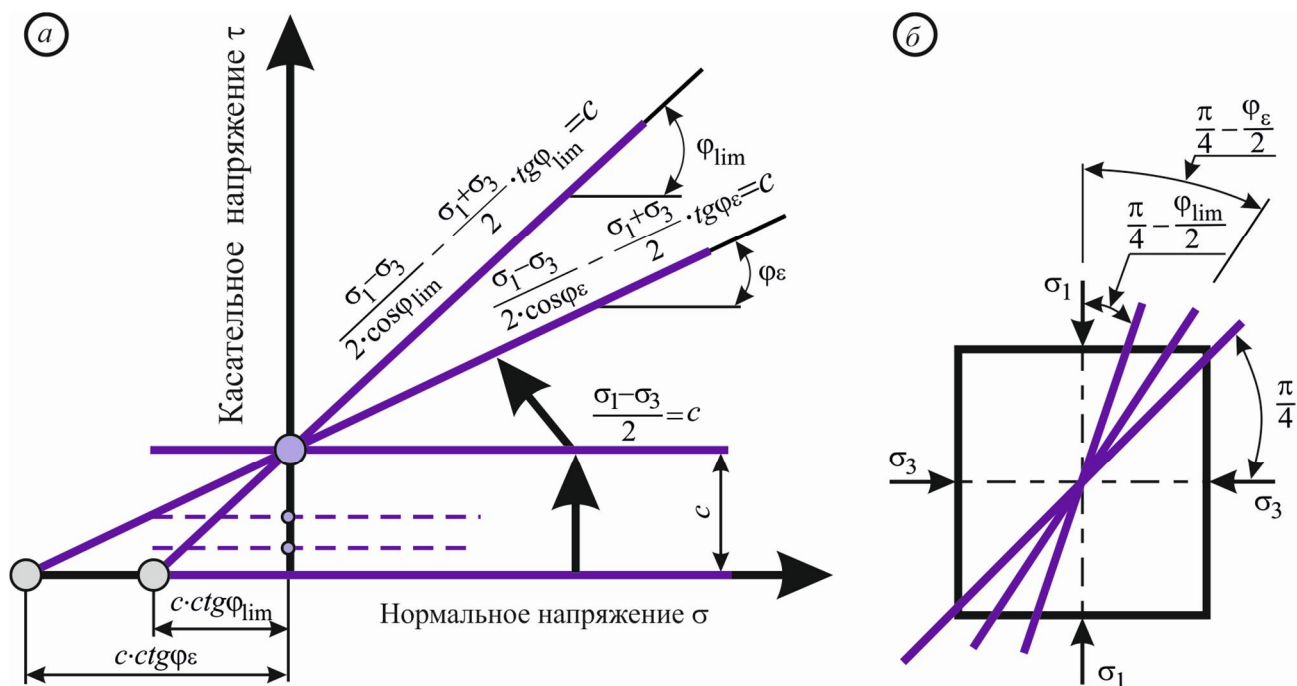


Рис. 5. Гипотеза упрочнения грунта, применяемая в трехпараметрическом критерии Мора–Кулона: а – касательные Кулона для двухстадийного упрочнения; б – схема изменения местоположения площадки сдвига в процессе деформирования образца

Гипотеза, положенная в основу иллюстраций, представленных на рис. 5, предполагает двухэтапное упрочнение материала. Первый этап протекает при относительно малых девиаторах напряжений, величина которых не превышает удвоенного значения сцепления. В этом случае максимальное касательное напряжение, действующее вдоль площадки, наклоненной к главным осям под углами в 45 градусов ($\pi/4$), не превышает величины сцепления грунта. Поэтому механизм упрочнения, связанный с внутренним трением, на этом этапе не задействован. Изменение местоположения касательной к кругам напряжений и соответствующее этому процессу увеличение призмы Треска происходят за счет сцепления, которое в процессе деформирования увеличивается до своей предельной величины, определяемой стандартными трехосными испытаниями. В процессе возрастания максимального касательного напряжения до предельной величины сцепления прямая Кулона, являющаяся проекцией на плоскость призмы Треска, движется вверх, не вращаясь относительно осей, что на рис. 5 а показано пунктирными линиями. В этом диапазоне изменения максимального касательного напряжения наиболее опасной является площадка, повернутая к главным осям под углами $\pi/4$, что

приведено на рис. 5 б. При достижении величиной максимального касательного напряжения предельного значения сцепления на рассматриваемой площадке сопротивление сдвигу и пластическому деформированию исчерпывается. В этом случае задействуется механизм упрочнения, связанный с внутренним трением. Этот механизм обуславливает второй этап упрочнения, а его суть состоит в увеличении угла внутреннего трения φ_e от нулевого значения до предельной величины. Изменению величины угла внутреннего трения в диапазоне $0 < \varphi_e < \varphi_{lim}$ соответствует поворот касательной к кругам напряжений относительно центра вращения, взятого в точке на оси касательных напряжений. Ордината центра вращения равна предельной величине сцепления. Вращение касательной относительно центра приводит к изменению формы поверхности текучести, которая из призмы Треска превращается в пирамиду Мора. На рис. 5 а приведены три местоположения предельных прямых, для каждой из которых дано уравнение предельного состояния, а на рис. 5 б приведены площадки сдвига, соответствующие этим прямым. Из анализа данных рис. 5 а следует, что процессу повышения максимального касательного напряжения сопутствует увеличение значения угла внутреннего трения и уменьшение сопротивления всестороннему растяжению. Таким образом, гипотеза упрочнения, показанная на рис. 5, содержит эффект Баушингера. В данном случае суть этого эффекта состоит в том, что даже бесконечно малая пластическая деформация сжатия приведет к уменьшению сопротивления всестороннему растяжению в случае последующего воздействия нагрузки противоположного знака.

2.2. Трехпараметрический критерий Мора–Кулона

Для разработки трехпараметрического критерия Мора–Кулона воспользуемся критерием прочности Мора, который для сжатия имеет вид:

$$\sigma_1 - k_c \cdot \sigma_3 \leq R_c; \quad k_c = R_c / R_t, \quad (4)$$

где R_t и R_c – пределы прочности на одноосное растяжение и сжатие, Па.

Критерий прочности Мора, определяемый выражением (4), легко преобразуется в условие пластичности Мора–Кулона путем подстановки в формулы (4) зависимостей, связывающих пределы прочности с параметрами сопротивления сдвигу. Формулы для расчета пределов прочности имеют вид:

$$R_c = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi_{lim}}{1 - \sin \varphi_{lim}} = 2 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi_{lim}}{1 - \sin \varphi_{lim}}}; \quad R_t = \frac{2 \cdot c \cdot \cos \varphi_{lim}}{1 + \sin \varphi_{lim}} = 2 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_{lim}}{1 + \sin \varphi_{lim}}}. \quad (5)$$

Формулы (5) предназначены для определения пределов прочности материала на сжатие и растяжение. Пределы прочности представляют собой критическую величину напряжения, при достижении которой образец либо разрушается (абсолютный предел прочности), либо деформируется на требуемую величину (условный предел прочности). Тем не менее хорошо известно, что помимо пределов прочности любой материал обладает другими сопротивлениями структуры: предел текучести, предел упругости, предел пропорциональности. Все эти пределы меньше предела прочности и перечислены нами в порядке уменьшения. Безусловно, что каждому из пределов соответствует определенное значение деформации. Поэтому для решения нашей задачи формулы (5) нужно модифицировать так, чтобы усовершенствованные зависимости были пригодны для вычисления других структурных сопротивлений, величина которых меньше пределов прочности. По нашему мнению, ключ к решению задачи кроется в корне квадратном из тригонометрических функций зависимостей (5). То есть, если радикал второй степени из тригонометрических функций формул (5) позволяет вычислить пределы прочности, то радикалы меньшей степени из этих же тригонометрических функций должны позволять определять меньшие значения других структурных сопротивлений. Следовательно, модификация формул (5) выполняется введением третьего параметра d , так что формулы (5) приобрели вид:

$$R_c = 2 \cdot c \cdot \left(\frac{\cos \varphi_{\text{lim}}}{1 - \sin \varphi_{\text{lim}}} \right)^{2 \cdot d} = 2 \cdot c \cdot \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi_{\text{lim}}} \right)^d ; R_t = 2 \cdot c \cdot \left(\frac{\cos \varphi_{\text{lim}}}{1 + \sin \varphi_{\text{lim}}} \right)^{2 \cdot d} = 2 \cdot c \cdot \left(\frac{1 - \sin \varphi_{\text{lim}}}{1 + \sin \varphi_{\text{lim}}} \right)^d . \quad (6)$$

Из анализа зависимостей (6) вытекает, что если величина третьего параметра сопротивления сдвигу d составляет 0,5, то выражения (6) приобретают вид классических формул (5). В этом случае величина структурных сопротивлений достигает максимальной величины, то есть величины пределов прочности на сжатие R_c и растяжение R_t . Если величина третьего параметра d принимает нулевое значение, то пределы прочности приобретают минимальные значения и равны друг другу, а формулы (6) преобразуются к виду:

$$R_c = R_t = 2 \cdot c . \quad (7)$$

Формула (7) справедлива для третьей теории прочности, в ней пределы прочности одинаковые и равны удвоенному значению сцепления. Таким образом, предлагаемые нами зависимости (6) удовлетворяют гипотезе, представленной на рис. 5. Подставив формулы (6) в неравенство (4) и выполнив преобразования, получим:

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\sigma_1 \cdot \left(\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right)^d - \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^d \cdot \sigma_3 \right] \leq c . \quad (8)$$

Критерий (8) связывает две классические теории прочности. В случае если параметр d принимает наибольшее предельное значение 0,5, то неравенство (8) приобретает вид оригинального двухпараметрического критерия прочности Мора – Кулона (см. в табл. 1). Если параметр d принимает нулевое значение, то есть $d=0$, то неравенство (8) приобретает вид третьей теории прочности, уравнение предельного состояния которого приведено на рис 5 а для касательной Кулона, ограничивающей первый этап упрочнения.

На первом этапе упрочнения значение девиатора напряжения относительно мало, из-за чего механизм пластического деформирования объясняется объемными деформациями уплотнения материала. Для второго этапа упрочнения характерны разворот минеральных частиц и их переориентация относительно будущей площадки сдвига. В глинистых грунтах такая переориентация частиц при испытании прямым срезом была обнаружена С.С. Вяловым, Н.К. Пекарской и Р.В. Максимяк [25]. Следовательно, для предлагаемого трехпараметрического критерия пластичности актуальным вопросом является раскрытие зависимости величины параметра d от деформации материала в условиях трехосного сжатия.

Предпринимая попытку решения этой задачи, воспользуемся работами японских коллег [26, 27]. В своих исследованиях авторы работ [26, 27] выполнили трехосные испытания прямоугольных образцов, в ходе которых наблюдали за развитием площадок скольжения. Для этого образцы грунта помещались в резиновую оболочку, на которой была нанесена сетка с квадратной ячейкой размером ребра 2 мм. В процессе эксперимента образец фотографировали и по изменению местоположений узлов сетки судили о траектории развития площадок сдвига. В результате работ [26, 27] был установлен диапазон упругопластических деформаций, в котором формируются площадки скольжения от начала образования и до полного развития. Нижней границей этого диапазона стала деформация 8 %, при которой площадки сдвига начинают зарождаться. Верхней границей опасного диапазона стала деформация 12 %, при которой площадки сдвига сформированы, но образец еще не разрушен. В процессе изменения деформации образца в диапазоне $0,08 \leq \varepsilon_1 \leq 0,12$ происходит локализация деформаций сдвига вдоль будущей площадки среза, что позволяет рассматривать этот диапазон деформаций в качестве подготовительного этапа к разрушению или течению. По нашему мнению, целесообразно от деформации, измеряемой в % или долях единицы, перейти к скалярной мере, представляющей собой отношение деформации ε_1 , достигнутой в процессе трехосного сжатия, к ее предельной величине $\varepsilon_{1\text{lim}}$. Под такой скалярной мерой $D_\varepsilon = \varepsilon_1 / \varepsilon_{1\text{lim}}$ можно понимать деформационную повреждаемость образца при трехосном сжатии. Если $\varepsilon_1 = 0$, то $D_\varepsilon = 0$, что подразумевает абсолютную целостность образца. Если $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1\text{lim}}$, то $D_\varepsilon = 1$,

что подразумевает отказ образца из-за его разрушения или достижения им предельной деформации. Если принять $\varepsilon_{lim}=15\%$, то опасный диапазон локализации деформаций вдоль площадок скольжения можно характеризовать диапазоном изменения деформационной повреждаемости от 0,5 до 0,8, то есть $0,5 \leq D_\varepsilon \leq 0,8$. Введенная нами мера D_ε позволяет определить опасный диапазон деформаций независимо от величины деформации отказа образца, которая при его хрупком разрушении всегда меньше 15%. Кроме того, эта мера позволяет установить предельную деформацию, на которую следует производить расчет дорожной одежды, например, можно принять для одежд: капитального типа $\varepsilon_1=0,5 \cdot \varepsilon_{lim}$, облегченного типа $\varepsilon_1=0,8 \cdot \varepsilon_{lim}$, а переходного и низшего типов $\varepsilon_1=\varepsilon_{lim}$. В данном случае при увеличении капитальности дорожных одежд значение параметра d в критерии (8) будет уменьшаться, а уменьшению этого параметра соответствует уменьшение угла внутреннего трения φ_ε . В работе [21] приведены эмпирические формулы для расчета величины параметра d критерии (8) от деформационной повреждаемости. С учетом этих формул задачу разработки трехпараметрического критерия (8) можно считать решенной, но в целях применимости к нашему расчету номограмм ПНСТ 542-2021 необходимо решить третью поставленную нами задачу.

