

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научный журнал**

**Выпуск № 4 (31), 2021**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

**Воронеж**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения — Российская Федерация.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В. С.**, д-р техн. наук, проф.,

Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора: Козлов В. А.**, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е.**, канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Буренин А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

**Гриднев С. Ю.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Зверев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

**Ефрюшин С. В.**, канд. техн. наук, доцент, Воронежский государственный технический университет

**Кирсанов М. Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»

**Колчунов В. И.**, д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет

**Леденев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет

**Михайлов В. В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам

**Нугужинов Ж. С.**, д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан

**Овчинников И. Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет

**Пшеничкина В. А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет

**Трещев А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет

**Турищев Л. С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь

**Шимановский А. О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

**Шитикова М. В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Дизайн обложки - А.Р. Ефанов. Фото на обложке Юлии Батуриной,  
<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

Журнал «Строительная механика и конструкции» включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук

Подписной индекс в «Каталоге периодических изданий. Газеты и журналы» ГК «Урал Пресс» - 66004

Физические лица могут оформить подписку в интернет-магазине «Деловая пресса» <http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/>

Дата выхода в свет 28.12.2021. Усл. печ. л. 11,5. Формат 60×84/8. Тираж 500 экз. Заказ №.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22.05.2018 г.

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
(строительный факультет, кафедра строительной механики)

тел.: 8(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»

394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

12+

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2021

**STRUCTURAL MECHANICS  
AND STRUCTURES**

**Scientific Journal  
ISSUE № 4 (31), 2021**

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.  
Territory of distribution — Russian Federation.

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Kozlov V. A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G. E.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,  
Voronezh State Technical University

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

**Burenin A. A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur

**Gridnev S. Yu.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Zverev V. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

**Efryushin S. V.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University

**Kirsanov M. N.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

**Kolchunov V. I.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University

**Ledenyov V. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Tambov State Technical University

**Mikhailov V. V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

**Nguen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam

**Nuguxhinov Zh. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan

**Ovchinnikov I. G.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University

**Pshenichkina V. A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University

**Trechshev A. A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University

**Turichshev L. S.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus

**Shimanovsky A. O.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus

**Shitikova M. V.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Cover design by A.R. Efanov. Cover photo by Yulia Baturina,

<https://www.shutterstock.com/ru/image-photo/bridge-form-horseshoe-on-sunsetsky-334037030>

The journal "Structural mechanics and structures" is included into the list of peer-reviewed editions in which the results of dissertations for obtaining degrees of a Full Doctor and PhD are published

Subscription index in the «Catalog of periodicals. Newspapers and magazines» of the «Ural Press»  
Group of Companies - 66004

Individuals can subscribe to it in the online store "Business Press" <http://www.ural-press.ru/dlya-fizicheskikh-lits/>

Publication date 28.12.2021. Conventional printed sheets 11,5. Format 60×84/8. Numbers of copies 500. Order №.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,  
Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate ПИ № ФС 77 - 72895 от 22. 05. 2018 г.

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation  
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

12+

© Voronezh State Technical University, 2021

## СОДЕРЖАНИЕ

### **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

|  |    |
|--|----|
| <i>Курсанов М. Н.</i><br>Деформации решетчатой балочной фермы с произвольным числом панелей.....     | 7  |
| <i>Петренко В. Ф.</i><br>Оценка собственной частоты двухпролётной фермы с учётом жесткости опор..... | 16 |

### **ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА**

|   |    |
|---|----|
| <i>Бакушев С. В.</i><br>Алгоритм расчёта напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений..... | 26 |
|---|----|

### **РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

|  |    |
|--|----|
| <i>Сафронов В. С., Антипов А. В.</i><br>Разработка и апробация методики оценки динамических качеств автодорожного моста.....   | 41 |
| <i>Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Малыхина А. С.</i><br>Определение несущей способности железобетонной стоечно-ригельной опоры путепровода с учётом неупругих деформаций материала.....  | 56 |
| <i>Еремин А. В., Волокитина О. А.</i><br>Теоретическое обоснование определения пределов эффективного функционирования с учетом пропуска пешеходных потоков при проектировании нерегулируемых перекрестков автомобильных дорог..... | 70 |

### **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ**

|   |    |
|---|----|
| <i>Перельгина А. Ю., Антипин С. А., Бобылева Ю. А., Яценко В. П., Перельгин В. Н.</i><br>Влияние заполнения структуры на метод определения механических характеристик материала аддитивных структур ..... | 78 |
| <i>Жидков К. Е., Зверев В. В., Капырин Н. В.</i><br>Экспериментальные натурные исследования деревянных ферм на металлических зубчатых пластинах.....  | 90 |
| Правила оформления статей.....  | 99 |

## CONTENTS

### **STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS**

|   |    |
|---|----|
| <i>Kirsanov M. N.</i><br>Static and kinematic analysis of a planar regular beam truss with a double lattice.....                  | 7  |
| <i>Petrenko V. F.</i><br>Estimation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the support stiffness ..... | 16 |

### **APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS OF SOLID BODY UNDER DEFORMATION**

|   |    |
|---|----|
| <i>Bakushev S. V.</i><br>Calculation algorithm of the stress-deformed state of continuous medium under axisymmetric deformation at bilinear approximation of closing equations..... | 26 |
|---|----|

### **CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES**

|  |    |
|--|----|
| <i>Safronov V. S., Antipov A. V.</i><br>Development and approval of the assessment method of dynamic qualities of a road bridge...   | 41 |
| <i>Varnavsky V. S., Gabrielyan G. E., Malykhina A. S.</i><br>Determination of the bearing capacity of reinforced concrete rack-and-crossbar support of the overpass, taking into account inelastic deformations of the material..... | 56 |
| <i>Eremin A. V., Volokitina O. A.</i><br>Theoretical justification of determining the limits of effective functioning taking into account the pedestrian flows when designing unregulated roads.....                                 | 70 |

### **PILOT AND FIELD OBSERVATIONS OF STRUCTURES AND MATERIALS**

|  |    |
|--|----|
| <i>Perelygina A. Yu., Antipin S. A., Bobyleva Yu. A., Yashchenko V. P.</i><br>Influence of structure filling on the method of determining the mechanical characteristics of the material of additive structures..... | 78 |
| <i>Zhidkov K. E., Zverev V. V., Capyrin N. V.</i><br>Experimental full-scale studies of wooden trusses on metal serrated plates.....   | 90 |
| Requirements for articles to be published.....   | 99 |

DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.001  
УДК 624.041.5, 539.4

**ДЕФОРМАЦИИ РЕШЕТЧАТОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ  
С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ**

М. Н. Кирсанов

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
Россия, г. Москва

---

Д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин,  
тел.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

---

Предлагается схема статически определимой балочной фермы регулярного типа с криволинейным верхним поясом. Для трех видов нагрузки методом индукции по числу панелей в системе компьютерной математики Maple находится зависимость прогиба середины пролета фермы от величины нагрузки, размеров и числа панелей. Прогиб середины пролета и горизонтальный сдвиг подвижной опоры находятся в аналитической форме по формуле Максвелла – Мора. Показано, что при определенном числе панелей система становится геометрически изменяемой. Приводятся диаграмма распределения усилий по стержням конструкции и линейная асимптотика зависимости прогиба от числа панелей.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика

**Постановка задачи.** Для расчета усилий и деформаций стержневых конструкций в инженерной практике используются численные методы, основанные, как правило, на методе конечных элементов [1-5]. Аналитические методы расчета применяются для простых статически определимых моделей регулярных конструкций [6-9]. Формулы для прогиба плоских внешне статически неопределимых ферм в зависимости от числа панелей в системе Maple получены в [10,11]. Нижние границы собственных частот регулярных ферм в аналитической форме в приближении Донкерлея получены методом индукции в [12, 13]. Деформации пространственной фермы в системе Maple для произвольного числа панелей получены в [14]. В монографии В.А. Игнатьева [15] приведены аналитические решения для расчета деформаций и частот колебаний регулярных ферм. В справочнике [16] собраны формулы для расчета прогиба плоских регулярных статически определимых балочных и решетчатых ферм под действием различных нагрузок. Основные особенности регулярных статически определимых стержневых систем изучались в [17-19].

В настоящей работе рассматривается новая схема регулярной балочной фермы с двойной решеткой (рис. 1). Ставится задача найти аналитическую зависимость прогиба фермы от числа панелей для трех видов нагрузок. Ферма имеет длину пролета  $L = 2(2n - 1)a$ , где  $n$  – число панелей в половине пролета, и высоту  $3h$ . Решетка фермы двойная. Ферма состоит из  $K = 8n + 6$  стержней, включая три стержня, моделирующие опоры. Нагрузка равномерно распределена по узлам нижнего (рис. 1) или верхнего (рис. 2) пояса.

**Расчет усилий.** Для определения прогиба по формуле Максвелла – Мора требуются выражения для усилий в стержнях. Расчет усилий производится в системе Maple методом

вырезания узлов. Составляется система уравнений равновесия всех узлов в проекции на оси координат. В качестве неизвестных в систему входят реакции опор. Неподвижная опора моделируется двумя стержнями, подвижная (левая) – одним вертикальным стержнем. Коэффициентами системы являются направляющие косинусы усилий, для вычисления которых используются координаты узлов и порядок соединения стержней в узлах.

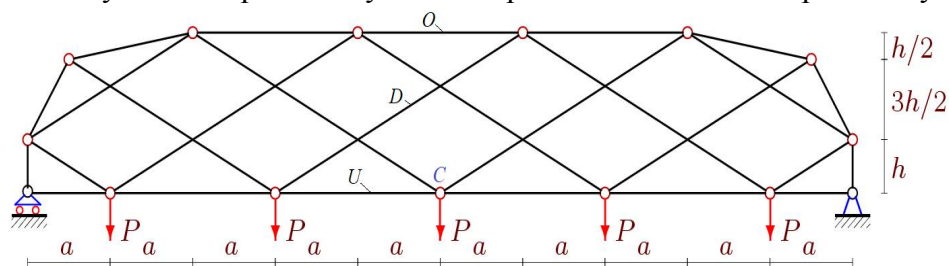


Рис. 1. Ферма под действием равномерной узловой нагрузки по нижнему поясу (нагрузка 1),  $n=3$

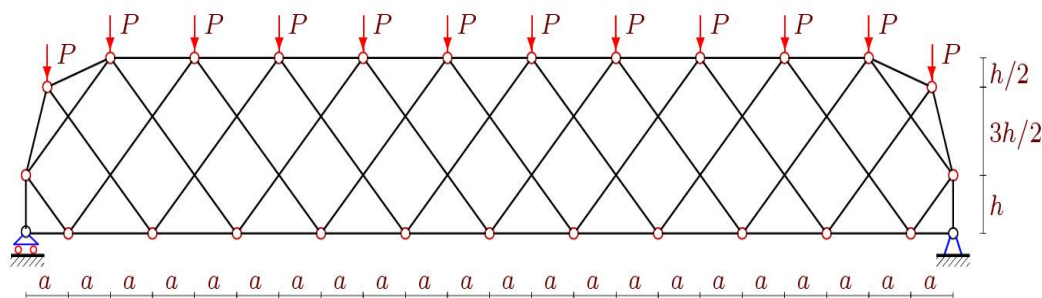


Рис. 2. Ферма под действием равномерной узловой нагрузки по верхнему поясу, (нагрузка 2),  $n = 6$

Стержни и узлы нумеруются для произвольного числа панелей  $n$  (рис. 3). Значения координат вводятся в программу, написанную на языке символьной математики Maple.

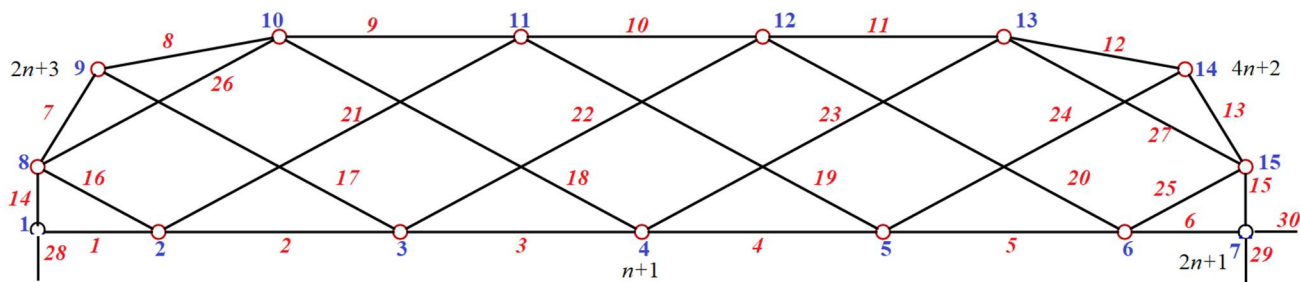


Рис. 3. Нумерация узлов и стержней,  $n = 3$

Начало координат выбирается в левой опоре. Соответствующий фрагмент программы имеет вид:

```
> x[1]:=0:y[1]:=0:
> for i to 2*n-1 do x[i+1]:=2*i*a-a; y[i+1]:=0; od:
> x[2*n+1]:=x[2*n]+a: y[2*n+1]:=0:
> x[2*n+2]:=0: y[2*n+2]:=h:
> x[2*n+3]:=a/2: y[2*n+3]:=5*h/2:
> for i to 2*n-2 do x[i+2*n+3]:=2*i*a; y[i+2*n+3]:=3*h; od:
```



```

> x[4*n+2]:=x[2*n]+a/2: y[4*n+2]:=5*h/2:
> x[4*n+3]:=x[2*n+1]: y[4*n+3]:=h:

```

Расчет усилий производится с применением операторов системы Maple:

```

> for i to K do
>   Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
>   Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
>   L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2,9*a^2+h^2=d^2,a^2+9*h^2=f^2,
               sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2));
>> for j to 2 do
>   jj:=2*N[i][2]-2+j:
>   if jj<=K then G[jj,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
>   jj:=2*N[i][1]-2+j:
>   if jj<=K then G[jj,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
> od;
> od:

```

Здесь  $Lxy[1]/L[i]$  и  $Lxy[2]/L[i]$  – направляющие косинусы стержня с номером  $i$  усилий с осью  $x$  и  $y$  соответственно,  $N[i][1]$ ,  $N[i][2]$  – номера узлов в начале и конце этого же стержня.

Картина распределения усилий в стержнях фермы с нагрузкой по верхнему поясу, отнесенных к нагрузке  $P$  в численном виде при  $n=4$ ,  $a=3$ м,  $h=2$ м представлена на рис. 4. Линии по толщине условно пропорциональны модулям соответствующих усилий. Сжатые элементы выделены синим цветом, красным – растянутые. Стержни, в которых усилия нулевые, обозначены тонкими черными линиями. Числом указано значение относительного усилия с точностью до двух знаков. Верхний пояс при такой нагрузке сжат, нижний – растянут. Для случая равномерного узлового нагружения нижнего пояса распределение усилий представлено на рис. 5. Следует отметить, что наиболее растянутые стержни для нагрузки 2 оказались не в середине нижнего пояса, а наиболее сжатые при нагрузке 1 (нижнего пояса) не в середине верхнего. Это характерно для решетчатых ферм [11, 16].

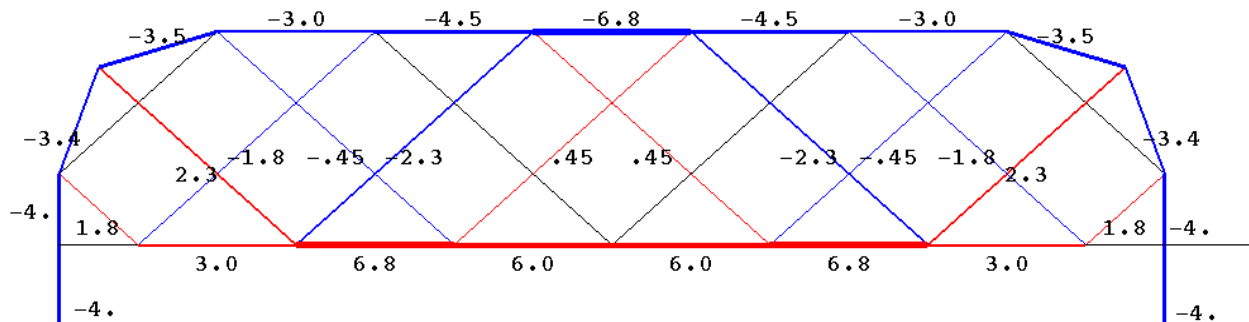


Рис. 4. Нагрузка 2 по верхнему поясу. Распределение усилий в стержнях,  $n = 4$

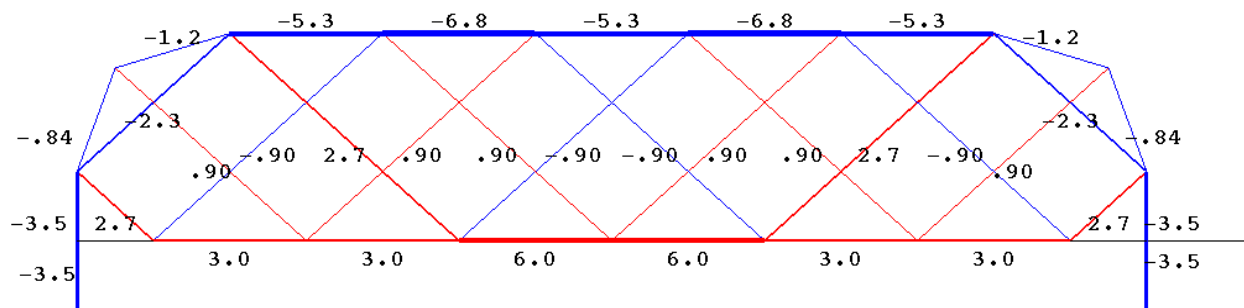


Рис. 5. Нагрузка 1 по нижнему поясу. Распределение усилий в стержнях,  $n = 4$

В процессе численного счета было замечено, что при некоторых значениях числа панелей определитель системы уравнений равновесия узлов вырождается. Обнаружена закономерность: при  $n = 2, 5, 8, \dots$  или при  $n = 3k - 1, k = 1, 2, \dots$  ферма становится геометрически изменяемой. Найдена картина распределения возможных скоростей для этих случаев, подтверждающая найденный эффект (рис. 6, 7).

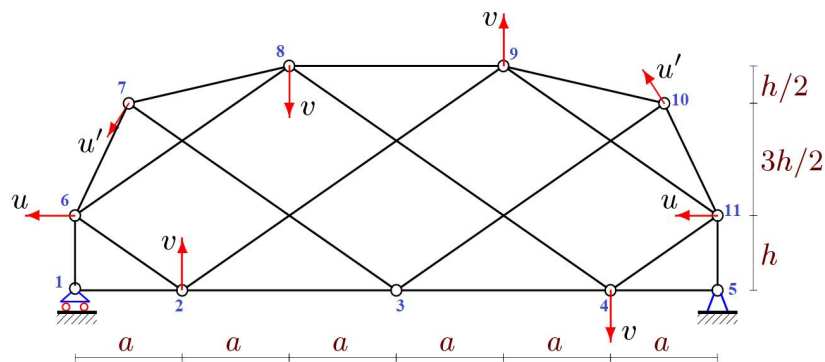


Рис. 6. Ферма при  $n = 2$ . Виртуальные скорости узлов изменяемой фермы,

$$v/a = u/h = u'/(4c), \quad c = \sqrt{a^2 + h^2}.$$

Стержни 2-6 и 4-11 совершают вращательное движение вокруг опор. Стержневые треугольники 6-7-8 и 9-10-11 вращаются вокруг мгновенных центров скоростей, элементы 2-9 и 4-8 имеют поступательное движение. Неподвижных стержней нет. Определитель матрицы системы уравнений равновесия узлов в данном случае обращается в ноль.

Для случаев, исключаяющих изменяемость системы, принята следующая последовательность числа панелей  $n = (5 - (-1)^k + 6k) / 4, k = 1, 2, 3, \dots$ . Последовательно рассчитывая усилия в стержне  $O$  на середине верхнего пояса, получаем для нагрузки сосредоточенной силой в среднем узле  $C$  нижнего пояса значения:

$$O_{k=1} = -3aP / (2h), \quad O_{k=2} = -aP / (2h), \quad O_{k=3} = -5aP / (2h), \quad O_{k=4} = -3aP / (2h), \dots$$

где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Обобщая методами Марле эти решения на произвольное значение  $k$ , получаем искомую зависимость усилия от числа панелей  $O = -aP(-3(-1)^k + 1 + 2k) / (4h)$ . Аналогично находим решения для раскоса  $D$  из середины пролета и стержня  $U$  нижнего пояса:

$$D = -cP(-1)^k / (2h), \quad U = aP(2k - 1 + (-1)^k) / (4h).$$

Для равномерного нагружения узлов нижнего пояса имеем зависимости:

$$\begin{aligned}
O &= -aP(6k^2 - 2((-1)^k - 3)k - (-1)^k - 3) / (8h), \\
U &= aP(6k^2 + 2(3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1) / (8h), \\
D &= -cP / (2h).
\end{aligned}$$

Для равномерного нагружения узлов верхнего пояса:

$$\begin{aligned}
O &= -aP(6k^2 + 2(3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 5) / (8h), \\
U &= aP(6k^2 + (-2(-1)^k + 6)k - (-1)^k + 1) / (8h), \\
D &= cP / (4h).
\end{aligned}$$

**Вычисление прогиба.** Прогиб (вертикальное смещение узла С) определяется по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{\alpha=1}^{K-3} S_{\alpha}^{(P)} S_{\alpha}^{(1)} l_{\alpha} / (EF). \quad (1)$$

Сумма составляется по всем упругим стержням конструкции, кроме трех опорных, которые приняты жесткими. Введены обозначения:  $S_{\alpha}^{(P)}$  – усилие в стержне с номером  $\alpha$  от действия внешней нагрузки,  $S_{\alpha}^{(1)}$  – усилие в этом же стержне от действия единичной вертикальной силы, приложенной к узлу С,  $l_{\alpha}$  – длина стержня,  $EF$  – жесткость стержня.

Расчет прогиба ряда ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает общую зависимость прогиба от числа панелей

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3 + C_4 d^3 + C_5 f^3) / EF, \quad (2)$$

где  $d = \sqrt{9a^2 + h^2}$ ,  $f = \sqrt{a^2 + 9h^2}$ . Коэффициенты  $C_1(k), \dots, C_5(k)$  в этой зависимости определяются методом индукции. Например, для нагружения 1 коэффициент  $C_1$  определяется из решения однородного линейного рекуррентного уравнения девятого порядка

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

Искомые выражения для коэффициентов имеют вид:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (30k^4 + 20(3 - (-1)^k)k^3 + 6(7 - 5(-1)^k)k^2 + 4(11(-1)^k + 7)k + 3(-1)^k - 11) / 16, \\
C_2 &= (6k^2 + 6(5(-1)^k + 1)k + 23(-1)^k - 3) / 8, \\
C_3 &= (6k + 3 - (-1)^k) / 4, \\
C_4 &= C_5 = (3(-1)^k - 1 - 2k) / 32.
\end{aligned} \quad (3)$$

Для нагружения верхнего пояса имеем решение:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (30k^4 + 20(3 - (-1)^k)k^3 + (46 - 30(-1)^k)k^2 + 32(1 - 2(-1)^k)k - 11(-1)^k + 19) / 16, \\
C_2 &= (6k^2 + 6(1 - 5(-1)^k)k - 22(-1)^k + 11) / 8, C_2 = (5 - (-1)^k + 6k) / 4, \\
C_4 &= -((-1)^k + k) / 16, C_5 = -((-1)^k + k + 1) / 16.
\end{aligned}$$

Наиболее простое решение получается для случая сосредоточенной нагрузки, приложенной к середине нижнего пояса (узел С):

$$C_1 = (4k^3 + 2(3 - (-1)^k)k^2 + 2(8 - (-1)^k)k - 5(-1)^k + 3) / 4,$$

$$C_2 = (18k + 13 - 3(-1)^k) / 4, C_3 = 1/2, C_4 = C_5 = 1/16.$$

**Вычисление сдвига подвижной опоры.** Под действием вертикальной нагрузки подвижная левая опора получает горизонтальное смещение. Для получения формул для этой величины можно воспользоваться тем же алгоритмом, что и при выводе формул для прогиба. В формуле (1) в случае поиска горизонтального смещения под силой  $S_\alpha^{(1)}$  следует понимать горизонтальную силу, приложенную к подвижной опоре. Методом индукции получим формулу сдвига для нагрузки 1:

$$\delta = Pa^2(6k^3 + 3(3 - (-1)^k)k^2 - (3(-1)^k + 1)k + 2(-1)^k - 2) / (2hEF).$$

Сдвиг от нагрузки 2 и от сосредоточенной силы в середине пролета вычисляются как функции числа панелей соответственно по формулам:

$$\delta = 3Pa^2(2k^3 + (3 - (-1)^k)k^2 + (3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1) / (2hEF),$$

$$\delta = Pa^2(6k^2 + 2(3 - (-1)^k)k - (-1)^k + 1) / (4hEF).$$

**Численный пример.** Проиллюстрируем найденную зависимость прогиба от числа панелей для фермы длины  $L = 2(2n - 1)a = 100$  м с общей нагрузкой на нижний пояс  $P_0 = (2n - 1)P$ . Введем обозначение для безразмерного прогиба:  $\Delta' = EF\Delta / (P_0L)$ . На рис. 7 даны три кривые, построенные по формулам (2), (3). Наклонная асимптота зависимости прослеживается, несмотря на скачкообразное изменение прогиба. Угол ее наклона можно найти средствами системы Maple:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (4L).$$

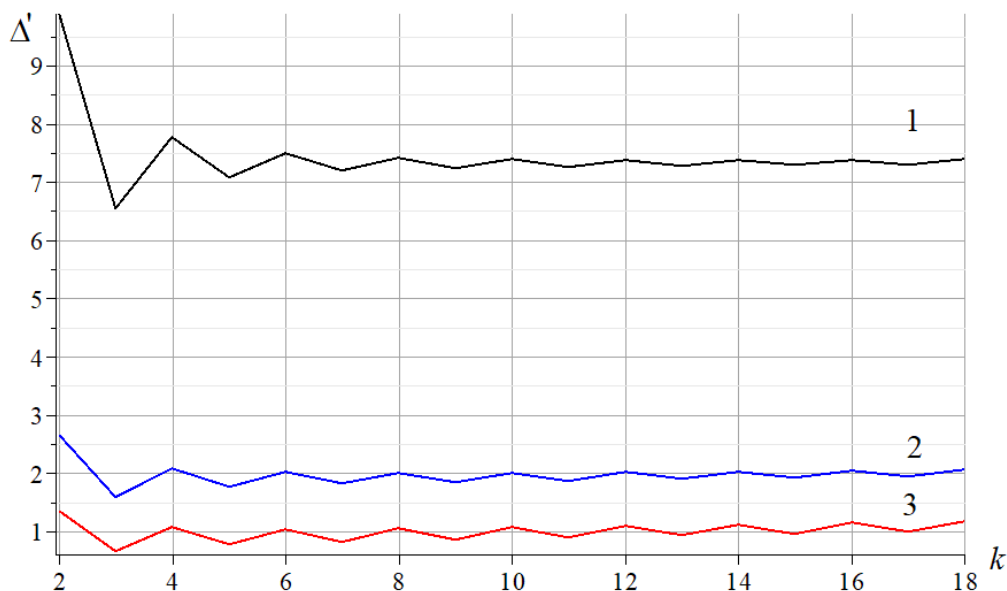


Рис. 7. Зависимость прогиба от числа панелей,  $L=100$  м, 1 —  $h = 2$  м; 2 —  $h = 4$  м; 3 —  $h = 6$  м

Зависимость сдвига от числа панелей также имеет асимптоту, но она в этом случае горизонтальная:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta' = L / (36h)$ , где  $\delta' = EF\delta / (P_0L)$ .

**Заключение.** Предложена схема статически определимой решетчатой регулярной фермы балочного типа. Особенность схемы – наличие скосов в верхнем поясе боковых панелей. Замечено кинематическое вырождение конструкции при определенном числе панелей. Методом индукции при допустимом числе панелей получены аналитические зависимости прогиба конструкции и сдвига подвижной опоры от числа панелей для нагрузок трех видов. Показаны распределения усилий в решетке конструкции, получены формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях. Обнаружена наклонная асимптота зависимости прогиба от числа панелей. Примененный алгоритм вывода аналитических зависимостей может быть использован и в других регулярных структурах.

Исследование выполнено при поддержке Междисциплинарной научно-образовательной школы Московского государственного университета «Фундаментальные и прикладные исследования космоса».

#### Библиографический список

1. Дмитриева Т.Л. Алгоритм автоматизированного проектирования ферм минимального веса // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2010. № 3 (615). С. 98-105.
2. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2003. Part 51. Pp. 383–391.
3. Vatin N., Ivanov A.Y., Rutman Y., Chernogorskiy, S., Shvetsov, K. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion. Magazine of Civil Engineering. 2017. 8(76). Pp. 67–83. DOI:10.18720/MCE.76.7.
4. Kiychenko T.S., Tabanyukhova M.V., Kharinova N.V. Determination of stresses in truss rods: numerical and physical experiment // В сборнике: IOP Conference Series: Materials Science and Engineering The conference proceedings ICCATS-2019. South Ural State University (national research university), Irkutsk National Research Technical University, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 033043.
5. Heyman J. Design of a simple steel truss // Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings. 2010. Part. 163. №. 1. Pp. 53-56.
6. Dai, Qiao; Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
7. Овсянникова В.М. Зависимость деформаций балочной фермы трапецевидной формы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С.13-20.
8. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. №3 (26). С. 21-29.
9. Суд И. Б. Формулы для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №2 (25). С. 25-32.
10. Овсянникова В.М. Зависимость прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2020. №4 (27). С. 16-25.
11. Комерзан Е.В., Свириденко О.В. Аналитический расчет прогиба плоской внешне статически неопределимой фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2021. №2 (27). С. 29-37.

12. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // *Строительная механика и конструкции*. 2020. № 1 (24). С. 25–38.
13. Vorobev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020. 92(7). Pp. 9204–9204. DOI:10.18720/CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 2 (259). С. 2-6.
15. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище.– 1973.
16. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
17. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
18. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Part. 85. №. 9. Pp. 607–617.
19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. № 4. Pp. 756–782.

#### References

1. Dmitrieva T.L. Algorithm for computer-aided design of trusses of minimum weight. *News of higher educational institutions. Building*. 2010. No. 3 (615). Pp. 98-105.
2. Guest S.D., Hutchinson J.W. On the determinacy of repetitive structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2003. Part 51. Pp. 383–391.
3. Vatin, N., Ivanov, Ay., Rutman, Y., Chernogorskiy, S., Shvetsov, K. Earthquake engineering optimization of structures by economic criterion. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. 8(76). Pp. 67–83. DOI:10.18720/MCE.76.7.
4. Kiychenko T.S., Tabanyukhova M.V., Kharinova N.V. Determination of stresses in truss rods: numerical and physical experiment. In: *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering The conference proceedings ICCATS-2019*. South Ural State University (National Research University), Irkutsk National Research Technical University, Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin. 2019. P. 033043.
5. Heyman J. Design of a simple steel truss. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings*. 2010. Part. 163. No 1. Pp. 53-56.
6. Dai, Qiao; Analytical Dependence of Planar Truss Deformations on the Number of Panels; 2021; AlfaBuild; 17 Article No 1701. doi: 10.34910/ALF.17.1
7. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deformations of a trapezoidal girder on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 3 (26). Pp.13-20.
8. Petrichenko E.A. The lower limit of the frequency of natural vibrations of the Fink truss. *Structural mechanics and structures*. 2020. No. 3 (26). Pp. 21-29.
9. Court I.B. Formulas for the deflection of a truss girder with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 2 (25). Pp. 25-32.
10. Ovsyannikova V.M. Dependence of the deflection of a planar externally statically indeterminate truss on the number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 4 (27). Pp. 16-25.

11. Komerzan E.V., Sviridenko O.V. Analytical calculation of the deflection of a flat externally statically indeterminate truss with an arbitrary number of panels. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2021. No. 2 (27). Pp. 29-37.
12. Vorobiev OV On methods of obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Stroitel'naya mekhanika i konstruksii*. 2020. No. 1 (24). Pp. 25-38.
13. Vorobiev O.V. Bilateral Analytical Estimation of the First Frequency of a Plane Truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2020.92 (7). Pp. 9204-9204. DOI: 10.18720 / CUBS.92.4. URL: <https://unistroy.spbstu.ru/article/2020.92.4> (date of application: 27.02.2021).
14. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial rod regular structure with a flat face. *Building mechanics and calculation of structures*. 2015. No. 2 (259). Pp. 2-6.
15. Ignatiev V.A. Calculation of regular rod systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School.- 1973.
16. Kirsanov M.N. Planar trusses. Schemes and formulas: a handbook. Moscow: INFRA-M, 2019. 238 p.
17. Zok F. W., Latture R. M., Begley M. R. Periodic truss structures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
18. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Part. 85. №. 9. Pp. 607–617.
19. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Vol. 54. № 4. Pp. 756–782.

## DEFORMATIONS OF A LATTICE GIRDER WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov

National Research University «MPEI»  
Moscow, Russia

---

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechanotronics, Dynamics and Strength of Machines, tel.: +7(495)362-73-14, e-mail: c216@ya.ru

---

The scheme of a statically definable beam girder of a regular type with a curved upper chord is proposed. For three types of load by the induction method according to the number of panels in the Maple computer mathematics system the dependence of the deflection of the middle of the truss span on the value of the load, size and number of panels is found. The deflection of the middle of the span and the horizontal displacement of the movable support in analytical form according to the Maxwell-Mohr formula are obtained. It is shown that for a certain number of panels, the system becomes geometrically variable. A diagram of the distribution of forces over the bars of the structure and the linear asymptotics of the dependence of the deflection on the number of panels are presented.

**Key words:** truss, deflection, Maple, induction, number of panels, asymptotics

## ОЦЕНКА СОБСТВЕННОЙ ЧАСТОТЫ ДВУХПРОЛЁТНОЙ ФЕРМЫ С УЧЁТОМ ЖЕСТКОСТИ ОПОР

В. Ф. Петренко

Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
Россия, г. Москва

---

Студент, тел. +7 (925) 734-96-41; e-mail: [petrenko.valeri82@gmail.com](mailto:petrenko.valeri82@gmail.com)

---

Объектом исследования является статически определимая ферма с двумя пролетами и ромбовидной решёткой. Одна из опор является неподвижным шарниром, две других – подвижными. Зависимость первой собственной частоты колебаний фермы от ее размеров, массы, а также числа панелей находится в аналитической форме в приближении по Донкерлею. Показано, что при определенном числе панелей ферма становится кинематически изменяемой. Жесткость конструкции с массами, сосредоточенными в ее узлах, определяется по формуле Максвелла – Мора. Рассчитывается нижняя аналитическая оценка первой частоты. Обобщение серии частных решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей производится методом индукции. Общие члены последовательности коэффициентов определяются из решения линейных однородных рекуррентных уравнений. Все преобразования, включая нахождение усилий в стержнях методом вырезания узлов, выполняются в системе компьютерной математики Maple. Для проверки решения весь спектр частот, включая низшую частоту, находится в численной форме. Сравнение аналитического решения с численным показывает, что точность аналитической оценки снизу достаточно высока и возрастает с увеличением числа панелей, а влияние жесткости опор на спектр частот незначительное.

**Ключевые слова:** ферма, Maple, оценка собственных колебаний, частота собственных колебаний; Ромбовидная ферма.

**Введение.** Ферменные конструкции широко применяются в строительстве для перекрытия больших пролётов с целью уменьшения расхода применяемых материалов и облегчения конструкций, в конструкциях крепления антенн, дорожных и уличных указателей. Расчет напряженно-деформированного состояний и частот собственных колебаний таких конструкций является актуальной задачей наряду с оценкой устойчивости и прочности. Как правило, расчёты производятся в численном виде в специализированных пакетах, основанных на методе конечных элементов [1]. Это позволяет получать решения задач для статически неопределимых систем и систем со сложными нагрузками и граничными условиями с учетом неупругих или нелинейных свойств материала конструкции. В справочниках [2], [3] собраны аналитические решения для плоских балочных ферм, арок, рам и консолей, полученные методом индукции в системе символьной математики Maple. Аналитические решения для некоторых статически определяемых плоских ферм даны в [4-14]. Как правило, это решения для регулярных сооружений, для которых применим метод индукции [15-21]. С помощью метода индукции определяется зависимость усилий, прогиба и частот колебаний от порядка регулярной конструкции, например, от числа панелей или периодических групп стержней. Такие решения применимы как для оценки точности численных решений, так и для предварительных расчетов проектируемых моделей, для которых можно подобрать оптимальный вариант с помощью



выбора порядка регулярной системы, ее размеров и распределения жесткостей по отдельным стержням.

**Конструкция фермы и усилия в стержнях.** Рассматриваемая ферма представляет собой плоскую балочную конструкцию с ромбовидной решеткой и дополнительной подвижной опорой в середине пролета (рис. 1). Дополнительная опора делает конструкцию внешне статически неопределимой. Расчет реакций опор возможен только в совместной системе уравнений равновесия всех узлов фермы. Дополнительная опора разделяет ферму на два одинаковых пролета по  $n_0$  панелей высотой  $h$  и длиной  $a$ . Несмотря на четыре внешние связи, конструкция статически определима. Здесь опоры моделируются упругими стержнями длиной  $q$ . Ферма содержит  $2n+2$  внутренних шарниров, где  $n = 2n_0$ . Число стержней, включая четыре опорные,  $v = 4n + 4$ . Записывая по два уравнения равновесия для каждого узла, можно получить замкнутую систему уравнений для усилий в стержнях и реакций опор, необходимую для решения задачи.

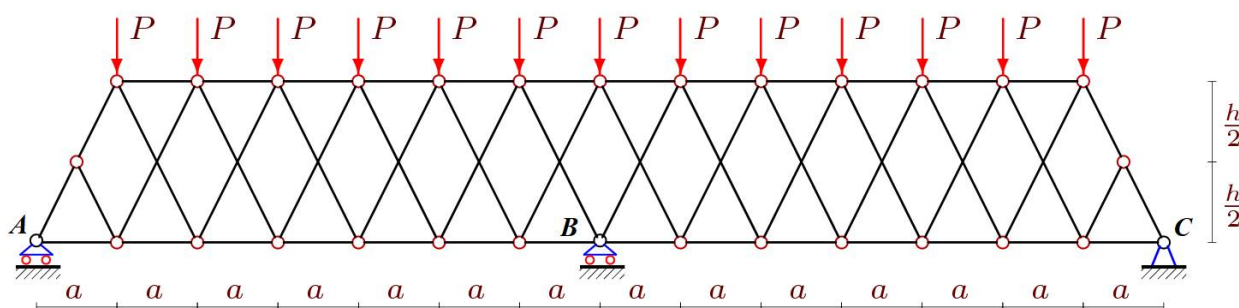


Рис. 1. Схема фермы с нагрузкой, равномерно распределенной по верхнему поясу,  $n_0 = 7$

В [22] в аналитической форме с использованием системы Maple исследованы деформации аналогичной плоской фермы с двумя пролетами для произвольного числа панелей.

