

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научный журнал**

**Выпуск № 2 (25), 2020**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

**Воронеж**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».  
Территория распространения — Российская Федерация.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В. С.**, д-р техн. наук, проф.,  
Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора: Козлов В. А.**, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь: Габриелян Г.Е.**, канд. техн. наук, доцент,  
Воронежский государственный технический университет

**Буренин А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

**Гриднев С. Ю.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Зверев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

**Ефрюшин С. В.**, канд. техн. наук, доцент, Воронежский государственный технический университет

**Кирсанов М. Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»

**Колчунов В. И.**, д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет

**Леденев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет

**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам

**Нугужинов Ж. С.**, д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан

**Овчинников И. Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет

**Пшеничкина В. А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет

**Трещев А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет

**Турищев Л. С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь

**Шапиро Д. М.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Шимановский А. О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

**Шитикова М. В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Редактор: Аграновская Н.Н.

Подписной индекс в каталоге агентства «Роспечать» - 66004

Дата выхода в свет 25.06. 2020. Усл. печ. л. 13,02. Формат 60×84/8. Тираж 500 экз. Заказ № 00.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22. 05. 2018 г.

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
(строительный факультет, кафедра строительной механики)  
тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»  
394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2020

**STRUCTURAL MECHANICS  
AND STRUCTURES**

**Scientific Journal  
ISSUE № 2 (25), 2020**

- Structural Mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil Mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

**Voronezh**

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

---

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.  
Territory of distribution — Russian Federation.

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Kozlov V.A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G.E.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,  
Voronezh State Technical University

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

**Burenin A.A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur

**Gridnev S.Yu.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Zverev V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

**Efryushin S.V.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University

**Kirsanov M.N.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

**Kolchunov V.I.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., academician of RAACS, South-West State University

**Ledenyov V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Tambov State Technical University

**Nguyen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam

**Nuguxhinov Zh.S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan

**Ovchinnikov I.G.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University

**Pshenichkina V.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University

**Trechshev A.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University

**Turichshev L.S.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus

**Shapiro D.M.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Shimanovsky A.O.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus

**Shitikova M.V.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Editor: Agranovskaja N. N.

Subscription index in agency catalogue «Rospechat» - 66004

Publication date 25.06. 2020. Conventional printed sheets 13,02. Format 60×84/8. Numbers of copies 500. Order № 00.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate ПИ № ФС 77 - 72895 от 22. 05. 2018 г.

Price is subject to change

---

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation  
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University  
84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

© Voronezh State Technical University, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

### ***СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ***

<b>Кирсанов М. Н.</b> Статический расчет составной арочной фермы с произвольным числом панелей	7
<b>Терзе С. В.</b> Аналитический расчет зависимости деформаций консольной стойки от числа панелей в системе MAPLE .....	16
<b>Суд И. Б.</b> Вывод формул для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей в системе MAPLE .....	25
<b><i>ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ</i></b>	
<b>Аверин А. Н.</b> Колебания жесткой нити под действием подвижной нагрузки .....	33
<b><i>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ</i></b>	
<b>Сафронов В. С., Мельхиор Н.</b> Показатели надежности железобетонных пролетных строений проектируемых автодорожных мостов для современных российских и европейских нормативных временных нагрузок .....	44
<b>Степанов С. Д., Богомолов А. Г.</b> Численные исследования некоторых явлений аэродинамической неустойчивости балки жесткости вантового мостового сооружения .....	58
<b><i>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ</i></b>	
<b>Ефрюшин С. В., Юрченко А. И.</b> Исследование поведения динамически изменяющейся расчетной схемы 4-этажного монолитного железобетонного каркаса при демонтажных работах взрывным способом .....	69
<b>Ефрюшин С. В., Юрьев В. В.</b> Математическое моделирование несущей способности железобетонных конструкций при пожаре с применением ПК ANSYS MECHANICAL .....	78
<b><i>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ</i></b>	
<b>Гриднев С. Ю., Гарри Н. Э., Острецов В. А.</b> Оптимизация грунтового основания для расчетного моделирования напряженно-деформированного состояния здания повышенной этажности .....	86
<b>Ким М. С., Гопиенко Е. В.</b> Взаимное влияние свайного и плитного фундаментов .....	99
<b>Правила оформления статей .....</b>	111

## CONTENT

### *STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS*

<b>M. N. Kirsanov</b> Static calculation of a composite arch truss with an arbitrary number of panels.....	7
<b>S. V. Terze</b> Analytical calculation of the dependence of cantilever rack deformations on the number of panels in the maple system.....	16
<b>I. B. Sud</b> Derivation of formulas for deflection of the girder truss with an arbitrary number of panels in the MAPLE system.....	25

### *MOBILE LOAD DYNAMIC EFFECT ON ELASTIC SYSTEMS*

<b>A. N. Averin</b> Rigid string vibrations under moving load.....	33
---	----

### *CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES*

<b>V.S. Safronov, N. Mel'khior</b> Reliability indicators for reinforced concrete span structures of designed road bridges for modern russian and european normative time loads.....	44
<b>S. D. Stepanov, A. G. Bogomolov</b> Numerical research of some phenomena of stiffening girder aerodynamic instability of a cable-stayed bridge structure.....	58

### *CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES*

<b>S. V. Efryushin, A. I. Yurchenko</b> A research of the behavior of dynamically changing calculation diagram of the 4-storey monolithic reinforced concrete frame during demolition.....	69
<b>S. V. Efryushin, V. V. Yuriev</b> Mathematical modeling of reinforced concrete structures bearing capacity in case of fire using ansys mechanical .....	78

### *CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES*

<b>S. Yu. Gridnev, N. E. Garry, V. A. Ostretsov</b> Soil foundation optimization for deflected mode calculation of a high storey building...	86
<b>M. S. Kim, E.V. Gopienko</b> Interference of pile and panel-wall foundations.....	99
<b>Requirements for articles to be published.....</b>	111

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04

## СТАТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СОСТАВНОЙ АРОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет "МЭИ"<sup>1</sup>

Россия, г. Москва

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Дается вывод формул для прогиба плоской статически определимой фермы. Алгоритм вывода формул зависимости прогиба конструкции от размеров фермы и числа панелей основан на методе индукции. Расчет усилий в стержнях и реакции опор выполнен в системе символьной математики Maple. Для вычисления прогиба используется интеграл Мора. Расчет ферм с различным числом панелей дает последовательности коэффициентов в формуле для прогиба. Общий член этих последовательностей выявляется с применением специализированных операторов системы Maple. Получены асимптотики решения по двум независимым параметрам, задающим пропорции конструкции. Графики построенных решений обнаруживают некоторые особенности конструкции.

**Ключевые слова:** ферма, индукция, Maple, арка, прогиб.

### Введение

Метод конечных элементов в различных вариантах [1-6] для расчета строительных конструкций является одним из основных, но не единственным, в инженерной практике. Еще один метод — аналитический. Несмотря на ограниченность возможностей аналитических решений они являются достаточно важными элементами как в практических расчетах, выполняя функции контроля и предварительной оценки, так и в теоретическом анализе предлагаемых схем. Ценность аналитических решений определяется как удобством их применения, так и возможностью использования для расчета конструкций широкого класса. Так, аналитические решения, представленные в рядах с неперменной необходимостью оценки остаточного члена, или в виде программ, которые требуют использования компьютера для доведения до конечного ответа [7-10], не так ценны как простые формулы. В расчете ферм известны формула Качурин [11] с условной (приближенной) оценкой влияния схемы решетки на результат и решения для регулярных ферм Игнатьева В.А. [12,13]. Наиболее распространенным методом для получения формул зависимости прогиба от параметров регулярной (периодической) конструкции, в число которых входит и параметр регулярности схемы — число панелей, является метод индукции [14,15]. Этим методом, существенно использующим операторы символьной математики, получен ряд формул для плоских [16-21] и пространственных ферм [22, 23].

### Схема фермы. Постановка задачи

Плоская с горизонтальным ригелем арочная ферма составного типа имеет высоту  $(m+k+1)h$  и пролет  $L = 2a(k+n+1)$  (рис. 1). Число стержней в ферме  $n_R = 8(n+k+m)+2$ . В это число входят и четыре стержня, заменяющие в расчете шарнирные опоры неподвижного типа. Общая длина всех стержней конструкции равна  $2(k+m+2n-1)a + 2(m+2k+n+1)c + 2(k+n+2m-1)h$ , где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ . Конструкция фермы

имеет регулярную схему с тремя независимыми параметрами  $m$ ,  $n$ ,  $k$ , определяющими пропорции фермы. Фермы такого типа широко используются в составе пространственных конструкций промышленных зданий и сооружений. Однако для прогиба такой конструкции, несмотря на ее простоту, нет формулы, учитывающей не только размеры, упругие свойства материала и нагрузку, но и число панелей в ее частях. В настоящей работе ставится задача о нахождении аналитической зависимости прогиба арки в центральной ее части от числа панелей. Предполагая все соединения стержней шарнирными, получаем статически определимую модель, усилия в стержнях которой вместе с реакциями опор находим из уравнений равновесия узлов.

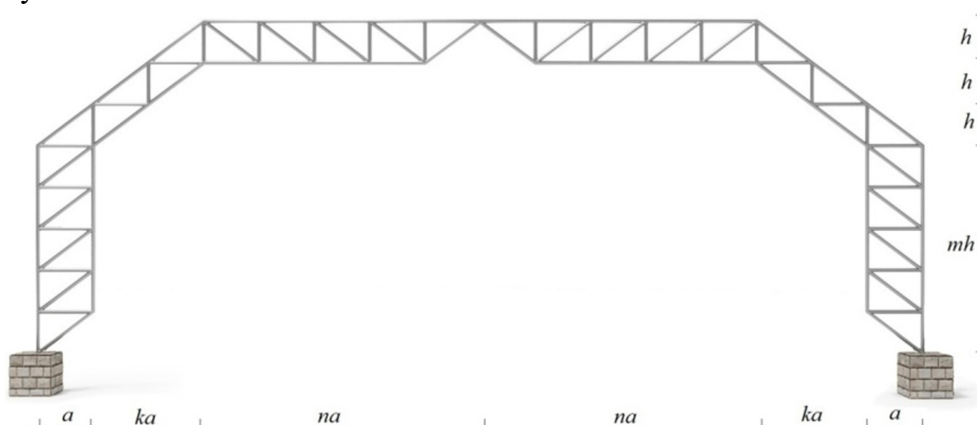


Рис. 1. Ферма,  $n = 5$ ,  $k = 2$ ,  $m = 5$

### Расчет усилий

Матрица  $\mathbf{G}$  системы уравнений равновесия узлов состоит из направляющих косинусов усилий, которые вычисляются по данным координат узлов в концах стержней  $l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}$ ,  $l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}$ ,  $i = 1, \dots, n_R$ ,  $l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}$ . Здесь первый индекс  $i$  в номере  $N_{i,j}$  соответствует номеру стержня, второй при  $j = 1$  имеет номер шарнира в начале стержня, а при  $j = 2$  номер его конца. Выбор начала и конца стержня условный и никак не влияет ни на знак усилия, ни на его значение. Направляющие косинусы в  $\mathbf{G}$  имеют вид:

$$G_{q,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad q = 2N_{i,2} - 2 + j, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_R, \quad q \leq n_R,$$

$$G_{q,i} = l_{j,i} / l_i, \quad q = 2N_{i,1} - 2 + j, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_R.$$

Из решения системы линейных уравнений  $\mathbf{G}\bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{B}}$ , где  $\bar{\mathbf{S}}$  вектор усилий в стержнях,  $\bar{\mathbf{B}}$  — вектор нагрузок, находятся усилия в стержнях фермы и реакции опор. В нечетные строки  $B_{2i-1}$  должны быть записаны горизонтальные узловые нагрузки, приложенные к узлу  $i$  (в данной задаче таких нет), в четные  $B_{2i}$  записаны вертикальные нагрузки. Методом обратной матрицы  $\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{G}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$  находится решение. Прогиб фермы (вертикальное смещение сочленяющего узла C) находится с помощью интеграла Мора:

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_R-4} \frac{S_j s_j l_j}{EF}.$$

В формуле приняты обозначения:  $S_j$  — усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки,  $s_j$  — усилия от единичной силы, приложенной к сочленяющему шарниру,  $l_j$  — длина стержня  $j$ . Площади сечений стержней приняты одинаковыми. Модуль Юнга для всех стержней конструкции равен  $E$ .



**Сосредоточенная нагрузка в середине пролета** (рис. 2). Рассмотрим случай  $m=n$ . Анализируя решения для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, получаем, что общий вид формулы зависимости прогиба от параметров конструкции имеет вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (1)$$

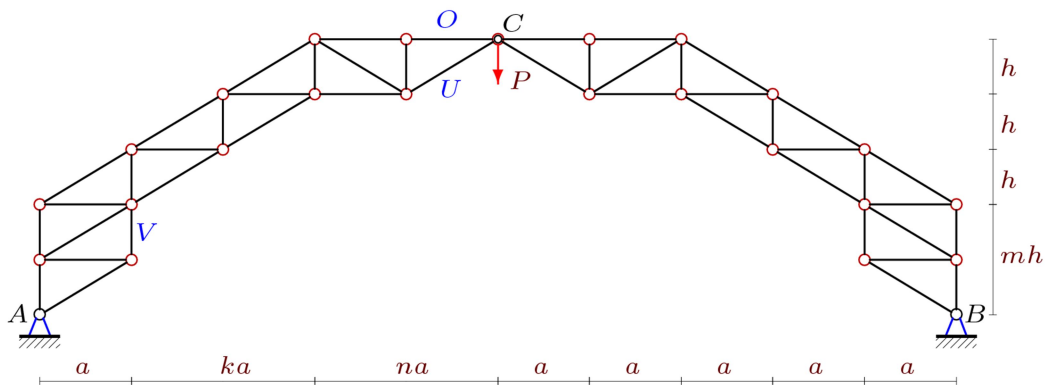


Рис. 2. Ферма под действием сосредоточенной нагрузки,  $n=m=k=2$

При этом образуются последовательности коэффициентов. При  $k=1$  для  $C_1$ : 0, 3, 10, 23, 44, 75, 118, 175, для  $C_2$ :  $3/2$ , 5,  $23/2$ , 21,  $67/2$ , 49,  $135/2$ , 89... Коэффициенты  $C_1 = C_3$  не зависят от числа панелей  $k$ , для них методами системы Maple выявляются общие члены:

$$C_1 = C_3 = (n-1)(n^2 + n + 3) / 3. \quad (2)$$

Коэффициент  $C_2$  зависит от  $k$ . Для различных значений  $k$  имеем:

$$\begin{aligned} k=1: & C_2 = 1 + 3n^2 / 2 - n, \\ k=2: & C_2 = 3 / 2 + 5n^2 / 2 - 2n, \\ k=3: & C_2 = 2 + 7n^2 / 2 - 3n, \\ & \dots \end{aligned}$$

Обобщение этих формул по  $k$  очевидно:

$$C_2 = (n^2(2k+1) - 2nk + k + 1) / 2. \quad (3)$$

Таким образом, формула (1) с коэффициентами (2) и (3) дает решение поставленной задачи в случае сосредоточенной нагрузки. Использован метод двойной индукции. Для проверки можно провести такой же анализ в другом порядке — сначала по  $k$ , затем по  $n$ . Выпишем также и формулы для усилий в стержнях верхнего и нижнего пояса панели в середине пролета и стойке нижней боковой панели фермы, полученные одновременно с выводом формулы для прогиба:

$$O = 0, U = -Pc / (2h), V = -P / 2,$$

Реакции опор арки:

$$X_A = Pa / (2h), Y_A = Y_B = P / 2.$$

Заметим, что эти формулы при  $m = n$  не зависят от числа панелей и достаточно просто получаются и без применения системы компьютерной математики. Графические средства Maple позволяют также получить картину распределения усилий в стержнях фермы (рис. 3). Толщина отрезков стержней пропорциональна усилиям, синим цветом отмечены сжатые



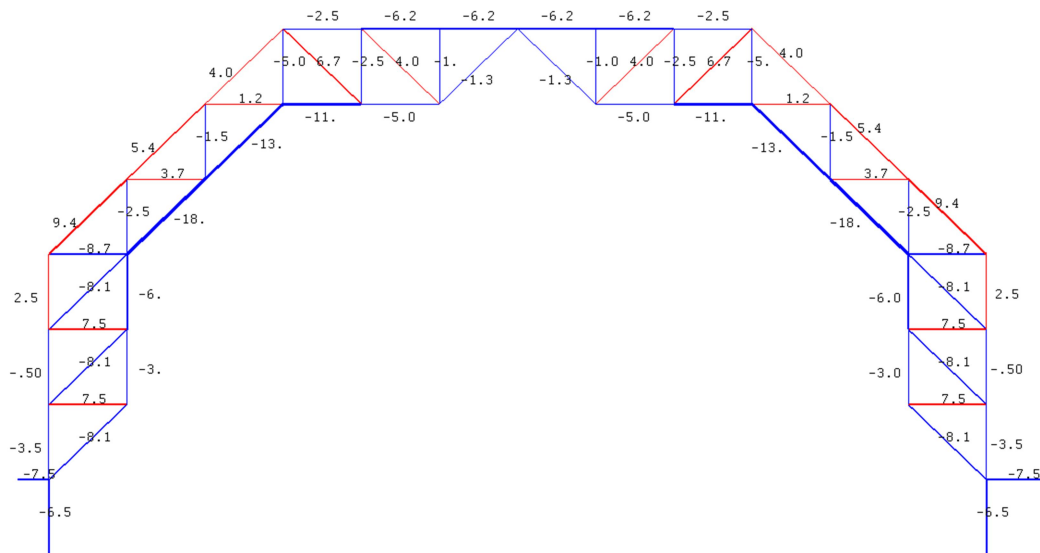
Единственным отличием этого решения являются более сложные аналитические преобразования в системе Maple, приводящие к рекуррентным уравнениям большего порядка. Формулы для усилий в выбранных стержнях в этом случае включают числа регулярности  $n$  и  $k$ :

$$O = -Pa(n+k)/(2h), \quad U = -Pc/(2h), \\ V = -P(n+k+1)/2.$$

Реакции опор:

$$X_A = Pa(n+k+1)/(2h), \\ Y_A = Y_B = P(2n+2k+3)/2.$$

Распределение усилий при равномерной нагрузке (рис. 5) схоже с аналогичным при сосредоточенной нагрузке лишь в некоторых стержнях. Верхний же и нижний пояс составного ригеля сжаты, что объясняется в первую очередь действием распора. Сжаты также и внутренняя и внешняя стороны стоек в нижней панели. Значительных величин достигают и усилия в стержнях решетки стоек.



**Рис. 5.** Распределение усилий в стержнях фермы. Распределенная нагрузка,  $n=m=3$ ,  $k=2$ ,  $a=5$ м,  $h=2$ м

**Анализ полученных результатов.** Некоторые особенности полученного решения можно проследить на графиках, построенных по формуле (1). Рассмотрим, например, арку постоянного пролета  $L = 2a(n+k+1)$  с постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузкой  $P_0 = (2n+2k+1)P$  при фиксированной сумме числа панелей в ригеле и боковых скосах, например,  $k+n=15$ . Построим графики решения (1) для относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$  с коэффициентами (4), найденными для нагрузки по верхнему поясу при  $L = 70$  м и различных значениях высоты  $h$  (рис. 5). В такой постановке получается, что арки с большими скосами (число  $k$  велико) и малыми длинами горизонтальных участков ( $n$  мало) под действием равномерной нагрузки прогибаются не вниз, а вверх. Это начальный участок кривых (рис. 6). Другая особенность графика решения — непропорциональная зависимость прогиба от высоты. Порядок кривых при  $h = 1$  м и  $h = 2$  м соответствует логике задачи — арка с малой толщиной  $h$  прогибается больше. Однако при  $h = 6$  м кривая прогиба неожидан-

но оказывается выше соответствующей кривой при  $h = 2$  м. Такая нелинейность характерна для распорных конструкций и отчасти объясняется полиномиальными зависимостями (4).

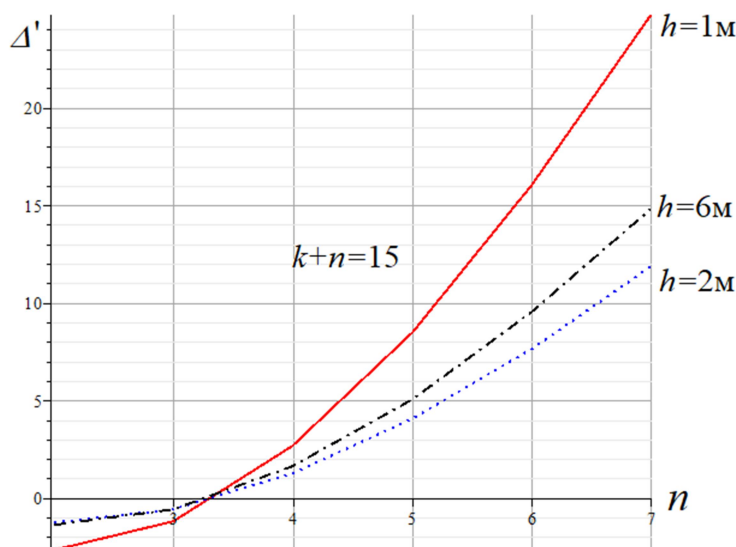


Рис. 6. Зависимость относительного прогиба от числа панелей  $n$  для распределенной по верхнему поясу нагрузки

На рис. 7 показана зависимость этого же решения от числа  $k$  при фиксированном  $n$ . Как и в предыдущем графике, чрезмерное увеличение  $k$  приводит к отрицательным прогибам. В зависимости от  $k$  меняется и порядок кривых при различных  $h$ . Интересны и точки пересечения кривых, означающие, что для разных  $h$  при некотором  $k$  прогиб может быть одинаковым. Отметим также, что независимо от высоты  $h$  прогиб обращается в ноль при одном и том же значении  $k$ .

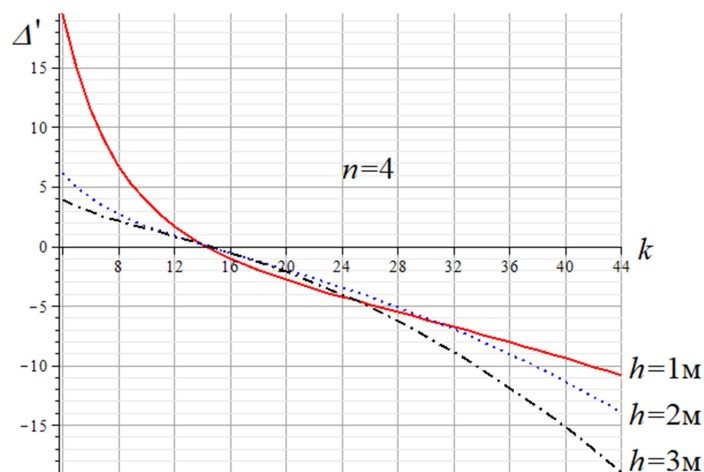


Рис. 7. Зависимость относительного прогиба от числа панелей  $k$  для распределенной по верхнему поясу нагрузки,  $n=4$

Аналитическая форма решения средствами Maple позволяет найти его асимптотику как по числу  $n$ , так и по числу  $k$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^3 = h / (6L), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k^2 = -h(2n-1) / (24L).$$

## Заключение

Получено аналитическое решение задачи о прогибе составной арочной фермы с произвольным числом панелей. Зависимости имеют вид полиномов степени не выше четвертой.

Графики этих зависимостей обнаружили некоторые особенности, обычно ускользающие от исследователей, применяющих только численные методы. Полученные формулы могут быть использованы в решении задач оптимизации конструкций, а использованный метод двойной индукции — для вывода аналогичных зависимостей для других стержневых конструкций. Введением поправочных коэффициентов в (1) решение легко обобщается на случай различных жесткостей стержней различных длин.

## Библиографический список

1. Резунов А.В., Лютоева Ю.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты при различных способах опирания краев и произвольном загрузении // *Строительная механика и конструкции*. 2019. № 2(21). С. 20-31.
2. Козлов А.В. Классификация конструкций объединения железобетонной плиты со стальными балками. 2019. № 2(21) С. 50-63.
3. Игнатъев А.В., Габова В.В. Алгоритм статического расчета плоских стержневых систем по методу конечных элементов в смешанной форме // *Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета*. Серия: Естественные науки. 2007. № 6. С. 72-77.
4. Игнатъев А. В., Игнатъев В. А., Онищенко Е. В. Решение геометрически нелинейных задач статике шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // *Вестник МГСУ*. 2016. №. 2. С. 20-33.
5. Игнатъев А.В. Основные формулировки метода конечных элементов в задачах строительной механики. Часть 1 // *Вестник МГСУ*. 2014. № 11. С. 37-57.
6. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Analysis of systems with unilateral constraints through the finite element method in the form of a classical mixed method // В сборнике: *Procedia Engineering*. 2016. С. 1754-1759.
7. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // В сборнике: 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. С. 382-385.
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // *Applied Mathematical Sciences*. 2016. Т. 10. № 54. С. 2647-2660.
9. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоского призматического каркаса // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 2001. – №. 106-118.
10. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // *Известия РАН. Механика твердого тела*. – 1999. – №. 4. – С. 174-189 .
11. Качурин В. К. Теория вантовых систем. Статический расчет. – Ленинград–Москва : Строиздат, 1962. – 224 с.
12. Галишников В.В., Игнатъев В.А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006.
13. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
14. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // *Инженерно-строительный журнал*. 2012. № 5 (31). С. 38-42.
15. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
16. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // *Magazine of civil Engineering*. 2015. № 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
17. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 25–32) doi: 10.5862/MCE.61.3

18. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
19. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
20. Воробьев О. В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. Т. 1. №. 24. С. 25-38.
21. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. Т.1. № 20. С. 21-29.
22. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
23. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 4-8.

#### Reference

1. Rezunov A.V., Lutoeva Yu.N. Analysis of the stress-strain state of a rectangular plate with various methods of supporting the edges and arbitrary loading. Construction Mechanics and Structures. 2019.No 2 (21). Pp. 20-31.
2. Kozlov A.V. Classification of structures for combining reinforced concrete slabs with steel beams. 2019.No 2 (21). Pp. 50-63.
3. Ignatiev A.V., Gabova V.V. The algorithm for static calculation of flat rod systems by the finite element method in mixed form. Bulletin of the Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Natural Sciences. 2007. No. 6. Pp. 72-77.
4. Ignatiev A.V., Ignatiev V.A., Onishchenko E.V. Solution of geometrically non-linear problems of the statics of hinged-rod systems based on the finite element method in the form of the classical mixed method . Vestnik MGSU. 2016. No. 2, p. 20-33.
5. Ignatiev A.V. The main formulations of the finite element method in the problems of structural mechanics. Part 1. Vestnik MGSU. 2014. No. 11. S. 37-57.
6. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Analysis of systems with unilateral con-straints through the finite element method in the form of a classical mixed method. In the collection: Procedia Engineering. 2016.Pp. 1754-1759.
7. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages. Collected: 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015.S. 382-385.
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rec-tangle. Applied Mathematical Sciences. 2016.V. 10. No. 54. Pp. 2647-2660.
9. Rybakov L.S. Linear theory of a flat prismatic skeleton. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2001. No. 106-118.
10. Rybakov L.S. Linear theory of a plane orthogonal lattice. Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 1999. No. 4. Pp. 174-189.
11. Kachurin V.K. Theory of cable-stayed systems. Static calculation. Leningrad – Moscow: Stroizdat, 1962 . 224 p.
12. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. Regular core systems. Theory and calculation methods. - Volgograd: VolgGASU, 2006.
13. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems - Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
14. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the influence of installation errors on the rigidity and strength of a flat truss. Engineering and Construction Journal. 2012. No. 5 (31). Pp. 38-42.
15. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016.V. 1. No. 3. Pp. 14-17.

16. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. Magazine of civil Engineering. 2015. No. 5 (57). Pp. 66-73. doi: 10.5862 / MCE.57.6
17. Tinkov D.V. Optimal geometry of a flat beam diagonal truss taking into account the linear creep of the material. Magazine of civil Engineering. 2016. No. 1(61). Pp. 25–32) doi: 10.5862 / MCE.61.3
18. Tinkov D.V. Formulas for calculating the deflection of a collapsed beam diagonal truss with an arbitrary number of panels. Structural Mechanics and Structures. 2016.Vol. 2. No. 13 (13). Pp. 10-14.
19. Osadchenko N.V. Analytical solutions to the problems of deflection of flat trusses of arch type. Structural Mechanics and Structures. 2018.V.1. No. 16. Pp.12-33.
20. Vorobyev O. V. On methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of hinged structures. Structural Mechanics and Structures. 2020. V. 1. No. 24. Pp. 25-38.
21. Belyankin N.A., Boyko A.Yu. Formulas for deflection of a truss beam with an arbitrary number of panels with uniform loading. Structural Mechanics and Structures. 2019. No. 1 (20). Pp. 21-29.
22. Kirsanov M.N. An analytical study of the stiffness of a spatial statically determinate truss. Vestnik MGSU. 2017.V. 12. No. 2 (101). Pp. 165-171.
23. Larichev S.A. Inductive analysis of the effect of a building lift on the stiffness of a spatial beam truss. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015.V. 1.Pp. 4-8

## STATIC CALCULATION OF A COMPOSITE ARCH TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov<sup>1</sup>

National Research University «MPEI»<sup>1</sup>

Moscow, Russia

---

<sup>1</sup>Dr of Physics and Mathematics, professor, tel.: +7(495)3627314; e-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

---

The derivation of the formula for deflection of statically determinate flat truss is given. The algorithm for deriving formulas for the dependence of the deflection of the structure on the size of the truss and the number of panels is based on the induction method. The calculation of the forces in the rods and the reaction of the supports is performed in the symbolic mathematics system Maple. The Mohr integral is used to calculate the deflection. The calculation of trusses with different numbers of panels gives a sequence of coefficients in the deflection formula. The common member of these sequences is identified using specialized operators of the Maple system. Asymptotics of the solution are obtained for two independent parameters that define the proportions of the construction. Graphs of the constructed solutions reveal some design features.

**Keywords:** Arch, truss, induction, Maple, deflection

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ЗАВИСИМОСТИ ДЕФОРМАЦИЙ КОНСОЛЬНОЙ СТОЙКИ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

С. В. Терзе<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет "МЭИ"<sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Студент., тел.: +7(909)650-81-04; e-mail: sergeyyterze@rambler.ru

---

Стойка и консоль плоской статически определимой фермы имеют простую раскосную решетку. Одна опора неподвижная, другая – подвижная. Расчет прогиба конца консоли по формуле Максвелла – Мора в аналитической форме произведен для нагрузки, распределенной по нижнему поясу консоли, и сосредоточенной. Решения для ферм с различным числом панелей в консоли и стойке методом двойной индукции обобщен на произвольное число панелей. Выполнен асимптотический анализ решения. Для получения усилий в символьной форме и решения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты искомым формул, применен аппарат символьных преобразований системы Maple. В решение входят семь геометрических параметров конструкции, модуль упругости стержней одинакового сечения и нагрузка.

**Ключевые слова:** ферма, индукция, Maple, консоль, прогиб.

### Введение

Ферменные конструкции имеют широкое применение в строительстве. Простота конструкции, удобство монтажа и транспортировки элементов конструкции, отлаженные методы расчета выгодно отличают фермы от других видов конструкций. Особенно это проявляется в металлических фермах. Для расчета прочности и деформативности ферм чаще всего используют компьютерные программы, основанные на методе конечных элементов. Некоторые простые статически определимые системы допускают и расчет базовыми методами механики без применения вычислительной техники, например, методом вырезания узлов. Это касается задач, в которых идет расчет конкретных конструкций с заданными нагрузками. Отдельной задачей строительной механики в области аналитических расчетов является задача определения эксплуатационных характеристик ферм с произвольным числом панелей. Как правило, это касается регулярных систем [1]. Большая часть известных решений получено методом индукции [2-4]. Так были найдены формулы для прогиба регулярных арочных ферм [4-17], плоских решетчатых ферм [18-26] и пространственных стержневых систем [27-31]. Этим же методом выводится формула для Г-образного кронштейна с семью независимыми геометрическими параметрами. Ранее формулы для Г-образного кронштейна с различными видами решеток были получены в [32-34]. Точное решение для больших деформаций консольной балки при точечной нагрузке на свободном конце с использованием метода вариационных итераций получено в [35,36]. Получены формулы для углов поворота, а также горизонтальные и вертикальные перемещения консольной балки. Конечные деформации консольных балок изучены в [37-40].



## Схема фермы и расчет усилий

Стойка фермы имеет раскосную решетку из  $m$  панелей по высоте общей высотой  $mh+c$ . Консоль длиной  $nb$  загружается либо на конце вертикально силой  $P$ , либо равномерно распределенной по узлам нагрузкой (рис. 1). Расчет усилий в аналитической форме производится по программе [2], составленной на языке символьной математики Maple.

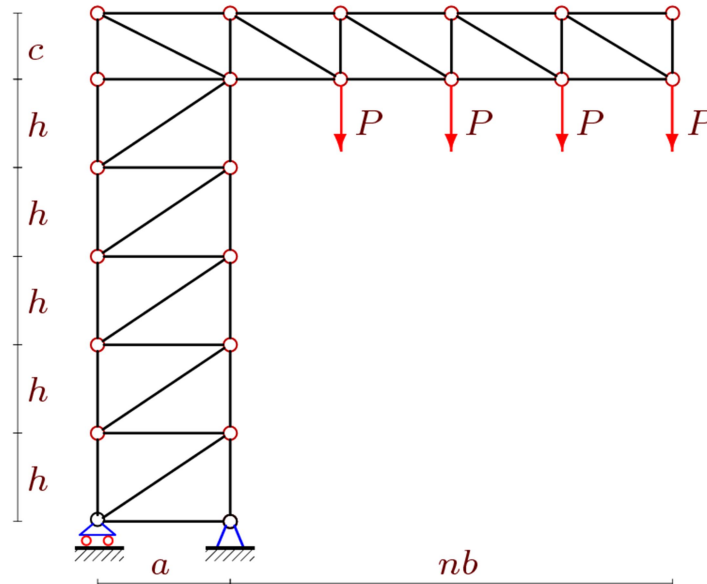


Рис. 1. Консольная стойка, равномерная нагрузка,  $n=4$ ,  $m=6$

В программу вводятся данные о ферме с параметрически заданными размерами и числом панелей. Координаты узлов задаются в системе координат с началом в левой (подвижной) опоре. Приведем соответствующий фрагмент программы

```
> H:=m*h-h+c;
> for i to m do
  x[i]:=0: x[i+m+1]:=a:
  y[i]:=h*i-h;y[i+m+1]:=h*i-h;
end;
> x[m+1]:=0: y[m+1]:=H: x[2*m+2]:=a: y[2*m+2]:=H:
> for i to n do
  x[i+2*m+2]:=i*b+a: y[i+2*m+2]:=H-c;
  x[i+2*m+n+2]:=i*b+a: y[i+2*m+n+2]:=H;
end;
```

Структура решетки задается так же, как плоский граф, по номерам концов стержней. Для этого вводятся специальные упорядоченные списки (векторы)  $\mathbf{N}$  для каждого стержня, включая три опорные. Для стержней стойки, например, эта часть программы имеет вид

```
> for i to m do
> N[i]:=[i,i+1]; N[i+m]:=[i+m+1,i+m+2];
> od;
```

По данным решетки и координатам узлов составляется матрица системы уравнений равновесия узлов фермы. Решение системы дает формулы для усилий, необходимых для расчета прогиба по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{K-3} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

где  $K=4(m+n+1)$  — число стержней, включая три стержня, моделирующие в расчете опоры,  $EF$  — продольная жесткость стержней,  $S_j$  — усилия в стержнях фермы при действии внешней нагрузки,  $s_j$  — усилия от единичной силы, приложенной к концу консоли,  $l_j$  — длина стержня  $j$ . В сумму не входят три опорных стержня, принятые жесткими. Распределение усилий в стержнях фермы, отнесенное к величине силы  $P$  при равномерном загрузении нижнего пояса, показано на рис. 2. Синим цветом выделены сжатые стержни, красным - растянутые. Толщина отрезков условно пропорциональна модулям усилий. Значения относительных усилий округлены до двух значащих цифр. Наибольшие усилия при таких размерах оказались не в консоли, а в стойке.

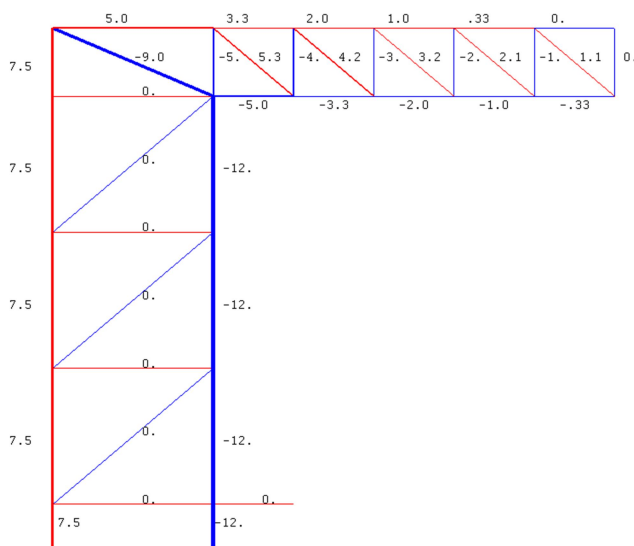


Рис. 2. Распределение усилий,  $m=4$ ,  $n=5$ ,  $a = 2$  м,  $b = 1$  м,  $c = 3$  м,  $h = 6$  м

### Прогиб

Расчет прогиба в серии ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей дает следующую формулу для прогиба конца консоли при действии как сосредоточенной, так и распределенной нагрузки:

$$\Delta(n, m) = \frac{P(C_1 b^2 c^2 h + C_2 b^2 c^3 + C_3 h c^2 b a + C_4 a^2 c^2 h + C_5 a^2 c^3 + C_6 a^2 b^3 + C_7 b^2 a^3 + C_8 a^2 f^3 + C_9 b^2 d^3)}{EFc^2 a^2},$$

где  $d = \sqrt{a^2 + c^2}$ ,  $f = \sqrt{b^2 + c^2}$ .

Метод двухуровневой индукции сначала по  $n$ , а затем по  $m$  дает следующие общие члены в случае сосредоточенной нагрузки:  $C_1 = 2(m-1)n^2$ ,  $C_2 = n^2$ ,  $C_3 = 2(m-1)n$ ,  $C_4 = m-1$ ,  $C_5 = n$ ,  $C_6 = (2n^3 + n)/3$ ,  $C_7 = n^2$ ,  $C_8 = n$ ,  $C_9 = n^2$ .

Для получения этих выражений потребовалось составить, а потом решить однородные рекуррентные уравнения степени не выше четвертой. При этом задействованы операторы `rgf_findrecur` и `rsolve` из пакета `genfunc` системы Maple. Некоторые коэффициенты оказались независимыми от числа  $m$  вертикальных панелей, а коэффициент  $C_4 = m - 1$  не зависит от числа панелей в консоли. Для проверки индукцию можно выполнить в обратном порядке — сначала по  $m$ , потом по  $n$ .

Графики полученного решения позволяют проанализировать некоторые его особенности. Построим графики зависимости относительного (безразмерного) прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ , где  $P = P_0 / n$  от числа панелей  $n$  при разных высотах  $c$  и длине консоли  $L = bn = 5$  м (рис. 3). В такой постановке с увеличением  $n$  уменьшается длина панели в консоли, а прогиб сначала уменьшается. При значительных  $n$  начнет расти, что становится ясно из положительной линейной асимптотики  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = 2c / L$ .

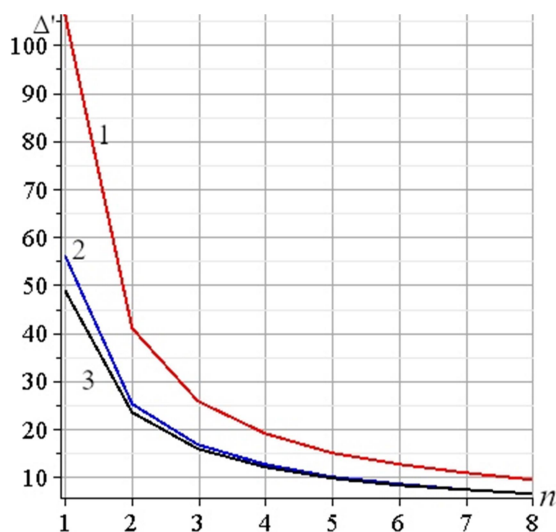


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей  $n$  при разных  $c$ ,  $L=5$  м.  
 1—  $c=1$  м; 2—  $c=2$  м; 3—  $c=3$  м,  $m=5$ ,  $h=2$  м,  $a=2$  м

В этой же постановке зависимость прогиба от длины консоли представлена кривыми на рис. 4.

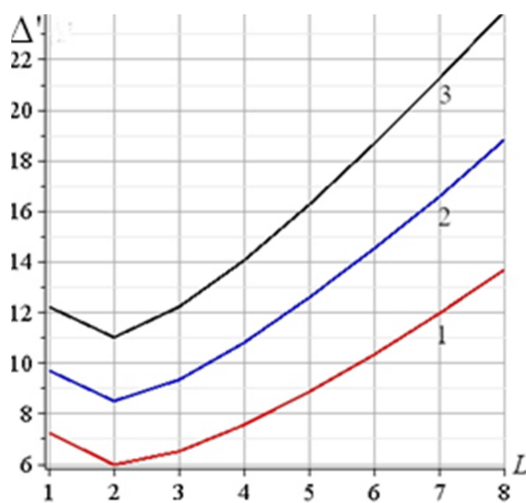


Рис. 4. Зависимость прогиба от пролетов  $L$  при разных высотах  $h$ ,  $n=4$ .  
 1—  $h=1$  м; 2—  $h=2$  м; 3—  $h=3$  м,  $m=5$ ,  $c=2$  м,  $a=2$  м

Здесь наблюдается явно выраженный минимум прогиба, дающий возможность оптимизировать конструкцию по жесткости подбором ее размеров и числа панелей. На рис. 5 графики прогиба строятся в зависимости от высоты консоли  $c$ . Это один из важнейших параметров конструкции, определяющий ее жесткость. Интересно отметить эффект самопересечения кривых, означающий в данном случае, что при  $c = 4,5$  м прогиб конструкции на конце консоли при  $L=2$  м и  $L=3$  м одинаковый.

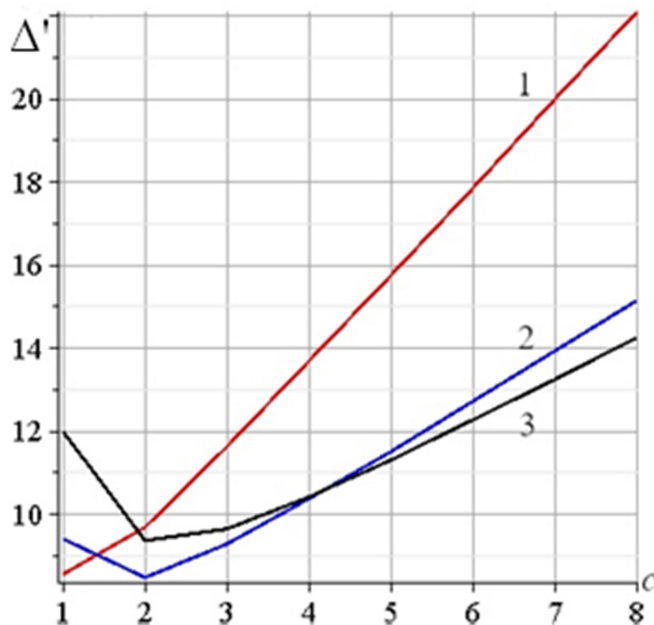


Рис. 5. Зависимость прогиба от  $c$  при разных пролетах  $L$ ,  $a=2$  м.  
 1—  $L=1$  м; 2—  $L=2$  м; 3—  $L=3$  м,  $m = 5$ ,  $h = 2$  м,  $n = 4$

Асимптотика решения по числу панелей в стойке  $m$  линейная:  

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta' / m = h(2L^2 + a^2 + 2aL) / (naL).$$

### Заключение

Сравнивая полученное решение с аналогичными точными формулами для прогиба балочных ферм [20-21], замечаем, что за счет необычно большого числа параметров расчетная формула здесь существенно более сложная и содержит девять коэффициентов, которые надо определять индукцией. Обычно [13-19] таких коэффициентов не более четырех. С другой стороны, двойная индукция в этой задаче затронула лишь часть коэффициентов, что существенно ускорило расчеты. Полученное решение может служить как некий тест для оценки численного решения этой конструкции, а большое число независимых параметров, входящих в формулу, позволяет использовать ее для широкого класса задач.