2.3. Вычисление угла внутреннего трения модифицированного критерия Мора–Кулона

Из анализа модели упрочнения, показанной на рис. 5, и критерии (8) следует, что его аналогом может являться условие пластичности Мора–Кулона с углом внутреннего трения φ_ε , представляющего собой функцию параметра d или скалярной меры D_ε . В этом случае любое из возможных предельных состояний можно представить уравнением:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_1 \cdot \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_\varepsilon}{1 + \sin \varphi_\varepsilon}} - \sigma_3 \cdot \sqrt{\frac{1 + \sin \varphi_\varepsilon}{1 - \sin \varphi_\varepsilon}} \right) = c. \quad (9)$$

Для определения значения угла внутреннего трения и сцепления нужно построить круги предельных напряжений, для этого необходимо определить предельную величину напряжения σ_1 при заданном напряжении σ_3 . Особенностью предложенного нами критерия (8) является возможность вычисления напряжения σ_1 при известных предельных значениях параметров сопротивления сдвигу и любом фиксированном значении напряжении σ_3 . Такой расчет выполняется по формуле:

$$\sigma_{1lim} = 2 \cdot c \cdot \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^d + \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^{2-d} \cdot \sigma_3. \quad (10)$$

Если $d=0,5$, то значение σ_{1lim} будет равно предельной величине напряжения σ_1 , которое было достигнуто в опытах по трехосному сжатию и использовано для построения кругов предельных напряжений и определения критических значений φ и c . Если $d < 0,5$, то по мере уменьшения значения этого параметра величина σ_{1lim} , рассчитанная по формуле (10), тоже уменьшается. Поэтому чем меньше величина параметра d , тем меньше круги напряжений и меньше величина угла внутреннего трения φ_ε в критерии (9), при одном и том же значении сцепления. Угол внутреннего трения φ_ε можно определить с использованием традиционных формул, регламентируемых ГОСТ 12248.3-2020. Эти формулы имеют вид:

$$\varphi = \arctg \frac{N-1}{2 \cdot \sqrt{N}} \quad N = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{1i} \cdot \sigma_{3i} - \sum_{i=1}^n \sigma_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{3i}}{n \cdot \sum_{i=1}^n (\sigma_{3i})^2 - \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{3i} \right)^2}, \quad (11)$$

где i и n – номер и общее количество опытов по определению параметров сопротивления сдвигу; σ_{1i} и σ_{3i} – предельное значение максимального главного напряжения и заданное минимальное значение главного напряжения в i -м опыте, кПа.

Используя в формулах (11) полученное нами выражение (10), получим зависимости:

$$N_{\varepsilon} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n \left[2c \cdot \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^d + \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^{2d} \sigma_3 \right] \cdot \sigma_{3i} - \sum_{i=1}^n \left[2c \cdot \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^d + \left(\frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \right)^{2d} \sigma_3 \right] \cdot \sum_{i=1}^n \sigma_{3i}}{n \cdot \sum_{i=1}^n (\sigma_{3i})^2 - \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{3i} \right)^2}. \quad (12)$$

$$\varphi_{\varepsilon} = \arctg \frac{N_{\varepsilon} - 1}{2 \cdot \sqrt{N_{\varepsilon}}}. \quad (13)$$

Вычисление угла внутреннего трения φ_{ε} по формулам (12) и (13) приводит к изменению обработки данных при трехосных испытаниях. Эти изменения состоят в том, что после определения критических значений c и φ по формуле (10) при $d < 0,5$ производится расчет значения σ_{lim} , которое применяется в зависимости (12) и последующем вычислении угла внутреннего трения φ_{ε} по выражению (13). Полученное значение угла внутреннего трения φ_{ε} применяется в расчете напряжения сдвига от временной нагрузке по номограммам ПНСТ 542-2021. В этом случае фактический коэффициент прочности по сдвигу будет уменьшаться с уменьшением угла внутреннего трения φ_{ε} , что в свою очередь обуславливается уменьшением величины параметра d в зависимости (10).

3. Результаты

Результатом нашего исследования является вычисление значений углов внутреннего трения, соответствующих различным величинам параметра d , которые можно рекомендовать для проверки толщины дорожной одежды по сопротивлению сдвигу в грунте земляного полотна. Результаты нашего расчета приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вид грунта		Угол внутреннего трения φ_{ε} , градус, при параметре d					
		0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
1		2	3	4	5	6	7
Суглинки и глины при относительной влажности, W/W_L	0,60	24	19,4	14,7	9,8	4,9	0
	0,65	21	16,9	12,8	8,6	4,3	0
	0,70	18	14,5	10,9	7,3	3,7	0
	0,75	15	12	9,1	6,1	3	0
	0,80	13	10,4	7,8	5,2	2,6	0
	0,90	11,5	9,2	6,9	4,6	2,3	0
Супеси и пылеватые пески при относительной влажности, W/W_L	0,60	36	29,5	22,6	15,3	7,7	0
	0,65	36	29,5	22,6	15,3	7,7	0
	0,70	35	28,6	21,9	14,8	7,5	0
	0,75	35	28,6	21,9	14,8	7,5	0
	0,80	34	27,8	21,2	14,3	7,2	0
	0,85	34	27,8	21,2	14,3	7,2	0
	0,95	33	26,9	20,5	13,9	7,0	0
Песок гравелистый и крупный с содержанием пылевато-глинистой фракции, %	0	35	28,6	21,9	14,8	7,5	0
	5	34	27,8	21,2	14,3	7,2	0
Песок средний с содержанием пылевато-глинистой фракции, %	0	32	26,1	19,9	13,4	6,7	0
	5	33	26,9	20,5	13,9	7,0	0
Песок мелкий с содержанием пылевато-глинистой фракции, %	0	31	25,2	19,2	12,9	6,5	0
	5	31	25,2	19,2	12,9	6,5	0
	8	31	25,2	19,2	12,9	6,5	0
Супесь легкая		31	25,2	19,2	12,9	6,5	0
Песчано-гравийные смеси		45	37,4	29,0	19,8	10,0	0

Применение данных табл. 2 в расчете дорожной одежды требует обоснования величины параметра d , в зависимости от которого определяется величина угла внутреннего трения φ_6 , применяемая при расчете напряжений сдвига как от временной, так и постоянной нагрузок. В этом случае, то есть при одинаковой величине угла внутреннего трения, напряжения сдвига от обеих нагрузок вычисляются для одной и той же площадки, что приводит к устранению ошибки нормативного расчета.

4. Заключение

Предлагаемая модель упрочнения грунта разделяет этот процесс на два этапа. На первом этапе при возникновении девиаторов напряжений, величина которых меньше удвоенного сцепления, преобладающей деформацией является уменьшение объема, что в условиях сдвига связано с явлением дилатансии. Возможность уменьшения объема грунта земляного полотна связана с тем, что коэффициенты уплотнения грунта, регламентируемые СП 78.13330, не являются предельными значениями. Например, для конструктивного элемента «грунт в обойме» рекомендуемый коэффициент уплотнения составляет 1,05 и выше. Это значит, что при определенных условиях грунты земляного полотна могут уплотняться под движением транспорта. Второй этап упрочнения связан с увеличением угла внутреннего трения при росте девиатора напряжения и пластической деформации. На данном этапе происходит локализация повреждений, вызванных пластической составляющей деформации вдоль будущей площадки сдвига. Этому процессу сопутствует проявление эффекта Баушингера, состоящего в том, что увеличение деформации сжатия при текущем действии девиаторного напряжения обуславливает уменьшение сопротивления всестороннему растяжению при последующем воздействии девиатора противоположного знака.

Разработанный трехпараметрический критерий позволяет модифицировать общепринятый метод расчета дорожной одежды по сопротивлению сдвигу. Предложенный способ расчета угла внутреннего трения в виде его зависимости от третьего параметра нового критерия позволяет применить к расчету напряжений сдвига от временной нагрузки номограммы ПНСТ 542-2021. Эта возможность не усложняет работу инженеров проектировщиков и практически не сказывается на компьютерных программах для автоматизированного расчета дорожных одежд. В целом материалы нашей работы позволяют ликвидировать недостатки общепринятого метода расчета.

Библиографический список

1. Craig R.F. Soil Mechanics. – 7-th edition. London and New York, 2004. – 447 p.
2. Schofield A., Wroth P. Critical State Soil Mechanics. – London, 1968. – 218 p.
3. Evesque P. Granta Gravel model of sandpile avalanches. Towards critical fluctuations? // Journal de Physique et le Radium. – 1990. – № 51. – P. 2515-2520. doi: 10.1051/jphys:0199000510220251500.
4. Kaliakin V.N., Anantanasakul P. Behavior and modeling of silt-clay transition soils // In book: Smart Geotechnics for Smart Societies. – 2023. – P. 253-268. doi: 10.1201/9781003299127-22.
5. Данилов Б.Б., Речкин А.А. К определению параметров отклонения управляющего устройства при прохождении горизонтальных скважин в грунте // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. – 2020. – № 2(7). – С. 134-139. doi: 10.15372/FPVGN2020070223.
6. Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V. Cam-clay Models in Mechanics of Granular Materials // Mechanics and Mechanical Engineering. – 2017. – № 4(21). – P. 813-821.