Расчет усилий производится в программе, написанной на языке символьной математики Maple. Стержни и узлы нумеруются (рис. 2). В программу вносятся координаты узлов и порядок соединения стержней в виде специальных списков, указывающих на номера концов стержней. Матрица системы уравнений равновесия содержит направляющие косинусы усилий.

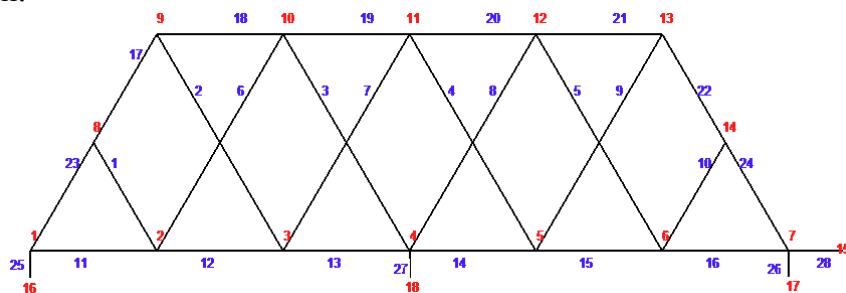


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов,  $n_0 = 3$

Приведем численное решение задачи о распределении усилий по стержням фермы при  $n=6$ ,  $a=3$  м,  $h=6$  м (рис. 3). Синим цветом обозначены сжатые стержни, красным – растянутые. Тонкие черные отрезки соответствуют ненагруженным стержням. Величина усилия, отнесенная к  $P$ , округлена до двух значащих цифр. Верхний пояс, как и следовало ожидать, сжат, нижний – растянут. Большая часть стержней решетки при  $n=6$  сжата или не напряжена. Два раскоса растянуты. Следует отметить, что наиболее сжатые стержни находятся не в середине верхнего пояса.

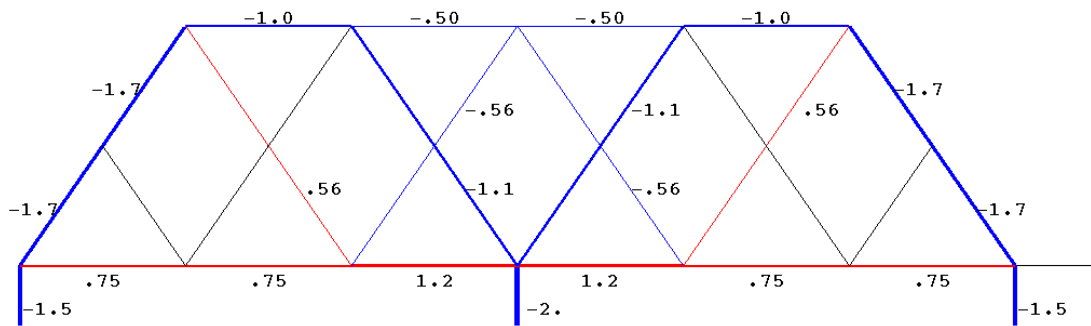


Рис. 3. Распределение усилий,  $n_0 = 3$

Расчет усилий для ферм с различным числом панелей показывает, что для четного числа панелей  $n_0$  задача не имеет решения. Отдельное вычисление определителя системы уравнений равновесия показало, что в этом случае он равен нулю. Объяснение этого эффекта связано с кинематической изменяемостью конструкции. В качестве примера рассмотрим случай допустимой картины распределения скоростей узлов при  $n_0 = 2$  (рис. 4). Стержни 1, 6, 7, 10, 15 и 16 совершают вращательные движения вокруг опорных шарниров. Неподвижными остаются опорные шарниры 1, 3, 5, а также 7 и 9. Стержни 3 и 4 движутся поступательно со скоростью  $u$ , стержни 2 и 5 неподвижны. Остальные стержни совершают мгновенно вращательные движения. Треугольники с вершинами 1, 2 и 6 и 4, 5, 10 жесткие. Отсюда имеем соотношение скоростей:  $u/a = 2u'/c$ , где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

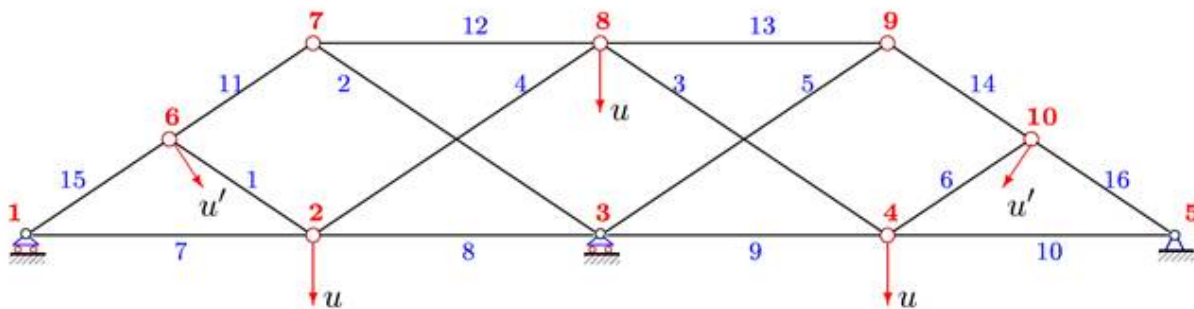


Рис. 4. Виртуальные скорости узлов,  $n_0 = 2$

Далее принимаем нечетное число панелей в половине пролета  $n_0 = 2k + 1$ .

Методом индукции найдем реакции опор для случая нагружения фермы распределенной нагрузкой (рис. 1). Последовательно рассчитывая усилия во всех стержнях, включая стержни, моделирующие опоры, получаем для различных  $k$ :

$$\begin{aligned}
 k = 1: Y_A &= 3P/2, \\
 k = 2: Y_A &= 5P/2, \\
 k = 3: Y_A &= 7P/2, \\
 k = 4: Y_A &= 9P/2, \dots
 \end{aligned}$$

Общая формула очевидна:  $Y_A = Y_C = P(2k + 1)/2$ . Аналогично получаем  $Y_B = 2kP$ . Таким образом, большая часть нагрузки приходится на среднюю опору.

**Первая частота собственных колебаний.** Инерционные свойства фермы моделируем массами, расположенными в узлах нижнего пояса. Предполагая, что массы

двигаются только по направлению оси  $y$ , получаем, что число степеней свободы конструкции равно  $K = 2n_0 - 1$ . В матричном виде система записывается следующим образом:

$$m\mathbf{I}_K \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D}_K \mathbf{Y} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{Y}$  – вектор всех смещений масс в узлах фермы,  $\ddot{\mathbf{Y}}$  – вектор ускорений,  $\mathbf{I}_K$  – единичная матрица,  $\mathbf{D}_K$  – матрица жесткости. В случае гармонических колебаний с частотой  $\omega$  справедлива связь  $\ddot{\mathbf{Y}} = -\omega^2 \mathbf{Y}$ . Матрица  $\mathbf{D}_K$  является обратной к матрице податливости  $\mathbf{B}_K$ . Элементы этой матрицы вычисляются с помощью формулы Максвелла – Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{\alpha=1}^{v-3} S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF) + \sum_{\alpha=v-2}^v S_{\alpha}^{(i)} S_{\alpha}^{(j)} l_{\alpha} / (EF_h).$$

Введены стандартные обозначения:  $b_{i,j}$  – перемещение узла  $i$  от действия единичной вертикальной безразмерной силы, приложенной к узлу  $j$ ,  $S_{\alpha}^{(i)}$  – усилия в стержнях с номерами  $\alpha$  от действия единичной силы, приложенной к узлу  $i$ , где расположена масса  $m$  по направлению движения массы,  $l_{\alpha}$  – длина стержня  $\alpha$ . Первая сумма относится к стержням поясов и решетки, для которых принимается одинаковая жесткость  $EF$ , вторая сумма соответствует трем вертикальным опорным стержням с жесткостью  $EF_h = EF / r$ , где  $r$  – безразмерный коэффициент относительной жесткости опорных стержней длиной  $q$ .

Умножая равенство на матрицу  $\mathbf{B}_K$ , сводим задачу к проблеме собственных значений матрицы  $\mathbf{B}_K$ :  $\mathbf{B}_K \mathbf{Z} = \lambda \mathbf{Z}$ , где  $\lambda = 1 / (\omega^2 m)$  – собственные числа матрицы  $\mathbf{B}_K$ . Приближенное аналитическое решение для нижней оценки  $\omega_D$  первой частоты  $\omega_1$  разыскивается по формуле Донкерлея:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}.$$

где  $\omega_p$  – парциальные частоты.

Для расчета парциальных частот составляем уравнение движения отдельной массы. Рассмотрим случай жестких опорных стержней  $r = 0$ .

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0, \quad p = 1, 2, \dots, K.$$

Коэффициент жесткости  $D_p$ , обратный к коэффициенту податливости, вычисляется по формуле Максвелла – Мора:

$$\delta_p = 1 / D_p = \sum_{\alpha=1}^{v-3} (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF) + \sum_{\alpha=v-2}^v (S_{\alpha}^{(p)})^2 l_{\alpha} / (EF_h)$$

Фактически в такой постановке вычисляются только диагональные элементы матрицы  $\mathbf{B}_K$ . Из формулы Донкерлея при  $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$  следует  $\omega_p = \sqrt{D_p / m}$ , имеем:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_k.$$

Расчет серии ферм с разным числом панелей показал, что коэффициент  $\Delta_k$  имеет вид, не зависящий от параметра  $k$ :

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= (224a^3 / 9 + 8c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_2 &= (896a^3 / 5 + 24c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= (672a^3 + 48c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_4 &= (16352a^3 / 9 + 80c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_5 &= (4032a^3 + 120c^3) / (h^2 EF) \dots\end{aligned}$$

Свойство сохранения формы решения имеет место для регулярных конструкций. Запишем решение в виде:

$$\Delta_k = (C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF)$$

Для нахождения общих членов полученных последовательностей сначала с помощью операторов системы Maple находились рекуррентные уравнения, которому они удовлетворяли. В рассматриваемой задаче потребовалось рассчитать десять ферм с числом  $k=1, \dots, 10$ . Заметим, что символьные преобразования в Maple выполняются значительно медленней, чем численные. Время расчета собственных частот каждой последующей фермы приблизительно в два раза больше предыдущей. Решение рекуррентных уравнений даёт выражения для определения коэффициентов:

$$C_1 = (28k(k+1)(7k^2 + 7k + 6)) / 45, \quad C_2 = 4k(k+1).$$

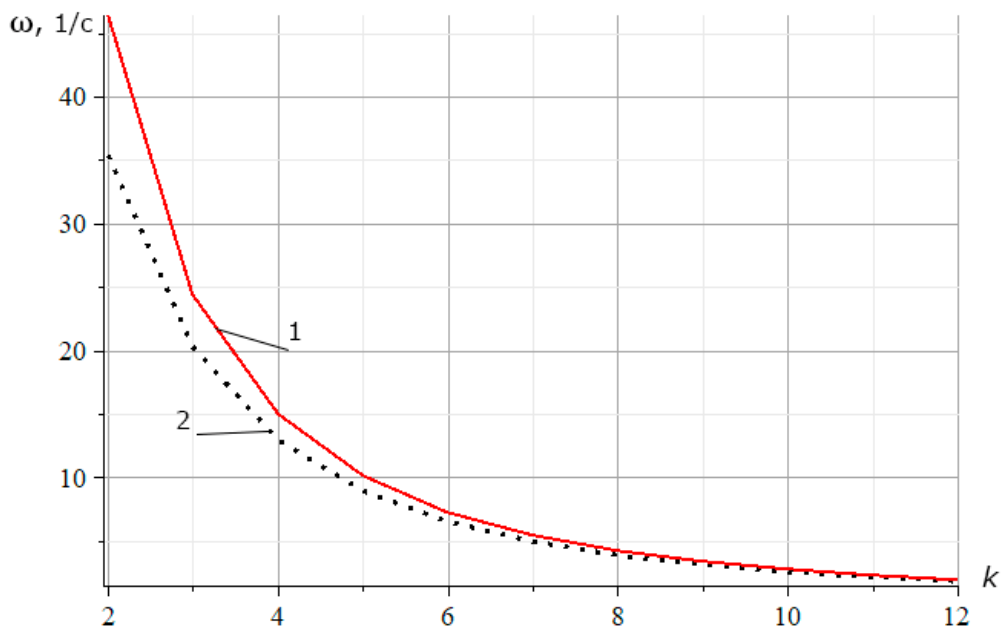
Аналогично, для слагаемого, соответствующего прогибу опор, имеем:

$$\Delta'_k = rq(22k^2 + 16k + 3) / (6(2k+1)EF_h).$$

Окончательно имеем аналитическую оценку для нижней частоты по Донкерлею:

$$\omega_D^{-2} = m \left( (C_1 a^3 + C_2 c^3) / (h^2 EF) + rq(22k^2 + 16k + 3) / (6(2k+1)EF_h) \right).$$

**Численное решение.** Для оценки точности аналитического решения найдем численно первую частоту из спектра частот собственных колебаний конструкции с помощью специального оператора Eigenvalues из пакета LinearAlgebra в системе Maple, используемого для нахождения собственных чисел и векторов матрицы. Рассмотрим ферму с размерами  $a=3\text{м}$ ,  $h=4\text{м}$ ,  $q=1\text{м}$ . Площадь поперечного сечения стержней решетки и опорных стержней одинакова  $F=5,9\text{см}^2$ . Модуль упругости стали  $E=2,1 \cdot 10^5$  МПа, массы в узлах  $m=200\text{кг}$ . На рис. 5 показаны кривые зависимости частоты, полученной аналитически и численно при коэффициенте относительной жесткости опор  $r=1$ .

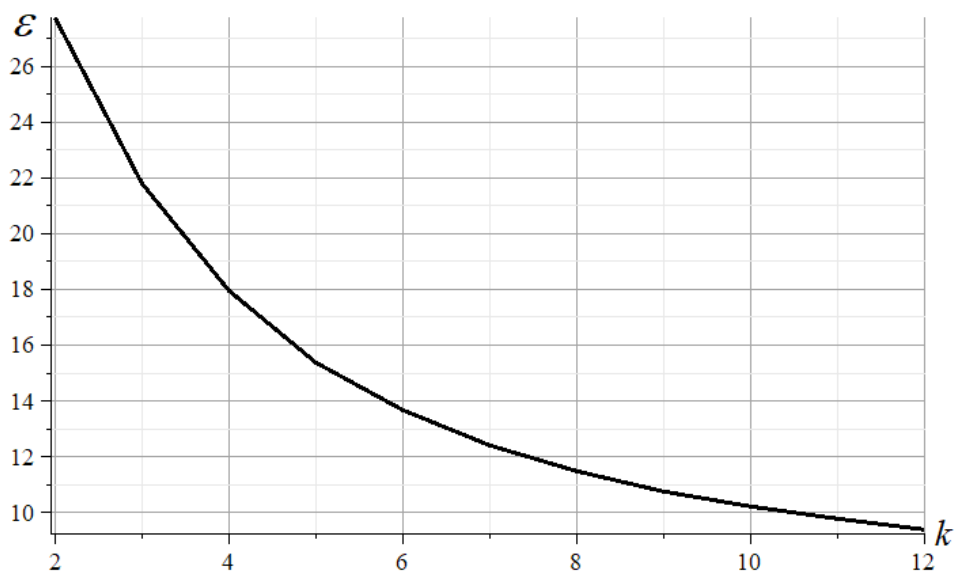


**Рис. 5.** Сравнение аналитического решения с численным:

1 – первая частота колебаний фермы  $\omega_1$  и её нижняя оценка по Донкерлею при  $a = 3\text{м}$ ,  $h = 4\text{м}$ ,  $q = 1\text{м}$ ,  $EF_h = EF$ ; 2 – частота  $\omega_1$ , полученная численно,  $r = 1$

Как видно из полученных графиков, погрешность аналитической оценки невелика и с увеличением числа панелей стремительно падает. Это делает полученное аналитическое решение особенно удобным для расчета ферм с большим числом панелей, где время численного счета с увеличением числа панелей растет, а точность падает.

Для уточнения погрешности решения введем относительную величину  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_D) / \omega_1$ . На рис. 6 показано изменение этой величины в зависимости от числа панелей. Если не считать локального максимума, приходящегося на нереально малое число панелей, то можно сделать вывод, что с точностью от 9 % до 28 % аналитическая оценка дает удовлетворительный результат.



**Рис. 6.** Погрешность оценки по Донкерлею

Численные эксперименты (рис. 7) с подбором жесткости опор показали, что этот параметр весьма незначительно влияет на значение первой собственной частоты.

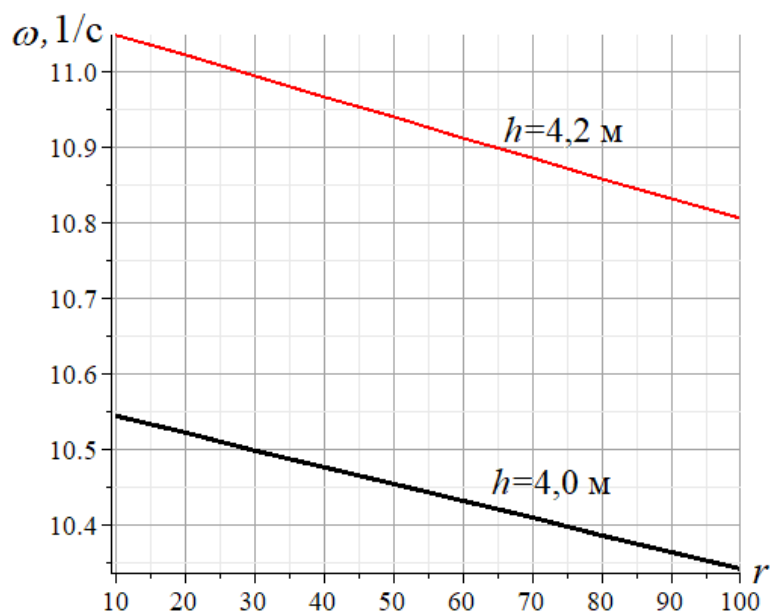


Рис. 7. Зависимость первой частоты от коэффициента относительной жесткости опор

**Заключение.** Построена математическая модель плоской двухпролетной статически определимой фермы. Можно сделать следующие выводы:

1. При некоторых значениях числа панелей ферма кинематически изменяема.
2. Большая часть нагрузки, распределенной равномерно по узлам верхнего пояса приходится на среднюю опору независимо от числа панелей.
3. Оценка Донкерлея с учетом произвольного числа панелей имеет компактный вид и дает приемлемую точность, особенно при большом числе панелей.
4. С увеличением высоты фермы точность аналитического решения растет.
5. Решение, полученное для ромбовидной конструкции, не только хорошо описывает зависимость частоты от числа панелей плоской фермы, но и дает в этом случае большую точность.
6. Влияние жесткости опор на первую частоту незначительно.

#### Библиографический список

1. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis // *Engineering Structures*. – 2015. – Vol. 82. – С. 186-198.
2. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. – М.: ИНФРА-М, 2019. – 238 с.
3. Kirsanov M. Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020.
4. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "butterfly" // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2016. – № 4. – С. 2-5.
5. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // *Вестник МГСУ*. – 2019. – Т. 14. – В.3. – С. 179-187.

6. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. – 2019. – № 2. – С. 20-23.
7. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 1(20). – С. 14-20.
8. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции: в 17 ч. – Тамбов: ООО “Консалтинговая компания Юком”, 2014. – Ч. 11. – С. 17-18.
9. Тиньков Д.В. Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: дисс. ... канд. техн. наук, 2019. – 113 с.
10. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 1 (24). – С. 25–38.
11. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 1(20). – С. 14–20.
12. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. – 2019. – Т. 14. – № 3 (126). – С. 284–292.
13. Кирсанов М.Н., Бука-Ваиваде К. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. – 2019. – № 4 (23). – С. 7–14.
14. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М.: Инфра-М, 2015. – Т. 1. – С. 31-34.
15. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Формулы для частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. – 2018. – № 12. – С. 21–23.
16. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. – 2018. – Т. 8. – № 4(30). – С. 3.
17. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. – 2019. – № 2. – С. 20–23.
18. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ частот колебаний груза в зависимости от его положения в узлах плоской фермы // Строительство и реконструкция. – 2020. – № 1 (87). – С. 14–19.
19. Кирсанов М.Н. Формула для основной частоты колебания многопролетной фермы // Строительная механика и конструкции. – 2020. – № 1 (24). – С. 19-24.
20. Кирсанов М.Н. Формула зависимости низшей частоты колебания балочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. – № 3 (284). – С. 45-49.
21. Кирсанов М.Н. Нижняя оценка основной частоты собственных колебаний фермы с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. – 2019. – Т. 14. – № 7. – С. 844–851.
22. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. – 2017. – № 12(26). – С. 28.

## References

1. Han Q. H. et al. Failure mechanism of steel arch trusses: Shaking table testing and FEM analysis. *Engineering Structures*. 2015. 82. Pp. 186-198. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2014.10.013>
2. Kirsanov, M. *Planar Trusses: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2019.
3. Kirsanov, M. *Trussed Frames and Arches: Schemes and Formulas*. Cambridge Scholars Publishing Lady Stephenson Library. Newcastle upon Tyne, GB, 2020.
4. Kirsanov M.N. Analytical Calculation of a Girder Truss with Butterfly Type Lattice. *Structural Mechanics and Design* 2016. № 4. Pp. 2-5.
5. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of natural frequencies of vibrations of a flat truss with an arbitrary number of panels. *MSCU Bulletin*. 2019. T.14. B.3. Pp. 179-187.
6. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Spectrum of natural frequencies of vibrations of an externally statically indeterminate truss. *Transport Construction*. 2019. No2. Pp. 20-23.
7. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of the frequencies of small vibrations of a girder truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Design*. 2019. No1(20). Pp. 14-20.
8. Akhmedova E.R., Kanatova M.I. natural frequencies of vibrations of a flat girder truss of regular structure. *Science and Education in the XXI century: a collection of scientific papers on the materials of the International Scientific-Practical Conference on October 31, 2014 in 17 parts. Part 11*. Tambov: LLC "Consulting company Yukom", 2014. Pp. 17-18.
9. Tinkov D.V. Analytical solutions of problems on natural vibration frequencies of regular rod systems: dis. ... Ph.D. 2019. P. 113.
10. Vorobiev O.V. On methods of obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. *Structural Mechanics and Structures*. 2020. No. 1(24). Pp. 25–38.
11. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. Analytical expressions of frequencies of small vibrations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures* 2019. No. 1(20). Pp. 14–20.
12. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU*. 2019; 14:3:284–292.
13. Kirsanov M.N., Buka-Vaivade K. Analytical expressions of frequencies of small oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019. Vol. 4. No. 23. Pp. 7–14.
14. Kanatova M.I. Frequency equation and analysis of vibrations of a planar girder truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. Moscow. Infra-M. 2015. Vol.1 Pp. 31-34.
15. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Formulas for the oscillation frequency of the load in an arbitrary node of the girder. *Transport construction*. 2018. No. 12. Pp. 21–23.
16. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical solution of the problem of the frequency of oscillation of the load in an arbitrary node of the beam girder in the Maple system. *Construction: Science and Education*. 2018. Vol. 8. No. 4 (30). Pp. 3.
17. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. Spectrum of natural frequencies of oscillations of an externally statically indeterminate truss. *Transport construction*. 2019. No. 2. Pp. 20-23.
18. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. Analysis of cargo vibration frequencies depending on its position in the nodes of a planar truss. *Construction and reconstruction*. 2020. No. 1(87). Pp. 14–19.
19. Kirsanov M. N. Formula for the main frequency of vibration of a multi-span truss. *Construction mechanics and structures*. 2020. No. 1 (24). Pp. 19–24.



20. Kirsanov M. N. Formula for the dependence of the lowest frequency of vibration of the beam truss on the number of panels. Construction mechanics and calculation of structures. 2019. No. 3(284). Pp. 45–49.
21. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2019; 14:7:844- 851. (rus.).
22. Osadchenko N.V. Calculation of the deflection of a planar continuous statically determinate truss with two spans. Postulate. 2017. No. 12 (26). Pp. 28.

## **ESTIMATION OF THE NATURAL FREQUENCY OF A TWO-SPAN TRUSS, TAKING INTO ACCOUNT THE SUPPORT STIFFNESS**

V. F. Petrenko

National Research University «MPEI»  
Russia, Moscow

---

Student, tel. +7 (925) 734-96-41; e-mail: [petrenko.valeri82@gmail.com](mailto:petrenko.valeri82@gmail.com)

---

The object of the study is a statically determined truss with two spans and a rhomboidal lattice. One of the supports is a fixed hinge, the other two are movable. The dependence of the first natural frequency of vibration of the truss on its dimensions, mass, and number of panels is obtained in analytical form. The stiffness of a structure with masses concentrated at its nodes is determined by the Maxwell-Mohr formula. A lower analytical estimate of the first frequency is calculated using the Dunkerley formula. It is shown that for a certain number of panels, the truss becomes kinematically variable. A generalization of a series of partial solutions for trusses with a sequentially increasing number of panels is made by the induction method. The general terms of the sequence of coefficients are determined from the solution of linear homogeneous recurrence equations. All transformations, including the finding of forces in the rods by the knot cutting method, are performed in the computer mathematics system Maple. To verify the solution, the entire spectrum of frequencies, including the lowest frequency, is found numerically. Comparison of the analytical solution with the numerical solution shows that the accuracy of the analytical estimate from below is quite high and increases with the number of panels.

**Key words:** truss, Maple, estimation of natural vibrations, frequency of natural vibrations, rhomboidal truss.

# ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

---

DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.003  
УДК 519.633

## АЛГОРИТМ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Бакушев

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства  
Россия, г. Пенза

---

Д-р техн. наук, профессор кафедры механики, тел.: 89063950754, e-mail: [bakuchsv@mail.ru](mailto:bakuchsv@mail.ru)

---

**Постановка задачи.** Для сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, механическое поведение которой и в отношении сдвиговых, и в отношении объёмных деформаций описывается произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями, требуется сформулировать алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния.

**Результаты.** Построение алгоритма для разрывных функций объёмного и сдвигового деформирования основано на выявлении возможного положения цилиндрических поверхностей излома объёмных и сдвиговых деформаций. Математическая модель сплошной среды описывается как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова). Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, принимаются в перемещениях. Определение напряжённо-деформированного состояния сплошной среды на участках за и между поверхностями излома объёмных и сдвиговых деформаций предполагается выполнять любыми известными методами расчёта: методом конечных разностей, методом конечных элементов и так далее.

**Выводы.** Значимость разработанного алгоритма для строительной области состоит в том, что алгоритм решения задачи может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях осесимметричного деформирования и описываемых математическими моделями как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, замыкающие уравнения физических соотношений для которых, построенные на основе экспериментальных данных, аппроксимированы билинейными функциями как в отношении объёмных, так и в отношении сдвиговых деформаций.

**Ключевые слова:** сплошная среда, осесимметричная деформация, билинейная аппроксимация, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность, алгоритм расчёта.

**Введение.** Строительные и машиностроительные конструкции, находящиеся в условиях, близких к условиям осесимметричного деформирования, находят широкое применение в практике. Сюда относятся массивы с цилиндрическими полостями, подземные трубопроводы, шахты пусковых установок, толстостенные трубы, орудийные стволы, цилиндрические осесимметричные оболочки и так далее. Ввиду этого интерес к теории расчёта конструкций, находящихся в условиях осесимметричного деформирования, не ослабевает. Так в работе [1] установлена обобщенная модель рэлеевских волн в осесимметричном режиме и получены решения в цилиндрических координатах,

---

© Бакушев С. В., 2021

показывающие медленный распад волн Релея в направлении радиуса. В статье [2] рассмотрены вероятностные методы оценки прочностной надежности осесимметричных элементов конструкции, работающих в условиях ползучести. В качестве примера рассмотрен расчет вероятности безотказной работы микронеоднородного толстостенного цилиндра с заданными параметрами под действием внутреннего давления. В работе [3] выполнен анализ напряженно-деформированного состояния в толстостенном сферическом сосуде, бесконечном цилиндрическом сосуде и однородном диске, выполненных из изотропного и однородного материала и находящихся в условиях тепловой нагрузки, давления и центробежных сил. В статье [4] на основе решения упругопластической задачи в осесимметричной и неосесимметричной постановке исследовано напряженное состояние элемента толстостенного трубопровода, находящегося в условиях силового и коррозионного воздействия. В работе [5] сформулирована задача упругопластической осесимметричной деформации для гибких армированных круглых цилиндрических оболочек, находящихся под динамическим и квазистатическим действием внутреннего избыточного давления. В статье [6] рассматривается метод аргументированных функций комплексной переменной, предполагающий нахождение не самого решения, а условий его существования, для решения обширного класса осесимметричных прикладных задач. В работе [7] предложен вариант математического моделирования многослойных композитных цилиндрических оболочек, находящихся под осесимметричной нагрузкой, на основании гипотез Кирхгова–Лавы (вариант Л. И. Балабуха – И. В. Новожилова) с учетом сдвиговых напряжений в сопряжениях. В работе [8] на основе принципа независимости действия сил представлена методика, позволяющая определить напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропных тел вращения, находящихся под действием осесимметричных внешних сил, объемных сил и температуры. В статье [9] решена задача осесимметричного деформирования консольного сетчатого цилиндрического корпуса космического аппарата, закреплённого по краю жёстким кольцом, нагруженным равномерным сжимающим усилием. В работе [10] на основе конечно-элементного моделирования в системе MSC/NASTRAN for Windows определяется напряженное состояние шероховатого поверхностного слоя деталей типа тел вращения при локальном и осесимметричном воздействии на микропрофиль.

Математическая модель механических процессов при деформировании неупругих тел, определяемая замыкающими уравнениями, составляющими неотъемлемую часть физических соотношений, лежит в основе построения алгоритмов расчёта напряженно-деформированного состояния строительных и машиностроительных конструкций. Построение математической модели основано на экспериментальных данных о механическом поведении деформируемого твёрдого тела. Сложность физических и механических процессов при деформации реальных тел, а также их многообразии, приводят к сложным математическим моделям – замыкающим уравнениям, описывающим объёмное и сдвиговое деформирование. Это, в конце концов, приводит к достаточно сложным расчётным дифференциальным уравнениям и требует определённых упрощений. Процесс упрощения и линеаризации расчётных уравнений начался ещё со времён Р. Гука, после обнаружения им закона упругости. В ряде работ автора упрощение диаграмм объёмного и сдвигового деформирования выполнено путём билинейной [11] и биквадратичной [12] аппроксимации. При этом получены разрешающие дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для характерных случаев деформации сплошной среды как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова) [13].

В данной работе для сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования  $u_r = u(r)$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_z = 0$ , формулируется алгоритм решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния. Механическое поведение сплошной среды и в части объёмных деформаций, и в части сдвиговых деформаций описывается

произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями (рис. 1).

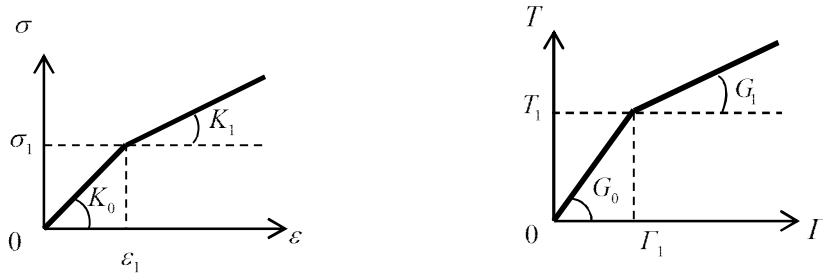


Рис. 1. Диаграммы объёмного  $\sigma \approx \varepsilon$  и сдвигового  $T \approx \Gamma$  деформирования

На рис. 1 введены следующие обозначения:  $K_0$  – начальный модуль объёмного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига;  $K_1$  – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_1$  – модуль упрочнения при сдвиге;  $\sigma$  – первый инвариант тензора напряжений;  $\varepsilon$  – первый инвариант тензора деформаций;  $T$  – интенсивность касательных напряжений;  $\Gamma$  – интенсивность деформаций сдвига;  $\sigma_1, \varepsilon_1$  – координаты точки излома билинейной диаграммы объёмного деформирования;  $T_1, \Gamma_1$  – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

**Секущие модули билинейных диаграмм.** Для сплошной среды, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, при билинейной аппроксимации графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, разрешающие физические и дифференциальные уравнения приведены в работе [13] как без учёта, так и с учётом геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова).

Построение физических уравнений выполнено на основании секущих модулей объёмного  $K$  и сдвигового  $G$  деформирования. Так, на первом прямолинейном участке аппроксимированных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования

$$K^I = \frac{1}{3}K_0 = Const; \quad G^I = G_0 = Const; \quad (1)$$

на втором прямолинейном участке

$$K^{II} = K(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left[ K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \neq Const; \quad (2)$$

$$G^{II} = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq Const.$$

Для геометрически нелинейной модели сплошной среды (в смысле В.В. Новожилова), секущие модули объёмного расширения (сжатия) и сдвига будут определяться теми же выражениями (1) и (2), в которых у всех величин нужно проставить звёздочки. При этом  $K_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия);  $G_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига;  $K_1^*$  – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_1^*$  – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при сдвиге;  $\sigma^*$  – первый инвариант тензора обобщённых напряжений;  $\varepsilon^*$  – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;

$T^*$  – интенсивность обобщённых касательных напряжений;  $\Gamma^*$  – интенсивность нелинейных деформаций сдвига;  $\sigma_1^*$ ,  $\varepsilon_1^*$  – координаты точки излома билинейной диаграммы объёмного деформирования;  $T_1^*$ ,  $\Gamma_1^*$  – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

При осесимметричном деформировании  $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$  и  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{rr}^2 - \varepsilon_{rr}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2}$  для геометрически линейной модели сплошной среды, причём  $\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}$ ;  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}$ . Для геометрически нелинейной модели сплошной среды  $\varepsilon^* = \varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*$  и  $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{rr}^{*2} - \varepsilon_{rr}^*\varepsilon_{\varphi\varphi}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{*2}}$ , где  $\varepsilon_{rr}^* = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2$ ;  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2$ .

**Алгоритм.** Построение алгоритма для определения напряжённо-деформированного состояния сплошной среды для разрывных функций объёмного и сдвигового деформирования, находящейся в условиях осесимметричного деформирования, будем выполнять основываясь на выявлении возможного положения цилиндрических поверхностей излома объёмных и сдвиговых деформаций.

Пусть имеем бесконечное пространство с цилиндрической бесконечно длинной полостью радиуса  $r_s$ , внутри которой действует равномерно распределённое по цилиндрической поверхности давление интенсивности  $q$ . Полупространство за цилиндрической полостью будет находиться в условиях осесимметричного деформирования. Механическое поведение материала пространства описывается и в отношении объёмных, и в отношении сдвиговых деформаций произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями, то есть, диаграммы объёмного и сдвигового деформирования известны. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние пространства за пределами цилиндрической полости.

Словесный алгоритм для определения напряжённо-деформированного состояния пространства за пределами цилиндрической полости будет следующим.

1. Для заданной внешней нагрузки  $q$  определяем напряжённо-деформированное состояние в каждой точке пространства за пределами цилиндрической полости на основании первого прямолинейного участка диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, то есть принимаем  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ . Для определения параметров напряжённо-деформированного состояния можно воспользоваться любым известным методом: методом конечных разностей, методом конечных элементов, и так далее. Расчётные формулы приведены в работе [13], § 8.3: для определения перемещения  $u(r)$  имеем дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.91) [13] – для геометрически линейной модели, либо дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.101) [13] – для геометрически нелинейной модели; далее определяем деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)$ , затем напряжения  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ ,  $\sigma_{zz}(r)$  по формулам (8.85) [13] – для геометрически линейной модели либо по формулам (8.95) [13] – для геометрически нелинейной модели.

2. В каждой точке пространства за цилиндрической полостью вычисляем первый инвариант тензора деформаций  $\varepsilon(r)$  для геометрически линейной модели, или первый инвариант тензора нелинейных деформаций  $\varepsilon^*(r)$  для геометрически нелинейной модели, а также интенсивность деформаций сдвига  $\Gamma(r)$  для геометрически линейной модели или

интенсивность нелинейных деформаций сдвига  $\Gamma^*(r)$  для геометрически нелинейной модели.

3. Из условий  $\varepsilon(r_{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r_{\Gamma_1}) = \Gamma_1$  для геометрически линейной модели либо из условий  $\varepsilon^*(r_{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1^*$  и  $\Gamma^*(r_{\Gamma_1}) = \Gamma_1^*$  для геометрически нелинейной модели сплошной среды находим радиусы цилиндрических поверхностей  $r = r_{\varepsilon_1}$  и  $r = r_{\Gamma_1}$ . Если  $r_{\varepsilon_1} \leq r_s$  и  $r_{\Gamma_1} \leq r_s$ , то задача решена. Иначе, переходим к пункту 4.

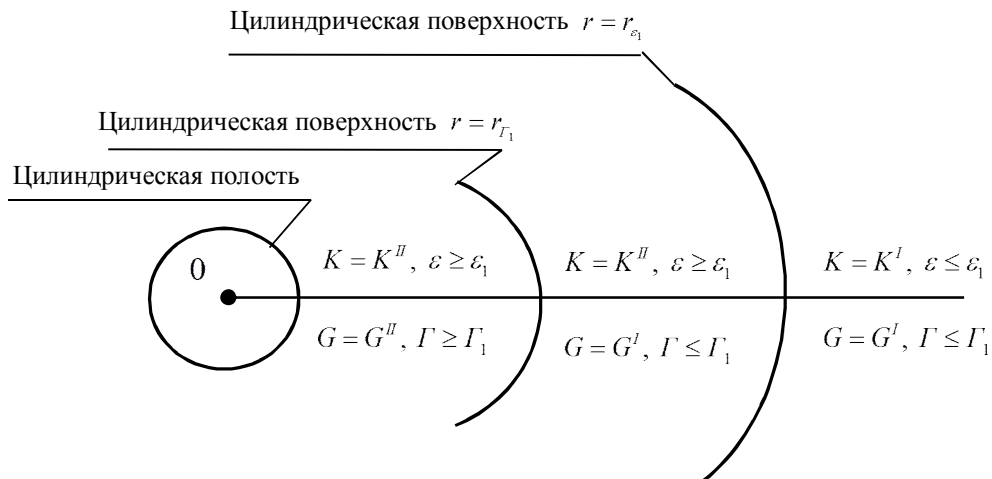
**З а м е ч а н и е :** цилиндрическую поверхность  $r = r_{\varepsilon_1}$  будем называть поверхностью излома объёмных деформаций; цилиндрическую поверхность  $r = r_{\Gamma_1}$  будем называть поверхностью излома сдвиговых деформаций.

4. Далее возможны пять вариантов.

Вариант I.  $r_{\varepsilon_1} > r_{\Gamma_1} > r_s$  (рис. 2).

В точках пространства, для которых  $r \geq r_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \leq \Gamma_1$ .

В точках пространства, для которых  $r_{\Gamma_1} \leq r \leq r_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}$ ,  $G = G^I$ . Для этой области определяем напряжённо-деформированное состояние: для определения перемещения  $u(r)$  имеем дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.92) [13] – для геометрически линейной модели либо дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.102) [13] – для геометрически нелинейной модели; далее определяем деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)$ , затем напряжения  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ ,  $\sigma_{zz}(r)$  по формулам (8.86) [13] – для геометрически линейной модели либо по формулам (8.96) [13] – для геометрически нелинейной модели. Теперь уточняем радиус  $r_{\Gamma_1}$ , так как изменился закон деформирования. В точках пространства на интервале  $r_{\Gamma_1} \leq r \leq r_{\varepsilon_1}$  имеем  $\varepsilon(r) \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \leq \Gamma_1$ .