### Библиографический список

1. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
2. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5 (31). С. 38-42.
3. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
4. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы// International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.

5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
8. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
9. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55.
10. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
11. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
12. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 2-1(6). Pp. 10-12
13. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels // Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 4-3(8). P.7-8.
14. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load // Science Almanac. 2016. No. 3-3(17). Pp. 75-78.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 268-271.
16. Воропай Р. А., Доманов Е.В. Вывод общей формулы для сдвига подвижной опоры фермы арочного типа индукцией по двум параметрам в системе Maple // Постулат. 2019. №2. С. 11.
17. Voropay R.A., Domanov E.V. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system // Postulat. 2019. № 1.
18. Kitaev S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple // Postulat. 2018. No. 5-1(31).
19. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss // Postulat. 2018. No. 5-1(31). ?. 22.
20. Voropay R.A., Domanov E.V. The dependence of the deflection of a planar beam truss with a complex lattice on the number of panels in the system Maple // Постулат. 2019. № 1. С. 12
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 3 (266). С. 16-19.
22. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
23. Кирсанов М.Н. Расчет жесткости стержневой решетки // Вестник машиностроения. 2015. № 8. С. 48-51.
24. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6-10.
25. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
26. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
27. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
28. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
29. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
30. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2 (259). С. 2-6.

31. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
32. Кирсанов М.Н. Расчет Г-образной фермы крепления дорожных знаков и оборудования // Научный журнал строительства и архитектуры. 2019. № 1 (53). С. 84-92.
33. Орлов И.В. Статический расчет стержневой модели кронштейна для крепления реклам, уличного освещения и электронного оборудования. Постулат. 2018. №12.
34. Arutyunyan V. B. Analytical calculation of the deflection street bracket for advertising // Postulat. 2019. № 1.
35. Ghaffarzadeh H., Nikkar A. Explicit solution to the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip using the variational iteration method-II // Journal of Mechanical Science and Technology. 2013. Т. 27. №. 11. С. 3433-3438.
36. Wang J., Chen J. K., Liao S. An explicit solution of the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. Т. 212. №. 2. С. 320-330.
37. Salehi P., Yaghoobi H., Torabi M. Application of the differential transformation method and variational iteration method to large deformation of cantilever beams under point load // Journal of mechanical science and technology. 2012. Т. 26. №. 9. С. 2879-2887.
38. Kimiaefar A. et al. Analytical solution for large deflections of a cantilever beam under nonconservative load based on homotopy analysis method // Numerical Methods for Partial Differential Equations. 2011. Т. 27. №. 3. С. 541-553.
39. Beléndez T., Neipp C., Beléndez A. Large and small deflections of a cantilever beam // European journal of physics. 2002. Т. 23. №. 3. С. 371.
40. Holden J. T. On the finite deflections of thin beams // International Journal of Solids and Structures. 1972. Т. 8. №. 8. С. 1051-1055

#### References

1. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems - Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
2. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the influence of installation errors on the rigidity and strength of a flat truss. Engineering and Construction Journal. 2012. No. 5 (31). Pp. 38-42.
3. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. Architecture and Engineering. 2016.V. 1. No. 3. P. 14-17.
4. Kirsanov M.N. Inductive analysis of deformation of an arch truss. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018.V. 14. No. 1. P. 64-70.
5. Kirsanov M.N. A comparative analysis of the rigidity of two arched truss schemes. Construction of unique buildings and structures. 2015. No. 9 (36). Pp. 44-55.
6. Kirsanov M.N. An analytical study of deformations of a flat arch-type truss. Bulletin of the State University of the Sea and River Fleet named after Admiral S.O. Makarova. 2015. No 3 (31). Pp. 42-48.
7. Kirsanov M.N. Analytical assessment of deflection and effort in the critical rods of an arch truss. Transport construction. 2017. No. 9. Pp. 8-10.
8. Kirsanov M.N. Formulas for calculating the deflection of an arch truss. Structural Mechanics and Structures. 2018.Vol. 1. No. 16. Pp. 7-11.
9. Kirsanov M.N. The analysis of the deflection of the arch truss. Construction mechanics of engineering structures and structures. 2017. No. 5. P. 50-55.
10. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. About the dependence of deformations of a flat arch truss on the number of panels. Structural Mechanics and Structural Analysis. 2017. No. 5 (274). Pp. 9-14.
11. Kirsanov M.N. Formulas for calculating deformations of an arch truss with an arbitrary number of panels. Construction of unique buildings and structures. 2018. No. 4 (67). Pp. 86-94.
12. Voropai R.A., Kazmiruk I.Yu. Analytical study of the horizontal stiffness of the flat statically determinate arch truss. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. No. 2-1 (6). Pp. 10-12.
13. Bolotina T. D. The deflection of the flat arch truss with a triangular lattice depending on the number of panels. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. No. 4-3 (8). P.7-8.

14. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load. Science Almanac. 2016.No. 3-3 (17). Pp. 75-78.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. Scientific Almanac. 2017. N 2-3 (28). Pp. 268-271.
16. Voropai R.A., Domanov E.V. Derivation of a general formula for the shear of a movable support of an arch-type truss by induction in two parameters in the Maple system. Postulate. 2019. №2. Pp. 11.
17. Voropay R.A., Domanov E.V. Analytical solution of the problem of shifting a movable support of a truss of arch type in the Maple system. Postulat. 2019.No 1.
18. Kitaev S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple. Postulat. 2018.No. 5-1 (31).
19. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss. Postulat. 2018.No. 5-1 (31). № 22.
20. Voropay R.A., Domanov E.V. The dependence of the deflection of a planar beam truss with a complex lattice on the number of panels in the system Maple. Postulate. 2019.No 1. Pp. 12
21. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a regular beam truss with an arbitrary number of panels with a complex lattice. Structural mechanics and calculation of structures. 2016. No. 3 (266). Pp. 16-19.
22. Kirsanov M.N. To the choice of a girder truss lattice. Structural mechanics of engineering structures and structures. 2017. No. 3. P. 23-27.
23. Kirsanov M.N. The calculation of the stiffness of the core lattice. Bulletin of mechanical engineering. 2015. No. 8. P. 48-51.
24. Kirsanov M.N., Maslov A.N. Formulas for calculating the deflection of a beam multi-lattice truss. Construction Mechanics and Structural Analysis. 2017. No. 2 (271). Pp. 6-10.
25. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a beam truss with a complex lattice. Structural mechanics and calculation of structures. 2015. No 3 (260). Pp. 7-12.
26. Kirsanov M.N. Derivation of a formula for the deflection of a trellised truss having cases of kinematic variability. Structural Mechanics and Structures. 2017. V. 1. No. 14. Pp. 27-30.
27. Kirsanov M.N. Assessment of the deflection and stability of a spatial beam truss. Structural mechanics and calculation of structures. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
28. Kirsanov M.N. An analytical study of the stiffness of a spatial statically determinate truss. Vestnik MGSU. 2017.V. 12. No. 2 (101). Pp. 165-171.
29. Kirsanov M.N. Features of the analytical calculation of spatial core systems. Structural mechanics and structural analysis. 2011. No. 5 (238). Pp. 11-15.
30. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial bar regular structure with a flat face. Structural mechanics and calculation of structures. 2015. No 2 (259). Pp. 2-6.
31. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a spatial rectangular coating. Vestnik MGSU. 2018. V. 13. No. 5 (116). Pp. 579-586.
32. Kirsanov M.N. Calculation of G-shaped Farming of Road Signs and Equipment. Russian Journal of Building. Construction and Architecture. Issue № 2 (42), 2019. Pp. 62-71.
33. Orlov I.V. Static calculation of the rod model of the bracket for attaching advertisements, street lighting and electronic equipment. Postulate. 2018. No. 12.
34. Arutyunyan V. B. Analytical calculation of the deflection street bracket for advertising. Postulat. 2019.No 1.
35. Ghaffarzadeh H., Nikkar A. Explicit solution to the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip using the variational iteration method-II. Journal of Mechanical Science and Technology. 2013. V. 27. No.11. Pp. 3433-3438.
36. Wang J., Chen J. K., Liao S. An explicit solution of the large deformation of a cantilever beam under point load at the free tip. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2008. V. 212. No. 2. Pp. 320-330.
37. Salehi P., Yaghoobi H., Torabi M. Application of the differential transformation method and variational iteration method to large deformation of cantilever beams under point load . Journal of mechanical science and technology. 2012. V. 26. No. 9. Pp. 2879-2887.

38. Kimiaefar A. et al. Analytical solution for large deflections of a cantilever beam under nonconservative load based on homotopy analysis method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. 2011. V. 27. No. 3. Pp. 541-553.
39. Beléndez T., Neipp C., Beléndez A. Large and small deflections of a cantilever beam. *European journal of physics*. 2002. V. 23. No. 3. Pp. 371.
40. Holden J. T. On the finite deflections of thin beams. *International Journal of Solids and Structures*. 1972. V. 8. No. 8. Pp. 1051-1055

## ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEPENDENCE OF CANTILEVER RACK DEFORMATIONS ON THE NUMBER OF PANELS IN THE MAPLE SYSTEM

S. V. Terze<sup>1</sup>

National Research University "MPEI"<sup>1</sup>  
Moscow, Russia

---

<sup>1</sup>Student, tel.: +7(909)650-81-04; e-mail: sergeyyterze@rambler.ru

---

The rack and cantilever of a flat statically defined truss have a simple diagonal grid. One support is fixed, the other is movable. The deflection of the cantilever end is calculated using the Maxwell – Mohr formula in analytical form for the load distributed over the lower belt of the cantilever and concentrated one. Solutions for trusses with a different number of panels in the cantilever and rack by double induction generalized to an arbitrary number of panels. An asymptotic analysis of the solution is performed. To obtain forces in symbolic form and solve recurrent equations that satisfy the coefficients of the desired formulas, the apparatus of symbolic transformations of the Maple system is used. The solution includes seven geometric parameters of the structure, the elastic modulus of the rods and the load.

**Keywords:** truss, induction, Maple, console, deflection.



## ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ ПРОГИБА ШПРЕНГЕЛЬНОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ В СИСТЕМЕ MAPLE

И. Б. Суд<sup>1</sup>Национальный исследовательский университет "МЭИ"<sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Студент, тел.: +7(903)004-88-55; e-mail: SudIB@mpei.ru

---

Приводится вывод формул для прогиба плоской шпренгельной статически определимой фермы в зависимости от числа панелей. Вычисление прогиба середины пролета на основе аналитических выражений для усилий, полученных по программе в системе компьютерной математики Maple, выполнено с использованием интеграла Мора. Обобщение ряда формул для ферм с различным, последовательно увеличивающимся числом панелей, произведено методом индукции. Использован аппарат составления и решения линейных однородных рекуррентных уравнений. Найдена линейная асимптотика решения. Изучено влияние соотношения высоты фермы к высоте ее шпренгельной (верхней) части на жесткость конструкции.

**Ключевые слова:** ферма, индукция, Maple, прогиб, интеграл Мора.

### Введение

Фермы балочного типа широко применяются в строительстве и машиностроении как основные и вспомогательные несущие конструкции. Одной из важнейших характеристик фермы является ее жесткость. Простейшие модели ферм имеют шарнирное крепление стержней, обеспечивающее статическую определимость. Несмотря на это, непосредственный расчет усилий в таких фермах не всегда возможен. Особенно это касается ферм шпренгельного типа, где метод сечений не работает. Численные расчеты в стандартных программах для определения напряженно-деформированного состояния фермы с увеличением числа панелей могут давать погрешности за счет накопления ошибок округления. В любом случае, простые формулы для расчета прогиба всегда полезны, однако не всегда такие формулы настолько универсальны, чтобы не просто тестировать численные решения, но и позволять проводить качественный анализ конструкций математическими методами. В частности, как правило, простые формулы для расчета прогиба не учитывали конфигурацию решетки (формула Качурина [1,2]) и выводились на основе моделирования балочной фермы путем замены ее на балку такой же жесткости. С появлением систем компьютерной математики появилась возможность вывода точных формул для прогиба ферм с любым числом панелей, что исключает эффект накопления ошибок округления. Наряду с методом непосредственного расчета фермы с параметрическим заданием числа панелей [3] в тех случаях, когда для расчета усилий в стержнях можно использовать метод сечения и метод поэтапного вырезания узлов, для вывода аналитических решений применяется метод индукции. Этим методом были получены формулы для прогиба плоских ферм арочного типа [4-8], рам [9-13], решетчатых ферм с различными схемами решеток [14-20] и некоторых регулярных пространственных ферм [21-23]. Метод применим и для частотного анализа стержневых конструкций [24-31].

В настоящей работе приводится вывод формул прогиба для балочной фермы шпренгельного типа (рис. 1).

### Схема фермы и расчет усилий

Верхний пояс фермы, подверженный сжатию, состоит из укороченных стержней длиной  $a$ . Это обеспечивает большой запас устойчивости конструкции. В ферме  $n=2k$  панелей.

Каждая панель состоит из двух стержней верхнего пояса, стержня нижнего пояса длиной  $2a$ , стойки высотой  $f$  и четырех раскосов. Общая высота фермы  $f+h$ . Средняя стойка имеет высоту  $h+f$ .

Расчет прогиба конструкции начинается с определения усилий в стержнях. Используется программа, составленная для решения данной задачи в системе символьной математики Maple.

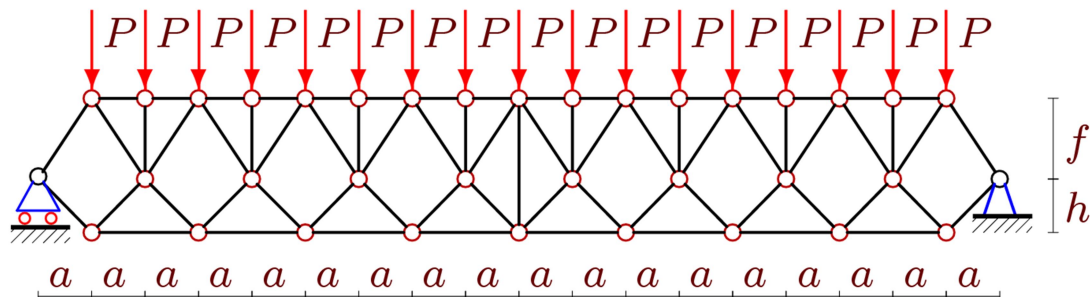


Рис. 1. Ферма под действием равномерной нагрузки,  $k=4$

Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). Координаты шарниров вводятся в циклах. На языке Maple это имеет вид:

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=(i-1)*a; y[i]:=h+f; od:
> for i to n+2 do x[i+2*n+1]:=(i-1)*2*a-a; y[i+2*n+1]:=h; od:
> for i to n+1 do x[i+3*n+3]:=(i-1)*2*a; y[i+3*n+3]:=0; od:
```

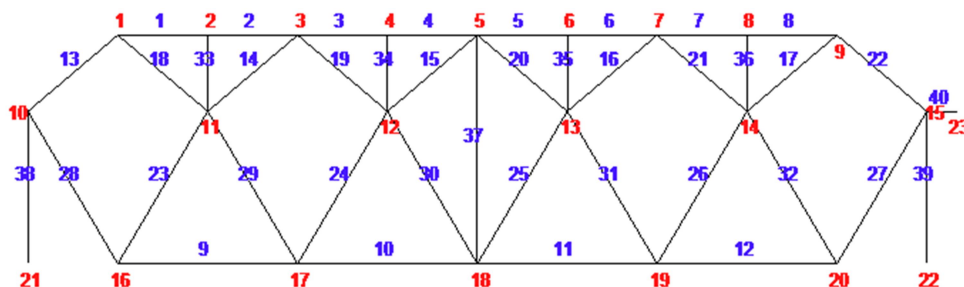


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней,  $n=4$

Схема решетки в программе задается специальными упорядоченными списками  $N[i]$  номеров концов соответствующих стержней. Выбор начала и конца стержня не влияет на величину усилия или его знак. Ввод решетки напоминает задание графа в дискретной математике:

```
for i to 2*n do N[i]:=[i,i+1];od:
for i to n do
  N[i+2*n]:=[3*n+3+i,i+3*n+4];
  N[i+7*n+4]:=[2*n+2+i,2*i]; od:
for i to n+1 do
  N[i+3*n]:=[2*i-1,i+2*n+1];
  N[i+4*n+1]:=[2*i-1,i+2*n+2];
  N[i+5*n+2]:=[i+3*n+3,i+2*n+2];
  N[i+6*n+3]:=[i+3*n+3,i+2*n+1]; od:
N[8*n+5]:=[n+1,3*n+k+4]:
```

По данным координат и номеров концов стержней составляется матрица системы уравнений равновесия узлов. Решение системы одновременно дает и усилия в стержнях и реакции опор (с обратным знаком). Значения усилий используются в интеграле Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m-3} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

где  $m = 8(n+1)$  — число стержней, включая три опорных стержня (два стержня на неподвижную опору, один - на подвижную),  $EF$  — жесткость стержней,  $S_j$  — усилия в стержнях от действия внешней нагрузки,  $s_j$  — усилия от безразмерной единичной силы, приложенной к узлу в середине пролета,  $l_j$  — длина стержня с номером  $j$ . Три опорных стержня, принятые жесткими, в сумму не входят (бесконечная жесткость).

### Прогиб

Расчет ряда ферм с разным числом панелей показал, что итоговая формула для прогиба имеет один и тот же вид, не зависящий от числа панелей. При действии распределенной нагрузки имеем

$$EF\Delta = P(C_1 a^3 h + C_2 a^3 f + C_3 (g^3 + c^3) f + C_4 f^2 h (h + f)) / (2f(h + f)^2),$$

где коэффициенты формулы зависят только от числа  $k$  панелей в половине пролета. Методом индукции, обработкой серии решений для 14 ферм, получаем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} C_1 &= (-2k^2 + 2(-1)^k k - 2k + (-1)^k - 1) / 2, \\ C_2 &= (40k^4 + 80k^3 + 62k^2 - 6(-1)^k k + 22k - 3(-1)^k + 3) / 6, \\ C_3 &= (4k^2 + 4k + 1) / 2, \quad C_4 = -(-1)^k. \end{aligned}$$

Рекуррентное уравнение для коэффициента  $C_1$ , полученное оператором **rgf\_findrecur**, имеет вид:

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 2C_{1,k-2} - 2C_{1,k-3} - C_{1,k-4} + C_{1,k-5}.$$

Уравнение для коэффициента  $C_2$  имеет вид

$$C_{2,k} = 3C_{2,k-1} - C_{2,k-2} - 5C_{2,k-3} + 5C_{2,k-4} + C_{2,k-5} - 3C_{2,k-6} + C_{2,k-7}.$$

Уравнение для коэффициента  $C_3$ :

$$C_{3,k} = 3C_{3,k-1} - 3C_{3,k-2} + C_{3,k-3}.$$

Самым простым уравнением оказалось уравнение для коэффициента  $C_4$ :

$$C_{4,k} = -C_{4,k-1}.$$

Прогиб в случае сосредоточенной в середине фермы нагрузки, как и следовало ожидать, имеет более простой вид:

$$EF\Delta = (C_1 a^3 + C_2 (g^3 + c^3) + 2(f^2 h + f^3)) / (2(h + f)^2),$$

где  $C_1 = (16k^3 + 24k^2 + 8k) / 3$ ,  $C_2 = 2k + 1$ .

Проанализируем полученное решение в случае действия распределенной нагрузки. Построим графики зависимости относительного прогиба  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ , где  $P = P_0 / (2n + 1)$  от высоты  $h$  при фиксированной высоте  $f+h=10$  м для разного числа панелей  $k$ . Фиксируем пролет фермы  $L=2(n+1)=70$  м (рис. 3).

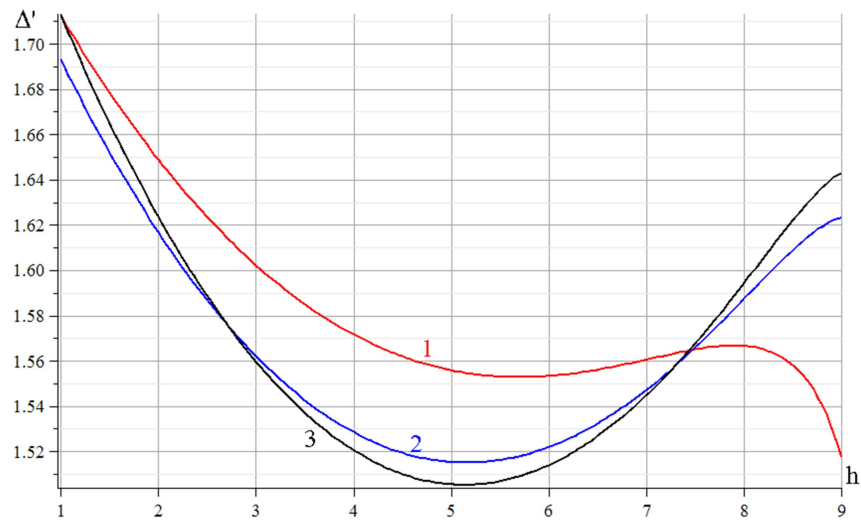


Рис. 3. Зависимость прогиба от высоты  $h$  при разном числе панелей  $k$ ,  $h+f=10$  м,  $L=70$  м.  
1 –  $k=3$ ; 2 –  $k=4$ ; 3 –  $k=5$

Интересно отметить сильную зависимость решения от числа панелей. Минимум прогиба во всех трех случаях наблюдается при одинаковых размерах  $f=h$ . При небольшом числе панелей и, следовательно, достаточно длинных стержнях поясов, наибольшая жесткость наблюдается при больших значениях  $h$  и малых значениях  $f$ .

Зависимость прогиба от числа панелей, при разных  $h$ , представлена кривыми на рис. 4. На первый взгляд проявляется устойчивая тенденция к уменьшению прогиба с ростом  $k$ . Однако асимптотика решения линейна и положительна:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = (f^2 - hf + h^2) / (2(h + f)L)$$

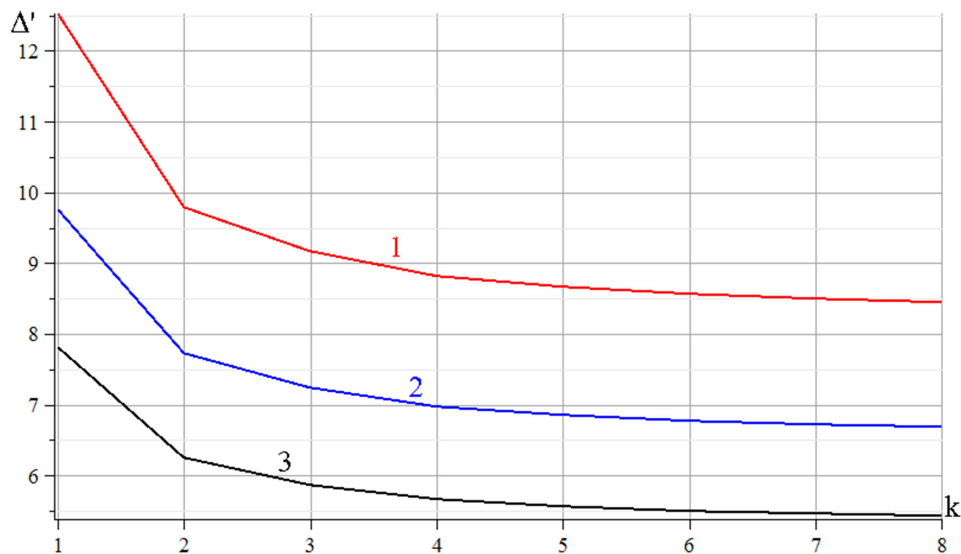


Рис. 4. Зависимость прогиба от числа панелей  $k$  при разной высоте  $h$ ,  $f=3$  м,  $L=70$  м.  
1 –  $h=1$  м; 2 –  $h=1.5$  м; 3 –  $h=2$  м.

Это указывает на то, что после некоторого значения  $k$  прогиб будет расти.

### Заключение

Отличительная особенность рассмотренной фермы - наличие дополнительного шпренгельного усиления верхнего пояса. Методом индукции получено решение задачи о зависимости прогиба конструкции от числа панелей. Анализ решения показал, что соотношение высот частей фермы существенно влияет на эту зависимость. Решение получилось достаточно простое, пригодное для оценки прогиба проектируемых ферм такого типа при любом числе панелей.

### Библиографический список

1. Стрелецкий Н. С., Беленя Е.И., Ведеников Г.С., Лессиг Е.Н., Муханов К. К. Металлические конструкции. Специальный курс М.: Издательство литературы по строительству. 1965. 368 с.
2. Качурин В.К. О прогибе мостовых ферм. Сб. №17. Отделение инженерных исследований НТК НКПС, 1928.
3. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
4. Кийко Л.К. Аналитическая оценка прогиба арочной фермы под действием ветровой нагрузки // Научный вестник. 2016. № 1 (7). С. 247-254.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
7. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
8. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
9. Кирсанов В.И. Формулы для прогиба шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей в ригеле и опорах // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 4 (285). С. 31-36.
10. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 10 (121). С. 1184-1192.
11. Чинченко А.М. Analytical calculation of the size of the bend of rectangular shape frame truss with a random number of panels in the Maple system // Механизация и автоматизация строительства [Электронный ресурс]: сборник статей. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2019. С. 54-58.
12. Бойко А.Ю., Ткачук Г.Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
13. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №2(21). С. 32-39.
14. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном загрузении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.
15. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. № 1. С. 1.
16. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.

17. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuks D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. № 4. С. 510-517.
18. Кирсанов М.Н., Маслов А.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 2 (271). С. 6-10.
19. Кирсанов М.Н. Схема и формулы для расчета прогиба фермы трехпролетного консольного моста с произвольным числом панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2020. № 1 (288). С. 16-22.
20. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13. С. 10-14.
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
22. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8 (76). С. 58-66
23. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
24. Воробьев О.В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. № 1 (24). С. 25-38.
25. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ частот колебаний груза в зависимости от его положения в узлах плоской фермы // Строительство и реконструкция. 2020. № 1 (87). С. 14-19.
26. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 1. № 20. С. 14-20.
27. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (126). С. 284-292.
28. Кирсанов М.Н. Формула для основной частоты колебания многопролетной фермы // Строительная механика и конструкции. 2020. Т. 1. № 24. С. 19-24.
29. Kirsanov M.N. Lower estimate of the fundamental frequency of natural oscillations of a truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 7. С. 844-851.
30. Кирсанов М.Н. Формула зависимости низшей частоты колебания балочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2019. № 3 (284). С. 45-49.
31. Kirsanov M.N. The property of embedding of natural frequencies spectra of regular mechanical systems // Строительная механика и конструкции. 2019. Т. 2. № 21. С. 40-49.

#### Reference

1. Streletsky N. S., Belenja E. I., Vedernikov G. S., Lessig E. N., Mukhanov K. K. Metal construction. Special course Moscow: Publishing house of literature on construction. 1965. 368 p.
2. Kachurin V. K. On the deflection of bridge trusses. Sat. no. 17. Department of engineering research NTC NCPs, 1928.
3. Ignatiev V. A. Calculation of regular rod systems — Saratov: Saratov higher military chemical military school, 1973.
4. Kiiko L. K. Analytical assessment of arch truss deflection under the influence of wind load. Scientific Bulletin. 2016. No. 1 (7). Pp. 247-254.
5. Kirsanov M. N. Comparative analysis of the rigidity of two arch truss schemes. Construction of unique buildings and structures. 2015. No. 9 (36). Pp. 44-55.
6. Kirsanov M. N. The formula for calculating the deflection of the arch truss. Structural mechanics and structures. 2018. Vol. 1. No. 16. Pp. 7-11.
7. Kirsanov M. N. Inductive analysis of arch truss deformation. international journal of computational civil and construction engineering. 2018. Vol. 14, No. 1. Pp. 64-70.
8. Kirsanov M. N. Formulas for calculating deformations of an arched truss with an arbitrary number of panels. Construction of unique buildings and structures. 2018. no. 4 (67). Pp. 86-94.

9. Kirsanov V. I. Formulas for the deflection of a hinge-rod frame with an arbitrary number of panels in the crossbar and supports. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2019. No. 4 (285). Pp. 31-36.
10. Kirsanov M. N. Calculation model of a planar frame truss with an arbitrary number of panels. *MGSU Bulletin*. 2018. Vol. 13. No. 10 (121). Pp. 1184-1192.
11. Chinchenko a.m. Analytical calculation of the bending value of a rectangular frame truss with a random number of panels in the Maple system. *Mechanization and automation of construction [Electronic resource]: Collection of articles*. Samara: Samar state technical University. Un-t, 2019. Pp. 54-58.
12. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N. Derivation of the formulas for the deflection of a flat hinged-rod frame in the of symbol mathematics Maple system. *Structural mechanics and structures*. 2019. No. 4 (23). Pp. 15-25.
13. Tkachuk G. N. The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2019. No. 2(21). Pp. 32-39.
14. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels at uniform loading. *Structural mechanics and structures*. 2019. No. 1(20). Pp. 21-29.
15. Kirsanov M. N. Analysis of the deflection of a truss with a decorative grid. *Construction: science and education*. 2019. No. 1. 1.
16. Kirsanov M. N., Moskvina V. G. Deformations of a flat truss with a reinforced grid. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2018. no. 4 (279). Pp. 10-14.
17. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *MGSU Bulletin*. 2020. Vol. 15. No. 4. Pp. 510-517.
18. Kirsanov M. N., Maslov A. N. Formulas for calculating the deflection of a multi-lattice girder truss. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2017. no. 2 (271). Pp. 6-10.
19. Kirsanov M. N. Scheme and formulas for calculating the deflection of the truss of a three-span cantilever bridge with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2020. No. 1 (288). Pp. 16-22.
20. Tinkov D. V. Formulas for calculating the deflection of a broken beam raskosnoy truss with an arbitrary number of panels. *Structural mechanics and structures*. 2016. Vol. 2. No. 13. Pp. 10-14.
21. Kirsanov M. N. Analytical calculation of the deflection of a spatial rectangular cover // *MGSU Bulletin*. 2018. Vol. 13. No. 5 (116). Pp. 579-586.
22. Kirsanov M. N. deflection of spatial coverings with periodic structure. *Engineering and Construction magazine*. 2017. no. 8 (76). Pp. 58-66
23. Kirsanov M. N. Estimation of deflection and stability of spatial beam truss. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
24. Vorobyov O. V. on methods for obtaining an analytical solution for the problem of natural frequencies of articulated structures. *Construction mechanics and construction*. 2020. no. 1 (24). Pp. 25-38.
25. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. Analysis of cargo vibration frequencies depending on its position in the nodes of a flat truss. *Construction and reconstruction*. 2020. No. 1 (87). Pp. 14-19.
26. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. Analytical expressions of frequencies of small vibrations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and construction*. 2019. Vol. 1. No. 20. Pp. 14-20.
27. Kirsanov M. N., Tinkov D. V. analysis of natural vibration frequencies of a flat truss with an arbitrary number of panels // *MGSU Bulletin*. 2019. Vol. 14. No. 3 (126). Pp. 284-292.
28. Kirsanov M. N. Formula for the main frequency of vibration of a multi-span truss. *Construction mechanics and construction*. 2020. Vol. 1. No. 24. Pp. 19-24.
29. Kirsanov M. N. lower estimation of the basic frequency of natural vibrations of a truss with an arbitrary number of panels. *MGSU Bulletin*. 2019. Vol. 14. No. 7. Pp. 844-851.
30. Kirsanov M. N. The formula for the dependence of the lowest frequency of vibration of the beam truss on the number of panels. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2019. No. 3 (284). Pp. 45-49.

31. Kirsanov M. N. property of embedding eigenfrequency spectra of regular mechanical systems. Construction mechanics and structures. 2019. Vol. 2. No. 21. Pp. 40-49.

## **DERIVATION OF FORMULAS FOR DEFLECTION OF THE GIRDER TRUSS WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS IN THE MAPLE SYSTEM**

I.B. Sud<sup>1</sup>

National Research University «MPEI»<sup>1</sup>

Moscow, Russia

---

<sup>1</sup>Student, tel.: +7(903)004-88-55; e-mail: SudIB@mpei.ru

---

The derivation of formulas for deflection of a statically determinate planar truss depending on the number of panels. The calculation of the mid-span deflection based on analytical expressions for forces obtained by the program in the Maple computer mathematics system was performed using the Mohr's integral. Generalization of a number of formulas for trusses with a different, consistently increasing number of panels, produced by method of induction. The apparatus for composing and solving linear homogeneous recurrent equations is applied. The linear asymptotic behavior of the solution is found. The effect of the ratio of the height of the truss to the height of its upper part on the rigidity of the structure is studied.

**Keywords:** truss, induction, Maple, deflection, Mohr's integral.



# ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

УДК 624.072.526

## КОЛЕБАНИЯ ЖЕСТКОЙ НИТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

А. Н. Аверин<sup>1</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 271-52-30, e-mail: AN\_Averin@mail.ru

Рассматривается задача расчета колебаний жесткой нити под действием подвижной нагрузки. Подвижная нагрузка представлена тележкой с платформой и двумя колесными парами, подвески колесных пар моделируются рессорами. Для жесткой нити используется дискретная модель в виде шарнирно стержневой цепи, состоящей из отдельных, соединенных между собой шарнирами и упругими вставками элементов. Уравнение движения системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка» получены из условий равновесия отдельных элементов системы в произвольный момент времени  $t$  с учетом сил инерции.

Для системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка» определяются частоты и формы свободных колебаний вблизи статического положения равновесия при действии постоянной и временной нагрузок. Анализируются графики изменения частот свободных колебаний вблизи статического положения равновесия в зависимости от расположения временной нагрузки. Дается оценка связанности колебаний жесткой нити и подвижной нагрузки. Интегрирование уравнений движения системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка» выполняется с использованием неявного метода трапеции. Приводится пример расчета вынужденных колебаний жесткой нити под действием подвижной нагрузки. Анализируются величины динамических перемещений и скоростей отдельных точек нити, а также напряжения в точках опасных сечений. Разработанный алгоритм динамического расчета жесткой нити на подвижную нагрузку рекомендуется применять для расчета колебаний висячих и вантовых мостов, когда имеет место сильно выраженная связанность колебаний подвижной нагрузки и пролетного строения (обратная связь).

**Ключевые слова:** жесткая нить, подвижная инертная нагрузка, свободные и вынужденные колебания дискретной модели жесткой нити, неявные методы прямого интегрирования дифференциальных уравнений.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу вынужденных колебаний жесткой нити под действием подвижной нагрузки (рис. 1). Приведем описание физико-математических моделей подвижной нагрузки и жесткой нити.

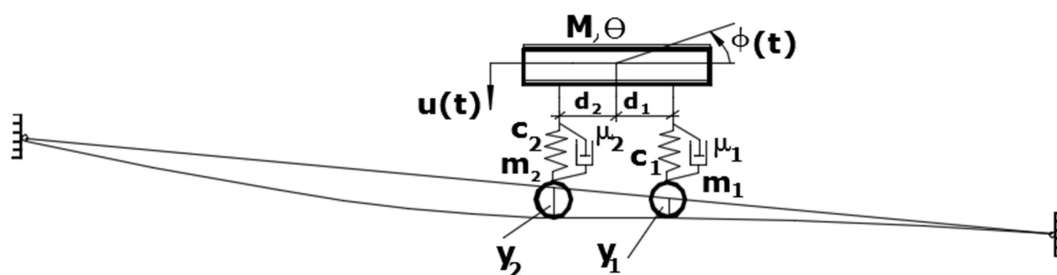


Рис. 1

Подвижная нагрузка представляет собой тележку с платформой и двумя колесными парами (рис. 1). Масса платформы  $M$ , а массы колесных пар  $m_1$  и  $m_2$ . Подвески колесных пар моделируются рессорами, жесткостью  $c_1$ ,  $c_2$ . Параллельно рессорам установлены демпферы, рабочие усилия которых пропорциональны скорости деформации рессор, коэффициент

пропорциональности -  $\mu$ . Движение нагрузки происходит с постоянной скоростью  $V$ , и её контакт с нитью осуществляется через колесные пары. Считается, что отрыв колесных пар от поверхности нити не происходит.

Жесткая нить представляет собой шарнирно стержневую цепь, состоящую из отдельных, соединенных между собой шарнирами и упругими вставками элементов [1, 2, 3] (рис. 2).

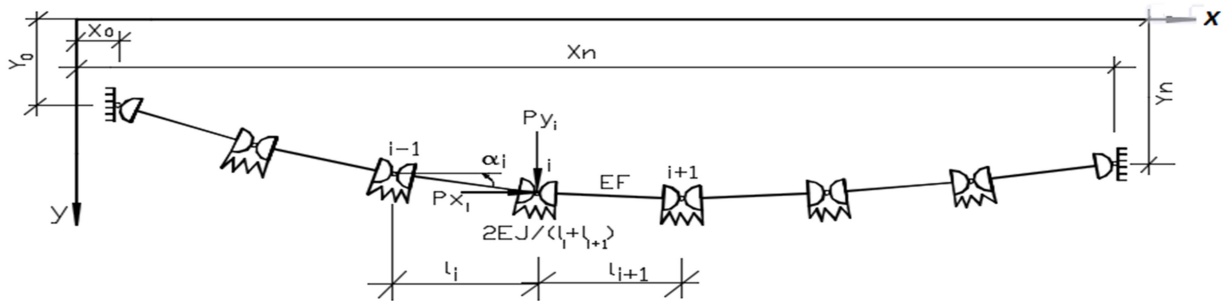


Рис. 2. Дискретная модель жесткой нити

Для геометрических и механических характеристик жесткой нити приняты следующие обозначения:  $L_0$  - начальная длина нити,  $(x_0, y_0), (x_n, y_n)$  - координаты точек закрепления нити,  $(x_i, y_i)$  - координаты  $i$ -го узла цепи,  $n$  - число дискретных элементов,  $l_0 = L_0/n$  - начальная длина элементов нити,  $F, J$  - площадь и момент инерции поперечного сечения,  $E$  - модуль упругости материала,  $EF, EJ$  - жесткость нити на растяжение и изгиб. Все нагрузки, действующие на нить, и погонная масса элементов приводятся в узлы. Жесткая нить имеет начальное натяжение. Предварительное натяжение в нити достигается заданием длины начальной заготовки  $L_0$  меньше расстояния между точками закрепления

$$L = \sqrt{(x_n - x_k)^2 + (y_n - y_k)^2}.$$

## 2. Уравнение движения системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка»

Уравнение движения системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка» получим из условий равновесия отдельных элементов системы в произвольный момент времени  $t$  с учетом сил инерции (рис. 3).

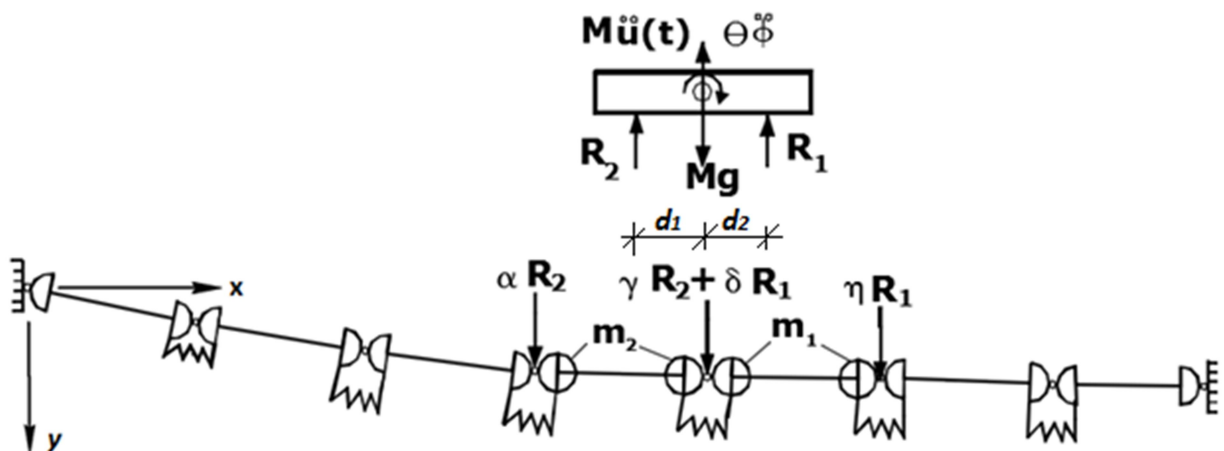


Рис. 3. К выводу уравнений движения

Для подвижной нагрузки имеем систему двух дифференциальных уравнений

$$M \frac{d^2}{dt^2} u(t) + R_1 + R_2 = Mg, \quad (1)$$

$$\Theta \frac{d^2}{dt^2} \varphi(t) - R_1 \cdot d_1 + R_2 \cdot d_2 = 0.$$

В уравнениях (1) через  $R_1, R_2$  обозначены реакции рессор, значения которых зависят от линейных и угловых перемещений тележки  $u(t), \varphi(t)$ , а также от величины вертикальных перемещений нити  $Y_1(t), Y_2(t)$  в точках контакта [4, 5].

$$R_1 = c_1(u(t) - \varphi(t)d_1 - Y_1(t)) + \mu \left( \frac{d}{dt} (u(t) - \varphi(t)d_1 - Y_1(t)) \right), \quad (2)$$

$$R_2 = c_2(u(t) + \varphi(t)d_2 - Y_2(t)) + \mu \left( \frac{d}{dt} (u(t) + \varphi(t)d_2 - Y_2(t)) \right).$$

Звено цепи не изгибается, следовательно, перемещения точек контакта  $Y_1(t), Y_2(t)$  выражаются линейно через вертикальные перемещения узлов звена цепи, на котором расположена колесная пара:

$$Y_j(\chi(t)) = \frac{x_i - \chi(t)}{x_i - x_{i-1}} y_{i-1} + \frac{\chi(t) - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i, \quad x_{i-1} \leq \chi(t) \leq x_i. \quad (3)$$

Так как отрыв колесных пар от поверхности нити не происходит, то массы колесных пар ( $m_1$  и  $m_2$ ) в различные моменты времени присоединяются к узловым массам нити. При расположении точек контакта тележки в пределах  $i$ -го и  $(i+1)$ -го звеньев к узловым массам нити присоединяются массы колесных пар  $\tilde{m}_{i-1} = l_0 \cdot \rho \cdot F + \alpha \cdot m_2$ ,  $\tilde{m}_i = l_0 \cdot \rho \cdot F + \gamma \cdot m_2 + \delta \cdot m_1$ ,  $\tilde{m}_{i+1} = l_0 \cdot \rho \cdot F + \eta \cdot m_1$ .

Уравнения равновесия узлов жесткой нити имеют вид

$$-N_i \cos(\alpha_i) + N_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}) + Q_i \sin(\alpha_i) - Q_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) + P_{x_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \quad (4)$$

$$-N_i \sin(\alpha_i) + N_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) - Q_i \cos(\alpha_i) + Q_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}) + P_{y_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

В уравнениях (4) через  $P_{x_i}, P_{y_i}$  обозначены составляющие узловых сил (силы собственного веса нити и реакции в рессорах включены в  $P_{y_i}$ ).

Выразим длину  $i$ -го звена цепи и направляющие косинусы через координаты узлов:

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}, \quad \cos(\alpha_i) = \frac{x_i - x_{i-1}}{l_i}, \quad \sin(\alpha_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i}. \quad (5)$$

Продольную силу  $N_i$  в звене цепи и ее проекции на координатные оси выразим через деформации по закону Гука [6]:

$$N_i = EF \frac{(l_i - l_0)}{l_0} = EF \left( \frac{l_i}{l_0} - 1 \right),$$

$$N_i \cos(\alpha_i) = N_i \frac{x_i - x_{i-1}}{l_i} = EF \left( \frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_i} \right) (x_i - x_{i-1}), \quad (6)$$

$$N_i \sin(\alpha_i) = EF \left( \frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_i} \right) (y_i - y_{i-1}),$$

$$(i = 1, 2, \dots, n).$$

После подстановки (6) в (4) будем иметь

$$\begin{aligned}
& EF\left[\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_{i+1}}\right)(x_{i+1} - x_i) - \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_i}\right)(x_i - x_{i-1})\right] + \\
& + Q_i \sin(\alpha_i) - Q_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) + P_{x_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \\
& EF\left[\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_{i+1}}\right)(y_{i+1} - y_i) - \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_i}\right)(y_i - y_{i-1})\right] - \\
& - Q_i \cos(\alpha_i) + Q_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}) + P_{y_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \\
& (i = 1, 2, \dots, n-1).
\end{aligned} \tag{7}$$

Полагая в уравнения (7)  $Q_i = 0$ , приходим к уравнениям колебаний гибкой нити [7, 8]:

$$\begin{aligned}
& EF\left[\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}\right)(x_{i+1} - x_i) - \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}\right)(x_i - x_{i-1})\right] + \\
& + P_{x_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \\
& EF\left[\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}}\right)(y_{i+1} - y_i) - \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}}\right)(y_i - y_{i-1})\right] + \\
& + P_{y_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \\
& (i = 1, 2, \dots, n-1).
\end{aligned} \tag{8}$$

Решение уравнений гибкой нити (8) используется в дальнейшем в качестве начального приближения при расчете жесткой нити.

Выполним дальнейшие преобразования уравнений (7). Поперечная сила в пределах  $i$ -го звена цепи выражается через изгибающие моменты в упругих вставках:

$$Q_i = (M_i - M_{i-1})/l_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{9}$$

После подстановки (9) в (7) с учетом (5) получим

$$\begin{aligned}
& EF\left[\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_{i+1}}\right)(x_{i+1} - x_i) - \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_i}\right)(x_i - x_{i-1})\right] + \\
& + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i^2} (y_i - y_{i-1}) - \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}^2} (y_{i+1} - y_i) + P_{x_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 x_i}{dt^2}, \\
& EF\left[\left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_{i+1}}\right)(y_{i+1} - y_i) - \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l_i}\right)(y_i - y_{i-1})\right] + \\
& + \frac{M_i - M_{i-1}}{l_i^2} (x_i - x_{i-1}) + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_{i+1}^2} (x_{i+1} - x_i) + P_{y_i} = \tilde{m}_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}, \\
& (i = 1, 2, \dots, n-1).
\end{aligned} \tag{10}$$

Изгибающий момент в упругой вставке  $M(x_i, y_i)$  выразим через кривизну дуги окружности, проходящей через три точки с координатами  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ . Запишем уравнения окружности радиусом  $r$  с центром в точке  $(X_C, Y_C)$  для каждой из трех точек:

$$\begin{aligned}
(x_{i-1} - X_c)^2 + (y_{i-1} - Y_c)^2 &= r^2, \\
(x_i - X_c)^2 + (y_i - Y_c)^2 &= r^2, \\
(x_{i+1} - X_c)^2 + (y_{i+1} - Y_c)^2 &= r^2.
\end{aligned}
\tag{11}$$

Вычитаем второе уравнение системы (11) из первого, а затем второе уравнение из третьего. В результате получаем систему двух линейных уравнений относительно координат центра окружности  $(X_c, Y_c)$ .

$$\begin{aligned}
2(x_{i-1} - x_i)X_c + 2(y_{i-1} - y_i)Y_c &= x_{i-1}^2 - x_i^2 + y_{i-1}^2 - y_i^2; \\
2(x_i - x_{i+1})X_c + 2(y_i - y_{i+1})Y_c &= x_i^2 - x_{i+1}^2 + y_i^2 - y_{i+1}^2.
\end{aligned}
\tag{12}$$

Решаем систему уравнений (12), находим координаты центра окружности  $(X_c, Y_c)$ :

$$\begin{aligned}
X_c &= \frac{(y_i - y_{i+1})(x_i^2 - x_{i+1}^2 + y_i^2 - y_{i+1}^2) - (y_{i-1} - y_i)(x_{i-1}^2 - x_i^2 + y_{i-1}^2 - y_i^2)}{2((x_{i-1} - x_i)(y_i - y_{i+1}) - (x_i - x_{i+1})(y_{i-1} - y_i))}, \\
Y_c &= \frac{(x_{i-1} - x_i)(x_i^2 - x_{i+1}^2 + y_i^2 - y_{i+1}^2) - (x_i - x_{i+1})(x_{i-1}^2 - x_i^2 + y_{i-1}^2 - y_i^2)}{2((x_{i-1} - x_i)(y_i - y_{i+1}) - (x_i - x_{i+1})(y_{i-1} - y_i))}.
\end{aligned}
\tag{13}$$

Радиус  $r_i$  дуги окружности определим как расстояние между точками  $(X_c, Y_c), (x_i, y_i)$ :

$$r_i = \sqrt{(X_c - x_i)^2 + (Y_c - y_i)^2} . \tag{14}$$

По закону Гука, изгибающий момент  $M(x_i, y_i)$  прямо пропорционален кривизне  $1/r_i$ :

$$M(x_i, y_i) = \frac{EJ}{r_i} \tag{15}$$

Подстановка (15) в уравнения (7) с учетом (14), (13) приводит к системе уравнений относительно координат узлов цепи.

Таким образом, дифференциальные уравнения движения системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка» можно записать в виде

$$M \frac{d^2}{dt^2} U(t) + C \frac{d}{dt} U(t) = F(U(t)) + R(t), \tag{16}$$

где  $U(t) = [x_1(t), y_1(t), \dots, x_{n-1}(t), y_{n-1}(t), u(t), \varphi(t)]^T$  - вектор-функция обобщенных координат,  $M, C$  - матрицы масс и демпфирования,  $F(U(t))$  - вектор-функция сил упругости,  $R(t)$  - вектор внешней узловой нагрузки.

Численное решение уравнений (16) выполняется с использованием абсолютно устойчивого метода прямого интегрирования – метода трапеции. В этом случае шаг интегрирования  $\tau$  не имеет критического значения и может назначаться из соображений требуемой точности решения и с учетом периодов свободных колебаний системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка».

### **3. Частоты и формы свободных колебаний системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка»**

Рассмотрим свободные колебания жесткой нити вблизи статического положения равновесия при действии постоянной и временной нагрузок. Постоянная нагрузка - это силы собственного веса нити.

Временная нагрузка задавалась системой двух грузов весом 13 кН каждый, расположенных на расстоянии 4 м. При перемещении системы грузов их масса приводится по правилу рычага в узлы цепи.

Расчет выполнялся при следующих параметрах жесткой нити: модуль упругости материала  $E = 2,1 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup>, площадь  $A = 3,515 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>, жесткость на растяжение  $EA = 7,382 \cdot 10^5$  кН, момент инерции  $J = 0,7545 \cdot 10^{-5}$  м<sup>4</sup>, изгибная жесткость  $EJ = 1584,45$  кНм<sup>2</sup>. Длина пролета  $L_p = 40$  м. Число звеньев цепи  $n = 60$ . Начальная относительная деформация нити  $\varepsilon_0 = 0,6$  %, начальная длина нити  $L_0 = 39,76$  м.

Методика вывода разрешающих уравнений для расчета свободных колебаний геометрически нелинейных систем вблизи статического положения равновесия изложена в [9,10].

На рис. 4 показаны формы и частоты (периоды) свободных колебаний жесткой нити вблизи статического положения равновесия от постоянной нагрузки. Красным цветом отмечена форма статического равновесия, малиновым - форма колебаний.

На рис. 5 показаны формы свободных колебаний жесткой нити вблизи положения статического равновесия при действии постоянной и временной нагрузок. Временная нагрузка приложена левее середины пролета нити (рис. 5).

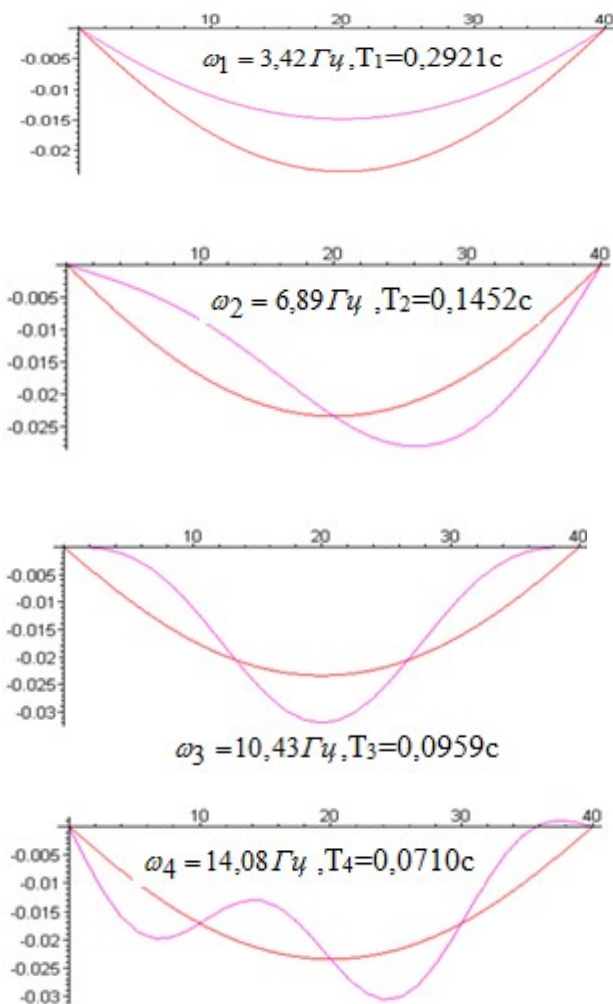


Рис. 4 (начало)

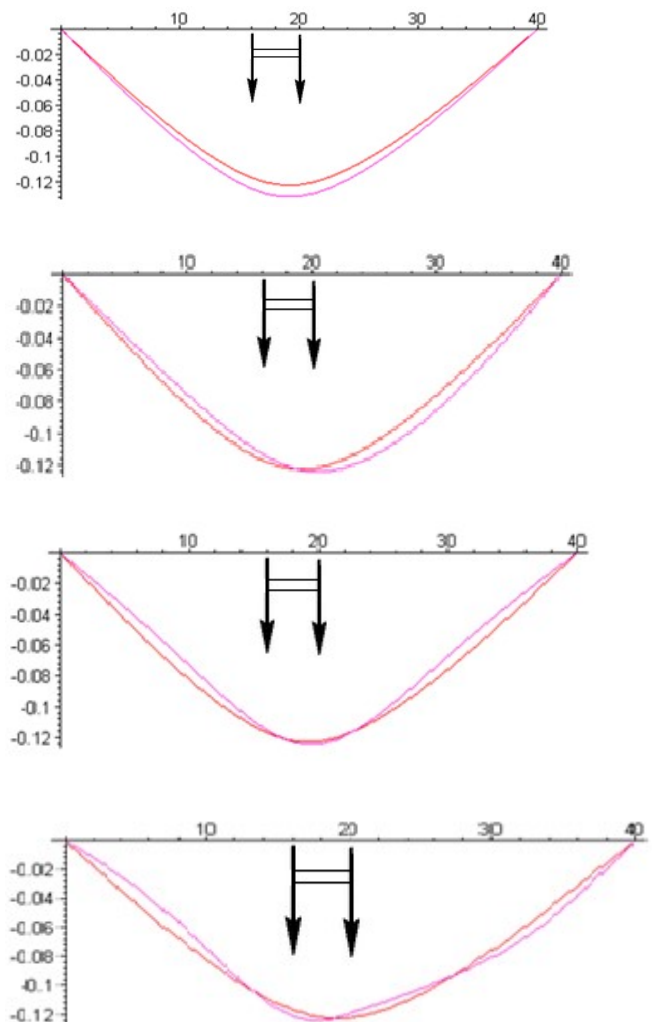


Рис. 5 (начало)

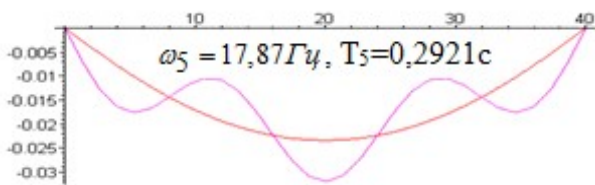


Рис.4 (окончание)

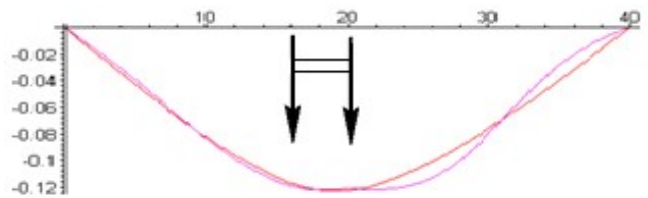


Рис. 5 (окончание)