7. Jefferies M.G. Nor-Sand: a simple critical state model for sand // *Géotechnique*. – 1993. – № 1(43). – P. 91-103. doi: 10.1680/geot.1993.43.1.9.1
8. Jefferies M., Shuttle D., Been K. Principal stress rotation as cause of cyclic mobility // *Geotechnical Research*. – 2015. – № 2(2). – P. 66-96. doi: 10.1680/gr.15.00002
9. Lade P.V., Duncan J.M. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil // *Journal Geotechnical Engineering Division*. – 1975. – № 10(101). – P. 1037-1053. doi: 10.1061/AJGEB6.0000204
10. Matsuoka H., Nakai T. Stress-deformation and strength characteristics soil under three different principal stresses // *Proceedings Japanese Society Civil Engineering*. – 1974. – Vol. 232. – P. 59-70. doi:10.2208/jscej1969.1974.232_59
11. Matsuoka H., Nakai T. Relationship among Tresca, Mises, Mohr–Coulomb and Matsuoka–Nakai failure criteria // *Soils and foundation*. – 1985. – № 4(25). – P. 123-128. doi: 10.1016/0148-9062(86)90046-x
12. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis of limit design // *Quarterly of applied mechanics*. – 1952. – №2(10). – P. 157-165. doi: 10.1090/QAM/48291.
13. Brittle failure of rock: A review and general linear criterion / J.F. Labuz et al. // *Journal of Structural Geology*. – 2018. – Vol. 2012. – P. 7-28. doi: 10.1016/j.jsg.2018.04.007
14. A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils / T. Nakai et al. // *Soils and foundation*. – 2011. – № 6(51). – P. 1129-1148. doi: 10.3208/sandf.51.1129.
15. Silva M., Antao A. Three-dimensional Limit Analysis using the Extended-Matsuoka–Nakai yield criterion // *Computers and Geotechnics*. – 2023. – № 2-4(161). – Article N 105526. doi: 10.1016/j.compgeo.2023.105526.
16. Teunissen H. The influence of the intermediate stress on the plane strain strength // *Computers and Geotechnics*. – 2022. – № 1(152). – Article N 104983. doi: 10.1016/j.compgeo.2022.104983.
17. Zhang A. Three-dimensional DEM investigation of mechanical behaviors of grain-cementing type methane hydrate-bearing sediment // *Acta Geotechnica*. – 2023. doi: 10.1007/s11440-023-01903-7.
18. Проявление эффекта Баушингера при знакопеременной деформации / Р.Р. Адигамов и др. // *Известия вузов. Черная металлургия*. – 2022. – № 7(65). – С. 455–466. doi: 10.17073/0368-0797-2022-7-455-466.
19. Каратушин С.И., Храмова Д.А., Пехов В.А. Эффект Баушингера при различных видах пластической деформации // *Известия высших учебных заведений. Машиностроение*. – 2017. – № 12(693). – С. 45-50. doi: 10.18698/0536-1044-2017-12-45-50.
20. Gerrard C.M., Morgan J.R., Richards B.G. An approach to the design of flexible pavements for Australian conditions // *Australian Road Research Report*. – 1975. – № 5(8). – P. 42-59.
21. Александров А.С. Развитие расчета дорожных одежд по сопротивлению грунтов сдвигу // *Вестник ВолгГАСУ. Сер. Строительство и архитектура*. – 2023. – № 1(90). – С. 93-105.
22. Lekar F., Dawson A. Modelling permanent deformation behaviour of unbound granular materials. // *Construction and Building Materials*. – 1998. – Vol. 12. – № 1. – P. 9-18. doi: 10.1016/S0950-0618(97)00078-0.
23. Shear strength and permanent deformation of unbound aggregates used in brazilian pavements / W.P. Nunez et al. // *Proc. of the 6-th International Symposium on Pavements unbound*. – Nottingham, England, 2004. – P. 27- 37.
24. Monotonic aspects of the mechanical behaviour of bottom ash from municipal solid waste incineration and its potential use for road construction / F. Becquart et al. // *Waste Management*. 2009. – Vol. 29. – P. 1320–1329. doi: 10.1016/j.wasman.2008.08.019.

25. Вялов С.С., Пекарская Н.К., Максимьяк Р.В. О физической сущности процессов деформирования и разрушения глинистых грунтов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1970. – № 1. – С. 7-9.
26. Three-dimensional elasto-viscoplastic strain localization analysis of water-saturated clay / Y. Higo at all. // Journal Philosophical Magazine. – 2006. – № 21-22(86). – P. 3205-3240. doi: 10.1201/9781439833780.ch16.
27. Strain localization of rectangular clay specimen under undrained triaxial compression conditions / F. Oka at al. // Proceedings of The 16th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering. – Osaka, Japan, 2005–2006. – P. 841-844. doi: 10.3233/978-1-61499-656-9-841.

References

1. Craig R.F. Soil Mechanics. 7th edition. London and New York, 2004. 447 p.
2. Schofield A., Wroth P. Critical State Soil Mechanics. London, 1968. 218 p.
3. Evesque P. Granta Gravel model of sandpile avalanches. Towards critical fluctuations? Journal de Physique et le Radium. No. 51. 1990. Pp. 2515-2520. doi: 10.1051/jphys:0199000510220251500.
4. Kaliakin V.N., Anantanasakul P. Behavior and modeling of silt-clay transition soils. In book: Smart Geotechnics for Smart Societies. 2023. P. 253-268. doi: 10.1201/9781003299127-22.
5. Danilov B.B., Rechkin A.A. To determine the parameters of the control device deviation during the passage of horizontal wells in the ground. Fundamental and Applied Issues of Mining Sciences. No. 2(7). 2020. Pp. 134-139. doi:10.15372/FPVGN2020070223.
6. Ilyashenko A.V., Kuznetsov S.V. Cam-clay models in mechanics of granular materials. Mechanics and Mechanical Engineering. No. 4(21). 2017. Pp. 813-821.
7. Jefferies M.G. Nor-Sand: a simple critical state model for sand. Géotechnique. No. 1(43). 1993. Pp. 91-103. doi: 10.1680/geot.1993.43.1.9.1
8. Jefferies M., Shuttle D., Been K. Principal stress rotation as a cause of cyclic mobility. Geotechnical Research. No. 2(2). 2015. Pp. 66-96. doi: 10.1680/gr.15.00002
9. Lade P.V., Duncan J.M. Elastoplastic stress-strain theory for cohesionless soil. Journal Geotechnical Engineering Division. No. 10(101). 1975. Pp. 1037-1053. doi: 10.1061/AJGEB6.0000204
10. Matsuoka H., Nakai T. Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. Proceedings Japanese Society Civil Engineering. Vol. 232. 1974. Pp. 59-70. doi: 10.2208/jscej1969.1974.232_59
11. Matsuoka H., Nakai T. Relationship among Tresca, Mises, Mohr–Coulomb and Matsuoka–Nakai failure criteria. Soils and Foundation. No. 4(25). 1985. Pp. 123-128. doi: 10.1016/0148-9062(86)90046-x
12. Drucker D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis of limit design. Quarterly of Applied Mechanics. No. 2(10). 1952. P. 157-165. doi: 10.1090/QAM/48291.
13. Labuz J.F. Brittle failure of rock: A review and general linear criterion. Journal of Structural Geology. Vol. 2012. 2018. Pp. 7-28. doi: 10.1016/j.jsg.2018.04.007
14. Nakai T. A simple and unified three-dimensional model to describe various characteristics of soils. Soils and Foundation. No. 6(51). 2011. Pp. 1129-1148. doi: 10.3208/sandf.51.1129.
15. Silva M., Antao A. Three-dimensional limit analysis using the Extended-Matsuoka–Nakai yield criterion. Computers and Geotechnics. No. 2-4(161). 2023. Article No. 105526. doi: 10.1016/j.compgeo.2023.105526.

16. Teunissen H. The influence of the intermediate stress on the plane strain strength. *Computers and Geotechnics*. No. 1(152). 2022. Article No. 104983. doi: 10.1016/j.compgeo.2022.104983.
17. Zhang A. Three-dimensional DEM investigation of mechanical behaviors of grain-cementing type methane hydrate-bearing sediment. *Acta Geotechnica*. 2023. doi: 10.1007/s11440-023-01903-7.
18. Adigamov R.R. Manifestation of the Bauschinger effect during alternating deformation. *News of Universities. Ferrous Metallurgy*. No. 7(65). 2022. Pp. 455–466. doi: 10.17073/0368-0797-2022-7-455-466.
19. Karatushin S.I., Khramova D.A., Pekhov V.A. The Bauschinger effect for various types of plastic deformation. *News of Higher Educational Institutions. Mechanical Engineering*. No. 12(693). 2017. Pp. 45-50. doi: 10.18698/0536-1044-2017-12-45-50.
20. Gerrard C.M., Morgan J.R., Richards B.G. An approach to the design of flexible pavements for Australian conditions. *Australian Road Research Report*. No. 5(8). 1975. Pp. 42-59.
21. Alexandrov A.S. Development of calculation of road pavements based on soil shear resistance. *Bulletin of VolgGASU. Ser. Construction and Architecture*. No. 1(90). 2023. Pp. 93-105.
22. Lekarp F., Dawson A. Modeling permanent deformation behavior of unbound granular materials. *Construction and Building Materials*. Vol. 12. No. 1. 1998. Pp. 9-18. doi: 10.1016/S0950-0618(97)00078-0.
23. Nunez W.P. Shear strength and permanent deformation of unbound aggregates used in Brazilian pavements. *Proc. of the 6th International Symposium on Pavements un-bound*. Nottingham, England, 2004. Pp. 27-37.
24. Becquart F. Monotonic aspects of the mechanical behavior of bottom ash from municipal solid waste incineration and its potential use for road construction. *Waste Management*. Vol. 29. 2009. Pp. 1320–1329. doi: 10.1016/j.wasman.2008.08.019.
25. Vyalov S.S., Pekarskaya N.K., Maksimyak R.V. On the physical essence of the processes of deformation and destruction of clayey soils. *Foundations, Bases and Soil Mechanics*. No. 1. 1970. Pp. 7-9.
26. Higo Y. Three-dimensional elasto-viscoplastic strain localization analysis of water-saturated clay. *Journal Philosophical Magazine*. No. 21-22(86). 2006. Pp. 3205-3240. doi: 10.1201/9781439833780.ch16.
27. Oka F. Strain localization of rectangular clay specimen under undrained triaxial compression conditions. *Proceedings of the 16th International Conference on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*. Osaka, Japan, 2005–2006. Pp. 841-844. doi: 10.3233/978-1-61499-656-9-841.

THREE-PARAMETER MOHR–COULOMB CRITERION WITH THE BAUSCHINGER EFFECT FOR CALCULATION OF ROAD PAVEMENTS

A. S. Aleksandrov

Siberian State Automobile and Highway University (SibAHU)
Omsk, Russia

PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction and Operation of Roads,
Tel.: +7(3812) 651563, e-mail: aleksandrov00@mail.ru

In the classical Mohr–Coulomb criterion, the center of rotation of the limiting straight line is assumed on the axis of normal stresses at a fixed point, the abscissa of which corresponds to the resistance to all-round stretching and is calculated by the product of adhesion and the cotangent of the angle of internal friction. Therefore, the classical Mohr–Coulomb criterion does not take into account the I. Bauschinger effect, according to which the preliminary plastic deformation of one sign causes a decrease in the resistance to plastic deformation of the opposite sign. To take into account the Bauschinger effect, we have proposed a new hypothesis of soil hardening and a three-parameter Mohr–Coulomb criterion, which the third parameter of the material d depends on the deformation of the sample. The center of rotation of the Coulomb straight line is assumed on the axis of tangential stresses at a point with an ordinate corresponding to the amount of adhesion at the limit strain. Using our criterion, we can calculate the values of the internal friction angle of the traditional two-parameter Mohr–Coulomb condition, but as a function of the parameter d .

Keywords: Mohr–Coulomb criterion, angle of internal friction, triaxial compression.

**ВЛИЯНИЕ ПРИСОЕДИНЁННОЙ КОНСОЛИ НА НЕСУЩУЮ СПОСОБНОСТЬ
ОДИНОЧНОЙ СВАИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ**

В. А. Козлов¹, М. Меразка², Р. А. Мухтаров³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}

Россия, г. Воронеж

¹Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики, тел.: +7(960)125-59-87, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

²Аспирант кафедры строительной механики, тел.: +7(951)870-23-80, e-mail: mahfoud.merazka@gmail.com

³Старший преподаватель кафедры строительной механики, тел.: +7(910)347-33-00, e-mail: u00751@vgasu.vrn.ru

Постановка задачи. Рассматривается влияние присоединённой к одиночной свае консоли на её напряжённо-деформированное состояние под действием нагрузки, приложенной в горизонтальной плоскости.

Результаты. Выполнены аналитические расчёты величин горизонтальных перемещений и углов поворота оголовка сваи с присоединённой консолью при действии горизонтальной нагрузки. Результаты сравниваются с проведёнными авторами ранее экспериментальными исследованиями в лабораторных условиях на масштабных моделях.

Выводы. Сравнительный анализ аналитических расчётов и экспериментальных данных показал их удовлетворительное совпадение. Приведённые в работе аналитические формулы для расчёта горизонтальных перемещений и углов поворота оголовка сваи рекомендуются к применению в инженерной практике расчётов свайных конструкций. Наличие присоединённой к свае консоли увеличивает её несущую способность по сравнению с одиночной свайей.

Ключевые слова: одиночная свая, консоль, горизонтальное и угловое перемещения, несущая способность сваи.