**Рис. 2.** Пространство с цилиндрической полостью. Вариант I

В точках пространства, для которых  $r \leq r_{\Gamma_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}$ ,  $G = G^{II}$ . Для этой области определяем напряжённо-деформированное состояние:

для определения перемещения  $u(r)$  имеем дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.94) [13] – для геометрически линейной модели либо дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.104) [13] – для геометрически нелинейной модели; далее определяем деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)$ , затем напряжения  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ ,  $\sigma_{zz}(r)$  по формулам (8.88) [13] – для геометрически линейной модели либо по формулам (8.98) [13] – для геометрически нелинейной модели. В точках пространства на интервале  $r \leq r_{\Gamma_1}$  имеем  $\varepsilon(r) \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \geq \Gamma_1$ .

Вариант II.  $r_{\varepsilon_1} > r_{\Gamma_1}$  и  $r_{\Gamma_1} < r_s$  (рис. 3).

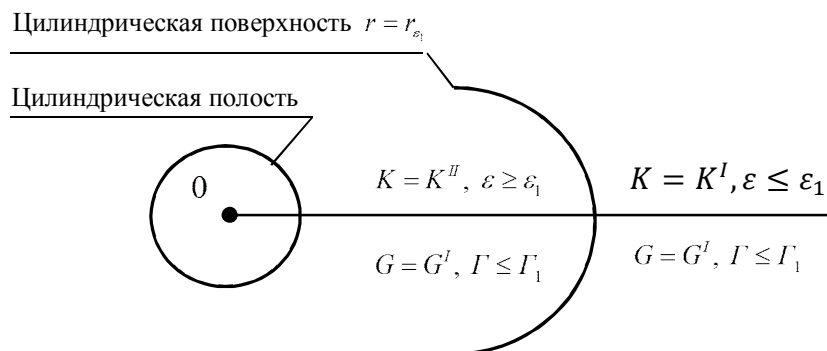


Рис. 3. Пространство с цилиндрической полостью. Вариант II

Внешняя нагрузка  $q$  такова, что цилиндрическая поверхность излома сдвиговых деформаций отсутствует.

В точках пространства, для которых  $r \geq r_{\varepsilon_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \leq \Gamma_1$ . В точках пространства, для которых  $r \leq r_{\varepsilon_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \leq \Gamma_1$ .

Вариант III.  $r_{\Gamma_1} > r_{\varepsilon_1} > r_s$  (рис. 4).

В точках пространства, для которых  $r \geq r_{\Gamma_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \leq \Gamma_1$ .



Рис. 4. Пространство с цилиндрической полостью. Вариант III

В точках пространства, для которых  $r_{\varepsilon_1} \leq r \leq r_{\Gamma_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^{II}$ . Для этой области определяем напряжённо-деформированное состояние: для определения перемещения  $u(r)$  имеем дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.93) [13] – для геометрически линейной модели либо дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.103) [13] – для геометрически нелинейной модели, далее определяем деформации  $\varepsilon_{rr}(r)$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)$ , затем напряжения  $\sigma_{rr}(r)$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi}(r)$ ,  $\sigma_{zz}(r)$  по формулам (8.87) [13] – для геометрически линейной модели либо по формулам (8.97) [13] – для геометрически нелинейной модели. Далее уточняем радиус  $r_{\varepsilon_1}$ , так как изменился закон деформирования. В точках полупространства на интервале  $r_{\varepsilon_1} \leq r \leq r_{\Gamma_1}$  имеем  $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \geq \Gamma_1$ .

В точках пространства, для которых  $r \leq r_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}$ ,  $G = G^{II}$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \geq \Gamma_1$ .

Вариант IV.  $r_{\Gamma_1} > r_{\varepsilon_1}$  и  $r_{\varepsilon_1} < r_s$  (рис. 5).

Внешняя нагрузка  $q$  такова, что цилиндрическая поверхность излома объёмных деформаций отсутствует.

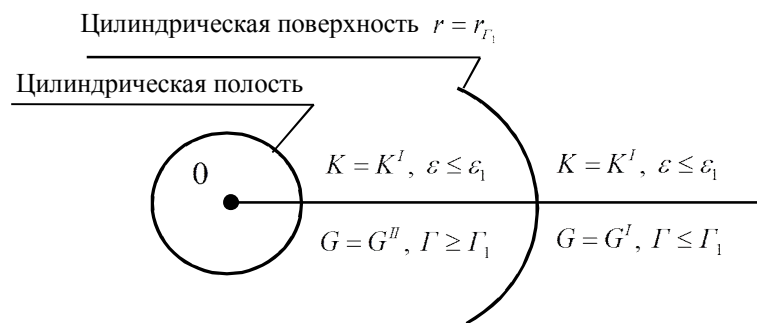


Рис. 5. Пространство с цилиндрической полостью. Вариант IV

В точках пространства, для которых  $r \geq r_{\Gamma_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \leq \Gamma_1$ . В точках пространства, для которых  $r \leq r_{\Gamma_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^{II}$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \geq \Gamma_1$ .

Вариант V.  $r_{\varepsilon_1} = r_{\Gamma_1} > r_s$  (рис. 6).

Цилиндрические поверхности излома объёмных и сдвиговых деформаций совпадают.



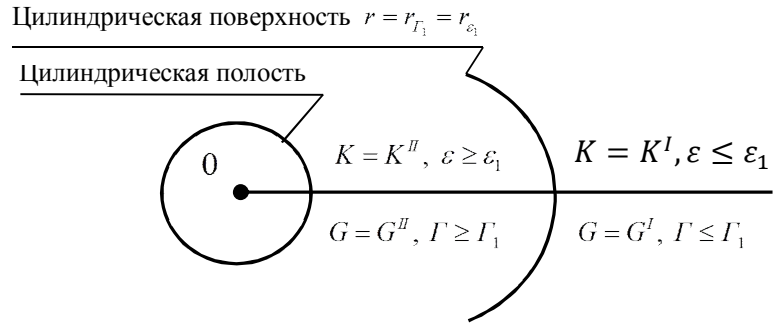


Рис. 6. Пространство с цилиндрической полостью. Вариант V

В точках пространства, для которых  $r \geq r_{\Gamma_1} = r_{\varepsilon_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \leq \Gamma_1$ . В точках пространства, для которых  $r \leq r_{\Gamma_1} = r_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}$ ,  $G = G^{II}$ , то есть здесь  $\varepsilon(r) \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma(r) \geq \Gamma_1$ .

5. Путём сравнения первого инварианта тензора напряжений и первого инварианта тензора деформаций, а также интенсивности касательных напряжений и интенсивности деформаций сдвига для геометрически линейной модели либо первого инварианта тензора обобщённых напряжений и первого инварианта тензора нелинейных деформаций, а также интенсивности обобщённых касательных напряжений и интенсивности нелинейных деформаций сдвига для геометрически нелинейной модели, вычисленных в точках сплошной среды по напряжениям и деформациям, с их значениями на диаграммах объёмного и сдвигового деформирования, оцениваем правильность полученного решения.

**Блок-схема.** Описанный выше алгоритм изобразим в виде следующей укрупнённой блок-схемы. Без каких-либо изменений алгоритм в виде блок-схемы остается справедливым и для геометрически нелинейной модели сплошной среды.

В блок-схеме введены обозначения:  $r_\infty$  – наибольшее значение радиуса, до которого производятся вычисления перемещений, деформаций и напряжений в сплошной среде;  $\Delta r$  – приращение радиуса при вычислении характеристик напряжённо-деформированного состояния.

Алгоритмы вычисления характеристик напряжённо-деформированного состояния сплошной среды за цилиндрической поверхностью оформим в виде четырёх процедур:

Расчёт\_1

|  |  |  |
|--|--|--|
|  | <p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- перемещение <math>u(r)</math>, дифференциальное уравнение (8.70) с коэффициентами (8.71) [13];</li> <li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(r)</math>, <math>\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)</math>,</li> <li>- напряжения <math>\sigma_{rr}(r)</math>, <math>\sigma_{\varphi\varphi}(r)</math>, <math>\sigma_{zz}(r)</math>, формулы (8.65) [13].</li> </ul> |  |
|--|--|--|

Расчёт\_2

|  |  |  |
|--|--|--|
|  | <p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- перемещение <math>u(r)</math>, дифференциальное уравнение (8.70) с коэффициентами (8.72) [13];</li> <li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(r)</math>, <math>\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)</math>,</li> <li>- напряжения <math>\sigma_{rr}(r)</math>, <math>\sigma_{\varphi\varphi}(r)</math>, <math>\sigma_{zz}(r)</math>, формулы (8.66) [13].</li> </ul> |  |
|--|--|--|

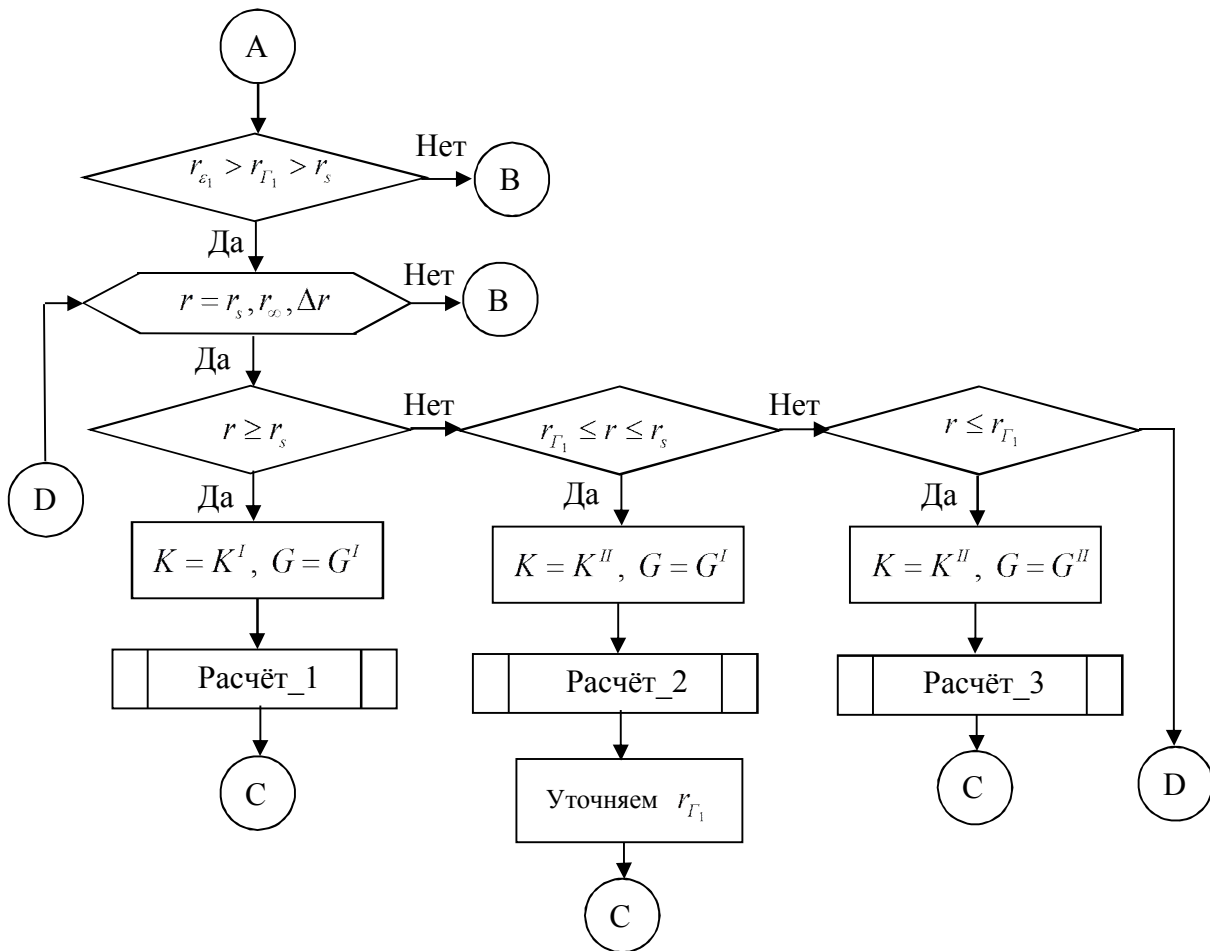
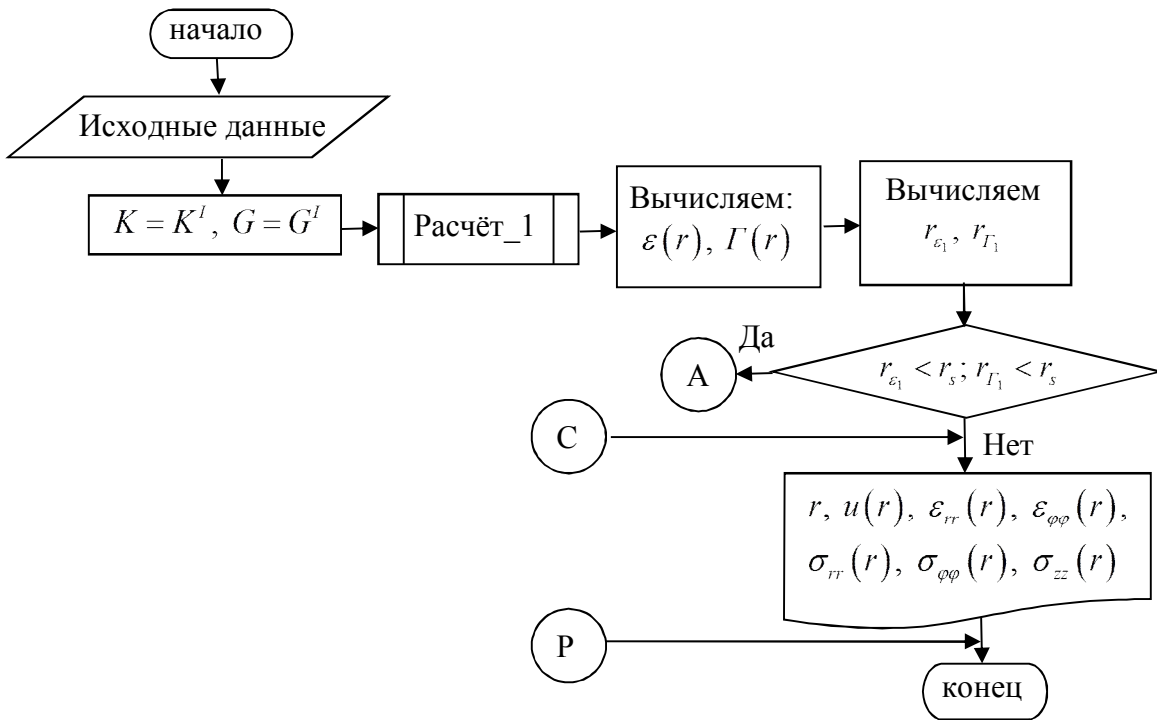
Расчёт\_3

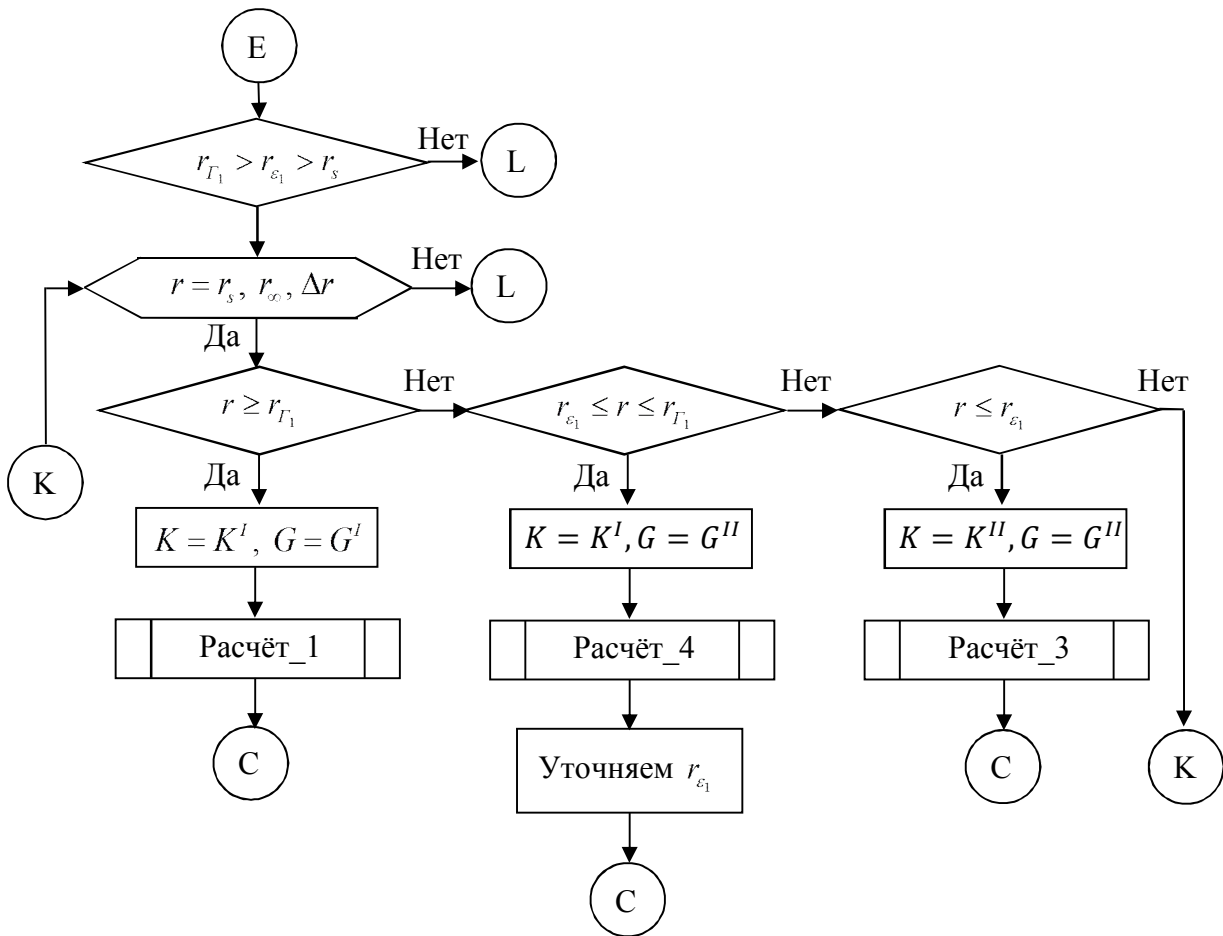
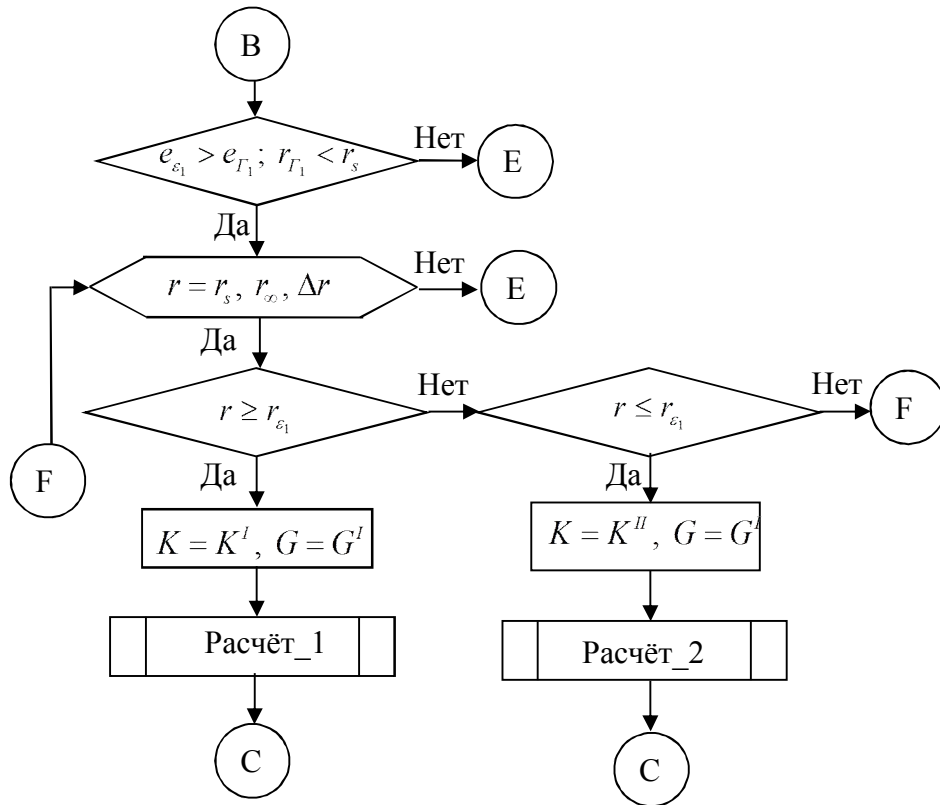
|  |  |  |
|--|--|--|
|  | <p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- перемещение <math>u(r)</math>, дифференциальное уравнение (8.70) с коэффициентами (8.74) [13];</li> <li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(r)</math>, <math>\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)</math>,</li> <li>- напряжения <math>\sigma_{rr}(r)</math>, <math>\sigma_{\varphi\varphi}(r)</math>, <math>\sigma_{zz}(r)</math>, формулы (8.68) [13].</li> </ul> |  |
|--|--|--|

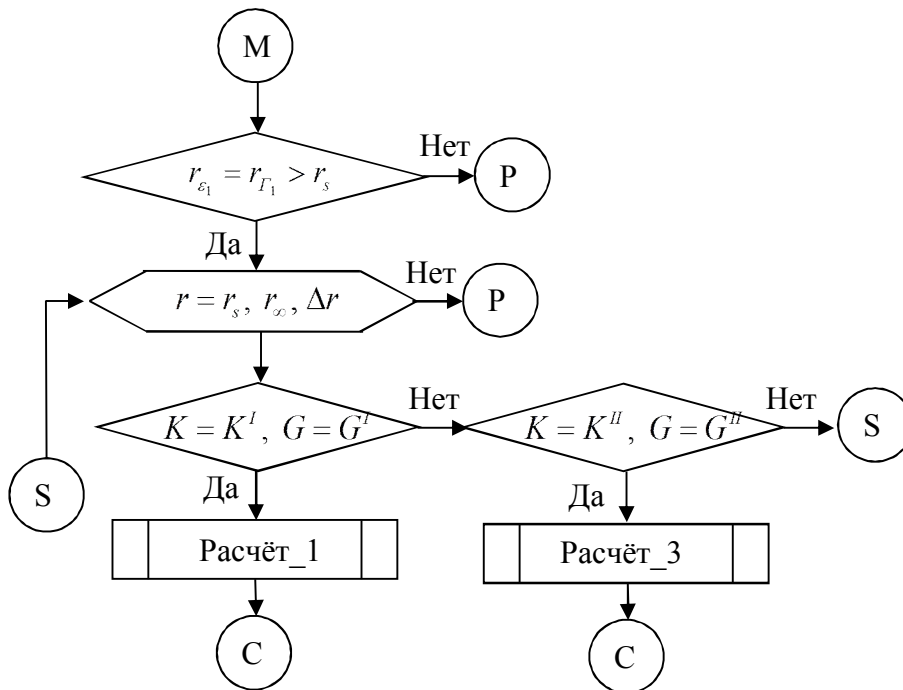
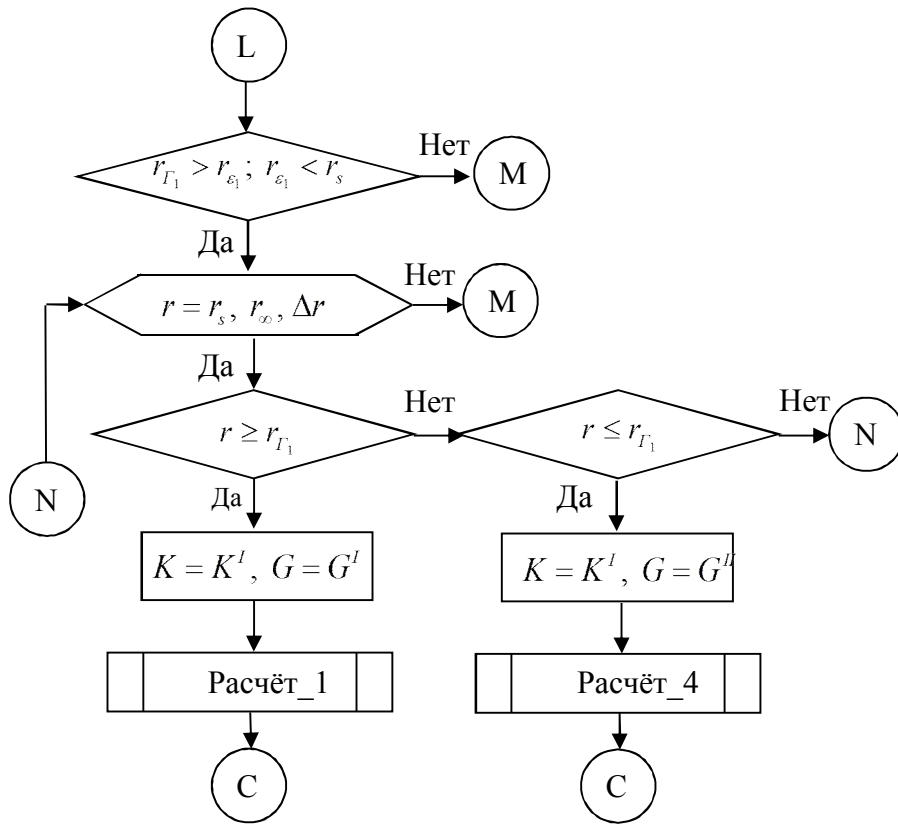
Расчёт\_4

|  |  |  |
|--|--|--|
|  | <p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- перемещение <math>u(r)</math>, дифференциальное уравнение (8.70) с коэффициентами (8.73) [13];</li> <li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(r)</math>, <math>\varepsilon_{\varphi\varphi}(r)</math>,</li> <li>- напряжения <math>\sigma_{rr}(r)</math>, <math>\sigma_{\varphi\varphi}(r)</math>, <math>\sigma_{zz}(r)</math>, формулы (8.67) [13].</li> </ul> |  |
|--|--|--|

Головная программа будет иметь следующую структуру:







**Заключение.** Сформулированный алгоритм решения задачи может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния не только сплошной среды, но и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях

осесимметричного деформирования как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, физические соотношения для которых и в отношении объёмных деформаций, и в отношении сдвиговых деформаций описываются нелинейными законами, аппроксимируемыми билинейными функциями.

#### Библиографический список

1. The axisymmetric Rayleigh waves in a semi-infinite elastic solid / Ji Wang, Shaoyun Wang, Longtao Xie, Yangyang Zhang, Lili Yuan, Jianke Du, Han Zhang // *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. – 2020. – № 10 (2). – P. 120-124.
2. Kovalenko L.V., Popov N.N. Evaluation of reliability of axisymmetric stochastic elements of constructions under creepage on the basis of theory of runs // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tehničeskogo Universiteta. Seriâ: Fiziko-Matematičeskie Nauki*. – 2012. – № 2(27). – P. 72-77. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1090>.
3. Yildirim V. Heat-Induced, Pressure-Induced and Centrifugal-Force-Induced Exact Axisymmetric Thermo-Mechanical Analyses in a Thick-Walled Spherical Vessel, an Infinite Cylindrical Vessel and a Uniform Disk Made of an Isotropic and Homogeneous Material // *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. – 2017. – № 9(2). – P. 66-87. DOI: <https://doi.org/10.24107/ijeas.309786>.
4. Alimzhanov A.; Shetiyeva K. Research of the stress state of an element of a thick-wall pipeline under conditions of power and corrosion effect // *Journal of Mathematics, Mechanics, Computer Science*. – 2020. – № 1 (105). – P. 109-119. DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.10>.
5. Янковский А.П. Моделирование осесимметричного упругопластического деформирования цилиндрических волокнистых оболочек // *Механика машин, механизмов и материалов*. – 2018. – № 2(43). – С. 68 – 76.
6. Chigirinsky V., Naumenko O. Invariant differential generalizations in problems of the elasticity theory as applied to polar coordinates // *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. – 2020. – № 5/7(107). – P. 56-73. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.213476>.
7. . Mathematical modeling and computation of composite cylindrical shells under axisymmetric loading / Y. Yakubovskiy, I. Donkova, A. Kuzyaev, M. Kruglov // *MATEC Web of Conferences*. – 2017. – Vol. 106, 04012. DOI: <https://doi.org/10.1051/matecconf/201710604012>.
8. Иванычев Д.А. Осесимметричное термоупругое деформирование трансверсально-изотропных тел вращения // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. – 2019. – Т. 16. – № 1. – С. 31-40. DOI: [10.31429/vestnik-16-1-31-40](https://doi.org/10.31429/vestnik-16-1-31-40).
9. Шатов А.В., Хахленкова А.А. Определение осесимметричного деформирования сетчатой цилиндрической оболочки, нагруженной осевым сжимающим усилием // *Решетневские чтения*. – 2016. – Т. 1. – С. 62-63.
10. Вулых Н.В. Анализ напряженного состояния шероховатого слоя при локальном и осесимметричном пластическом деформировании // *Вестник Иркутского государственного технического университета*. – 2017. – Т. 21. – № 11 (130). – С. 17-26. DOI: [10.21285/1814-3520-2017-11-17-26](https://doi.org/10.21285/1814-3520-2017-11-17-26).
11. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // *Строительная механика и расчёт сооружений*. – 2019. – №2 (283). – С. 2–11.

12. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями. // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2020. – №3 (290). – С. 2–14. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.
13. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. – М.: ЛЕНАНД, 2020. – 304 с.

#### References

1. Ji Wang, Shaoyun Wang, Longtao Xie, Yangyang Zhang, Lili Yuan, Jianke Du, Han Zhang. The axisymmetric Rayleigh waves in a semi-infinite elastic solid. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2020. No. 10(2). Pp. 120-124.
2. Kovalenko L.V., Popov N.N. Evaluation of reliability of axisymmetric stochastic elements of constructions under creepage on the basis of the theory of runs. *Bulletin of the Samara State Technical University. Physical and Mathematical Sciences*. 2012. No. 2(27). Pp. 72-77. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1090>.
3. Yıldırım V. Heat-induced, pressure-induced and centrifugal-force-induced exact axisymmetric thermo-mechanical analyses in a thick-walled spherical vessel, an infinite cylindrical vessel, and a uniform disk made of isotropic and homogeneous material. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2017. No. 9(2). Pp. 66-87. DOI: <https://doi.org/10.24107/ijeas.309786>.
4. Alimzhanov A., Shetiyeva K. Research of the stress state of an element of a thick-wall pipeline under conditions of power and corrosion. *Bulletin of KNU. Mathematics, Physics and Computer Science*. 2020. No. 1(105). Pp. 109-119. DOI: <https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v105.i1.10>.
5. Yankovskii A.P. Modeling of axisymmetric elastoplastic deformation of cylindrical fibrous shells. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*. 2018. No. 2(43). Pp. 68–76.
6. Chigirinsky V., Naumenko O. Invariant differential generalizations in problems of the elasticity theory as applied to polar coordinates. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020. No. 5/7(107). Pp. 56-73. DOI: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.213476>.
7. Yakubovskiy Y., Donkova I., Kuzyaev A., Kruglov M. Mathematical modeling and computation of composite cylindrical shells under axisymmetric loading. *MATEC Web of Conferences*. 2017. Vol. 106. 04012. DOI: <https://doi.org/10.1051/matecconf/201710604012>.
8. Ivanychev D.A. Osesimmetrichnoe termouprugoe deformirovanie transversal'no-izotropnyh tel vrashcheniya [Axisymmetric thermo-elastic deformation of transversely isotropic bodies of revolution]. *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2019. Vol. 16. No. 1. Pp. 31-40. DOI: 10.31429/vestnik-16-1-31-40. (in Russian)
9. Shatov A.V., Hahlenkova A.A. Opredelenie osesimmetrichnogo deformirovaniya setchatoj cilindricheskoj obolochki, nagruzhenoj osevym szhimayushchim usiliem [Axisymmetric deformation of the composite lattice cylindrical shell under axial compression]. *Reshetnev Readings*. 2016. Vol. 1. Pp. 62-63. (in Russian)
10. Vulyh N.V. Analiz napryazhennogo sostoyaniya sherohovatogo sloya pri lokal'nom i osesimmetrichnom plasticheskom deformirovanii [Analysis of rough layer stressed state at local and axisymmetric plastic deformation]. *Bulletin of the Irkutsk State Technical University*. 2017. Vol. 21. No. 11(130). Pp. 17-26. DOI: 10.21285/1814-3520-2017-11-17-26. (in Russian)

11. Bakushev S.V. Approksimaciya diagramm deformirovaniya bilinejnymi funkcijami [Approximations of warp diagrams using bilinear functions]. Structural Mechanics and Calculation of Structures. 2019. No. 2(283). Pp. 2–11. (in Russian)
12. Bakushev S.V. Approksimaciya diagramm deformirovaniya kvadraticnymi funkcijami [Approximation of deformation diagrams by quadratic functions]. Structural Mechanics and Calculation of Structures. 2020. No. 3(290). Pp. 2–14. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14. (in Russian)
13. Bakushev S.V. Differencial'nye uravneniya i kraevye zadachi mekhaniki deformiruemogo tvyordogo tela [Differential equations and boundary problems in the mechanics of a deformable solid]. M.: LENAND, 2020. 304 p. (in Russian)

## CALCULATION ALGORITHM OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF CONTINUOUS MEDIUM UNDER AXISYMMETRIC DEFORMATION AT BILINEAR APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS

S. V. Bakushev

Penza State University of Architecture and Construction  
Russia, Penza

---

Dr. of Technical Sciences, Professor of the Department of Mechanics, tel.: 89063950754, e-mail: [bakuchsv@mail.ru](mailto:bakuchsv@mail.ru)

---

**Problem statement.** For continuous medium under conditions of axisymmetric deformation, the mechanical behavior of which regarding both shear and volumetric deformations is described by arbitrary nonlinear rules, approximated by bilinear functions, need to be articulated an algorithm for stress-strain state determination has been formulated.

**Results.** Differential equations of equilibrium of continuous medium under conditions of axisymmetric deformation are taken in displacements. The mathematical model of continuous medium is described both regarding and regardless of geometric nonlinearity (according to V.V. Novozhilov). The construction of an algorithm for discontinuous functions of volumetric and shear deformation is based on identifying the possible position of cylindrical fracture surfaces of volumetric and shear deformations. Determination of the stress-strain state of a continuous medium in the sections behind and between the fracture surfaces of volumetric and shear deformations is supposed to be performed by any known calculation methods: the method of finite difference, the method of finite elements, etc.

**Conclusions.** The significance of the developed algorithm for the construction industry lies in the fact that the algorithm for problem-solving can be applied in determining the stress-strain state of continuous media and elements of building and machine-building structures under conditions of axisymmetric deformation and being described by mathematical models both regarding and regardless geometric nonlinearity, the closing equations of physical relations for which, constructed on the basis of experimental data, are approximated by bilinear functions with respect to both volumetric and shear deformations.

**Keywords:** continuous medium, axially symmetric deformation, bilinear approximation, geometrical linearity, geometrical nonlinearity, calculation algorithm.



# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

---

DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.004

УДК 624.04

## РАЗРАБОТКА И АПРОБАЦИЯ МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКИХ КАЧЕСТВ АВТОДОРОЖНОГО МОСТА

В. С. Сафронов<sup>1</sup>, А. В. Антипов<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1</sup>  
ООО «Дортранспроект»<sup>2</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, профессор кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 2715230,  
e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

<sup>2</sup> Ведущий инженер, тел.: +7(910)7329044, e-mail: [dron\\_a77@mail.ru](mailto:dron_a77@mail.ru)

---

Приводится критический анализ современного состояния теории динамического действия движущихся автомобилей на мостовые сооружения. Указывается, что, несмотря на многочисленные исследования этой проблемы, динамические качества проектируемых и эксплуатируемых в настоящее время мостов на автомобильных дорогах отличаются от проектных показателей как после окончания строительства, так и по мере износа при эксплуатации. Для устранения указанного недостатка в последние годы предлагается выполнять постоянный или периодический динамический мониторинг, позволяющий фиксировать изменение фактических динамических параметров, включающих частоты, параметры затухания и передаточные функции, во времени. Для их отслеживания выполняются натурные динамические испытания с последующим анализом с целью оценки реакции сооружений на проезд транспортных средств. В настоящее время апробированные методики для проведения динамического мониторинга мостов с разными несущими системами отсутствуют.

Предлагается и апробируется на длительно эксплуатируемом автодорожном мосту с неразрезным сталежелезобетонным пролетным строением методика динамического мониторинга. Приводятся данные натурных динамических испытаний, которые исследуются методами статистического анализа. Анализ динамических характеристик моста выполняется с использованием конечно-элементной пространственной модели пролетного строения.

Приводятся полученные с помощью блока частотного анализа вычислительного комплекса наиболее характерные элементы передаточной матрицы, оценивающие динамические качества пролетного строения.

**Ключевые слова:** автодорожный мост, неразрезное сталежелезобетонное пролетное строение, динамический мониторинг, натурные колебания, спектр собственных частот, блок частотного анализа вычислительного комплекса, характерные передаточные функции.

**Введение.** Динамические качества мостовых сооружений являются весьма важными при их проектировании, строительстве и эксплуатации. Исследования динамического действия подвижных нагрузок на несущие конструкции мостов различных систем осуществляются более ста лет и являются актуальными до настоящего времени.

В различных постановках динамический эффект при равномерном перемещении по несущей системе с постоянной скоростью инертных и неинертных подвижных нагрузок изучали российские (А.Н. Крылов, В.В. Болотин [1], В.А. Кисилев [2], А.Б. Моргаевский [5] и др.) и зарубежные исследователи (Виллис, Стокс, Шалленкамп, Инглис, Л. Фрыба [4] и др.). Анализ применяемых на начальной стадии исследований по проблеме динамического действия подвижной нагрузки приведен в книге [3].

Существенное развитие теория динамического действия подвижной нагрузки на автодорожные мосты получила в известной научной школе, созданной в Воронежском ИСИ под руководством проф. А.Г. Барченкова [6]. Подробное изложение разработанной в конце XX-го века теории, включающей детерминированные и стохастические алгоритмы динамического расчета автодорожных мостов, приведено во Всероссийском справочнике проектировщика [7]. Применительно к висячим и вантовым мостам воздействие автомобилей рассмотрено в монографии [8].

Новый этап развития исследования по рассматриваемой проблеме связан с применением современных конечно-элементных комплексов ЛИРА, MIDAS, SCAD, ANSYS, SAP2000 и др.

Наиболее значительные результаты по приведению теории в отвечающее современным требованиям состояние получены в работах Н.Н. Шапошникова [9], Г.Б. Муравского [10], И.И. Иванченко, В.М. Фридкина и Ю.В. Архипенко [11]. Из зарубежных ученых следует отметить К. Бате, Е. Вилсоан [15]. Новые модели для учета особенностей моделирования автомобилей при разгоне и торможении, для описания колебаний понтонных мостов, учета подвижности жидких грузов в автоцистернах рассмотрены в докторской диссертации С.Ю. Гриднева [12].