Заметим, что при перемещении временной нагрузки вдоль нити симметричное нагружение нити возникает только один раз. Поэтому формы свободных колебаний относительно статического положения равновесия при действии постоянной и временной нагрузок не будут симметричными или кососимметричными, как это имеет место в формах свободных колебаний при действии постоянной нагрузки. При совместном действии постоянной и временной нагрузок изменяется форма статического равновесия и соотношение между ординатами формы свободных колебаний. Число узловых точек в форме свободных колебаний сохраняется (под узловыми точками мы понимаем точки пересечения кривых статического равновесия и формы колебаний).

Графики изменения частот свободных колебаний в зависимости от положения подвижной нагрузки представлены на рис. 6.

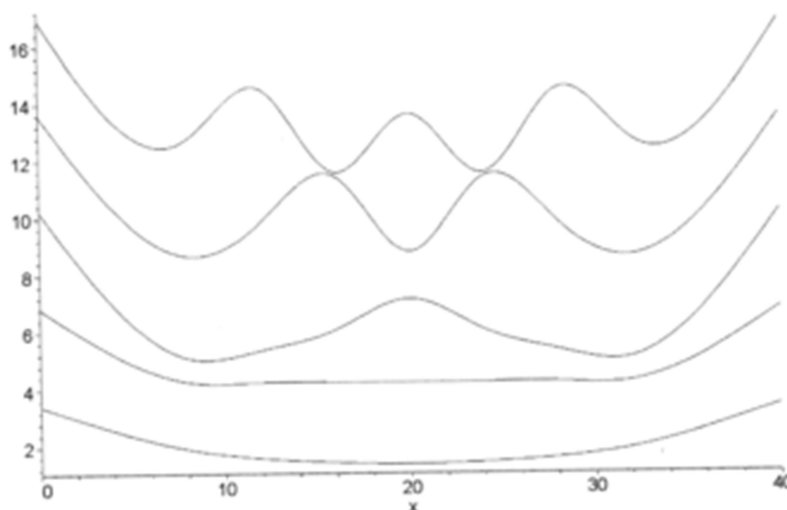


Рис. 6. Изменение частот свободных колебаний при различном положении временной нагрузки

Анализ представленных результатов указывает на сильную связанность колебаний подрессоренной нагрузки и жесткой нити. При расположении временной нагрузки в середине пролета имеет место существенное снижение первой собственной частоты (увеличение периода). Снижение второй собственной частоты наблюдается при расположении нагрузки в четвертях пролета и в середине. Для третьей частоты имеет место снижение частоты при расположении нагрузки в первой и второй четвертях пролета и сравнительный рост при перемещении нагрузки в окрестности середины пролета (кривая имеет три локальных экстремума). Для четвертой и пятой частот характерен волнообразный характер изменения. Кривая изменения 4-й частоты имеет пять локальных экстремумов, а кривая изменения 5-й частоты имеет семь локальных экстремумов. Отметим, что в точках  $x = 16$  м и  $x = 24$  м кривые изменения 4-й и 5-й частот сближаются, то есть появляются кратные частоты.

#### 4. Неявная схема прямого интегрирования, численные исследования

Интегрирование уравнений (16) выполним с использованием неявного метода трапеции [11, 12]:

$$\begin{aligned} & \left(4\frac{M}{\tau^2} + 2\frac{C}{\tau}\right)U(t+\tau) - F(U(t+\tau)) = \\ & = \left(4\frac{M}{\tau^2} + 2\frac{C}{\tau}\right)U(t) + \left(4\frac{M}{\tau} + C\right)\frac{dU(t)}{dt} + M\frac{d^2U(t)}{dt^2} + R(t+\tau), \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\tau$  шаг интегрирования.

Для того чтобы получить решение  $U(t+\tau)$  на временном слое  $t+\tau$ , необходимо решить систему нелинейных алгебраических уравнений. Решение системы нелинейных уравнений выполним методом Ньютона. Для этого вектор-функцию  $F(U(t+\tau))$  разложим в ряд Тейлора.

В результате получим

$$\begin{aligned} & \left(4\frac{M}{\tau^2} + 2\frac{C}{\tau} - J(U_{i-1}(t+\tau))\right) \cdot (U_i(t+\tau) - U_{i-1}(t+\tau)) = \left(4\frac{M}{\Delta t^2} + 2\frac{C}{\Delta t}\right) \cdot U_{i-1}(t+\tau) + \\ & + F(U_{i-1}(t+\tau)) + \left(4\frac{M}{\tau^2} + 2\frac{C}{\tau}\right) \cdot U_{i-1}(t) + \left(4\frac{M}{\tau} + C\right) \cdot \frac{dU_{i-1}(t)}{dt} + M \cdot \frac{d^2U_{i-1}(t)}{dt^2} + R(t+\tau), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $J(U_{i-1}(t+\tau))$  - матрица Якоби вектор-функции  $F(U(t+\tau))$  в точке начального приближения к решению  $U_{i-1}(t+\tau)$ . Матрица Якоби  $J(U_{i-1}(t+\tau))$  - симметричная, положительно определенная. Таким образом, на каждом шаге интегрирования по времени производится итерационный цикл решения нелинейной системы алгебраических уравнений. Начальное приближение к решению задается с предыдущего временного слоя. Итерационный цикл завершается по достижении заданной точности решения системы  $|U_i(t+\tau) - U_{i-1}(t+\tau)| \leq \varepsilon$ .

Схема неявного интегрирования (18) является абсолютно устойчивой, поэтому шаг интегрирования  $\tau$  не имеет критического значения и может выбираться из соображений требуемой точности решения и с учетом периодов свободных колебаний системы.

Частоты (периоды) свободных колебаний системы «Жесткая нить + подвижная нагрузка» определяются вблизи статического положения равновесия от постоянной и временной нагрузок (при различном положении временной нагрузки).

Матрица демпфирования  $C$  в уравнении (16) предназначена для аппроксимации диссипации энергии при колебаниях системы. В общем случае матрица  $C$  не является линейной комбинацией матриц масс и жесткости. Для систем, в которых нельзя не учитывать демпфирование, а опытные данные о задании матрицы демпфирования отсутствуют, предпочтительно использовать модель Релея пропорционального демпфирования. Матрицу демпфирования  $C$  зададим в виде

$$C = \alpha \cdot M + \beta \cdot J(U_0(t)), \quad (19)$$

где  $J(U_0(t))$  - касательная матрица жесткости (матрица Якоби), отвечающая положению статического равновесия от постоянной нагрузки,  $\alpha$  и  $\beta$  - константы, подлежащие определению.

Такой способ задания матрицы демпфирования предполагает, что суммарная диссипация энергии в конструкции складывается из суммы энергий, поглощенных по каждой из собственных форм колебаний, т. е. вклад  $i$ -й формы колебаний в движение системы определяется из решения уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2} z_i(t) + 2\omega_i \xi_i \frac{d}{dt} z_i(t) + \omega_i^2 z_i(t) = r_i(t). \quad (20)$$

Коэффициент демпфирования  $\xi_i$  на одной собственной частоте  $\omega_i$  можно получить в результате эксперимента путем наложения начальных условий, относящихся только к соот-



ветствующей форме собственных колебаний и измеряя характеристики затухания свободных колебаний.

Константы  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по двум значениям коэффициентов демпфирования  $\xi_1, \xi_2$ , относящимся к двум различным частотам свободных колебаний  $\omega_1, \omega_2$ . Система для определения  $\alpha$  и  $\beta$  имеет вид

$$\alpha + \beta \cdot \omega_1 = 2 \cdot \omega_1 \cdot \xi_1, \quad \alpha + \beta \cdot \omega_2 = 2 \cdot \omega_2 \cdot \xi_2. \quad (21)$$

Для системы  $\omega_1, \omega_2$  – это первая и вторая собственные частоты колебаний вблизи статического положения равновесия от постоянной нагрузки. Коэффициенты демпфирования, по соответствующим формам колебаний, задавались равными  $\xi_1=0,01, \xi_2=0,02$ , т. е. 1 % и 2 % от критического значения.

Были проведены численные исследования колебаний жесткой нити под действием подвижной нагрузки при скорости движения подвижной нагрузки  $V = 20 \text{ м/с}$ .

На рис. 9 представлены перемещения и скорость точки, отвечающей середине пролета нити, перемещение точки контакта колесной пары тележки с нитью, а также напряжения в нижней точке поперечного сечения середины пролета жесткой нити  $\sigma = \frac{M}{W} + \frac{N}{A}$ . Динамические кривые совмещены с квазистатическими кривыми.

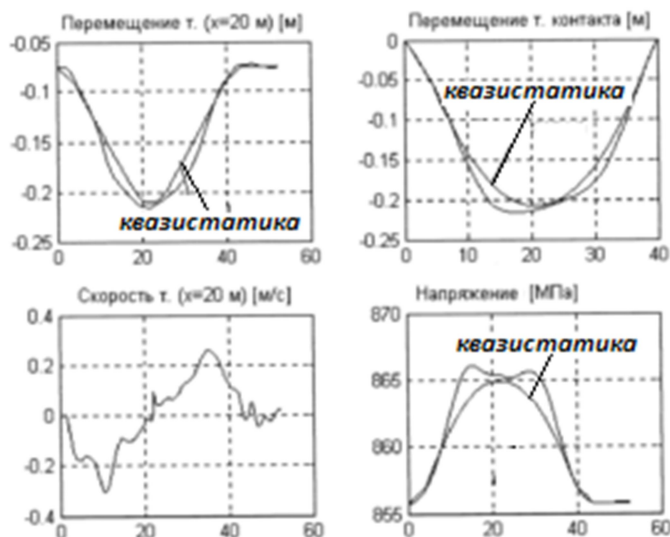


Рис. 9. Вертикальные перемещения, скорость отдельных точек нити, напряжения

### Выводы

Представленный алгоритм динамического расчета жесткой нити на подвижную нагрузку может быть применен для расчета колебаний висячих и вантовых мостов под действием подвижной нагрузки, когда имеет место сильно выраженная связанность колебаний подвижной нагрузки и пролетного строения (обратная связь).

### Библиографический список

1. Ананьин, А. И. К расчету гибких и жестких нитей / А. И. Ананьин, А. Н. Аверин // Исследования висячих комбинированных конструкций. - Воронеж, 1980. - С. 15-29.
2. Аверин, А. Н. Вариант уравнений жесткой нити / А. Н. Аверин // Методы и алгоритмы расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1990. - С. 160-166.

3. Аверин, А. Н. Конечный элемент жесткой нити / А. Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. 2018. - Т.3. - №18. - С. 7-17.
4. Барченков, А. Г. Динамический расчет автодорожных мостов / А. Г. Барченков. – М.: Транспорт, 1976. – 199 с.
5. Сафронов, В. С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку / В. С. Сафронов. – Воронеж: ВГУ, 1983. – 194 с.
6. Аверин, А. Н. Расчет гибкой нити на консервативную нагрузку / А. Н. Аверин // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1993. - С. 154-159.
7. Аверин, А. Н. Нелинейные колебания гибкой нити / А. Н. Аверин // Современные проблемы механики и прикладной математики: тезисы докладов школы. 1998. С. 10.
8. Аверин, А. Н. Исследование нелинейные колебания гибкой нити / А. Н. Аверин // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: межвузовский. сб. науч. трудов. - Воронеж, 1998. - С. 8-12.
9. Аверин, А. Н. Малые колебания непологой гибкой нити / А. Н. Аверин, А. Ф. Хмыров // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: Сб. науч. ст. преподавателей, сотрудников, аспирантов и докторантов академии. - Воронеж, 2000. - С. 149-154.
10. Аверин, А. Н. Конечный элемент гибкой нити / А. Н. Аверин // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2002. - С. 34-38.
11. Аверин, А. Н. Экспериментально-теоретические исследования колебаний неразрезного пролетного строения моста под действием подвижной нагрузки / А.Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. - 2019. - Т.1. -№20. - С. 41-51.
12. Аверин, А. Н. Нелинейные пространственные колебания висячего моста под действием подвижной нагрузки / А. Н. Аверин, С. В. Ефрюшин // Оценка риска и безопасность строительных конструкций: тезисы докладов. – Воронеж, 2006. - С. 58-60.

#### References

1. Ananyin A.I., Averin A.N. To the calculation of flexible and rigid strings. Studies of suspended combined structures. Voronezh, 1980. Pp. 15-29.
2. Averin A.N. Rigid string equations version. Methods and algorithms for calculating buildings and structures. Voronezh, 1990. Pp. 160-166.
3. Averin A.N. The finite element of a rigid string. Structural Mechanics and Structures. No. 3(18). 2018. Pp. 7-17.
4. Barchenkov A.G. The dynamic calculation of road bridges. M.: Transport, 1976. 199 p.
5. Safronov V.S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges on a moving load. Voronezh: Voronezh State University, 1983. 194 p.
6. Averin A.N. Calculation of a flexible string for a conservative load. Modern methods of static and dynamic calculation of buildings and structures. Voronezh, 1993. Pp. 154-159.
7. Averin A.N. Nonlinear vibrations of a flexible string. Modern Problems of Mechanics and Applied Mathematics: Abstracts of school reports. 1998. Pp. 10.
8. Averin A.N. Research of nonlinear vibrations of a flexible string. Modern methods of static and dynamic calculation of buildings and structures. Voronezh, 1998. Pp. 8-12.

9. Averin A.N., Khmyrov A.F. Small vibrations of an inappropriate flexible string. Modern methods of static and dynamic calculation of buildings and structures. Voronezh, 2000. Pp. 149-154.
10. Averin A.N. The final element of a flexible string. Modern methods of static and dynamic calculation of buildings and structures. Voronezh, 2002. Pp. 34-38.
11. Averin A.N. Experimental-theoretical studies of vibrations of continuous span bridge under the action of a moving load. Structural Mechanics and Structures. No. 1(20). 2019. Pp. 41-51.
12. Averin A.N., Efrushin S.V. Non-linear spatial vibrations of a suspension bridge under the action of a moving load. Risk assessment and safety of building structures: abstracts. Voronezh, 2006. Pp. 58-60.

## RIGID STRING VIBRATIONS UNDER MOVING LOAD

A. N. Averin<sup>1</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230;  
e-mail: AN\_Averin@mail.ru

---

The problem of calculating rigid string vibrations under the action of a moving load is considered. The moving load is represented by a trolley with a platform and two wheelsets, the suspension of wheelsets is modeled by springs. For a rigid string, a discrete model is used in the form of an articulated rod chain, consisting of individual elements interconnected by hinges and elastic inserts. The equation of motion of the system "rigid string + moving load" is obtained from the equilibrium conditions of individual elements of the system at an arbitrary point in time  $t$ , taking into account the forces of inertia.

For the system "rigid string + moving load" the frequencies and forms of free vibrations are determined near the static equilibrium position under the action of constant and temporary loads. The graphs of changes in the frequencies of free vibrations near the static equilibrium position are analyzed depending on the location of the temporary load. An assessment of the connectedness of the oscillations of the rigid thread and the moving load is given. The integration of the equations of motion of the system "Rigid thread + moving load" is performed using the implicit trapezoid method. An example of calculating the forced vibrations of a rigid string under the action of a moving load is given. The values of dynamic displacements and speeds of individual points of the string, as well as stresses at points of dangerous sections, are analyzed. The developed algorithm for the dynamic calculation of a rigid string on a moving load is recommended to be used to calculate the vibrations of suspension and cable-stayed bridges when there is a pronounced correlation of the vibrations of the moving load and the span (feedback).

**Keywords:** rigid string, moving inert load, free and forced vibrations of a rigid string discrete model, implicit methods of direct integration of differential equations.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

---

УДК 624.26

## ПОКАЗАТЕЛИ НАДЕЖНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ ПРОЕКТИРУЕМЫХ АВТОДОРОЖНЫХ МОСТОВ ДЛЯ СОВРЕМЕННЫХ РОССИЙСКИХ И ЕВРОПЕЙСКИХ НОРМАТИВНЫХ ВРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК

В. С. Сафронов<sup>1</sup>, Н. Мельхиор<sup>2</sup>  
Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф., профессор кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 2715230  
e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

<sup>2</sup> Магистрант кафедры строительной механики

---

С использованием ранее предложенной и апробированной методики расчета параметров надёжности осуществляются численные исследования выполненного из современных типовых предварительно напряженных железобетонных тавровых балок без диафрагменного пролетного строения автодорожного моста. Сопоставляются количественные показатели надёжности при эксплуатации транспортного сооружения российскими временными нагрузками А14 и Н14 в сравнении с аналогичными характеристиками этого же транспортного сооружения при пропуске современных европейских временных нагрузок А(L) и Me120, Mc120, Vt. В качестве критериев для вероятностных оценок рассматриваемого разрезного пролетного строения используются изгибающие моменты в средних сечениях и поперечные силы и приопорных зонах несущих балок. В численных исследованиях используется пространственная конечно-элементная модель плитно-балочной конструкции и вероятностные представления прочностных характеристик бетона и рабочей арматуры, а также случайных отклонений действующих постоянных и временных нагрузок.

Полученные в численных исследованиях данные позволяют дать качественную и количественную оценку нагруженности характерных сечений несущих элементов пролетного строения при эксплуатации в соответствии с российскими и европейскими нормативными документами.

**Ключевые слова:** автодорожный мост, типовые железобетонные двутавровые балки, современные российские и европейские временные нагрузки, изгибающие моменты и поперечные силы, загруженность характерных сечений, показатели надёжности.

### Введение

В разных странах мира управление транспортными потоками на автомагистралях осуществляется в соответствии с национальными стандартами, имеющими принципиальные различия. Это следует, например, из сопоставления нормативных документов, используемых в настоящее время для проектирования мостовых сооружений в РФ [1] и странах Евросоюза [2]. Этот фактор оказывает существенное значение для организации международных транспортных коммуникаций, поэтому необходимы исследования для устранения имеющихся различий.

В одной из первых публикаций по затронутой проблеме [3] изучены различия в загруженности мостовых сооружений с железобетонными балочными пролетными строениями при их эксплуатации установленными в 1984 году в РФ нормативными нагрузками А11 и НК-80 и

---

© Сафронов В. С., Мельхиор Н., 2020

регламентируемыми европейскими нормами распределенными автомобильными **A(L)** и одиночными колесными транспортными средствами **Me-80**. Для широко распространенного балочного моста с пролетным строением по т. п. СДП, вып. 710/5 выявлены существенные различия по критерию прочности нормальных сечений в середине пролета при эксплуатации.

Выполненные исследования затрагивают ограниченный круг вопросов. В частности не изучены различия нагруженности железобетонных балочных мостов в наклонных сечениях приопорных зон, где в отличие от нормальных средних сечений железобетонных мостов определяющим фактором является поперечная сила. Вызывает интерес особенности распределения усилий в характерных сечениях строящихся в настоящее время под современные временные нагрузки **A14** и **H14** в сравнении с возникающим в них усилиями от регламентируемых в зарубежных нормативных документах увеличенными временными нагрузками **A(L)**, **Me120**, **Mc120** и **Vt**. Такие исследования представлены в настоящей статье. При этом используется предложенная и апробированная в публикации [3] вероятностная методика, основанная на положениях теории надежности [4] и теории риска [5] с учетом разброса прочностных характеристик материалов и действующих постоянных и временных нагрузок. Такая методика позволяет получать достаточно обоснованные оценки при изучении напряженно-деформированного состояния весьма разнообразных многоэлементных конструкций и сооружений [6-10].

### 1. Описание объекта исследования и принятой расчетной модели

Объектом изучения является балочный бездиафрагменный разрезной мост для двух полос автомобильной нагрузки **A14** и одиночной колесной нагрузки **H14** с пролетными строениями из семи тавровых балок из бетона класса **B40** ( $R_b=20$  МПа) со стержневой ненапрягаемой продольной рабочей арматурой класса **AIII** с расчетным сопротивлением  $R_s=265$  МПа ( $R_{s,20}=295$  МПа). Габарит моста -  $\Gamma 10,0 + 2 \times 1,50$  м. Для численных исследований в дальнейшем рассматривается семибалочная конструкция из типовых предварительно напряженных балок разработки Союздорпроекта [12] расчетным пролетом 17,4 м. Шаг главных балок в поперечном направлении является одинаковым и равным 1,70 м.

Поперечное сечение, продольный фасад и армирование главной балки изучаемого пролетного строения моста приведено на рис. 1.

При проведении статических расчетов пролетное строение рассматривается как пластинчато-стержневая система, в которой продольные стержни моделируют балки пролетного строения, а пластинчатые элементы – плиту проезжей части между балками (рис. 2). При моделировании несущих элементов рассчитываемого пролетного строения использовались следующие типы конечных элементов (КЭ):

- универсальный стержневой КЭ с учетом сдвиговых деформаций (КЭ 10);
- универсальный четырехугольный плоский оболочечный КЭ (КЭ 44).

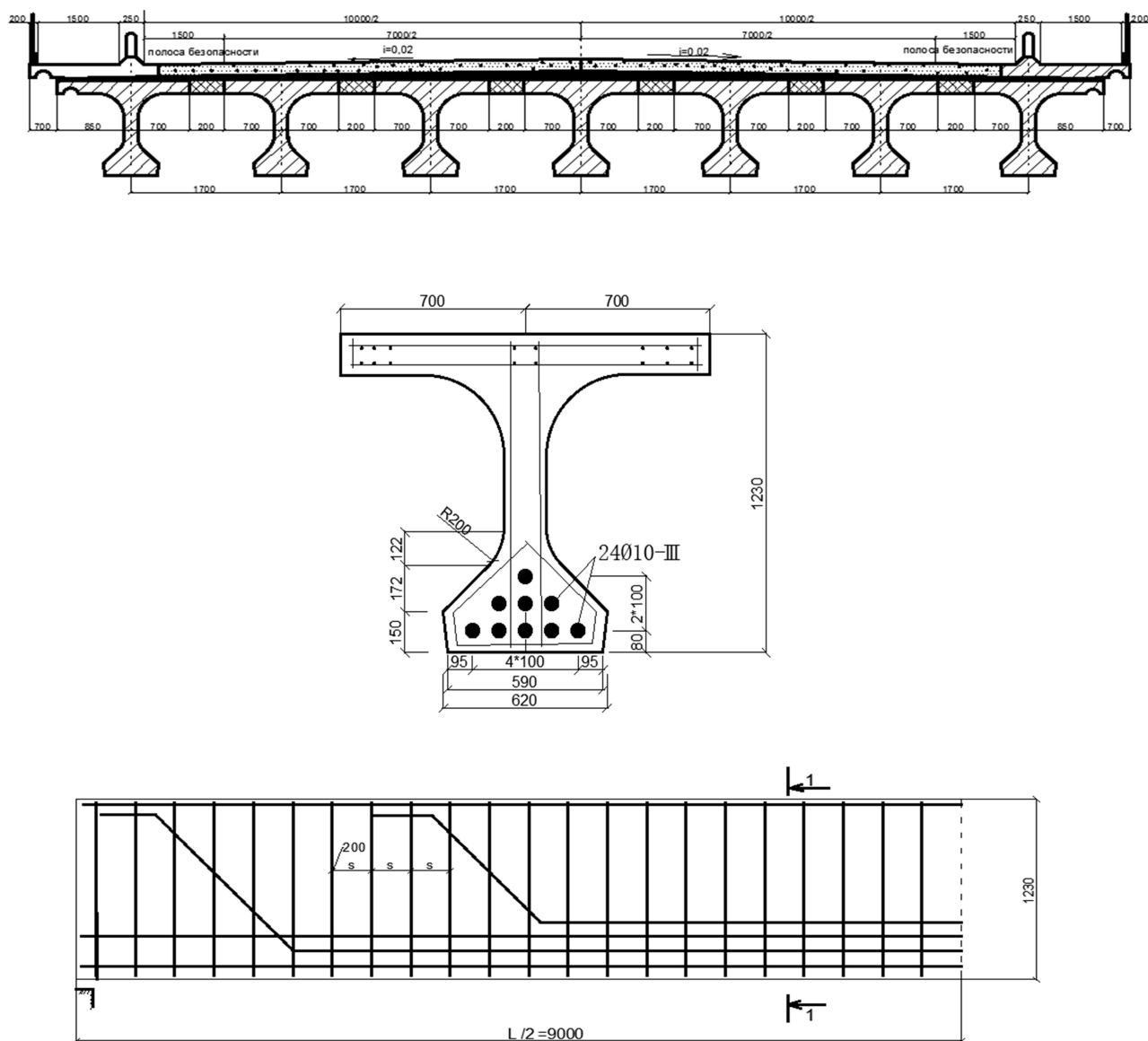
Универсальный стержневой КЭ представляет собой прямолинейный двух узловый элемент с 12-ю степенями свободы (СС), моделирующий растяжение-сжатие, кручение, поперечный сдвиг и изгиб.

Плоский четырехугольный оболочечный КЭ, имеющий 24-е СС, является комбинацией конечных элементов плоского (мембранного) и изгибного напряженных состояний. Этот элемент воспринимает мембранные, сдвиговые, поперечные и изгибные нагрузки.

Поскольку в узлах стержневого и плоского оболочечного КЭ одинаковый набор СС, то возможно их совместное использование в одной КЭ-модели.

В пластинчато-стержневой расчетной схеме для исключения повторного учета участия в восприятии действующих постоянных и временных нагрузок плоских оболочечных КЭ плиты проезжей части на изгиб в продольном направлении жесткостные характери-

ки плиты задаются как для ортотропного материала с малой по величине жесткостью в продольном направлении.



**Рис. 1.** Поперечное сечение, продольный фасад и армирование главной балки рассматриваемого пролетного строения моста

Расчеты выполнялись с использованием сертифицированного программного комплекса «ЛИРА-САПР 2012 PRO» со специализированной расчетно-графической системой ПК «ЛИРА-САПР 2012 Мост» [15].

Расчет жесткостных характеристик балок выполнялся с использованием расчетно-графической системы «Конструктор сечений» комплекса «ЛИРА». Эта программа предоставляет возможность компоновать в графической среде сечение сложной формы. Геометрические характеристики вычисляются численным интегрированием после выполнения процедуры триангуляции.

Геометрические размеры балок и их армирование, а также постоянные нагрузки от элементов мостового полотна и дорожного покрытия принимались в соответствии с проектом [12].

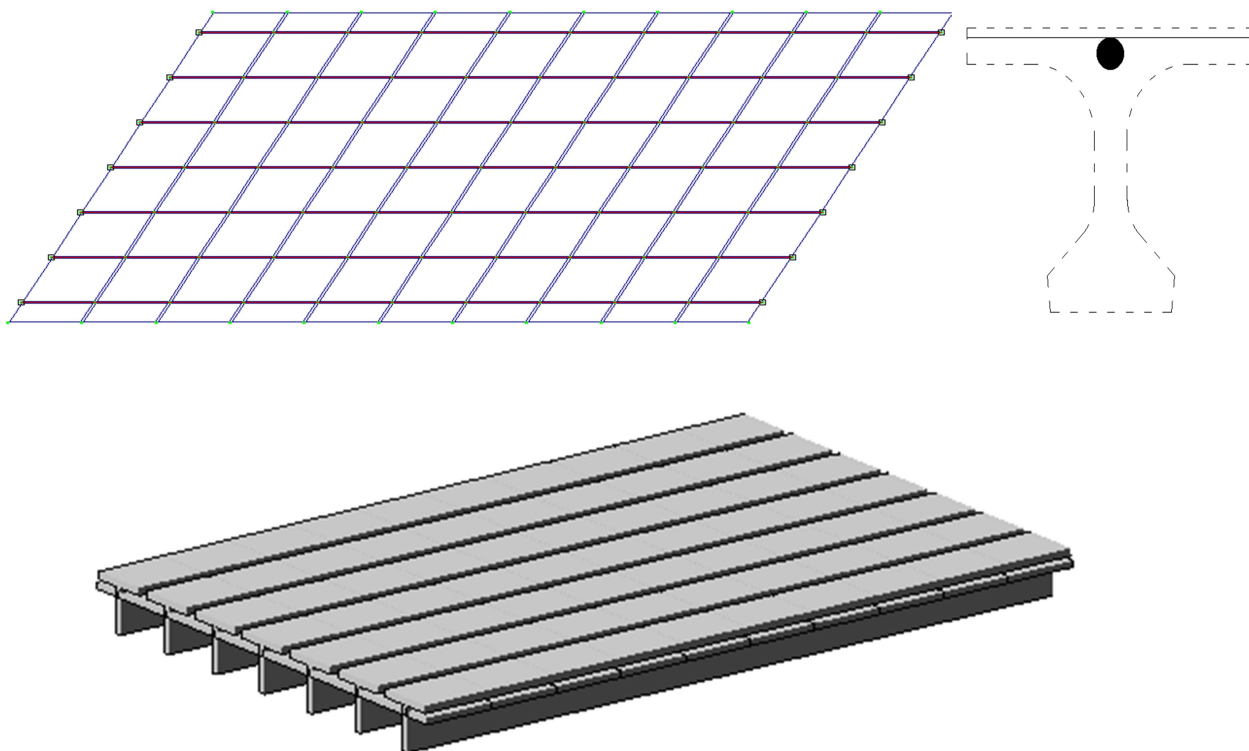


Рис. 2. Конечно-элементная расчетная схема плитно-балочного пролетного строения

## 2. Описание временных подвижных нагрузок

При проведении сопоставительных расчетов параметров надежности представленного в разделе 1 настоящей публикации мостового сооружения использованы регламентируемые российским СП 35.13330.2011 [1] и европейским EN 1991-2 [2] нормативными документами типы распределенных и локальных временных нагрузок для задания при проектировании мостовых сооружений. Ниже даются их графические представления и рекомендуемые значения коэффициентов надежности по нагрузкам и коэффициенты динамичности.

### 2.1. Временные нагрузки по российским нормативам [1]

1. Автомобильная нагрузка **A14** в виде двух полос (рис. 3, а) – распределенной составляющей нагрузки интенсивностью (на обе колеи) по длине моста  $v=13,73$  КН/м и двухосной тележки с осевой нагрузкой  $P=137,3$  кН (14 тс). Первая полоса принимается с коэффициентом сочетаний  $S_1=1,0$  вторая – с уменьшенным коэффициентом  $S_2=0,6$ . Коэффициенты надежности по нагрузке составляют  $\gamma_f=1,5$  – для тележки и  $\gamma_f=1,2$  – для распределенной части. Динамический коэффициент для моста пролетом  $\lambda=l=17,4$ м равен:

$$1+\mu=1+\frac{45-\lambda}{135}=1,20. \quad (1)$$

2. Колесная нагрузка **H14** в виде одной четырехосной машины (рис. 3, б) общим весом 785 КН (80 тс), которая не может быть установлена на полосы безопасности. Коэффициент надежности по нагрузке принимается равным  $\gamma_f=1,0$ . Динамический коэффициент независимо от длины пролета моста равен  $1+\mu=1,1$ .

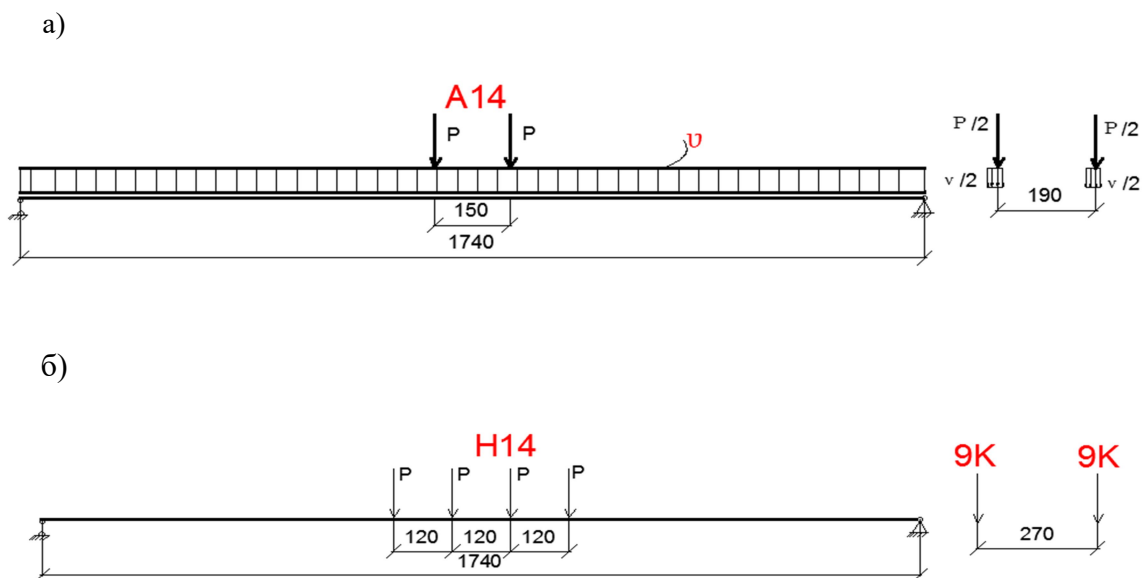


Рис. 3. Схемы временных нагрузок по Российским нормативам

## 2.2. Временные нагрузки по европейским нормативам

Аналогично российским нормам [1] в нормативном документе [2] также используются два типа подвижных нагрузок: распределенные - для колонн типовых автомобилей и сосредоточенные - для тяжелых транспортных средств, однако вместо распределения по длине загружаемых полос проезда они могут перемещаться по любым колеям в пределах всей ширины проезжей части, за исключением полос безопасности шириной 0,50 м (рис. 4).

Распределенная по ширине проезжей части (рис. 4,а) автомобильная нагрузка  $A(L)$  учитывается с помощью коэффициентов  $a_1=0,90$  и  $a_2=0,66$ , которые в отличие от ГОСТ 32960-2014 зависят от расположения и важности полос проезда колонн временной нагрузки. Коэффициент надежности для распределенной нагрузки  $A(L)$  равен  $\gamma_f=1,05$ . Динамический коэффициент по европейским нормативам [2] зависит от расчетного пролета моста и соотношения между действующими на мост постоянными и временными нагрузками. Для рассматриваемого балочного моста по нашим вычислениям близок к принятому в российских нормах и составляет:  $1+\mu=1,18$ .

Описание нагрузок от одиночных тяжелых транспортных средств при проектировании и организации движения выполняется по одной из следующих схем: **Me120** (рис. 4, б), **Mc120** (рис. 4, в) и **Vt** (рис. 4, г).

В первой схеме **Me120** автомобиль общим весом 110 тс представляется двумя линейно распределенными по ширине проезжей части частями длиной 3,5 м на расстоянии 1,50 м друг от друга (рис. 4, б). Расположение одиночного транспортного средства на проезжей части автодорожного моста может быть произвольным, исключая находящиеся вблизи боковых ограждений полосы безопасности шириной 0,50 м. Коэффициент надежности по нагрузке **Me120** принимается равным  $\gamma_f=1,0$ . Динамический коэффициент для этой одиночной временной нагрузки отличается от принятого в РФ для колесной нагрузки **H14** независимо от пролета. Здесь его величина определяется в зависимости от расчетного пролета моста и соотношения между действующими на мост постоянными и временными нагрузками. Для рассматриваемого моста динамический коэффициент составляет  $\delta = 1,195$ .



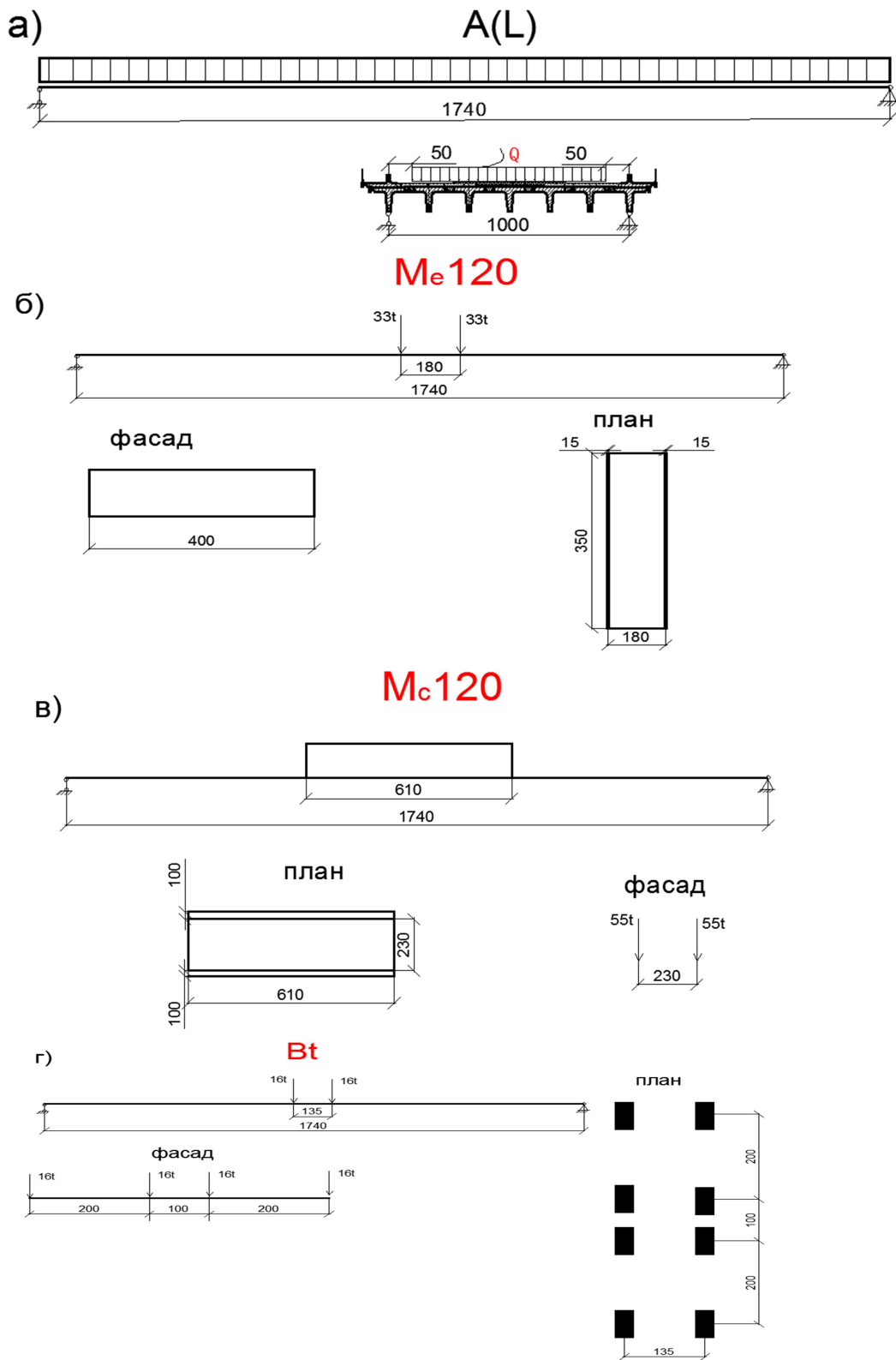


Рис. 4. Схемы временных нагрузок по Европейским нормативам

В альтернативной модели **Mc120** одиночные транспортные средства также общим весом 110 тс представляются двумя линейно распределенными по ширине проезжей части частями длиной 6,10м на расстоянии 3,30м друг от друга (рис. 4, в). Коэффициент надежности для временной нагрузки **Mc120**

принимается равным  $\gamma_f=1,0$ . Динамический коэффициент принимается в зависимости от расчетного пролета моста и соотношения между действующими на мост постоянными и временными нагрузками. Для рассматриваемого моста динамический коэффициент составляет  $\delta = 1,24$ .

Третья модель **Vt** одиночного транспортного средства общим весом 80 тс применяется при описании занимающего всю ширину проезжей части крупногабаритного экипажа. Она имеет вид четырехосной транспортной системы (рис. 4, г). Коэффициент надежности для такой одиночной временной нагрузки принимается равным  $\gamma_f=1,0$ . Динамический коэффициент тоже вычисляется в зависимости от расчетного пролета моста и соотношения между действующими на мост постоянными и временными нагрузками. Для рассматриваемого моста динамический коэффициент составляет  $\delta = 1,185$

### 3. Основные положения методики расчета показателей надежности нормальных и наклонных сечений несущих балок моста

Для определения количественных параметров надежности железобетонных балок рассматриваемого плитно-балочного пролетного строения с использованием положений теории надежности по аналогии с принятой в [3] методике введем допущения о том, что прочностные характеристики бетона и арматуры, а также действующие постоянные и временные нагрузки являются случайными величинами, которые подчиняются нормальному закону распределения. В качестве критерия оценки надежности для рассматриваемого разрезного плитно-балочного пролетного строения примем изгибающие моменты в средних сечениях главных балок и поперечные силы в наиболее нагруженных наклонных сечениях приопорной зоны. При определении математических ожиданий прочностных характеристик материалов используем известные положения об 95-процентной обеспеченности нормативных сопротивлений бетона  $R_{bn}$  или арматуры  $R_{sn}$ :

$$m_R = \frac{R_{bn}(R_{sn})}{1-1.64 \cdot \nu_R}, \quad (2)$$

а стандарты прочности материалов вычислим через нормируемые коэффициенты вариации прочности  $\nu_R$  по формуле:

$$\sigma_R = m_R \cdot \nu_R. \quad (3)$$

Статистические параметры максимальных изгибающих моментов и поперечных сил от действующих постоянных и временных нагрузок для использования в вероятностных расчетах определим через расчетные значения изгибающих моментов  $M_{pi}$  и поперечных сил  $Q_{pi}$ , коэффициенты надежности по нагрузкам  $\gamma_{fi}$  и коэффициентам вариации  $\nu_M$  из следующих выражений:

-математические ожидания изгибающих моментов и поперечных сил от нагрузок  $i$ -го типа:

$$m_{Mi} = M_{pi} / \gamma_{fi}, \quad m_{Qi} = Q_{pi} / \gamma_{fi},$$

(4)

-стандарты изгибающих моментов и поперечных сил от нагрузок  $i$ -го типа:

$$\sigma_{Mi} = m_{Mi} \cdot \frac{\gamma_{fi}-1}{1.64}, \quad \sigma_{Qi} = m_{Qi} \cdot \frac{\gamma_{fi}-1}{1.64}, \quad (5)$$

-суммарные математические ожидания нагрузок:

$$m_{Ms} = m_{M1} + m_{M2} + \dots + m_{Mn}, \quad m_{Qs} = m_{Q1} + m_{Q2} + \dots + m_{Qn}, \quad (6)$$

- стандарты суммарных нагрузок:

$$\sigma_{sM} = \sqrt{\sigma_{M1}^2 + \sigma_{M2}^2 + \dots + \sigma_{Mn}^2} \quad \sigma_{sQ} = \sqrt{\sigma_{Q1}^2 + \sigma_{Q2}^2 + \dots + \sigma_{Qn}^2} \quad (7)$$

Полученные статистические характеристики предельных и максимальных изгибающих моментов в средних сечениях балок пролетного строения и максимальных поперечных сил в приопорных зонах используются для вычисления параметров, оценивающих вероятность предельного состояния в каждой из балок при пропуске расчетных временных нагрузок, регламентируемых российскими и европейским нормативными документами:

1. Характеристики безопасности для средних нормальных сечений балок:

$$\beta = (m_{M_{пред}} - m_{M_{max}}) / \sqrt{(\sigma_{M_{пред}}^2 + \sigma_{M_{max}}^2)}; \quad (8)$$

2. Характеристики безопасности для наклонных сечений в приопорных зонах балок:

$$\beta = (m_{Q_{пред}} - m_{Q_{max}}) / \sqrt{(\sigma_{Q_{пред}}^2 + \sigma_{Q_{max}}^2)}; \quad (9)$$

3. Вероятность отказа в характерных сечениях балок:

$$Q = 0,5 - \Phi(\beta), \quad (10)$$

где  $\Phi(\beta)$  – функция Лапласа.

4. Логарифмический показатель надежности для характерных сечений балок

$$\rho = -\lg(1 / Q) . \quad (11)$$