Введение. Расчёт одиночных свай с присоединёнными к ним элементами усиления под действием горизонтальных нагрузок занимает значительное место среди многочисленных задач по расчёту элементов конструкций оснований и фундаментов [1–8]. При этом часто рассматривается вопрос взаимодействия применяемых свайных конструкций с различными грунтовыми основаниями [9–13]. В работах [1–3] учитывается сдвиг грунта в верхней зоне вокруг сваи. Расчёт одиночной сваи на горизонтальное воздействие выполняется как для абсолютно жёсткого стержня, который поворачивается под действием приложенной нагрузки [10–13]. Несущая способность сваи от горизонтальной нагрузки и определение сопротивления грунта рассчитываются по классической теории предельного напряжённого состояния [15, 16]. Наряду с численно-аналитическими расчётами таких конструкций проводятся различные экспериментальные исследования [7, 12, 17–19].

Аналитический расчёт сваи с присоединённой консолью под действием горизонтальной нагрузки. Расчёт сваи с консолью под действием горизонтальной силы H_x

(κH) производится на основании [4] в соответствии со схемой, приведённой на рис. 1. Здесь L – длина сваи (m); l – длина присоединённой консоли (m); EI – жёсткость ($\kappa H \cdot m^2$), конечная в осевом направлении для сваи, присоединённая консоль бесконечной жёсткости; C_n – коэффициент постели под подошвой консоли; $C_z = k \cdot z$ – коэффициент постели грунта, окружающего ствол сваи (возрастает с увеличением глубины z). k – коэффициент пропорциональности, характеризующий нарастание C_z по глубине заложения сваи.

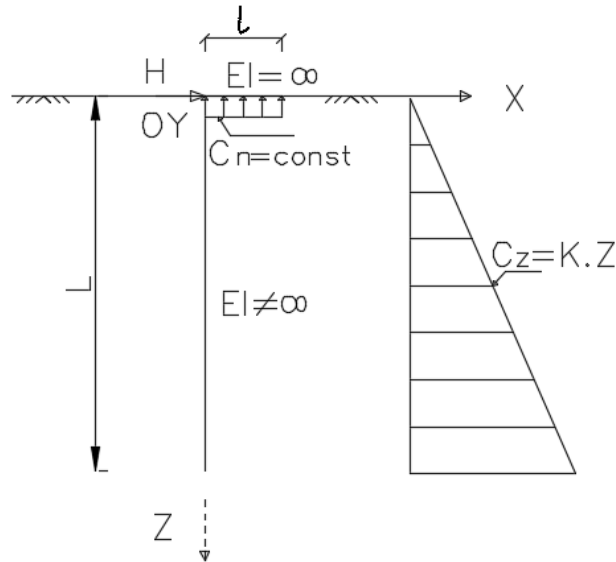


Рис. 1. Плоская схема к расчёту сваи с присоединённой консолью

Расчёт смещений оголовка сваи под действием горизонтальной силы ρ_2 , действующей в направлении оси Ox при единичном перемещении в этом направлении ($a = 1$), будем рассматривать с учётом следующих силовых факторов сопротивления грунта перемещениям оголовка сваи на единицу длины (рис. 2): R_{Ha} (κH) – горизонтальная составляющая в направлении оси Ox ($R_{Ha} = \rho_2 + F_{kk}$); R_{Hc} (κH) – вертикальная составляющая по оси сваи вдоль оси Oz ($R_{Hc} = 0$); $M_{H\beta}$ ($\kappa H \cdot m$) – момент сопротивления в плоскости Oxz ($M_{H\beta} = -\rho_3$).

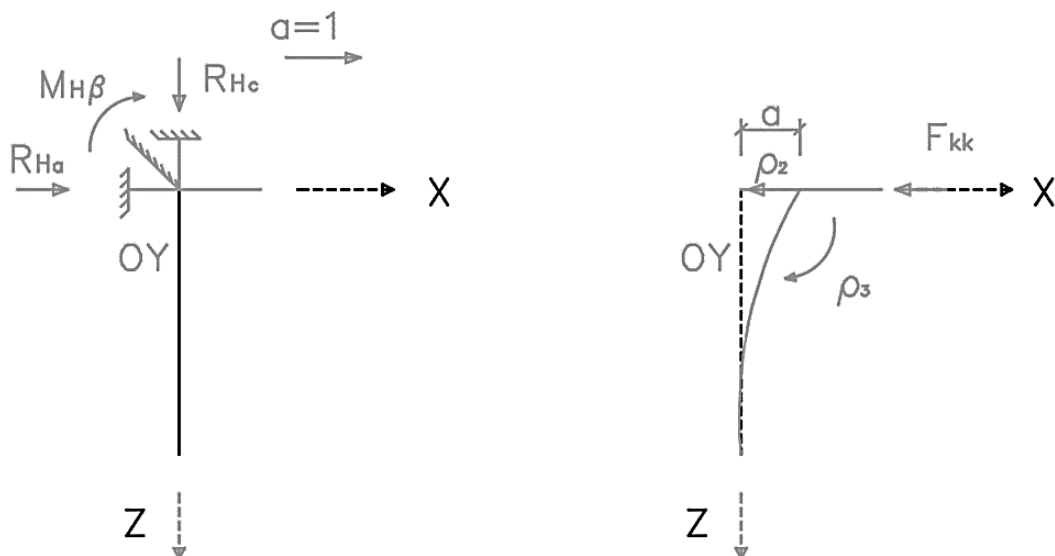


Рис. 2. Схема составляющих реакции грунта в оголовке сваи под действием горизонтальной силы ρ_2 ($a = 1$ отвечает единичному перемещению оголовка сваи вдоль оси Ox)

В отличие от известных работ в представленной схеме вместе с силой ρ_2 учитывается равнодействующая F_{kk} касательных сил по боковой поверхности присоединённой консоли, которая определяется равенством

$$F_{kk} = \int_0^l \int_0^h (\gamma z \xi \tan \varphi + c) dz dx = \left(\gamma \frac{h^2}{2} \xi \tan \varphi + ch \right) l,$$

где γ – удельный вес грунта; ξ – коэффициент бокового давления грунта; φ – угол внутреннего трения; c – удельное сцепление; h – высота консоли (м).

При этом равнодействующая касательных сил по трём боковым поверхностям присоединённой консоли определяется равенством:

$$2,5F_{kk} = 2,5\left(\gamma \frac{h^2}{2} \xi \tan \varphi + ch\right)l.$$

Расчёт смещений оголовка сваи под действием вертикальной силы ρ_1 , действующей в направлении оси Oz при единичном перемещении в этом направлении ($c = 1$), будем рассматривать с учётом следующих силовых факторов сопротивления грунта перемещениям оголовка сваи на единицу длины (рис. 3): R_{Va} (кН) – горизонтальная составляющая в направлении оси Ox ($R_{Va} = 0$); R_{Vc} (кН) – вертикальная составляющая по оси сваи вдоль оси Oz ($R_{Vc} = \rho_1 + C_{\Pi} F_{\Pi}$); $M_{V\beta}$ (кН·м) – момент сопротивления в плоскости Oxz ($M_{V\beta} = C_{\Pi} S_{\Pi}$).

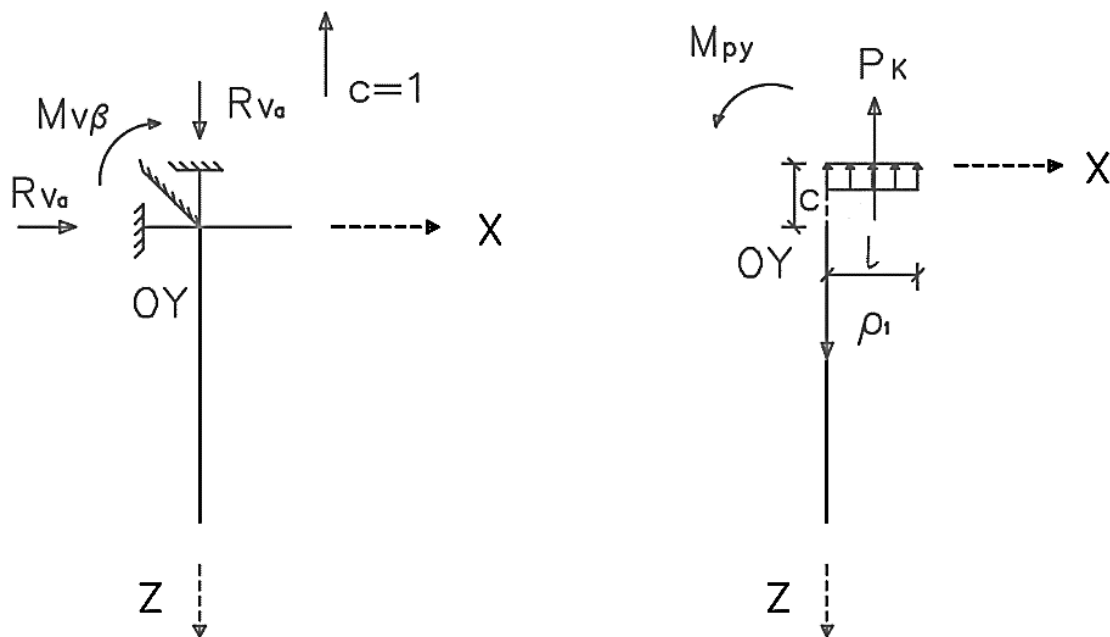


Рис. 3. Схема составляющих реакции грунта в оголовке сваи под действием вертикальной силы ρ_1 ($c = 1$ отвечает единичному перемещению оголовка сваи вдоль оси Oz)

В отличие от известных работ для рассматриваемой схемы вместе с силой V необходимо учесть изгибающий момент M_{Py} от равнодействующей P_k удельного давления p_k , оказываемого грунтом на подошву консоли (вверху при выбранном направлении единичного смещения вверх). При этом

$$P_k = C_{\Pi} \cdot F_{\Pi}, \quad M_{Py} = P_k \cdot \left(\frac{l}{2}\right),$$

где $F_{\Pi} = l \cdot b$ – площадь подошвы консоли, b – её ширина.

Окончательно

$$M_{Py} = C_{\Pi} \cdot F_{\Pi} \cdot (l/2).$$

При этом вертикальная составляющая по оси сваи определяется равенством

$$\sum y = 0 \rightarrow -R_{Vc} + \rho_1 + C_{\Pi} F_{\Pi} = 0.$$

Следовательно,

$$R_{Vc} = \rho_1 + C_{\Pi} F_{\Pi}. \quad (1)$$

Из условия равенства осадок по теории местных деформаций и теории упругости для определения коэффициента постели получим формулу:

$$C_{\Pi} = E / [(1 - \nu^2) \cdot \omega \cdot b], \quad (2)$$

где E – модуль деформации грунта ($\kappa\Pi a$); ν – коэффициент Пуассона; ω – коэффициент, соответствующий осадке абсолютно жёсткого фундамента: $\omega = f \cdot (l/b)$ (для жёсткого штампа по Н.А. Цытовичу [12] $f = 0,48$).

В соответствии с ГОСТ 20276.1 – 2020 модуль деформации E грунта определяется по формуле

$$E = (1 - \nu^2) K_i \cdot D \cdot (\Delta p / \Delta s), \quad (3)$$

где K_i – коэффициент, принимаемый для жёсткого круглого штампа равным 0,79; Δp (МПа) – приращение давления на штамп, определяемое разностью $p_n - p_0$; Δs (см) – приращение осадки штампа, соответствующее Δp ; D (см) – диаметр штампа.