Несмотря на многочисленные исследования динамической реакции мостов при движении автомобилей, в настоящее время при проектировании транспортных сооружений, строительстве и эксплуатации динамические качества практически не учитываются. Для устранения указанного недостатка в последние годы предлагается выполнять постоянный или периодический динамический мониторинг [13], позволяющий отслеживать изменение фактических динамических параметров, включающих частоты, параметры затухания и передаточные функции, во времени. Сейчас апробированные методики для применения динамического мониторинга мостов с разными несущими системами отсутствуют. В настоящей статье предлагается и апробируется на длительно эксплуатируемом автодорожном мосту с неразрезным сталежелезобетонным пролетным строением методика динамического мониторинга.

### **1. Краткое описание объекта исследования**

Рассматривается построенный в 1972 году автодорожный мост через реку Сысола в республике Коми с неразрезным сталежелезобетонным пролетным строением по схеме: (42,0+4x63,0+42,0) м и габаритом Г-8,00+2×1,40 м (рис. 1).



**Рис. 1.** Общий вид рассматриваемого автодорожного моста со сталежелезобетонным пролетным строением

Мост запроектирован проектной организацией Ленгипротрансмост, г. Ленинград в 1968 году под временные подвижные нагрузки Н-30, НК-80 и толпу на тротуарах ( $400\text{кг/м}^2$ ) в соответствии с нормативным документом СН 200-62.

Поперечное сечение пролетного строения рассматриваемого моста с указанием геометрических размеров на момент обследования в 2021 году представлено на рис. 2.

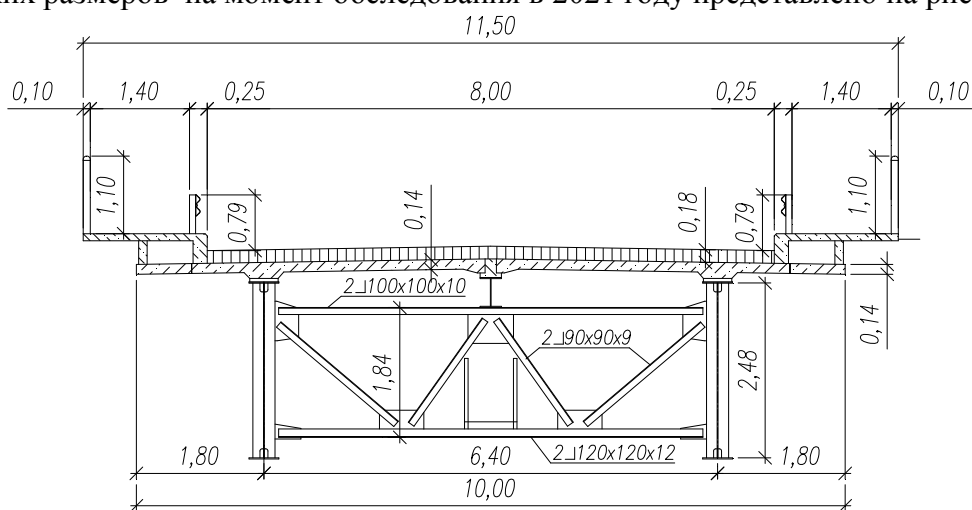


Рис. 2. Конструкция сталежелезобетонного пролетного строения моста

Пролетное строение моста – неразрезное сталежелезобетонное запроектированное применительно к типовому проекту Проектстальконструкции (по схеме  $42,0+4\times 63,00+42,00$  м). В поперечном сечении сталежелезобетонного пролетного строения расположены две стальные сварные главные балки высотой 2,48 м из низколегированной стали 15ХСНД со сплошной стенкой с расстоянием в осях балок 6,40 м и поддерживающий железобетонную плиту продольный прогон двутаврового сечения высотой 0,432 м. Поверх балок и прогона устроена железобетонная плита проезжей части из бетона марки М400 толщиной 0,14 м, включенная в совместную работу со стальными главными балками посредством жестких упоров П-образной формы, приваренных с шагом 0,875 м к верхним поясам. В поперечном направлении главные балки объединены системой продольных и поперечных связей из прокатных уголковых элементов. Монтажные стыки главных балок пролетных строений, прогона и связей выполнены на заклепках.

Опорные части пролетных строений – металлические литые. На опоре №4 – шарнирно-неподвижные, балансирные; на опорах №№ 2, 3, 5 и 6 – шарнирно-подвижные с 4-мя срезными валками; на опорах ОК1 и ОК7 (устоях) – двухкатковые, выполненные по индивидуальному проекту.

Устои моста – свайные, козлового типа на сваях-оболочках диаметром 0,60 м. Укрепление конусов выполнено сборными железобетонными плитами. На конусах устоев расположены смотровые лестницы.

Промежуточные опоры моста – сборные, комбинированные, массивно-столбчатые на высоком свайном ростверке из железобетонных свай-оболочек диаметром 0,60 м, длиной 12,00 м. Массивная часть опоры до расчетного уровня высокой воды выполнена с использованием контурных блоков, выше, в верхней части каждой опоры, устроено по 2 стойки из железобетонных свай-оболочек диаметром 1,60 м, объединенных поверху монолитными железобетонными ригелями сечением  $2,20\times 1,10$  м из бетона марки М300

## 2. Описание экспериментальной части динамического мониторинга

В качестве измеряемых параметров при выполнении динамического мониторинга приняты вертикальные прогибы главных балок Б1 и Б2 СТЖБ неразрезного пролетного строения в середине пролета 5 длиной 63 м. Регистрация колебаний моста осуществлялась с помощью электронного измерительного комплекса с использованием двух триангуляционных лазерных датчиков серии РФ603 производства ООО «РИФТЕК» республики Беларусь. Установленные под мостом датчики измеряли вертикальные перемещения средних сечений балок Б1 и Б2 в пролете 5.

При проведении натурных измерений из транспортного потока двух направлений движения выбирались ситуации, когда по проезжей части двигались одиночные тяжелые автомобили или следующие колонной на близком расстоянии друг от друга.

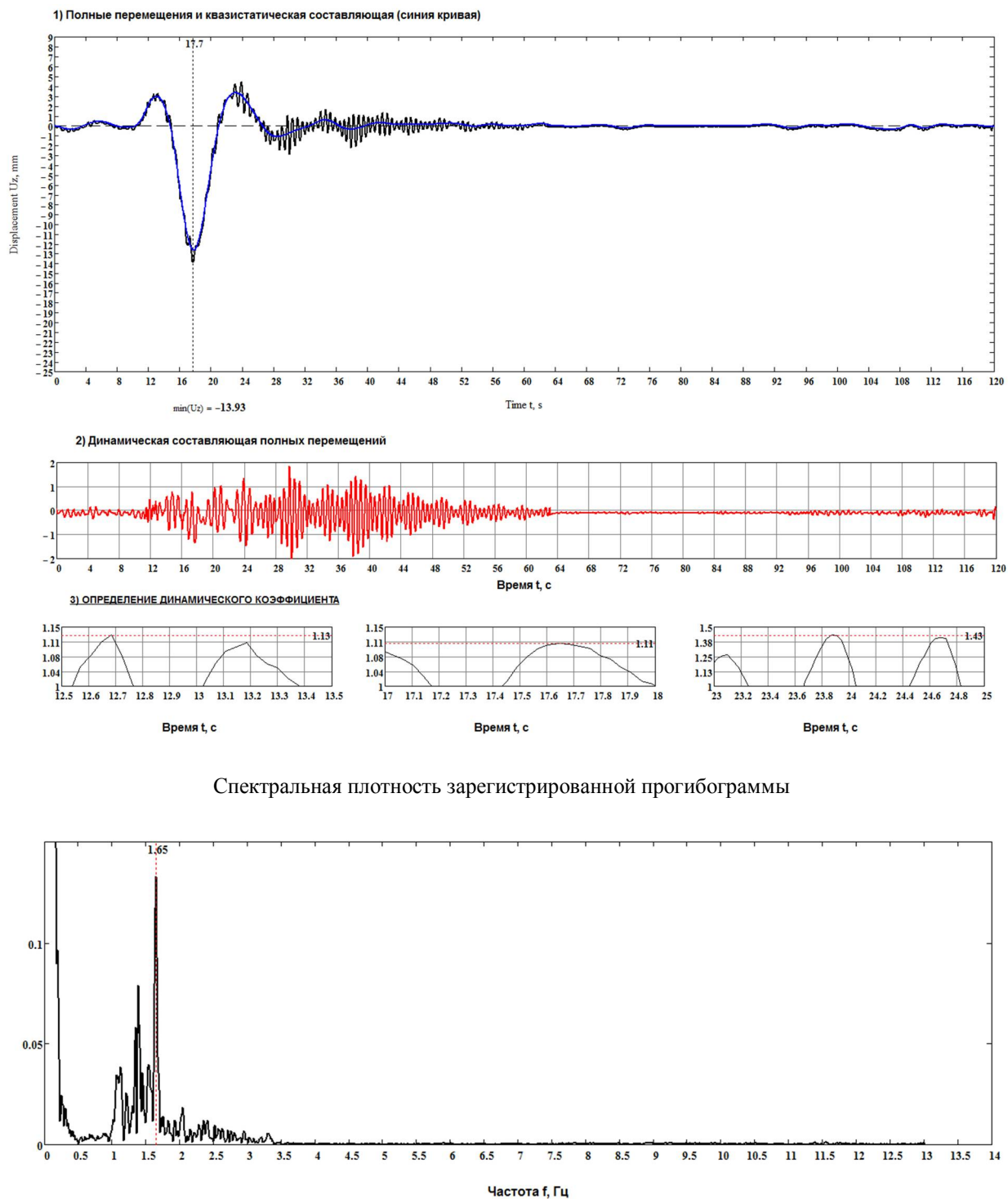


**Рис. 3.** Проезд тяжелого автопоезда при проведении динамического мониторинга неразрезного пролетного строения моста

По результатам измерений прогибов главных балок пролетного строения во время проезда с различными скоростями по полосам проезжей части моста одиночных тяжелых автомобилей или следующих колонной на близком расстоянии друг от друга произведена статистическая обработка полученных данных.

С использованием процедур математического вычислительного комплекса Mathcad построены графики изменения вертикальных перемещений главных балок Б1 и Б2 в середине 5-го пролёта моста в зависимости от времени, а также вычислены спектральные плотности прогибограмм с помощью численного преобразования Фурье.

Ниже, на рис. 4, представлены один из типовых зарегистрированных графиков изменения во времени прогибов для среднего сечения главной балки Б1 пролета № 5 пролетного строения моста при проезде со скоростью  $V=40$  км/час нагруженного многоосного лесовоза (рис. 3), а также вычисленная для него спектральная плотность для этого нагружения.



**Рис. 4.** Прогибограмма и результаты её статистической обработки для перемещений среднего сечения балки Б1 в пролете 5 моста при проезде нагруженного автопоезда

Анализ данных динамической диагностики привел к следующим выводам:

- при проезде автомобилей по мосту проявляются достаточно продолжительные колебания, наличие которых объясняется неразрезностью пролетного строения общей длиной 345 м. При ограниченных квазистатических прогибах эти колебания не являются опасными для прочности несущих конструкций моста, однако при эксплуатации следует более тщательно следить за состоянием покрытия на проезжей части, не допуская появления заметных неровностей;

- опасные для длительной прочности пролетных строений резонансные колебания не зарегистрированы ни в одном из вариантов записанных виброграмм, однако во время нахождения на мосту хотя бы одного тяжелого автомобиля и некоторое время после съезда во всех пролетах наблюдаются длительные колебания в режиме «биения» с периодически возрастающими и затухающими колебаниями.

- анализ зарегистрированных при динамических измерениях виброграмм колебаний показывает, что логарифмический декремент по данным обработки записанных виброграмм находится в диапазоне от  $\delta=0,12$  до  $\delta=0,20$ , что соответствует обычным значениям этого параметра для неразрезных сталежелезобетонных балочных пролетных строений.

- из теории динамического воздействия подвижной нагрузки на автодорожные мосты [6-7, 17-22] известно, что колебания неразрезных большепролетных сталежелезобетонных мостов зависят не только от наличия неровностей на проезжей части, но и от влияния изменения прогибов под движущимися колесами автомобилей на колебания массивных кузовов автомобилей. Именно такой особенностью обладает рассматриваемый мост через реку Сысола.

### **3. Расчетный анализ данных динамического мониторинга моста**

Оценку динамических качеств рассматриваемого сталежелезобетонного пролетного строения выполним методом частотного анализа, который рекомендуется введенным в 2017 году нормативным документом СП 274.1325800.2016 [13] при проведении динамического мониторинга мостовых сооружений. Для этого сначала примем динамическую пространственную конечно-элементную расчетную схему пролетного строения и выполним модальный анализ рассматриваемой конструкцию

#### **3.1. Описание принятой динамической расчетной схемы и результатов модального анализа**

Дискретизация конструкций рассматриваемого пролетного строения выполнялась с использованием следующих типов конечных элементов (КЭ), входящих в КЭ библиотеку комплекса «ЛИРА-САПР» [14]:

- универсальный стержневой КЭ без учета сдвиговых деформаций;
- универсальный прямоугольный плоский оболочечный КЭ (тонкая плита по теории Кирхгофа);
- специальный двухузловой элемент упругой связи между узлами с характеристиками жестких вставок.
- универсальный стержневой КЭ для моделирования главных стальных балок, продольного прогона, поперечных и продольных связей.
- плоский прямоугольный оболочечный КЭ для моделирования железобетонной плиты проезжей части.

В конечно-элементной модели пролетного строения основная плоскость узлов принята в уровне срединной поверхности железобетонной плиты проезжей части. Жесткие вставки использовались для учета отклонений центров тяжести главных стальных балок (гибкая часть КЭ) относительно основной плоскости узлов.

Деформативность опор моста в динамических расчетах не учитывалась.

Подвижные и неподвижные опорные части (ОЧ) моделировались путем закрепления соответствующих степеней свободы опорных узлов:

- неподвижные ОЧ: наложение ограничения на поступательные степени свободы  $X, Y, Z$ ;
- подвижные ОЧ: наложение ограничения на поступательные степени свободы  $Y, Z$ .

Для выполнения модального анализа вес несущих конструкций и элементов мостового полотна был преобразован в узловые массы по направлению поступательных степе-

ней свободы. При подготовке исходных данных использовались сведения, полученные при натурном обследовании длительно эксплуатируемого моста.

С использованием динамической расчетной схемы с помощью блока модального анализа программного комплекса «ЛИРА-САПР 2012 PRO»[14] получены данные о спектре собственных частот и соответствующих им собственных формах свободных колебаний. Для низших 12 тонов спектра несущей конструкции моста они приведены в табл. 1. Схемы деформирования пролетного строения представлены в табл. 2.

Таблица 1

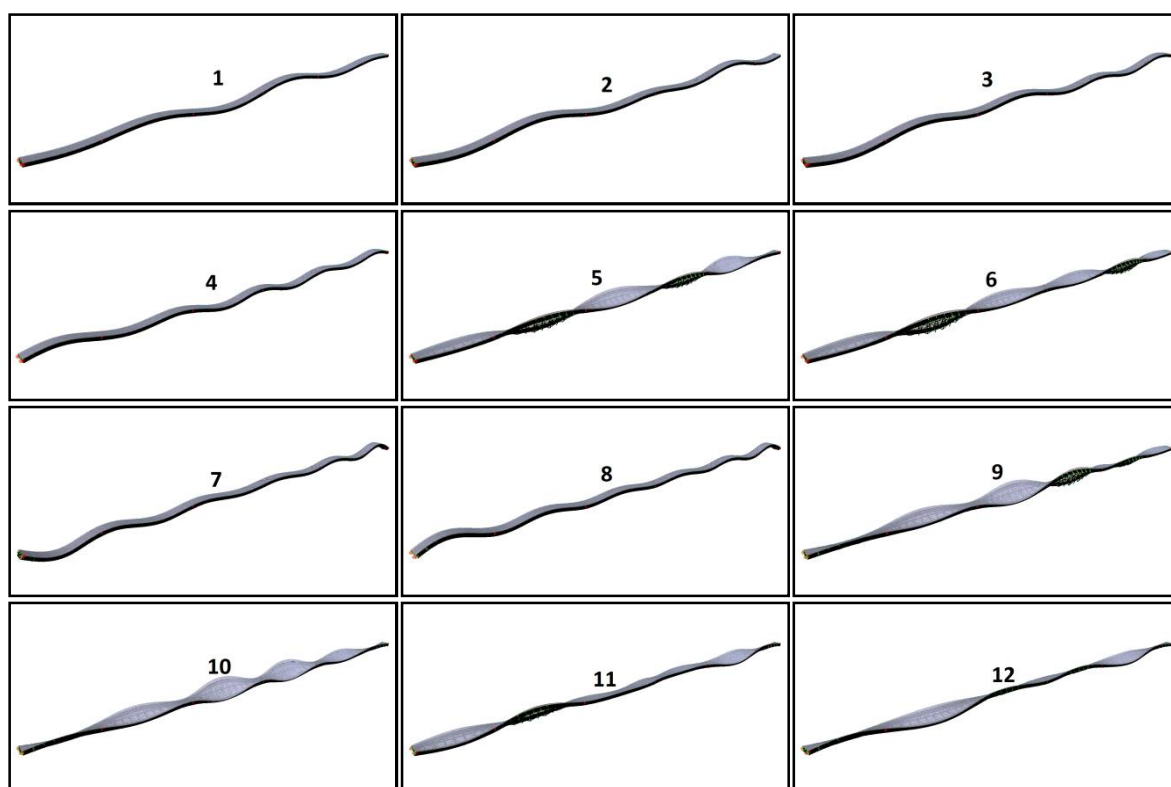
Частоты и описание деформированного состояния главных балок моста

| Номер формы | Период, с | Техническая частота, Гц | Частота, рад/с | Описание деформированного состояния главных балок моста при свободных колебаниях |
|-------------|-----------|-------------------------|----------------|--|
| 1           | 0,8768    | 1,1405                  | 7,1657         | Изгибные колебания   |
| 2           | 0,7090    | 1,4105                  | 8,8622         | Изгибные колебания   |
| 3           | 0,5569    | 1,7957                  | 11,2830        | Изгибные колебания   |
| 4           | 0,4420    | 2,2625                  | 14,2160        | Изгибные колебания   |
| 5           | 0,3816    | 2,6206                  | 16,4660        | Изгибно-крутильные колебания   |
| 6           | 0,3739    | 2,6744                  | 16,8040        | Изгибно-крутильные колебания   |
| 7           | 0,3464    | 2,8867                  | 18,1380        | Изгибные колебания   |
| 8           | 0,3338    | 2,9956                  | 18,8220        | Изгибные колебания   |
| 9           | 0,3279    | 3,0499                  | 19,1630        | Изгибно-крутильные колебания   |
| 10          | 0,2990    | 3,3449                  | 21,0160        | Изгибно-крутильные колебания   |
| 11          | 0,2799    | 3,5728                  | 22,4480        | Изгибно-крутильные колебания   |
| 12          | 0,2691    | 3,7167                  | 23,3530        | Изгибно-крутильные колебания   |

Анализ приведенных в табл. 1 данных о взаимном расположении отдельных тонов в спектре собственных частот рассматриваемого сталежелезобетонного пролетного строения моста приводит к следующим важным для оценки динамических качеств транспортного сооружения выводам:

- в нижнюю зону спектра, включающую первые четыре тона, входят частоты, отвечающие только изгибным колебаниям пролетного строения. При этом гармоники, соответствующие пространственным изгибно-крутильным колебаниям, в этой зоне спектра отсутствуют. Наименьшая частота опасной для целостности конструкции собственной формы с деформациями закручивания находится лишь на пятом месте спектра, что является положительным качеством несущей строительной конструкции.

Трехмерные изображения деформирования ПС по формам собственных колебаний



- отмеченное положительное качество спектра собственных частот сохраняется при выявленном при обследовании непроежном увеличении толщины асфальтобетонного покрытия на проезжей части с 5 см по проекту до 11 см по факту. По нашим оценкам фактические частоты для низших собственных форм отличаются от проектных на 19-12 %, а частоты изгибно-крутильных колебаний не изменяются.

- наряду с отмеченной положительной особенностью спектра выявлена отрицательная особенность, которая состоит в наличии ряда близких кратным частот. Собственные частоты для пятой, шестой, седьмой и восьмой собственных форм отличаются не более, чем на 1-2%. Из динамики мостов известно [18, 20], что при воздействии на мост в диапазоне кратных часто могут возникать продолжительные резонансные колебания;

- указанная отрицательная особенность спектра собственных частот усугубляется близостью частот изгибно-крутильных колебаний для пятого ( $f_5=2,6206$  Гц) и шестого ( $f_6=2,6744$  Гц) тонов и изгибных для седьмого ( $f_7=2,8867$  Гц) и восьмого ( $f_8=2,9956$  Гц) тонов. Опасность этого явления заключается в возникновении смены менее опасных для конструкции изгибных колебаний на более опасные изгибно-крутильные деформации за счет перекачки энергии.

### 3.2. Определение и анализ элементов передаточной матрицы

На заключительном этапе динамического мониторинга выполним расчетное определение оценивающих динамические качества транспортного сооружения элементов передаточной матрицы. Алгоритм расчета построим по описанной в монографии [16] методике для систем с конечным числом степеней свободы.

Колебания линейной системы с  $n$  степенями свободы во временной области описываются матричным дифференциальным уравнением следующего вида:



$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) = P(t), \quad (1)$$

где  $M$  – матрица массы;  $C$  – матрица демпфирования;  $K$  – матрица жесткости;  $u$  – вектор узловых перемещений;  $P$  – вектор внешних сил.

Гармоническое единичное внешнее возмущение в комплексной форме имеет вид:

$$P(t) = \exp(i\bar{\omega}t) = \cos(\bar{\omega}t) + i\sin(\bar{\omega}t), \quad (2)$$

где  $\bar{\omega}$  – круговая частота внешнего единичного гармонического воздействия.

Тогда стационарное решение уравнения движения примет вид:

$$u(t) = H(i\bar{\omega})\exp(i\bar{\omega}t), \quad (3)$$

где комплексная функция  $H(i\bar{\omega}) = (K - \bar{\omega}^2 M + i\bar{\omega}C)^{-1}$  – частотная характеристика линейной системы или комплексная передаточная функция линейной системы (динамическая податливость). Поведение линейной стационарной системы в частотной области описывают с помощью передаточных функций, связывающих реакцию системы с ее возбуждением.

Функция частоты  $A(\bar{\omega})$  называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) линейной системы:

$$A(\bar{\omega}) = \sqrt{\{\operatorname{Re}[H(i\bar{\omega})]\}^2 + \{\operatorname{Im}[H(i\bar{\omega})]\}^2}. \quad (4)$$

Она показывает, какие изменения в амплитуды колебаний линейной системы вносит внешнее динамическое воздействие на каждой частоте.

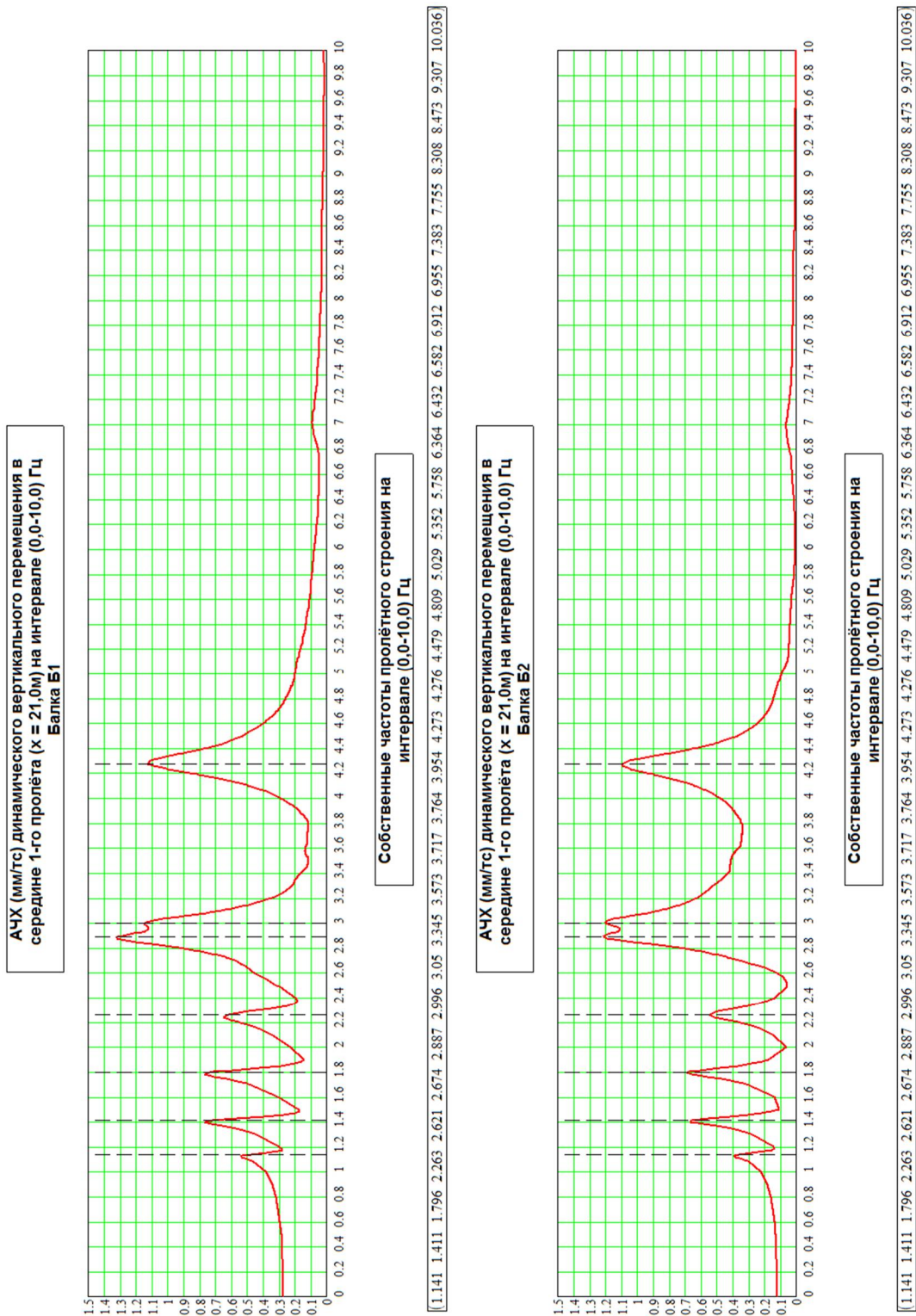
Функция частоты  $\varphi(\bar{\omega})$  называется фазово-частотной характеристикой (ФЧХ) линейной системы:

$$\varphi(\bar{\omega}) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[H(i\bar{\omega})]}{\operatorname{Re}[H(i\bar{\omega})]}. \quad (5)$$

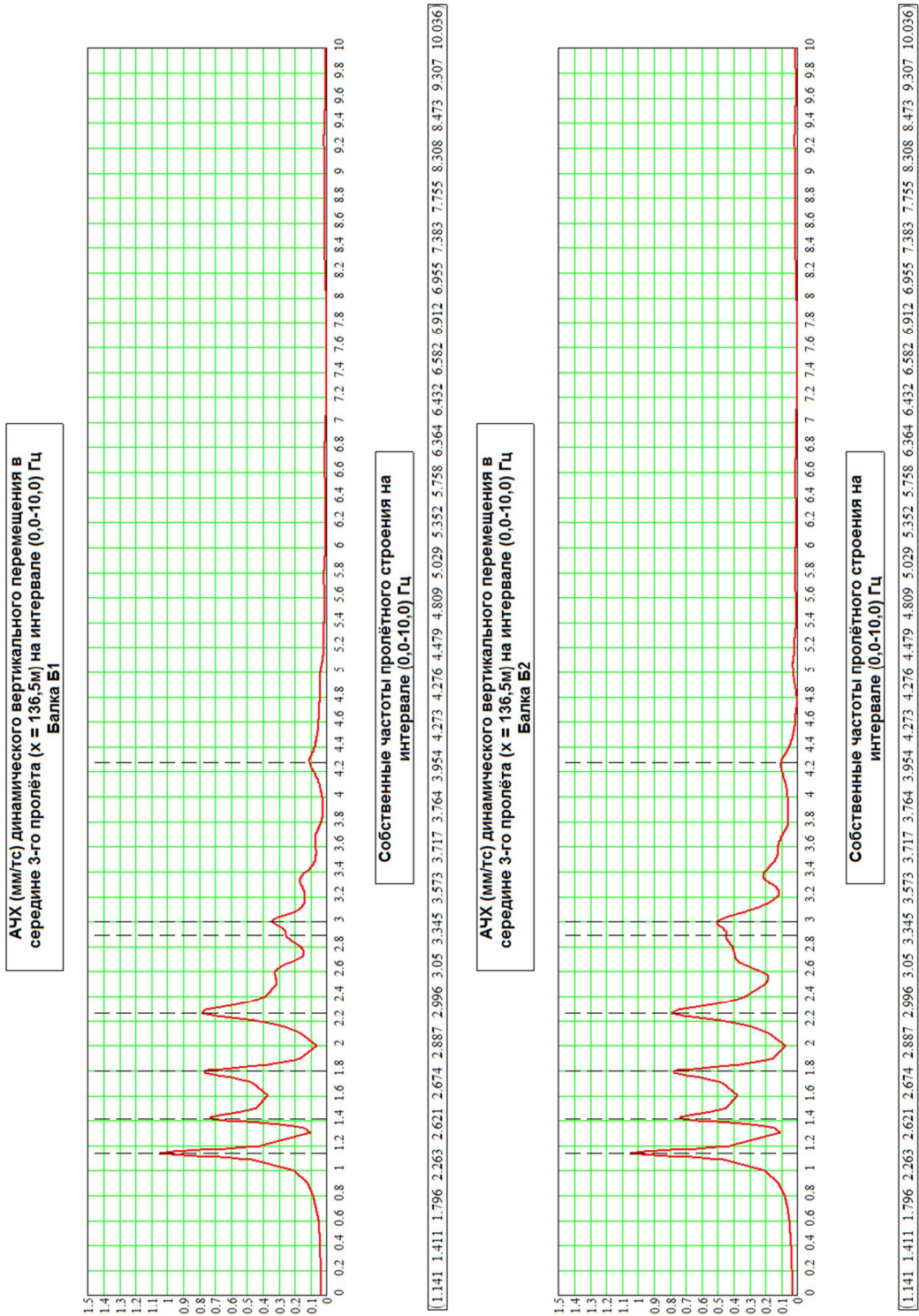
Эта характеристика показывает, какой фазовый сдвиг приобретает колебание линейной системы в зависимости от частоты внешнего динамического воздействия.

В связи с тем, что для оценки динамических качеств мостовых сооружений на автомобильных дорогах основное значение имеет амплитудно-частотная характеристика, здесь ограничимся изучением этих параметров для рассматриваемого моста через реку Сысола.

Для проведения расчетов воспользуемся блоком частотного анализа, имеющимся в вычислительно комплексе «ЛИРА-САПР 2013 PRO» [14], в котором реализован описанный выше алгоритм расчета амплитудно-частотных характеристик для заданных характерных сечений пролетного строения моста и наиболее значимых мест расположения внешнего воздействия. При этом значения амплитудно-частотных характеристик  $A(\bar{\omega})$ , которые имеют физический смысл передаточных функций, вычисляются для дискретных значений частот, принимаемых с заданным шагом. Результаты выполненных расчетов передаточной матрицы по описанному выше алгоритму для рассматриваемого пятипролетного моста со сталежелезобетонным пролетным строением для характерных сечений представлены на рис. 5-6.



**Рис. 5.** АЧХ (мм/с) вертикального перемещения главных балок Б1 и Б2 в середине 1-го пролёта моста при расположении единичной гармонической нагрузки над балкой Б1 в середине 1-го пролёта



**Рис. 6.** АЧХ (мм/тс) вертикального перемещения главных балок Б1 и Б2 в середине 3-го пролёта моста при расположении единичной гармонической нагрузки над балкой Б1 в середине 1-го пролёта

Получаемые в расчетах элементы передаточной матрицы, которые охватывают широкий набор возможных характерных сечений моста, обладают следующими особенностями:

- амплитудно-частотные характеристики представляют собой конечный набор ярко выраженных участков с повышенными амплитудами, которые в основном располагаются вблизи значений собственных частот свободных колебаний неразрезного пролетного строения;
- количество локальных участков с повышенными амплитудами для каждой передаточной функции является различным в зависимости от взаимного расположения места приложения единичного гармонического силового возмущения и рассматриваемого сечения изучаемой ответной реакции;
- вид полученной в расчетах передаточной функции позволяет путем сопоставления с найденным ранее спектром собственных частот пролетного строения определить конкретные собственные формы, которые являются наиболее значимыми при создании динамического эффекта во время проезда автомобилей по мосту. Отсюда также следует оценка значимости неровностей, появляющихся при длительной эксплуатации;
- применение динамической диагностики на этапе проектирования мостового сооружения с построением передаточных функций позволяет предвидеть возможность резонансных колебаний при эксплуатации. Это можно наблюдать на рис. 5, где на частоте около 3,0 Гц передаточная функция показывает максимальные амплитуды колебаний. Именно в этом диапазоне в спектре собственных частот имеются две близкие к кратным собственные формы с частотами  $f_8=2.99\text{Гц}$   $f_9=3.04\text{Гц}$  (см. табл. 1).

### **Выводы**

1. Выполненные исследования показывают, что рекомендуемый новым нормативным документом СП 274.1325800.2016 [14] динамический мониторинг мостовых сооружений может эффективно применяться как при проектировании и строительстве, так и при эксплуатации для установления безопасных режимов транспорта. Наиболее полезно применение динамического мониторинга для неразрезных металлических или сталежелезобетонных пролетных строений, обладающих плотным спектром собственных частот и для которых возможны и часто наблюдаются резонансные режимы колебаний.

2. Динамический мониторинг по трехэтапной схеме с проведением динамических испытаний, оценкой динамических параметров транспортного сооружения и изучением передаточной матрицы моста обладает достоинствами и недостатками. К достоинствам относятся:

- расширение учитываемых при проектировании и содержании мостовых сооружений динамических параметров;
- увеличение важности динамических испытаний при приемке и на этапе эксплуатации.

Недостатком являются трудности, возникающие при использовании передаточных функций, не учитывающих наличие неровностей на проезжей части, а также жесткостные и инерционные параметры автотранспортных средств.

### **Библиографический список**

1. Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты // ТрудыМИИТ. – М.: Трансжелдоиздат, 1950. – Вып 74. – С.40-58
2. Киселев В.А. Динамические линии влияния перемещений и внутренних сил в балках рамах и плитах простых и на упругом основании от груза, движущегося с

- равномерной скоростью // Труды МАДИ. – М.: Автотрансиздат, 1956. – Вып. 18. – С. 139-171.
3. Мучников В.М. Некоторые методы расчета упругих систем на колебания при подвижной нагрузке. – М. Л.: Гос. изд. лит. по строит. и архит., 1953. – 112 с.
  4. Фрыба Л. Динамический расчет пролетных строений мостов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1964. – №2. – С. 24-29.
  5. Моргаевский А.Б. О влиянии рессор на динамическую величину динамического эффекта от подвижной нагрузки // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1965. – Вып. XIV. – С. 65-71.
  6. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов. – М.: Транспорт, 1976. – 198 с.
  7. Ананьин А.И., Барченков А.Г., Сафронов В.С. Динамика автодорожных мостов // Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций: справочник проектировщика. – М., 1986. – С. 327 – 348.
  8. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. – Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 1983. – 196 с.
  9. Шапошников Н.Н., Кашаев А.К., Бабаев В.Б. Расчет конструкций на действие подвижной нагрузки с использованием метода конечных элементов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1986. – № 1. – С. 50-54.
  10. Муравский Г.Б., Поволоцкая М. Ф. К вопросу о действии подвижной нагрузки на деформируемые системы // Строительная механика и расчет сооружений. – 1988. – №3. – С. 38-43.
  11. Архипенко Ю.В. Методика расчета динамического взаимодействия подвижных нагрузок с мостами с применением программных конечно-элементных комплексов: дисс. ... канд. техн. наук. – М., 2005.
  12. Гриднев С.Ю. Развитие динамического расчета автодорожных мостов на подвижную нагрузку: дис. ... д-ра техн. наук. – Воронеж, 2013.
  13. СП 274.1325800.2016. Мосты. Мониторинг технического состояния. – М.: Стандартинформ, 2017 – 40 с.
  14. Программный комплекс «ЛИРА-САПР 2013 PRO» и специализированная расчетно-графическая система «ЛИРА-САПР 2013 Мост». Сертификат соответствия №РОСС RU.СП15.Н006.
  15. Бате К., Вилсон Е. Численные метода анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
  16. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
  17. Сафронов В.С., Антипов А.В. Экспериментально-расчетный анализ резонансных колебаний сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста// Строительная механика и конструкции. - 2012. - № 2(5). - С. 52-59.
  18. Сафронов В.С., Антипов А.В. Современные алгоритмы динамического расчета стержневых систем на подвижную подрессоренную нагрузку // Строительная механика и конструкции. - 2018. – № 2(18). - С. 81-92.
  19. Сафронов В.С., Антипов А.В. Колебания плитного железобетонного моста при проезде трехосного автомобиля // Транспортные сооружения. - 2019. – Т.6. – №2. - С. 11.
  20. Сафронов В.С., Антипов А.В. Современные алгоритмы динамического расчета стержневых систем на подвижную подрессоренную нагрузку // Строительная механика и конструкции. – 2013. – № 1(6). – С. 93-103.

21. Сафронов В.С., Доманов Д.И. Применение теории риска для оценки вероятности трещинообразования при стесненном кручении железобетонных мостовых балок // Механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов: сб. ст. по материалам междунар. науч. конф. – Воронеж, 2013. – Т. 2. – С. 31-38.
22. Сафронов В.С., Черников А.В. Деформационный расчет составных изгибаемых железобетонных стержневых элементов // Строительная механика и конструкции. – 2018. – Вып. 3(18). – С. 81-92.