#### 4. Сопоставительные данные надежности рассматриваемого моста для российских и европейских временных нагрузок

Описанная в предыдущем разделе вероятностная методика определения надежности характерных сечений железобетонных балок использовалась для сопоставления параметров надежности представленного в разделе 2 статьи автодорожного моста с типовыми плитно-балочными пролетными строениями расчетным пролетом  $l=17,4$  м при их загрузении установленными СП 35.13330.2011 [1] временными нагрузками **A14** и **H14** с аналогичными показателями для рекомендуемых европейским стандартом EN 1991-2 [2] временными нагрузками **A(L)**, **Me120**, **Mc120** и **Bt**.

Математические ожидания и среднеквадратические отклонения предельных изгибающих моментов и поперечных сил в характерных сечениях балок рассматриваемого пролетного строения, вычисленные методом статистических испытаний по проектным данным с помощью деформационного расчетного алгоритма с использованием трех линейной диаграммы деформирования для бетона и двухлинейной диаграммы деформирования для стержневой рабочей арматуры равны:

$m_{M_{пред}} = 3110,26$  кНм,  $\sigma_{M_{пред}} = 248,821$  кНм,  $m_{Q_{пред}} = 1319,34$  кН,  $\sigma_{Q_{пред}} = 204,29$  кН. Коэффициенты вариации в расчетах приняты равными: для бетона железобетонных балок  $v_b=0,135$  и для стержневой рабочей арматуры  $v_s=0,08$ .

Статистические характеристики суммарных максимальных изгибающих моментов в средних сечениях всех балок пролетного строения от совместного действия постоянных нагрузок, пешеходов на тротуарах и двух типов временных российских нагрузок **A14** и **H14**, а также четырех типов временных европейских нагрузок **A(L)**, **Me120**, **Mc120** и **Bt** приведены ниже в табл. 1. Эти данные также не изменяются в случае их использования для температурно-неразрезных железобетонных про-

летных строений, объединенных в неразрезную систему по конструкции дорожного покрытия проезжей части.

Таблица 1

Сравнительные данные параметров надежности автодорожного моста  
по средним нормальным сечениям железобетонных балок

Тип временной нагрузки	Номер балки	Статистические параметры максимальных изгибающих моментов, кНм		Характеристика безопасности $\beta$	Вероятность отказа $Q$	Логарифмический показатель надежности $\rho$
		$m_{M_{max}}$	$\sigma_{M_{max}}$			
Нагрузка <b>A14</b> от колонн автомобилей	Б1	2069	177,749	4,358	$6,549 \cdot 10^{-6}$	5,184
	Б2	2110	181,271	4,215	$1,250 \cdot 10^{-5}$	4,903
	Б3	2085	179,124	4,302	$8,454 \cdot 10^{-6}$	5,073
	Б4	1955	167,955	4,766	$9,404 \cdot 10^{-7}$	6,027
Одиночная колесная нагрузка <b>H14</b>	Б1	1831	157,302	5,222	$8,848 \cdot 10^{-8}$	7,053
	Б2	2277	195,619	3,646	$1,330 \cdot 10^{-4}$	3,876
	Б3	2214	190,206	3,858	$5,724 \cdot 10^{-5}$	4,242
	Б4	1796	154,296	5,353	$4,320 \cdot 10^{-8}$	7,364
Нагрузка <b>A(L)</b> от колонн автомобилей	Б1	1492	128,179	6,533	$3,230 \cdot 10^{-11}$	10,491
	Б2	1421	122,079	6,817	$4,636 \cdot 10^{-12}$	11,334
	Б3	1400	120,275	6,902	$2,560 \cdot 10^{-12}$	11,592
	Б4	1392	119,588	6,934	$2,037 \cdot 10^{-12}$	11,691
Одиночная нагрузка <b>Me120</b>	Б1	1125	110,395	7,370	$7,178 \cdot 10^{-12}$	12,844
	Б2	1248	118,896	6,963	$4,666 \cdot 10^{-11}$	11,778
	Б3	1564	134,364	6,247	$2,088 \cdot 10^{-10}$	9,680
	Б4	1723	148,024	5,630	$9,009 \cdot 10^{-9}$	8,045
Одиночная колесная нагрузка <b>Mc120</b>	Б1	1273	109,364	7,420	$4,297 \cdot 10^{-12}$	12,378
	Б2	1501	129,124	6,489	$4,324 \cdot 10^{-11}$	10,364
	Б3	1962	168,557	4,740	$1,066 \cdot 10^{-6}$	5,972
	Б4	2117	181,873	4,191	$1,392 \cdot 10^{-5}$	4,856
Одиночная колесная нагрузка <b>Vt</b>	Б1	1334	114,605	7,170	$2,690 \cdot 10^{-12}$	11,023
	Б2	1726	148,282	5,619	$9,627 \cdot 10^{-9}$	8,017
	Б3	2102	180,584	4,243	$1,104 \cdot 10^{-5}$	4,957
	Б4	2357	202,491	3,383	$3,582 \cdot 10^{-4}$	3,446

Статистические характеристики суммарных максимальных поперечных сил в наиболее нагруженных наклонных сечениях приопорных зон всех балок пролетного строения от совместного действия постоянных нагрузок, пешеходов на тротуарах и двух типов временных российских нагрузок **A14** и **H14**, а также четырех типов временных европейских нагрузок **A(L)**, **Me120**, **Mc120** и **Vt** приведены ниже в табл. 2.

Таблица 2

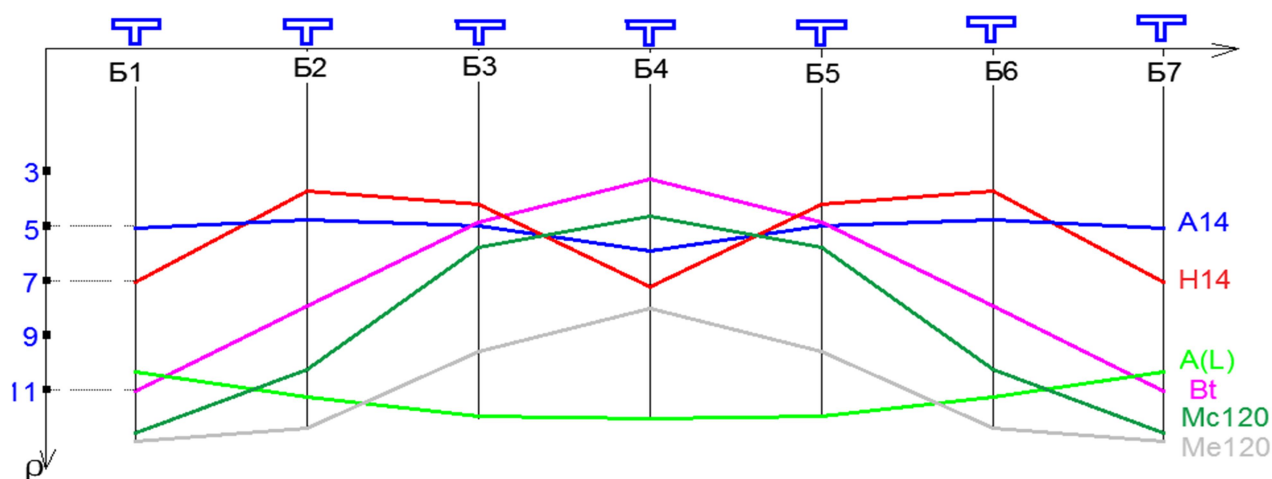
Сравнительные данные параметров надежности по наклонным приопорным сечениям  
железобетонных балок автодорожного моста

Тип временной нагрузки	Номер балки	Статистические параметры максимальных поперечных сил, кН		Характеристика безопасности $\beta$	Вероятность отказа $Q$	Логарифмический показатель надежности $\rho$
		$m_{Q_{max}}$	$\sigma_{Q_{max}}$			
Нагрузка <b>A14</b> от колонн автомобилей	Б1	358	30,756	4,897	$4,854 \cdot 10^{-7}$	6,314
	Б2	340	29,210	4,978	$3,217 \cdot 10^{-7}$	6,493
	Б3	327	28,093	5,036	$2,381 \cdot 10^{-7}$	6,623
	Б4	304	26,117	5,138	$1,189 \cdot 10^{-7}$	6,857
Одиночная колесная нагрузка <b>H14</b>	Б1	450	38,660	4,486	$3,626 \cdot 10^{-6}$	5,441
	Б2	473	40,636	4,383	$5,845 \cdot 10^{-6}$	5,233
	Б3	541	46,478	4,079	$2,262 \cdot 10^{-5}$	4,646
	Б4	487	41,838	4,321	$7,782 \cdot 10^{-6}$	5,109
Нагрузка <b>A(L)</b> от колонн автомобилей	Б1	300	25,773	5,156	$1,264 \cdot 10^{-7}$	6,898
	Б2	280	24,055	5,244	$7,841 \cdot 10^{-8}$	7,106
	Б3	274	23,540	5,271	$6,786 \cdot 10^{-8}$	7,168
	Б4	275	23,625	5,267	$6,951 \cdot 10^{-8}$	7,158
Одиночная нагрузка <b>Me120</b>	Б1	253	21,735	4,731	$1,116 \cdot 10^{-6}$	5,952
	Б2	260	22,332	4,710	$1,238 \cdot 10^{-6}$	5,907
	Б3	288	24,742	4,625	$1,870 \cdot 10^{-6}$	5,728
	Б4	319	27,405	4,531	$2,929 \cdot 10^{-6}$	5,533
Одиночная колесная нагрузка <b>Mc120</b>	Б1	256	21,993	4,722	$1,167 \cdot 10^{-6}$	5,933
	Б2	304	26,117	4,577	$2,360 \cdot 10^{-6}$	5,627
	Б3	348	29,897	4,443	$4,428 \cdot 10^{-6}$	5,354
	Б4	368	31,615	4,383	$5,866 \cdot 10^{-6}$	5,232
Одиночная колесная нагрузка <b>Bt</b>	Б1	290	24,914	4,619	$1,925 \cdot 10^{-6}$	5,716
	Б2	309	26,546	4,562	$2,536 \cdot 10^{-6}$	5,596
	Б3	348	29,897	4,443	$4,428 \cdot 10^{-6}$	5,354
	Б4	394	33,849	4,303	$8,413 \cdot 10^{-6}$	5,075

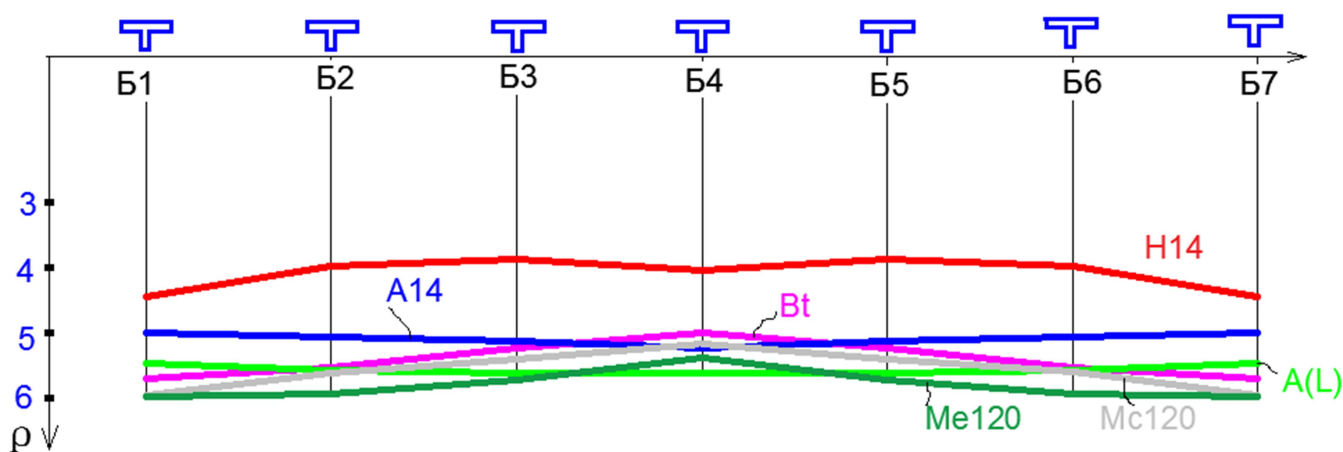
Представленные в табл. 1 и 2 расчетные показатели надежности расположенных на одной половине проезжей части четырех балок пролетного строения включают характеристики безопасности  $\beta$ , вероятности появления первого предельного состояния (отказа по прочности  $Q$ ) и логарифмического показателя надежности  $\rho$ . Учитывая симметрию пролетного строения относительно балки Б4, расположенной на продольной оси проезжей части, показатели надежности остальных балок пролетного строения будут одинаковыми с симметрично расположенными.

Графическое представление изменения логарифмических показателей надежности по всей ширине пролетного строения при их эксплуатации различными российскими и европейскими норма-

тивными нагрузками приведено для нормальных средних сечений на рис. 5, а для наиболее нагруженных наклонных сечений в приопорных зонах балочного моста – на рис. 6.



**Рис. 5.** Графики изменения логарифмического показателя надежности нормальных средних сечений железобетонных балок пролетного строения автодорожного моста от действия различных российских и европейских временных нагрузок



**Рис. 6.** График изменения логарифмического показателя надежности по наклонным сечениям в приопорных зонах железобетонных балок автодорожного моста от действия различных российских и европейских временных нагрузок

Из анализа численных значений приведенных в табл. 1 и табл. 2 показателей надежности и графиков на рис. 5 и 6 изменения логарифмического показателя надежности средних нормальных и приопорных наклонных сечений следуют следующие особенности в нагруженности главных балок железобетонного моста:

1. Показатели надежности наклонных сечений для всех балок пролетного строения при загрузке их как российскими, так и европейскими нагрузками являются весьма высокими. Логарифмические показатели надежности для всех типов нагрузок превышают  $\rho=5,0$ . Исключение составляет колесная нагрузка **H14**, для которой показатель надежности снижается для всех балок до значения  $\rho=4,0$ .

2. Характеристики зависимостей показателей надежности для средних нормальных сечений рассмотренного в публикации [3] железобетонного моста по т.п. СДП 710/5 повторились при численных исследованиях современного сооружения с усиленными балками. Так, зависимости по ширине моста параметров надежности главных балок для российских временных нагрузок **A14** и **H14** являются одинаковыми. При близком к одинаковым значениям параметров надежности для всех балок отмечается некоторое снижение логарифмического показателя для балок Б2 и Б5 под крайними полосами проезда и значительное увеличение надежности под средней балкой Б4 и рядом расположенных балках Б3 и Б5. Это явление подтверждается наблюдаемым в действительности существенным износом крайних балок железобетонных мостов с движением по одной полосе в каждую сторону.
3. Повторилась также отмеченная в статье [3] особенность зависимостей по ширине моста параметров надежности главных балок современного мостового сооружения для европейских временных нагрузок **A(L)**, **Me120**, **Mc120** и **Vt**. Наименее надежными при эксплуатации этими нагрузками являются балки, расположенные вблизи продольной оси проезжей части. Это объясняется расположением в этих местах наиболее ответственных полос для проезда транспортных средств.
4. Отметим отличительную особенность распределенной автомобильной нагрузки **A(L)** в европейских нормах, которая не является определяющей как при оценках нагруженности нормальных, так и наклонных сечений главных балок железобетонного разрезного моста.

### Выводы

Выполненные в настоящей работе исследования надежности характерных сечений проектируемых и строящихся в настоящее время железобетонных мостов в РФ установили, что распределение загруженности главных балок по средним и приопорным сечениям как для российских, так и для европейских временных нагрузок является равномерным, что приводит к одинаковой надёжности составляющих пролетное строение главных балок, несмотря на существенные различия в схемах приложения и правилах размещения нагрузок на пролетных строениях.

В связи с тем, что полученные данные касаются только пролетных строений с одной полосой проезда в каждом направлении и полной длиной 18 м, для полноты исследования следует рекомендовать аналогичные расчеты для пролетных строений с другими габаритами и длинами. При этом целесообразно использовать апробированную в настоящей публикации вероятностную методику, которая дает хорошо обоснованные оценки.

Рекомендуется полученные в настоящем исследовании данные использовать при принятии обоснованных управленческих решений при выборе режимов эксплуатации мостовых сооружений на международных маршрутах.

### Библиографический список

1. ГОСТ 32960-2014 «Дороги автомобильные общего пользования. Нормативные нагрузки, расчетные схемы нагружения». Разработан ОАО ЦНИИС, МТК 418 "Дорожное хозяйство". – М.: Стандартинформ, 2016. – 8 с.
2. Европейский стандарт EN 1991-2. ЕВРОКОД 1. Воздействия на сооружения. Часть 2. Транспортные нагрузки на мосты. – М., 2003. – 163 с.
3. Сафронов, В. С. Сопоставление надежности типового железобетонного пролетного строения автодорожного моста для российских и европейских нормативных временных нагрузок/ В. С.

- Сафронов, Н. Мельхиор // Строительная механика и конструкции. -2019. Т. 4. - № 23.- С. 51-62.
4. Райзер, В. Д. Теория надежности сооружений/ В. Д. Райзер. – М.: АСВ, 2010. – 252 с.
  5. Сеницын, А. П. Расчет конструкций на основе теории риска/ А. П. Сеницын. – М.: Стройиздат, 1985. – 304 с.
  6. Сафронов, В. С. Оценка риска разрушения нормальных сечений железобетонных балок произвольной формы/ В. С. Сафронов, Д. И. Доманов // Строительная механика и конструкции. – 2011. –№1(2). – С. 46-51.
  7. Сафронов, В. С. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой/ В. С. Сафронов, С. Д. Степанов, А. А. Петранин, Е.Н. Петреня // Известия высших учебных заведений. Строительство. -1998. - № 11-12. - С. 31-35.
  8. Сафронов, В. С. Деформационный расчет составных изгибаемых железобетонных стержневых элементов/ В. С. Сафронов, А. В. Черников // Строительная механика и конструкции. -2018. Т.3, № 18.- С. 81-92.
  9. Сафронов, В. С. Применение теории риска для оценки вероятности трещинообразования при стесненном кручении железобетонных мостовых балок/ В. С. Сафронов, Д. И. Доманов// Механика разрушения бетонов, железобетонов и других строительных материалов: сб. ст. по материалам 7-й междунар. науч. конф.: в двух томах. – 2013. - С. 31-38.
  10. Сафронов, В. С., Прочностной анализ несущих конструкций висячего трубопровода через реку Ока в г. Орле/ В. С. Сафронов, Ю. А. Суханова //Строительная механика и конструкции. 2010. - Т. 1. - № 1. - С. 61-66.
  11. Сафронов, В. С. Современные конечно-элементные модели балочных без диафрагменных пролетных строений автодорожных мостов/ В. С. Сафронов, А. В. Антипов// Строительная механика и конструкции. -2013. -№ 1. -С. 92-101.
  12. Сборные предварительно напряженные железобетонные балки Б1800.140.123 В.АШ-К для автодорожных мостов под временные нагрузки А14 и Н14. Типовой проект серия 3.503.1-81. Союздорпроект, Москва.
  13. Городецкий, А. С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений/ А. С. Городецкий, В. И. Заворицкий, А. И. Лантух-Лященко, А. О. Рассказов. - М.: Транспорт, 1981. – 143 с.
  14. Программный комплекс «ЛИРА-САПР 2013 PRO» и специализированная расчетно-графическая система «ЛИРА-САПР 2013 Мост». Сертификат соответствия №РОСС RU.СП15.Н00615.

## References

1. Federal standard 32960-2014 "General automobile roads. Regulatory loads, design load schemes." Developed by TsNIIS OJSC, MTK 418 "Road facilities." М.: Standartinform, 2016. 8 p.
2. European standard EN 1991-2. EUROCOD 1. Impacts on structures. Part 2. Transport loads on bridges. 2003. 163 p.
3. Safronov V.S., Mel'khior N. Comparison of the reliability of a typical reinforced concrete span of a road bridge for Russian and European standard time loads. Building mechanics and structures. T.4. No. 23. 2019. Pp. 51-62.
4. Raiser V.D. The theory of reliability of structures. М.: DIA, 2010. 252 p.
5. Sinityn A.P. Structural analysis based on risk theory. М.: Stroyizdat, 1985. 304 p.
6. Safronov V.S., Domanov D.I. Risk assessment of the destruction of normal sections of reinforced concrete beams of arbitrary shape. Building mechanics and structures. No. 1(2). 2011. Pp. 46-51.
7. Safronov V.S., Stepanov S.D., Petranin A.A., Petrenya E.N. Algorithm for calculating reconstructed slab-beam structures reinforced with a slab. Proceedings of higher educational institutions. Building. No. 11-12. 1998. Pp. 31-35.
8. Safronov V.S., Chernikov A.V. Deformation calculation of composite bending reinforced concrete core elements. Construction mechanics and constructions. Vol. 3. No. 18. 2018. Pp. 81-92.
9. Safronov V.S., Domanov D.I. Assessment of the risk of destruction of normal sections of reinforced concrete beams of arbitrary shape. Mechanics of destruction of concrete, reinforced concrete and



- other building materials: Sat. Art. Based on materials of the 7th international scientific Conf.: in two volumes. 2013. Pp. 31-38.
10. Safronov V.S., Sukhanova Yu.A. Strength Analysis of Supporting Structures of the Hanging Pipeline across the Oka River in the town of Orel. Building mechanics and structures. Vol. 1. No. 1. 2010. Pp. 61-66.
  11. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern finite element models of beam bridges without road diaphragm structures of road bridges. Building mechanics and structures. No. 1. 2013. Pp. 92-101.
  12. Prefabricated prestressed reinforced concrete beams B1800.140.123 V. AIII-K for road bridges under temporary loads A14 and H14. Typical project series 3.503.1-81.
  13. Gorodetsky A.S., Zavoritsky V.I., Lantukh-Lyashchenko A.I., Rasskazov A.O. The finite element method in the design of transport structures. M.: Transport, 1981. 143 p.
  14. The software package "LIRA-SAPR 2013 PRO" and the specialized calculation and graphic system "LIRA-SAPR 2013 Bridge". Certificate of conformity No. ROSS RU. SP15.N00615.

## **RELIABILITY INDICATORS FOR REINFORCED CONCRETE SPAN STRUCTURES OF DESIGNED ROAD BRIDGES FOR MODERN RUSSIAN AND EUROPEAN NORMATIVE TIME LOADS**

V. S. Safronov<sup>1</sup>, N. Mel'khior<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup>Dr. of Techn. Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230;  
e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

<sup>2</sup>MA Student of the Department of Structural Mechanics

---

Using the previously proposed and tested methodology for calculating the reliability parameters, numerical studies are carried out of modern standard prestressed reinforced concrete T-beams without the diaphragm span of the road bridge. Relative quantitative indicators of reliability during operation of a transport facility by Russian temporary loads A14 and H14 are compared with similar characteristics of the same transport facility when modern European temporary loads A (L) and Me120, Mc120, Bt are skipped. Bending moments in the middle sections and transverse forces and supporting zones of the bearing beams are used as criteria for probabilistic estimates of the considered split span structures. In numerical studies, a spatial finite element model of a slab-beam structure and probabilistic representations of the strength characteristics of concrete and working reinforcement, as well as random deviations of existing constant and temporary loads are used.

The data obtained in numerical studies allow us to give a qualitative and quantitative assessment of the loading of the characteristic sections of the bearing elements of the span during operation in accordance with Russian and European regulatory documents.

**Keywords:** road bridge, typical reinforced concrete I-beams, modern Russian and European temporary loads, bending moments and lateral forces, workload of specific sections, reliability indicators.

## ЧИСЛЕННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ ЯВЛЕНИЙ АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ БАЛКИ ЖЕСТКОСТИ ВАНТОВОГО МОСТОВОГО СООРУЖЕНИЯ

С. Д. Степанов<sup>1</sup>, А. Г. Богомолов<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +79103414225

<sup>2</sup>Магистрант кафедры строительной механики, e-mail: [senybogomolov@yandex.ru](mailto:senybogomolov@yandex.ru), тел.: +79805425825

---

Изучены основные виды аэроупругих колебаний сооружений и дана оценка их влияния на аэродинамическую устойчивость вантовых мостовых сооружений. Рассмотрены основные аналитические зависимости, описывающие критические скорости ветра и вызывающие явления аэродинамической неустойчивости балки жесткости. Приведены формулы, описывающие аэродинамические силы, действующие на балку жесткости вантового моста. Составлена расчётная схема и выполнен модальный анализ балки жесткости при помощи программного комплекса Лира САПР. Получены критические скорости ветра, вызывающие явления аэродинамической неустойчивости. Используя значения критических скоростей, с помощью программного комплекса ANSYS смоделировано обтекание потоком воздуха балки жесткости прямоугольного сечения. Проведены численные исследования на примере Виноградского моста в г. Красноярске.

**Ключевые слова:** вантовые мостовые сооружения, балка жесткости, аэродинамическая устойчивость, обтекание сечений ветровым потоком.

Целью настоящего исследования является анализ воздействия ветрового потока на балку жёсткости прямоугольного поперечного сечения вантового мостового сооружения при помощи программного комплекса ANSYS.

### Теоретические сведения об обтекании различных сечений ветровым потоком

Как отмечается в [1], [2], «аэродинамика любых мостовых сооружений охватывает аэромеханику и аэроупругость. Аэроупругие явления характеризуются колебаниями сооружения в потоке воздуха и влиянием этих колебаний на устойчивость и прочность сооружения. Причины аэроупругих колебаний гибких тел в ветровом потоке:

- порывы ветра;
- периодическая аэродинамическая сила, обусловленная срывом вихрей Кармана;
- отрицательное аэродинамическое демпфирование, приводящее к автоколебаниям;
- аэродинамическая связь между изгибной и крутильной формами деформаций;
- периодические изменения параметров системы»

В описанных выше случаях наблюдаются следующие явления аэродинамической неустойчивости:

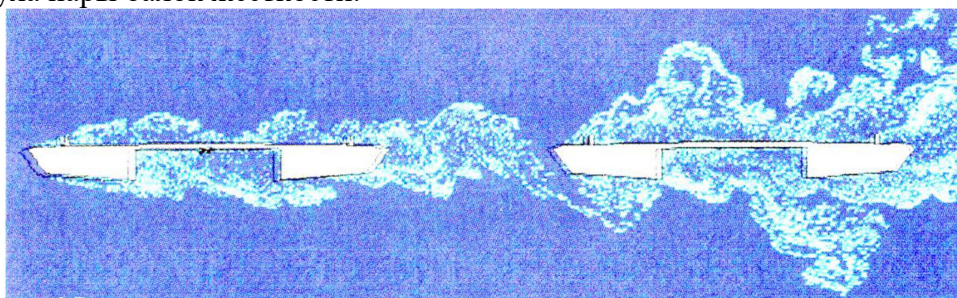
- ветровой резонанс - появляется при совпадении частоты срыва вихрей Кармана, которые зависят от числа Рейнольдса ( $Re > 50$ ),  $Re = v*d/v$ , с одной из собственных частот;
- флаттер – связанные изгибно-крутильные и нарастающие во времени самовозбуждающиеся колебания (при несовпадении точки приложения аэродинамических сил с центром изгиба);
- дивергенция – крутильная форма потери устойчивости;
- галопирование – нарастающие колебания в плохо обтекаемых элементах;

- параметрический резонанс – заключается в «перекачке» энергии горизонтальных колебаний в вертикальные и, наоборот, при совпадении периодов [3].

При расчете на любое из этих явлений аэродинамической неустойчивости условием прочности является критическая скорость ветра ( $v_{кр} > v_p$ , где  $v_p$  — расчетная скорость ветра для заданного района строительства), которая зависит от формы сооружения и его удобообтекаемости. Вантовые мостовые сооружения (и большинство строительных конструкций) являются плохообтекаемыми, так как они в первую очередь должны удовлетворять статической прочности.

### Обтекание ветровым потоком балки жесткости

На рис. 1 показаны схемы образования вихрей и вихревых дорожек при обтекании потоком воздуха пары балок жесткости.



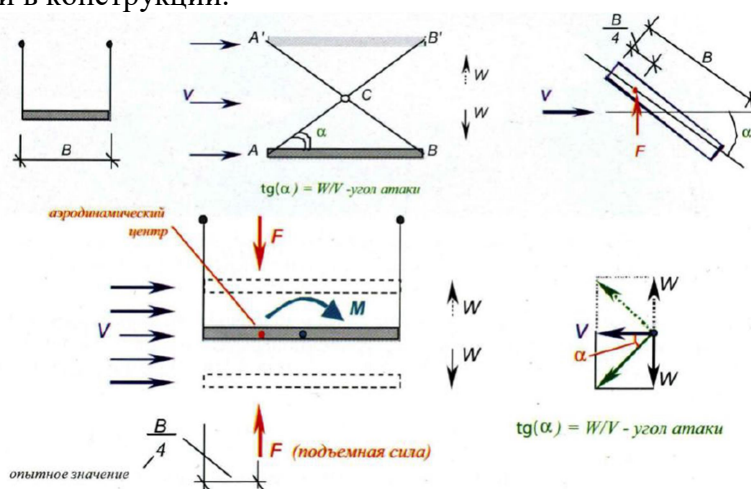
**Рис. 1.** Схема образования вихрей вокруг балки жесткости  
(на рисунке показан фрагмент численного эксперимента обтекания ветровым потоком балок жесткости вантового моста через р. Неву в Санкт-Петербурге)

«Вследствие изменения скорости и направления ветра в зоне вихрей вокруг конструкции изменяется и давление воздуха. Появляется периодическая сила, действующая асимметрично на сооружение то с одной, то с другой стороны. Частота этой силы соответствует частоте срывов вихрей:

$$n = \frac{Sh \cdot v}{d} \quad (\text{Гц}), \quad (1)$$

$Sh$  – величина, характеризующая форму профиля препятствия – «число Струхалия». В общем случае  $Sh = 0,08 \dots 0,22$  (в частности, для цилиндра  $Sh = 0,2$ ). Для пролетных строений мостов это число определяется только экспериментальным путем в аэродинамической трубе, так, для пролетных строений, имеющих острые кромки, считается, что  $Sh = 0,15 \dots 0,18$ » [4].

На рис. 2 показаны силы, действующие на балку жесткости при возникновении автоматических колебаний в конструкции.



**Рис. 2.** Схемы приложения сил при автоматических колебаниях конструкции

Появление автоматических колебаний представляет большую опасность для висячих и вантовых мостов, чем резонанс. Если такая система под воздействием каких-либо факторов начала колебаться, то балка жесткости мостового сооружения будет пересекать струи воздуха, дующего со скоростью  $V$ .

В таком случае угол атаки  $\alpha$  ветрового воздействия начинает постоянно меняться (восходящему потоку соответствует  $+\alpha$ , нисходящему  $-\alpha$ ), вследствие чего на сооружение начинает действовать подъемная сила, создающая крутящий момент. Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что точка приложения подъемной силы находится на расстоянии четверти ширины пластинки от ее переднего края (точка приложения аэродинамической силы называется аэродинамическим центром). «Для малых значений угла атаки крутящий момент приближенно может быть выражен через подъемную силу:

$$M = \frac{F \cdot B}{4}, \quad (2)$$

здесь  $B$  – ширина висячей системы;  $F$  – подъемная сила, представляющая собой составляющую давления, перпендикулярная скорости, которую можно определить по формуле, разработанной в XX веке братьями Райт и Джоном Смитом:

$$F = 0.5 \cdot C_F \cdot A \cdot \rho \cdot v, \quad (3)$$

где  $C_F$  – безразмерный коэффициент подъемной силы, зависящий от формы поперечного сечения балки жесткости и угла атаки. Для цилиндра  $C_F \approx 1$  чем хуже обтекаемость конструкции, тем выше величина  $C_F = k \cdot \alpha$ ,  $k$  – коэффициент пропорциональности, называемый наклонной кривой подъемной силы, причем опытное значение  $k$  близко 5; для задач, связанных с динамикой вантовых мостов, рекомендуется [5] принимать  $k$ , равным 4;  $A$  – площадь фасадной поверхности,  $m^2$ ;  $\rho$  – плотность воздуха (для воздуха стандартной атмосферы, при атмосферном давлении 160 мм рт. ст. и температуре  $+150^\circ C$  коэффициент вязкости равен  $1,46 \cdot 10^{-5} m^2/c$ ),  $kg/m^3$ ;  $V$  – скорость воздушного потока (ветра),  $m/c$ . Если частота действия подъемной силы совпадает с частотой собственных колебаний сооружения, то возникают автоматические колебания конструкции – автоколебания» [4].

Для оценки склонности конструкции к возникновению галопирования (без использования аэродинамической трубы) используется критерий Глауэрта – Ден-Гартога:

$$A = (c_{\alpha\alpha} \cdot \frac{S_{\delta\delta}}{S_{ie}} + c_{\alpha\alpha}^{\alpha}), \text{ при } \alpha=0 \quad (4)$$

$S_{dd} = H \cdot l$  - характерная площадь строения при определении  $c_{\alpha\alpha}$  (площадь фронтальной проекции строения),  $S_{ie}$  - характерная площадь строения при определении  $c_{\alpha\alpha}$  и  $c_m$  (площадь проекции строения в плане: для сечений однобалочных строений и строений с перекрытием  $S_{ie} = B \cdot l$ , для не перекрытых пролетных строений из  $n$  балок шириной  $B$  каждая  $S_{ie} = n \cdot B \cdot l$ );

$H$  - высота сечения без учета ограждений и автотранспорта;

$B$  - габаритная ширина сечения;

$l$  - длина рассматриваемого участка пролета.

Отрицательное значение этого критерия свидетельствует о возможности динамической неустойчивости типа галопирования при определенных углах атаки. Следует отметить, что указанное условие получено для систем с одной степенью свободы [4].

### Численное исследование обтекания балки жесткости потоком воздуха в ПК ANSYS

Исследование будет проводиться на примере сплошностенчатой прямоугольной балки жесткости Виноградовского вантового моста в г. Красноярске (поперечное сечение балки жесткости приведено на рис. 3).

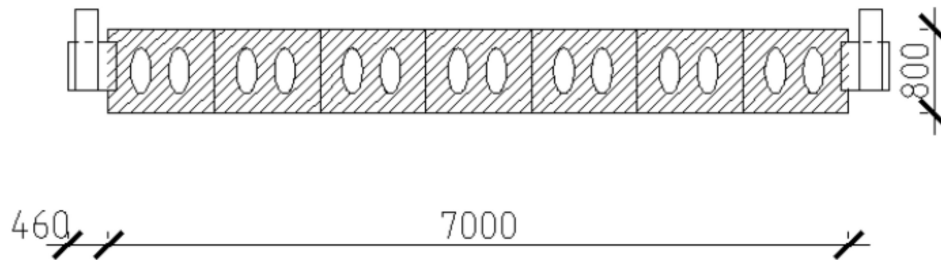


Рис. 3. Балка жесткости Виноградовского моста

Критическая скорость ветра для каждой  $i$ -й формы колебаний, вызывающая резонанс в балке жесткости, определяется по формуле

$$V_{кр,i} = \frac{d}{T_i * Sh}, \quad (5)$$

где  $d$  – размер части сечения, воспринимающей ветровой поток;  $T_i$  – период собственных колебаний балки жесткости по  $i$ -й форме.

Для балки жесткости  $d = 0,8$  м; число Струхала  $Sh = 0,15$ .

Для расчета критической скорости ветра для резонанса балки жесткости проведем модальный анализ (балки жесткости) в ПК Лира САПР. Расчет критических скоростей будем проводить для первых 3-х форм колебаний (таблица). Значения жесткостных характеристик и геометрия мостового сооружения взяты из [8].

Таблица

Результаты расчета критических скоростей

Номер формы	$\omega$ , рад/с	$\nu$ , Гц	Период, с	$V_{кр, i}$ , м/с
1	7,00739	1,115826	0,896197	5,952
2	21,45258	3,416016	0,292739	18,203
3	27,96277	4,45267	0,224584	23,704

Рассмотрим картину обтекания прямоугольной призмы при действии полученных скоростей, угол атаки ветра  $\alpha = 0$ . В сечениях с угловыми точками образование вихрей не зависит от числа Рейнольдса. Наибольшую опасность при резонансе представляют первые три формы колебаний. Расчет проводим в ANSYS CFX. Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 4 – 9.

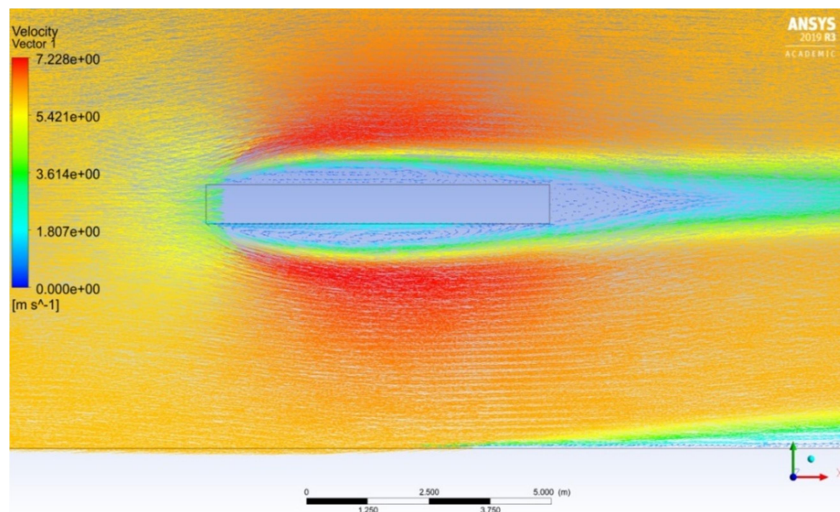
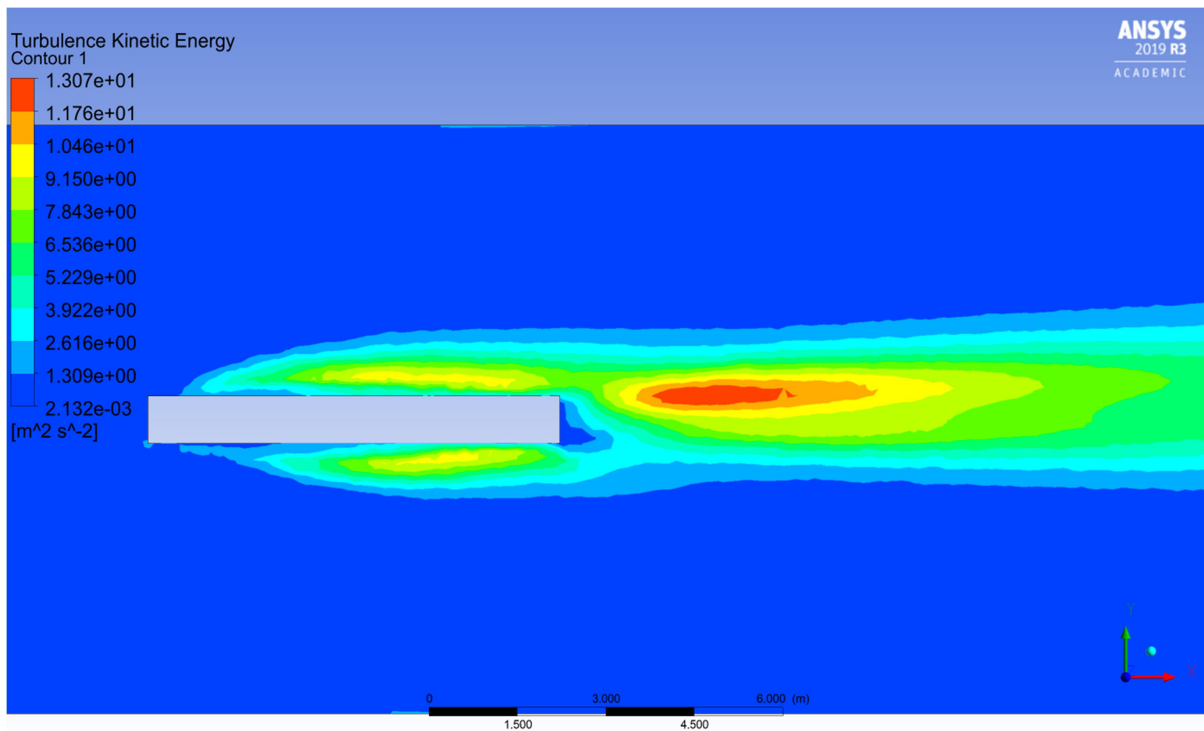
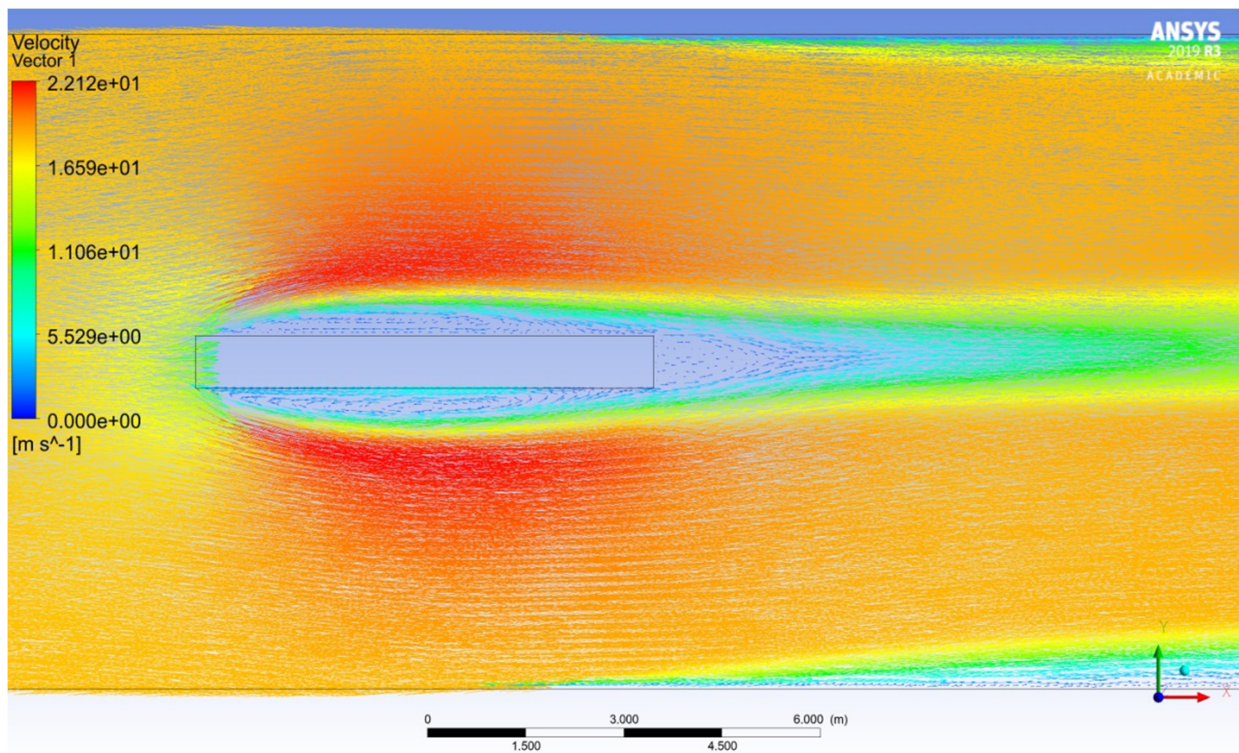


Рис. 4. Профиль скорости потока,  $V = 5,952$  м/с



**Рис. 5.** Кинетическая энергия турбулентности ветрового потока,  
 $V = 5,952 \text{ м/с}$

При  $V = 5,952 \text{ м/с}$  образуется парный отрыв вихрей за призмой и завихрения воздушного потока по низу и по верху. Для появления резонанса необходимо, чтобы частота срывов парных вихрей за призмой была равна собственной частоте колебаний.



**Рис. 6.** Профиль скорости потока,  $V = 18,203 \text{ м/с}$

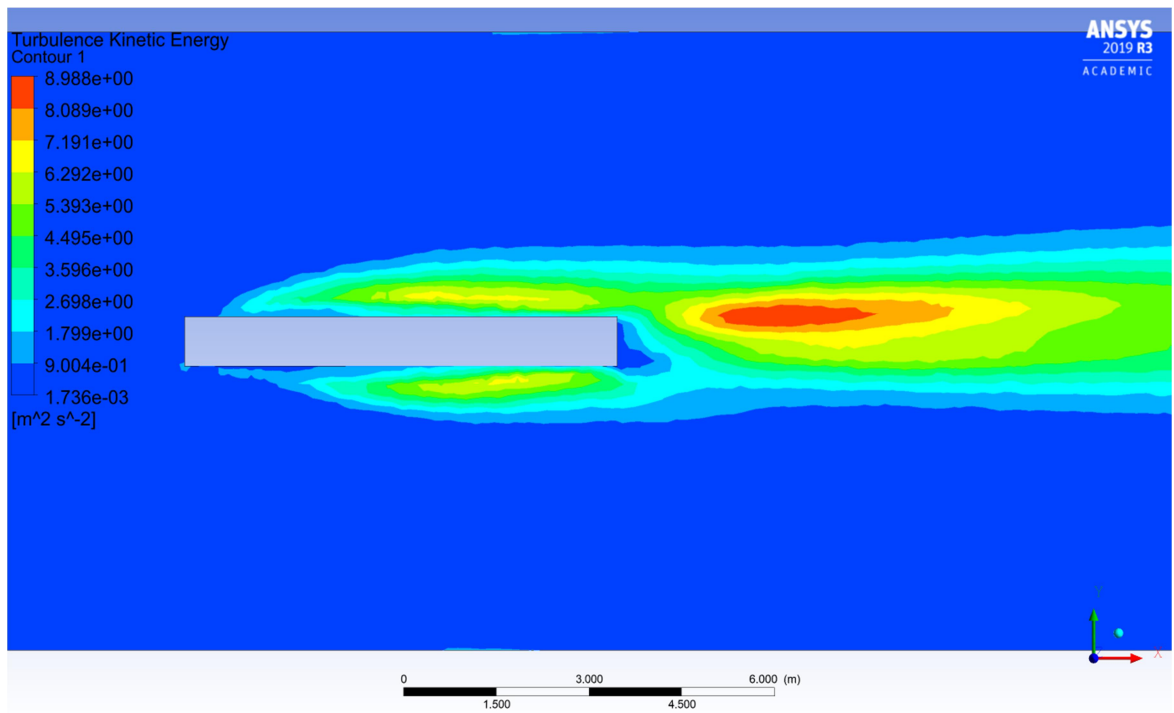


Рис. 7. Кинетическая энергия турбулентности ветрового потока,  $V = 18,203$  м/с

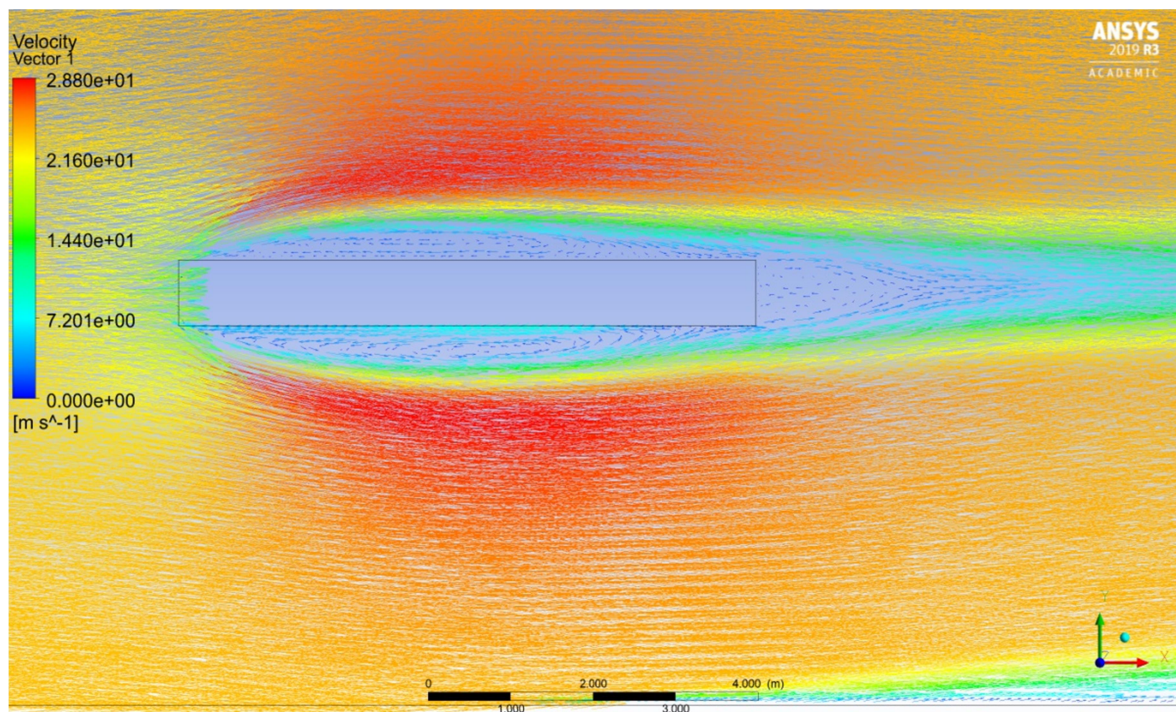


Рис. 8. Профиль скорости потока,  $V = 23,704$  м/с

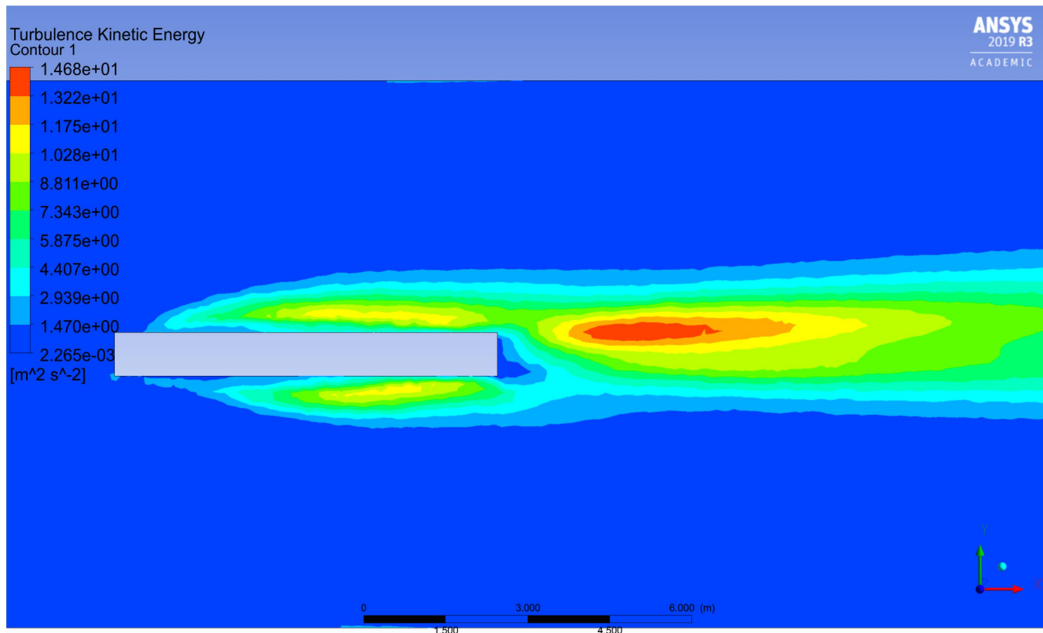


Рис. 9. Кинетическая энергия турбулентности ветрового потока,  
 $V = 23,704 \text{ м/с}$

При скоростях  $V = 18,203 \text{ м/с}$  и  $V = 23,704 \text{ м/с}$  картина обтекания такая же, как и в случае  $V = 5,952 \text{ м/с}$ .

Симметричность картины обтекания объясняется тем, что угол атаки ветрового воздействия равен нулю. Завихрения вокруг балки жесткости образуют периодическую силу, частота воздействия которой может совпасть с одной из собственных частот колебаний, и тогда возникнет явление резонанса.

Большую опасность для вантовых мостов представляют автоматические колебания. В случае их возникновения колеблющаяся балка жесткости моста начинает пересекать потоки воздуха, вследствие чего периодичность силового воздействия начинает постоянно изменяться во времени, также как и угол атаки ветровой нагрузки.

Рассмотрим явление галопирования балки жесткости.