При этом отношение $\Delta p / \Delta s = C_{\Pi}$ определяет коэффициент постели. С учётом этого отношения и равенства (3) получим

$$C_{\Pi} = \frac{E}{(1 - \nu^2) K_i D}.$$

При этом

$$\sum M = 0 \rightarrow -M_{Py} + M_{V\beta} = 0.$$

Тогда

$$M_{V\beta} = M_{Py} = C_{\Pi} \cdot F_{\Pi} \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = C_{\Pi} \cdot l \cdot b \cdot \left(\frac{l}{2}\right) = 0,5 \cdot bl^2 \cdot C_{\Pi}.$$

Так как статический момент S_k площади подошвы консоли относительно от Oy определяется формулой

$$S_k = \int_{F_k} x dF_k = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l x dx dy = 0,5 F_k l = 0,5 bl^2,$$

то окончательно

$$M_{V\beta} = C_{\Pi} S_k. \quad (4)$$

Расчёт смещений оголовка сваи под действием изгибающего момента ρ_4 относительно оси Oy при повороте на единичный угол ($\beta = 1$), а также на основании принципа взаимности под действием силы ρ_3 , действующей на оголовок сваи при $\beta = 1$, будем рассматривать с учётом следующих силовых факторов сопротивления грунта перемещениям оголовка сваи на единицу длины (рис. 4): R_{Ma} (κH) – горизонтальная составляющая в направлении оси Ox ; R_{Mc} (κH) – вертикальная составляющая по оси сваи вдоль оси Oz ; $M_{M\beta}$ ($\kappa H \cdot m$) – момент сопротивления в плоскости Oxz .

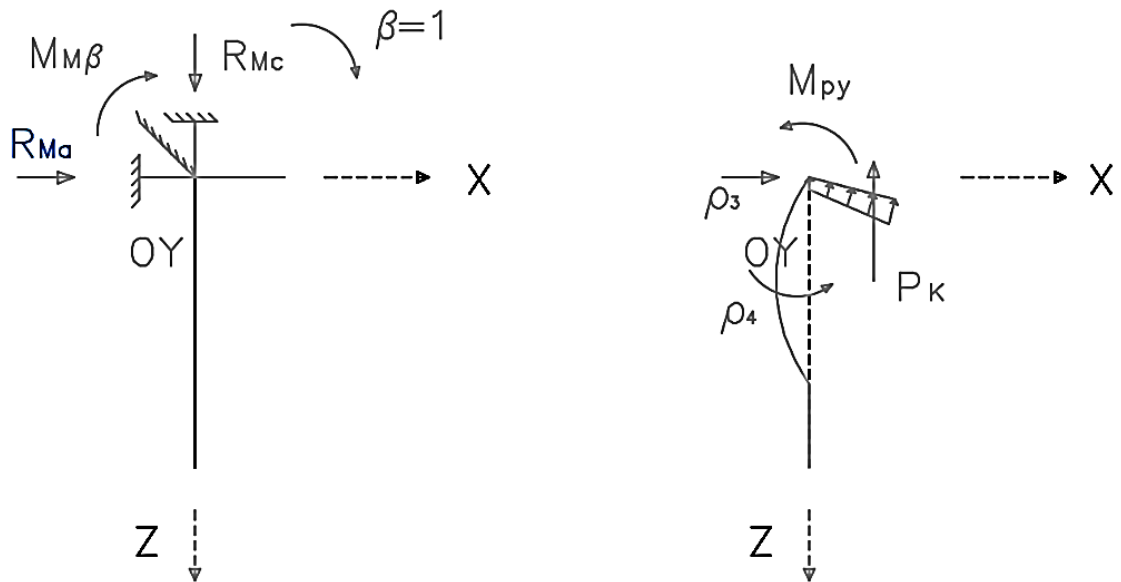


Рис. 4. Схема составляющих реакций грунта в оголовке сваи под действием изгибающего момента ρ_4 и силы ρ_3 ($\beta = 1$ отвечает единичному углу поворота оголовка сваи относительно оси Oy)

Из уравнения равновесия проекций всех сил на ось Ox

$$\sum X = 0 \rightarrow R_{Ma} + \rho_3 = 0$$

получим

$$R_{Ma} = -\rho_3.$$

Из уравнения равновесия моментов

$$\sum M = 0 \rightarrow -M_{Py} + M_{M\beta} - \rho_4 = 0.$$

Тогда

$$M_{M\beta} = \rho_4 + M_{Py}.$$

Момент инерции I_k площади подошвы консоли относительно оси Oy определяется по формуле:

$$I_k = \int_{F_{\Pi}} x^2 dF_{\Pi} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^l x^2 dx dy = 0,25F_{\Pi}l^2 + bl^3/12 = bl^3/3.$$

$$M_{Py} = \frac{2}{3} \cdot P_k \cdot l = \frac{1}{3} \cdot C_{\Pi} \cdot l^3 \cdot b = C_{\Pi} I_k.$$

Следовательно,

$$M_{M\beta} = \rho_4 + C_{\Pi} I_k.$$

Перемещения a , c и β определяют методом перемещений в результате решения системы канонических уравнений [4]:

$$\begin{cases} aR_{Ha} + cR_{Hc} + \beta M_{H\beta} - H_x = 0, \\ aR_{Va} + cR_{Vc} + \beta M_{V\beta} - P = 0, \\ aR_{Ma} + cR_{Mc} + \beta M_{M\beta} - M_y = 0. \end{cases} \quad (5)$$

С учётом полученных выше выражений для R_{Ha} , R_{Vc} , $M_{M\beta}$ и на основании принципа взаимности $R_{Hc} = R_{Va}$, $M_{H\beta} = R_{Ma}$, $M_{V\beta} = R_{Mc}$ под действием лишь горизонтальной силы H_x получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a \cdot \rho_2 + c \cdot 0 + \beta \cdot (-\rho_3) + 2,5F_{kk} - H_x = 0, \\ a \cdot 0 + c \cdot (\rho_1 + C_{\Pi}F_{\Pi}) + \beta \cdot C_{\Pi}S_k - 0 = 0, \\ a \cdot (-\rho_3) + c \cdot C_{\Pi}S_k + \beta(\rho_4 + C_{\Pi}I_{\Pi}) - 0 = 0. \end{cases} \quad (61)$$

Из решения системы (6)

$$c = -\frac{C_{\Pi}S_{\Pi}}{(\rho_1 + C_{\Pi}F_{\Pi})}\beta; \quad (7)$$

$$\begin{cases} a\rho_2 - \beta\rho_3 = H_x - 2,5F_{kk}, \\ -a\rho_3 - \frac{(C_{\Pi}S_{\Pi})^2}{(\rho_1 + C_{\Pi}F_{\Pi})}\beta + \beta(\rho_4 + C_{\Pi}I_{\Pi}) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Перемещения a и β определяют в результате решения системы уравнений (8):

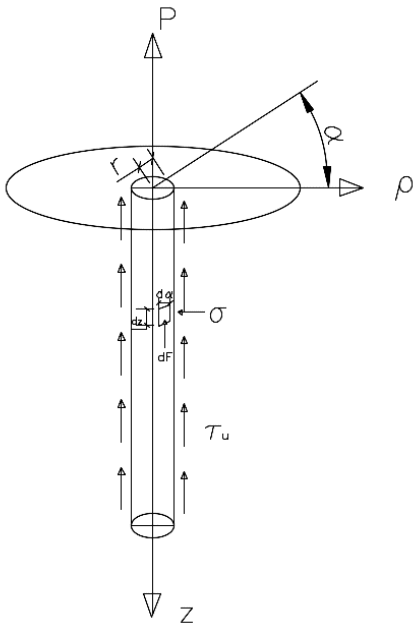
$$a = (H_x - 2,5F_{kk} + \beta \cdot \rho_3)/\rho_2; \quad (9)$$

$$\beta = (H_x - 2,5F_{kk})/[\rho_2(\rho_4 + C_{\Pi}I_{\Pi})/\rho_3 - \rho_2(C_{\Pi}S_k)^2/\rho_3(\rho_1 + C_{\Pi}F_{\Pi}) - \rho_3]. \quad (10)$$

Статический момент S_x и момент инерции I_x подошвы консоли относительно оси Ox вычисляются по следующим формулам:

$$S_x = \int_{-0,5b}^{+0,5b} \int_0^l x dx dy = l^2/2 \int_{-0,5b}^{+0,5b} x dx = l^2/2 [0,5b - (-0,5b)] = bl^2/2 = 0,5F_{\Pi}l \quad (11)$$

$$I_x = \int_{-0,5b}^{+0,5b} \int_0^l x^2 dx dy = \int_{-0,5b}^{+0,5b} dy x^3/3 \Big|_0^l = l^3/3 [0,5b - (-0,5)] = bl^3/3 \quad (12)$$



Таким образом, статический момент $S_x = S_k$, момент инерции $I_x = I_k$.

Характеристика ρ_1 определяется по формулам:

$$\rho_1 = P/\delta;$$

$$\tau_u = \sigma \tan \varphi + c;$$

$$\sigma = \gamma z \xi;$$

$$\xi = \nu/(1 - \nu);$$

$$dF = \tau_u dz r d\alpha = (\gamma z \xi \tan \varphi + c) r dz d\alpha;$$

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^h (\gamma z \xi \tan \varphi + c) d\alpha = 2\pi r \left(\gamma \frac{h^2}{2} \xi \tan \varphi + ch \right);$$

$$\rho_1 = \frac{P}{\delta} = \frac{\pi d \left(\frac{\gamma h^2}{2} \xi \tan \varphi + ch \right)}{\delta}.$$

Рис. 5. Расчётная схема сваи

В представленных выше равенствах при проведении расчётов приняты следующие значения: $d = 0,05 \text{ м}$; $\gamma = 17 \text{ кН/м}^3$; $h = 0,6 \text{ м}$; $\xi = \nu/(1 - \nu) = 0,3/(1 - 0,3) = 0,43$; $\varphi = 36^\circ$; $c = 14 \text{ кПа}$. Следовательно, $\rho_1 = 293,927$.

Характеристики ρ_2 , ρ_3 и ρ_4 определяют по формулам:

$$\rho_2 = \delta_2/(\delta_1\delta_2 - \delta_3^2), \quad \rho_3 = \delta_3/(\delta_1\delta_2 - \delta_3^2), \quad \rho_4 = \delta_1/(\delta_1\delta_2 - \delta_3^2), \quad (13)$$

где δ_1 и δ_3 – горизонтальное смещение и угол поворота оголовка сваи под действием горизонтальной нагрузки H ; δ_3 и δ_2 – аналогичные смещения под действием момента M , при приложенной силе в уровне поверхности грунта. При этом с учётом принятых значений

$$\delta_1 = \delta_{HH} = 4,9 \cdot 10^{-3}; \quad \delta_2 = \delta_{MM} = 40,3685 \cdot 10^{-3}; \quad \delta_3 = \delta_{MH} = 12,5706 \cdot 10^{-3}.$$

Соответственно,

$$\rho_2 = 1014,887; \quad \rho_3 = 316,032; \quad \rho_4 = 123,189.$$

$$\beta = 0,026 \text{ рад}; \quad a = 10,92 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Аналогично получены остальные значения a и β при различных значениях нагрузки. Графики зависимости горизонтальных и угловых перемещений оголовка сваи с консолью от величины горизонтальной нагрузки в сравнении с экспериментальными данными, представленными ранее в работе [15], показаны на рис. 6 и рис. 7. Верхние кривые – результат проведённого эксперимента, нижние – расчёт по приведённым выше формулам.