#### References

1. Bolotin V.V. On the effect of a moving load on bridges. M.: Transzheldoizdat, 1950. Proceedings of MIIT. Issue 74. Pp. 40-58.
2. Kiselev V.A. Dynamic lines of influence of displacements and internal forces in beams, frames and plates, simple and on an elastic base from a load moving at a uniform speed. M.: Avtotransizdat, 1956. Proceedings of MADI. Issue 18. Pp. 139-171.
3. Muchnikov V.M. Some methods of calculating elastic systems for vibrations under a moving load. M., L.: State. Ed. Lit.of Build. and Architect., 1953. 112 p.
4. Fryba L. Dynamic calculation of bridge spans. Structural Mechanics and Calculation of Structures. M. 1964. No. 2. Pp. 24-29.
5. Morgaevsky A.B. About the influence of springs on the dynamic value of the dynamic effect of a moving load. In the book: Research on the theory of structures. Issue XIV. M.: Stroyizdat, 1965. Pp. 65-71.
6. Barchenkov A.G. Dynamic calculation of road bridges. M.: Transport, 1976. 198 p.
7. Ananin A.I., Barchenkov A.G., Safronov V.S. Dynamics of road bridges In the book: Dynamic calculation of special engineering structures and structures. Designer Handbook. Moscow, 1986. Pp. 327-348.
8. Safronov V.S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges for a moving load. Voronezh: Voronezh State University Publishing, 1983. 196 p.
9. Shaposhnikov N.N., Kashaev A.K., Babaev V.B. Calculation of structures for the action of a moving load using the finite element method. Construction, Mechanics and Calculation of Structures. 1986. No. 1. Pp. 50-54.
10. Muravsky G.B., Povolotskaya M.F. On the question of the action of a mobile load on deformable systems. Structural Mechanics and Calculation of Structures. 1988. No. 3. Pp. 38-43.
11. Archipenko Yu.V. Methodology for calculating the dynamic interaction of movable loads with bridges with the use of software finite element complexes. Dissertation for the Degree of Candidate of Technical Sciences. TsNIIS. Moscow. 2005.
12. Gridnev S.Yu. Development of dynamic calculation of road bridges for a moving load. Dissertation for the Degree of Doctor of Technical Sciences. VGASU. Voronezh. 2013.
13. 13.Set of Rules 274.1325800.2016. Bridges. Monitoring of Technical Conditions. M.: Standartinform, 2017. 40 p.
14. Software complex "LIRA-SAPR 2013 PRO" and specialized computational and graphic system "LIRA-SAPR 2013 Most". Certificate of Conformity No. ROSS RU.SP15.N006
15. Bate K., Wilson E. Numerical methods of analysis and the method of finite elements. M.: Stroyizdat, 1982. 448 p.
16. Clough R., Penzien J. Dynamics of structures. Moscow: Stroyizdat, 1979. 320 p.
17. Safronov V.S., Antipov A.V. Experimental and computational analysis of resonant vibrations of a steel-reinforced concrete superstructure of a highway bridge. Structural Mechanics and Constructions. 2012. Issue 2(5). Pp. 52-59.

18. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern algorithms for dynamic calculation of rod systems for a movable sprung load. *Structural Mechanics and Constructions*. 2018. Issue 2(18). Pp. 81-92.
19. Safronov V.S., Antipov A.V. Vibrations of a slab reinforced concrete bridge when driving a three-axle vehicle. *Transport structures*. 2019. Vol. 6. No. 2. P. 11.
20. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern algorithms for dynamic calculation of rod systems for a movable sprung load. *Structural Mechanics and Constructions*. 2013. Issue 1(6). Pp. 93-103.
21. Safronov V.S., Domanov D.I. Application of risk theory to assess the probability of cracking under constrained torsion of reinforced concrete bridge beams. *Proceedings of International Scientific Conference: Fracture Mechanics of Concrete, Reinforced Concrete and Other Construction Materials*. 2013. Vol. 2. Pp. 31-38.
22. Safronov V.S., Chernikov A.V. Deformation analysis of composite flexible reinforced concrete bar elements. *Structural Mechanics and Constructions*. 2018. Issue. 3(18). Pp. 81-92.

## DEVELOPMENT AND APPROVAL OF THE ASSESSMENT METHOD OF DYNAMIC QUALITIES OF A ROAD BRIDGE

V. S. Safronov<sup>1</sup>, A. V. Antipov<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1</sup>  
Dortransproekt<sup>2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup>Dr. of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

<sup>2</sup>Senior Engineer, Tel.: +7(910)7329044, e-mail: [dron\\_a77@mail.ru](mailto:dron_a77@mail.ru)

---

A critical analysis of the current state of the theory of the dynamic action of moving vehicles on bridge structures is given. It is indicated that, despite numerous studies of this problem, the dynamic qualities of the bridges designed and operated at present on motor roads differ from the design indicators both after the end of construction and as they wear out during operation. To eliminate this drawback, in recent years, it has been proposed to perform continuous or periodic dynamic monitoring, which makes it possible to record the change in actual dynamic parameters over time, including frequencies, attenuation parameters, and transfer functions. To track them, full-scale dynamic tests are carried out with subsequent analysis in order to assess the reaction of structures to the passage of vehicles. Currently, there are no approved methods for dynamic monitoring of bridges with different bearing systems.

A dynamic monitoring technique is proposed and tested on a long-term operating road bridge with a continuous steel-reinforced concrete superstructure. The data of field dynamic tests, which are investigated by the methods of statistic analysis, are given. The analysis of the dynamic characteristics of the bridge is carried out using a finite element spatial model of the superstructure.

The most characteristic elements of the transfer matrix obtained with the help of the block of frequency analysis of the computing complex, which estimates the dynamic qualities of the superstructure, are given.

**Keywords:** road bridge, continuous steel-reinforced concrete superstructure, dynamic monitoring, natural vibrations, a spectrum of natural frequencies, frequency analysis unit of a computer complex, typical transfer functions.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ СТОЕЧНО-РИГЕЛЬНОЙ ОПОРЫ ПУТЕПРОВОДА С УЧЁТОМ НЕУПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ МАТЕРИАЛА

В. С. Варнавский<sup>1</sup>, Г. Е. Габриелян<sup>2</sup>, А. С. Малыхина<sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

ООО «ГеоТехТранс»<sup>3</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(473)2715230, e-mail: mailVVS@inbox.ru

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(473)2715230, e-mail: grayr2010@rambler.ru

<sup>3</sup>Магистр, инженер, e-mail: nastya.malyhina23@gmail.com

---

В настоящее время в результате заметного возрастания транспортных нагрузок на мостовые сооружения актуальной становится задача исследования способности конструкции работать в экстремальных условиях эксплуатации. Более точную оценку несущей способности железобетонных мостовых конструкций можно получить за счёт учёта действительной диаграммы работы материала.

Данная работа посвящена развитию эффективного метода расчёта железобетонной рамной опоры мостового сооружения в условиях неупругого деформирования стали и бетона. Применение программно-вычислительного комплекса ЛИРА позволяет сделать расчёт технологичным и удобным для использования в повседневной инженерной практике.

Решена задача определения несущей способности стоечно-ригельной опоры путепровода на совместное действие постоянных и временной подвижной нагрузок на основе принципа предельного равновесия. Дана верхняя оценка максимально возможной временной нагрузки, возникающей в исключительных условиях эксплуатации.

**Ключевые слова:** мостовое сооружение, железобетонная рамная опора, несущая способность, предельное равновесие, программный комплекс ЛИРА

### Введение

В настоящее время согласно нормативным документам расчёт на прочность железобетонных стоечно-ригельных (рамных) опор мостовых сооружений на статическую и динамическую нагрузки выполняется по первому предельному состоянию. При этом считается, что стальная арматура деформируется линейно-упруго, а для бетона применяется жёстко-пластическая диаграмма деформирования. В то же время арматурные строительные стали обладают пластическими свойствами, а фактическая диаграмма деформирования бетона является нелинейной, в связи с чем нормативные документы рекомендуют при наличии возможности принимать во внимание эти свойства в расчётах.

Данная работа посвящена расчётному анализу, нацеленному на определение предельной несущей способности конструкции опоры железобетонного мостового сооружения (путепровода). Расчёт выполняется на максимальную возможную нагрузку, возникающую в экстремальных условиях эксплуатации. В данной работе для моделирования деформирования стали применяется упругопластическая диаграмма, а для бетона – физически нелинейная неупругая диаграмма.

Предельное состояние конструкции определяется на основе использования принципа предельного равновесия, в котором предполагается появление пластических шарниров [1]. В



работе применяется поэтапный метод расчёта, дающий возможность изучить деформирование железобетонной стоечно-ригельной опоры в ходе прогрессирующего разрушения. При этом моделируется процесс последовательного образования пластических шарниров. Такой подход в настоящее время становится более популярным [2]. Здесь для железобетонной рамы развиваются результаты, полученные ранее для стальных рамных каркасов [3-7].

Эта задача является актуальной для оценки резервов несущей способности конструкции и её экономичности. Прежде всего это относится к статически неопределимым стержневым системам, обладающим существенным запасом несущей способности, связанным с пластическими свойствами материала.

В России широко используется в расчётах строительных конструкций программно-вычислительный комплекс ЛИРА. В данной работе на основе применения ПК ЛИРА выполняется расчётный анализ распределения усилий в железобетонной стоечно-ригельной опоре автодорожного мостового сооружения (а именно путепровода) с учётом неупругих деформаций материала.

Основными целями представленной работы являются:

- построение конечно-элементной схемы дискретизации железобетонной рамной опоры и выполнение пространственного и плоского расчётов на основное сочетание нагрузок по первому предельному состоянию на прочность;
- определение несущей способности железобетонной рамной опоры в рамках плоской и пространственной задачи с учётом неупругого деформирования материала.

## 1. Расчет опоры путепровода на прочность по первому предельному состоянию

### 1.1. Характеристики путепровода

Для последующего сравнительного анализа результатов традиционного инженерного расчёта и упругопластического расчёта первоначально выполняется расчёт стоечно-ригельной опоры путепровода на прочность по первому предельному состоянию. В ходе расчёта определяются внутренние усилия в элементах опоры и производится подбор их сечений.

В качестве объекта исследования был выбран путепровод, расположенный на границе Грибановского и Борисоглебского муниципальных районов Воронежской области в составе транспортной развязки на автомобильной дороге II категории с четырьмя полосами движения.

Продольная схема путепровода (18 м+2х24 м+18 м) приведена на рис. 1.

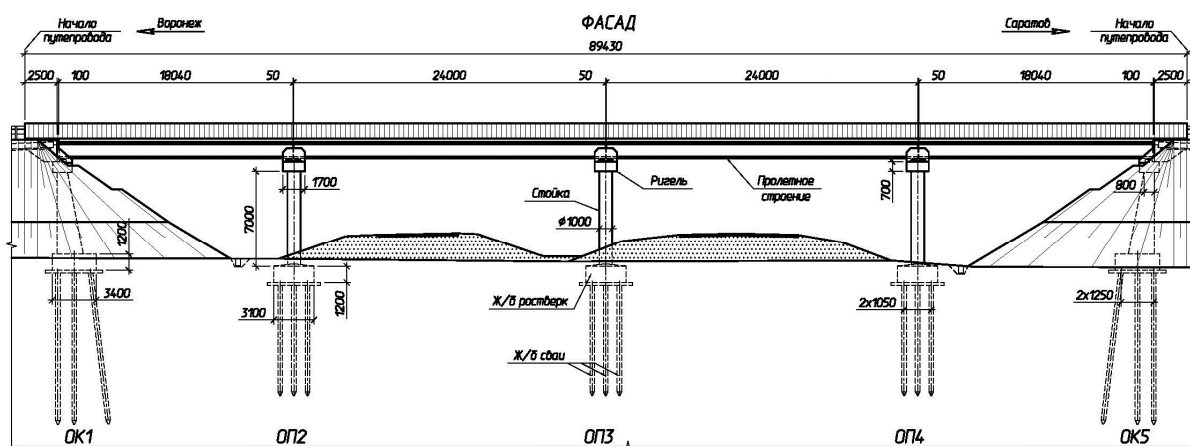


Рис. 1. Продольная схема путепровода

Крайние опоры ОК1 и ОК5 индивидуального проектирования козлового типа стоечные на свайном ростверке.

Промежуточные опоры ОП2-ОП4 сооружения выполнены стоечными однорядными индивидуального проектирования на свайном основании. В направлении поперек путепровода опора под каждое направление состоит из 5 круглых железобетонных стоек диаметром 1,0 м, установленных с шагом 3,5 м по плите ростверка и объединенных поверху монолитным ригелем длиной 18,5 м, сечением 0,7x1,7 м.

Пролетные строения длиной 18,0 и 24,0 метров в поперечном сечении состоят из восьми (6 средних и 2 крайних) предварительно напряжённых балок двутаврового сечения. Балки длиной 18,0 (24,0) м (расчетный пролет – 17,4 (23,4) м) и высотой 1,23 м установлены с шагом 2,24...2,28 м, что обеспечивает эксплуатацию пролетных строений под нагрузками А14 и Н14 (НК-102,8).

## 1.2. Нагрузки на промежуточную опору

Для расчёта и дальнейшего исследования была выбрана промежуточная опора ОП4, расположенная между пролётами длиной 24 м и 18 м.

На рис. 2 приведена расчетная схема промежуточной опоры ОП4 с указанием геометрических размеров и действующих нагрузок.

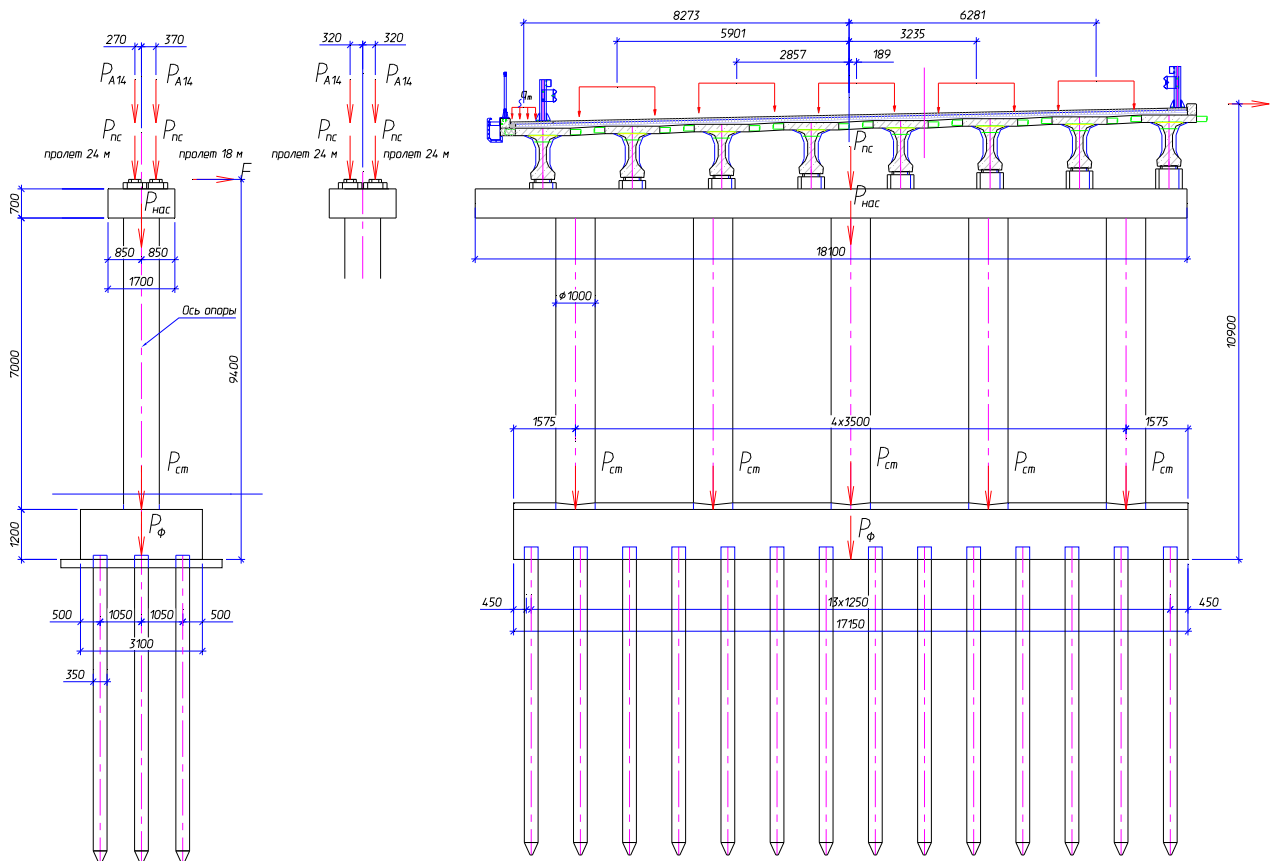


Рис. 2. Расчетная схема промежуточной опоры

Схема загрузки пролетного строения нагрузкой А14 совместно с пешеходной нагрузкой принята согласно ГОСТ 32960-2014 «Дороги автомобильные общего пользования. Нормативные нагрузки, расчетные схемы нагружения».

В таблице содержатся величины нормативных и расчетных нагрузок, действующих на опору, коэффициентов надежности  $\gamma_f$  и динамических коэффициентов  $1+\mu$

#### Величины нормативных и расчетных нагрузок

| Наименование нагрузок  | Обозначения | Нормативная нагрузка, т | $\gamma_f$ | $1+\mu$ | Расчетная нагрузка, т |
|--|-------------|-------------------------|------------|---------|-----------------------|
| <b>Опора ОП2, ОП4</b>  |             |                         |            |         |                       |
| Вес мостового полотна, балок и ограждения с <u>половины</u> пролета длиной L=18,0 м            | $P_{nc}$    | 403,5/2                 | 1,1-1,5    |         | 481,6/2               |
| Вес мостового полотна, балок и ограждения с <u>половины</u> пролета длиной L=24,0 м            | $P_{nc}$    | 541,1/2                 | 1,1-1,5    |         | 645,6/2               |
| Вес насадки  | $P_{нас}$   | 58,4                    | 1,1        |         | 64,2                  |
| Вес стоек  | $P_{ст}$    | 13,8x5=69,0             | 1,1        |         | 15,2x5=76,0           |
| Вес фундамента и грунта на свесах 3,1x17,4x0,5x1,8=48,6 т                                      | $P_{ф}$     | 160,4+48,6=209,0        | 1,1-1,2    |         | 234,8                 |
| Временная нагрузка А14: опорное давление на промежуточную опору ОП (загружен 1 пролет 24 м)    | $P_{А14}$   | 111,4                   | 1,25-1,5   | 1,0-1,3 | 186,6                 |
| Временная нагрузка А14: опорное давление на промежуточную опору ОП (загружены 2 пролета 18+24) | $P_{А14}$   | 143,9                   | 1,25-1,5   | 1,0-1,3 | 227,1                 |
| Временная нагрузка НК-102,8  | $P_{нк}$    | 114,6                   | 1,1        |         | 126,1                 |
| Поперечный удар  | $H$         | 11,8                    | 1,2        | -       | 14,2                  |
| Тормозная нагрузка на опору  | $F$         | 35,8                    | 1,25       | -       | 44,8                  |
| Ветровая нагрузка поперек опоры  | $W$         | 3,2                     | 1,40       | -       | 4,5                   |
| Вес мостового полотна, балок и ограждения с <u>половины</u> пролета длиной L=24,0 м            | $P_{nc}$    | 541,1/2                 | 1,1-1,5    |         | 645,6/2               |
| Вес насадки  | $P_{нас}$   | 58,4                    | 1,1        |         | 64,2                  |

### 1.3. Результаты определения усилий для промежуточной опоры

Расчетная схема для постоянных нагрузок от собственного веса опоры и пролетных строений показана на рис. 3. Расчетная схема для временной подвижной нагрузки А14 показана на рис. 4.

Ниже, на рис. 5-7, представлены результаты определения эпюр усилий продольных сил N и изгибающих моментов  $M_y$ , изгибающих моментов  $M_z$ . Изгибающий момент  $M_y$  действует в плоскости опоры, а изгибающий момент  $M_z$  действует в плоскости, перпендикулярной плоскости опоры.

По результатам определения усилий в опоре было подобрано армирование ригеля и стоек.

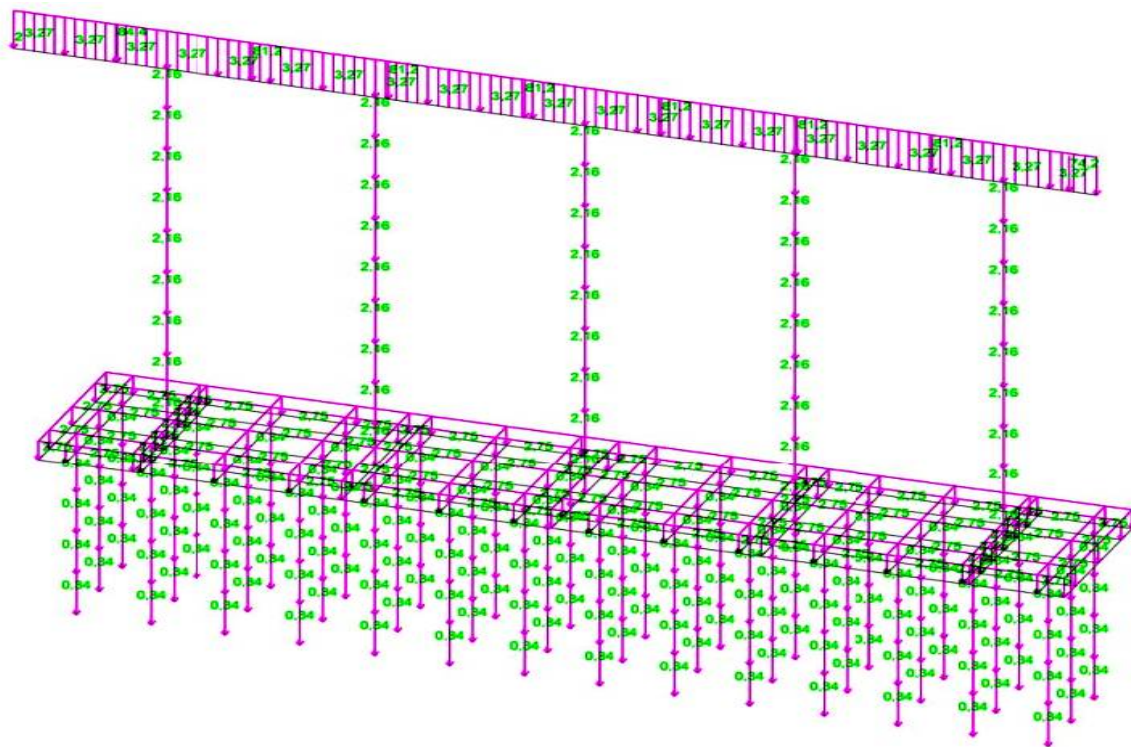


Рис. 3. Расчетная схема для постоянных нагрузок от собственного веса опоры и пролетных строений

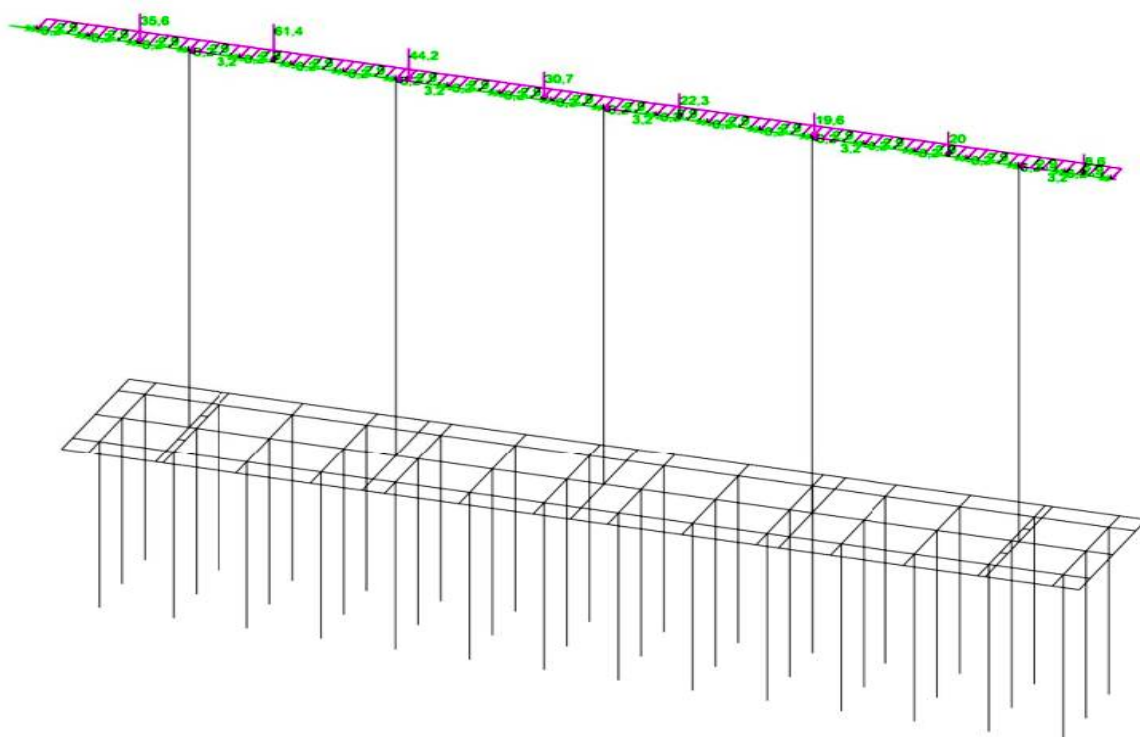


Рис. 4. Расчетная схема для временной подвижной нагрузки А14

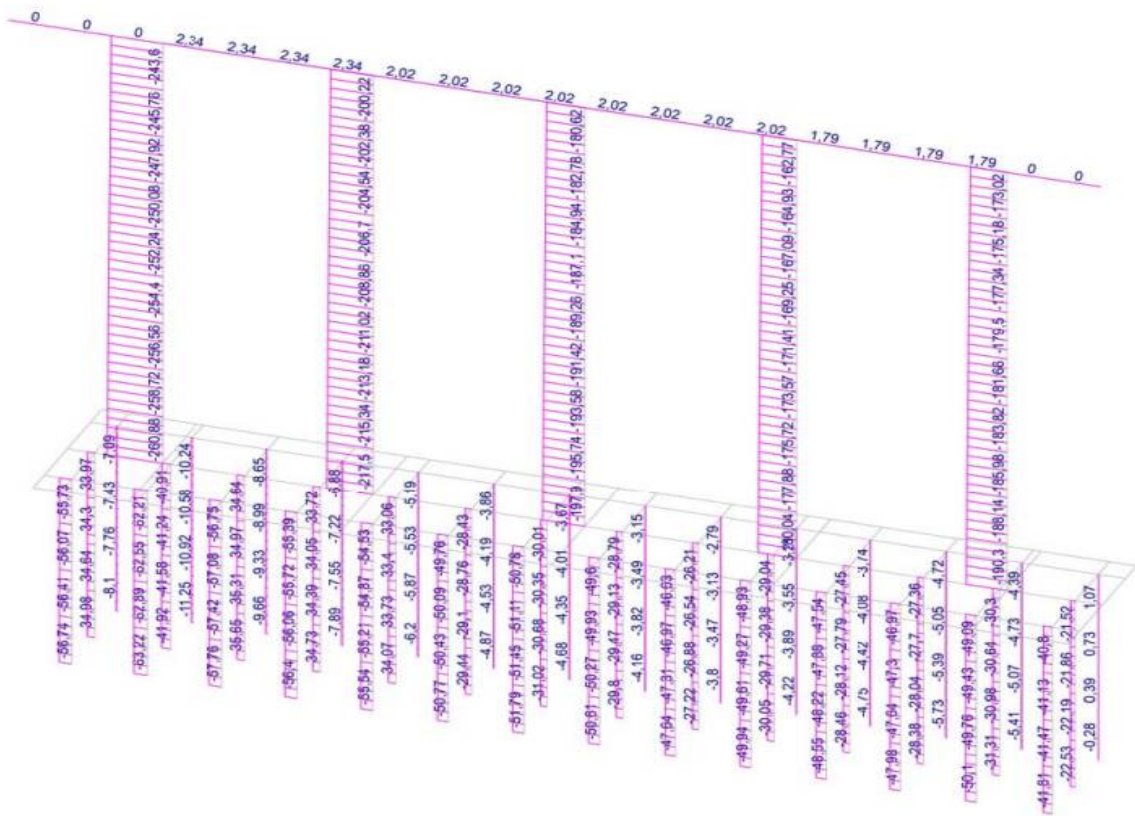


Рис. 5. Эпюра продольных сил  $N$  от постоянной и временной нагрузки  $A_{14}$ , т

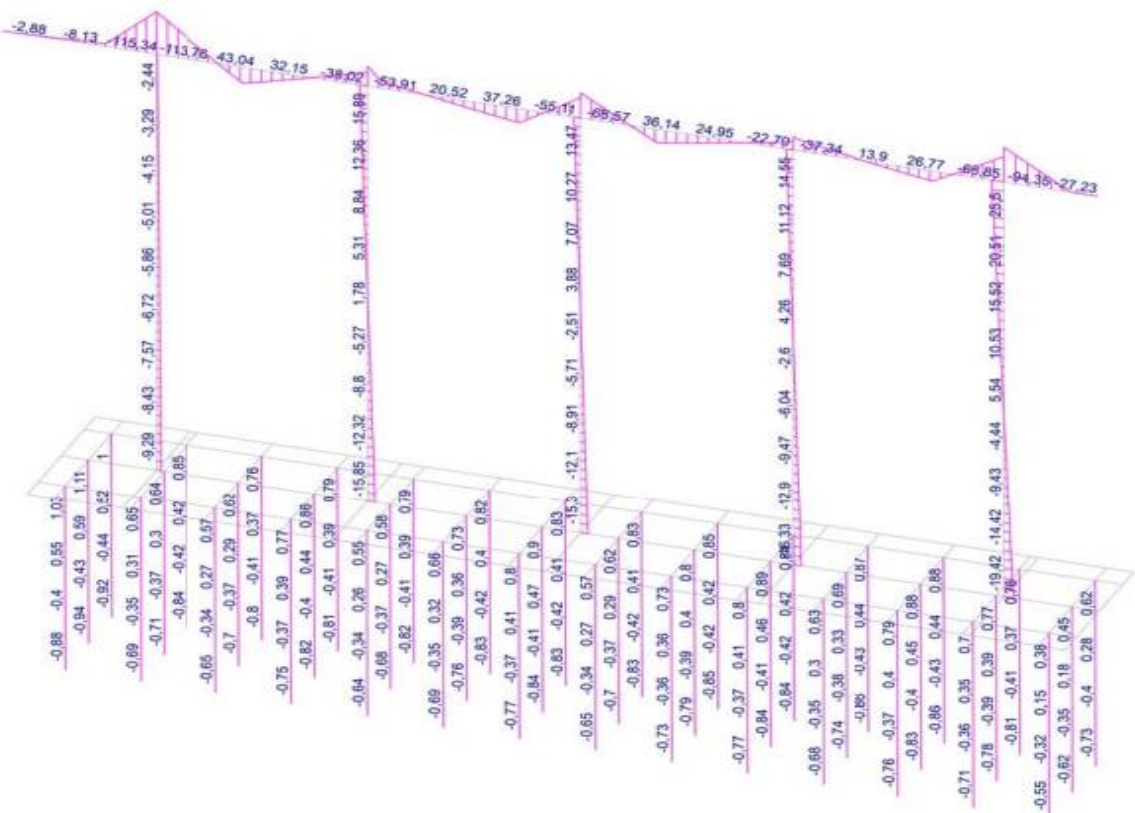


Рис. 6. Эпюра изгибающих моментов  $M_u$  от постоянной и временной нагрузки  $A_{14}$ , т\*м

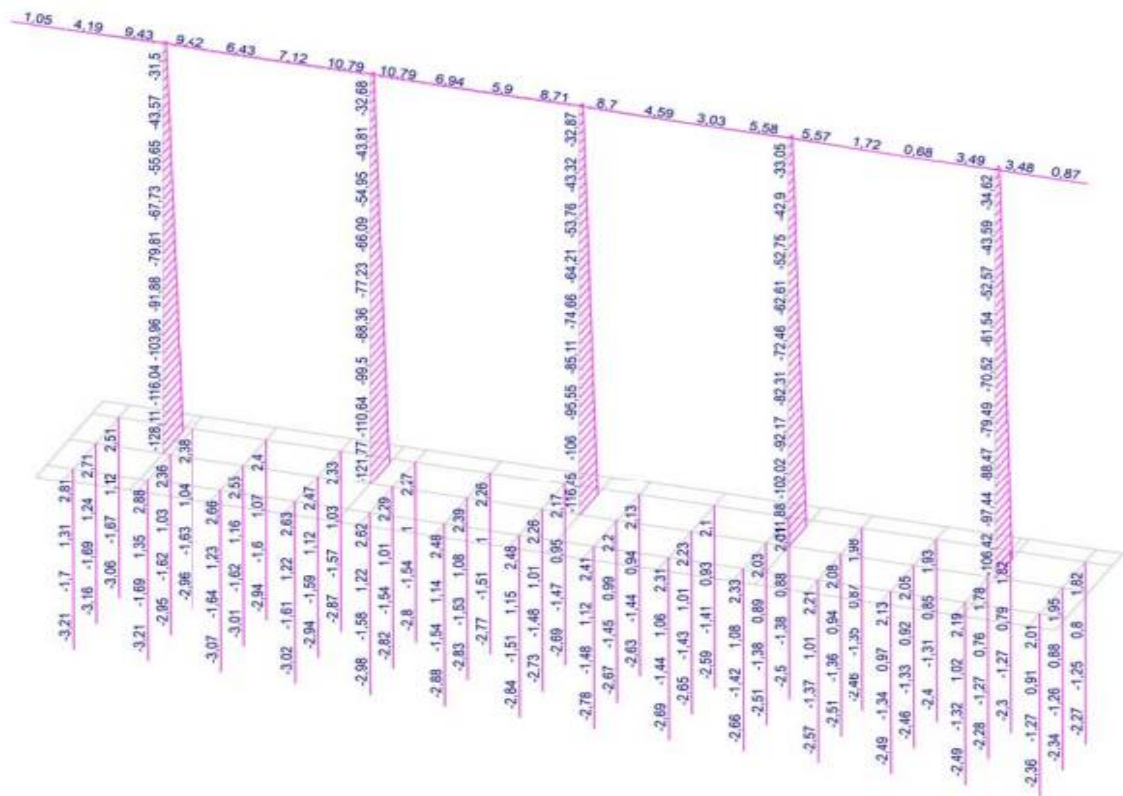


Рис. 7. Эпюры изгибающих моментов  $M_z$  от постоянной и временной нагрузки А14, т\*м

## 2. Определение несущей способности железобетонной рамной опоры путепровода с учётом неупругого деформирования материала

Вторая часть представленной работы посвящена определению несущей способности железобетонной стоечно-ригельной промежуточной опоры путепровода с учётом неупругих деформаций стали и бетона. В дальнейшем такой расчёт будем называть упругопластическим.

Расчёт указанной опоры согласно нормативным документам по первому предельному состоянию на прочность, выполненный в первой части, будем называть для краткости инженерным.

Цель упругопластического расчёта – нахождение предельной несущей способности для всей железобетонной конструкции или отдельной её части при воздействии статической постоянной и временной подвижной нагрузок. Используется критерий разрушения на основе принципа предельного равновесия. Соответственно считается, что железобетонная конструкция достигает предельного состояния в момент превращения её в механизм за счёт появления в ней достаточного количества пластических шарниров. [8,9]. Все расчёты выполняются с помощью программно-вычислительного комплекса ЛИРА.

На основе инженерного расчёта усилий было подобрано армирование поперечных сечений ригеля и стоек (колонн) промежуточной опоры. Размеры сечения и схема армирования показаны на рис. 8.

Железобетонный ригель сечением 0,7x1,7 м выполнен из бетона класса В25. Армирование ригеля выполнено 14-ю арматурными каркасами с рабочей арматурой периодического профиля Ø28 (14 рабочих стержней сверху и 14 снизу). При назначении жесткости сечения ригеля в программном комплексе ЛИРА-САПР арматура была задана 7-ю каркасами (7 рабочих стержней сверху и 7 снизу), с площадью поперечного сечения арматуры равной удвоенной площади стержня Ø28. Таким образом была сохранена площадь поперечного сечения арматуры в пересчете на 1 погонный метр.

Железобетонные стойки диаметром 1,0 м выполнены из бетона класса В25. Армирование выполнено 24-мя стержнями арматуры периодического профиля Ø28, расположенными по окружности. При назначении жесткости стойки расположение арматуры и количество стержней не менялось.

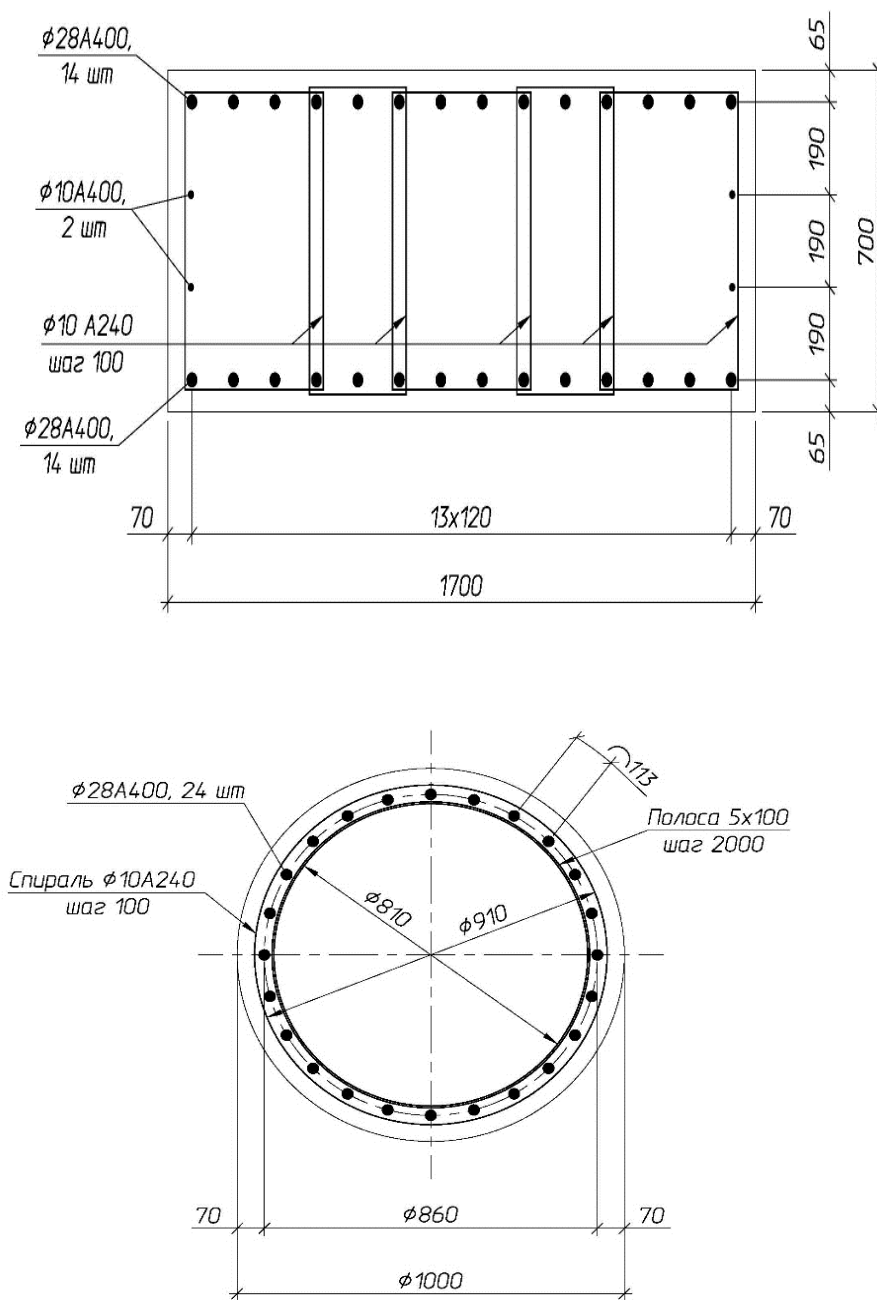


Рис. 8. Схема армирования ригеля и стойки

Для упрощения расчётной схемы в упругопластическом расчёте железобетонный ростверк заменен в месте сопряжения со стойками связями, ограничивающими перемещения и углы поворота сечения стойки (жесткое защемление).