Для оценки склонности конструкции к возникновению галопирования (без использования аэродинамической трубы) используется критерий Глауэрта – Ден-Гартога:

$$A = (c_{x\alpha} * \frac{S_{\delta\delta}}{S_{ie}} + c_{y\alpha}^{\alpha}), \text{ при } \alpha=0. \quad (6)$$

Критическая скорость, вызывающая автоколебания (галопирование), вычисляется по формуле

$$V_{кр} = \frac{2 * S_c * f_i * B}{\alpha_g}, \quad (7)$$

где  $B$  – ширина сечения поперек ветрового потока,  $f_i$  – частота собственных колебаний по  $i$ -й форме;

$\alpha_g = H * k_s$ , где  $H$  – ширина пролетного строения,  $k_s = 0,9$ ;

$S_c = \frac{2 * \delta * m}{\rho * B^2}$ , где  $\delta$  – логарифмический декремент затухания колебаний,  $m$  – погонная масса конструкции,  $\rho$  – плотность воздуха.

$$V_{кр} = \frac{2 * 43,371 * 1,116 * 0,8}{6,3} = 12,293 \text{ м/с.}$$



Рассмотрим характер обтекания сечения при заданной критической скорости и угле атаки  $\alpha = 6,3^0$  в ANSYS CFX. Результаты проведенных расчетов представлены на рис. 10 – 12.

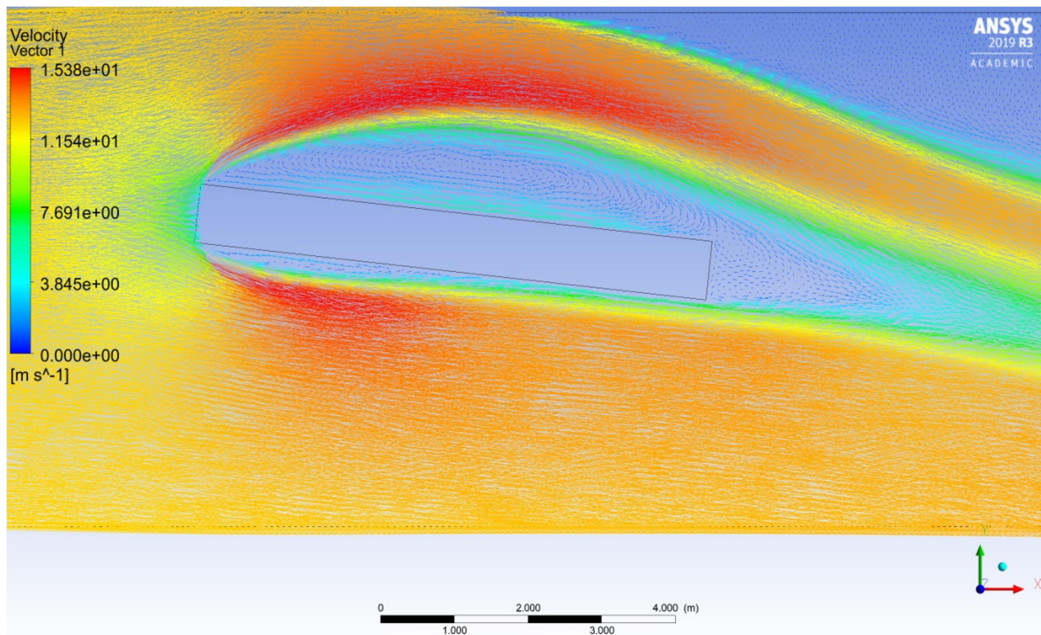


Рис. 10. Профиль скорости потока,  $V = 12,293$  м/с,  $\alpha = 6,3^0$

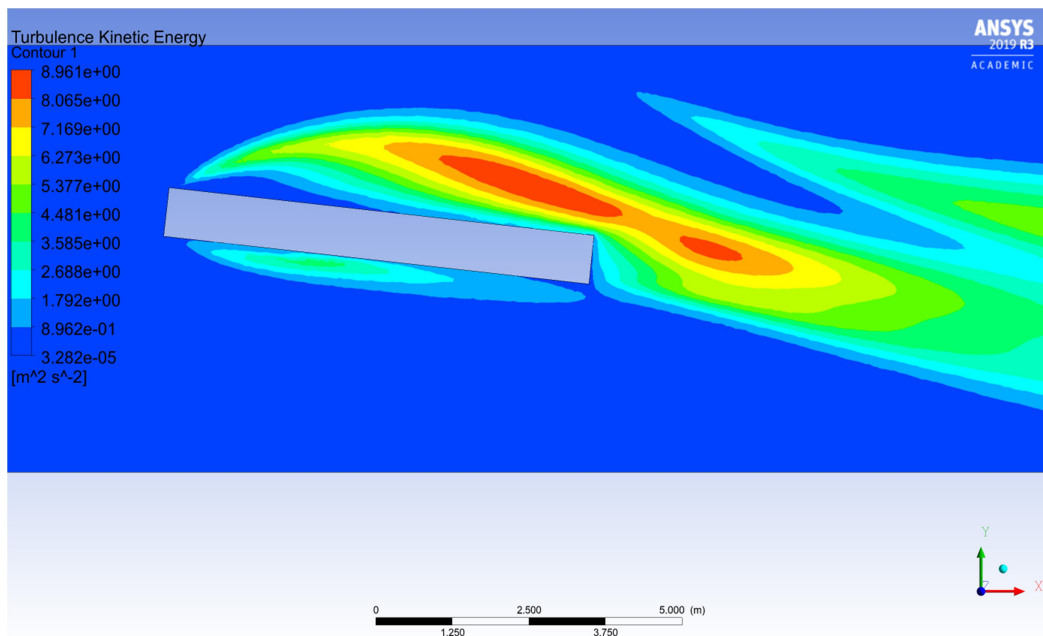
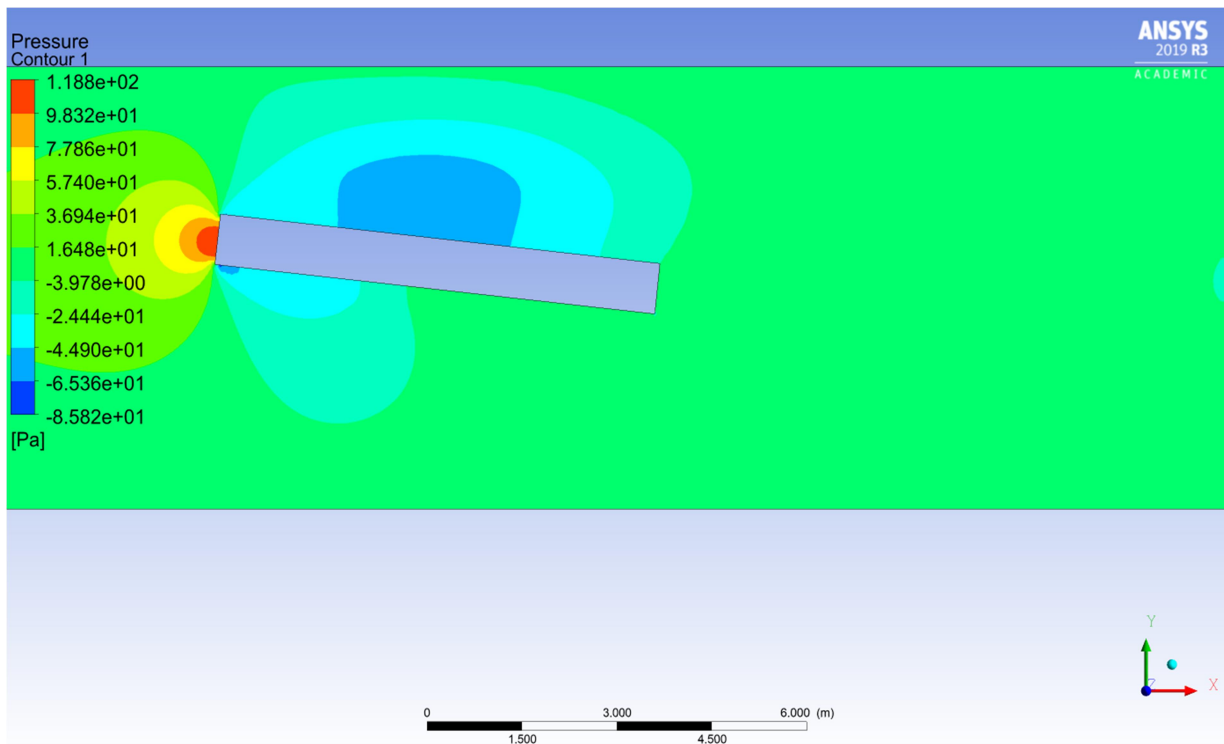


Рис. 11. Кинетическая энергия турбулентности ветрового потока,  
 $V = 12,293$  м/с,  
 $\alpha = 6,3^0$



**Рис. 12.** Распределение давления на балку жесткости при  $V = 12,293$  м/с,  $\alpha = 6,3^0$

При ненулевом значении угла атаки можно видеть несимметричное образование вихрей при обтекании балки жесткости и, следовательно, несимметричное приложение нагрузок по ее ширине. Для появления автоколебаний конструкции необходимо, чтобы частота появившейся подъемной силы (скручивающей конструкцию) совпала с собственной частотой балки жесткости.

### Заключение

В настоящем исследовании выполнен анализ воздействия ветрового потока на балку жёсткости прямоугольного поперечного сечения вантового мостового сооружения при помощи программного комплекса ANSYS CFX. Также были проанализированы явления аэродинамической неустойчивости вантовых мостовых сооружений и основные причины, их вызывающие.

Результаты исследования позволяют оценить, в том числе и визуально, достоверность полученных аналитическим расчетом критических скоростей для таких явлений аэродинамической неустойчивости, как резонанс и галопирование. Характер обтекания потоком воздуха балки прямоугольного поперечного сечения соответствует теоретическим и экспериментальным данным, полученным для подобных сооружений в нормативной и научной литературе [1], [4], [6], [7]. Для дальнейшего развития исследований в данном направлении по использованию программного комплекса ANSYS для решения задач аэродинамической устойчивости вантовых мостовых сооружений следует проводить сравнительный анализ с экспериментальными данными, в том числе полученными при помощи аэродинамических труб.

## Библиографический список

1. Казакевич, М. И. Аэродинамика мостов/ М И. Казакевич. – М: Транспорт, 1987 – 240 с.
2. Соловьев, С. Ю. Аэродинамическая устойчивость большепролетных мостов / С. Ю., Соловьев // Транспортная инфраструктура. – 2016. – №5. – С. 47-49
3. Бахтин, С. А. Проектирование висячих и вантовых мостов: курс лекций / С. А. Бахтин – Новосибирск: СибГАПС, 1995 – 121 с.
4. Майстренко, И. Ю. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Проектирование мостов (Комбинированные системы)» для специальности 270201 / Казанский государственный архитектурно-строительный университет; сост.: И. Ю. Майстренко. - Казань: КГАСУ, 2012. – 42 с.
5. Петропавловский, А. А. Вантовые мосты/ А. А. Петропавловский. – М.: Москва, 1985. – 224 с.
6. Курченко, В. С. Руководство по расчету зданий и сооружений на воздействие ветра/ В. С. Курченко. – М.: Стройиздат, 1978. – 217 с.
7. Симиу, Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения/ Э. Симиу, Р. Сканлан : пер. с англ. Б. Е. Маслова, А. В. Швецово; под ред. Б. Е. Маслова. — М.: Стройиздат, 1984. — 360 с., — Перевод, изд.: Wind Effects on Structures / E. Simiu, R. Scanlan (1978).
8. Сафронов, В. С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку – Воронеж: изд-во ВГУ, 1982. – 196 с.

## References

1. Kazakevich M.I. Aerodynamics of bridges. M: Transport, 1987. 240 p.
2. Soloviev S.Yu. Aerodynamic stability of large-span bridges. Transport infrastructure. No. 5. 2016. Pp. 47-49.
3. Bakhtin S.A. Design of suspension and cable-stayed bridges: course of lectures. Novosibirsk: SibGAPS, 1995. 121 p.
4. Maistrenko I.Yu. Methodological instructions for practical exercises on the course "Designing Bridges (Combined Systems)" for the specialty 270201. Kazan: KSASU, 2012. 42 p.
5. Petropavlovsky A.A. Cable-stayed bridges. M.: Moscow, 1985. 224 p.
6. Kurchenko V.S. Guidance on the calculation of buildings and structures on the impact of the wind. M.: Stroyizdat, 1978. 217 p.
7. Simiu E., Scanlan R. Wind Effects on Structures. Trans. from English by B.E. Maslova, A.V. Shvetsova. M.: Stroyizdat, 1984. 360 p. (Translation, ed.: Wind Effects on Structures. E. Simiu, R. Scanlan (1978)).
8. Safronov V.S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges on a moving load. Voronezh: Publishing House of Voronezh State University, 1982. 196 p.

# NUMERICAL RESEARCH OF SOME PHENOMENA OF STIFFENING GIRDER AERODYNAMIC INSTABILITY OF A CABLE-STAYED BRIDGE STRUCTURE

S. D. Stepanov<sup>1</sup>, A. G. Bogomolov<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(910)3414225

<sup>2</sup> MA Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(980)5425825, e-mail: [senybogomolov@yandex.ru](mailto:senybogomolov@yandex.ru)

---

The main types of aeroelastic vibrations of structures were studied and their influence on the aerodynamic stability of cable-stayed bridge structures was evaluated. The main analytical dependencies describing the critical wind speeds and causing the phenomena of aerodynamic instability of the stiffener are considered. Formulas that describe the aerodynamic forces acting on the stiffener beam of a cable-stayed bridge are given. A design diagram is compiled and a modal analysis of the stiffener is performed using the Lira CAD software package. Critical wind speeds that cause aerodynamic instability are obtained. Using the values of critical velocities, using the ANSYS software package, airflow around a stiffener of the rectangular cross-section was simulated. Numerical studies on the example of the Vinogradovsky bridge in Krasnoyarsk city.

**Keywords:** cable-stayed bridge structures, stiffening girder, aerodynamic stability, wind flow around the cross sections.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.042

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИ-ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ РАСЧЕТНОЙ СХЕМЫ 4-ЭТАЖНОГО МОНОЛИТНОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО КАРКАСА ПРИ ДЕМОНТАЖНЫХ РАБОТАХ ВЗРЫВНЫМ СПОСОБОМ

С. В. Ефрюшин<sup>1</sup>, А.И. Юрченко<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики

<sup>2</sup>Магистрант кафедры строительной механики, e-mail: yurchenko.andrey1997@gmail.com

На примере 4-этажного здания с железобетонным каркасом производится математическое моделирование прогрессирующего разрушения здания при демонтаже взрывным способом. Для моделирования использован метод конечных элементов, реализованный в программных комплексах ЛИРА-САПР, ANSYS. Предложены варианты способов управления зоной разрушения здания и разлета осколков с целью их уменьшения в условиях плотной застройки. Опыт проделанных расчетов может быть использован при моделировании зданий различной этажности и конфигурации в плане.

**Ключевые слова:** прогрессирующее обрушение, демонтаж, взрывные работы, ЛИРА-САПР, ANSYS.

В настоящее время в России и за рубежом большое распространение получили новые технологии возведения каркасных зданий из монолитного бетона. Массовое строительство подобных конструкций через несколько десятков лет вследствие морального или физического износа столкнется с проблемой их экономичного демонтажа в условиях плотной городской застройки. Одним из самых быстрых и дешевых видов демонтажа монолитного каркаса является демонтаж с помощью подрыва отдельных несущих элементов. Для обеспечения безопасности и технологичности демонтажа необходимо провести предварительное математическое моделирование процесса разрушения с анализом последствий взрыва. Указанное моделирование возможно с помощью современных программных комплексов на основе метода конечных элементов с применением геометрически и физически нелинейных расчетных схем.

В данной работе на примере 4-этажного здания в монолитно-каркасном исполнении, проводится исследование моделирования прогрессирующего разрушения при демонтаже взрывным способом. Численное моделирование позволяет проверить эффективность некоторых рекомендаций по уменьшению зон разрушения здания и разлета осколков.

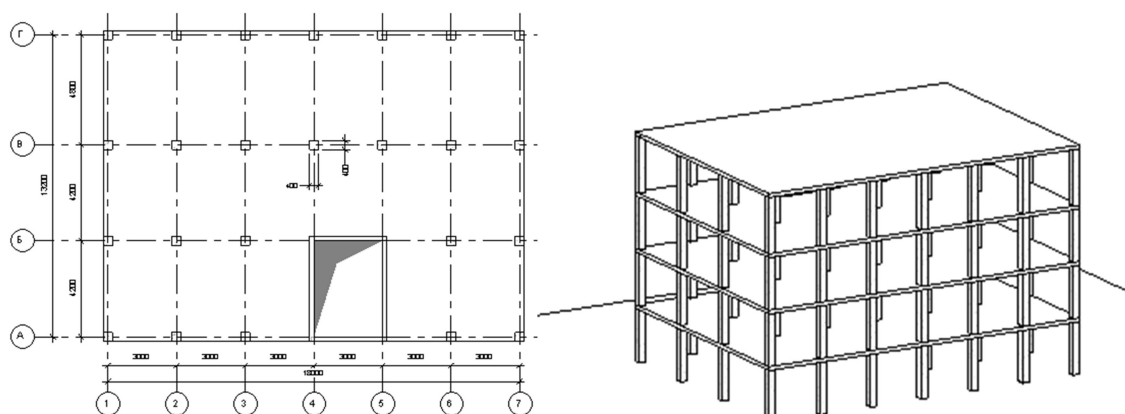
Создание расчетной схемы для моделирования прогрессирующего обрушения при демонтажных работах производится в два этапа:

**Первый этап.** Построение расчетной схемы в ПК ЛИРА-САПР:

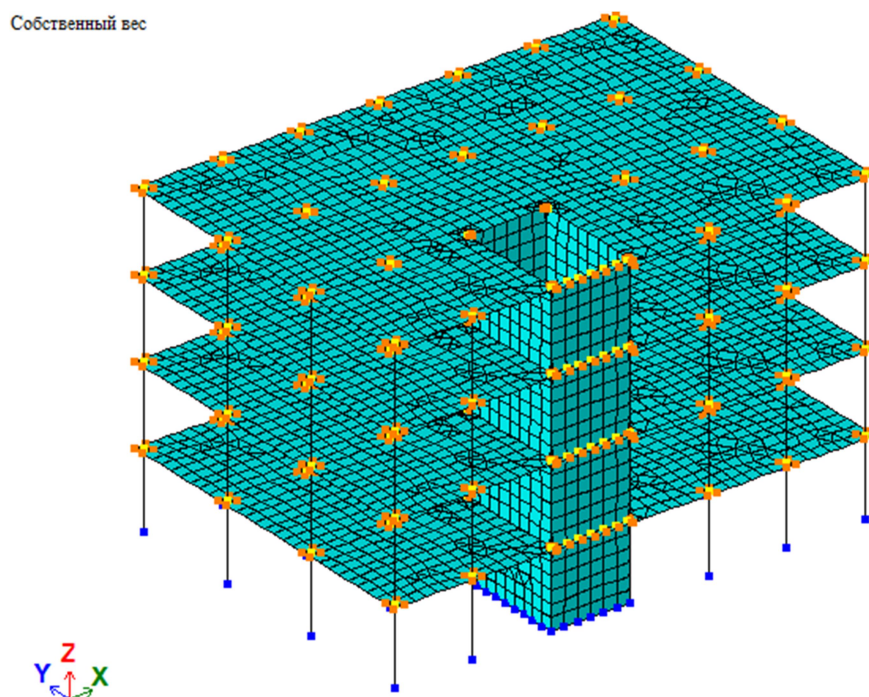
- создана аналитическая модель 4-этажного здания (рис. 1, 2);
- проведен сбор нагрузок согласно СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия»;
- выполнена четырехугольная триангуляция пластин с шагом 0,3 м;
- назначены связи: все нижние узлы колонн и стен 1-го этажа закреплены по 6-ти степеням свободы X, Y, Z, UX, UY, UZ;

© Ефрюшин С. В., Юрченко А. И., 2020

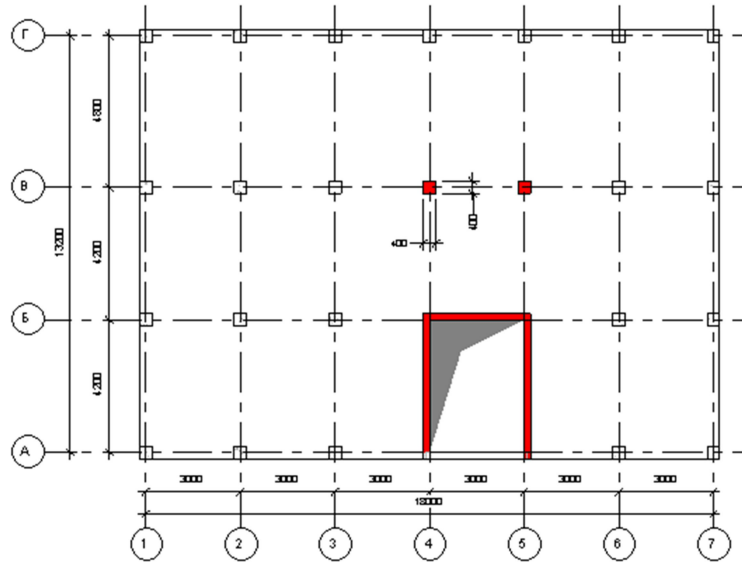
- произведено назначение жесткостей и материалов согласно СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения». Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003;
- выполнен расчет в линейной постановке на действующие нагрузки;
- проведен анализ полученных результатов и определены несущие конструкции, в которые будут вложены взрывные заряды для их уничтожения из расчетной схемы рассматриваемого здания (рис. 3);
- для тех элементов, которые будут уничтожены, определяем продольную силу  $N$  в уровне перекрытия, которая будет являться реакцией опоры для вышележащих конструкций (рис. 4).



**Рис. 1.** План типового этажа и общий вид рассматриваемого здания

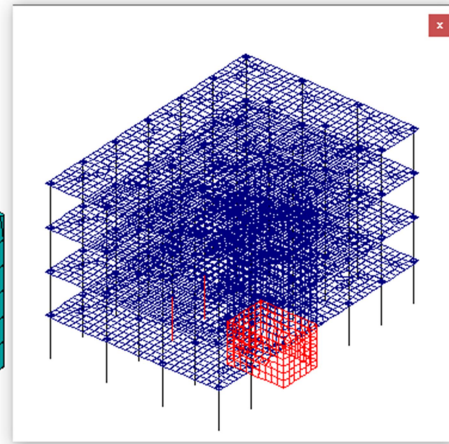
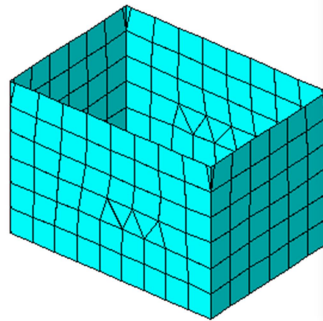
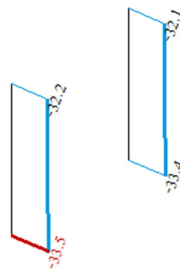


**Рис. 2.** Аналитическая модель рассматриваемого здания в ПК ЛИРА-САПР

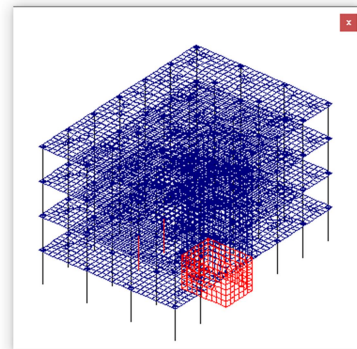
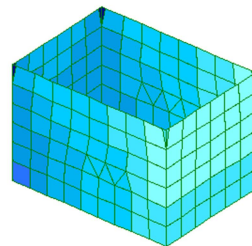


**Рис. 3.** План 1-го этажа здания с учетом конструкций, в которые будут вложены взрывные заряды для их уничтожения (отмечены красным)

Собственный вес  
Этара N  
Единицы измерения - т



Минимальное усилие -33.4878;



**Рис. 4.** Продольные усилия в конструкциях, которые будут демонтированы взрывом

**Второй этап.** Моделирование прогрессирующего обрушения в ПК ANSYS:

- расчетная модель, созданная в ПК ЛИРА-САПР, экспортируется в ПК ANSYS (рис. 5);
- моделируется уничтожение выбранных конструкций;
- удаленные конструкции заменяются их реакциями, которые стремятся к нулю по экспоненциальному закону в течение времени взрывного воздействия (в соответствии с [1] длительность такого воздействия составляет 30 мс).
- в узлах соединения конструкций задается условие возникновения пластических шарниров;
- материал конструкций задается в нелинейной постановке согласно теории Друкера-Прагера (рис. 6)
- выполняется расчет.

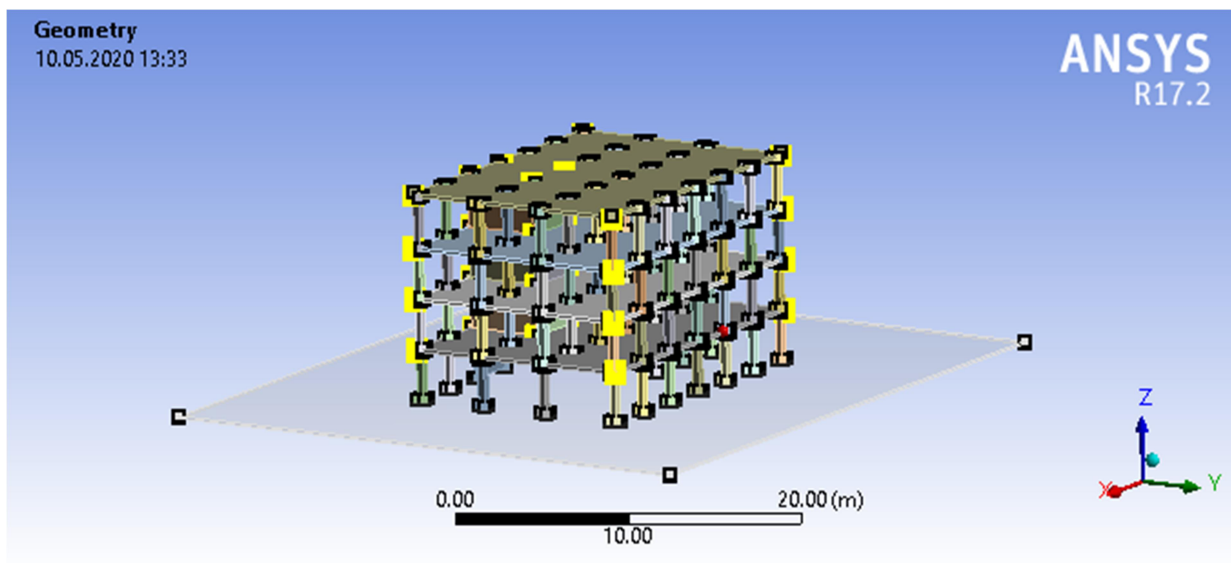


Рис. 5. Расчетная модель в ПК ANSYS

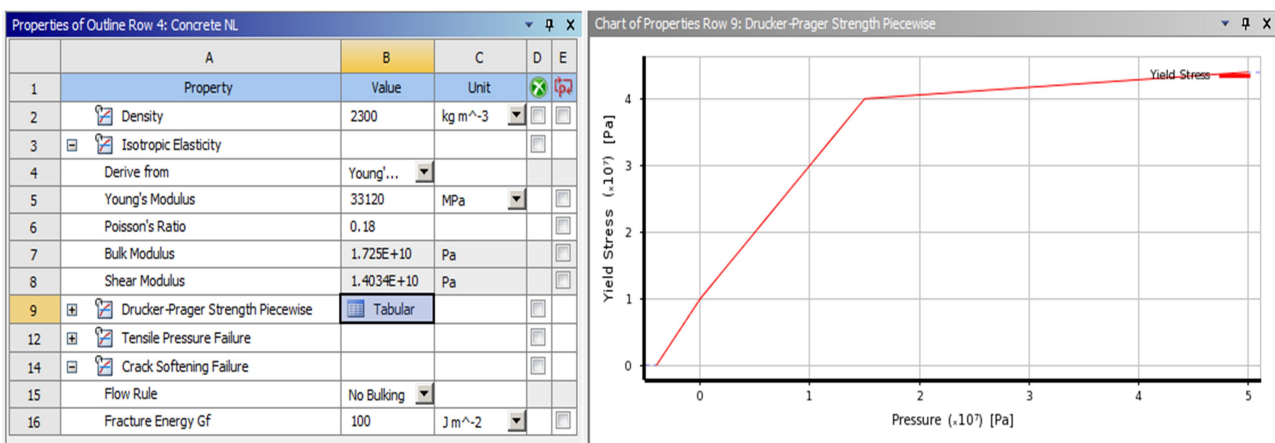


Рис. 6. Характеристики материала при нелинейной постановке



В результате расчета была получена картина разрушения здания через 2 с после начала разрушения, а, также траектория разлёта осколков (рис. 7), таким образом, можно сделать следующие выводы:

В связи с тем, что центр тяжести исследуемого здания не совпадает центром тяжести первого этажа, колонны которого были демонтированы, при разрушении здания возникает дополнительный момент (рис. 8). Вследствие действия момента увеличивается область разрушения и разлёта осколков (рис. 7) относительно зданий, у которых эти центры тяжести совпадают, что недопустимо в условиях плотной застройки.

Для уменьшения влияния момента на деформированный вид разрушенного здания предлагается установка канатов между землей и монолитным блоком здания, которые будут создавать компенсирующий момент (рис. 9).

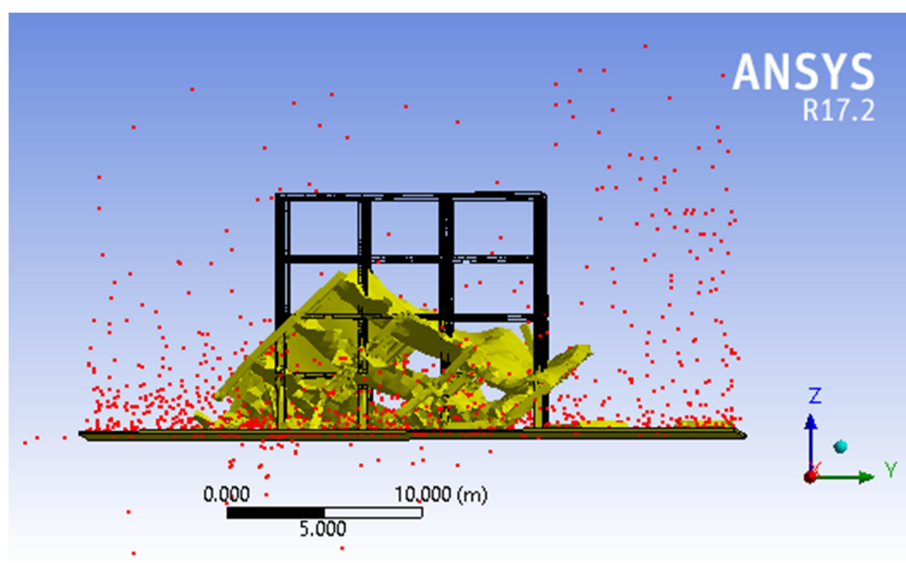


Рис. 7. Деформированный вид разрушения здания через 2 с после начала разрушения (желтым обозначен деформированный вид, красным- осколки)

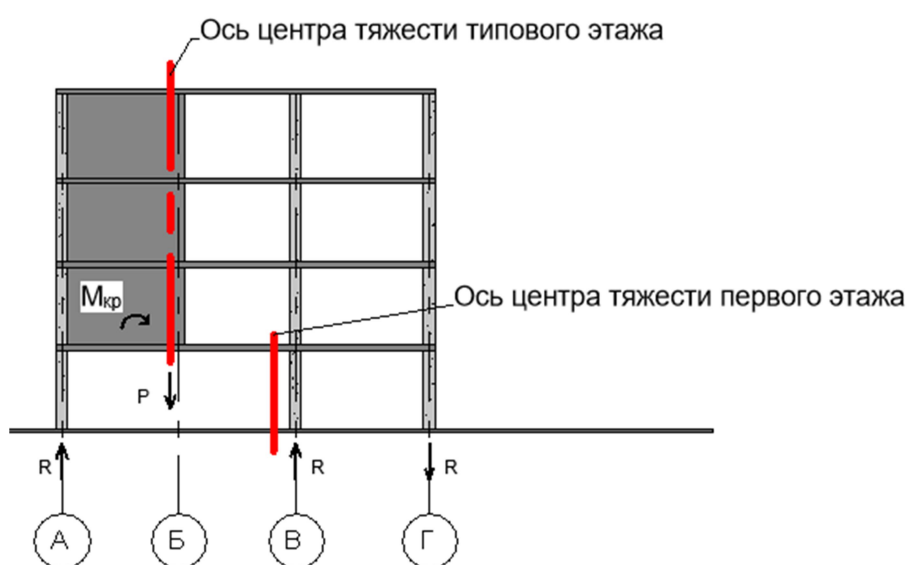
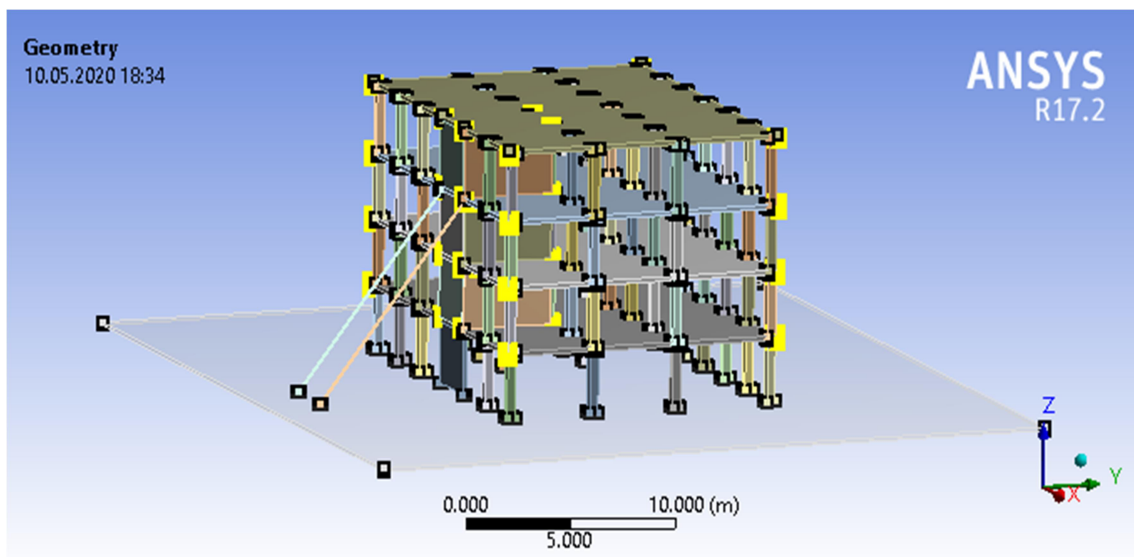


Рис. 8. Схема образования опрокидывающего момента при удалении части конструкций

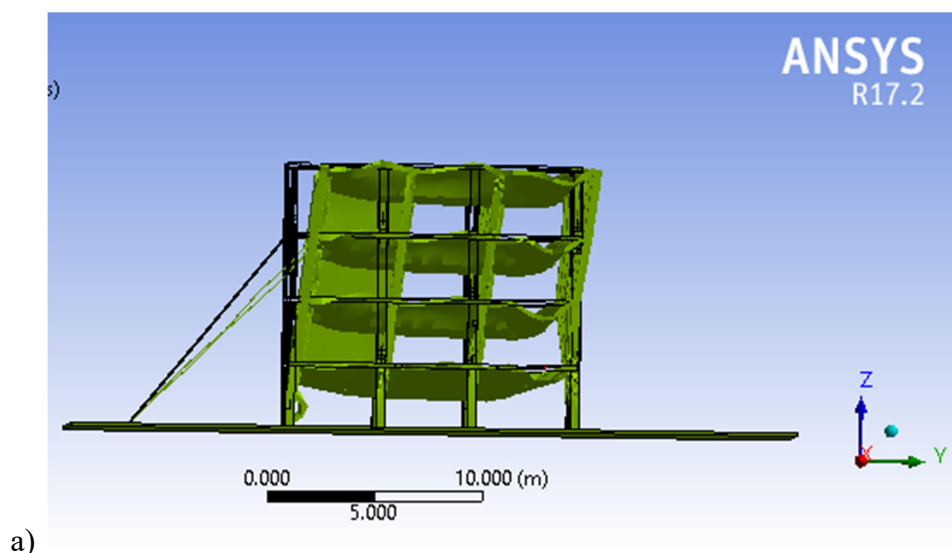


**Рис. 9.** Схема установки канатов между землей и монолитным блоком здания

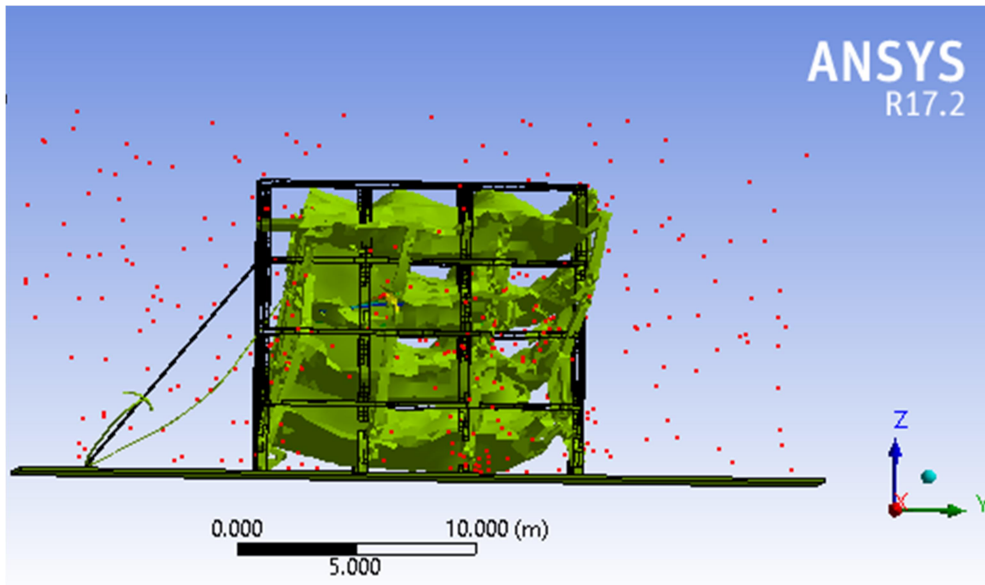
В результате дополнительного расчета был получен деформированный вид разрушения здания через 2 с после начала разрушения с установленными канатами и траектория разлета осколков, таким образом, можно сделать следующие выводы:

- установка канатов действительно позволила компенсировать момент и здание стало деформироваться по траектории, близкой к вертикали (рис. 10, 11);
- радиус разлета осколков, а самое главное плотность осколков, выпадающих за границы здания, до разрушения уменьшился (рис. 10, 12)

Анализируя модели большей этажности, можно сделать вывод о том, что при увеличении количества этажей соответственно будет и увеличиваться зона разрушения и разлета осколков. Применение дополнительных канатов будет являться также простым и экономически выгодным решением при демонтаже подобных зданий и сооружений

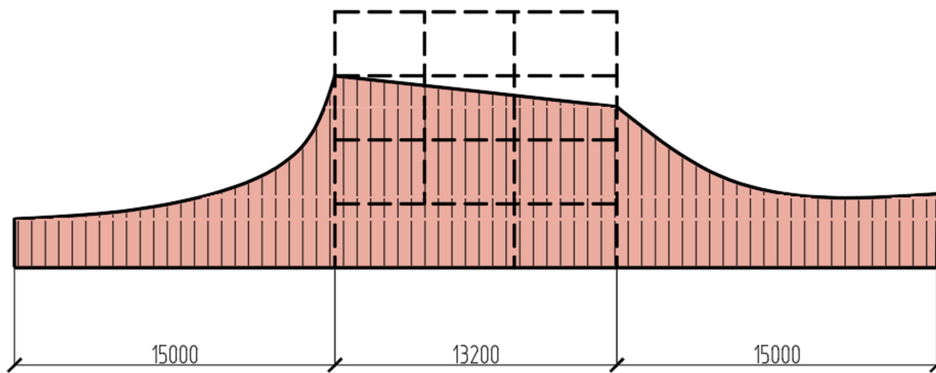


**Рис. 10 (начало).** Деформированный вид разрушения здания с установленными канатами:  
 а) через 1 с после начала разрушения, б) через 2 с  
 (зеленым цветом - деформированный вид, красным - осколки)

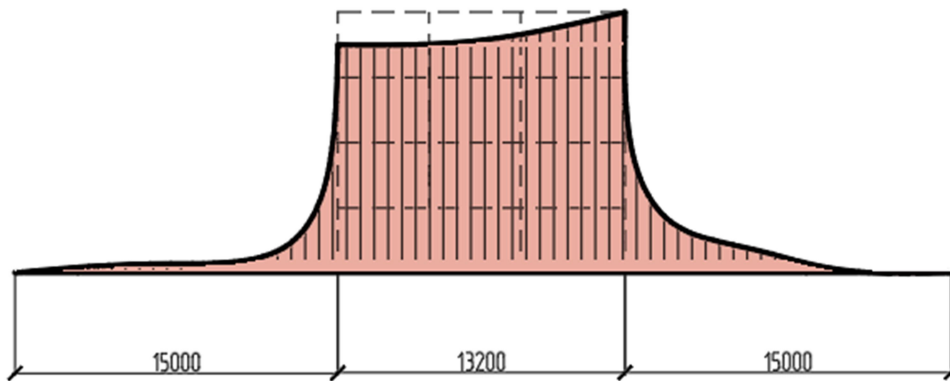


б)

**Рис. 10 (окончание).** Деформированный вид разрушения здания с установленными канатами:  
 а) через 1 с после начала разрушения, б) через 2 с  
 (зеленым цветом - деформированный вид, красным - осколки)



**Рис. 11.** Плотность разлета осколков здания



**Рис. 12.** Плотность разлета осколков здания с установленными канатами

В ходе исследования было рассмотрено моделирование разрушения 4-этажного здания в условиях плотной застройки. В связи с тем, что центр тяжести здания и центр тяжести пер-

вого этажа, относительно которого происходит разрушение, не совпадали, возникает опрокидывающий момент, который увеличивал зону разрушения и разлёта осколков. Для компенсации этого явления были установлены дополнительные канаты, которые позволили снизить влияние возникающего момента и уменьшить зону разрушения и разлета осколков до удовлетворительных показателей. С помощью численного моделирования имеется возможность рассматривать различные варианты мероприятий по управлению областью разлёта разрушенных конструкций.

#### Библиографический список

1. Смалюк, А. Ф. Иерархический подход к компьютерному моделированию прогрессирующего разрушения железобетонных зданий / А. Ф. Смалюк, И. А. Миклашевич, Г. В. Смирнов, И. В. Петров, О. А. Дзичковский. Строительная наука и техника. – 2012 - №1. - С. 46-51.
2. M. Y. H. Bangash, T. Bangash. Explosion-Resistant Buildings: Design, Analysis, and Case Studies. Springer-Verlag, 784p, 2006.
3. Алмазова, В. О. Проблемы сопротивления зданий прогрессирующему обрушению / В. О. Алмазова, А. И. Плотникова, Б. С. Расторгуева // Вестник МГСУ. – 2011. - №2. – С. 15 - 20.
4. Гензерский, Ю. В. ЛИРА-САПР 2011: учеб. пособие / Гензерский Ю. В., Д. В. Медведенко, О. И. Палиенко, В. П. Титок. – Киев.: Электронное издание, 2011. 396 с.
5. Городецкий, Д. А. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ЛИРА-САПР 2013: учеб. пособие / Д. А. Городецкий, М. С. Барабаш, Р. Ю. Водопьянов, В. П. Титок, А. Е. Артамонова; под ред. акад. РААСН А. С. Городецкого. – Киев. – М.: Электронное издание, 2013. - 376 с.
6. Саражинский, А. С. Расчетный анализ конструктивных мероприятий по защите каркасных зданий от прогрессирующего обрушения / А. С. Саражинский, С. В. Ефрюшин// Строительная механика и конструкции. - 2018. - №2(17). - С. 83 - 96.

#### References

1. Smalyuk A.F., Miklashevich I.A., Smirnov G.V., Petrov I.V., Dzichkovsky O.A. A hierarchical approach to computer modeling of the progressive destruction of reinforced concrete buildings. Building science and technology. No. 1. 2012. Pp. 46-51.
2. Bangash M. Y. H., Bangash T. Explosion-Resistant Buildings: Design, Analysis, and Case Studies. Springer-Verlag, 2006. 784 p.
3. Almazova V.O., Plotnikova A.I., Rastorgueva B.S. Problems of building resistance to progressive collapse. Vestnik MGSU. No. 2. 2011. Pp. 15-20.
4. Gensersky Yu.V., Medvedenko D.V., Palienko O.I., Titok V.P. LIRA-SAPR 2011: textbook. Kiev: Electronic edition, 2011. 396 p.
5. Gorodetsky D.A., Barabash M.S., Vodopyanov R.Yu., Titok V.P., Artamonova A.E. LIRA-SAPR SOFTWARE COMPLEX 2013: textbook. Kiev - M.: Electronic Edition, 2013. 376 p.
6. Sarazhinsky A.S., Efryushin S.V. Calculation analysis of structural measures to protect frame buildings from progressive collapse. Structural mechanics and structures. No. 2(17). 2018. Pp. 83-96.

# A RESEARCH OF THE BEHAVIOR OF DYNAMICALLY CHANGING CALCULATION DIAGRAM OF THE 4-STOREY MONOLITHIC REINFORCED CONCRETE FRAME DURING DEMOLITION

S. V. Efryushin<sup>1</sup>, A. I. Yurchenko<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics

<sup>2</sup> MA Student of the Department of Structural Mechanics, e-mail: [yurchenko.andrey1997@gmail.com](mailto:yurchenko.andrey1997@gmail.com)

---

On the example of a 4-storey building with a reinforced concrete frame, mathematical modeling of progressive building fracture during demolition is carried out. The finite element method implemented in LIRA-CAD, ANSYS software systems was used for modeling.

Various methods for controlling building destruction area and fragments expansion with the aim of reducing them in dense buildings are proposed. The experience of the calculations made can be used in modeling buildings of various storey and configuration.

**Keywords:** progressive fracture, dismantling, demolition, LIRA-SAPR, ANSYS.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОЖАРЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПК ANSYS MECHANICAL

С. В. Ефрюшин<sup>1</sup>, В. В. Юрьев<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики

<sup>2</sup>Магистрант кафедры строительной механики

Приводятся результаты математического моделирования поведения железобетонных плит при испытаниях на огнестойкость по режиму стандартного пожара. Целью работы является создание и апробация методики расчета огнестойкости железобетонных конструкций в ПК *ANSYS MECHANICAL*. В модельной задаче расчёта железобетонных шарнирно-опёртых по двум сторонам плит определяются критическая температура нагрева конструкции, время до потери несущей способности, деформации, напряжения и прогибы.

Осуществлено сравнение экспериментальных данных с расчетным моделированием. Анализ результатов позволяет провести обоснование применимости ПК *ANSYS MECHANICAL* для решения задач огнестойкости железобетонных конструкций.

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции, стандартный пожар, критическая температура, предел огнестойкости, программный комплекс ANSYS.

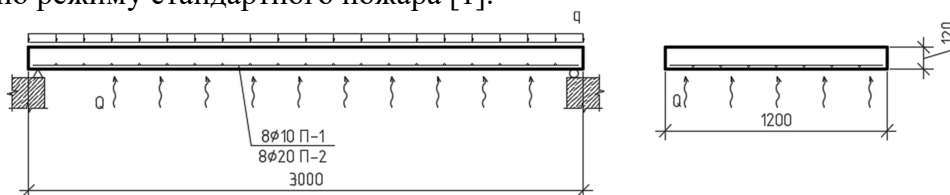
Строительная отрасль предъявляет высокие требования к надежности зданий и сооружений в чрезвычайных ситуациях. В настоящее время основным способом определения фактических пределов огнестойкости конструкций являются их испытания в лабораторных условиях. Существующие программные комплексы позволяют в ряде случаев заменить дорогостоящие испытания математическим моделированием, которое осуществляется на основе метода конечных элементов и позволяет получить адекватную информацию о напряженно-деформированном состоянии конструкции. В статье анализируются результаты расчета несущей способности железобетонных плит под воздействием внешней нагрузки и температуры.

*Описание расчетных моделей.* В качестве исходных данных для моделирования огнестойкости железобетонных плит приняты результаты проведенных в НИИЖБ испытаний [1]. Рассматриваются две шарнирно-опёртые по краям железобетонные плиты П-1, П-2 размерами 3000х1200х120 мм.

Процент армирования П-1  $\mu = 0,44\%$  ( $8\phi 10$  арматура класса А – III), распределительная арматура  $19\phi 6$  класса А – III.

Процент армирования П-2  $\mu = 1,71\%$  ( $8\phi 20$  арматура класса А – III), распределительная арматура  $19\phi 6$  класса А – III.

Защитный слой рабочей арматуры для П-1 - 18 мм, для П-2 – 21 мм. Конструкции загружаются равномерно – распределенной нагрузкой  $q$  с интенсивностью равной  $10 \text{ кН/м}$  для П-1,  $22 \text{ кН/м}$  для П-2 (рис. 1). На нижнюю грань образцов приложена температурная нагрузка  $Q$  согласно режиму стандартного пожара [1].



**Рис. 1.** Расчетные схемы плит

Моделирование осуществлялось с помощью метода конечных элементов (МКЭ), реализованного в программе ANSYS [2, 3]. Для теплотехнического расчета использовались следующие типы конечных элементов: SOLID70 – для моделирования керамзитобетона, LINK33 – для армирующих элементов. При проведении статического расчета конечные элементы заменялись на SOLID185, LINK180 соответственно. Общий вид расчетной схемы П-1 в ПК ANSYS представлена на рис. 2.

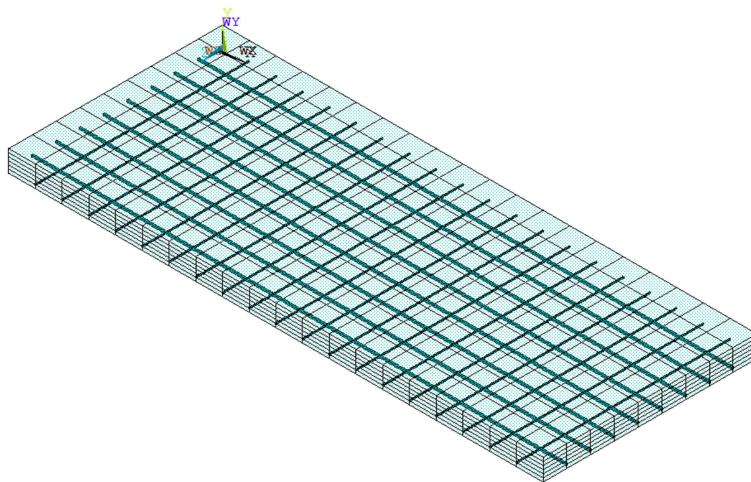


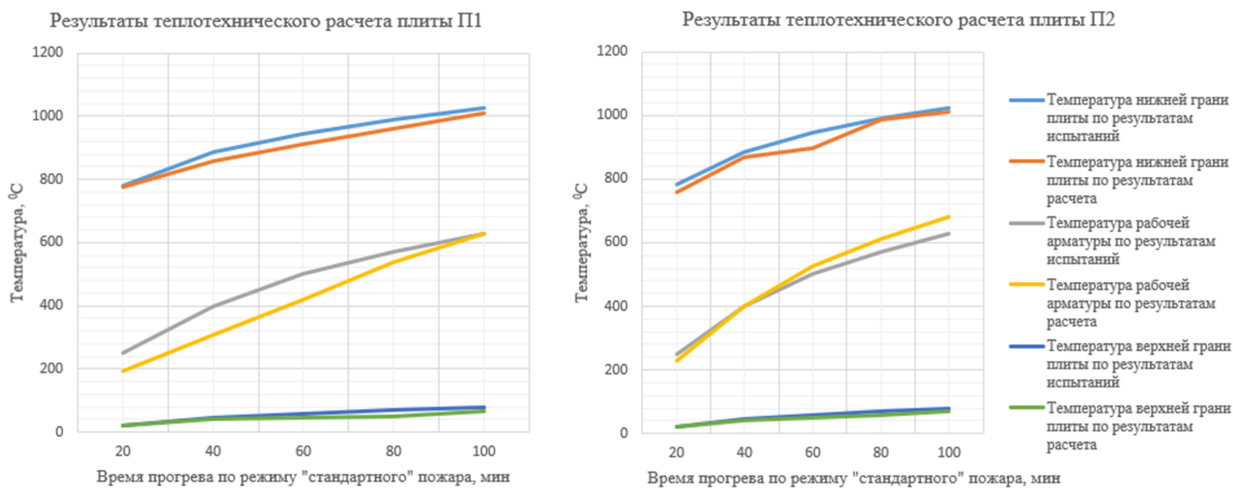
Рис. 2. Общий вид расчетной схемы П-1 в ПК ANSYS

*Методика расчета.* Расчет производился в ПК *ANSYS MECHANICAL* с применением команд на языке программирования APDL. Анализ проводится по результатам решения двух типов задач. Первой решается термодинамическая задача, результатом которой является распределение температур в плите как функция от времени. Полученные данные являются исходными для решения статической задачи. Результатом расчета двух задач является нахождение зависимости напряженно-деформированного состояния конструкций от температур. При моделировании учтено изменение физико-механических свойств материалов от воздействия температуры [4-7]. Наступлением предельного состояния считалось появление пластического шарнира в рабочей арматуре, когда напряжения от нагрузки достигают уровня расчетного сопротивления. Расчет производится в физически и геометрически нелинейной постановке.

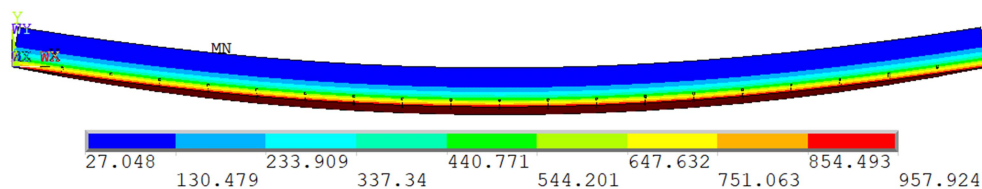
*Анализ результатов.* Решение термодинамической задачи для плит П-1 и П-2 представлено на рис 3. Результатом является график зависимости температуры нижней, верхней граней плит и рабочей арматуры от времени при режиме стандартного пожара. На рис. 4, 5 приведено распределение температур в плитах после 80 минут огневых испытаний. Полученные в ходе расчета данные с достаточной точностью соответствуют опытным и могут быть приняты в качестве исходных для статического расчета.

При решении статической задачи определялись следующие параметры напряженно-деформированного состояния плит:

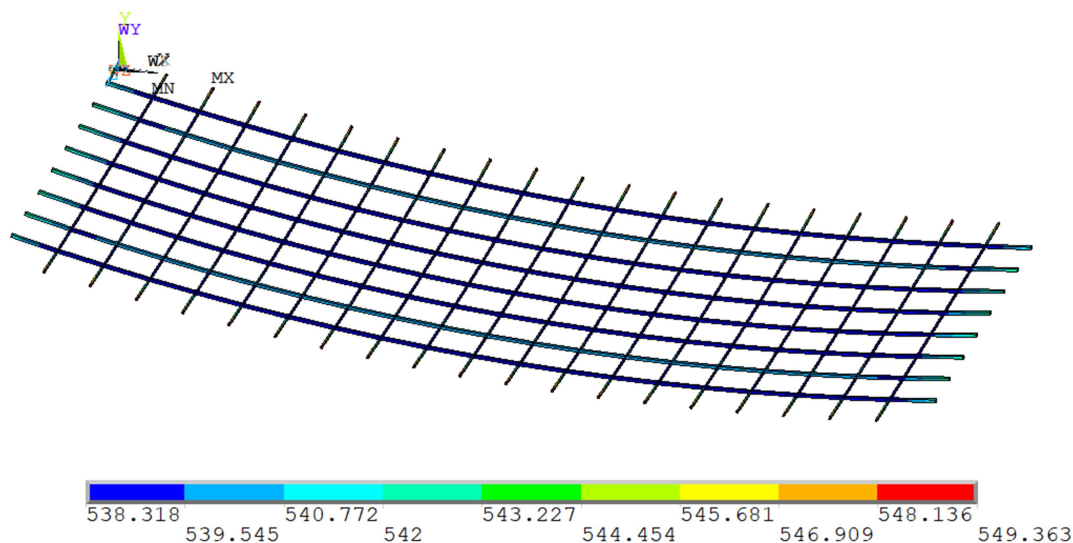
- максимальные прогибы от совместного воздействия эксплуатационной и температурной нагрузки;
- деформации сжатой зоны бетона, %;
- продольные деформации арматуры, %;
- эквивалентные напряжения в арматуре по Мизесу, МПа.



**Рис. 3.** Результаты термодинамического расчета



**Рис. 4.** Распределение температур по высоте сечения после 80 минут температурного воздействия для П-1

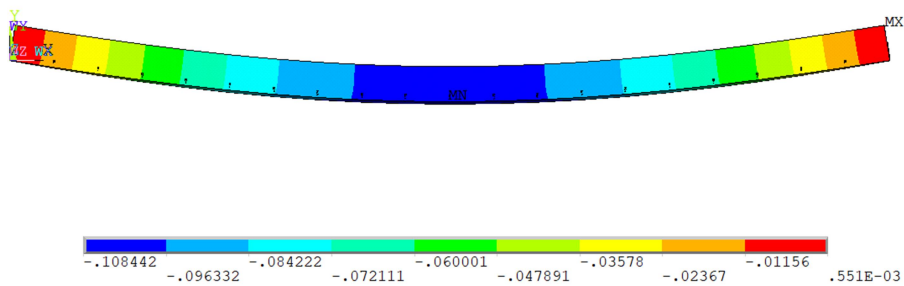


**Рис. 5.** Распределение температур в рабочей арматуре после 80 минут температурного воздействия для П-1

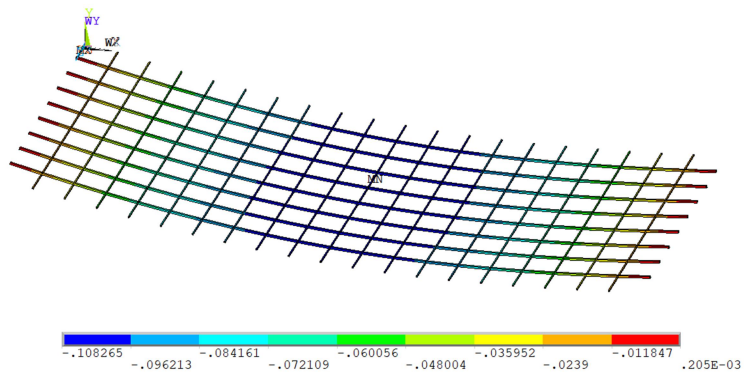
Результаты статического расчета сведены в табл. 1, 2 для плит П-1, П-2 соответственно. На рис. 6 представлены результаты расчеты НДС плиты П-1 при достижении арматурой критической температуры. Полученные различия опытных и расчетных результатов связаны с чувствительностью схемы к значению температурного коэффициента линейного расширения (ТКЛР), который различается в источниках [1, 7].



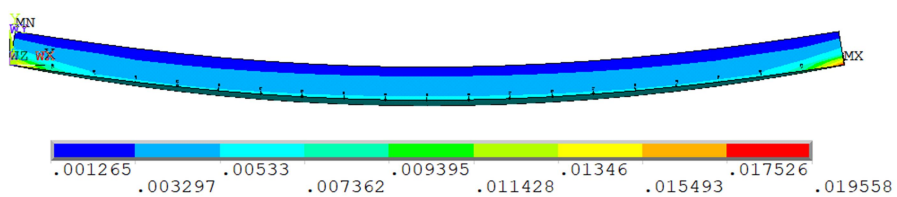
а)



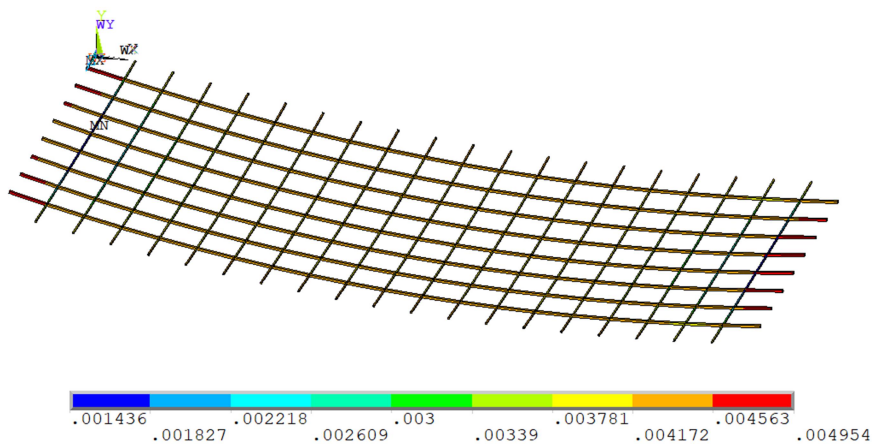
б)



в)

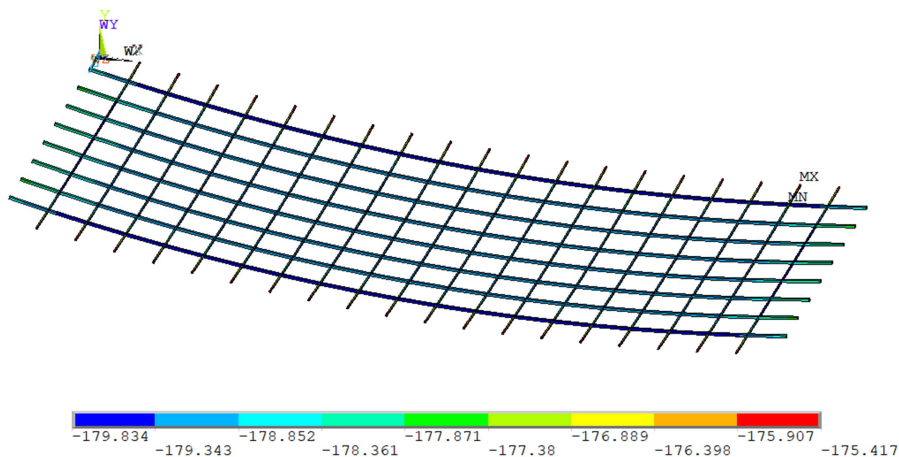


г)



**Рис. 6 (начало).** Результаты расчета НДС плиты П-1 при достижении арматурой критической температуры:  
а) прогиб плиты, б) прогиб арматуры, в) деформации бетона, г) деформации арматуры

д)



**Рис. 6 (окончание).** Результаты расчеты НДС плиты П-1 при достижении арматурой критической температуры:  
 а) прогиб плиты, б) прогиб арматуры, в) деформации бетона,  
 г) деформации арматуры, д) напряжения в арматуре

Таблица 1

Результаты статического расчета П-1

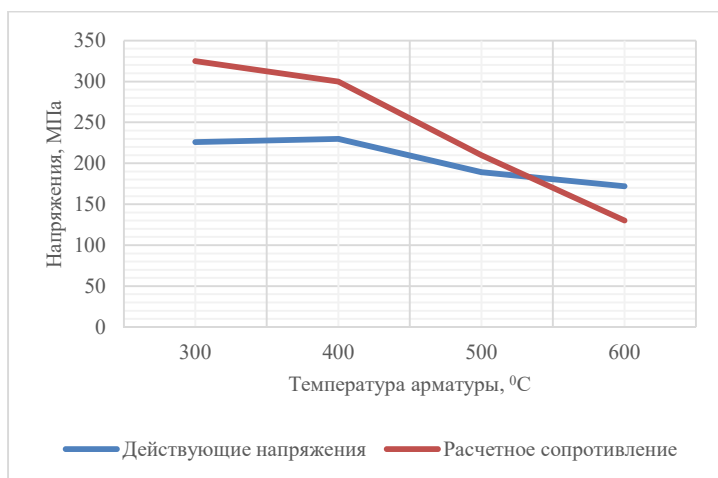
Параметр напряженно-деформированного состояния		Температура, °С					
		781	885	945	990	1025	1049
Максимальные прогибы, мм	Испытания	43	61	68	89	-	-
	Расчет	39	66	79	108	-	-
Деформации сжатого волокна бетона, %	Испытания	0,08	0,1	0,11	0,14	-	-
	Расчет	0,081	0,089	0,10	0,12	-	-
Деформации рабочей арматуры, %	Испытания	0,3	0,5	0,6	0,81	-	-
	Расчет	0,19	0,28	0,33	0,49	-	-
Эквивалентные напряжения в рабочей арматуре, МПа	Испытания	212	200	195	182	-	-
	Расчет	226	225	185	180	-	-

Таблица 2

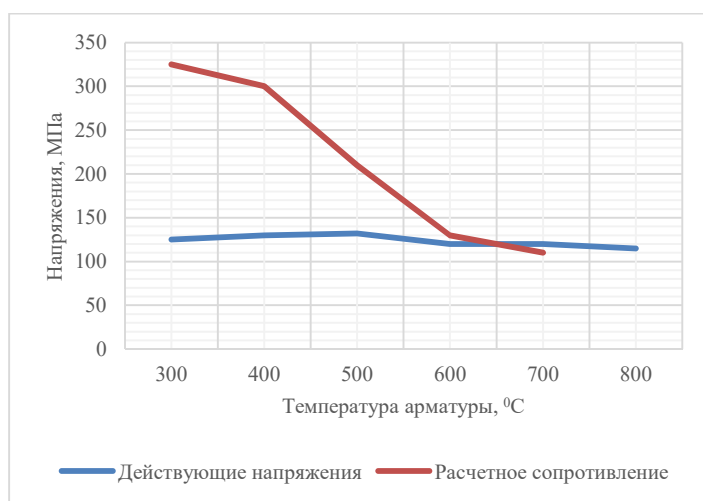
Результаты статического расчета П-2

Параметр напряженно-деформированного состояния		Температура, °С					
		781	885	945	990	1025	1049
Максимальные прогибы, мм	Испытания	14	40	56	68	80	93
	Расчет	29	53	71	74	87	112
Деформации сжатого волокна бетона, %	Испытания	0,07	0,14	0,16	0,18	0,2	0,22
	Расчет	0,09	0,16	0,17	0,19	0,23	0,27
Деформации рабочей арматуры, %	Испытания	0,06	0,25	0,39	0,5	0,58	0,69
	Расчет	0,08	0,31	0,43	0,54	0,62	0,77
Эквивалентные напряжения в рабочей арматуре, МПа	Испытания	132	139	134	127	124	119
	Расчет	121	136	132	120	119	115

По полученным данным об изменении эквивалентных напряжений и расчетного сопротивления определяется критическая температура, при которой в армирующих элементах образуется пластический шарнир (рис. 7, 8). Результаты расчета огнестойкости представлены в табл. 3.



**Рис. 7.** Зависимость действующих напряжений и расчетного сопротивления арматурных стержней от температуры для П-1, МПа



**Рис. 8.** Зависимость действующих напряжений и расчетного сопротивления арматурных стержней от температуры для П-2, МПа

Таблица 3

Результаты расчета огнестойкости плит П-1, П-2

Процент армирования, %	Критическая температура, °C			Предел огнестойкости, ч-мин		
	опытная	расчетная	расхождение, %	опытный	расчетный	расхождение, %
0,44	510	531	3,95	1 - 48	1 - 55	6,09
1,71	570	645	11,6	2 - 50	3 - 16	13,26

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Разработана и апробирована программа расчета огнестойкости железобетонных плит в ПК *ANSYS MECHANICAL*.
2. Удовлетворительное совпадение опытных и расчетных результатов позволяет использовать системы математического моделирования как альтернативу реальным испытаниям.
3. Для совершенствования математических моделей необходимы дополнительные данные испытаний огнестойкости железобетонных конструкций.

#### Библиографический список

1. Милованов, А.Ф. Стойкость железобетонных конструкций при пожаре/ А. Ф. Милованов. - М.: Стройиздат, 1998. - 304 с.
2. Каплун, А. Б. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство/ А. Б. Каплун, Е. М. Морозов, М. А. Олферьева. - М.: «Либроком», 2015. – 272 с.
3. Федорова, Н. Н. Основы работы в ANSYS 17/ Н. Н. Федорова, С. А. Вальгер, М. Н. Данилов, Ю. В. Захарова. - М.: ДМК Пресс, 2017. – 210 с.
4. Ефрюшин, С. В. Расчетный анализ огнестойкости конструкций с учетом перераспределения усилий при локальных температурных воздействиях / С. В. Ефрюшин, В. В. Юрьев // Строительная механика и конструкции. – 2018. - №4(19). – С. 97-107.
5. Ефрюшин, С. В. Численное моделирование огнестойкости железобетонной плиты с помощью программного комплекса Ansys / С. В. Ефрюшин, В. В. Юрьев // Строительная механика и конструкции. – 2019. - №4(23). – С. 86-92.
6. ГОСТ 30247.0-94. Конструкции строительные. Методы испытания на огнестойкость. Общие требования. - М.: ИПК «Изд-во стандартов», 1996.
7. СТО 36554501-006 – 2006. Правила по обеспечению огнестойкости и огнесохранности железобетонных конструкций.- М.: ФГУП «Строительство», 2006.

#### References

1. Milovanov A.F. Resistance of reinforced concrete structures in case of fire. M.: Stroyizdat, 1998. 304 p.
2. Kaplun A.B., Morozov E.M., Olfer'eva M.A. ANSYS in the hands of an engineer: A practical guide. M.: Librocom, 2015. 272 p.
3. Fedorova N.N., Valger S.A., Danilov M.N., Zakharova Yu.V. Fundamentals of work in ANSYS 17. M.: DMK Press, 2017, 210 p.
4. Efyushin S.V., Yuriev V.V. Calculation analysis of fire resistant structures taking into account the redistribution of forces under local temperature effects. Structural mechanics and structures. No. 4(19). 2018. Pp. 97-107.
5. Efyushin S.V., Yuriev V.V. Numerical simulation of fire resistance of a reinforced concrete slab using the Ansys bundled software. Structural Mechanics and Structures. No. 4(23). 2019. Pp. 86-92.
6. Federal Standard 30247.0-94. Building constructions. Fire test methods. General requirements. M.: IPK "Publishing house of standards", 1996.