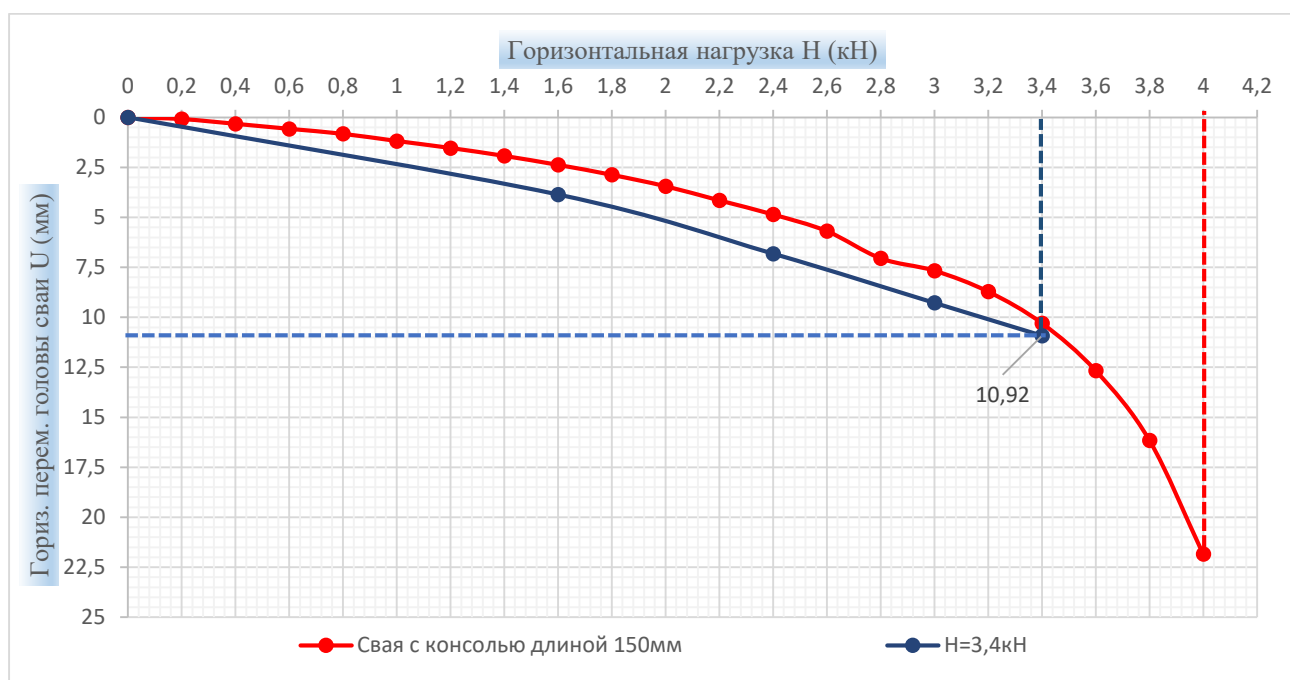


Рис. 6. Зависимость горизонтальных перемещений оголовка сваи с консолью от горизонтальной нагрузки

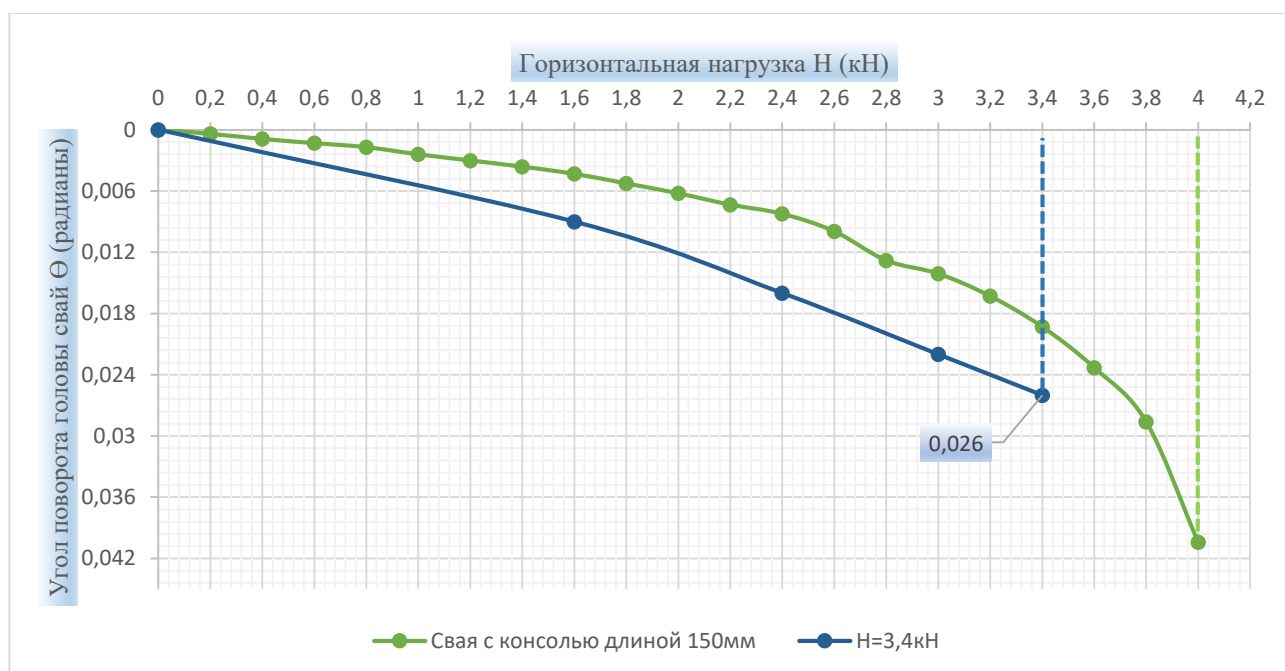


Рис. 7. Зависимость угла поворота оголовка сваи с консолью от горизонтальной нагрузки

Выводы. Из представленных графиков видно, что горизонтальные перемещения оголовка сваи с консолью при аналитических расчётах достаточно хорошо совпадают с результатами экспериментальных исследований. Так, при предельной нагрузке на сваю с консолью 3,4 кН аналитический расчёт даёт величину перемещения 11,6 мм, экспериментальные данные – 10 мм. Значения угловых смещений составили 0,0293 рад и 0,0192 рад соответственно. Рассмотренная в работе инженерная методика приближенного аналитического расчёта свай с присоединёнными усиливающими элементами может использоваться при решении практических геотехнических задач. Результаты опытов и расчётов показали эффективность применения консолей с целью повышения несущей способности горизонтально нагруженных свай.

Библиографический список

1. Безволев С.Г. Методика определения коэффициентов жёсткости грунта при расчёте свай на горизонтальную нагрузку // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2012. – № 2. – С. 8-12.
2. Березанцев В.Г. Расчёт одиночных свай и свайных кустов на действие горизонтальных сил. – М.: Военное издательство министерства вооружённых сил Союза ССР, 1946. – 57 с.
3. Гайсин А.З., Крутяев С.А., Глазачев А.О. Исследование влияния диаметра буронабивной сваи на изменение коэффициента постели при расчёте на горизонтальные нагрузки // Градостроительство и архитектура. – 2019. – № 4 (37). – С. 11-15.
4. Свайные фундаменты / Н.М. Глотов, А.А. Луга, К.С. Силин, К.С. Завриев. – М.: Транспорт, 1975. – 432с.

5. Готман А.Л., Гайсин А. З. Исследование работы крупномасштабных буронабивных свай на горизонтальную нагрузку и их расчёт // Вестник ПНИПУ. Строительство и архитектура. – 2018. – Т. 9. – № 3. – С. 14-27.
6. Готман А.Л. Расчёт свай и свайных фундаментов на горизонтальную нагрузку: учеб. пособие. – Л.-М., 2020. – 212 с.
7. Григорьев Ю.С., Фатеев В.В. Экспериментальные исследования работы горизонтально нагруженных моделей фундаментов при однорядном расположении призматических свай // Современные наукоемкие технологии. – 2013. – № 8 (Ч.2) – С. 278-281.
8. Карапетян С.Г., Тышова Ю.В. Сравнение аналитических и численных расчётов с натурными испытаниями свай на горизонтальные нагрузки // Молодой ученый. – 2020. – № 49 (339). – С. 63-69.
9. Осокин А.И., Кондратьева Л.Н., Ефимов В.О. Особенности инженерной методики расчёта свайноплитных фундаментов в условиях слабых грунтов // Фундаментальные и прикладные вопросы геотехники: новые материалы, конструкции, технологии и расчёты: сб. аннот. – СПб.: СПбГАСУ, 2018. – С. 55-57.
10. Полянкин А.Г. Метод расчёта свайных фундаментов транспортных сооружений с позиции их рационального проектирования // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». – 2013. – № 6.
11. Полянкин А.Г., Королев К.В. Расчет несущей способности сваи на горизонтальную и моментную нагрузки // Вестник СГУПС. – 2010. – Вып. 23. – С. 34-39.
12. Цытович Н.А. Механика грунтов: учеб. пособие. – 4-е изд. вновь перераб. и доп. – М.: Гостройиздат, 1963. – 636 с.
13. Шишов И.И., Дошков А. Г. Расчёт сваи на действие вертикальной и горизонтальной сил // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2007. – № 22 (94). – С. 67-68.
14. Parametric study of lateral load behavior of single piles socketed into jointed rock mass / W. L. Chong, A. Haque, P. G. Ranjit, A. A. Shahinuzamman // Australian geomechanics. – 2011. – Vol. 46, № 1. – P. 43 – 50.
15. Merazka M., Panfilov D. V. Results of experimental studies of piles on horizontal loads / M. Merazka, // Russian journal of building construction and architecture. – 2022. – № 1 (53). – P. 21-28.
16. Ryabkova M.P., Pesternikova A.V. About application of short piles under lateral load action on undermined territory // Paradigmata poznani. – 2020. – № 1. – P. 14 – 18.
17. Experimental studies on the behaviour of single pile under combined vertical-torsional loads in layered soil / X. Zou, C. Zhou, X. Cao, Y. Wang // Applied Ocean research. – 2021. – Vol. 106.

References

1. Bezvolev S.G. Methodology for determining soil stiffness coefficients when calculating piles for horizontal load. Foundations, Bases and Soil Mechanics. No. 2. 2012. Pp. 8-12.
2. Berezantsev V.G. Calculation of single piles and pile bushes under the action of horizontal forces. M.: Military Publishing House of the Ministry of the Armed Forces of the USSR, 1946. 57 p.
3. Gaisin A.Z., Krutyaev S.A., Glazachev A.O. Study of the influence of the diameter of a bored pile on the change in bed coefficient when calculating horizontal loads. Urban Planning and Architecture. No. 4(37). 2019. Pp. 11-15.

4. Glotov N.M., Luga A.A., Silin K.S., Zavriev K.S. Pile foundations. M.: Transport, 1975. 432 p.
5. Gotman A.L., Gaisin A.Z. Study of the work of large-scale bored piles for horizontal load and their calculation. Bulletin of PNIPU. Construction and Architecture. Vol. 9. No. 3. 2018. Pp. 14-27.
6. Gotman A.L. Calculation of piles and pile foundations for horizontal load: textbook. L.-M., 2020. 212 p.
7. Grigoriev Yu.S., Fateev V.V. Experimental studies of the work of horizontally loaded foundation models with a single-row arrangement of prismatic piles. Modern Science-Intensive Technologies. No. 8(2). 2013. Pp. 278-281.
8. Karapetyan S.G., Tyshova Yu.V. Comparison of analytical and numerical calculations with full-scale tests of piles for horizontal loads. Young Scientist. No. 49(339). 2020. Pp. 63-69.
9. Osokin A.I., Kondratyeva L.N., Efimov V.O. Features of engineering methods for calculating pile-slab foundations in soft soil conditions. Fundamental and Applied Issues of Geotechnics: New Materials, Structures, Technologies and Calculations: Abstr. Collection. St. Petersburg: SPBGASU, 2018. Pp. 55-57.
10. Polyankin A.G. Method for calculating pile foundations of transport structures from the perspective of their rational design. Internet Journal "SCIENCE". No. 6. 2013.
11. Polyankin A.G., Korolev K.V. Calculation of the bearing capacity of a pile for horizontal and moment loads. Bulletin of SGUPS. Issue. 23. 2010. Pp. 34-39.
12. Tsytovich N.A. Soil mechanics: textbook. 4th ed. Reworked and added. M.: Gostroyizdat, 1963. 636 p.
13. Shishov I.I., Doshkov A.G. Calculation of a pile under the action of vertical and horizontal forces. Bulletin of the South Ural State University. Series: Construction and Architecture. No. 22(94). 2007. Pp. 67-68.
14. Chong W.L., Haque A., Ranjit P.G., Shahinuzamman A.A. Parametric study of lateral load behavior of single piles socketed into jointed rock mass. Australian Geomechanics. Vol. 46. No. 1. 2011. Pp. 43-50.
15. Merazka M., Panfilov D.V. Results of experimental studies of piles on horizontal loads. Russian Journal of Building Construction and Architecture. No. 1(53). 2022. Pp. 21-28.
16. Ryabkova M.P., Pesternikova A.V. About application of short piles under lateral load action on undermined territory. Paradigmata Poznani. No. 1. 2020. Pp. 14-18.
17. Zou X., Zhou C., Cao X., Wang Y. Experimental studies on the behavior of single pile under combined vertical-torsional loads in layered soil. Applied Ocean Research. Vol. 106. 2021.