Расчёт производился на совместное действие постоянной нагрузки от собственного веса конструкции и временной подвижной нагрузки А14. Расчётная временная нагрузка для инженерного расчета является первоначальной для упругопластического расчёта. При этом





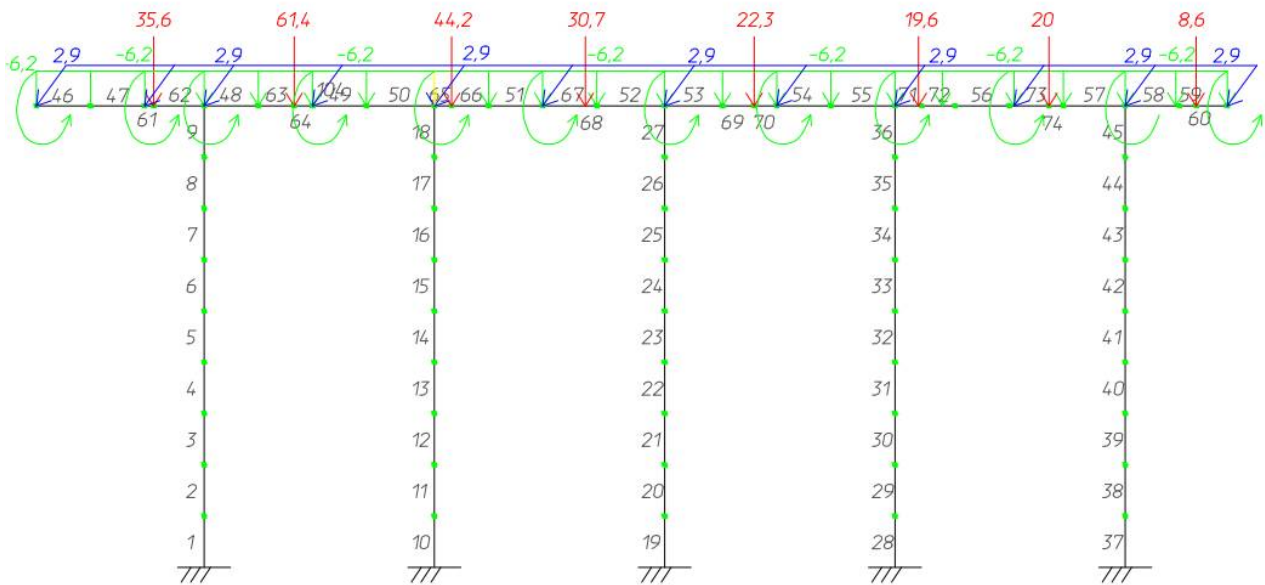


Рис. 10. Расчётная схема для временной подвижной нагрузки А14

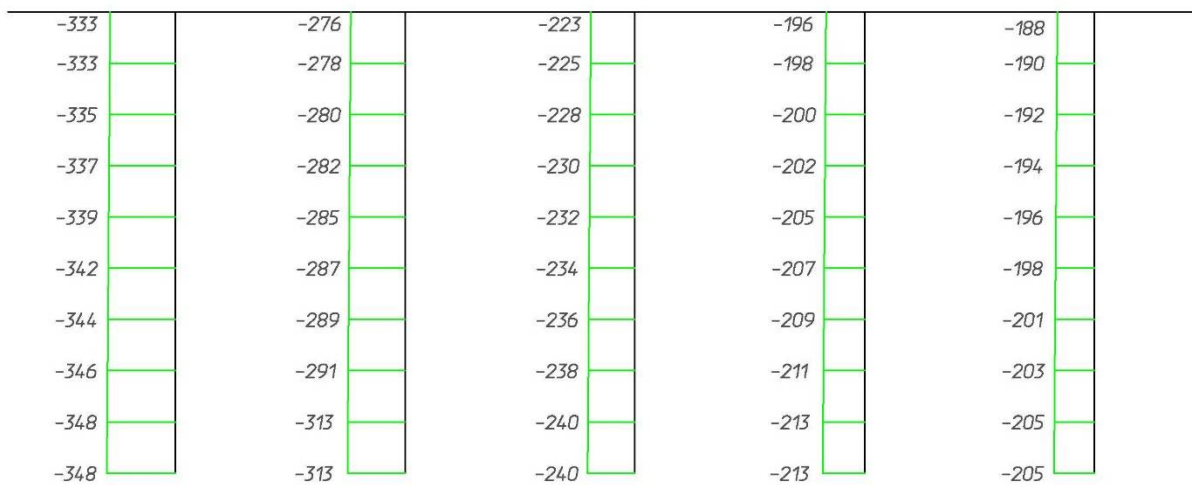
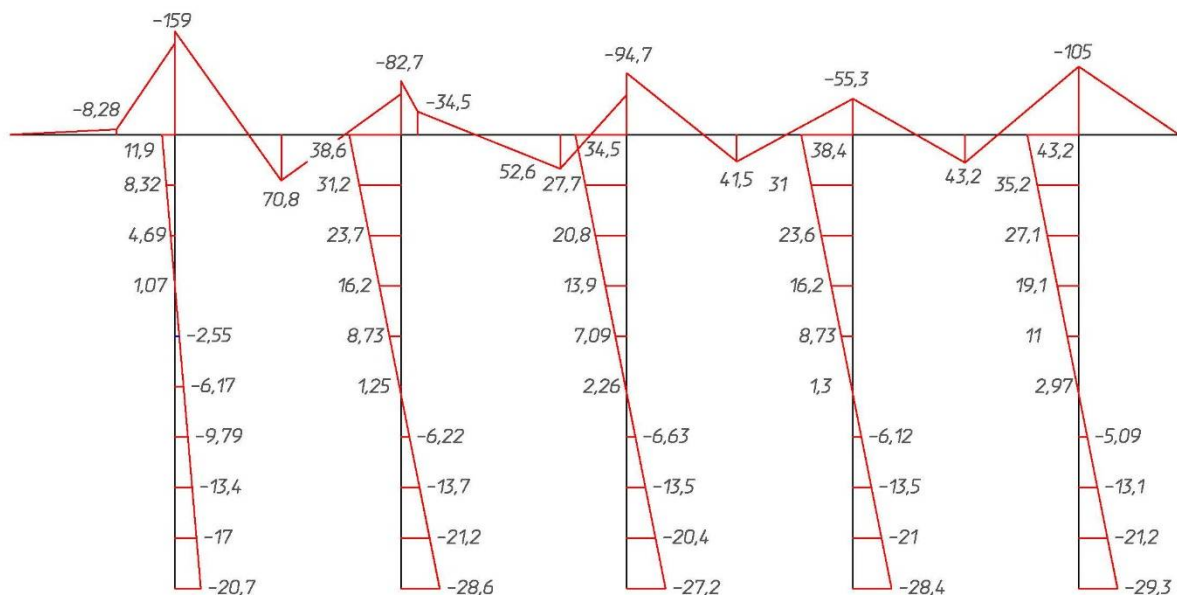
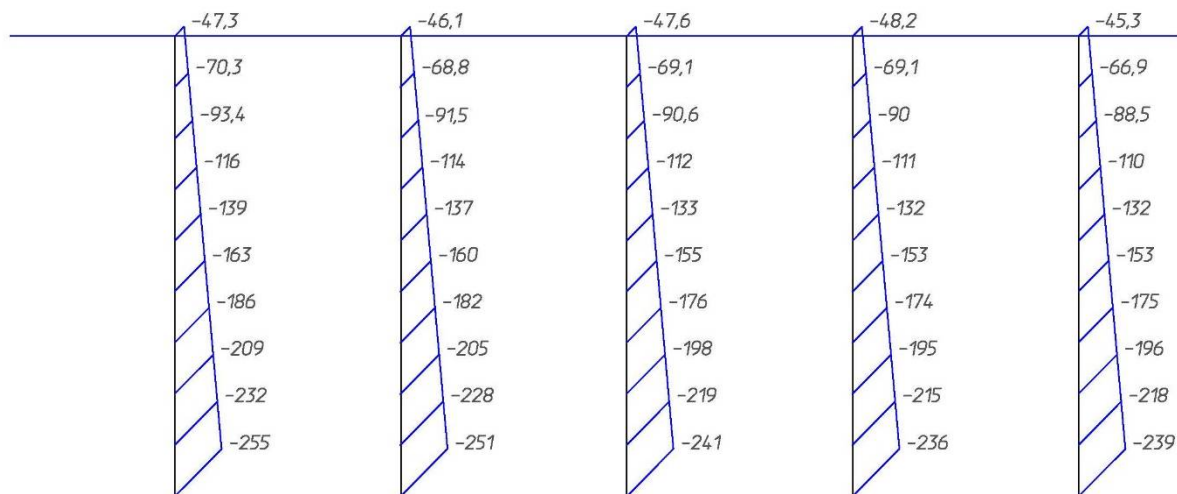


Рис. 11. Уругопластический расчет. Собственный вес+нагрузка А14.  
Эпюра продольных сил N, т



**Рис. 12.** Уругопластический расчет. Собственный вес+нагрузка А14.  
Эпюра изгибающих моментов  $M_y$ , т\*м



**Рис. 13.** Уругопластический расчет. Собственный вес+нагрузка А14.  
Эпюра изгибающих моментов  $M_z$ , т\*м

В ходе расчётов было установлено, что при воздействии нагрузки А14 наибольшее влияние на прочность опоры оказывает не вертикальная нагрузка, а силы торможения, создающие в колоннах большие изгибающие моменты  $M_z$ . Согласно эпюрам наибольшие моменты  $M_z$  наблюдаются в нижних сечениях колонн. В этих местах в колоннах появляются пластические шарниры. На рис. 14 для предельного состояния опоры показаны зоны пластического течения стальной арматуры и расположение пластических шарниров для КЭ-сетки №2 и шага нагружения  $\Delta P=0.01P_0$ . Последовательность появления пластических

шарниров иллюстрируется цветом. Такая же схема разрушения получена для всех остальных КЭ-сеток и шагов нагружения  $\Delta P$ .

Разрушение конструкции (образование пластических шарниров - ПШ) происходит за три этапа (рис. 14):

- 1 этап – Временная нагрузка  $P=2.07 \cdot P_0$ , ПШ синего цвета
- 2 этап – Временная нагрузка  $P=2.08 \cdot P_0$ , ПШ розового цвета
- 3 этап – Временная нагрузка  $P=2.09 \cdot P_0$ , ПШ чёрного цвета

Таким образом, несущая способность опоры, вычисленная на основе принципа предельного равновесия от воздействия временной нагрузки А14 приблизительно в два раза выше соответствующей несущей способности, полученной в результате инженерного расчёта.

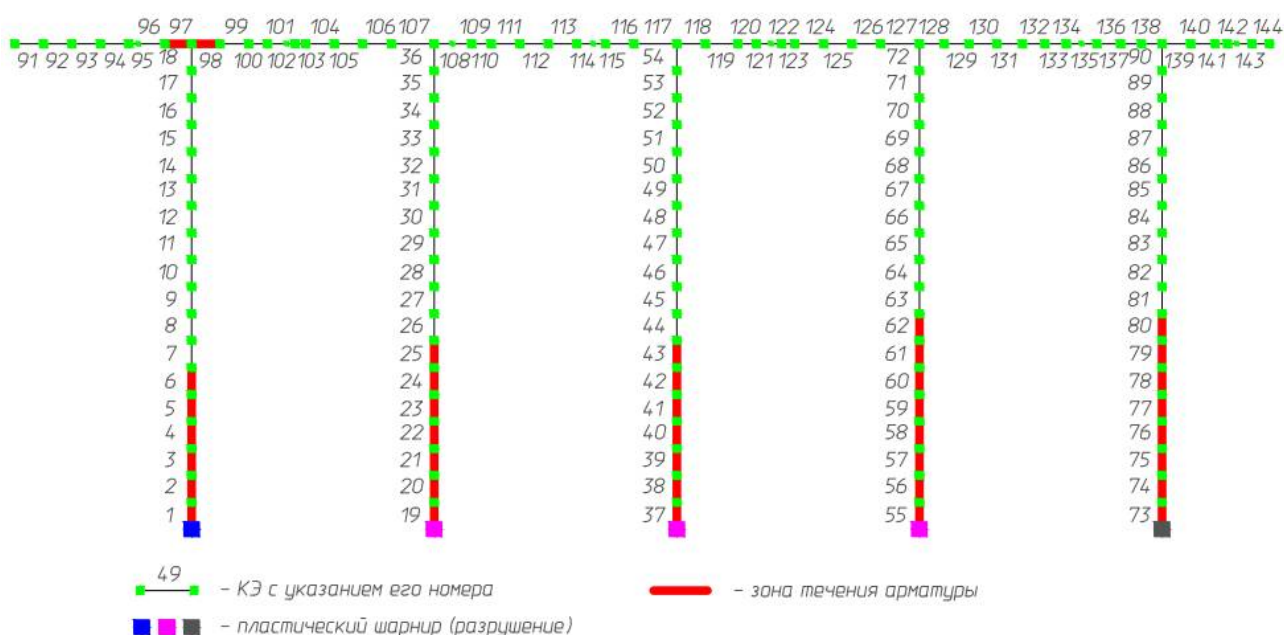


Рис. 14. Схема разрушения опоры для нагрузки А14

### Выводы

1. Выполнен выбор конечно-элементной дискретизации железобетонной стоечно-ригельной опоры и произведены расчёты в ПК Лира в пространственной и плоской постановках на основное сочетание нагрузок по первому предельному состоянию на прочность.

2. В результате анализа работы железобетонной рамы в физически нелинейной постановке при совместном действии нагрузки от собственного веса конструкции и временной подвижной нагрузки А11:

- определены схема и последовательность разрушения конструкции с образованием пластических шарниров;
- на основе принципа предельного равновесия получены значения для предельной временной нагрузки, вызывающей потерю несущей способности конструкции; эти значения значительно превышают соответствующие проектные нагрузки и позволяют оценить способность конструкции сопротивляться разрушению в исключительных условиях эксплуатации.

## Библиографический список

1. Ржаницын А.Р. Строительная механика: учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.
2. Определение предельной нагрузки для плоской стержневой системы в программном комплексе ЛИРА САПР 2016 / В.Д. Раков, Ф.А. Красина, Л.Е. Пугеева, Б.А. Тухфатуллин // Инновации технических решений в машиностроении и транспорте: сб. тр VII Всерос. науч.-техн. конф. для молодых ученых и студентов с междунар. участием. – Пенза, 2021. – С. 189-193.
3. Варнавский В.С., Поворин А.С. Определение несущей способности металлического рамного каркаса с применением программного комплекса Лира // Строительная механика и конструкции. – 2011. – № 2 (3). – С. 113-121.
4. Варнавский В.С., Болотов А.О. Численное исследование несущей способности металлической рамы на основе программного комплекса Лира // Строительная механика и конструкции. – 2014. – № 1 (8). – С. 117-125.
5. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Мартынова М.М. Расчёт плоского стального каркаса на статическую нагрузку с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. – 2018. – №3 (18). – С. 51-60.
6. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Востриков В.В. Расчёт плоского стального каркаса на постоянную и временную нагрузку с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. – 2019. – №3 (22). – С. 76-86.
7. Варнавский В.С., Габриелян Г.Е., Востриков В.В. Расчётный анализ распределения усилий в металлическом рамном каркасе с учётом пластических деформаций материала // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 1 (28). – С. 76-86.
8. Строительная механика: программы и решения задач на ЭВМ: учеб. пособие для вузов / Р.П. Каркаускас, А.А. Критинис, Ю.Ю. Атокчюнас и др.; под общ. ред. А.А. Чираса. – М.: Стройиздат, 1990. – 360 с.
9. Сеницын С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем : учеб. пособие для техн. вузов. – М.: Изд-во Ассоциации строит. вузов, 2002. – 320 с.

## References

1. Rzhantsyn A. R. Construction mechanics: textbook. manual for universities. M.: Higher. School, 1982. 400 p.
2. Rakov V. D., Krasina F. A., Puteeva L. E., Tukhfatullin B. A. Determining the limit load for flat rod system in the software package LIRA SAPR 2016 In the collection: Innovations of technical solutions in mechanical engineering and transport. Collection of articles of the VII All-Russian Scientific and Technical Conference for young scientists and students with international participation. Penza, 2021. pp. 189-193.
3. Varnavsky V. S., Povorin A. S. Determination of the bearing capacity of a metal frame with the use of the Lira software package. // Construction mechanics and structures. 2011. Vol. 2. no. 3. Pp. 113-121.
4. Varnavsky V. S., Bolotov A. O. Numerical study of the bearing capacity of a metal frame based on the Lira software package. // Construction mechanics and structures. 2014. Vol. 1. No. 8. Pp. 117-125.

5. Varnavsky V. S., Gabrielyan G. E., Martynova M. M. Calculation of a flat steel frame for static load taking into account plastic deformations of the material. // Construction mechanics and structures. 2018. Vol. 3. No. 18. Pp. 51-60.
6. Varnavsky V. S., Gabrielyan G. E., Vostrikov V. V. Calculation of a flat steel frame for a constant and temporary load taking into account plastic deformations of the material // Construction mechanics and structures. 2019. Vol. 3. No. 22. Pp. 76-86.
7. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Vostrikov V.V. Computational analysis of the distribution of forces in a metal frame taking into account plastic deformations of the material // Construction mechanics and structures. 2021. Vol. 1. No. 28. Pp. 76-86.
8. Construction mechanics: Computer programs and problem solving: Textbook for universities / R.P. Karkauskas, A.A. Cretinism, Yu.Yu. Atkochiunas, etc. Under the general editorship of A.A. Chiras. M.: Stroyizdat, 1990. 360 p.
9. Sinitsyn S.B. Construction mechanics in the method of finite elements of rod systems: textbook. manual for tech. M.: Publishing House of the Association builds. universities, 2002. 320 p.

## **DETERMINATION OF THE BEARING CAPACITY OF REINFORCED CONCRETE RACK-AND-CROSSBAR SUPPORT OF THE OVERPASS, TAKING INTO ACCOUNT INELASTIC DEFORMATIONS OF THE MATERIAL**

V. S. Varnavsky<sup>1</sup>, G. E. Gabrielyan<sup>2</sup>, A. S. Malykhina<sup>3</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>

GeoTechTrans<sup>3</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: mailVVS@inbox.ru

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: grayr2010@rambler.ru

<sup>3</sup> Master of engineering, Engineer, e-mail: nastya.malykhina23@gmail.com

---

Currently, as a result of a noticeable increase in transport loads on bridge structures, the task of investigating the ability of the structure to work in extreme operating conditions becomes urgent. A more accurate assessment of the bearing capacity of reinforced concrete bridge structures can be obtained by taking into account the actual diagram of the material.

This work is devoted to the development of an effective method for calculating the reinforced concrete frame support of a bridge structure in the conditions of inelastic deformation of steel and concrete. The use of the LIRA software and computing complex makes it possible to make the calculation technologically advanced and convenient for use in everyday engineering practice.

The problem of determining the bearing capacity of the rack-and-crossbar support of the overpass for the combined action of permanent and temporary mobile loads based on the principle of ultimate equilibrium is solved. The upper estimate of the maximum possible time load arising in exceptional operating conditions is given.

**Keywords:** bridge structure, reinforced concrete frame support, load-bearing capacity, limiting equilibrium, design-computational complex LIRA

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛОВ ЭФФЕКТИВНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ ПРОПУСКА ПЕШЕХОДНЫХ ПОТОКОВ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ НЕРЕГУЛИРУЕМЫХ ПЕРЕКРЕСТКОВ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

А. В. Еремин<sup>1</sup>, О. А. Волокитина<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой проектирования автомобильных дорог и мостов, тел.: +7(910)3469587, e-mail: [bora.av@mail.ru](mailto:bora.av@mail.ru)

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов, тел.: +7(910)3497256, e-mail: [dixi.o@mail.ru](mailto:dixi.o@mail.ru)

---

**Постановка задачи.** Определение пределов эффективного функционирования нерегулируемых перекрестков при проектировании автомобильных дорог с учетом основных показателей, характеризующих работу перекрестка в аспекте оптимальности пропуска транспортно-пешеходных потоков с целью совершенствования организации дорожного движения.

**Результаты.** Проведен анализ методов оценки пропускной способности нерегулируемых перекрестков и установлена необходимость в учете взаимодействия движения транспортных и пешеходных потоков.

**Выводы.** Результаты исследования свидетельствуют о возможности построения реальной математической модели динамики движения транспортных и пешеходных потоков на перекрестке с правильной и всесторонней оценкой организации пропуска пешеходных потоков при проектировании автомобильных дорог.

**Ключевые слова:** проектирование, автомобильные дороги, транспортные развязки, нерегулируемые перекрестки, пешеходные потоки,

**Введение.** Проектирование примыканий и пересечений (рис. 1) как одно-, так и разноуровневых на автомобильных дорогах осуществляется на основании класса, функционального назначения и категории пересекаемых дорог с учетом перспективной интенсивности и состава движения по отдельным направлениям с возможностью дальнейшего стадийного развития. При этом на стадии разработки проекта следует учитывать условия видимости, пропускную способность с учетом роста интенсивности автомобильного и пешеходного движения, а также потребности всех групп населения, включая маломобильных граждан.

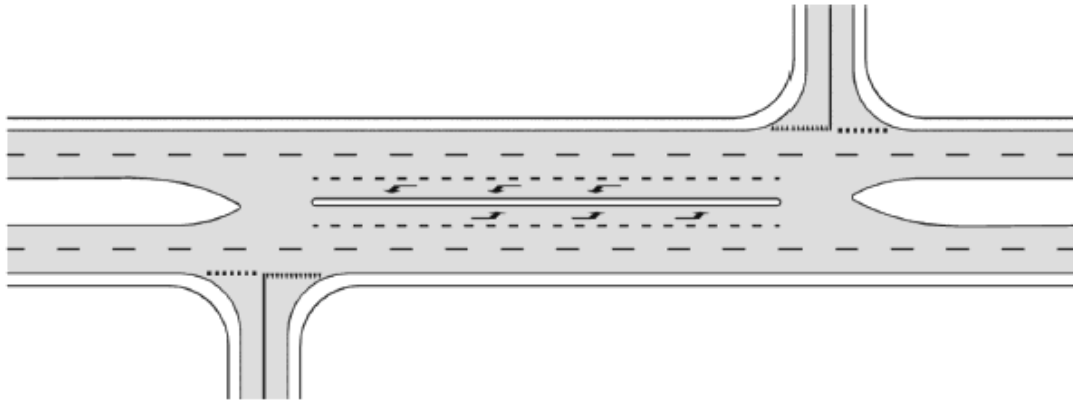


Рис. 1. Схема пересечения в одном уровне

На основе технико-экономического сопоставления вариантов при учете критериев безопасности движения осуществляется обоснование выбранной схемы пересечения и примыкания [1].

**Краткий обзор методов оценки пропускной способности.** Анализ наработанного опыта в области организации движения на нерегулируемых перекрестках показал, что в отечественной и зарубежной литературе встречаются различные оценки их пропускной способности. Эти оценки можно разделить на две группы. Первая группа основана на использовании детерминированных моделей, которые используют функциональные зависимости между отдельными показателями. При этом принимается, что все автомобили отдалены друг от друга на одинаковые расстояния.

К таким моделям относится оценка пропускной способности нерегулируемого перекрестка по методу А.А. Милашечкина [2].

Вторая группа оценок рассматривает движение автомобилей как стохастический процесс. Оценки, проводимые при помощи стохастических моделей движения потоков автомобилей, отличаются большей объективностью.

Наибольшее применение среди исследователей получили такие закономерности, как распределение Пуассона, смещенное распределение Пуассона, распределение Пуассона с поправочным коэффициентом в экспоненте, распределение Эрланга (Пирсона III типа) [3-7].

При определенных достоинствах рассмотренные методы оценок, предложенные ранее [3-7], имеют ряд недостатков:

- все предлагаемые методы рассчитаны на то, что движение транспортных потоков может определяться только какой-либо одной закономерностью, что не совсем оправданно;
- какие-либо поправочные коэффициенты (распределение Пуассона с поправочным коэффициентом) применимы для конкретного перекрестка, для которого они рассчитаны и неприменимы для других;
- в рассмотренных оценках в основном транспортный поток не разделяется по видам маневров на перекрестке, что особенно важно для анализа нормальности функционирования нерегулируемого перекрестка;
- не учитываются такие важные составляющие, как геометрические параметры перекрестка, дорожные условия, которые существенно влияют на проезд через него.

Задачей исследования является определение пределов эффективного функционирования нерегулируемых перекрестков при проектировании автомобильных дорог с учетом основных показателей, характеризующих работу перекрестка в аспекте оптимальности пропуска транспортно-пешеходных потоков с целью совершенствования организации дорожного движения.

Описанные в литературе [8] методы расчета основных характеристик пропускной способности нерегулируемых перекрестков не позволяют с достаточной точностью определить предел эффективного функционирования, когда следует осуществлять перевод простого нерегулируемого перекрестка в кольцевое пересечение. В этих методах не учитывается движение транспортных и пешеходных потоков во взаимодействии при различных маневрах на перекрестке, поэтому необходимо исследование пределов эффективного функционирования нерегулируемых перекрестков с учетом пропуска пешеходного потока.

**Определение параметров, характеризующих эффективность функционирования любых типов нерегулируемых перекрестков.**

Свободные и блокированные промежутки времени [9] довольно точно соответствуют периодам красного и зеленого сигналов светофора независимо от того, является ли длительность сигнала постоянной или же определяется наличием транспортных средств, поэтому нерегулируемый перекресток работает аналогично обслуживающему устройству. Рассмотрим такую систему, в которой обслуживающее устройство поочередно действует и бездействует в течение средних свободных промежутков А и средних блокированных промежутков В.

Сумма А и В составляет цикл (А+В). Размер полной очереди  $n_{0j}$  транспортных средств второстепенного направления по одной проезжей части в средних оценках составит:

$$n_{0j} = \sum_{i=1}^4 \frac{t_{rj} + {}^iB + {}^iF}{1 - \lambda_j^i \times \tau_j^i} \times \lambda_j^i, \quad (1)$$

где  $t_{rj}$  - интервал между началом свободного промежутка времени и троганием с места первой транспортной единицы очереди, направления j, с;

$\lambda_j^i$  - интенсивность движения транспортного потока j-го направления с маневром i одной проезжей части, ед/с;

$\tau_j^i$  - временной интервал между передними бамперами транспортных средств при проезде «стоп» - линии после остановки перед перекрестком с j-го направления с маневром i одной проезжей части, с/ед.

Суммарное среднее время, необходимое для пропуска очереди, образовавшейся на одной проезжей части второстепенного j-го направления можно определить по формуле (1), при этом суммарный средний запас времени, оставшегося от пропуска очереди транспортных единиц второстепенного направления в свободные промежутки времени  ${}^iA$ , в течение которого автомобили могут проезжать перекресток сразу, без остановки перед ним, определяется по формуле:

$$t_{3j} = \sum_{i=1}^4 {}^iA - t_{0j}^i. \quad (2)$$

Тогда количество транспортных единиц одной проезжей части второстепенного j-го направления, способных пройти перекресток без остановки перед ним, определяется:

$$n_{3j} = \sum_{i=1}^4 t_{3j} \times \lambda_j^i. \quad (3)$$

Длительность средней задержки одной транспортной единицы, выполняющей i-й маневр, за цикл ( ${}^iA + {}^iB$ ) одной проезжей части j-го направления:

$$z_j^i = {}^iB + \frac{{}^iF}{2} + t_{rj}. \quad (4)$$

Длительность средней задержки полной очереди:



$$z_{0j} = \sum_{i=1}^4 n_{0j}^i \times z_j^i. \quad (5)$$

Суммарная средняя задержка транспортных единиц одной проезжей части  $j$ -го направления в течение одного часа составит:

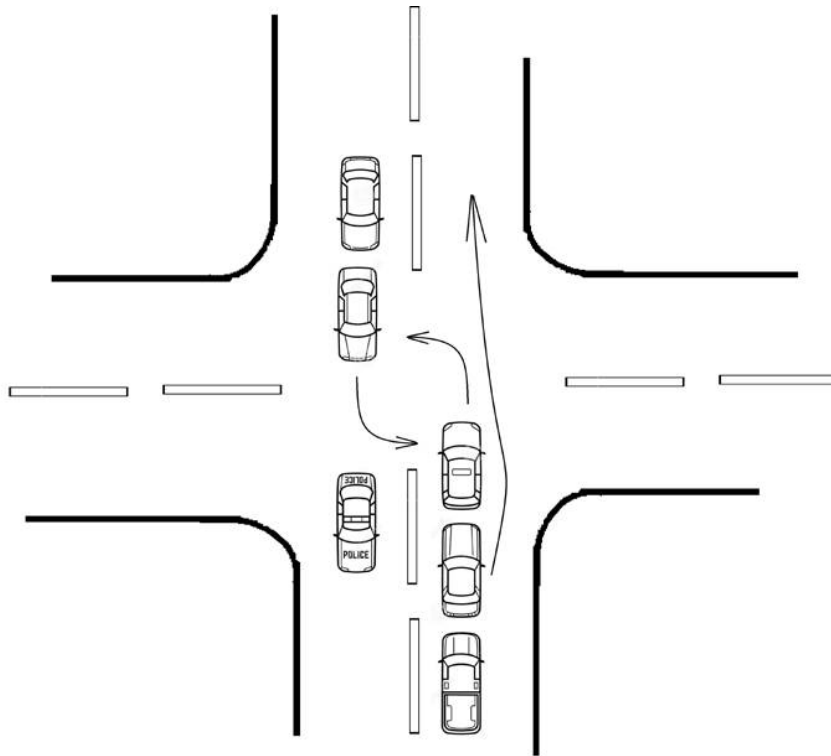
$$z_{\text{ч}j} = \sum_{i=1}^4 \frac{z_{0j}^i}{i_j A} + i_j B \times 3600. \quad (6)$$

Следует отметить, что задержки транспортных единиц при проезде нерегулируемых перекрестков могут возникать и по главным направлениям движения. Здесь возможны два варианта (рис. 2):

1. Машины, движущиеся прямо и направо из главного направления, не могут объехать машины, ожидающие поворота направо и разворота, тогда по главному направлению будут возникать задержки.

2. Машины, движущиеся прямо и направо из главного направления, могут объехать машины, ожидающие поворота направо и разворота.

Остановимся подробнее на анализе пропускной способности нерегулируемых перекрестков в аспекте оптимальности их работы. Здесь мы будем рассматривать оптимальную пропускную способность.



**Рис. 2.** Схема проезда транспортных средств с учетом задержки при проезде нерегулируемых перекрестков по главным направлениям

Дадим определение: оптимальная пропускная способность – максимальное количество транспортных единиц, способных пересечь перекресток при полном использовании свободных промежутков и минимальных задержках, в единицу времени.

Очевидно, что полное использование транспортными единицами  $j$ -го направления  $i$ -го маневра одной проезжей части свободного промежутка  $i_j A$  цикла  $(i_j A + i_j B)$  достигается при условии:

$${}^i_j A - t_{rj} = \frac{t_{rj} + {}^i_j B}{1 - \lambda_j^i \times \tau_j^i} \times \lambda_j^i \times \tau_j^i, \quad (7)$$

тогда оптимальная пропускная способность проезжей части при выполнении за цикл  $({}^i_j A + {}^i_j B)$  машинами  $j$ -го направления  $i$ -го маневра определяется как:

$$P_j^{opti} = {}^i_j A - \frac{t_{rj}}{({}^i_j A + {}^i_j B) \times \tau_j^i}. \quad (8)$$

Оптимальная пропускная способность за час:

$$P_{чj}^{opti} = \frac{(C_{(ji)A} - t_{rj}) \times 3600}{({}^i_j A + {}^i_j B) \times \tau_j^i}. \quad (9)$$

Формулы (1-9) позволяют провести оценку эффективности функционирования любого нерегулируемого неравнозначного пересечения.

Добавим, что для принятия правильных инженерных решений по усовершенствованию схем движения на нерегулируемых перекрестках следует проводить более детальный анализ.

### Обоснование схемы взаимодействия транспортных и пешеходных потоков.

Установим пределы эффективного функционирования нерегулируемого перекрестка с учетом пропуска пешеходных потоков. Для этого примем следующую схему взаимодействия транспортных и пешеходных потоков (рис. 3).

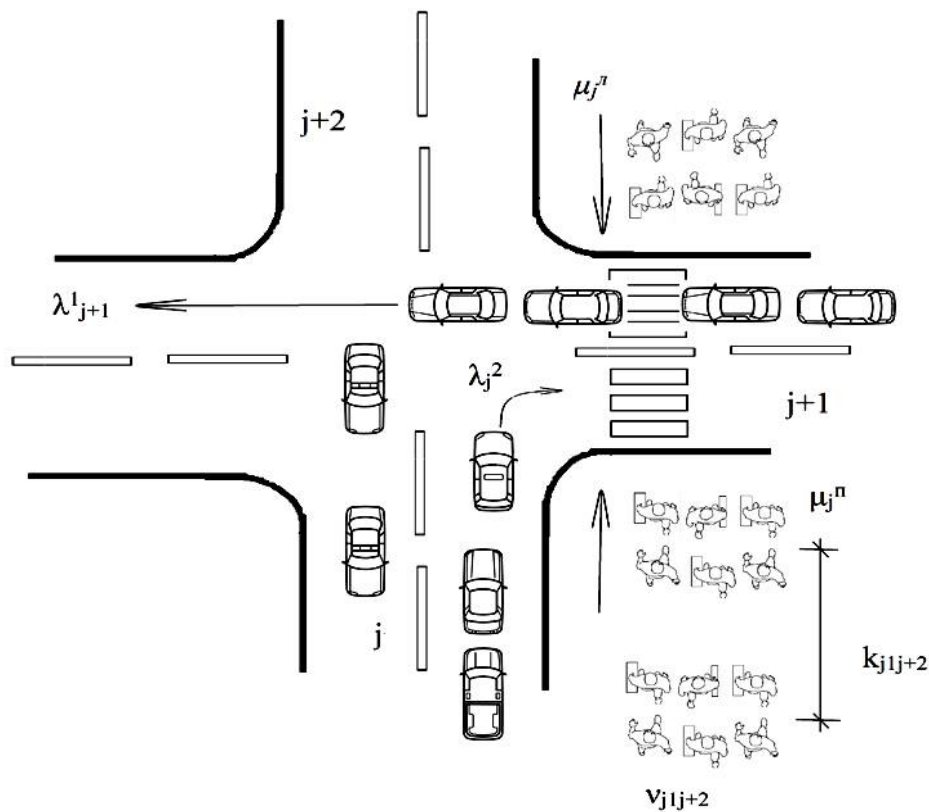


Рис. 3. Схема взаимодействия транспортных потоков  $\lambda_{j+1}$  (главное направление) и  $\lambda_j$  с пешеходными потоками  $\mu_j^n$  и  $\mu_{j+2}^n$

Предполагаем, что моменты прибытия пешеходов к границе проезжей части случайны и распределены по закону Пуассона. Здесь необходимо рассмотреть два случая.

В первом случае транспортные средства имеют приоритет в движении перед

пешеходами.

В таком случае при нормальном взаимодействии транспортных и пешеходных потоков должно выполняться следующее условие:

$$T^{new} \leq A_j, \quad (10)$$

где  $T^{new}$  - среднее время перехода пешеходом проезжей части;

$A$  - свободные промежутки времени.

При этом среднее количество пешеходов, прибывших к границе проезжей части в течение цикла ( ${}^i_j A + {}^j_j B$ ) и ожидающих ее перехода, определяется по формуле:

$$n_{0,j,j+2}^{new} = \frac{{}^{new} B_j \times \frac{\mu_j^{\Pi} + \mu_{j+2}^{\Pi}}{v}}{1 - k_{j,j+2} \times \frac{\mu_j^{\Pi} + \mu_{j+2}^{\Pi}}{v_j}}, \quad (11)$$

где  $B$  - заблокированные промежутки времени;

$\mu_j^{\Pi}$ ,  $\mu_{j+2}^{\Pi}$  - интенсивность прибытия пешеходов к пешеходному переходу по правой и левой сторонам улицы соответственно в единицу времени, чел/с;

$k_{j,j+2}$  - минимальный нормативный и временный интервалы между последовательно идущими пешеходами одного направления, с/чел;

$v_j$  - нормативное число пешеходов, движущихся рядом («под прикрытием») друг с другом по переходу  $j$ -го направления.

Среднее время, необходимое для пропуска пешеходов, прибывших к границе проезжей части в течение цикла ( ${}^i_j A + {}^j_j B$ ), описывается следующей зависимостью:

$$t_{j,j+2}^{new} = \frac{{}^{new} B_j \times \frac{\mu_j^{\Pi} + \mu_{j+2}^{\Pi}}{v}}{1 - k_{j,j+2} \times \frac{\mu_j^{\Pi} + \mu_{j+2}^{\Pi}}{v_j}}. \quad (12)$$

Тогда оптимальное взаимодействие транспортного и пешеходного потоков достигается при  $t_{j,j+2}^{new} = C^{new} \times A_j$  и имеет вид:

$$\frac{\mu_j^{\Pi} + \mu_{j+2}^{\Pi}}{v} = \frac{C^{new} \times A_j}{((C^{new} \times A_j) + C^{new}) \times B_j} \times k_{j,j+2}. \quad (13)$$

Средняя задержка нормативного числа пешеходов, движущихся рядом друг с другом, составляет:

$$z_{j,j+2}^{new} = \frac{C^{new} \times B_j}{2}. \quad (14)$$

При этом средняя задержка пешеходов, прибывших к границе проезжей части в течение цикла  $(C^{new} \times A_j) + (C^{new} \times B_j)$ , равна:

$$z_{j,j+2}^{new} = n_{0,j,j+2}^{new}. \quad (15)$$

Следовательно, средняя задержка пешеходов за час будет равна:

$$Z_{j,j+2}^{new} = \frac{z_{j,j+2}^{new}}{{}^{new} A_j + {}^{new} B_j} \times 3600. \quad (16)$$

Во втором случае, когда пешеходы имеют приоритет в движении перед транспортными средствами, средние свободные и заблокированные промежутки времени при движении пешеходных потоков по проезжей части определяются по формулам:

$${}_j^i B^{new} = \frac{1 - e^{-\frac{(\mu_1 + \mu_2) \times T^{new}}{\nu}}}{\frac{\mu_1 + \mu_2}{\nu} \times e^{-\frac{(\mu_1 + \mu_2) \times T^{new}}{\nu}}}, \quad (17)$$

$${}_j^i A^{new} = \frac{\nu}{\mu_1 + \mu_2} - {}_j^i B^{new}, \quad (18)$$

Окончательно взаимодействие транспортного и пешеходных потоков будет оцениваться неравенством:

$$\lambda_j \times ({}_j^i A^{new} + {}_j^i B^{new}) \times \tau \leq {}_j^i A^{new}. \quad (19)$$

**Вывод.** На основании проведенного теоретического обоснования учета пределов эффективного функционирования нерегулируемых перекрестков при проектировании автомобильных дорог с позиции пропуска пешеходных потоков можно сделать вывод о необходимости создания математической модели и дальнейшего экспериментального обоснования динамики движения транспортных и пешеходных потоков на перекрестке с целью всесторонней оценки организации их пропуска.

#### Библиографический список

1. СП 34.13330.2021. Свод правил. Автомобильные дороги. – М.: АО «Кодекс», 2021. 94 с.
2. Милашечкин А.А., Гохман В.А., Поляков М.П. Узлы автомобильных дорог. – М.: Высшая школа, 1966. – 360 с.
3. Михайленко В.И., Четверухин Б.М. Управление движением на автомобильных дорогах. – К.: Урожай, 1991. – 200 с.
4. Озол А.О. Организация учета дорожного движения на основе исследований закономерностей транспортных потоков: автореф. дис.... канд. техн. наук. – К., 1984. – 18 с.
5. Пропускная способность автомобильных дорог / Е.М. Лобанов, В.В. Сильянов, Ю.М. Ситников, Л.Н. Сапегин. – М.: Транспорт, 1970. – 152 с.
6. ГОСТ Р 58653-2019. Пересечения и примыкания. Технические условия. - М.: Стандартиформ, 2019. – 59 с.
7. ОДМ 218.4.005-2010. Рекомендации по обеспечению безопасности движения на автомобильных дорогах. – М.: Информавтодор, 2011. – 264 с.
8. Живоглядов В.Г., Мартынов А.В. Расчет пропускной способности нерегулируемых неравнозначных перекрестков // Вопросы механизации и экономики сельского хозяйства: материалы науч. – техн. конф. – Краснодар, 1969. – Вып. 1. – Ч. 1. – 111 с.
9. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков. – М.: Мир, 1966. – 288 с.

#### References

1. Set of rules 34.13330.2021. Set of rules. Car roads. M.: JSC "Codex", 2021. 94 p.
2. Milashechkin A.A., Gokhman V.A., Polyakov M.P. Road junctions. M.: High school, 1966. 360 p.
3. Mikhailenko V.I., Chetverukhin B.M. Traffic control on highways. K.: Harvest, 1991 200 p.
4. Ozol A.O. Organization of traffic accounting based on the study of the patterns of traffic flows: Candidate of Technical Sciences Dissertation. K., 1984. 18 p.
5. Lobanov E.M., Silyanov V.V., Sitnikov Yu.M., Sapegin L.N. Carrying capacity of highways. M.: Transport, 1970. 152 p.
6. Federal Standard R 58653-2019. Intersections and adjacencies. Technical conditions. M.: Standartinform, 2019. 59 p.

7. Industry road methodological document 218.4.005-2010. Recommendations for traffic safety on highways. M.: Informavtodor, 2011.264 p.
8. Zhivoglyadov V.G., Martynov A.V. Calculation of the throughput of unregulated unequal intersections. Questions of Mechanization and Agricultural Economics: Conference Proceedings. Krasnodar, 1969. Issue 1. Part 1. 111 p.
9. Hayt F. Mathematical theory of traffic flows. M.: Mir, 1966. 288 p.

## **THEORETICAL JUSTIFICATION OF DETERMINING THE LIMITS OF EFFECTIVE FUNCTIONING TAKING INTO ACCOUNT THE PEDESTRIAN FLOWS WHEN DESIGNING UNREGULATED ROADS**

A. V. Eremin<sup>1</sup>, O. A. Volokitina<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Designing Highways and Bridges,  
Tel.: +7(910)3469587, e-mail: [bora.av@mail.ru](mailto:bora.av@mail.ru)

<sup>2</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Designing Highways and Bridges,  
Tel: +7(910)3497256, e-mail: [dixi.o@mail.ru](mailto:dixi.o@mail.ru)

---

**Problem statement.** Determination of the limits of the effective functioning of unregulated intersections in the design of highways, taking into account the main indicators characterizing the operation of the intersection in the aspect of optimality of the passage of transport and pedestrian flows in order to improve the organization of road traffic.

**Results.** The analysis of methods for assessing the throughput of unregulated intersections is carried out and the need to take into account the interaction of traffic and pedestrian flows is established.

**Conclusions.** The results of the study indicate the possibility of constructing a real mathematical model of the dynamics of traffic and pedestrian flows at an intersection with a correct and comprehensive assessment of the organization of the passage of pedestrian flows when designing highways.

**Keywords:** design, highways, traffic interchanges, unregulated intersections, pedestrian flows.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

---

DOI 10.36622/VSTU.2021.31.4.007

УДК 620.172.2

### ВЛИЯНИЕ ЗАПОЛНЕНИЯ СТРУКТУРЫ НА МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА АДДИТИВНЫХ СТРУКТУР

А. Ю. Перельгина<sup>1</sup>, С. А. Антипин<sup>2</sup>, Ю. А. Бобылева<sup>3</sup>, В. П. Ященко<sup>4</sup>, В. Н. Перельгин<sup>5</sup>

ФГБОУ ВО «Иркутский национальный исследовательский технический университет»<sup>1,2,3,4</sup>  
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет путей сообщения»<sup>5</sup>  
Россия, г. Иркутск

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, и.о. зав. кафедрой инженерной и компьютерной графики, тел.: +7(3952)405373,  
e-mail: [perelygina@istu.edu](mailto:perelygina@istu.edu)

<sup>2</sup>Аспирант кафедры инженерной и компьютерной графики, тел.: +7(3952)405373,  
e-mail: [sergey.antipin.98@mail.ru](mailto:sergey.antipin.98@mail.ru)

<sup>3</sup>Младший научный сотрудник кафедры инженерной и компьютерной графики, тел.: +7(3952)405373,  
e-mail: [bobylevajuliaal@yandex.ru](mailto:bobylevajuliaal@yandex.ru)

<sup>4</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры механики и сопротивления материалов, тел.: +7(3952)405144,  
e-mail: [vp\\_yashenko@mail.ru](mailto:vp_yashenko@mail.ru)

<sup>5</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры механики, физики и приборостроения, тел.: +7(3952)405373,  
e-mail: [perelygina@istu.edu](mailto:perelygina@istu.edu)

---

В статье рассматриваются вопросы определения механических характеристик материала аддитивных структур с учетом таких параметров печати, как процент заполнения и количество нитей печати. В исследованиях использовались разные варианты заполнения структуры образцов на центральное растяжение, изготовленных с применением технологии 3D-печати. В ходе исследований было установлено, что при определении механических характеристик материала аддитивных структур необходимо учитывать нарушение гипотез об однородности и сплошности материала, принятых в сопротивлении материалов. Для образцов с разным процентом заполнения был апробирован предложенный авторами метод по определению механических характеристик материала аддитивных структур с учетом реальной площади поперечного сечения. В статье приведены диаграммы растяжения и рассчитанные по ним механические характеристики материала аддитивных структур, а также рассмотрен вопрос влияния отношения площади пустот к площади материала нитей на механические характеристики материала.

**Ключевые слова:** механические характеристики материала аддитивных структур, 3D-печать, PetG термопластик, структура и ограждение изделия, процент заполнения, реальная площадь поперечного сечения.

**Введение.** Актуальность FDM-технологии (Fused Deposition Modeling), в основе которой лежит экструзия материала, неизменно растёт. В частности, данные технологии перспективны в таких высокотехнологичных сферах производства, как авиастроение, кораблестроение, машиностроение, приборостроение [1-4]. Одним из самых востребованных материалов для FDM-печати в настоящее время являются термопластики и композиты.

Важнейшим требованием, предъявляемым к любому виду транспорта, является обеспечение надёжности в эксплуатации, в частности, обеспечение прочности изделия при минимизации его массы. Технология FDM-печати позволяет создавать детали оптимальной геометрии с заданными характеристиками прочности и жёсткости. Одним из сдерживающих факторов широкого использования данной технологии в транспортном машиностроении

---

© Перельгина А. Ю., Антипин С. А., Бобылева Ю. А., Ященко В. П., Перельгин В. Н., 2021

является отсутствие теории анализа прочности изделий, выполненных с применением FDM-печати (FDM-изделие).

**Постановка задачи.** Теория инженерных расчётов классической механики деформируемого твердого тела базируется на постулате о том, что между механическими характеристиками детали и материала существует однозначная предсказуемая связь, опирающаяся на теоретические и экспериментальные основы [5]. Переход от характеристик материала к характеристикам конкретного FDM-изделия не столь однозначен.

Учитывая то, как формируется содержимое объёма, занимаемого FDM-изделием [6], ставится под сомнение возможность применения гипотез об однородности и сплошности материала, которые используются при расчете конструкций из традиционных материалов. В случае послойного наплавления следует учитывать характер распределения нити печати по объёму создаваемого изделия и характеристики материала в объёме этой нити, т.е. решение данной задачи должно осуществляться не на микро-, а на макроуровне.

Информация об исследованиях параметров напряжённо-деформированного состояния изделий, выполненных 3D-печатью, разрозненна и, соответственно, не систематизирована. Как правило, эти исследования проводят, опираясь на натурные испытания образцов или готовых изделий, с доведением их до разрушения. При этом для определения параметров прочности и жёсткости используется подход, актуальный в рамках гипотез об однородности и сплошности материала [7-11].

В работе [12] было показано, что в случае с FDM-изделиями применение стандартного метода определения механических характеристик материала на основе классических постулатов сопротивления материалов некорректно. Исходя из этого, в [12] был предложен метод определения механических характеристик материала аддитивных структур на основе рассчитанных значений реальной площади поперечного сечения образца, где учитывалось число продольных и поперечных слоев в его опасном поперечном сечении. В настоящей статье проверяется адекватность предложенного в [12] метода определения механических характеристик материала аддитивных структур, рассматривается вопрос сходимости диаграмм растяжения материала для образцов с четным и нечетным количеством слоев наплавливаемых нитей по высоте поперечного сечения, а также образцов одного типоразмера с разными процентами заполнения материалом объёма образца. С целью получения такого рода информации были проведены испытания образцов на центральное растяжение.

**Исходные данные для экспериментов.** Форма образцов для испытания на центральное растяжение принята согласно ГОСТ 11262-2017 [13]. В связи с тем, что в сфере аддитивных технологий нормативная документация по испытаниям на центральное растяжение отсутствует, размеры образцов были определены согласно ГОСТ 1497-84 [14] и формулам, приведенным в [12]. Форма и размеры стандартного образца представлены на рис. 1.

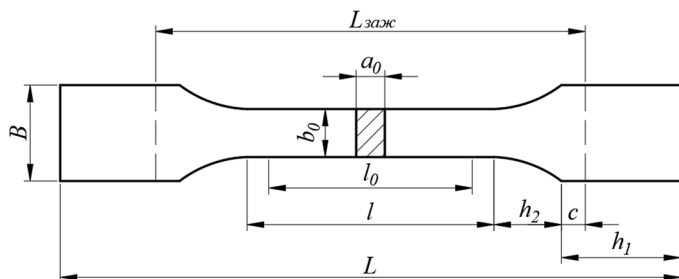


Рис. 1. Схема образца

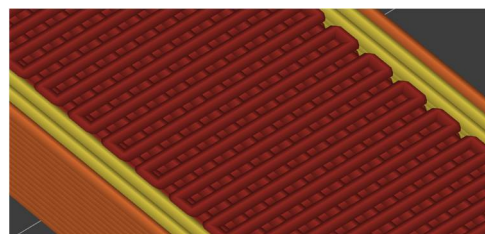


Рис. 2. Шаблон структуры образца

Исследования проводились по двум направлениям:

1. Испытания образцов с поперечным сечением шириной  $b_0 = 10$  мм, варьируемой высотой  $a_0 = 3, 4, 5, 6, 7$  мм и с процентом заполнения объёма образца равным 60 %.

Количество продольных и поперечных слоев структуры и ограждения по высоте для каждого типоразмера образца представлено в табл. 1.

2. Испытания образцов с поперечным сечением размерами  $b_0 = 10$  мм,  $a_0 = 4$  мм и с варьируемым процентом заполнения объема образца 40 %, 60 %, 80 % и 100 %.

Во всех группах образцов использовался шаблон заполнения структуры наплавляемыми нитями, расположенными под углами  $\alpha = 0^\circ$  и  $\alpha = 90^\circ$  к продольной оси образца. Шаблон структуры образца представлен на рис. 2.

Все образцы были изготовлены из термопластика PetG производства SolidFilament. Печать образцов осуществлялась на принтере Wanhao Duplicator 6 plus со скоростью печати структуры  $v_{\text{зап}}^{\text{стр}} = 50$  мм/сек и ограждения  $v_{\text{зап}}^{\text{огр}} = 25$  мм/сек, температурой рабочего стола  $t_{\text{ст}} = 75$  °С, температурой печати  $t_{\text{п}} = 235$  °С, скоростью втягивания  $v_p = 25$  мм/сек, величиной втягивания  $l_p = 6$  мм. Для каждого типоразмера и процента заполнения было напечатано по 10 образцов.

Испытания на центральное растяжение образцов проводились на разрывной машине настольного типа Shimadzu AGS-X с программным обеспечением Trapezium X. Максимально возможная нагрузка испытательной машины модели Shimadzu AGS-X составляет 10 кН.

Таблица 1

Количество слоев по высоте в каждом типоразмере образца

| Типоразмер, мм | $n_{\text{стр}}^{\text{прод}}$ | $n_{\text{стр}}^{\text{попер}}$ | $n_{\text{огр}}^{\text{прод}}$ | $n_{\text{огр}}^{\text{попер}}$ | $\Sigma n_{\text{прод}}$ | $\Sigma n_{\text{попер}}$ | $\Sigma n$ |
|----------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|--------------------------|---------------------------|------------|
| 3×10           | 4                              | 5                               | 4                              | 2                               | 8                        | 7                         | 15         |
| 4×10           | 7                              | 7                               | 3                              | 3                               | 10                       | 10                        | 20         |
| 5×10           | 9                              | 10                              | 4                              | 2                               | 13                       | 12                        | 25         |
| 6×10           | 12                             | 12                              | 3                              | 3                               | 15                       | 15                        | 30         |
| 7×10           | 14                             | 15                              | 4                              | 2                               | 18                       | 17                        | 35         |

**Результаты испытаний.** После проведенных испытаний были получены диаграммы растяжения образцов в системе координат «усилие - абсолютное удлинение» ( $F - \Delta l$ ). Эти диаграммы впоследствии были перестроены в диаграммы растяжения материала в системе координат «нормальное напряжение - относительное удлинение» ( $\sigma - \varepsilon$ ) с учетом предложенного в [12] метода расчёта реальной площади поперечного сечения. После этого для каждого типоразмера образцов были построены диаграммы средних значений напряжений и по ним определены значения модуля Юнга  $E$ , предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$ , условного предела текучести  $\sigma_{0,2}$ , а также предела прочности  $\sigma_B$  материала (структуры).

В табл. 2 представлены результаты расчета механических характеристик и их средних значений, а на рис. 3 – диаграммы растяжения материала (структуры) для разных типоразмеров образцов с учетом реальных площадей поперечного сечения.

Таблица 2

Механические характеристики материала (структуры)

| Типоразмер, мм   | $\sigma_{\text{пц}}$ , МПа | $\sigma_{0,2}$ , МПа | $\sigma_B$ , МПа | $E$ , ГПа |
|------------------|----------------------------|----------------------|------------------|-----------|
| 3×10             | 18,12                      | 39,56                | 46,15            | 2,22      |
| 4×10             | 17,18                      | 38,90                | 42,02            | 2,11      |
| 5×10             | 17,97                      | 38,45                | 50,08            | 2,25      |
| 6×10             | 18,26                      | 38,90                | 46,94            | 2,13      |
| 7×10             | 18,71                      | 39,39                | 47,46            | 2,17      |
| Среднее значение | 18,05                      | 39,04                | 46,53            | 2,18      |



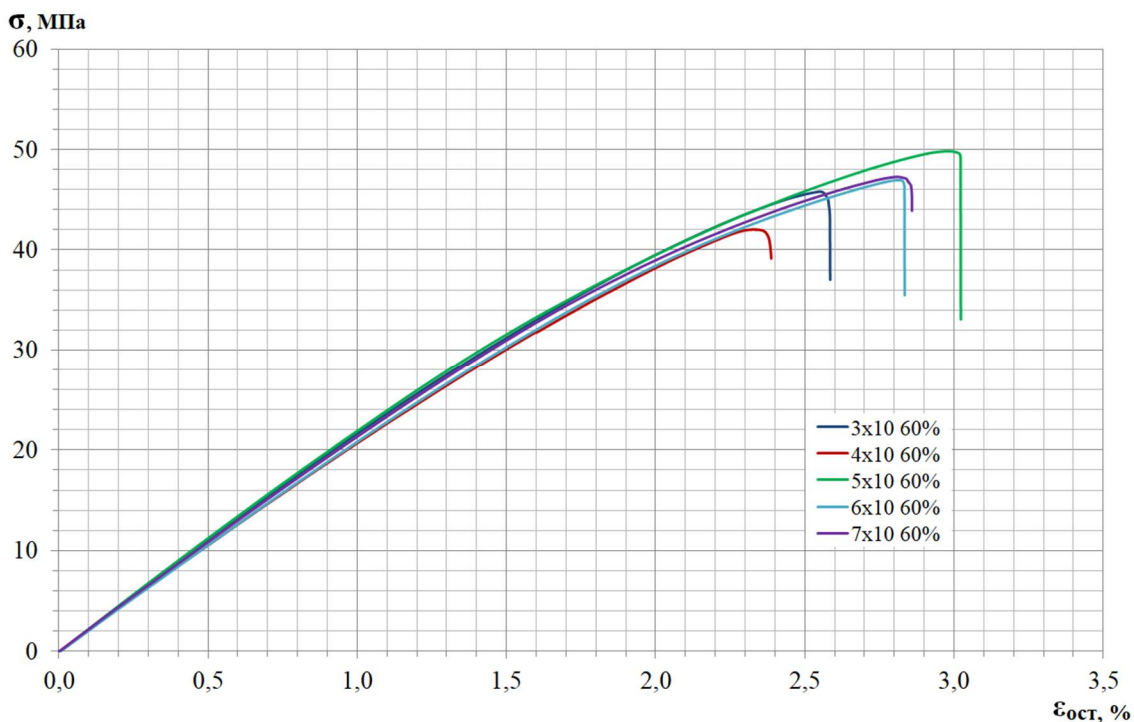


Рис. 3. Диаграммы растяжения материала (структуры) для разных типоразмеров образцов

Согласно табл. 2 и рис. 3 наблюдается значительная сходимость диаграмм растяжения материала аддитивных структур для всех рассматриваемых типоразмеров образцов как с нечетным, так и с четным количеством слоев. Это свидетельствует о справедливости метода определения механических характеристик материала (структур) на основе использования в расчетах реальной площади поперечного сечения. Средние значения механических характеристик, приведенные в табл. 2, в дальнейшем предполагается использовать в качестве базовых «эталонных» характеристик материала аддитивных структур.

Далее исследуется влияние процента заполнения структуры материалом на метод определения механических характеристик, предлагаемый в [12]. На рис. 4 показаны схемы опасных поперечных сечений образцов с частичным (40 %, 60 % и 80 %) и сплошным (100 %) заполнением объема.

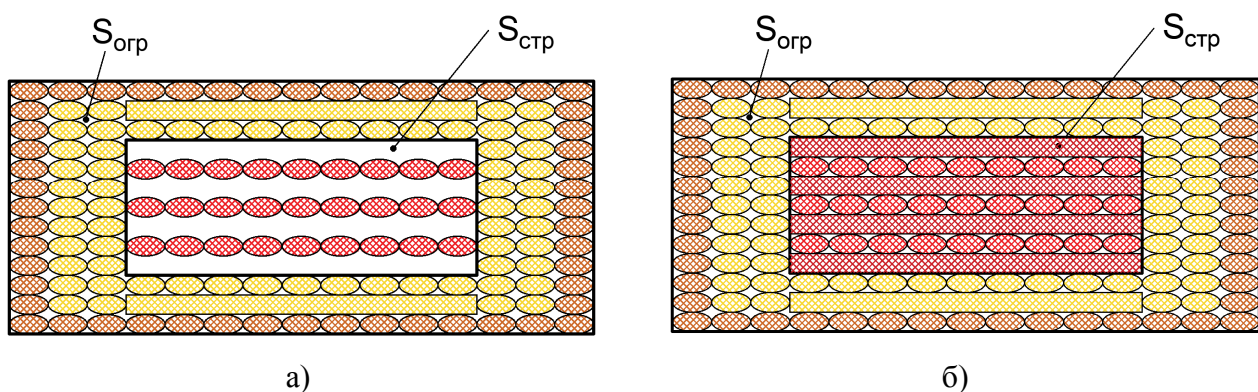


Рис. 4. Схемы опасных поперечных сечений

В ходе определения механических характеристик для образцов с частичным заполнением структуры (рис. 4, а) площадь поперечного сечения определяется по формуле:

$$S_{\text{сеч}} = S_{\text{огр}} + S_{\text{стр}}^{\text{прод}}, \quad (1)$$

где  $S_{огр}$  – площадь ограждения;  $S_{стр}^{прод}$  – площадь структуры в рассматриваемом сечении, состоящая только из продольных волокон структуры.

В случае образцов со сплошным заполнением (рис. 4, б) в опасное поперечное сечение попадают и продольные, и поперечные слои структуры, следовательно, формула (1) примет вид:

$$S_{стр}^{100\%} = S_{огр} + S_{стр}^{прод} + S_{стр}^{попер}, \quad (2)$$

где  $S_{стр}^{попер} = S_{сл}^{попер} \cdot n_{стр}^{попер}$  – площадь структуры в рассматриваемом сечении, состоящая только из поперечных волокон структуры.

Диаграммы растяжения материала аддитивных структур для образцов размером поперечного сечения  $4 \times 10$  мм с процентом заполнения структуры от 40 % до 100 % с шагом 20 % приведены на рис. 5. Механические характеристики данных диаграмм представлены в табл. 3.

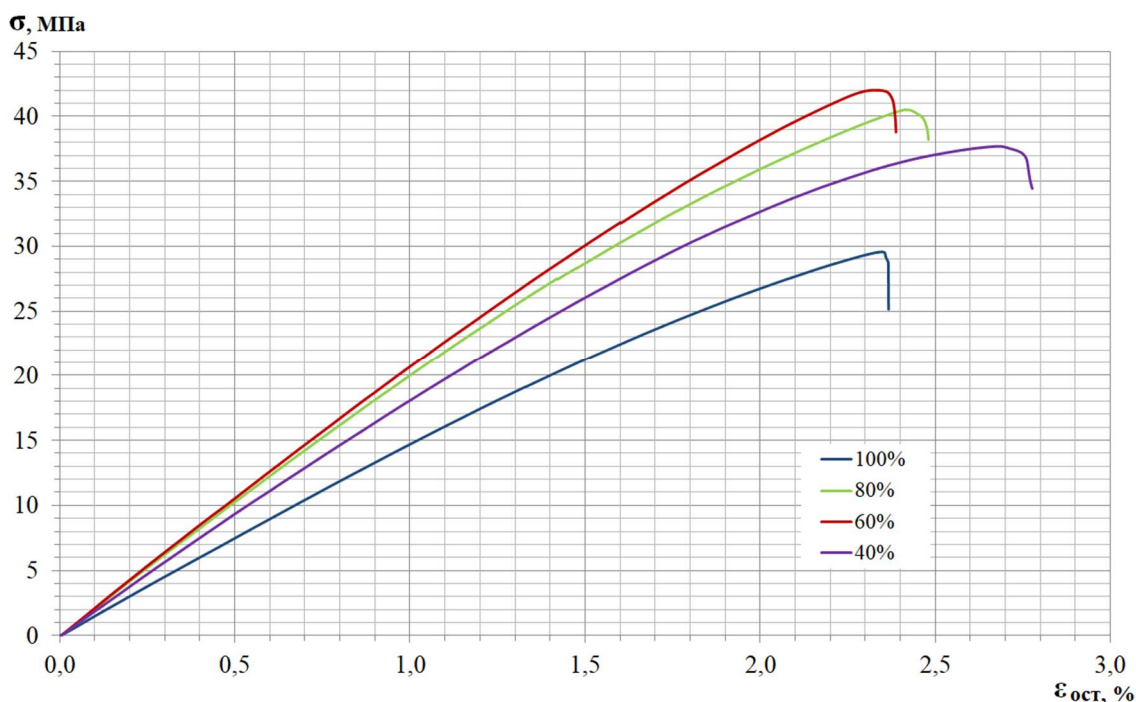


Рис. 5. Диаграммы растяжения материала (структуры) для разных процентов заполнения образца  $4 \times 10$  при реальной площади поперечного сечения

Таблица 3

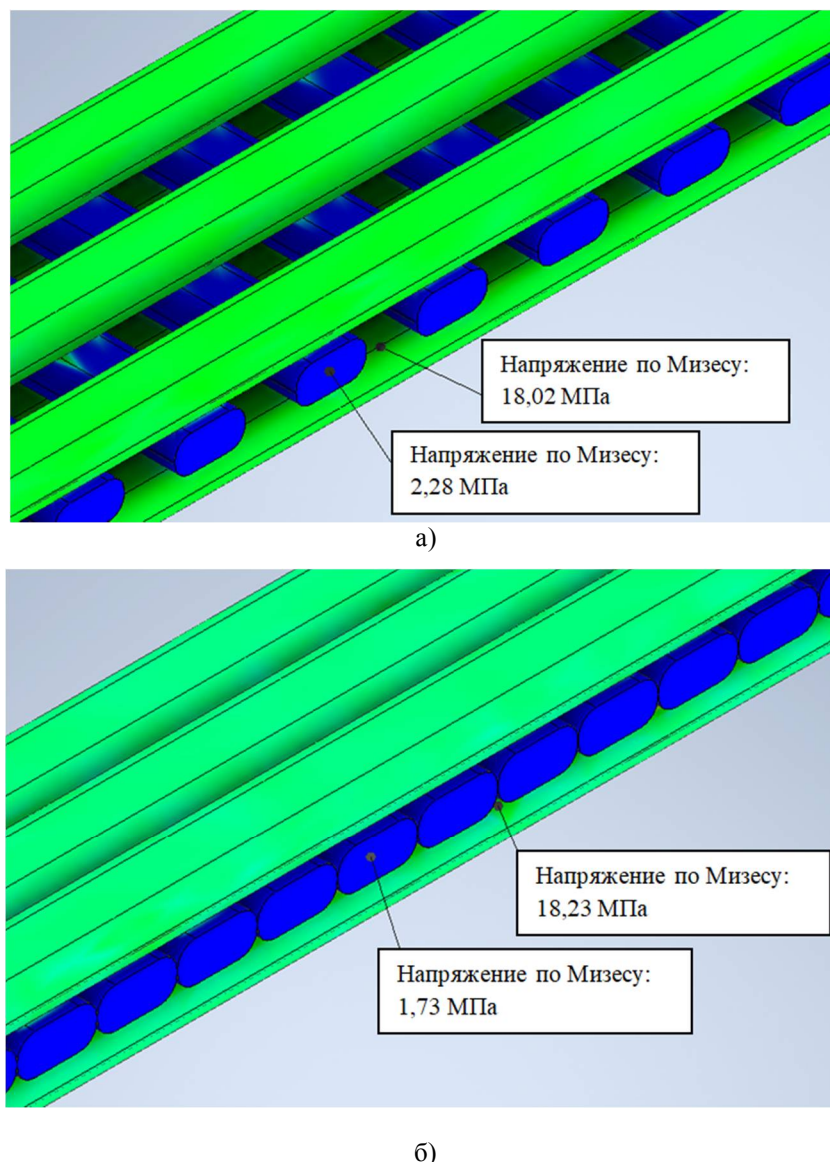
Механические характеристики материала (структуры) с реальной площадью поперечного сечения

| Процент заполнения, %              | $\sigma_{пц}$ , МПа | $\Delta_{пц}$ , % | $\sigma_{0,2}$ , МПа | $\Delta_{0,2}$ , % | $\sigma_B$ , МПа | $\Delta_B$ , % | E, ГПа | $\Delta_E$ , % |
|------------------------------------|---------------------|-------------------|----------------------|--------------------|------------------|----------------|--------|----------------|
| 100<br>(с учетом поперечных слоев) | 12,86               | 29                | 26,62                | 32                 | 29,56            | 37             | 1,49   | 32             |
| 80                                 | 18,20               | 1                 | 35,12                | 10                 | 40,53            | 13             | 2,02   | 7              |
| 60                                 | 17,18               | 5                 | 38,90                | 0,4                | 42,02            | 10             | 2,11   | 3              |
| 40                                 | 15,55               | 14                | 32,03                | 18                 | 37,69            | 19             | 1,84   | 16             |

Согласно табл. 2 и 3 можно сделать вывод, что в случае заполнения объема образца на 60 % и 80 % механические характеристики материала аддитивных структур близки к их средним значениям. Так, для предела пропорциональности, условного предела текучести и

модуля Юнга отклонения от средних значений этих характеристик составляют от 5 до 10 %, что является допустимым. Для образцов с заполнением объёма 40 % и 100% наблюдаются значительные расхождения от средних значений соответствующих механических характеристик материала.

Для понимания физики процесса работы исследуемых структур под действием растягивающей нагрузки были проведены численные эксперименты образцов с 60 % и 100 % заполнением. В данной модели рассмотрен расчет на центральное растяжение, при котором один из концов полностью фиксирован по всем степеням свободы, а к другому концу приложена нагрузка, соответствующая нагрузке на пределе пропорциональности, взятой из экспериментальных данных. Результаты моделирования аддитивных структур в случае 60 % и 100 % заполнения представлены на рис. 6.



**Рис. 6.** Результаты численного моделирования

В результате численных расчетов были определены значения предела пропорциональности, которые совпадают со средним значением данной механической характеристики материала аддитивных структур (см. табл. 2 и рис. 6). Также было установлено, что в случае сплошного заполнения структуры образца, в поперечных волокнах возникают незначительные напряжения по сравнению с напряжениями в продольных

волокна. На основании этого можно предположить, что при заполнении структуры линиями под углами  $\alpha=0^\circ$  и  $\alpha=90^\circ$  к продольной оси образца (см. рис. 2) поперечные волокна практически не работают и нет необходимости учитывать их площадь в опасном поперечном сечении образца. То есть для расчета механических характеристик материала аддитивных структур в случае сплошного заполнения справедлива формула (1), принятая для образцов с частичным заполнением объема.

Исходя из вышеизложенного была перестроена диаграмма растяжения материала и пересчитаны механические характеристики для сплошного заполнения структуры образца с учетом формулы (1) (рис. 7, табл. 4).

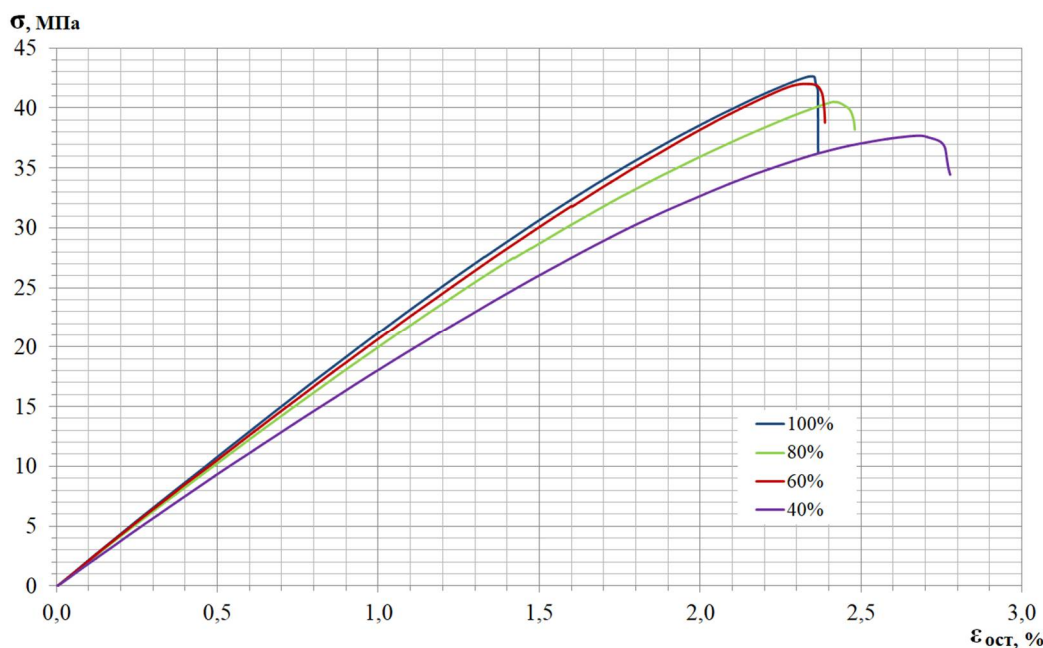


Рис. 7. Диаграммы растяжения материала (структуры) для разных процентов заполнения образца без учета поперечных волокон структуры в случае образца со 100% заполнением

Таблица 4  
Механические характеристики материала (структуры) с реальной площадью поперечного сечения

| Процент заполнения, % | $\sigma_{пц}$ , МПа | $\Delta_{пц}$ , % | $\sigma_{0,2}$ , МПа | $\Delta_{0,2}$ , % | $\sigma_B$ , МПа | $\Delta_B$ , % | E, ГПа | $\Delta_E$ , % |
|-----------------------|---------------------|-------------------|----------------------|--------------------|------------------|----------------|--------|----------------|
| 100                   | 17,71               | 2                 | 38,40                | 2                  | 42,65            | 8              | 2,15   | 1              |
| 80                    | 18,20               | 1                 | 35,12                | 10                 | 40,53            | 13             | 2,02   | 7              |
| 60                    | 17,18               | 5                 | 38,90                | 0,4                | 42,02            | 10             | 2,11   | 3              |
| 40                    | 15,55               | 14                | 32,03                | 18                 | 37,69            | 19             | 1,84   | 16             |

Из табл. 4 и рис. 7 видно, что значения механических характеристик материала аддитивных структур для случая сплошного заполнения объема образца без учета поперечных слоев в опасном сечении совпадают со средними значениями с точностью до 8 %. Для образцов с заполнением структуры образца на 40 % существенные отклонения значений механических характеристик от их средних значений, возможно, связаны с превышением площади пустот по сравнению с площадью материала в опасном поперечном сечении (табл. 5).

Таблица 5

Соотношения площади структуры к площади пустот в образце сечением 4×10 мм при разном проценте заполнения

| Процент заполнения, % | $S_{\text{ном}}, \text{мм}^2$ | $S_{\text{реал}}, \text{мм}^2$ | $S_{\text{пуст}}, \text{мм}^2$ | $\frac{S_{\text{пуст}}}{S_{\text{реал}}}$ |
|-----------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|---|
| 40                    | 40                            | 19,024                         | 20,976                         | 1,10                                      |
| 60                    | 40                            | 20,695                         | 19,305                         | 0,93                                      |
| 80                    | 40                            | 22,279                         | 17,721                         | 0,80                                      |
| 100                   | 40                            | 24,038                         | 15,962                         | 0,66                                      |

Таким образом, можно сделать вывод, что метод определения механических характеристик материала аддитивных структур на основе использования в расчетах реальной площади поперечного сечения справедлив только при определенных значениях процента заполнения структуры образца и соотношении площади пустот к площади материала.

Авторами статьи также была предпринята попытка определения механических характеристик исходного материала для печати образцов – филамента из термопластичного пластика PetG. Было установлено, что нормативная база по изготовлению образцов и методика проведения испытаний на растяжение проволок из пластика отсутствует. Поэтому было принято решение принять размеры образцов из мононити аналогично работе [15] с диаметром 1,75 мм и рабочей длиной 100 мм. В ходе испытаний на центральное растяжение разрушения мононити происходили в основном в зажимных устройствах, то есть в месте возникновения концентратора напряжений, что является недопустимым. Также наблюдались явно выраженные расхождения диаграмм растяжения образцов мононити между собой, по которым сложно определить какие-либо средние значения механических характеристик (рис. 8).

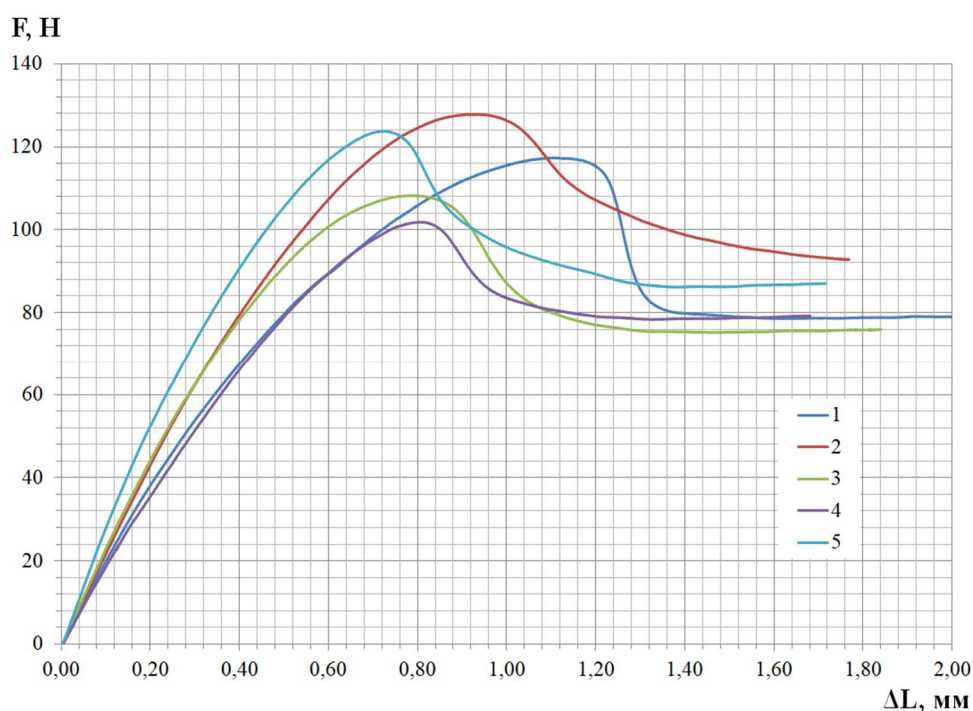


Рис. 8. Диаграммы растяжения филамента

Таким образом, на данный момент затруднительно определить механические характеристики материала филамента. Требуется более глубокая проработка вопроса формирования методики испытаний, определения размеров образцов филамента и их

закрепления в зажимных устройствах для исключения разрушения мононити в местах крепления.

**Выводы.** В настоящей статье представлены экспериментальные исследования по определению механических характеристик материала аддитивных структур согласно предложенному в [12] методу при разных размерах поперечного сечения, в частности, при четном и нечетном количестве слоев по высоте образца, а также при разном проценте заполнения объема структуры.

Исследования по сопоставлению результатов испытаний образцов разного типоразмера позволили установить определенные закономерности. Исходя из расчета механических характеристик по методу, предложенному в работе [12], можно сделать вывод, что вне зависимости от четного или нечетного количества слоев по высоте образца значения характеристик материала изменяется незначительно (максимальное расхождение от средней величины составляет 4,8 % для предела пропорциональности, 1,5 % – для условного предела текучести и 3,2% – для модуля Юнга). Таким образом, можно принять рассчитанные средние значения механических характеристик за базовые «эталонные» характеристики материала аддитивных структур для дальнейших исследований и численных экспериментов.

В ходе проведения исследований по проверке предложенного в работе [12] метода в зависимости от процента заполнения структуры образцов было выяснено, что основную долю усилий воспринимают продольные волокна, и даже в случае сплошного заполнения структуры образца это правило не нарушается. Следовательно, в расчете механических характеристик материала при заполнении структуры наплавленными нитями, расположенными вдоль и поперек продольной оси образца, необходимо исключать площадь поперечных волокон испытываемых образцов.

В ходе определения механических характеристик образцов типоразмера 4×10 мм для разного процента заполнения структуры было установлено следующее: в случаях 60, 80 и 100 % заполнения объема структуры механические характеристики в допустимой степени отличаются от средних, определенных еще на этапе сравнения диаграмм напряжений для образцов разного типоразмера. Отклонение значений предела пропорциональности лежит в диапазоне 5 %, условного предела текучести – 10 %, модуля Юнга - 7 %.

Однако полученные значения механических характеристик в случае заполнения структуры образца на 40 % показывают существенные отклонения от средних величин. Данный вопрос требует более подробного исследования. Предполагается, что в зависимости от величины пустот в образце сама конструкция аддитивной структуры начинает работать иначе, что может свидетельствовать об изменении в значениях механических характеристик.

В ходе экспериментов по определению механических характеристик исходного филамента возникли затруднения, связанные с отсутствием нормативной базы по изготовлению образцов и методики проведения испытаний на центральное растяжение. Поэтому на данном этапе исследований сложно соотнести рассчитанные механические характеристики материала аддитивных структур с характеристиками филамента. Требуется более глубокая проработка вопроса формирования методики испытаний, определения размеров образцов филамента и их закрепления в зажимных устройствах для исключения разрушения мононити в местах крепления.

#### Библиографический список

1. Кочешков И.В., Камоничкина Н.В., Камоничкин Д.Т. Перспективы использования современных технологий 3Д-печати полимерными материалами при изготовлении и проведении ремонта машиностроительных изделий // Инновационные технологии реновации в машиностроении: сб. тр. Междунар. науч.-техн. конф. – М., 2019. – С 95-99.

2. Котов В.С., Панкратов А.В., Барсков В.В. Результаты исследований возможности использования полимеров для создания элементов корабельных газотурбинных двигателей с использованием аддитивных технологий // Труды Крыловского государственного научного центра. – 2019. – Т. 4. – № 390. – С 151-162.
3. Product Development by Additive Manufacturing and 3D Printer Technology in Aerospace Industry / M. Kalender, Y. Bozkurt, S. Ersoy, S. Salman // Journal of Aeronautics and Space Technologies. – 2020. – Vol. 13. – № 1. – P. 129-138.
4. Никитина Л.Л., Гаврилова О.Е. Перспективы использования современных технологий 3D-печати в производстве изделий лёгкой промышленности из полимерных материалов // Вестник технологического университета. – 2015. – Т.18. – №7. – С. 224-226.
5. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела: учеб. пособие для вузов. – 2-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 712 с.
6. ГОСТ Р 57558-2017 (ISO/ASTM 52900:2015) РФ. Аддитивные технологические процессы. Базовые принципы. Часть 1. Термины и определения. Национальный стандарт. – М.: Стандартинформ, 2018. – 16 с.
7. Influence of Layer Thickness and Raster Angle on the Mechanical Properties of 3D-Printed PEEK and a Comparative Mechanical Study between PEEK and ABS / W. Wu, P. Geng, G. Li, D. Zhao, H. Zhang, J. Zhao // Materials. – 2015. – Vol. 8. – P. 5834-5846. DOI:10.3390/ma809527.
8. Effect of printing parameters on mechanical properties of 3D printed PLA/carbon fibre compos / V. Kovan, T. Tezel, H.E. Camurlu, E.S. Topal // Materials Science. Non-Equilibrium Phase Transformations: International Scientific Journal. – 2018. – Vol. 4. – P. 126-128.
9. Experimental Characterization of the Mechanical Properties of 3D-Printed ABS and Polycarbonate Parts / J. Cantrell1, S. Rohde1, D. Damiani, R. Gurnani, L. DiSandro1, J. Anton1, A. Young, A. Jerez1, D. Steinbach, C. Kroese1 and P. Ifju // Advancement of Optical Methods in Experimental Metchanics. – 2017. – Vol. 3. – P. 89-105. DOI:10.1007/978-3-319-41600-7\_11.
10. Карташова Е.Д., Муйземнек А.Ю. Идентификация параметров модели ABS-пластика, полученного методом послойного наплавления // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. – 2018. – № 1 (25). – С. 130–140.
11. Divyathej M V., Varun M., Rajeev P. Analysis of mechanical behavior of 3D printed ABS parts by experiments // International Journal of Scientific & Engineering Research. – 2016. – Vol. 7. – Issue 3. – P. 116-124.
12. Механические характеристики материала аддитивных структур при разной методике определения площадей поперечных сечений образцов / А.Ю. Перельгина, Т.Я. Дружинина, С.А. Антипин, Ю.А. Бобылева // Строительная механика и конструкции. – 2021. – № 3 (30). – С. 74–89.
13. ГОСТ 11262-2017 (ISO 527-2:2012) Пластмассы. Метод испытания на растяжение. - Межгосударственный стандарт. – М.: Стандартинформ, 2018. – 44 с.
14. ГОСТ 1497-84 (ИСО 6892—84) Металлы. Методы испытаний на растяжение. - Межгосударственный стандарт. – М.: Стандартинформ, 2008 – 24 с.
15. Петров В.М., Безпальчук С.Н., Яковлев С. П. О влиянии структуры на прочность изделий из пластика, получаемых методом 3D-печати // Вестник Государственного университета и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. – 2017. – Т. 9. – №4. – С. 765 – 776. DOI: 1021821/2309-5180-2017-9-4-765-776.

## References

1. Kocheshkov I V, Kamonichkina N V and Kamonichkin D T 2019 Prospects for the use of modern 3D printing technologies with polymeric materials in the manufacture and repair of machine-building products Proc. of the Int. Sci. and Tech. Conf. "Innovative Renovation Technologies in Mechanical Engineering" pp 95-99
2. Kotov V., Pankratov A., Barskov V. Prospects of additive technologies and polymer applications in marine gas turbines. Transactions of the Krylov State Research Centre. 2019; 4(390): 151–162 (in Russian).
3. Kalender M. Product Development by Additive Manufacturing and 3D Printer Technology in Aerospace Industry / M.Kalender, Y. Bozkurt, S. Ersoy, S. Salman // Journal of Aeronautics and Space Technologies, Vol. 13, No. 1, pp. 129-138, Jan. 2020.
4. Nikitina L. L. Prospects for the use of modern 3D printing technologies in the production of light industry products from polymer materials / L. L. Nikitina, O. E. Gavrilova // Bulletin of the Technological University. 2015. Vol. 18, No. 7. C. 224-226.
5. Rabotnov Yu N 1988 *Mechanics of a deformable solid body*, training manual for universities, 2nd ed (Moscow: Science) 712 p
6. GOST R 57558-2017 (ISO / ASTM 52900: 2015). Russian Federation. Additive technological processes. Basic principles. Part 1. Terms and definitions. - National standard. - M.: Standartinform, 2018 - 16 p.
7. Wu W. Influence of Layer Thickness and Raster Angle on the Mechanical Properties of 3D-Printed PEEK and a Comparative Mechanical Study between PEEK and ABS / W. Wu, P. Geng, G. Li, D. Zhao, H. Zhang, J. Zhao // Materials - 2015, Vol. 8, Pp. 5834-5846. DOI:10.3390/ma809527.
8. Kovan V. Effect of printing parameters on mechanical properties of 3D printed PLA/carbon fibre compos / Kovan V., Tezel T., Camurlu H.E., Topal E.S // International Scientific Journals «Materials Science. Non-Equilibrium Phase Transformations» - 2018, Vol. 4, Pp. 126-128. WEB ISSN 2534-8477; PRINT ISSN 2367-749X
9. Cantrell J. Experimental Characterization of the Mechanical Properties of 3D-Printed ABS and Polycarbonate Parts / J. Cantrell<sup>1</sup>, S. Rohde<sup>1</sup>, D. Damiani, R. Gurnani, L. DiSandro<sup>1</sup>, J. Anton<sup>1</sup>, A. Young, A. Jerez<sup>1</sup>, D. Steinbach, C/ Kroese<sup>1</sup>, and P. Ifju // Advancement of Optical Methods in Experimental Metchanics – 2017, Vol. 3, Pp. 89-105. DOI: [10.1007/978-3-319-41600-7\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-319-41600-7_11).
10. Kartashova E D and Muizemnek A Yu 2018 Identification of the parameters of the ABS-plastic model obtained by layer-by-layer fusion Models, systems, networks in economics, technology, nature and society 1(25) 130-140
11. Divyathej M V. Analysis of mechanical behavior of 3D printed ABS parts by experiments / M. V. Divyathej, M. Varun, P. Rajeev // International Journal of Scientific & Engineering Research – 2016, Vol. 7, Issue 3, Pp. 116-124. ISSN 2229-5518.
12. Perelygina A.Yu. Mechanical characteristics of the material of additive structures with different methods for determining the cross-section area of specimens / A.Yu. Perelygina, T. Ya. Druzhinina, S.A. Antipin, Yu.A. Bobyleva // Structural mechanics and structures. – 2021. – № 3 (30). – C. 74–89.
13. 2018 GOST 11262-2017 (ISO 527-2: 2012) Plastics. Tensile test method. Interstate standard (Moscow: Standartinform) - 44 p.
14. GOST 1497-84 (ISO 6892-84) Metals. Tensile test methods. - Interstate standard. – M.: Standartinform, 2008 - 24 p.
15. Petrov V. M. 3D-printing from plastics: inner structure influence on the strength / V. M. Petrov, S. N. Bezpал'chuk , S. P. Yakovlev // Vestnik Gosudarstvennogo universiteta



## INFLUENCE OF STRUCTURE FILLING ON THE METHOD OF DETERMINING THE MECHANICAL CHARACTERISTICS OF THE MATERIAL OF ADDITIVE STRUCTURES

A.Yu. PereLygina<sup>1</sup>, S.A. Antipin<sup>2</sup>, Yu.A. Bobyleva<sup>3</sup>, V.P. Yashchenko<sup>4</sup>

"Irkutsk National Research Technical University"<sup>1,2,3,4</sup>  
"Irkutsk State Transport University"<sup>5</sup>  
Russia, Irkutsk

---

<sup>1</sup>PhD of Technical Sciences, acting head Department of Engineering and Computer Graphics, tel.: +7 (3952) 405373, e-mail: [perelygina@istu.edu](mailto:perelygina@istu.edu)

<sup>2</sup>Graduate student of the Department of Engineering and Computer Graphics, tel.: +7 (3952) 405373, e-mail: [sergey.antipin.98@mail.ru](mailto:sergey.antipin.98@mail.ru)

<sup>3</sup>Associate scientist of the Department of Engineering and Computer Graphics, tel.: +7 (3952) 405373, e-mail: [bobylevajuliaal@yandex.ru](mailto:bobylevajuliaal@yandex.ru)

<sup>4</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanics and Strength of Materials, tel.: +7 (3952) 405144, e-mail: [vp\\_yashenko@mail.ru](mailto:vp_yashenko@mail.ru)

<sup>5</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanics, Physics and Instrumentation, tel.: +7 (3952) 405373, e-mail: [perelygina@istu.edu](mailto:perelygina@istu.edu)

---

The article discusses the issues of determining the mechanical characteristics of the material of additive structures, taking into account such printing parameters as the percentage of filling and the number of printing threads. The studies used different options for filling the structure of samples for central stretching, made using 3D printing technology. In the course of research, it was found that when determining the mechanical characteristics of the material of additive structures, it is necessary to take into account the violation of the hypotheses about the uniformity and continuity of the material accepted in the resistance of materials. For samples with different percentages of filling, the method proposed by the authors for determining the mechanical characteristics of the material of additive structures, taking into account the actual cross-sectional area, was tested. The article presents stretching diagrams and calculated mechanical characteristics of the material of additive structures, as well as the question of the influence of the ratio of the area of voids to the area of the material of threads on the mechanical characteristics of the material.

**Keywords:** mechanical characteristics of the material of additive structures, 3D printing, PetG thermoplastic, structure and fencing of the product, percentage of filling, real cross-sectional area.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕРЕВЯННЫХ ФЕРМ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЗУБЧАТЫХ ПЛАСТИНАХ

К. Е. Жидков<sup>1</sup>, В. В. Зверев<sup>2</sup>, Н. В. Капырин<sup>1</sup>

Липецкий государственный технический университет  
Россия, г. Липецк

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры металлических конструкций, тел.: +7(4742)328079,  
e-mail: [kaf-mk@stu.lipetsk.ru](mailto:kaf-mk@stu.lipetsk.ru)

<sup>2</sup>Д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой металлических конструкций,  
тел.: +7(4742)328079, e-mail: [kaf-mk@stu.lipetsk.ru](mailto:kaf-mk@stu.lipetsk.ru)

<sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры металлических конструкций, тел.: +7(4742)328079,  
e-mail: [kaf-mk@stu.lipetsk.ru](mailto:kaf-mk@stu.lipetsk.ru)

---

Описывается методика проведения натуральных испытаний деревянных ферм на металлических зубчатых пластинах. Приводятся параметры испытанных стропильных ферм, схемы загрузки конструкций. Получены результаты экспериментальных исследований при внеузловом приложении нагрузки. Определены характерные места возможного разрушения элементов. На основании результатов проведенных испытаний даны рекомендации по проектированию деревянных ферм на металлических зубчатых пластинах.

**Ключевые слова:** металлические зубчатые пластины (МЗП), деревянные стропильные фермы, натурные испытания.

**Введение.** В связи с широким предложением на строительном рынке металлических зубчатых пластин (МЗП) отмечается увеличение спроса на деревянные решетчатые конструкции.

Появление данного типа пластин связано с именем Джона Калвина Джуреита. В середине 50-х годов им была изобретены и запатентованы пластины, получившие название «Gang-Nail». Дальнейшее развитие данной технологии привело к появлению различных видов пластин, отличающихся размерами и формами зубьев.

В нашей стране исследованиями соединений на МЗП занимались с 70-х годов XX-го века. В результате были изданы рекомендации по проектированию и изготовлению дощатых конструкций с соединениями на металлических зубчатых пластинах [1], разработанные ЦНИИСК им. Кучеренко.

В настоящее время проектирование конструкций с соединениями на МЗП ведется в соответствии с СП 64.13330.2017 «Деревянные конструкции» [2] и разработанным к нему пособием [3].

Наиболее достоверным способом определения несущей способности строительных конструкций являются экспериментальные исследования. Однако в большинстве случаев они осуществляются в лабораторных условиях без учета пространственной работы конструкции в составе каркаса здания [4-7] и технологических дефектов и повреждений, существенно снижающих несущую способность [8].

**Постановка задачи.** Целью данной работы является экспериментальное исследование несущей способности и деформативности стропильных ферм на МЗП в составе

каркаса здания. Испытания проводились с учетом рекомендаций ЦННИСК им. Кучеренко [9].

**Краткое описание объекта исследования.** Конструкции для проведения испытаний представляют собой треугольные фермы (рис. 1-3) пролетом 12 м на металлических зубчатых пластинах фирмы MiTek. Зубчатые пластины выпускаются в соответствии с EN 14545:2008 из оцинкованной (плотность покрытия 275 г/м<sup>2</sup>) листовой стали. При изготовлении элементов решетки и поясов использованы доски I сорта.

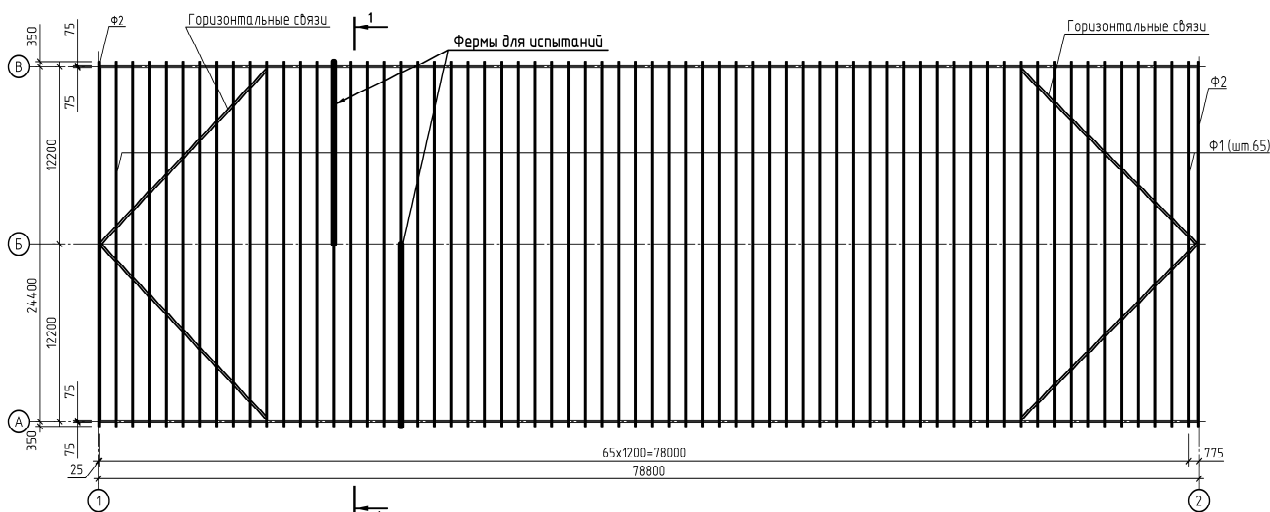


Рис. 1. Схема расположения ферм  
1-1

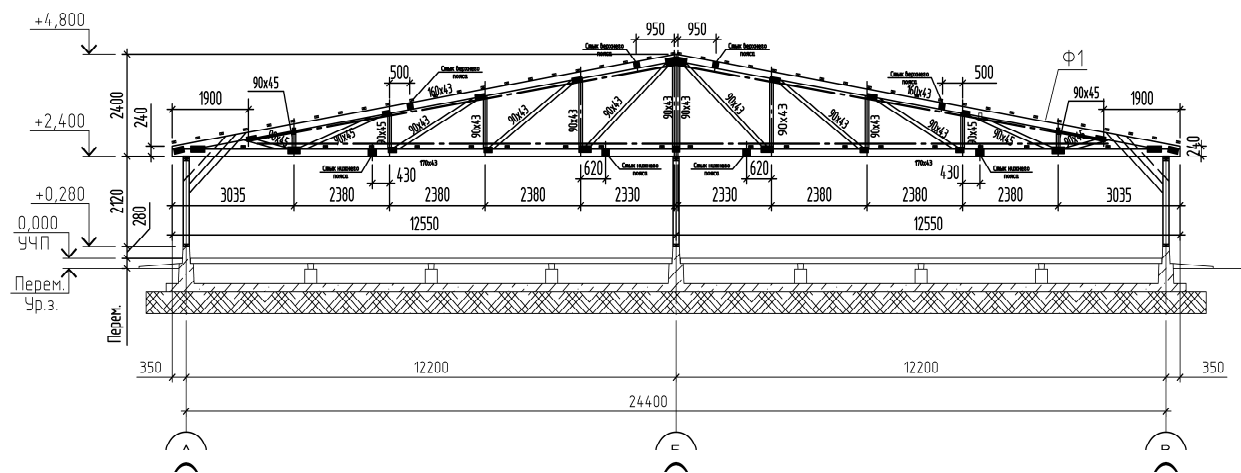


Рис. 2. Технический вид ферм

Опираие фермы по наружной оси выполнено на стойки из трех досок сечением 50x150 мм, по внутренней – на стойки из двух досок сечением 50x150 мм. Для обеспечения пространственной жесткости и геометрической неизменяемости выполнена установка горизонтальных и вертикальных связей из досок сечением 30x150 мм, а также подкосов в опорной части фермы по наружной оси из двух досок 50x150 мм. Шаг ферм принят 1,2 м. Передача нагрузки на верхний пояс фермы – внеузловая (шаг обрешетки - 0,6 м). Погонная проектная нагрузка на ферму составляет 250 кг/м.п.

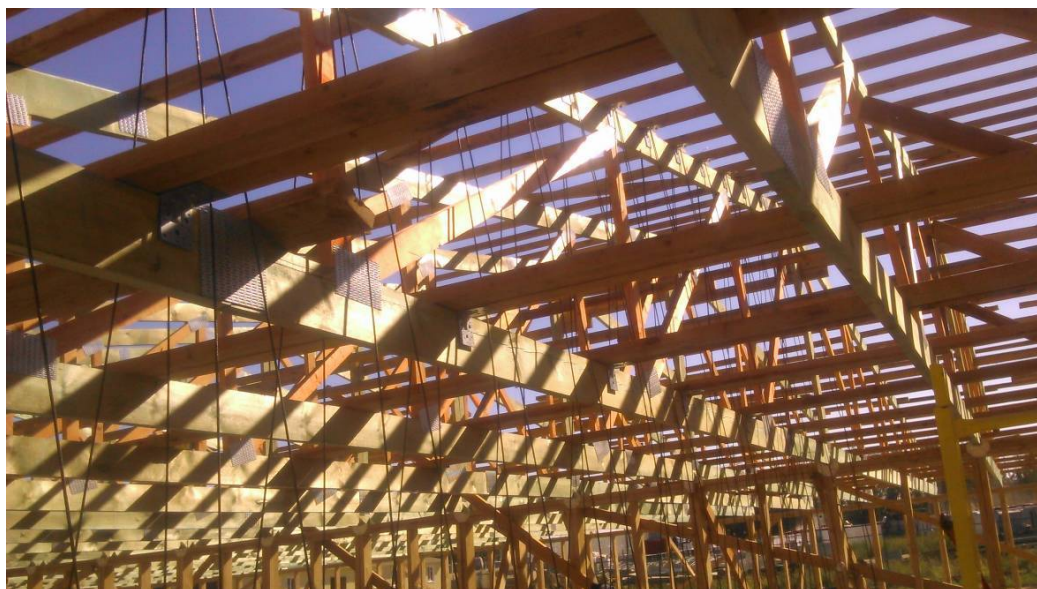


Рис. 3. Общий вид ферм

**Проведение испытаний и результаты исследований.** При испытаниях для измерения деформаций использовались прогибомеры ПАО-6 с ценой деления 0,01 мм. Схема расстановки измерительных приборов приведена на рис. 2.

Испытания проводились на строительной площадке в составе каркаса здания.

Для нагружения при испытании использовались силикатные кирпичи. Способ нагружения ферм при помощи подвески грузов в местах расположения обрешетки соответствует фактической работе конструкций (рис. 3).

В этом случае расчетная нагрузка составила  $250 \text{ кг/м} \times 0,6 \text{ м} = 150 \text{ кг}$  в узел опирания обрешетки на верхний пояс фермы.

Для снижения влияния соседних ферм обрешетка и элементы для крепления обшивки потолка не крепились к поясам, устойчивость фермы из плоскости обеспечивалась дополнительными вспомогательными элементами (из стальных уголков), не препятствовавшими свободному перемещению фермы в вертикальной плоскости (рис. 4).

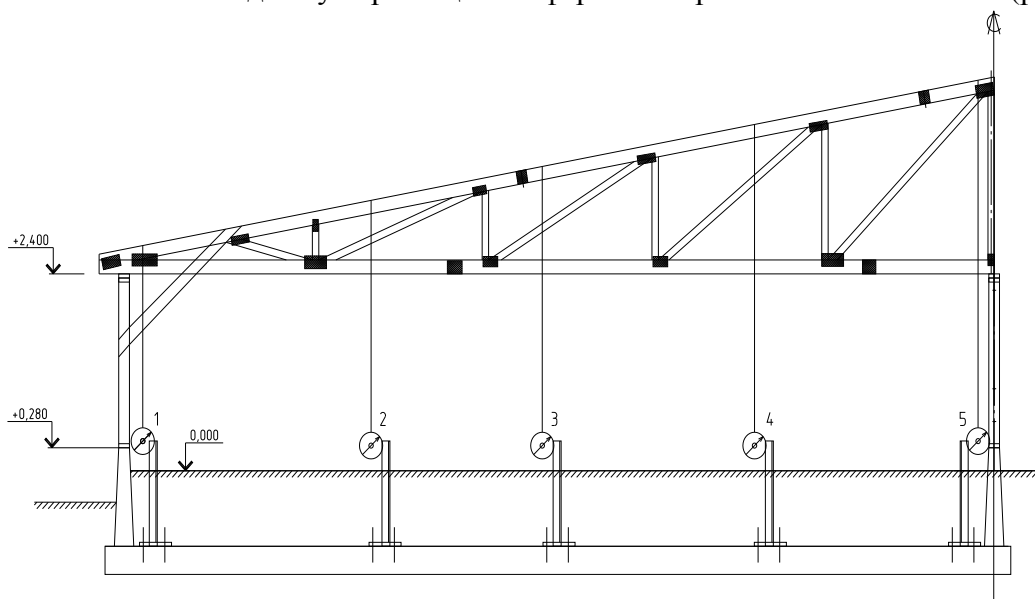


Рис. 2. Схема расстановки измерительных приборов



**Рис. 3.** Загружение фермы

Пробное нагружение конструкции выполнялось для проверки работы приборов, корректировки способа передачи нагрузки на ферму, обмятия соединений, выявления возможных несовершенств. Пробная нагрузка составляла 45 кг/узел (30 % от расчетной) с последующей разгрузкой. По результатам пробного нагружения и последующей разгрузки дополнительных дефектов и повреждений, снижающих несущую способность фермы, не было выявлено. Остаточный прогиб в середине пролета фермы составил 6 мм.

При дальнейшем исследовании работы фермы нагрузка прикладывалась ступенями величиной 10...20 % от предполагаемой расчетной нагрузки. После каждого этапа производилась выдержка не менее 15 мин с последующим снятием показаний приборов.

При испытаниях расчетная критическая нагрузка (соответствующая потере несущей способности) составляла 150 кг в узел опирания обрешетки.



**Рис. 4.** Раскрепление верхнего пояса фермы из плоскости

При испытании ферм в обоих случаях имел место плоский изгиб. В течение всего эксперимента деформации изменялись равномерно.

При достижении критической нагрузки повреждений, свидетельствующих об исчерпании несущей способности, не выявлено, прогибы не превышали предельных значений.

Для выявления резервов несущей способности загрузка была продолжена.

При испытании фермы № 1 при нагрузке 196,5 кг/узел (131 % от расчетной нагрузки) зафиксирован выгиб опорного раскоса до 1 см из плоскости фермы и нарушение соосности верхнего и нижнего поясов. Прогиб фермы при данной нагрузке составил 25,75 мм, что привело при дальнейшей выдержке конструкции (через 2 суток) к общей потере устойчивости фермы в результате выхода из плоскости верхнего пояса. При этом уголки крепления пояса из плоскости фермы были деформированы, произошло частичное разрушение узлов с вырывом МЗП (рис. 6, а).

При испытании фермы № 2 при нагрузке 171,5 кг/узел (114 % от расчетной нагрузки) произошло смятие древесины в опорной зоне стойки по средней оси здания (рис. 6, б). Прогиб фермы при данной нагрузке составил 24,8 мм. Испытания были остановлены.

Смятие древесины в опорной зоне произошло в результате поворота нижнего пояса из-за отсутствия его крепления в опорной зоне к стойке с двух сторон.

Снятие нагрузки осуществлялось ступенями в обратной последовательности. После разгрузки конструкции наблюдался остаточный прогиб 0,8 см. Остаточный прогиб конструкции после разгрузки является следствием обмятия элементов в соединениях.

а)

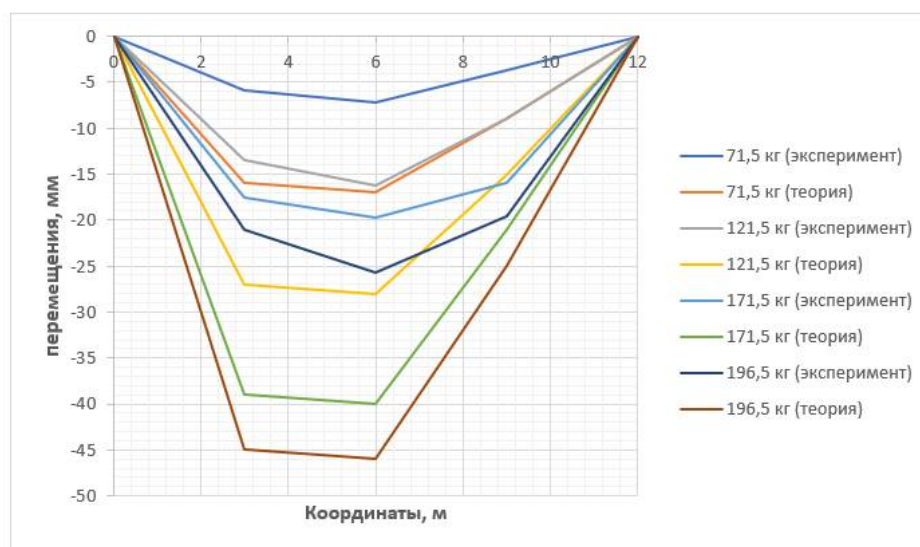


Рис. 5. Графики прогибов ферм: а) ферма Ф1; б) ферма Ф2

б)

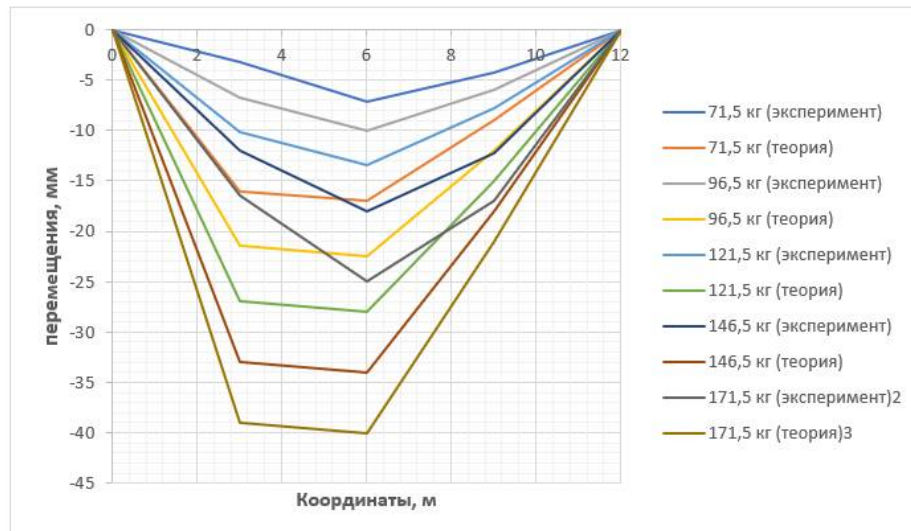


Рис. 5. Графики прогибов ферм: а) ферма Ф1; б) ферма Ф2 (продолжение)

Натурные экспериментальные исследования показали, что деформативность ферм при кратковременном приложении нагрузки происходит равномерно и не превышает допустимые значения  $1/250$  пролёта (48 мм), табл. Д.1 [2].



б)



Рис. 6. Потеря несущей способности фермы: а) потеря устойчивости фермы №1 из плоскости; б) смятие древесины в приопорной зоне фермы №2

## Выводы

1. Несущая способность и деформативность деревянных ферм на металлических зубчатых пластинах при кратковременном нагружении обеспечены. Запас по несущей способности в обоих испытаниях составил не менее 30 %, по деформативности – не менее 50%.

2. Несущая способность пластин при действии проектных нагрузок обеспечена. Дефектов и повреждений, свидетельствующих о недостаточной несущей способности металлических зубчатых пластин, не выявлено.

3. При проектировании и монтаже ферм рекомендуется обратить особое внимание на обеспечение устойчивости верхнего и нижнего поясов из плоскости (путем увеличения количества связевых блоков), соосность верхнего и нижнего поясов (монтаж по кондуктору), повышение надежности опорных узлов путем симметричной постановки элементов крепления (для предотвращения их поворота и смещения).

## Библиографический список

1. Рекомендации по проектированию и изготовлению дощатых конструкций с соединениями на металлических зубчатых пластинах / ЦНИИСК им. Кучеренко. – М.: Стройиздат, 1983. – 40 с.
2. СП 64.13330.2017. Деревянные конструкции (утв. Приказ Минстроя России от 27.02.2017 № 129/пр). – М.: ОАО «ЦПП», 2011. – 87 с.
3. Пособие по проектированию деревянных конструкций (к СНиП II -25-80) / ЦНИИСК им. Кучеренко. – М.: Стройиздат, 1986.
4. Копаница Д.Г., Офицерова Л.И., Лоскутова Д.В. Экспериментально-теоретические исследования-треугольной деревянной фермы на металлических зубчатых пластинах, // Вестник ТГАСУ. – 2008. – №3. – С. 164-170.
5. Котлов В.Г. Определение податливости, узловых соединений деревянных конструкций на металлических зубчатых пластинах // Расчет и испытание металлических и деревянных конструкций: межвуз. сб. науч. тр. – Казань, 1986. – С. 95-97.
6. Котлов В.Г., Машинова С.Л. Деревянные конструкции с узловыми соединениями на металлических зубчатых пластинах // Промышленное и гражданское строительство. – №3. – 2003. – С. 53.
7. Наумов А.К. Модельное испытание деревянных перекрестных ферм с соединением на металлических зубчатых пластинах // Оптимизация, расчет и испытания металлических конструкций: межвуз. сб. науч. тр. – Казань, 1984. – С. 59-61.
8. Жидков К.Е., Поповин Д.В. Технологические дефекты и повреждения конструкций на металлических зубчатых пластинах // Актуальные вопросы перспективных научных исследований: сб. науч. тр. по материалам междунар. науч.-практ. конф.. Смоленск, 2016. – Ч. 2. – С.130-131.
9. Рекомендации по испытанию деревянных конструкций / ЦНИИСК им. Кучеренко. – М.: Стройиздат, 1976. – 32 с.
10. Лоскутова Д.В. Частотно-временной анализ деревянной фермы с соединениями на МЗП // Актуальные проблемы современного строительства: сб. материалов 60-й междунар. науч. -техн. конф. – СПб.: СПбГАСУ, 2007. – С. 114-118.
11. Лоскутова Д.В. Экспериментальные исследования узловых соединений деревянных элементов на металлических зубчатых пластинах при изгибе // Вестник ТГАСУ. – 2008. – № 4. – С. 74-80.



12. Мартинец Д.В., Наумов А.К. Деревянные стропильные фермы на металлических зубчатых пластинах // Механическая обработка древесины. ВНИПИлеспром. – 1974. – №12. – С. 12-14.
13. Цепаев В.А. Исследование длительной прочности и деформативности соединений элементов деревянных конструкций на металлических зубчатых пластинах: дис. ... канд. техн. наук. – М., 1982. – 180 с.
14. Цепаев В.А. Длительная прочность соединений деревянных элементов на металлических зубчатых пластинах // Механическая обработка древесины: науч.-техн. реф. сб. ВНИИПИЭИлеспрома. – 1980. – № 9. – С. 10.
15. Дурновский А.М. Разработка и исследование соединений деревянных конструкций с металлическими зубчатыми пластинами: автореф. дис. ... канд. техн. наук. – М., 1982 – 21 с.

#### References

1. Recommendations for the design and manufacture of plank structures with joints on metal plates. TsNIISK named after Kucherenko. M.: Stroyizdat, 1983. 40 p.
2. Set of rules 64.13330.2017. Wooden structures (approved by Order of the Ministry of Construction of Russia dated February 27, 2017 No. 129). M.: JSC "TsPP", 2011. 87 p.
3. Manual for the design of wooden structures (to SNiP II -25-80). TsNIISK named after Kucherenko. M.: Stroyizdat, 1986.
4. Kopanitsa D.G., Ofitserova L.I., Loskutov D.V. Experimental and theoretical studies of a triangular wooden farm on metal serrated plates. Bulletin of TSUACE. 2008. No. 3. Pp. 164-170.
5. Kotlov V.G. Determination of pliability, nodal joints of wooden structures on metal plates. Calculation and testing of metal and wooden structures: Interuniversity collection. Kazan, 1986. Pp. 95-97.
6. Kotlov V.G., Mashinova S.L. Wooden structures with nodal connections on metal serrated plates. Industrial and civil construction. 2003. No. 3. P. 53.
7. Naumov A.K. Model testing of wooden cross trusses with a connection on metal serrated plates. Optimization, calculation and testing of metal structures: Interuniversity collection. Kazan, 1984. Pp. 59-61.
8. Zhidkov K.E., Popoudin D.V. Technological defects and damage to structures on metal serrated plates. Actual problems of perspective scientific research. Collection of Scientific Papers Based on the Materials of the International Scientific-Practical Conference on May 31, 2016. Part 2. Smolensk, 2016. Pp. 130-131.
9. Recommendations for testing wooden structures. TsNNISK named after Kucherenko. M: Stroyizdat, 1976. 32 p.
10. Loskutova D.V. Time-frequency analysis of a wooden truss with connections on the metal serrated plates. Actual Problems of Modern Construction: Collection of Articles. Materials of The 60th International. Scientific Technical Conference. SPb: SPbGASU, 2007. Pp. 114-118.
11. Loskutova D.V. Experimental studies of nodal joints of wooden elements on metal serrated plates during bending. Bulletin of TSUAB. 2008. No. 4. Pp. 74-80.
12. Martinets D.V., Naumov A.K. Wooden roof trusses on metal serrated plates. Mechanical processing of wood. VNIPIlesprom. 1974. No. 12. Pp. 12-14.
13. Tsepaev V.A. Investigation of long-term strength and deformability of joints of wooden structure elements on metal serrated plates. Dissertation of Candidate of Technical Sciences. M., 1982. 180 p.

14. Tsepaev V.A. Long-term strength of connections of wooden elements on metal serrated plates. Mechanical processing of wood. Dissertation of Candidate of Technical Sciences. VNIPIEIllesprom. 1980. No. 9. P. 10.
15. Durnovsky A.M. Development and research of connections of wooden structures with metal serrated plates. Abstract Dissertation. to apply for Academic Candidate of Engineering Sciences. M., 1982. 21p.

## **EXPERIMENTAL FULL-SCALE STUDIES OF WOODEN TRUSSES ON METAL SERRATED PLATES**

K. E. Zhidkov<sup>1</sup>, V. V. Zverev<sup>2</sup>, N. V. Kapyrin<sup>3</sup>

Lipetsk State Technical University  
Russia, Lipetsk

---

<sup>1</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal Structures, Tel.: +7(4742)328079, e-mail: [kaf-mk@stu.lipetsk.ru](mailto:kaf-mk@stu.lipetsk.ru)

<sup>2</sup>Dr. of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Metal Structures, Tel.: +7(4742)328079, e-mail: [kaf-mk@stu.lipetsk.ru](mailto:kaf-mk@stu.lipetsk.ru)

<sup>3</sup>PhD of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Metal Structures, Tel.: +7(4742)328079, e-mail: [kaf-mk@stu.lipetsk.ru](mailto:kaf-mk@stu.lipetsk.ru)

---

The method of carrying out full-scale tests of wooden trusses on metal serrated plates is described. The parameters of the tested trusses and the loading schemes of structures are given. The results of experimental studies were obtained with an out-of-node load application. The characteristic places of possible destruction of elements have been determined. Based on the results of the tests carried out, recommendations were given for the design of wooden trusses on metal serrated plates.

**Keywords:** metal serrated plates (MSP), wooden roof trusses, full-scale tests.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).

Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографическая ссылка. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,  
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.