7. STO 36554501-006 - 2006. Rules for ensuring fire resistance and fire safety of reinforced concrete structures. M. : FSUE "Construction", 2006.

# MATHEMATICAL MODELING OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES BEARING CAPACITY IN CASE OF FIRE USING ANSYS MECHANICAL

S. V. Efrushin<sup>1</sup>, V. V. Yuriev<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Structural Mechanics

<sup>2</sup> MA Student of the Department of Structural Mechanics

---

The results of mathematical modeling of reinforced concrete slabs behavior during fire tests in the standard fire are presented. The aim of this work is to create and test a methodology for calculating the fire resistance of reinforced concrete structures in ANSYS MECHANICAL bundled software. In the model problem of calculating reinforced concrete articulated on two sides of the plates, the critical temperature of the heating of the structure, the time until the loss of bearing capacity, deformation, stress and deflection are determined.

The experimental data are compared with computational modeling. Results analysis allows us to justify the applicability of ANSYS MECHANICAL for solving fire resistance problems of reinforced concrete structures.

**Keywords:** reinforced concrete structures, standard fire, critical temperature, degree of fire resistance, ANSYS bundled software.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 539.37

## ОПТИМИЗАЦИЯ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ ДЛЯ РАСЧЁТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЗДАНИЯ ПОВЫШЕННОЙ ЭТАЖНОСТИ

С. Ю. Гриднев<sup>1</sup>, Н. Э. Гарри<sup>2</sup>, В. А. Острецов<sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,3</sup>

Россия, г. Воронеж

Нигерия<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.:+7(473)2714230; e-mail: gridnev\_s\_y@rambler.ru

<sup>2</sup>Магистрант кафедры строительной механики, тел.:+79081392636; e-mail: [harryndifreke@yahoo.com](mailto:harryndifreke@yahoo.com)

<sup>3</sup>Студент кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов имени профессора Ю. М. Борисова, e-mail: ostretsov.v.a.191@gmail.com

Определяются оптимальные размеры грунтового основания по выбранным критериям для оценки напряженно-деформированного состояния (НДС) здания повышенной этажности сложной конфигурации в плане на основании, сложенном из лессовых грунтов. Описана конечно-элементная модель высотного здания совместно с грунтовым основанием. Предложены в качестве критериев для оптимизации размеров грунтового основания максимальные перемещения грунта под подошвой фундаментной плиты, продольные напряжений в колоннах и изгибающие моменты в фундаментной плите. Выполнена оценка влияния учета грунтового основания и его размеров на конечные результаты расчета в программном комплексе Midas GTS NX. Показана необходимость выполнения расчетов с учетом грунтового основания. Определены границы применения модели «Здание - грунтовое основание», обусловленные требуемой точностью расчетов, простотой использования, оптимальным временем расчета, малыми трудозатратами при создании и подготовке модели к расчету. Рекомендована формула для определения оптимальных размеров грунтового основания для выполнения практических расчетов.

**Ключевые слова:** повышенная этажность, осадка фундамента, грунтовое основание, размер грунтового основания, напряженно-деформированное состояние, конечно-элементная модель.

**Введение.** В нашей стране с каждым годом нарастают темпы жилищного строительства. При этом увеличивается доля возведения зданий повышенной этажности. Высота зданий в различных нормативных документах определяется в зависимости от задач, на решение которых направлено содержание документа. Строгого определения термина «высотное здание» в Градостроительном кодексе Российской Федерации не содержится. Существует общепринятая классификация, в соответствии с которой сооружение высотой до 30 м считается зданием повышенной этажности, а высотой до 100 м относятся к высотным зданиям III категории этажности. Ввиду повышения спроса на недвижимость возрос спрос на более компактные и одновременно высотные строения в городах с плотной застройкой. Особенности таких высотных зданий является большая площадь фундаментной плиты, при которой передаются большие нагрузки на грунты. Из-за большой высоты планировка конструкция и расчет здания повышенной этажности качественно отличаются от зданий малой этажности. В соответствии с пунктом 5.1.4 [1] «Сооружение и его основание должны рассматриваться в единстве, т.е. должно учитываться взаимодействие сооружения с основанием. Для совместного расчета

© Гриднев С. Ю., Гарри Н. Э., Острецов В. А., 2020

сооружения и основания могут быть использованы численные методы (в том числе метод конечных элементов, метод конечных разностей, метод граничных элементов и др.)». При выполнении практических расчетов напряженно-деформированного состояния (НДС) здания повышенной этажности совместно с грунтовым основанием с использованием современных программных комплексов назначение размеров грунтового массива в зависимости от размеров и конструктивных особенностей сооружения строго не регламентируются нормативными документами и проектировщик, как правило, опирается на свой предыдущий опыт проектирования. Отсутствуют сведения о влиянии принимаемых при выполнении расчетов размеров массива грунта под сооружением на получаемые результаты расчета, погрешности в расчетах, а также нет однозначных рекомендаций по случаям необходимости учета влияния грунтового массива при расчете сооружения. В таких случаях необходимо сравнить результаты расчета надземной части сооружения с грунтовым основанием разных размеров и упрощенный расчет при упрощенном учете грунтового основания. Фундаментная плита взаимодействует с грунтовым основанием, а нагрузки на фундаментную плиту передаются локально через вертикальные элементы – стены и колонны каркаса, величина нагрузки зависит от совместности сопротивления нагрузкам высотного здания и грунтового основания. В общем случае здание следует рассматривать как некую сложную многократно неопределимую пространственную конструкцию, опертую на упругое полупространство, в которой фундаментная плита является нижним поясом сооружения. Для получения достоверных результатов НДС сооружения следует учитывать большие массивы грунта как под фундаментной плитой, так и в законтурной области. В свою очередь, на размеры грунтового массива, моделируемого в программном комплексе, влияет несколько факторов, такие как: наличие близлежащей застройки, свойства грунта, неоднородность грунтового основания, наличие полостей.

Исследования в этом направлении приведены в статье российских ученых [2], где даются рекомендации по оптимизации конечно-элементной модели. В работе рассматривают модель взаимодействия напряженно деформированного состояния «грунт - фундамент - надземная часть здания - надземная часть здания», объясняются методики выполнения работы, а также анализируется полученный результат, выдвигаются рекомендации по принятию проектных решений. В статье [3] получены рекомендации о «чувствительности» высотных зданий к кренам, которую необходимо учитывать при анализе напряжений, возникающих в фундаментной плите, колоннах и перекрытиях первых этажей. В статье [4] зарубежных авторов внимание было сосредоточено на проблеме, связанной с перераспределением напряжений в конструкциях здания при получении дополнительной эксплуатационной нагрузки, что приводит к перегрузке несущих конструкций сооружения, перераспределению напряжений в фундаменте сооружения при образовании крена. Подобные исследования проводились в работе [5], в этой статье авторы уделяют внимание численному исследованию осадки фундамента высотного здания, сравнивают значения осадок, полученные при расчете в программном комплексе, с реальными осадками, полученными в процессе мониторинга. В статье рассмотрены [6] проблемы, связанные с определением толщины сжимаемого слоя под подошвой фундаментной плиты больших размеров. В [7] определяются размеры опорного слоя грунта для плитно-свайного фундамента при проведении оценки деформаций грунтового основания проектируемого высотного комплекса в городе Казани. В работе [8] затрагивались проблемы прогнозирования осадок при эксплуатационной нагрузке зданий повышенной этажности. Результаты исследований в этом направлении приведены в статье [9]. Вопросы математического моделирования основания при совместном сопротивлении действующим нагрузкам здания и основания изложены в работе [10]. Методика расчета фундаментных плит совместно с основанием в пространственной постановке описана в работе [11]. Исследования в работе [12] основаны на использовании упрощенных моделей основания при совместном расчете здания и сооружения. Ряд работ посвящены оптимизации подходов к учету совместному сопротивлению транспортных несущих систем с гидроупругим основанием [13-15].

Современные представления о расчете и проектировании конструктивных систем, подразумевающие выполнение обязательного совместного расчета системы «основание – фундамент – здание» базируются на фундаментальных работах М. И. Горбунова-Посадова, Н. Клепикова, А. С. Городецкого, В. М. Улицкого.

**Цели исследования.** При выполнении исследований ставилась задача подбора оптимальных размеров грунтового основания для расчётного моделирования напряженно-деформированного состояния здания повышенной этажности и определения границ применимости упрощенного подхода к учету грунтового основания. При этом последовательно выполнялись следующие задачи:

1. Создание КЭ модели здания повышенной этажности.
2. Моделирование грунтового основания в составе общей расчетной схемы.
3. Оценка НДС здания повышенной этажности с выбором оптимальных размеров грунтового массива по ряду критериев для получения достоверных результатов.
4. Выбор критериев оценки.
5. Получение формулы для определения оптимальных размеров грунтового основания для выполнения практических расчетов.

**Объект исследования.** Исследования выполнены для 26-этажного многоквартирного дома с двумя диафрагмами жесткости. Высота сооружения составляет 75,5 м. Геометрические размеры конструкций здания следующие: размеры плит перекрытия сооружения: 37 м x 45 м, толщина плит перекрытия 300 мм, плиты перекрытия выполнены из бетона В25. Типовой этаж имеет высоту 3 м, высота первого этажа равна 4.5 м. Конструкция здания представляет собой монолитный каркас. Размеры фундаментной плиты составляют 38,5x46,5 м, толщина фундаментной плиты 1.2 м. Фундаментная плита выполнена из бетона В30. Диафрагмы жесткости, представленные лифтовой шахтой и стеной, выполнены из бетона класса В25, размеры колонн составляют 400x400 мм. Они выполнены из бетона В25. Ниже на рис. 1 и 2 показаны план и каркас здания, созданный в программном комплексе Лира-САПР, при помощи подложки импортированной из среды AutoCAD.

После создания надземной части здания в программных комплексах Лира-САПР и AutoCAD полученная заготовка конечно-элементной модели была импортирована в рабочую среду программного комплекса Midas GTS NX для создания КЭ схемы с выбором типов конечных элементов и присвоения свойств надземной части здания и грунтового основания.

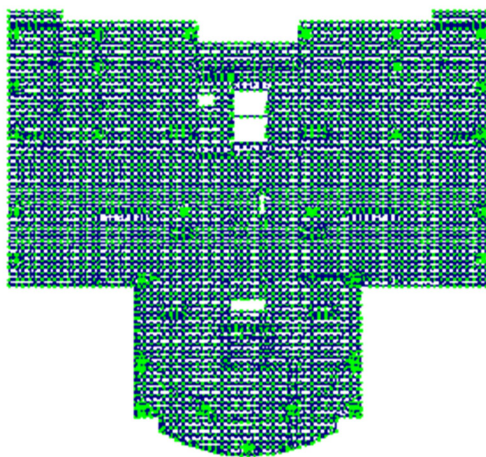


Рис. 1. План здания в ПК Лира-САПР

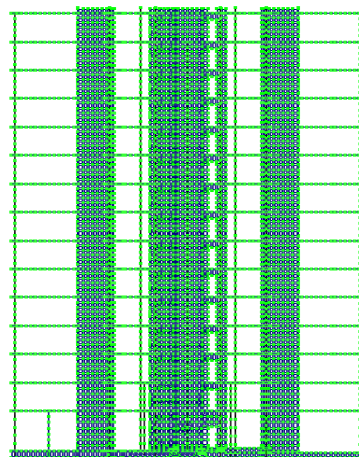
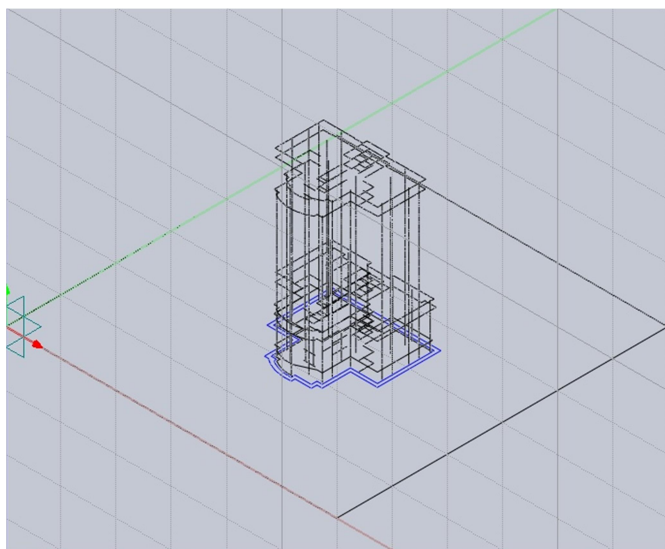


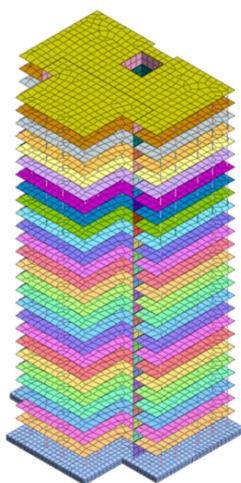
Рис. 2. Каркас здания в ПК Лира-САПР



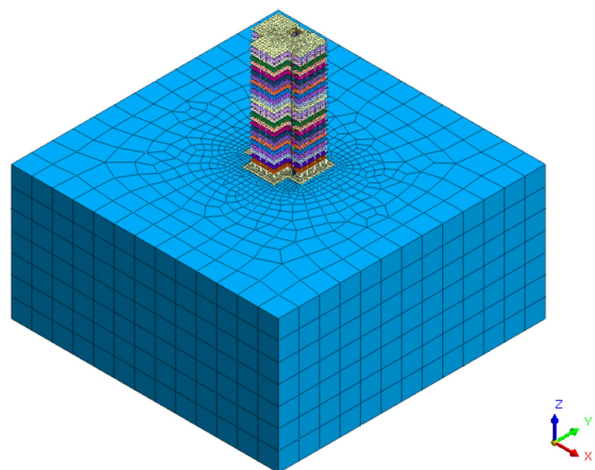
**Общее описание расчетной модели.** КЭ расчетная схема создана в среде программного комплекса Midas GTS NX. При создании конечно-элементной модели использованы следующие типы конечных элементов: элементы колонн, которые заданы 1D элементом (колонна), перекрытия были созданы 2D элементом (пластина), фундаментная плита представлена 2D элементом (пластина). У каждой колонны, примыкающей к плите перекрытия, есть общий узел с перекрытием, через который напряжения в вышестоящих элементах передаются ниже, на фундаментную плиту. Соединение плит перекрытий с колонной моделируется жесткой соединением. Совместность работы фундаментной плиты и колонн здания обеспечивается благодаря жесткому закреплению. Свойства были заданы в соответствии с описанием исходной модели. Заданные граничные условия на нижней поверхности фундаментной плиты запрещают перемещения в узлах по осям X, Y, Z в автоматическом режиме. Для представления этапов построения КЭ модели на рис. 3 показана промежуточная модель без заданных свойств и типов элементов, а на рис. 4 - КЭ модель высотного здания без грунтового основания. Варианты общей КЭ расчетной модели совместно с грунтовым основанием разных размеров показаны на рис. 5-7 (варианты размеров будут приведены ниже).



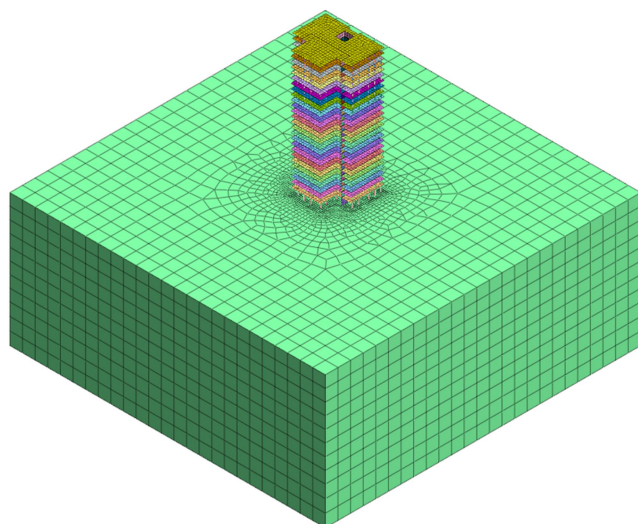
**Рис. 3.** Импортированная модель



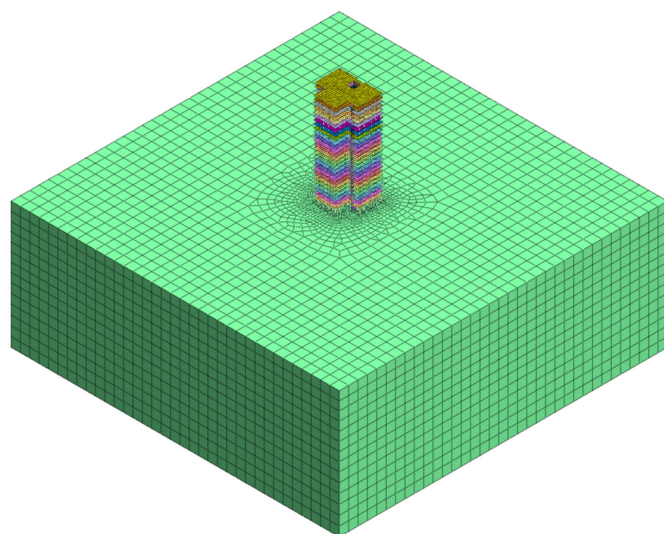
**Рис. 4.** Расчетная модель без грунтового основания



**Рис. 5.** Расчетная модель здания совместно с грунтовым основанием первого варианта размеров



**Рис. 6.** Расчетная модель совместно с грунтовым основанием второго варианта размеров



**Рис. 7.** Расчетная модель совместно с грунтовым основанием третьего варианта размеров

**Порядок выполнения численных исследований с выбором критериев.** Численные исследования выполнены с целью подбора оптимальных размеров грунтового основания. Для разработки рекомендаций по подбору первоначальных размеров грунтового основания при расчете НДС зданий повышенной этажности из практических соображений и с учетом опыта ряда проектировщиков для исследования были использованы три типоразмера грунтового основания. Грунтовое основание имеет характеристики незамоченного лессового грунта, взятые по рекомендациям Я. Д. Гильмана для лессовых суглинков, полученные по результатам штамповых испытаний грунта с учетом прогнозируемой его влажности. В общем случае, значения модуля деформации лессового грунта изменяются в широком интервале. Это обусловлено тем, что они существенно зависят от исходной влажности и пористости грунта. При моделировании грунта использовался метод модифицированного Мора-Кулона. Данная модель является усовершенствованной версией модели Мора-Кулона, созданной путем объединения нелинейно-упругой и упругопластической модели с целью создания новой модели, подходящей для моделирования пылеватых и песчаных грунтов. Модифицированная модель Мора-Кулона позволяет моделировать двойное упрочнение (*double stiffening*), не подверженное влиянию сдвигового разрушения и текучести при сжатии.

Использованы соотношения для назначения начальных размеров грунтового основания зданий повышенной этажности: для определения ширины  $X$ :

$$X=5-7A, \quad (1)$$

где  $A$  – ширина фундаментной плиты;

для определения длины  $Y$ :

$$Y=5-7B, \quad (2)$$

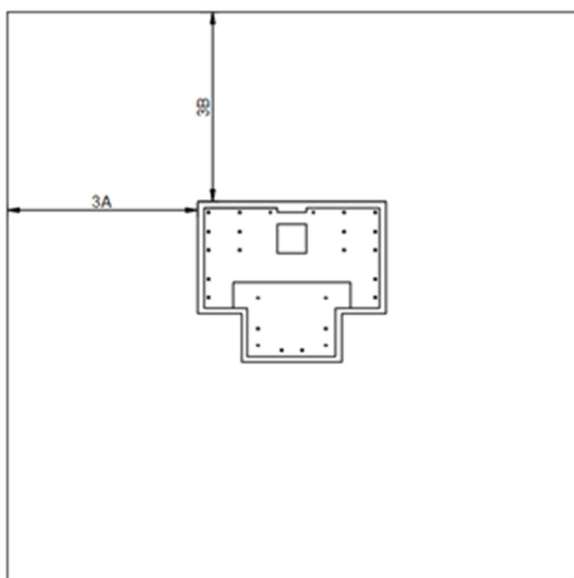
где  $B$  – длина фундаментной плиты;

для определения высоты  $H$ :

$$H=0,8-1,3 h, \quad (3)$$

где  $h$  – высота здания.

Руководствуясь этими соотношениями, назначены три размера грунтового основания (рис. 6): 1 размер грунтового основания принят равным 120x120 м (схема на рис. 8) с глубиной основания 60 м; 2 размер грунтового основания принят из соотношения  $5A \times 5B$  равным 200x200x80 м; 3 размер грунтового основания выбран из соотношения  $7A \times 7B$  со следующими размерами: 280x280x100 м.



**Рис. 8.** Схема определения ширины и длины массива грунта:

$A$  – ширина фундамента,  $B$  – длина фундамента

Для определения оптимальных размеров грунтового массива под многоэтажным зданием были созданы три расчетные схемы, с тремя различными основаниями, которые отличаются друг от друга назначенными размерами. Для задания массивов грунтового основания была создана геометрия массива (Пространственный куб 3D), пространственному элементу были назначены свойства и тип, была назначена сетка конечных элементов грунту основания и последним этапом в создании модели было задание стадийности возведения сооружения. В процессе создания общей КЭ расчетной модели здание было объединено с грунтом следующим образом: на заданном основании был создан

«отпечаток» фундаментной плиты, далее были объединены узлы сеток конечных элементов здания с узлами сеток грунтового основания, после чего в расчетной модели осуществляется совместная работа массива в связке с фундаментной плитой. Все параметры назначенных массивов грунта сведены в табл. 1.

Таблица 1

Таблица назначенных размеров грунтового основания и их свойств

Тип КЭ	Сечение, м	Толщина, м	Свойства
Массив грунта для первой модели	120 x 120	60	$E=129110 \text{ кН/м}^2$ $\nu=0.35$ $C=0.075$ $\varphi=30^\circ$ $\gamma=15 \text{ кН/м}^3$
Массив грунта для второй модели	200 x 200	80	
Массив грунта для третьей модели	280 x 280	100	

Как результат, была выполнена серия расчетов для трех заданных расчетных схем на воздействие собственного веса здания.

Для иллюстрации выполненных расчетов приведем ниже некоторые результаты. На рис. 9 приведены эпюры распределения продольных напряжений в колоннах, на рис. 10 и 11 показаны эпюры изгибающих моментов, возникающие в фундаментной плите и на рис. 12 приводятся значения вертикальных перемещений по подошве фундаментной плиты и грунтовом массиве.

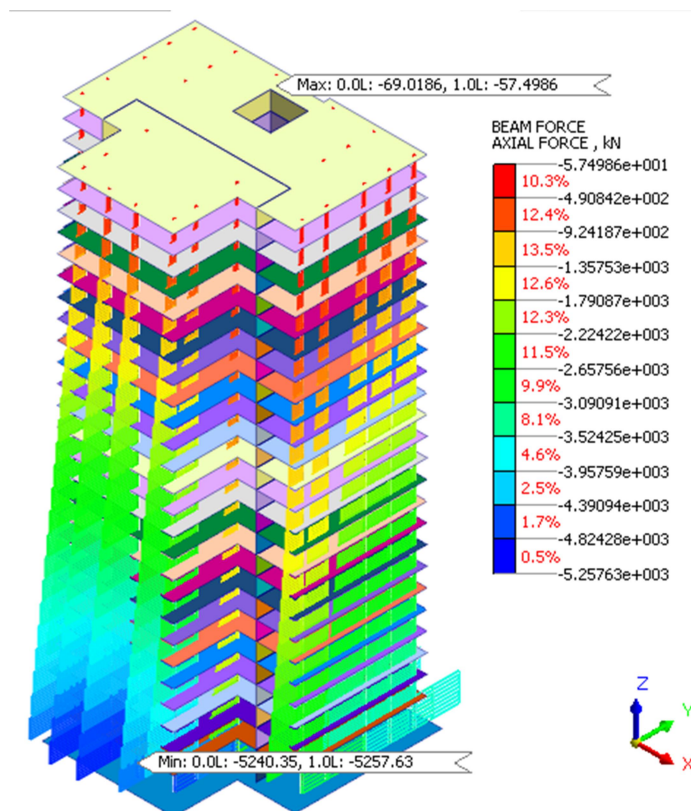


Рис. 9. Эпюры распределения продольных сил в колоннах

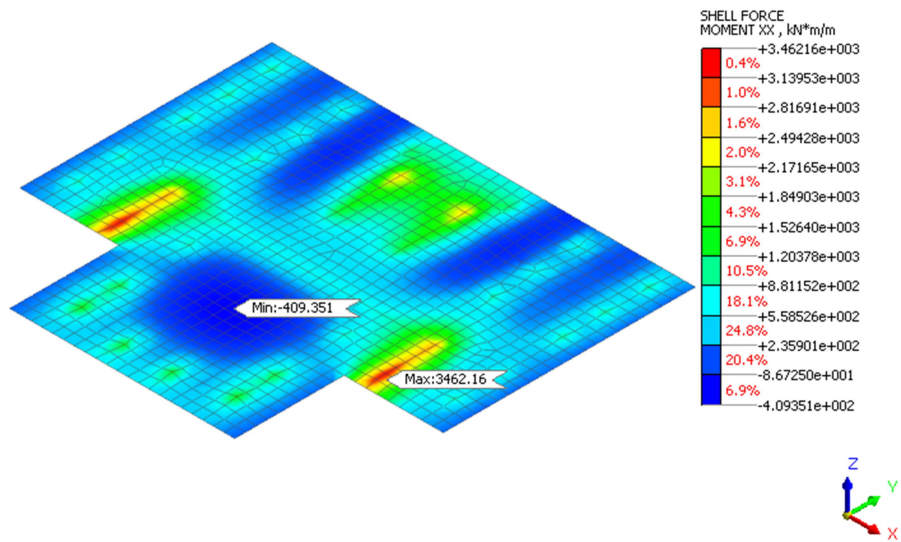


Рис. 10. Эпюры распределения изгибающих моментов  $M_x$  в фундаментной плите

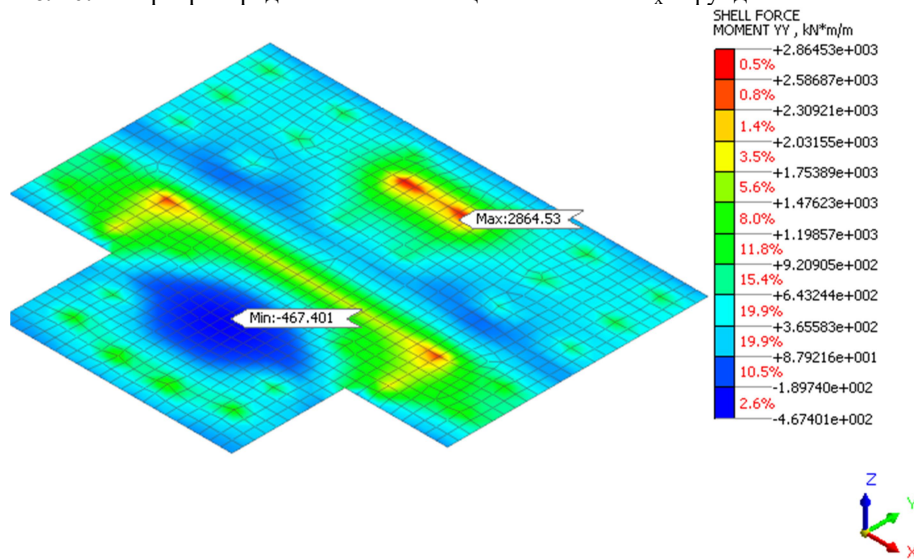


Рис. 11. Эпюры распределения изгибающих моментов  $M_y$  в фундаментной плите

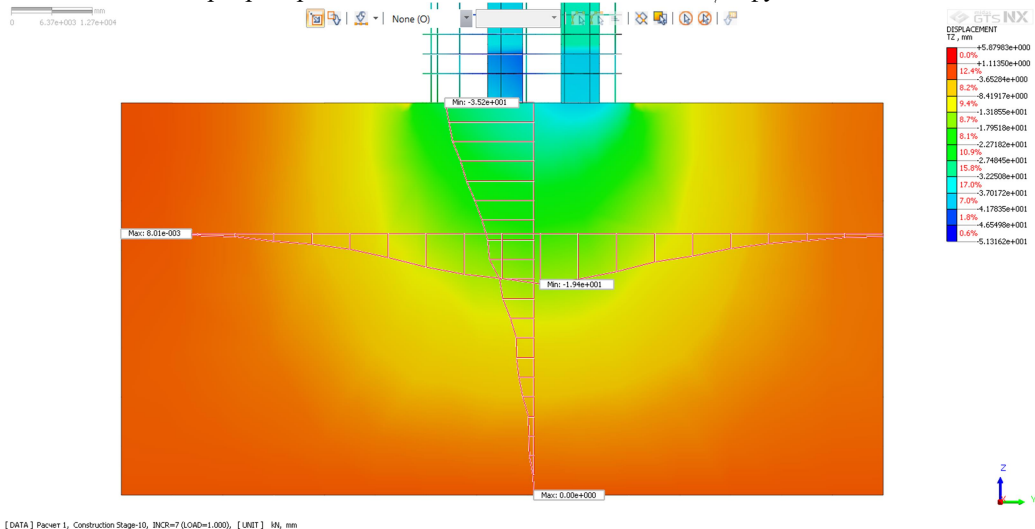


Рис. 12. Графики вертикальных перемещений по оси  $Z$

**Анализ результатов численных исследований.** Выполнены численные исследования в программном комплексе Midas GTS NX НДС 26-этажного здания совместно с грунтовым основанием для трех вариантов его размеров на собственный вес. Определялись деформирован-

ный вид элементов несущих конструкций здания и грунтового основания, продольные силы в колоннах, изгибающие моменты в плитах перекрытия и фундаментной плите, значения вертикальных перемещений по подошве фундаментной плиты и в грунтовом массиве. Выполнена сравнительная оценка влияния учета грунтового основания и его размеров на конечные результаты расчета. Результаты расчетов для каждого из исследуемых элементов для удобства сопоставления результатов исследования и визуального восприятия сведены в табл. 2.

Таблица 2

Общая сводная таблица для трех моделей грунтового основания

Рассматриваемый элемент	Колонны	N кН	$M_y$ кН*м	$M_z$ кН*м	$Q_y$ кН	$Q_z$ кН	
		3658.00	129.43	101.00	58.47	94.70	
		85.74	-120.26	-100.18	-57.86	-51.60	
	Плиты перекрытия	N кН	$M_y$ кН*м	$M_z$ кН*м	$Q_y$ кН	$Q_z$ кН	
		1746.97	2063.29	2932.55	2584.97	2439.65	
		-2910.81	-215.45	-525.33	-1996.78	-2477.66	
	Фундаментная плита	$\sigma_x$ кН/м <sup>2</sup>	$\sigma_y$ кН/м <sup>2</sup>	$\tau_{xy}$ кН/м <sup>2</sup>			
		2224.96	781.40	2361.18			
		-1566.77	-1294.57	-2351.09			
	Массив грунта 120x120x65 м	$\sigma_x$ кН/м <sup>2</sup>	$\sigma_y$ кН/м <sup>2</sup>	$\sigma_z$ кН/м <sup>2</sup>			
		2.12	1.96	1.23			
		-470.57	-470.57	-874.95			
		Перемещения, мм					
		Разрез по X.			Разрез по Y.		
		x	y	z	x	y	z
		0.134	0.433	24.40	2.77	0.43	24.40
	Массив грунта 200x200x80 м	$\sigma_x$ кН/м <sup>2</sup>	$\sigma_y$ кН/м <sup>2</sup>	$\sigma_z$ кН/м <sup>2</sup>			
		4.16	4.04	2.30			
		-654.36	-654.33	-1216.00			
		Перемещения, мм					
		Разрез по X.			Разрез по Y.		
x		y	z	x	y	z	
2.49		2.81	15.10	2.62	2.81	14.90	
Массив грунта 280x280x100 м	$\sigma_x$ кН/м <sup>2</sup>	$\sigma_y$ кН/м <sup>2</sup>	$\sigma_z$ кН/м <sup>2</sup>				
	4.82	4.63	2.51				
	-781.40	-781.38	-1452.13				
	Перемещения, мм						
	Разрез по X.			Разрез по Y.			
	x	y	z	x	y	z	
	1.23	2.74	16.20	2.45	2.74	16.10	

Для использования расчетной модели без грунтового основания граничные условия были назначены на подошве фундамента. Результаты по сравнению с расчетом при использовании первого варианта размеров грунтового основания оказались несколько завышенными, кроме продольной силы  $N$ . Во второй расчетной модели с грунтом основания граничные условия задачи были наложены на массив грунта, где результаты напряжений точнее, чем у предыдущей расчетной модели без грунтового основания. Значение  $N$  больше на 4.64 %, чем в первой расчетной модели, а значения  $M_y$  уменьшились на 19.61 %. Это изменение объясняется тем, что здание несимметрично в плане.

### **Выводы по результатам исследования**

Анализ результатов численных исследований позволяет сформулировать следующие выводы:

- напряжения в колоннах зависят от принятых размеров массива грунтового основания и для получения адекватных результатов необходимо рассчитывать сооружение в одной модели с грунтом основания;
- первая расчетная модель оказалась малоприспособлена для выполнения расчетов, так как толщина сжимаемого грунта оказалась меньше осадки грунта от собственного веса;
- при использовании второй расчетной модели получаются заниженные значения перемещений по оси  $z$ ;
- третья расчетная модель удовлетворяет всем выбранным критериям и является наиболее пригодным вариантом, но из-за большого количества элементов, используемых в модели, время расчета задачи существенно увеличивается, что требует больших вычислительных мощностей.

### **Заключение**

Выбраны в качестве критериев для оптимизации размеров грунтового основания максимальные перемещения грунта под подошвой фундаментной плиты, продольные напряжения в колоннах и изгибающие моменты в фундаментной плите. Выполнена оценка влияния учета грунтового основания и его размеров на конечные результаты расчета в программном комплексе Midas GTS NX. Показана необходимость выполнения расчетов с учетом грунтового основания. Определены границы применения модели «Здание - грунтовое основание», обусловленные требуемой точностью расчетов, простотой использования, оптимальным временем расчета, малыми трудозатратами при создании и подготовке модели к расчету. Рекомендована формула для определения оптимальных размеров грунтового основания для выполнения практических расчетов.

### **Библиографический список**

1. СП 22.13330.2011 «Основания зданий и сооружений. Актуализированная версия СНиП 2.02.01-83\*»
2. Тер-Мартirosян, З. Г. Проблемы механики грунтов, оснований и фундаментов при строительстве многофункциональных высотных зданий // З. Г. Тер-Мартirosян, В. И. Теличенко, М. В. Королев // Вестник МГСУ. – Т. 1. -2006. - С. 18-27.
3. Шулятьев, О. А. Фундаменты высотных зданий / О. А. Шулятьев // Вестник ПНИПУ «Строительство и архитектура». – 2014. - № 4 – С. 203-245.

4. Lin, Lan & Hanna, Adel & Sinha, Anup & Tirca, Lucia. (2017). High-rise building subjected to excessive settlement of its foundation: A case study. *International Journal of Structural Integrity*. 8. 10.1108/IJSI-05-2016-0019.
5. Мирсяяпов, И. Т. Численные исследования осадок оснований глубоких фундаментов высотных зданий/ И. Т. Мирсяяпов, Д. М. Нуриева // *Известия КГАСУ*. – 2015. - № 4. - С. – 183-190.
6. Гусев, Г. Н. А. Математическое моделирование систем «Здание – фундамент – грунтовое основание / Г. Н. Гусев, А. А. Ташкинов // *Вестник СГТУ*. – 2012. - № 4. – С. 222-226.
7. Мирсяяпов, И. Т. Выбор типа фундаментов и оснований многофункционального комплекса «Фатих, Амир и Хан» по ул. Фатыха Амирхана г. Казани/ И. Т. Мирсяяпов, И. Ф. Шакиров // *Известия КГАСУ*. – 2015. - №3. – С. 86 – 92
8. Пронозин Я.А., Степанов М.А., Волосюк Д.В., Шуваев А.Н., Рыбак Г.И. Опыт устройства фундаментов зданий повышенной этажности в условиях юга Тюменской области // *Вестник МГСУ* // 2018 - Том. 13 - Вып. 3 (114) - С. 282–292.
9. Степанов, М. А. Устранение прогрессирующего развития неравномерности осадок многоэтажного жилого дома на ленточных свайных фундаментах/ М. А. Степанов [и др.] // *НАУКОВЕДЕНИЕ: Интернет-журнал*. – 2017. - Том 9. - №4.
10. Улицкий, В. М. Основы совместных расчетов зданий и оснований» / В. М. Улицкий, А. Г. Шашкин, К. Г. Шашкин, В. А. Шашкин. – СПб: Изд-во ин-та «Геореконструкция», 2014. – 328 с.
11. Шашкин, А.Г., Шашкин К. Г. Расчет фундаментных плит в пространственной постановке с учетом нелинейных деформаций основания / А. Г. Шашкин, К. Г. Шашкин // *Реконструкция городов и геотехническое строительство*. – 2000. - №3. – С. 42-46.
12. Шашкин, К. Г. Использование упрощенных моделей основания для решения задач совместного расчета оснований и конструкций сооружения/ К. Г. Шашкин // *Реконструкция городов и геотехническое строительство*. – 1999. - №1. – С. 57-62.
13. Gridnev S.Yu. Analyzing the features of oscillations of a floating bridge under a moving load in view of non-linear effects of end supports // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture* / - 2014.- № 3 (23) - С. 75-83.
14. Гриднев, С. Ю. Моделирование конструктивно-нелинейных колебаний наплавных мостов неразрезной системы с ограничительными жесткими опорами в концевых частях под действием подвижной нагрузки/ С. Ю. Гриднев // *Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений: Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та*. - 2004. - № 1. - С. 72-77.
15. Gridnev, S. Yu., Volkov V. V., Budkovoy A. N. In-situ measurements of vibrations of elastically supported steel reinforced concrete bridge during car braking // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture* / - 2011. - № 1 (9). - С. 11-23.



## References

1. SP 22.13330.2011 "Foundations of buildings and structures. Updated version of SNiP 2.02.01-83\*."
2. Ter-Martirosyan Z.G., Telichenko V.I., Korolev M.V. Problems of soil mechanics, bases and foundations in the construction of multifunctional high-rise buildings. Bulletin of MGSU. 2006. Pp. 18-27.
3. Shulyatiev O.A. Foundations of high-rise buildings. Bulletin of PNRPU. Construction and Architecture. No. 4. 2014. Pp. 203-245.
4. Lin, Lan & Hanna, Adel & Sinha, Anup & Tirca, Lucia. High-rise building completed to excessive settlement of its foundation: A case study. International Journal of Structural Integrity. 2017. 8.10.1108. IJSI-05-2016-0019.
5. Mirsayapov I.T., Nurieva D.M. Numerical studies of the sediment foundations of the deep foundations of high rise buildings. News of KSUAE. No. 4. 2015. Pp. 183-190.
6. Gusev G.N., Tashkinov A.A. Mathematical modeling of systems. Building - foundation - soil foundation. Bulletin of SSTU. No. 4. 2012. Pp. 222-226.
7. Mirsayapov I.T., Shakirov I.F. The choice of the type of foundations and foundations of the multifunctional complex "Fatih, Amir and Khan" on Fatykh Amirkhan street of Kazan. News of KSUAE. No. 3. 2015. Pp. 86-92.
8. Pronozin Ya.A., Stepanov M.A., Volosyuk D.V., Shuvaev A.N., Rybak G.I. The experience foundations of buildings with increased number of storeys in the conditions of the south of Tyumen region. Bulletin of MGSU. Vol. 13. Issue 3(114). 2018. Pp. 282-292.
9. Stepanov M.A., Maltseva T.V., Kraev A.N., Bartolomei L.A., Karaulov A.M. Elimination of the progressive development of uneven precipitation of a multi-storey residential building on strip pile foundations. SCIENCE: Internet Journal. Vol. 9. No. 4. 2017.
10. Ulitsky V.M., Shashkin A.G., Shashkin K.G., Shashkin V.A. Fundamentals of joint calculations of buildings and foundations. St. Petersburg: Publishing House of the Georeconstruction Institute, 2014. 328 p.
11. Shashkin A.G., Shashkin K.G. Calculation of foundation slabs in a spatial setting taking into account nonlinear base deformations. City reconstruction and geotechnical construction. No. 3. 2000. Pp. 42-46.
12. Shashkin K.G. The use of simplified foundation models for solving the problems of joint calculation of foundations and building structures. Reconstruction of cities and geotechnical construction. No. 1. 1999. Pp. 57-62.
13. Gridnev S.Yu. Analyzing the features of oscillations of a floating bridge under a moving load in view of non-linear effects of end supports. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. No. 3(23). 2014. Pp. 75-83.
14. Gridnev S.Yu. Modeling of structural-nonlinear vibrations of floating bridges of a continuous system with restrictive rigid supports in the end parts under the action of a moving load. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Modern methods of static and dynamic calculation of buildings and structures. No. 1. 2004. Pp. 72-77.

15. Gridnev S.Yu., Volkov V.V., Budkovoy A.N. In-situ measurements of vibrations of elastically supported steel reinforced concrete bridge during car braking. Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. No. 1(9). 2011. Pp. 11-23.

## SOIL FOUNDATION OPTIMIZATION FOR DEFLECTED MODE CALCULATION OF A HIGH STOREY BUILDING

S. Yu. Gridnev<sup>1</sup>, N. E. Garry<sup>2</sup>, V. A. Ostretsov<sup>3</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,3</sup>  
Russia, Voronezh  
Nigeria<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Dr. of Tech. Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230, e-mail: [gridnev\\_s\\_y@rambler.ru](mailto:gridnev_s_y@rambler.ru)

<sup>2</sup> MA Student of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(908)1392636, e-mail: [harryndifreke@yahoo.com](mailto:harryndifreke@yahoo.com)

<sup>3</sup> Student of the Department of Building Structures, Bases and Foundations, e-mail: [ostretsov.v.a.191@gmail.com](mailto:ostretsov.v.a.191@gmail.com)

---