INFLUENCE OF THE ATTACHED CONSOLE ON THE BEARING CAPACITY OF A SINGLE PILE UNDER HORIZONTAL LOAD

V. A. Kozlov¹, M. Merazka², R. A. Mukhtarov³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹Dr. of Phys.-Math. Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(960)1255987,
e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

²Postgraduate Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(951)8702380,
e-mail: mahfoud.merazka@gmail.com

³Assistant Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(910)3473300, e-mail: u00751@vgasu.vrn.ru

Problem Statement. The article considers the influence of a cantilever attached to a single pile on its stress-strain state under the load applied in the horizontal plane.

Results. Analytical calculations of the magnitudes of horizontal displacements and rotation angles of the pile head with an attached console under the horizontal load have been performed. The results are compared with previous experimental studies conducted by the authors in laboratory conditions on scale models.

Conclusions. A comparative analysis of analytical calculations and experimental data showed their satisfactory agreement. The analytical formulas presented in the work for calculating horizontal displacements and rotation angles of the pile head are recommended to use in engineering practice for calculating pile structures. The presence of a cantilever attached to the pile increases its load-bearing capacity compared to a single pile.

Keywords: single pile, cantilever, horizontal and angular movements, bearing capacity of the pile.

ОЦЕНКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ СЛОЁВ МЕТАМОРФИЗИРОВАННЫХ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ

С. В. Артыщенко¹, Т. А. Чудина², М. В. Гусев³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры инноватики и строительной физики им. И.С. Суворцева, тел.: +7(920)2157870, e-mail: art.stepan@mail.ru

² Студент строительного факультета, тел.: +7(915)8689198, e-mail: chudinnaa@gmail.com

³ Аспирант кафедры инноватики и строительной физики им. И.С. Суворцева, тел.: +7(914)6205956, e-mail: gmv_11@mail.ru

В статье рассматриваются изменения энергетического состояния слоя грунта, подверженного механическому воздействию при уплотнении. Анализируется влияние механической энергии на формирование связанных грунтовых комплексов, обладающих заданными физико-механическими свойствами. Предметом данного научного исследования является механохимический переход метаморфизованного глинистого грунта в связный скальноподобный материал, обладающий показателями, достаточными для формирования оснований и грунтовых подушек фундаментов при строительстве сооружений. Использование механического уплотнения в условиях связного перехода от дисперсного к скальноподобному состоянию глинистого грунта позволит уменьшить затраты на возведение строительных объектов, сократить потребление материалов, добываемых в карьерных условиях, и задавать физико-механические свойства модифицированному грунту.

Ключевые слова: механохимическая активация, энергетическое состояние, метаморфизация, глинистые грунты, грунтовые подушки.

Введение. В современном строительстве полускальные породы играют важную роль. Чаще всего их используют для оснований сооружений. Конечно же, в природе распространено ограниченное количество минеральных ископаемых. В данной работе формулируется задача изучения строения, условий образования пород, получаемых в лабораторных и технологических условиях. Полускальные породы – это выветренные, изверженные, метаморфические и осадочные породы, которым свойственны жесткие связи между образующими их частицами. К таким породам можно отнести аргиллиты, мергели, глинистые и песчано-глинистые сланцы, доломит, каолинит, алевролиты и другие.

Анализ литературных данных. Механические свойства большинства известных горных пород изучены достаточно подробно, другая ситуация возникает с дисперсными материалами, особенно в условиях их эксплуатации. Изменения механических свойств дисперсных материалов, прочности и связности при эксплуатации сооружений, опирающихся на грунтовые массивы, исследуются различными авторами. В работе [1, 2] проанализированы способы и условия получения полускальных пород. Фактор образования доломита ($\text{CaCO}_3 \cdot \text{MgCO}_3$) из природных вод – отношение Mg/Ca и величина общей солености. Чем больше концентрация солей, тем больше нужно магния для процесса образования доломита. Когда соленость равна 35 г/л, то отношение Mg к Ca равно 1, при 350 г/л отношение достигает 10. Всё же минерал получается из этого раствора в твердой фазе редко. Сначала образуются метастабильные карбонаты – железистый кальцит и

магнезиальный кальцит, а также протодоломит. Робер Будзински установил, что можно получить доломит добавлением концентрированного раствора Na_2CO_3 в 2М раствора $(\text{Ca}, \text{Mg}) \text{Cl}_2$, в котором отношение $\text{Ca}/\text{Mg} = 1/5$, а также отстаиванием гелеподобного осадка в течение нескольких часов [3]. Существует множество механизмов изменения свойств метаморфизированных грунтов. Так, Сиджел смог получить протодоломит. Для этого потребовалось следующее: азотнокислый кальций, сернокислый магний и углекислый натрий, высокую скорость реакции уменьшили активированным древесным углём. Было установлено, что концентрация карбонатного иона оказывала сильное влияние на осаждение минерала, повышение температуры и концентрации реактивов, а также уменьшение скорости реакции оказывали влияние на упорядоченность и кристалличность осажденного доломита. На образование доломита сильное воздействие оказал и присутствующий сульфат. Взаимосвязь данных ионов весьма обычная для природных осадочных условий образования минерала. Еще один способ получения доломита – использование морской воды, путем применения высоких температур, концентрации хлора и повышения Mg/Ca в растворах. Морская вода перенасыщена по отношению к доломиту при температурах выше 22°C , но когда в ней присутствует кальцит, то она почти не насыщена им. Доломит начинает самопроизвольное осаждение, когда наступает уровень перенасыщения [4].

Еще один минерал из полускальных пород – каолинит $(\text{Al}_2\text{Si}_2\text{O}_5(\text{OH})_4)$. Условия образования – выветривание полевых шпатов и прочих кальцитов. Де Кипр в 1961 году смог описать синтез каолинита при комнатной температуре и нормальном атмосферном давлении. Он ежедневно добавлял глинозем (в качестве $\text{AlCl}_3 \cdot 6 \text{H}_2\text{O}$) и кремнезем в течение двух месяцев. Корректирование pH среды совершалось ежедневно путем добавления соляной кислоты. Присоединением кремния и алюминия к раствору с сочетанием ежедневного титрования соляной кислотой в течение примерно 60 дней будет получен необходимый минерал. Таким образом, смена условий порождает образование стабильной фазы каолинита [5].

Тут же следует сказать о кальците (CaCO_3) . Известно, что условие образования минерала – выпадение твердого осадка из водных растворов. По данным исследований [6] для получения минерала использовали медицинскую консервированную желчь (ООО “САМСОН-МЕД”, эмульсия для наружного применения). Объем был равен 250 мл, далее его разделили на два сосуда поровну. В первый сосуд наливали добавки, во второй – Ca^{2+} . После того как добавки в первом сосуде растворились, вещество переливали во второй сосуд, перемешивая. Температура второго сосуда поддерживалась $310 \pm 1 \text{ K}$. Далее раствор 250 мл перемешивали 30 минут, и происходило осаждение минерала. Реакция осаждения минерала протекает в соответствии со схемой:



Также к группе кальцита относится магнезит (MgCO_3) . Условия образования – карбонизация оливина в присутствии воды и углекислого газа при повышенных температурах и высоких давлениях. Условие получения магнезита изучали Корнеев, Медведева и др. в 1997 году. В работе [7] использовался тонко измельченный магнезит из Сатки. В процессе работы проводились обжиги, тем самым ученые получили порошки каустические магнезитовые высокой активности. Оптимальная температура обжига оказалась – $660\text{-}800^\circ \text{C}$. Выяснилось, что с увеличением температуры время обжига сокращается: от 210 минут при 660°C до 45 минут при 800°C . Затем через 6 часов, после того как минерал затвердел, его проверили на прочность при сжатии. Она оказалась $\sim 35 \text{ МПа}$.

Еще одна группа полускальных пород – силикаты. Одним из минералов этой группы является глауконит $(\text{K}_2\text{O} \cdot \text{MgO} \cdot 4\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 10\text{SiO}_2 \cdot n\text{H}_2\text{O})$. Условия образования – частичное восстановление железа в осадочных материалах гранул, которые упали на дно моря. Условие

получения минерала заключается в необходимости постоянного присутствия Fe^{3+} и Fe^{2+} , K^+ , органического вещества при pH среды (7-8) и E (0-50 мВ). Основа образования минерала – замещение Al- и Mg-октаэдрических силикатов ионами Fe^{3+} , Fe^{2+} . Происходит адсорбция катионов из морской воды, в результате имеем смектит, а затем уже по мере накопления Fe^{3+} и K^+ смектит переходит в глауконит [8].

Ученые с кафедры химии и химической разработки материалов и СКОИФ ВГТУ имеют опыт получения искусственного камня на основе глинистых грунтов. Глинистый грунт пластичен из-за содержания минеральных частиц глинистой и минеральной фракции. Отсюда появляются задачи улучшения и укрепления прочности глинистых грунтов.

В работе [9] рассмотрено диспергирование грунта, в который добавляли компоненты шлакоблока. Диспергированную глину подвергали сначала увлажнению до достижения избыточной влажности, затем сушили при комнатной температуре. Таким образом, повышалась поверхностная энергия. Далее образцы прессовали, в результате диспергированные образцы показали более высокие значения максимальной нагрузки, напряжения при сжатии, модуль Юнга в отличие от недиспергированной глины.

Повышает показатели упругости и устойчивости также безобжиговая технология [10 - 13], которую можно разделить на два этапа. На первом этапе производилось диспергирование глины: образец замачивали, повышая эффект диспергирования, затем проводили его размораживание. В результате дисперсность повышалась в 5 и более раз. На втором этапе в глину вводится пористый наполнитель, что необходимо для уменьшения пространства водной пленки между частицами глины. Далее грунт уплотняли и дробили для увеличения свободной поверхностной энергии, которую можно использовать для упрочнения материала.

Рабочая гипотеза. При переходе механической кинетической энергии в работу по изменению плотности грунтового материала выделяется тепловая энергия, способствующая деформации частиц, а энергия распределяется между моночастицами их упругой деформации и расходуется на механохимическую активацию. Таким образом, необходимо рассмотреть вопрос о формировании уплотненного материала при механохимическом воздействии на грунтовой материал.

Верхней оценкой искомой энергии могут служить расчетные значения потенциальной энергии в соответствии с известной формулой $E = mgh$ либо кинетической энергии в соответствии с формулой $E = \frac{mv^2}{2}$, которая с учетом того, что $v = \sqrt{2gh}$, вполне ожидаемо дает тот же самый результат

$$E = mgh \quad (1)$$

Материалы и методы исследований. Оценим переданную определённому образцу механическую энергию $E_{\text{мех}}$ при трамбовании и сравним с тепловой энергией, передаваемой аналогичному образцу, например, при автоклавировании. Воспользуемся результатами лабораторных экспериментов, проведенных в центре коллективного пользования ВГТУ им. профессора Ю.М. Борисова.

Рассчитаем энергию, передаваемую образцу глинистого грунта при однократном механическом воздействии (ударе трамбуемого цилиндра лабораторной установки) при проведении лабораторного эксперимента. В расчетах использовались такие параметры лабораторной установки, как $d_{\text{цил}}$ – диаметр цилиндра, $d_{\text{наков}}$ – диаметр наковальни, h – высота, с которой происходит падение трамбуемого цилиндра, $m_{\text{цил}}$ – масса цилиндра, $m_{\text{обр}}$ – масса образца. В нашем случае имеем $d_{\text{цил}} = 6$ см, $d_{\text{наков}} = 9.5$ см, $h = 40$ см, $m_{\text{цил}} = 0,25$ кг.

Результаты исследований. Подставляя исходные значения в формулу (1) получаем, что верхняя оценка энергии, передаваемой образцу при однократном ударе цилиндра, составляет: $E = mgh = 2,5 \cdot 10 \cdot 0,4 \left[\text{кг} \cdot \frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} \right] = 10 \text{ Дж}$.

В условиях наших экспериментов образцы подвергались и 1000 ударов, и 10000 ударов, что приблизительно, без учета различных потерь, соответствует 10 кДж и 100 кДж переданной образцу энергии.

Далее следует учитывать, что масса образца составляла около 0,25 кг. Несложно видеть, что это соответствует 40 Дж/кг при одном ударе цилиндра и, соответственно, для сопоставления с другими моделями воздействия на образец следует принимать значение энергии, передаваемой образцу при трамбовании, равным 40 кДж/кг (при 1000 ударах) и 400 кДж/кг (при 10000 ударах).

Для сопоставления значений механической энергии, передаваемой единице массы образца при трамбовании (модель I), и тепловой энергии, передаваемой единице массы образца, например, при автоклавировании (модель II) силикатного кирпича, целесообразно воспользоваться термодинамическими расчетами известных данных по энергии при автоклавировании прессованной формовочной смеси, состоящей из негашеной извести СаО и кремнезема SiO₂. Тепловой эффект реакции



Молярная масса монокальциевого силиката составляет 116 г/моль. Если масса автоклавированного образца составляет 0,25 кг (2,2 моль), то при его формировании выделяется $89,1 \cdot 2,2 = 196$ кДж энергии, что соответствует 789 кДж/кг.

Если задаться целью сопоставить энергию, передаваемую нашему образцу при трамбовании (модель I), не только с энергией, передаваемой образцу при автоклавировании (модель II), но и с энергией, передаваемой образцу при обжиге (модель III), то следует иметь в виду, что при обжиге в печах образцам передается далеко не вся та тепловая энергия, значения которой указываются в технических характеристиках обжиговых печей различных типов (печь типа 1, печь типа 2) и которые принимались нами в расчетах, приводимых ниже.

Следует, однако, учитывать, что приводимые ниже данные касаются полной энергии, передаваемой камере печи, а образцам (кирпичам) передается она не полностью. Далее приводятся данные E, передаваемой образцу при обжиге.

Для одного из типов (печь типа 1) обжиговой печи известно, что тонне кирпича при T=1000°C передается энергия 440000 ккал на тонну кирпича. Принимая во внимание $1 \text{ ккал} = 4,1868 \text{ Дж} \approx 4 \text{ Дж}$, получим (без учета потерь) значение переданной образцу тепловой энергии: $440 \cdot 10^3 \cdot 4 \text{ Дж} = 1760 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$.

В сравнении с величиной энергии, переданной нашему образцу при трамбовании (модель I), видим, что тепловая энергия при обжиге (модель III) превышает энергию при трамбовании примерно в 4 раза, данный факт говорит о сопоставимости этих величин. Однако следует иметь в виду, что указанные в технических характеристиках печи (печь типа 1) для обжига значения относятся к полной энергии, подаваемой в камеру для обжига, размеры которой значительны, и непосредственно обжигаемым образцам передается далеко не вся эта энергия. При этом конкретные значения энергии, получаемой в этом процессе непосредственно на 1 кг материала не указываются.

Для второго типа (печь типа 2) обжиговой печи в технических характеристиках указывается значение тепловой энергии, передаваемой в камеру обжига в киловатт часах при обжиге 1 т материала.

Для данного типа печи 1 тонне кирпича передается энергия 75 кВт/ч . Переводя это значение в Дж на кг, получим (без учета потерь) значение переданной образцу тепловой энергии: 75 кВт/ч на тонну = $75 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \text{ Дж/т} = 75 \cdot 3,6 \cdot 10^6 \text{ Дж/т} = 75 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг} =$

$280 \cdot 10^3$ Дж/кг. Это значение даже примерно в 1,5 раза меньше, чем энергия, передаваемая 1 кг образца при трамбовании (10000 ударов).

Обобщая результаты приведенных расчетов, получаем сравнительные значения энергии, передаваемой образцам модифицируемого материала при различных моделях воздействия (табл. 1).

Таблица 1

Сравнительные значения энергии, передаваемой образцам модифицируемого материала при различных моделях воздействия

Энергия, передаваемая образцу, кДж/кг			
Модель I	Модель II	Модель III	
		Печь типа 1	Печь типа 2
400	789	1760	280

Для получения метаморфизированного глинистого грунта при проектировании грунтовой подушки [8] в данной работе приняли модель I передачи энергии дисперсной грунтовой формовочной смеси.

Обсуждение результатов

В результате проведенных исследований грунтовая подушка имела следующие характеристики, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Характеристики грунтовой подушки

Модуль упругости E, МПа	Коэффициент поперечной деформации ν , ед	Удельный вес γ , кН/м ³
272,2	0,25	23,2

Полученные характеристики грунтовой подушки, сформированной из метаморфизированного глинистого грунта, показывают, что такая подушка пригодна для строительства.

Выводы

Установлено, что при механическом воздействии на глинистый грунт при уплотнении изменяется энергетическое состояние слоя грунта.

Установлено, что при приложении механической энергии в виде прессового давления 5-20 МПа формируются связанные грунтовые комплексы, обладающие модулем упругости 270 – 280 МПа, коэффициентом поперечной деформации 0,25-0,30, удельным весом 23-24 кН/м³.

При механохимической активации глинистого грунта происходит его метаморфизация в связный скальноподобный материал, обладающий показателями, достаточными для формирования оснований и грунтовых подушек фундаментов при строительстве сооружений.

Использование механического уплотнения в условиях связного перехода от дисперсного к скальноподобному состоянию глинистого грунта позволит уменьшить затраты на возведение строительных объектов, сократить потребление материалов, добываемых в карьерных условиях и задавать физико-механические свойства модифицированному грунту.

Установлено, что для метаморфизации глинистых грунтов обжиговый метод экономически не выгоден, так как затрачивается наибольшее количество энергии 1760 кДж/кг.

При безобжиговом методе получения искусственной полускальной горной породы на основе глинистого грунта с применением вторично используемых дисперсных строительных материалов формируется грунтовая подушка, пригодная для строительства на слабых грунтах.

Библиографический список

1. Багринцева К. И. Карбонатные породы – коллекторы нефти и газа. – М.: Недра, 1977. – 219 с.
2. Котельников Д. Д., Конюхов А. И. Глинистые минералы осадочных пород. – М.: Недра, 1986. – 246 с.
3. Коссовская А. Г. Кристаллохимия минералов и геологические проблемы. – М.: Наука, 1975. – 245 с.
4. Сорохтин О.Г., Чилингар Дж.В., Сорохтин Н.О. Теория развития Земли: происхождение, эволюция и трагическое будущее - 2010. 752 с.
5. Справочник по минералогии: кремнезем, силикаты / Дж.У. Энтони, Р.А. Бидо, К.В. Блад и др. – Тусон, Аризона: Издательство минеральных данных, 1995.
6. Голованова О.А., Леончук С.С. Синтез карбоната кальция в присутствии желчи, альбумина и аминокислот // Журнал неорганической химии. – 2020. – № 4. – С. 449-457.
7. Энергоплотность как критерий оценки свойств минеральных и других кристаллических веществ / В.В. Зуев, Г.А. Денисов, Н.А. Мочалов и др. – М.: Полимедиа, 2000. – 352 с.
8. Плюснина И.И., Фролов В.Т. Глауконит – аутигенный коллоидный слоистый материал // Вестник Московского университета. – 2005. – №1. – С. 10-14.
9. Проектирование конструктивных слоев оснований фундаментов сооружений и дорожных одежд на модифицированных глинистых грунтах / О.Б. Кукина, О.А. Волокитина, В.В. Волков, Д.И. Шуваев, А.С. Чунихина // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 2(33). – С. 158-167.
10. Особенности инновационной технологии безобжигового получения строительных материалов / С.Н. Золотухин [и др.] // Инновационные, информационные и коммуникационные технологии: сб. тр. XVII Междунар. науч.-практ. конф.; под ред. С.У. Увайсова. – М., 2020. – С. 445-450.
11. Изменение и учет механических свойств конструктивных слоёв метаморфизированных глинистых грунтов при проектировании оснований фундаментов / В.В. Волков, В.П. Волокитин, С.Н. Золотухин, О.Б. Кукина, И.С. Дмитриев // Строительная механика и конструкции. – 2023. – № 2(37). – С. 160-170.
12. Volkov, V.V., Volokitina O.A., Kukina O.B. Use of the theory of aggregative stability of dispersed materials in designing road layers with specified properties // Russian Journal of Building Construction and Architecture. – 2023. – № 1(57). – P. 33-42.
13. Безобжиговые строительные материалы из отвалного фосфогипса / С.Н. Золотухин, О.Б. Кукина, А.А. Абраменко [и др.]. – Saarbrücken : LAP LAMBERT, 2020. – 160 с.

References

1. Bagrintseva K.I. Carbonate rocks – oil and gas reservoirs. M.: Subsoil, 1977. 219 p.
2. Kotelnikov D.D., Konyukhov A.I. Clay minerals of sedimentary rocks. M.: Subsoil, 1986. 246 p.

3. Kossovskaya A.G. Crystal chemistry of minerals and geological problems. M.: Science, 1975. 245 p.
4. Sorokhtin O.G., Chilingar J.V., Sorokhtin N.O. The theory of the development of the Earth: origin, evolution and tragic future. 2010. 752 p.
5. Anthony J.W., Bidot R.A., Blood K.V. Handbook of mineralogy: silica, silicates. Tucson, AZ: Mineral Data Publishing. 1995.
6. Golovanova O.A., Leonchuk S.S. Synthesis of calcium carbonate in the presence of bile, albumin and amino acids. Journal of Inorganic Chemistry. No. 4. 2020. Pp. 449-457.
7. Zuev V.V., Denisov G.A., Mochalov N.A. Energy density as a criterion for assessing the properties of mineral and other crystalline substances. M.: Polymedia, 2000. 352 p.
8. Plyusnina I.I., Frolov V.T. Glauconite is an authigenic colloidal layered material. Bulletin of Moscow University. No. 1. 2005. Pp. 10-14.
9. Kukina O.B., Volokitina O.A., Volkov V.V., Shuvaev D.I., Chunikhina A.S. Design of structural layers of foundations of structures and road pavements on modified clay soils. Structural Mechanics and Constructions. No. 2(33). 2022. Pp. 158-167.
10. Zolotukhin S.N. Features of innovative technology for non-firing production of building materials. Innovative, Information and Communication Technologies: Collection. Tr. XVII International Scientific-Practical Conf.; Edited by S.U. Uvaysova. M., 2020. Pp. 445-450.
11. Volkov V.V., Volokitin V.P., Zolotukhin S.N., Kukina O.B., Dmitriev I.S. Changes and consideration of the mechanical properties of structural layers of metamorphosed clay soils when designing foundation bases. Structural Mechanics and Constructions. No. 2(37). 2023. Pp. 160-170.
12. Volkov V.V., Volokitina O.A., Kukina O.B. Use of the theory of aggregative stability of dispersed materials in designing road layers with specified properties. Russian Journal of Building Construction and Architecture. No. 1(57). 2023. Pp. 33-42.
13. Zolotukhin S.N., Kukina O.B., Abramenko A.A. Non-firing building materials from waste phosphogypsum. Saarbrücken: LAP LAMBERT, 2020. 160 p.

ASSESSMENT OF THE ENERGY STATE OF STRUCTURAL LAYERS OF METAMORPHISED CLAY SOILS WHEN DESIGNING FOUNDATIONS

S. V. Artyshchenko¹, T. A. Chudina², M. V. Gusev³

Voronezh State Technical University^{1,2,3}
Russia, Voronezh

¹PhD of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor of the Department of Innovation and Construction Physics named after I.S. Surovtsev, Tel.: +7(920)2157870, e-mail: art.stepan@mail.ru

²Student of the Department of Civil Engineering, Tel.: +7(915)8689198, e-mail: chudinnaa@gmail.com

³Postgraduate Student of the Department of Innovation and Construction Physics named after I.S. Surovtsev, Tel.: +7(914)6205956, e-mail: gmv_11@mail.ru

The article discusses changes in the energy state of a soil layer subject to mechanical stress during compaction. The influence of mechanical energy on the formation of coherent soil complexes with specified physical and mechanical properties is analyzed. The subject of this scientific research is the mechanochemical transition of metamorphosed clayey soil into a cohesive rock-like material that has indicators sufficient for the formation of foundations and soil cushions of foundations during the construction of structures. The use of mechanical compaction in conditions of a coherent transition from a dispersed to a rock-like state of clay soil will reduce the costs of constructing construction projects, reduce the consumption of materials mined in quarry conditions and set the physical and mechanical properties of the modified soil.

Keywords: mechanochemical activation, energy state, metamorphization, clayey soils, soil cushion

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).

Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

**ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:**

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф.,
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.