The optimal dimensions of the soil base are determined according to the selected criteria for assessing the deflected mode (VAT) of a building of high number of storeys with a complex configuration in plan on the basis of loess soils. A finite element model of a high-rise building together with a soil base is described. The maximum displacements of the soil under the sole of the foundation slab, the longitudinal stresses in the columns and the bending moments in the foundation slab are proposed as criteria for optimizing the size of the soil base. An assessment of the effect of accounting for the soil base and its size on the final calculation results in the Midas GTS NX software package is carried out. The necessity of performing calculations taking into account the soil base is shown. The boundaries of the application of the "building-soil foundation" model are determined, due to the required accuracy of calculations, ease of use, optimal calculation time, low labor costs when creating and preparing the model for calculation. A formula is recommended for determining the optimal size of the soil base for practical calculations.

**Keywords:** high number of storeys, foundation settlement, soil foundation, size of soil foundation, deflected mode, finite-element model.

М. С. Ким<sup>1</sup>, Е. В. Гопиенко<sup>2</sup>Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доц., доцент кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов  
тел: +7(920) 4689136; e-mail: [mar skim@yandex.ru](mailto:mar skim@yandex.ru)

<sup>2</sup>Магистрант кафедры строительных конструкций, оснований и фундаментов

---

Изучен процесс взаимного влияния плитного и ленточного свайного фундаментов двух близко расположенных зданий. Проведены экспериментальные исследования в пространственном лотке и численное моделирование лоткового эксперимента. Рассмотрены случаи моделирования возведения нового здания на плитном фундаменте вблизи существующего на ленточном свайном фундаменте и возведения нового здания на ленточном свайном фундаменте вблизи существующего на плитном фундаменте. Определены дополнительные деформации моделей существующих фундаментов от действия нового строительства, выявлены закономерности их появления и зависимость от расстояния между моделями. Выявлены дополнительные осадки и крены моделей фундаментов.

**Ключевые слова:** уплотненная застройка, свайный фундамент, плитный фундамент, взаимное влияние фундаментов, дополнительные деформации, моделирование.

### Введение

Уплотненная застройка - одна из современных тенденций в развитии крупных городов. Такая направленность появилась достаточно давно, но со временем не потеряла своей актуальности. Реконструкция зданий или строительство новых в непосредственной близости от существующих может привести к дефектам, значительным деформациям, к нарушению безопасности эксплуатации. Именно поэтому проектировщики должны предусматривать меры, которые позволят уменьшить влияние нового строительства на существующие сооружения.

Важнейшей задачей при проектировании в условиях стесненной застройки является прогнозирование и предупреждение появления дополнительных ненормативных осадок, кренов, выпоров, трещин.

При проектировании зданий в непосредственной близости от других объектов необходимо учитывать, что перераспределение напряжений в основаниях напрямую влияет на увеличение напряжений под первоначальным сооружением. В результате этого существующее сооружение может получить ненормативные деформации: осадки, крены или перекосы. Это ведёт к перераспределению усилий в надземных частях здания. Итогом всех этих процессов может стать образование трещин в зданиях, нарушение условий нормальной эксплуатации и даже разрушение.

Изучению величины и характера этих деформаций, а также их последствий был посвящен ряд исследований [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], наибольшее количество которых касалось фундаментов мелкого заложения, в частности ленточных фундаментов зданий, составляющих типовую застройку жилых кварталов. Гораздо меньше данных о взаимном влиянии свайных фундаментов и фундаментов мелкого заложения. Выявлено, что строительство зданий на мелкозаглубленных фундаментах вблизи зданий со свайными фундаментами может привести к существенным неравномерным осадкам последних. Причиной этому является отрицательное трение, возникающее между свайей и грунтом основания [2].

Плитные фундаменты, нашедшие в настоящее время самое широкое применение в строительстве, оказывают еще более значительное влияние на соседние сооружения, так как зона влияния фундамента соизмерима с глубиной сжимаемой толщи, а у плитных фундаментов она может достигать 20-30 м [8].

Данная работа посвящена изучению процесса взаимного влияния плитного и ленточного свайного фундаментов двух близко расположенных зданий. Рассмотрены два случая: моделирование дополнительных деформаций существующего здания на свайном ленточном фундаменте при строительстве в непосредственной близости сооружения на плитном фундаменте и дополнительных деформаций существующего здания на плитном фундаменте при строительстве в непосредственной близости сооружения на свайном ленточном фундаменте.

### 1. Экспериментальные исследования взаимного влияния свайного и плитного фундаментов в рамках модельного эксперимента

В рамках модельного эксперимента были исследованы особенности и закономерности развития дополнительных осадок зданий на свайных ленточных фундаментах при возведении в непосредственной близости от них зданий на плитных фундаментах и зданий на плитных фундаментах при возведении в непосредственной близости от них зданий на свайных ленточных фундаментах. Изучалась степень влияния давления, прикладываемого к фундаменту возводимого здания на развитие дополнительных осадок существующего объекта и влияние расстояния между возводимым и существующим сооружениями на дополнительные осадки существующего объекта.

Эксперименты проводились в лаборатории Центра коллективного пользования ВГТУ имени проф. Ю. М. Борисова. Использовался пространственный лоток размерами 2,5х2,5х3 м.

Модель ленточного свайного фундамента была выполнена из стали толщиной 3 мм. Для модели свай использовались трубы с запаянным концом. Длина свай 400 мм, диаметр 40 мм. Размеры ростверка 320х60х80 мм.

Модель плитного фундамента представляла собой штамп размером 35х35 см, толщиной 20 мм. Модели устанавливались на расстоянии  $L = 0,2b; 0,5b; 0,75b$ , где  $b$  – ширина штампа.

В качестве основания использовался песок средней крупности. Для обеспечения однородности грунта основания в каждой серии испытаний песок после завершения опыта извлекался из лотка, после чего вновь укладывался в него для проведения следующего опыта. Уплотнение песка в лотке производилось с помощью ручной трамбовки слоями толщиной 10-15 см.

Значения прочностных и деформационных характеристик песчаного основания определялись в лаборатории ВГТУ в соответствии с требованиями нормативных документов. Значения физико-механических характеристик грунтового массива указаны в таблице. Модуль деформации по результатам проведенных испытаний составил  $E = 9,6$  МПа.

Таблица

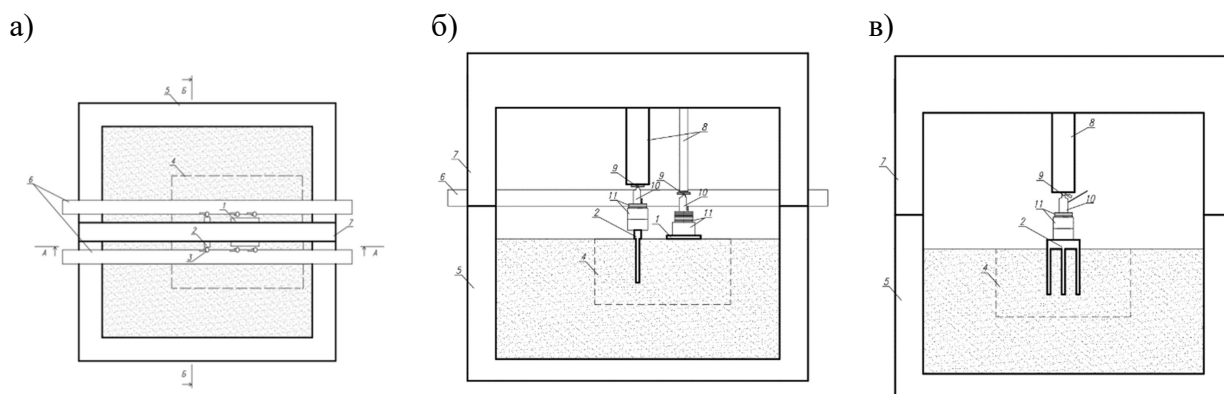
Значения физико-механических характеристик грунтового массива

Номенклатура грунтов	Плотность, г/см <sup>3</sup>	Плотность частиц грунта, г/см <sup>3</sup>	Плотность скелета грунта, г/см <sup>3</sup>	Влажность природная, W, %	Коэф. Пористости, e	Коэф. Водонасыщения Sr	Уд. Сцепление Cn кПа	Угол внутреннего трения фн, град
Песок средней крупности, неоднородный, средней плотности, малой степени водонасыщения	1,72	2,66	1,67	3,26	0,59	0,145	1,6	36,8

Было проведено 8 модельных экспериментов. Целью опытов являлось исследование закономерностей развития дополнительных осадок в зависимости от расстояния между моделями фундаментов и от нагрузки на них.

Нагружение моделей фундаментов производилось с помощью двух гидравлических домкратов. Осадки моделей фиксировались с помощью прогибомеров. К модели ленточного свайного фундамента крепилось 2 прогибомера, к модели фундаментной плиты – 4 прогибомера для фиксации крена.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Общий вид объемного стенда вместе с моделями фундаментов, а также измерительным и нагружающим оборудованием представлен на рис. 2. Точки крепления прогибомеров показаны на рис. 3.



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки:

а – в плане; б – разрез А-А; в – разрез Б-Б;

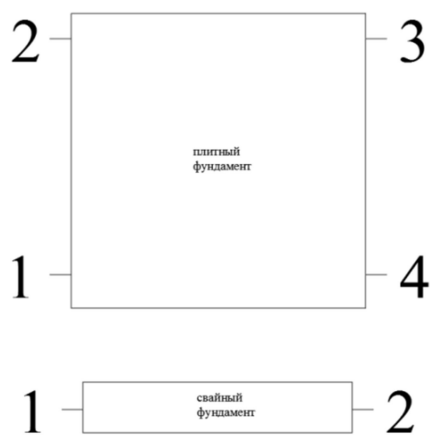
1 – модель плитного фундамента; 2 – модель ленточного свайного фундамента;

3 – прогибомеры Максимова; 4 – основание; 5 – лоток; 6 – швеллеры; 7 – нагружающая рама

При проведении экспериментального исследования использовалась следующая методика. Первоначально производилось нагружение отдельно модели ленточного свайного фундамента и плитного фундамента для определения их несущей способности.



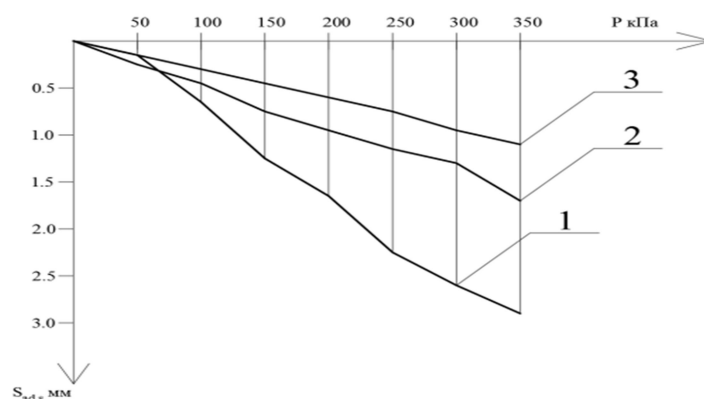
**Рис. 2.** Общий вид экспериментальной установки



**Рис. 3.** Схема расположения точек крепления прогибомеров

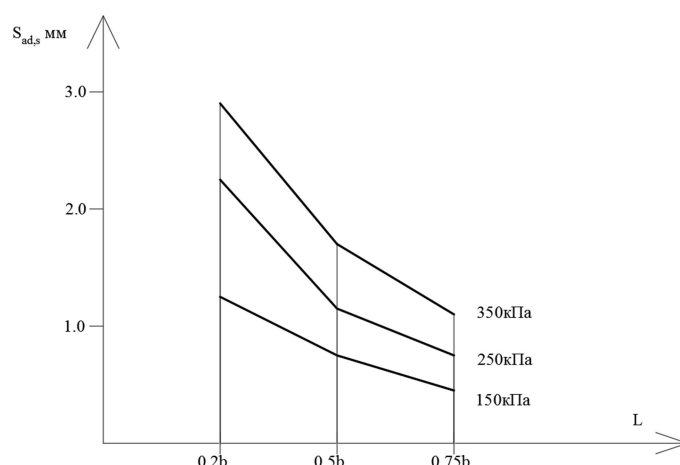
В первой серии опытов исследовалась зависимость дополнительной осадки ленточного свайного фундамента от давления по подошве модели фундаментной плиты и от расстояния между моделями фундаментов. Для этого на модель свайного ленточного фундамента подавалась нагрузка 7,56 кН и фиксировалась ее осадка. После стабилизации осадок модели ленточного фундамента к модели фундаментной плиты ступенями прикладывалось давление от 50 до 350 кПа. При давлении 350 кПа появились признаки исчерпания несущей способности основания штампа – трещины, расходящиеся от углов модели. Расстояние между моделями в разных опытах составляло  $0,2b$ ;  $0,5b$  и  $0,75b$ . В процессе опытов измерялись осадки модели свайного ленточного фундамента и осадки штампа.

Во всех опытах отмечалось появление дополнительной осадки модели ленточного свайного фундамента, которое было тем больше, чем меньше расстояние между моделями. Обобщенные графики зависимости развития дополнительных осадок  $S_{ad,s}$  модели ленточного свайного фундамента от давления по подошве модели фундаментной плиты показаны на рис. 4.



**Рис. 4.** Графики зависимости дополнительной осадки основания ленточного свайного фундамента от давления по подошве модели фундаментной плиты:  
1 – при  $L = 0,2b$ ; 2 – при  $L = 0,5b$ ; 3 – при  $L = 0,75b$

Зависимость дополнительной осадки  $S_{ad,s}$  основания ленточного свайного фундамента от расстояния между моделями фундаментов представлена на рис. 5.



**Рис. 5.** Графики зависимости дополнительной осадки основания ленточного свайного фундамента от расстояния  $L$  между моделями фундаментов:  
при  $P = 150$  кПа;  $P = 250$  кПа;  $P = 350$  кПа

Установлено, что дополнительная осадка основания ленточного свайного фундамента:

- увеличивается от 0,15 до 2,9 мм при изменении давления  $P$  на модель плиты от 50 до 350 кПа и  $L = 0,2b = const$ ;
- увеличивается от 0,2 до 1,7 мм при изменении давления  $P$  на модель плиты от 50 до 350 кПа и  $L = 0,5b = const$ ;
- увеличивается от 0,15 до 1,1 мм при изменении давления  $P$  на модель плиты от 50 до 350 кПа и  $L = 0,75b = const$ ;
- уменьшается от 2,9 до 1,1 мм при изменении  $L$  от  $0,2b$  до  $0,75b$  и  $P = 350$  кПа =  $const$ ;
- уменьшается от 2,2 до 0,75 мм при изменении  $L$  от  $0,2b$  до  $0,75b$  и  $P = 250$  кПа =  $const$ ;
- уменьшается от 1,25 до 0,45 мм при изменении  $L$  от  $0,2b$  до  $0,75b$  и  $P = 150$  кПа =  $const$ .

Вторая серия опытов была посвящена исследованию зависимости дополнительной осадки модели плитного фундамента от нагрузки, приложенной к модели свайного ленточного фундамента и от расстояния между моделями фундамента. Расстояние между моделями в опытах также составляло  $0,2b$ ;  $0,5b$  и  $0,75b$ .

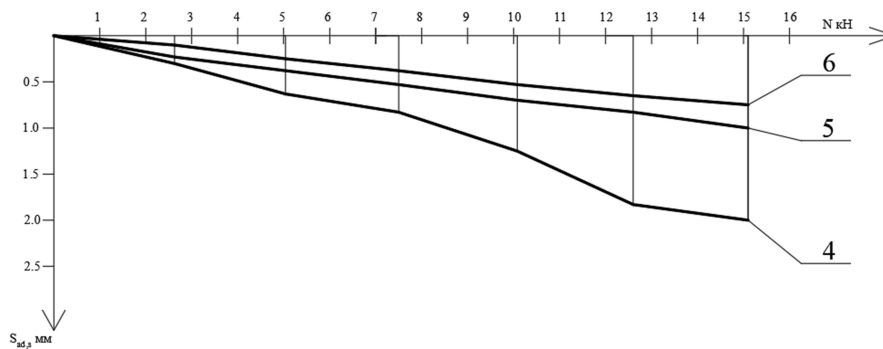
К модели плитного фундамента прикладывалась нагрузка  $150 \text{ кН/м}^2$ . После стабилизации ее осадок к модели ленточного свайного фундамента ступенями прикладывалась нагрузка от 2,52 до 15,12 кН.

В ходе нагружения во всех опытах модель ленточного свайного фундамента получала неравномерную осадку, а модель плитного фундамента – деформации крена  $i_{ad}$  в направлении к модели свайного фундамента. Также около углов модели фундаментной плиты с каждой стороны появлялись трещины.

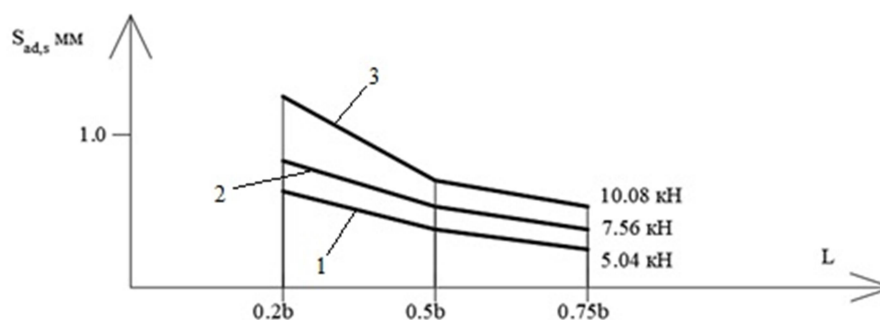
Для анализа данных, полученных в результате проведения экспериментального моделирования, построены обобщенные графики зависимости развития дополнительных осадок модели плитного фундамента от нагрузки, приложенной к модели ленточного свайного фундамента и от расстояния между моделями рассматриваемых фундамента  $L$  соответственно (рис. 6 - 7).

Таким образом, установлено, что величина дополнительной осадки модели плитного фундамента:

- увеличивается от 0,02 до 0,2 мм при изменении нагрузки  $N$  на модель ленточного свайного фундамента от 2,5 до 15,02 кН и  $L = 0,2b = const$ ;
- увеличивается от 0,0225 до 0,1 мм при изменении нагрузки  $N$  на модель ленточного свайного фундамента от 2,5 кН до 15,02 кН и  $L = 0,5b = const$ ;
- увеличивается от 0,01 до 0,075 мм при изменении нагрузки  $N$  на модель ленточного свайного фундамента от 2,5 до 15,02 кН и  $L = 0,75b = const$ ;
- уменьшается от 0,0625 мм до 0,025 мм при изменении  $L$  от  $0,2b$  до  $0,75b$  и  $N = 5,04$  кН =  $const$ ;
- уменьшается от 0,0825 до 0,0375 мм при изменении  $L$  от  $0,2b$  до  $0,75b$  и  $N = 7,56$  кН =  $const$ ;
- уменьшается от 0,125 до 0,065 мм при изменении  $L$  от  $0,2b$  до  $0,75b$  и  $N = 10,08$  кН =  $const$ .



**Рис. 6.** Графики зависимости дополнительной осадки основания плитного фундамента  $S_{ad,s}$  от нагрузки, приложенной к модели ленточного свайного фундамента:  
 $4 - L = 0,2b$ ;  $5 - L = 0,5b$ ;  $6 - L = 0,75b$



**Рис. 7.** Графики зависимости дополнительной осадки основания плитного фундамента  $S_{ad,s}$  от расстояния  $L$  между моделями фундаментов:  
 $1 - N = 5,04$  кН;  $2 - N = 7,56$  кН;  $3 - N = 10,08$  кН

## 2. Численное моделирование взаимного влияния свайного и плитного фундаментов

Для численного моделирования геотехнических задач наибольшее распространение получил метод конечных элементов [10, 11, 12, 13, 14]. На основе этого метода разработан целый ряд программных комплексов, позволяющих создавать численные модели сложнейших геотехнических сооружений и решать задачи по исследованию напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов при различных видах нагружения.

Численное моделирование взаимного влияния свайного и плитного фундаментов проводилось в условиях пространственной постановки в программном комплексе Midas GTS NX, ориентированном на решение геотехнических задач методом конечных элементов.

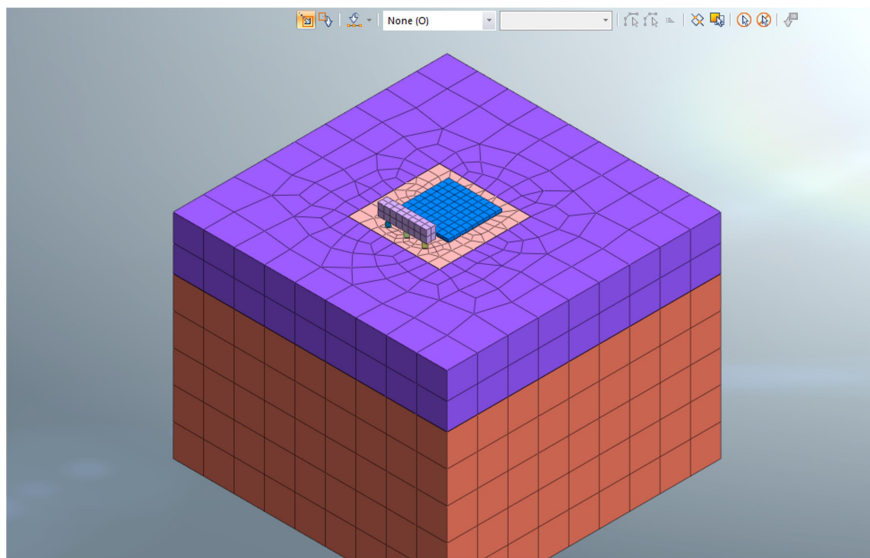
Для моделирования напряженно-деформированного состояния грунта была использована упруго-пластическая модифицированная модель Мора-Кулона. У данной модели есть ряд преимуществ перед обычной моделью Мора-Кулона: она дает более точные результаты (как осадок, так и кренов) в песчаных грунтах, наиболее приближенные к реальным.

Основные параметры, необходимые для осуществления моделирования, принимались по СП [9] с учетом разновидности грунта. Недостающие параметры модели были рассчитаны при помощи пособий и технических материалов, предоставленных Midas IT.

Модели плитного фундамента, сваи и ростверк ленточного свайного фундамента моделировались как линейно-упругий материал. Для моделирования свай использовались объемные элементы. В качестве материала для указанных моделей был выбран бетон класса В25 с соответствующими характеристиками:  $E = 3 \cdot 10^7$  кН/м<sup>2</sup>;  $\nu = 0,2$ ;  $\gamma = 25$  кН/м<sup>3</sup>.



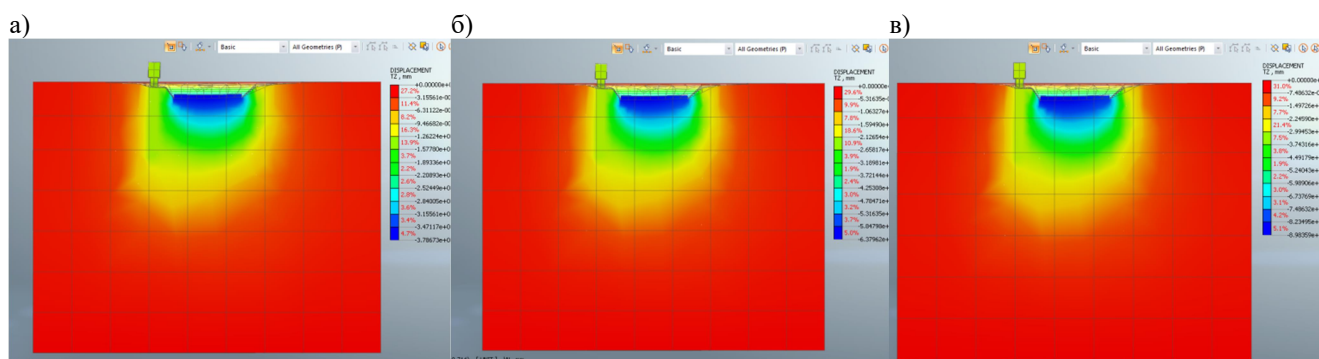
Осуществлялось численное моделирование описанных выше лотковых экспериментов. В объемном массиве создавались модели ленточного свайного и плитного фундаментов, которые находились друг от друга на расстоянии  $0,2b$ ,  $0,5b$ ,  $0,75b$ . Конечно-элементная модель представлена на рис. 8.



**Рис. 8.** Конечно-элементная модель массива грунта и моделей ленточного свайного и плитного фундаментов при расстоянии между ними  $L = 0,2b$

Производился стадийный расчет. В первой серии расчетов на первой стадии формировался грунтовый массив и обнулялись перемещения от собственного веса грунта. На второй стадии после создания модели ленточного свайного фундамента на неё передавалась нагрузка  $N = 7,56$  кН. На третьей стадии для более наглядного изучения развития дополнительных осадок существующего здания было повторно осуществлено обнуление деформаций основания. На четвертой стадии к созданной модели плитного фундамента прикладывалось давление ступенями по 50 кПа.

При численном исследовании получены изополя вертикальных перемещений и построены графики зависимости абсолютных и дополнительных осадок от давления на плитный фундамент или нагрузки на ленточный свайный фундамент. Изополя вертикальных перемещений при постоянной нагрузке на ленточный свайный фундамент и изменяющемся давлении на плитный фундамент при  $L = 0,2b$  представлены на рис. 9.

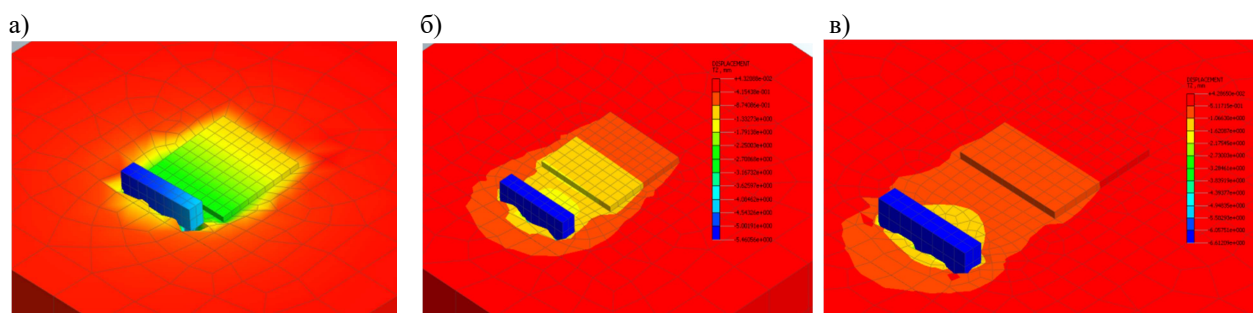


**Рис. 9.** Изополя вертикальных перемещений при постоянной нагрузке на ленточный свайный фундамент и давлении на плитный фундамент ( $L = 0,2b$ ):  
а –  $P = 150$  кПа; б –  $P = 250$  кПа; в –  $P = 350$  кПа

При численном, как и при экспериментальном, моделировании во всех случаях замечены: воронка оседания вокруг свай и плитного фундамента, дополнительная осадка модели свайного фундамента при возрастании давления на плитный, неравномерность осадки модели ленточного свайного фундамента при нагружении модели плитного фундамента, деформации крена плитного фундамента в сторону модели свайного фундамента.

Во второй серии расчетов на второй стадии после создания модели плитного фундамента на неё передавалось давление  $P = 150$  кПа. На третьей стадии также было повторно осуществлено обнуление деформаций основания. На четвертой стадии к созданной модели ленточного свайного фундамента прикладывалась нагрузка  $N$  ступенями по 2,52 кН от 2,52 до 15,12 кН.

При численном исследовании также получены изополя вертикальных перемещений и построены графики зависимости абсолютных и дополнительных осадок от давления на плитный фундамент или нагрузки на ленточный свайный фундамент. Изополя вертикальных перемещений при постоянном давлении на плитный фундамент  $P = 150$  кПа и нагрузке на ленточный свайный фундамент  $N = 15,2$  кН при  $L = 0,2b$ ;  $0,5b$  и  $0,75b$  представлены на рис. 10.



**Рис. 10.** Изополя вертикальных перемещений при постоянном давлении на плитный фундамент  $P = 150$  кПа и нагрузке на ленточный свайный фундамент  $N = 15,2$  кН:  
а –  $L = 0,2b$ ; б –  $L = 0,5b$ ; в –  $L = 0,75b$

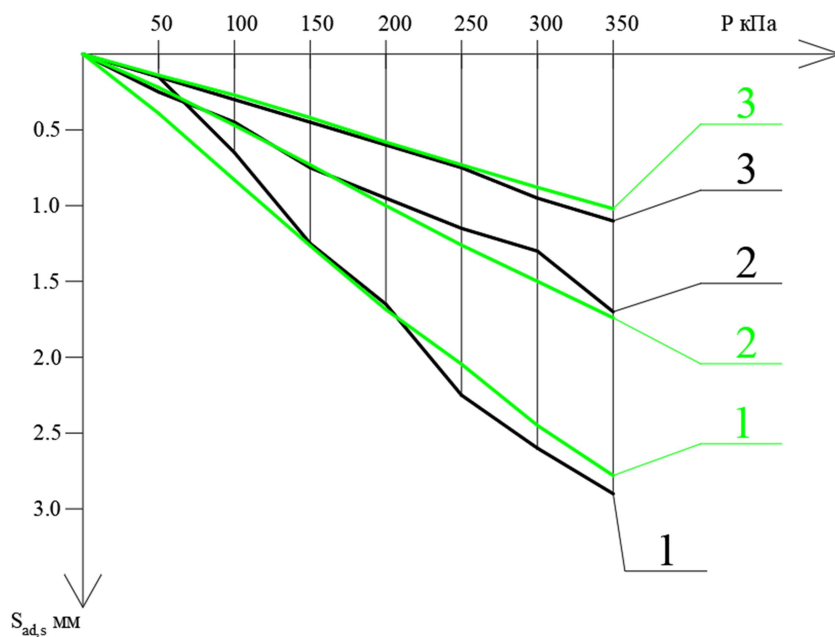
При численном, как и при экспериментальном, моделировании во всех случаях замечены: воронка оседания вокруг свай и плитного фундамента, дополнительная осадка модели плитного фундамента при возрастании нагрузки на ленточный свайный, неравномерность дополнительной осадки модели плитного фундамента при нагружении модели ленточного свайного фундамента, деформации крена плитного фундамента в сторону модели свайного фундамента.

### 3. Сравнение результатов лоткового эксперимента и численного моделирования

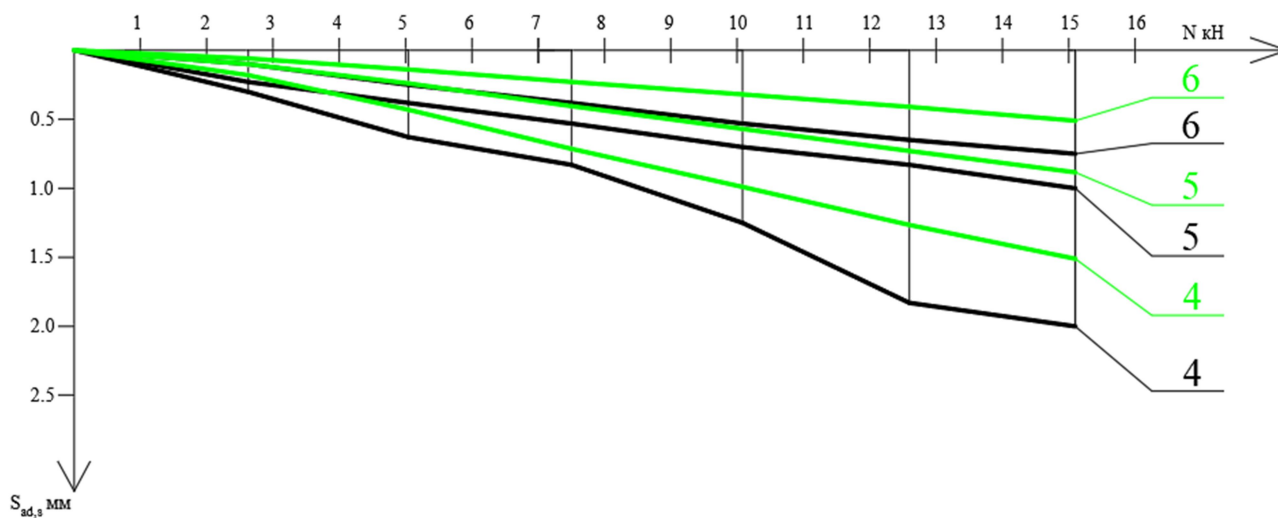
Сравнение результатов лоткового эксперимента и численного моделирования показало, что конечно-элементная модель полностью отражает качественную картину процессов, происходящих при появлении возрастающей нагрузки вблизи нагруженной модели.

Как в эксперименте, так и при численном моделировании отмечено возникновение воронки оседания вокруг свай и плитного фундамента, развитие дополнительной осадки моделей как плитного фундамента, так и ленточного свайного и крена плитного фундамента в сторону модели свайного фундамента при возрастании нагрузки на соседний фундамент.

При определении абсолютных величин осадок численный расчет дает завышение значений от 6,5 до 72 %, причем при увеличении нагрузки расхождение уменьшается. Однако дополнительные осадки, полученные в эксперименте и при численном моделировании, близки между собой и расхождение составляет от 1,3 до 4,3 % (рис. 11 - 12).



**Рис. 11.** Графики зависимости дополнительной осадки  $S_{ad,s}$  основания ленточного свайного фундамента от давления по подошве модели фундаментной плиты, полученные экспериментально и при численном моделировании:  
 1 – при  $L=0,2b$ ; 2 – при  $L=0,5b$ ; 3 – при  $L=0,75b$ ;  
 — экспериментальные данные;  
 — результаты численного моделирования



**Рис. 12.** Графики зависимости дополнительной осадки  $S_{ad,s}$  основания плитного фундамента от нагрузки на ленточный свайный фундамент, полученные экспериментально и при численном моделировании:  
 4 – при  $L=0,2b$ ; 5 – при  $L=0,5b$ ; 6 – при  $L=0,75b$ ;  
 — экспериментальные данные;  
 — результаты численного моделирования

## Выводы

1. Проведенными лотковыми экспериментами было установлено взаимное влияние, оказываемое ленточным свайным фундаментом на плитный фундамент и наоборот.
2. Доказано, что моделируемый ленточный свайный фундамент получает дополнительные осадки при нагружении основания модели плитного фундамента, находящегося вблизи него. Также и моделируемый плитный фундамент получает дополнительные осадки и крены при нагружении модели ленточного свайного фундамента, находящегося вблизи него. Дополнительная осадка тем меньше, чем больше расстояние между моделями (от  $0,2b$  до  $0,75b$ ).
3. Величина дополнительной осадки модели ленточного свайного фундамента возрастает при уменьшении расстояния между рассматриваемыми моделями  $L$  от  $0,75b$  до  $0,2b$  на 73 %.
4. Величина дополнительной осадки модели плитного фундамента возрастает при уменьшении расстояния между рассматриваемыми моделями  $L$  от  $0,75b$  до  $0,2b$  на 63 %.
5. Характер деформаций грунта и кренов фундамента идентичны при экспериментальном и численном моделировании. Наблюдается крен плитного фундамента в сторону свайного во всех опытах и численных расчетах.
6. Использование модифицированной модели Мора-Кулона при численных расчетах для моделирования песчаного основания дает значения осадок достаточно близкие к экспериментальным.
7. Увеличение расстояния между моделями рассматриваемых объектов до  $L = 0,75b$  способствует наименьшему развитию дополнительных осадок, однако данное расстояние не гарантирует безопасность эксплуатации близлежащих сооружений и невозможность возникновения аварийных ситуаций.
8. По данным лоткового эксперимента дополнительные осадки модели ленточного свайного фундамента в 1,5 раза больше, чем дополнительные осадки модели плитного фундамента при аналогичных условиях.

## Библиографический список

1. Далматов, Б.И. Проектирование и устройство фундаментов около существующих зданий / Б.И. Далматов – Л.: ЛДНТП, 1976. – 36 с.
2. Сотников, С.Н. Проектирование и возведение фундаментов вблизи существующих сооружений (Опыт строительства в условиях Северо-Запада СССР) / С.Н. Сотников, В.Г. Симагин, В.П. Вершинин. – М.: Стройиздат, 1986. – 96 с.
3. Сотников, С.Н. Из опыта исследования осадок крупнопанельных зданий на Васильевском острове в Ленинграде / С.Н. Сотников, В.П. Вершинин // Механика грунтов, основания и фундаменты: матер. XXXI науч. конф. –Л.: ЛИСИ, 1973. – С. 21-24.
4. Симагин, В.Г. Проектирование и устройство фундаментов вблизи существующих сооружений в условиях плотной застройки: учебное пособие/ В.Г. Симагин. – М.: АСВ, 2010. – 128 с.
5. Аль-Бухейти, А.Я. Экспериментально-теоретические исследования перемещений близко расположенных фундаментов при действии плоской системы сил/ А.Я. Аль-Бухейти, А.Б. Даниш, В.В. Леденев, Я.В. Савинов // Строительная механика и конструкции. – Вып. №4 (23). – 2019. – С. 93-107.
6. Даниш, А. Б. Повреждения стен близко расположенных зданий вследствие взаимного влияния их фундаментов/ А.Б. Даниш, А.Я. Аль-Бухейти, В.В. Леденев, Я.В. Савинов// Строительная механика и конструкции.- Вып. №2 (21). – 2019. - С. 109-117.

7. Ильичев, В.А. Влияние строительства заглубленных сооружений на существующую историческую застройку в Москве / В.А. Ильичев, П.А. Коновалов, Н.С. Никифорова// Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2001. – №4 – С. 19-24.
8. Проектирование фундаментов зданий и подземных сооружений: учеб. пособие / под ред. Б.И. Далматова. - 3-е изд. – М.: Изд-во АСВ, 2006. – 428 с.
9. СП 22.13330.2016. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83\*. – М., 2017 – 228 с.
10. Фадеев, А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике/ А.Б. Фадеев – М., Недра, 1987. –221 с.
11. Ухов, С.Б. Расчет сооружений и оснований методом конечных элементов / С.Б. Ухов. – М.: МИСИ, 1973. – 118 с.
12. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы /Р. Галлагер – М.: Мир, 1984. – 428 с.
13. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
14. Сегерлинд, С. Применение метода конечных элементов / С. Сегерлинд. - М.: Мир, 1979. – 392 с.

#### References

1. Dalmatov B.I. Design and installation of foundations near existing buildings. L.: LDNTP, 1976. 36 p.
2. Sotnikov S.N., Simagin V.G., Vershinin V.P. Design and construction of foundations near existing structures (Construction experience in the North-West of the USSR). M.: Stroyizdat, 1986. 96 p.
3. Sotnikov S.N., Vershinin V.P. From the experience of research on the sediment of large-panel buildings on Vasilievsky Island in Leningrad. Soil mechanics, foundations, and foundations: Mater. XXXI scientific conf. L.: LISI, 1973. Pp. 21-24.
4. Simagin V.G. Design and installation of foundations near existing structures in the context of dense buildings: a training manual. M.: DIA, 2010. 128 p.
5. Al-Buheiti A.Ya., Danish A.B., Ledenev V.V., Savinov Y.V. Experimental-theoretical studies of displacements of closely spaced foundations under the action of a flat system of forces. Structural mechanics and construction. No. 4(23). 2019. Pp. 93-107.
6. Danish A.B., Al-Buheiti A.Ya., Ledenev V.V., Savinov Y.V. Damage to the walls of closely spaced buildings due to the mutual influence of their foundations. Structural mechanics and construction. No. 2(21). 2019. Pp. 109-117.
7. Ilyichev V.A., Kononov P.A., Nikiforova N.S. The influence of the construction of buried structures on the existing historical buildings in Moscow. Foundations, foundations and soil mechanics. No. 4. 2001. Pp. 19-24.
8. Dalmatova B.I. Designing the foundations of buildings and underground structures: textbook. M.: DIA Publishing House, 2006. 428 p.
9. SP 22.13330.2016. Foundations of buildings and structures. Updated edition of SNIIP 2.02.01-83\*. M., 2017. 228 p.
10. Fadeev A.B. The finite element method in geomechanics. M.: Nedra, 1987. 221 p.
11. Ukhov S.B. Calculation of structures and foundations by the finite element method. M.: MISI, 1973. 118 p.
12. Gallagher R. Finite Element Method. Basics. M.: Mir, 1984. 428 p.
13. Zenkevich O. The finite element method in technology. M.: Mir, 1975. 542 p.
14. Segerlind S. Application of the finite element method. M.: Mir, 1979. 392 p.

# INTERFERENCE OF PILE AND PANEL-WALL FOUNDATIONS

M. S. Kim<sup>1</sup>, E.V. Gopienko<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup>PhD of Tech. Sciences, Associate Professor of the Department of Building Structures, Bases and Foundations,  
Tel.: +7(920)4689136; e-mail: [marskim@yandex.ru](mailto:marskim@yandex.ru)

<sup>2</sup>MA Student of the Department of Building Structures, Bases and Foundations

---

The process of the interference of the panel-wall and strip pile foundations of two closely located buildings is studied. Experimental studies in the spatial tray and numerical simulation of the tray experiment were carried out. Cases of modeling the construction of a new building on the panel-wall foundation near the existing on the strip pile foundation and the construction of a new building on a strip pile foundation near an existing on the panel-wall foundation are considered. Additional deformations of models of existing foundations from the action of new construction are determined, patterns of their appearance and dependence on the distance between models are revealed. Additional precipitation and rolls of foundation models have been identified.

**Keywords:** compacted building, pile foundation, panel-wall foundation, interference of foundations, additional deformations, modeling.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.  
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
  - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
  - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
  - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
  - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
  - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
  - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
  - 3.7. Текст статьи;
  - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
  - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
  - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).  
Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографический список. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ, СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru).