

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научный журнал**

**Выпуск № 1 (24), 2020**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

**Воронеж**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения — Российская Федерация.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В. С.**, д-р техн. наук, проф.,

Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора: Козлов В. А.**, д-р физ.-мат. наук, проф.,

Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь: Габриелян Г. Е.**, канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Буренин А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре

**Гриднев С. Ю.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Зверев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

**Ефрюшин С. В.**, канд. техн. наук, доцент, Воронежский государственный технический университет

**Кирсанов М. Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»

**Колчунов В. И.**, д-р техн. наук, проф., академик РААСН, Юго-Западный государственный университет

**Леденев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет

**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам

**Нугужинов Ж. С.**, д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан

**Овчинников И. Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет

**Пшеничкина В. А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет

**Трещев А. А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет

**Турищев Л. С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь

**Шапиро Д. М.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Шимановский А. О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

**Шитикова М. В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., советник РААСН, Воронежский государственный технический университет

Редактор: Аграновская Н.Н.

Подписной индекс в каталоге агентства «Роспечать» - 66004

Дата выхода в свет 23. 03. 2020. Усл. печ. л. 11,6. Формат 60×84/8. Тираж 500 экз. Заказ № 52.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 – 72895 от 22. 05. 2018 г.

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

(строительный факультет, кафедра строительной механики)

тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»

394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2020

**STRUCTURAL MECHANICS  
AND STRUCTURES**

**Scientific Journal  
ISSUE № 1 (24), 2020**

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of mechanics of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic effect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

**Voronezh**

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.  
Territory of distribution — Russian Federation.

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Kozlov V.A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G.E.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,  
Voronezh State Technical University

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

**Burenin A.A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur

**Gridnev S.Yu.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Zverev V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

**Efryushin S.V.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Voronezh State Technical University

**Kirsanov M.N.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

**Kolchunov V.I.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Academician of RAACS, South-West State University

**Ledenyov V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Tambov State Technical University

**Nguyen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam

**Nuguxhinov Zh.S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan

**Ovchinnikov I.G.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University

**Pshenichkina V.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University

**Trechshev A.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University

**Turichshev L.S.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus

**Shapiro D.M.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Shimanovsky A.O.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus

**Shitikova M.V.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Adviser of RAACS, Voronezh State Technical University

Editor: Agranovskaja N. N.

Subscription index in agency catalogue «Rospechat» - 66004

Publication date 23. 03. 2020. Conventional printed sheets 11,6. Format 60×84/8. Numbers of copies 500. Order № 52.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate ПИ № ФС 77 - 72895 от 22.05. 2018 г.

Price is subject to change

---

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation  
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)  
Tel.: +7(473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University  
84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

© Voronezh State Technical University, 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

### **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Трецов А. А.**

Тонкостенные цилиндрические оболочки как объект экспериментального определения механических свойств конструкционных материалов (всегда ли допустимы классические представления при испытании трубчатых образцов) .... 7

**Кирсанов М. Н.**

Формула для основной частоты колебания многопролетной фермы ..... 19

**Воробьев О. В.**

О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций ..... 25

### **РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

**Сафронов В. С., Антипов А. В.**

Оценка динамических качеств металлического автодорожного моста по данным натурных испытаний и поверочных расчетов ..... 39

**Козлов А. В., Козлов В. А., Хорохордин А. М., Чураков П. П.**

Экспериментальные исследования сдвиговой жесткости стыка сталежелезобетонной конструкции с гибкими штыревыми упорами ..... 54

**Волков В. В., Горячев В. Н., Ордян М. Г.**

Магниторезистивный метод измерений напряжено-деформированного состояния подвесок и вант мостовых сооружений..... 63

### **РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ**

**Кузнецов Д. Н., Емельянов Д. И., Павленко Т. М.**

Силовая сэндвич-панель поэлементной сборки ..... 70

### **РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ**

**Антонов В. М., Колодкин А.В., Леденев В. В., Дык Ч. К.**

Экспериментальные исследования ползучести песчаного основания при действии на фундамент плоской системы сил ..... 85

**Правила оформления статей** ..... 100

## CONTENT

### ***STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS***

***A. A. Treschev***

Thin-walled cylindrical shells as an object of the experimental determination of constructional materials mechanical properties (are the classical test representations of tubular samples always acceptable)..... 7

***M. N. Kirsanov***

Formula for the main oscillation frequency of a multi-span truss..... 19

***O.V. Vorobyev***

About methods of obtaining analytical solution for eigenfrequencies problem of truss... 25

### ***CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES***

***V. S. Safronov, A.V. Antipov***

Evolution of dynamic qualities of a metal road bridge according to data of natural tests and test calculations..... 39

***A. V. Kozlov, V. A. Kozlov, A. M. Khorokhordin, P. P. Churakov***

Experimental research of shear joint stiffness for a reinforced concrete structure with flexible pines..... 54

***V. V. Volkov, V. N. Goryachev, M. G. Ordyan***

Magnetic-resistive method of measuring the deflected mode of suspended and cable stayed bridge structures..... 63

### ***CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES***

***D. N. Kuznetsov, D. I. Emelyanov, T. M. Pavlenko***

Power sandwich panel of the elemental assembly..... 70

### ***CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES***

***V. M. Antonov, A. V. Kolodkin, V. V. Ledenev, C. Q. Duc***

Experimental studies of a sandy base creep under the action of a flat system of forces on the foundation..... 85

**Requirements for articles to be published ..... 100**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3:624.073

## ТОНКОСТЕННЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ОБОЛОЧКИ КАК ОБЪЕКТ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ (ВСЕГДА ЛИ ДОПУСТИМЫ КЛАССИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРИ ИСПЫТАНИИ ТРУБЧАТЫХ ОБРАЗЦОВ)

А. А. Трещев<sup>1</sup>

Тульский государственный университет<sup>1</sup>  
Россия, г. Тула

---

<sup>1</sup> Чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф. кафедры строительства, строительных материалов и конструкций, тел.: +7(905)-622-90-58, e-mail: taa58@yandex.ru

---

Анализируются классические методики испытания тонкостенных цилиндрических оболочек (трубчатых образцов) с целью подтверждения обобщенного закона Гука, определения фаз напряжений и деформаций, а также других параметров напряженно-деформированного состояния материалов. Показано, что традиционные методики экспериментального определения деформаций, предполагающие независимость законов изменения объема и формы, а также базирующиеся на гипотезе совпадения фаз напряжений и деформаций не всегда дают надежные результаты. Продемонстрировано, что классический подход к измерению деформаций и обработке экспериментальных данных для широкого круга композитных материалов может привести к неточностям, связанным с несовпадением фаз напряженного и деформированного состояний, а также с фактической взаимосвязью законов изменения объема и формы материалов, механические свойства которых зависят от вида напряженного состояния.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, трубчатые образцы, модули упругости, коэффициенты поперечной деформации.

Исторически в научной литературе, освещающей вопросы экспериментального определения свойств строительных и машиностроительных материалов, сложилось представление об универсальности испытаний тонкостенных трубчатых образцов (цилиндрических оболочек). Эти же образцы служили надежным объектом для проверки выдвигаемых гипотез, принимаемых при постулировании законов деформирования конструкционных материалов.

Конструкция трубчатых образцов в виде цилиндрических оболочек принимается такой, чтобы концы их можно жестко закреплять в инвентарных захватах испытательной машины (рис. 1). Приспособления машины обеспечивают контролируемо изменяемое воздействие на оболочку продольного усилия  $N$ , равномерного давления изнутри  $q$  и крутящих моментов  $M$ . Длина расчетной тонкостенной цилиндрической части образца принимается не менее пятикратного диаметра срединной поверхности оболочки.

При испытаниях и обработке экспериментальных данных принимается распределение напряжений по толщине оболочки равномерным, так что, имея величину внешнего силового воздействия, легко рассчитать напряжения. Принимая направление оси  $x_1$  вдоль образующей оболочки, оси  $x_2$  - по направляющей, а оси  $x_3$  - по толщине (ортогонально срединной поверхности цилиндрической оболочки, можно вычислить компоненты тензора напряжений в пределах расчетной части образца по формулам:

---

© Трещев А. А., 2020

$$\sigma_{11} = N / (\pi h_0 d_0); \quad \sigma_{22} = d_0 q / (2 h_0); \quad \tau_{12} = 2 M / (\pi h_0 d_0^2); \quad \sigma_{33} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0, \quad (1)$$

где  $d_0$  – диаметр срединной поверхности оболочки;  $h_0$  – начальная толщина стенки оболочки.

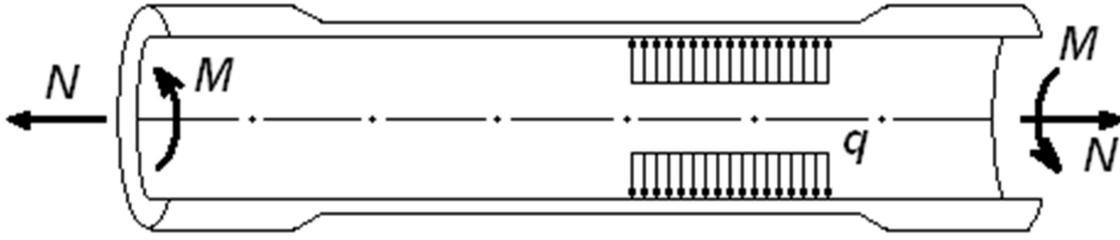


Рис. 1. Классический экспериментальный трубчатый образец

Известно, что параметры напряженного состояния (1) на расчетной цилиндрической части, полученные в результате обработки результатов испытания трубчатых образцов, называются контролируемыми [1 – 3]. Очевидно, что изменение по заданной программе соотношений внешних воздействий приводит к достижению наперед заданных значений определяемых компонентов напряжений. Известно [1 – 15], что в точках тонкостенных цилиндрических оболочек наиболее просто достигаются максимально однородные напряженные состояния, в которых можно произвольно менять три из шести независимых параметров тензора напряжений. При этом изменение соотношений между указанными напряжениями путем регулирования внешних воздействий позволяет пройти полный интервал существования фаз напряжений.

Измеряя внешние воздействия и вычисляя по ним напряжения (1), можно определить универсальные инварианты, связанные с девиаторной площадкой:

$$\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22}) / 3; \quad 4,5\tau^2 = \sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\tau_{12}^2;$$

$$\tau^3 \text{Cos}3\varphi = -\sqrt{2}\sigma(\sigma_{11} - \sigma)(\sigma_{22} - \sigma), \quad (2)$$

где  $\text{Cos}3\varphi = \sqrt{2} \det S_{ij} / \tau^3$  – фазовый инвариант;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$  – девиатор тензора напряжений.

При экспериментальном исследовании механических свойств материалов намечают отдельные упрощенные программы испытаний:  $N$ -опыты;  $q$ -опыты;  $M$ -опыты. Затем проводят комбинированные испытания:  $N$ - $q$ -опыты;  $N$ - $M$ -опыты;  $q$ - $M$ -опыты;  $N$ - $M$ - $q$ -опыты. По программе  $N$ -опытов, отличной от нуля, является только продольная сила, в связи с чем имеем

$$\sigma_{11} = N / (\pi h_0 d_0) = t; \quad \sigma_{22} = \tau_{12} = 0; \quad \sigma = t / 3; \quad \tau = \sqrt{2}|t| / 3; \quad \text{Cos}3\varphi = \text{Sign}(t). \quad (3)$$

По программе  $q$ -опытов отличными от нуля являются напряжения  $\sigma_{22}$ , т. е. получим

$$\sigma_{11} = \tau_{12} = 0; \quad \sigma_{22} = d_0 q / (2 h_0) = p; \quad \sigma = p / 3; \quad \tau = \sqrt{2}|p| / 3; \quad \text{Cos}3\varphi = \text{Sign}(p). \quad (4)$$

По программе  $M$ -опытов отличными от нуля являются напряжения  $\tau_{12}$ , а именно:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0; \quad \tau_{12} = 2M / (\pi h_0 d_0^2) = \tau_0; \quad \sigma = 0; \quad \tau = \sqrt{2/3}\tau_0; \quad \text{Cos}3\varphi = 0. \quad (5)$$

В случае комбинированных  $N$ - $q$ -опытов определяются следующие параметры напряженного состояния:

$$\sigma_{11} = N / (\pi h_0 d_0) = t; \quad \sigma_{22} = d_0 q / (2 h_0) = p; \quad \tau_{12} = 0; \quad \sigma = (t + p) / 3;$$

$$4,5\tau^2 = t^2 - tp + p^2; \quad (3\tau^3)\text{Cos}3\varphi = -\sqrt{2}(t + p)(2t - p)(2p - t). \quad (6)$$

Очевидно, что из  $N$ - $q$ -опытов при  $p = 0$  и  $t > 0$  имеем  $\varphi = 0$ , а при  $p > 0$  можно принять  $t = kp$  и когда  $k = -1$ , получим  $\sigma = 0$ ,  $\tau = \sqrt{2/3}p$ ,  $\varphi = \pi/6$ , что реализуется в случае чистого сдвига. При  $k = 1$  будем иметь  $\sigma = 2p/3$ ,  $\tau = \sqrt{2}p/3$ ,  $\text{Cos}3\varphi = -1$ . Таким

образом, видно, что уже в  $N\sim q$ -опытах можно исследовать весь диапазон изменения фазы напряжений.

Реализация однородного состояния цилиндрической оболочки при осевом сжатии осложняется вероятностью выпучивания ее стенки при достаточно больших сжимающих усилиях, а это нарушает чистоту эксперимента. Поэтому для экспериментального исследования даже классических материалов приходится проводить комбинированные опыты, в которых реализуются все возможные изменения фазы напряжений, вызванных в том числе крутящими моментами  $M$ .

Во всех указанных опытах кроме вычисления напряжений и их фаз в обязательном порядке выполняются измерения, позволяющие вычислять компоненты симметричного тензора деформаций и его инварианты. При этом деформации приближенно считаются однородными по толщине. Не возникает особых трудностей и при измерении продольных, поперечных и сдвиговых деформаций оболочки ( $e_{11}, e_{22}, 2e_{12} = \gamma_{12}$ ). Затруднения возникают при определении деформаций по толщине оболочки  $e_{33}$ . Это объясняется тем, что из-за малой базы точность замеров толщины в ходе деформирования заметно снижается, в связи с чем в большинстве экспериментальных работ [1 – 15] условно вычисляют  $e_{33}$  по априори принятому закону деформирования. В частности, приняв классический линейный закон объемного деформирования, получают

$$e_{33} = -(e_{11} + e_{22}) + (\sigma_{11} + \sigma_{22})/(3K), \quad (7)$$

где  $K = E/[3(1-2\nu)]$  – модуль объемной деформации;  $E, \nu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона, определенные, например, из опытов на осевое растяжение стержневых образцов.

Определив из экспериментов деформации  $e_{11}, e_{22}, 2e_{12} = \gamma_{12}$  и вычислив по условию (7) значения  $e_{33}$  с учетом  $e_{13} = e_{23}$ , можно получить результирующие универсальные инварианты деформаций:

$$e = (e_{11} + e_{22} + e_{33})/3; \quad 9\mathcal{E}^2 = (e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 + 6e_{12}^2; \quad \mathcal{E} = \gamma/2;$$

$$\mathcal{E}^3 \text{Cos} 3\beta = \sqrt{2} \begin{vmatrix} e_{11} - e & e_{12} & 0 \\ e_{12} & e_{22} - e & 0 \\ 0 & 0 & e_{33} - e \end{vmatrix}; \quad 3e = \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{3K}, \quad (8)$$

где  $\beta$  – фаза деформаций.

Проверка классического закона деформирования сводится к установлению зависимостей  $\tau$  от  $\gamma$  и  $\varphi$  от  $\beta$  при возможных сочетаниях напряжений и деформаций, возникающих в стенках цилиндрической оболочки. В качестве примера на рис. 2 приведены результаты определения фазовых характеристик малоуглеродистой стали. В экспериментах не обнаружено заметной зависимости между фазами напряженного и деформированного состояний, так что в крайних точках, соответствующих одноосным растяжению и сжатию, налицо полное совпадение фаз, а в промежуточных имеется незначительное отклонение от гипотезы их равенства при соосности двух тензоров.

Известно, что гипотеза о равенстве нулю разности фаз НДС является достаточно сильной по проявлениям ее следствий, особенно для композитных материалов (неметаллическим). При постулировании линейности закона объемной деформации, равенстве нулю разности фаз, совпадении главных осей тензоров напряжений и деформаций, приводящим к равенству направляющих тензоров напряжений и деформаций, приходим к универсальной зависимости октаэдрического касательного напряжения от октаэдрического сдвига при всевозможных фазах. Тогда удельную работу внутренних напряжений можно сформулировать в виде суммы произведений главных напряжений на вариации главных деформаций, или пред-

ставить обратной зависимостью суммы произведений деформаций на вариации напряжений (удельной энергией деформаций или удельной дополнительной работой):

$$\delta U = \delta W = \sigma_k \delta e_k = e_k \delta \sigma_k. \quad (9)$$

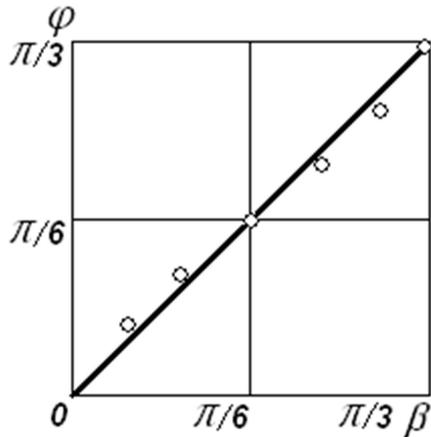


Рис. 2

Используя представления главных компонентов тензоров напряжений и деформаций через универсальные инварианты, преобразуем вариации (9) к виду

$$\begin{aligned} \delta U = \delta W &= (\sigma + \sqrt{2}\tau \cos \varphi_k) \delta (e + \sqrt{2}\mathcal{E} \cos \beta_k) = \\ &= (e + \sqrt{2}\mathcal{E} \cos \beta_k) \delta (\sigma + \sqrt{2}\tau \cos \varphi_k). \end{aligned} \quad (10)$$

После раскрытия вариаций и выполнения простых преобразований, получим

$$\begin{aligned} \delta U &= 3\sigma \delta e + 3\tau [\cos(\varphi - \beta) \delta \mathcal{E} + \sin(\varphi - \beta) \mathcal{E} \delta \beta] = \\ = \delta W &= 3e \delta \sigma + 3\mathcal{E} [\cos(\varphi - \beta) \delta \tau - \sin(\varphi - \beta) \tau \delta \varphi]. \end{aligned} \quad (11)$$

Принимая гипотезу о совпадении фаз напряжений и деформаций, мы тем самым вариации (11) можем привести

к виду:

$$\delta U = 3\sigma \delta e + 3\tau \delta \mathcal{E}; \quad \delta W = 3e \delta \sigma + 3\mathcal{E} \delta \tau, \quad (12)$$

а из условий существования потенциалов напряжений и деформаций  $\partial \sigma / \partial \mathcal{E} = \partial \tau / \partial e$  и  $\partial \mathcal{E} / \partial \sigma = \partial e / \partial \tau$  при справедливости линейного закона объемного деформирования

$$\sigma = 3Ke, \quad (13)$$

необходимо соблюдение зависимости  $\tau$  только от  $\mathcal{E}$ , а именно

$$\tau = 2G\mathcal{E} = G\gamma. \quad (14)$$

Следует отметить, что все приведенные рассуждения оказываются несостоятельными применительно к материалам, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного состояния. К подобным материалам чаще всего относятся композитные, полимерные, хаотически армированные фибрами, а также материалы, обладающие зернистой структурой. Для этих материалов оказывается несправедливыми гипотезы о независимости изменения объема от формы и о совпадении фаз напряжений и деформаций, т. е. нарушаются фундаментальные уравнения (13), (14), а  $\omega = \varphi - \beta \neq 0$  [1 – 3]. Потому к проведению механических экспериментов над трубчатыми образцами в любой серии  $N \sim M \sim q$ -опытов необходимо подходить более тщательно. В частности, при выполнении замеров в  $M$ -опытах над цилиндрическими оболочками, кроме определения сдвиговых деформаций  $2e_{12} = \gamma_{12}$ , необходимо измерять продольные перемещения и вычислять деформации  $e_{11}$ , которых по воззрениям классической механики быть не должно, да и к проведению других серий испытаний требуется более скрупулезный подход. Характер нарушения классических сведений о НДС трубчатых образцов продемонстрируем на примере деформирования тонкостенной цилиндрической оболочки, выполненной из материала, чувствительного к виду напряженного состояния.

Как показано в работах [16 – 20], наиболее универсальными определяющими соотношениями применительно к указанным материалам на сегодняшний день, являются две формы потенциала деформаций [16 – 20]:

$$\begin{aligned} W &= 0,5[(A + B\alpha_1)\sigma_1^2 + (A + B\alpha_2)\sigma_2^2 + (A + B\alpha_3)\sigma_3^2] + \\ &+ [C + E\alpha_3 + D(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + [C + E\alpha_1 + D(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + \end{aligned} \quad (15)$$

$$+ [C + E\alpha_2 + D(\alpha_1 + \alpha_3)]\sigma_1\sigma_3;$$

$$W = (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3\xi)\sigma^2 + (\tilde{b}_2 + \tilde{b}_4\xi + \tilde{b}_5\eta\cos 3\varphi)\tau^2, \quad (16)$$

где  $\alpha_k = \sigma_k / S$ ;  $S = \sqrt{\sigma_k \sigma_k}$ ;  $\cos \psi = \xi = \sigma / S_0$ ;  $\sin \psi = \eta = \tau / S_0$ ;  $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$ ;  
 $S_0 = S / \sqrt{3}$ ;  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \sqrt{3}\xi$ ;  $\alpha_k \alpha_k \alpha_k = (3\xi^3 + 9\xi\eta^2 + 1,5\sqrt{2}\eta^3 \cos 3\varphi) / \sqrt{3}$ ;

$$\cos 3\varphi = \sqrt{2} \det(S_{ij}) / \tau^3; \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma; \quad \tilde{b}_1 = 1,5(A + 2C); \quad \tilde{b}_2 = 1,5(A - C);$$

$$\tilde{b}_3 = 1,5(B + 4D + 2E) / \sqrt{3}; \quad \tilde{b}_4 = 4,5(B - E) / \sqrt{3}; \quad \tilde{b}_5 = 0,75(B - 2D + 2E)\sqrt{2} / \sqrt{3};$$

$$A = 0,5(1/E^+ + 1/E^-); \quad B = 0,5(1/E^+ - 1/E^-); \quad C = -0,5(\nu^+ / E^+ + \nu^- / E^-);$$

$$E = 0,25\sqrt{3}[(1 - 2\nu^+) / E^+ - (1 - 2\nu^-) / E^-] - 0,25[(1 - 4\nu^+) / E^+ - (1 - 4\nu^-) / E^-];$$

$D = -0,5(\nu^+ / E^+ - \nu^- / E^-)$ ;  $E^+$ ,  $\nu^+$  – модуль упругости и коэффициент поперечной деформации при одноосном растяжении;  $E^-$ ,  $\nu^-$  – модуль упругости и коэффициент поперечной деформации при одноосном сжатии.

Очевидно, что соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций определяются путем дифференцирования  $W$  согласно формулам Кастильяно:

$$e_{ij} = 1/3\{2[\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3\xi(1 + 0,5\eta^2)] + (\tilde{b}_4\eta^2 + 1,5\sqrt{2}\tilde{b}_5)\eta^2 / \xi -$$

$$- \tilde{b}_5\eta^3 \cos 3\varphi\}\sigma\delta_{ij} + 1/3\{2(\tilde{b}_2 + \tilde{b}_4\xi + \tilde{b}_5\eta \cos 3\varphi) -$$

$$- (\tilde{b}_3\xi^2 + \tilde{b}_4\eta^2)\xi - \tilde{b}_5(3 - \eta\xi^2) \cos 3\varphi + 3\sqrt{2}\tilde{b}_5\mu_{ij}\}S_{ij}, \quad (17)$$

где  $\mu_{ij} = \lambda_{ij} / S_{ij}$ ;  $\lambda_{ij} = \Delta_{ij} / S_0$ ;  $\Delta_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $S_{ij}$ .

Следствием введенных уравнений состояния (17) являются общие законы деформирования материала:

$$e = \sigma / 3K_0 + \tau / 3D_0; \quad \Theta = \sqrt{1 + tg^2 \omega} (\tau / 2G_0 + \sigma / 3D_0);$$

$$tg \omega = 3\tilde{b}_5\eta \sin 3\varphi / (3\eta / 2G_0 + \xi / D_0), \quad (18)$$

которые опровергают классические зависимости (13), (14). Здесь  $K_0$  – обобщенный «модуль» объемных деформаций;  $G_0$  – обобщенный «модуль» формоизменения (сдвига);  $D_0$  – обобщенный «модуль» дилатации;  $K_0 = 1/[2\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3\xi(2 + \eta^2) - \tilde{b}_5\eta^3 \cos 3\varphi]$ ;  $D_0 = 1/\tilde{b}_4\eta^3$ ;  
 $2G_0 = 3/[2\tilde{b}_2 + \xi^3(2\tilde{b}_4 - \tilde{b}_3) + \tilde{b}_5\eta^3(2 + \xi^2)\cos 3\varphi]$ .

Теперь рассмотрим тонкостенную круговую цилиндрическую оболочку из композитного материала. Местоположение любой точки на срединной поверхности оболочки определяется гауссовыми координатами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ . Оболочку примем длиной  $l$  с радиусом кривизны  $R$ , подверженную свободному кручению (рис. 3). Осевые перемещения оболочки обозначим через  $u$ , касательные – через  $v$ , а радиальные – через  $w$ . В рассматриваемом случае коэффициенты Ляме и главные кривизны имеют вид

$$\tilde{A} = 1; \quad \tilde{B} = R; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = R^{-1}. \quad (19)$$

Срединную цилиндрическую поверхность оболочки отнесем к ортогональной системе координат  $x_1 = \alpha_1$ ,  $x_2 = \alpha_2$ ,  $x_3 = \alpha_3$  (рис. 3). При этом координата  $x_1$  совпадает с образующей,  $x_2$  – с направляющей окружностью, а  $x_3$  – с внешней нормалью к срединной поверхности. Будем считать, что один торец оболочки при  $x_1 = 0$  полностью закреплен, а второй при  $x_1 = l$  загружен равномерно распределенным сдвигающим усилием с интенсивностью

$S = h\tau_0$  (свободное кручение трубчатого образца в  $M$ -опытах), где  $h$  – толщина стенки оболочки,  $\tau_0$  – касательное напряжение, равномерно распределенное по толщине торцового сечения  $x_1 = l$ . При этом внешняя и внутренняя поверхности цилиндрической оболочки свободны от нагрузки. Данное нагружение можно отнести к обобщенному плоскому напряженному состоянию. В соответствии с этим справедливы равенства  $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ , а характер закрепления оболочки подразумевает следующие граничные условия:

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; \quad \sigma_{11} = 0, \quad \tau_{12} = \tau_0 \quad \text{при } x_1 = l. \quad (20)$$

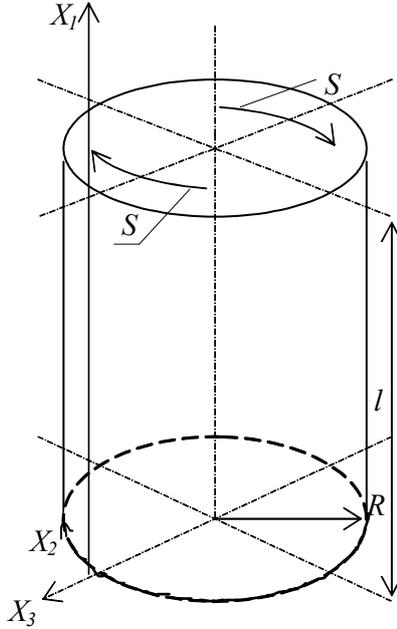


Рис. 3

Очевидно, ввиду осевой симметрии нагружения оболочки ненулевые напряжения могут зависеть только от координаты  $x_1$ . Общие дифференциальные уравнения равновесия [1] в выбранной системе координат примут вид

$$\sigma_{11,1} = 0; \quad \tau_{12,1} = 0 \quad \sigma_{22}/R = 0. \quad (21)$$

Уравнения равновесия (21) совместно с граничными условиями приводят к элементарному решению для напряжений:

$$\sigma_{11} = 0; \quad \sigma_{22} = 0; \quad \tau_{12} = \tau_0. \quad (22)$$

Таким образом, уравнениями (22) полностью определено напряженное состояние оболочки. Тогда в силу имеющихся условий для оболочки уравнения состояния (17) принимают вид

$$e_{11} = (1,5B - D)\alpha_{12}^2 \sqrt{2}\tau_{12}; \quad e_{22} = (1,5B - D)\alpha_{12}^2 \sqrt{2}\tau_{12}; \\ e_{12} = (A - C)\tau_{12}, \quad (23)$$

или с учетом (22)

$$e_{11} = (1,5B - D)\sqrt{2}\tau_0/2; \quad e_{22} = (1,5B - D)\sqrt{2}\tau_0/2; \\ e_{12} = (A - C)\tau_0. \quad (24)$$

С другой стороны, в выбранной системе координат для деформаций имеем

$$e_{11} = u_{,1}; \quad e_{22} = w/R; \quad e_{12} = 0,5v_{,1}, \quad (25)$$

где  $u(x_1)$ ,  $v(x_1)$ ,  $w(x_1)$  – тангенциальные и нормальная составляющие осредненного перемещения.

Приравняв выражения (24) и (25), получим систему дифференциальных уравнений относительно перемещений:

$$u_{,1} = (1,5B - D)\sqrt{2}\tau_0/2; \quad w/R = (1,5B - D)\sqrt{2}\tau_0/2; \quad v_{,1} = 2(A - C)\tau_0. \quad (26)$$

Тогда, решая уравнения (26) с учетом граничных условий (20), окончательно получим

$$u = (1,5B - D)\sqrt{2}\tau_0 x_1/2; \quad v = 2(A - C)\tau_0 x_1; \quad w = (1,5B - D)\sqrt{2}\tau_0 R/2 \quad (27)$$

или

$$u = [(3 + 2\nu^+)/E^+ - (3 + 2\nu^-)/E^-] \sqrt{2}\tau_0 x_1/8; \quad v = [(1 + \nu^+)/E^+ + (1 + \nu^-)/E^-] \tau_0 x_1; \\ w = [(3 + 2\nu^+)/E^+ - (3 + 2\nu^-)/E^-] \sqrt{2}\tau_0 R/8. \quad (28)$$

Таким образом, установлено, что в отличие от классических методик определения деформаций при проведении  $M$ -опытов с трубчатыми образцами из композитных материалов необходимо не только измерять углы закручивания или окружные перемещения  $v$ , но и остальные перемещения  $u$  и  $w$  (28), которые традиционно отсутствуют, например, у стальных оболочек. Тогда, в частном случае, когда характеристикам материала оболочки соответ-

ствуют условия  $E^+ = E^- = E$ ,  $\nu^+ = \nu^- = \nu$  (классический линейно упругий материал), для перемещений получим

$$u = w = 0; \quad \nu = [2(1 + \nu) / E] \tau_0 x_1. \quad (29)$$

Из анализа выражений (28) и (29) вытекают те качественные изменения в результатах расчета и испытания оболочек, которые связаны с учетом разносопротивляемости материала. Очевидно, как следует из уравнений (20), в зависимости от характера разносопротивляемости материала ( $E^+ > E^-$  или  $E^+ < E^-$ ) цилиндрическая оболочка при свободном кручении может удлиняться или укорачиваться, увеличивать или уменьшать диаметр, что и определяет изменения в качественной картине ее напряженно-деформированного состояния. Кроме того, при чистом кручении оболочки происходит изменение объема:  $e = \sqrt{2} \tau_0 \tilde{b}_4 / (3\sqrt{3})$ , чего не обнаруживается в опытах с образцами из классических материалов [1 – 3].

В таблице для примера приведем результаты расчета цилиндрической оболочки, подверженной чистому кручению при  $E^+ = E$ ,  $E^- = 2E$ ,  $\nu^+ = 0,1$ ,  $\nu^- = 0,2$  и при  $E^+ = E$ ,  $E^- = 0,5E$ ,  $\nu^+ = 0,2$ ,  $\nu^- = 0,1$ , а также при  $E^+ = E$ ,  $E^- = 3,4E$ ,  $\nu^+ = \nu^- = 0,2$  и при  $E^+ = E$ ,  $E^- = 0,294E$ ,  $\nu^+ = \nu^- = 0,2$  («Т»). Кроме того, для сравнения в этой же таблице представлены аналогичные результаты, полученные на основе разномодульной теории С. А. Амбарцумяна («А») [21 – 23], и решения классической теории упругости при  $E = E^+$  («К<sup>+</sup>»),  $E = E^-$  («К<sup>-</sup>») и  $1/E = 0,5(1/E^+ + 1/E^-)$  («КО») [24].

Таблица  
Результаты расчета оболочки на чистое кручение

Вариант решения	$\nu^-$	$\nu^+$	$E^- / E^+$	$uE / \tau_0 x_1$	$\nu E / \tau_0 x_1$	$wE / \tau_0 R$
К <sup>+</sup>	0,2	0,1	2,0	0	2,2	0
КО				0	1,7	0
К <sup>-</sup>				0	1,2	0
Т				0,265165	1,7	0,265165
А				0,25	1,7	0,25
К <sup>+</sup>	0,1	0,2	0,5	0	2,4	0
КО				0	3,4	0
К <sup>-</sup>				0	4,4	0
Т				-0,53033	3,4	-0,53033
А				-0,5	3,4	-0,5
К <sup>+</sup>	0,2	0,2	3,4	0	2,4	0
К <sup>-</sup>				0	0,706	0
К <sup>+</sup>			0,294	0	2,4	0
К <sup>-</sup>				0	8,163	0
Т			3,4	0,424	1,553	0,424
Т			0,294	-1,443	5,281	-1,443

Следует заметить, что в рассмотренных примерах погрешность классической теории упругости в определении перемещений  $\nu E / \tau_0 x_1$  для принятых характеристик материалов (при  $E^- / E^+ = 2$  или  $E^- / E^+ = 0,5$ ) составляет 29,4 %, заметно зависит от соотношения величин  $E^-$ ,  $E^+$ ,  $\nu^+$ ,  $\nu^-$  и с ростом  $E^- / E^+$  или  $E^+ / E^-$  возрастает вплоть до 54,5 % (при  $E^- / E^+ = 3,4$  или  $E^- / E^+ = 0,294$ ). Разница в результатах расчета перемещений  $uE / \tau_0 x_1$  и  $wE / \tau_0 R$  по моделям Т и А составляет 6 %, а для  $\nu E / \tau_0 x_1$  результаты полностью совпадают.

Вторым примером нарушения классических представлений о результатах испытания трубчатых образцов может служить цилиндрическая оболочка, нагруженная по программе  $N\sim M$ -опытов. В соответствии с программой этих опытов рассмотрим напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки с теми же геометрическими параметрами: длиной  $l$  с радиусом кривизны  $R$ , толщиной стенки  $h$ , закрепленную одним торцом и нагруженную на другом скручивающей нагрузкой  $S = h\tau_0$  и растягивающим усилием  $N = ht$ .

Как и в предыдущем случае, данное нагружение можно отнести к обобщенному плоскому напряженному состоянию, когда имеем  $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ . В соответствии с принятым закреплением оболочки граничные условия сформулируем в виде

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } x_1 = 0; \quad \sigma_{11} = N/h = t, \quad \tau_{12} = \tau_0 \quad \text{при } x_1 = l. \quad (30)$$

Как и в предыдущем случае, ненулевые напряжения будут зависеть только от координаты  $x_1$ , а уравнения равновесия сохраняют вид (21), которые совместно с граничными условиями приводят к элементарному решению для напряжений

$$\sigma_{11} = N/h = t; \quad \sigma_{22} = 0; \quad \tau_{12} = \tau_0. \quad (31)$$

Этими уравнениями (31) полностью определяется напряженное состояние оболочки. Тогда уравнения состояния (17) принимают вид

$$\begin{aligned} e_{11} &= [A + 0,5B(3 + \alpha_{11})\alpha_{11}^2]\sigma_{11} + (1,5B - D)(1 + \alpha_{11}^2)\alpha_{12}\tau_{12}; \\ e_{22} &= C\sigma_{11} + (1,5B - D)\alpha_{12}\tau_{12}; \end{aligned} \quad (32)$$

$$e_{12} = [A - C + 0,5B\alpha_{11}^3 + (1,5B - D)(1 + \alpha_{12}^2)\alpha_{11}]\tau_{12}$$

или с учетом (31)

$$\begin{aligned} e_{11} &= [A + 0,5B(3\sqrt{t^2 + 2\tau_0^2} + t)t^2 / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}]t + \\ &\quad + 2(1,5B - D)\tau_0^2 / (t^2 + \tau_0^2) / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}; \\ e_{22} &= Ct + (1,5B - D)\tau_0^2 / (t^2 + 2\tau_0^2); \end{aligned} \quad (33)$$

$$e_{12} = [A - C + 0,5Bt^3 / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2} + (1,5B - D)(t^2 + 3\tau_0^2)t / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}]\tau_0.$$

С другой стороны, для деформаций имеем следующие зависимости от перемещений

$$e_{11} = u_{,1}; \quad e_{22} = w/R; \quad e_{12} = 0,5v_{,1}. \quad (34)$$

Приравняв выражения (33) и (34), получим систему дифференциальных уравнений относительно перемещений:

$$\begin{aligned} u_{,1} &= [A + 0,5B(3\sqrt{t^2 + 2\tau_0^2} + t)t^2 / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}]t + \\ &\quad + 2(1,5B - D)\tau_0^2 / (t^2 + \tau_0^2) / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}; \\ w/R &= Ct + (1,5B - D)\tau_0^2 / (t^2 + 2\tau_0^2); \end{aligned} \quad (35)$$

$$v_{,1} = 2[A - C + 0,5Bt^3 / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2} + (1,5B - D)(t^2 + 3\tau_0^2)t / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}]\tau_0.$$

Тогда, решая уравнения (35) с учетом граничных условий (30), окончательно получим

$$\begin{aligned} u &= [A + 0,5B(3\sqrt{t^2 + 2\tau_0^2} + t)t^2 / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}]tx_1 + \\ &\quad + 2x_1(1,5B - D)\tau_0^2 / (t^2 + \tau_0^2) / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}; \\ w &= CRt + (1,5B - D)R\tau_0^2 / (t^2 + 2\tau_0^2); \end{aligned} \quad (36)$$

$$v = 2[A - C + 0,5Bt^3 / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2} + (1,5B - D)(t^2 + 3\tau_0^2)t / (t^2 + 2\tau_0^2)^{3/2}]\tau_0x_1.$$

Как и в предыдущем случае, когда характеристикам материала оболочки соответствуют условия  $E^+ = E^- = E$ ,  $\nu^+ = \nu^- = \nu$  (классический линейно упругий материал), для перемещений получим

$$u = tx_1 / E; \quad \nu = [2(1 + \nu) / E] \tau_0 x_1; \quad w = -Rvt / E. \quad (37)$$

Таким образом, можно показать, что при любых программах испытания трубчатых образцов из композитных материалов отсутствует совпадение всех измеряемых и вычисляемых параметров НДС с данными, которые получаются благодаря традиционным методикам.

## ВЫВОДЫ

Очевидно, что традиционные методики обработки результатов и проведения натуральных испытаний тонкостенных трубчатых образцов, выполненных из композитных и зернистых материалов, должны быть пересмотрены, так как классические гипотезы, связанные с традиционной постановкой опытов, для многих классов материалов не выполняются. В частности, базовые предположения, которые используются при постановке и проведении экспериментов, о независимости изменения объема от формы, совпадения фаз напряжений и деформаций нарушаются. Поэтому к проведению даже простейших опытов на трубчатых образцах необходимо подходить более тщательно, измеряя всевозможные геометрические параметры, проявляющиеся в процессе деформирования по всем направлениям, даже для изотропных материалов. В противном случае реальная картина НДС испытываемых оболочек будет искажена. Корректная постановка экспериментов и обработка их результатов позволит рекомендовать наиболее приемлемую модель деформирования материалов, жесткостные свойства которых зависят от вида НДС.

## Библиографический список

1. Толоконников, Л. А. Механика деформируемого твердого тела / Л. А. Толоконников. – М.: Высшая школа, 1979. – 318 с.
2. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. – Часть 1: Малые деформации / Дж. Ф. Белл. – М.: Наука, 1984. – 600 с.
3. Белл, Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. – Часть 2: Большие деформации / Дж. Ф. Белл. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
4. Березин, А. В. Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел / А. В. Березин. – М.: Наука, 1990. – 135 с.
5. Березин, А. В. Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов / А. В. Березин, В. И. Строков, В. Н. Барабанов // Конструкционные материалы на основе углерода. – М.: Металлургия, 1976. – Вып. 11. – С. 102–110.
6. Некоторые особенности методик исследования прочности свойств графитов при плоском напряженном состоянии / А. М. Фридман [и др.] // Заводская лаборатория. – 1972. – №9. – С. 1137–1140.
7. Строков, В. И. Методика исследования прочностных и деформационных свойств графита в условиях сложного напряженного состояния / В. И. Строков, В. Н. Барабанов // Заводская лаборатория. – 1974. – №9. – С. 1141–1144.
8. Фридман, А. М. Исследование разрушения углеграфитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния / А. М. Фридман, Ю. П. Ануфриев, В. Н. Барабанов // Проблемы прочности. – 1973. – №1. – С. 52–55.
9. Jones, R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials / R. M. Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. – №8. – P. 995–1001.
10. Jones, R. M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R. M. Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – P. 16–25.

11. Tasuji, M. E. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading / M. E. Tasuji, F. O. Slate, A. H. Nilson // *ACI Journal*. – 1979. – №7. – P. 806–812.
12. Елсуфьев, С. А. Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния / С. А. Елсуфьев, В. М. Чебанов // *Исслед. по упругости и пластичности*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. – Вып. 8. – С. 209–213.
13. Калинка, Ю. А. Исследование физико-механических свойств хаотически наполненных стеклопластиков / Ю. А. Калинка, С. М. Боровикова // *Механика полимеров*. – 1971. – №3. – С. 411–415.
14. Амелина, Е. В. О нелинейном деформировании углепластиков: эксперимент, модель, расчет / Е. В. Амелина [и др.] // *ИВТ СО РАН. Вычислительные технологии*. – 2015. – Т. 20. – №5. – С. 27–52.
15. Каюмов, Р. А. Идентификация механических характеристик армированных волокнами композитов / Р. А. Каюмов, С. А. Луканкин, В. Н. Паймушин, С. А. Холмогоров // *Ученые записки Казанского университета. Физико-математические науки*. – 2015. – Т. 157. – кн. 4. – С. 112–132.
16. Березин, А. В. О законах деформирования разномодульных дилатирующих сред / А. В. Березин // *Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал*. – 2007. – №2. – С. 70–72.
17. Матченко, Н. М. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 1. Квазилинейные соотношения / Н. М. Матченко, Л. А. Толоконников, А. А. Трещев // *Изв. РАН. МТТ*. – 1995. – №1. – С. 73–78.
18. Матченко, Н. М. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 2. Нелинейные соотношения / Н. М. Матченко, Л. А. Толоконников, А. А. Трещев // *Изв. РАН. МТТ*. – 1999. – №4. – С. 87–95.
19. Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев // *Москва – Тула: РААСН – ТулГУ*, 2016. – 328 с.
20. Treschev, A. A. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law / A. A. Treschev, A. A. Bobrishev, L.N. Shafigullin // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* 481 (2019) 012014. – Doi: 10.1088/1757-899X/481/1/ 012014. – P. 1 – 7.
21. Амбарцумян, С. А. Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию / С. А. Амбарцумян // *Изв. АН СССР. Механика*. – 1965. – №4. – С. 77–85.
22. Амбарцумян, С. А. Теория симметрично нагруженных, слабомоментных оболочек вращения, изготовленных из разномодульных материалов / С. А. Амбарцумян // *Инж. журн. МТТ*. – 1967. – №6. – С. 33–46.
23. Амбарцумян, С. А. Разномодульная теория упругости / С. А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
24. Маркин, А. А. К обоснованию теории оболочек / А. А. Маркин // *Работы по механике деформируемых сред*. – Тула: ТПИ. – 1974. – С. 121-129.

#### References

1. Tolokonnikov L.A. *Mechanics of a deformable solid*. M.: High school, 1979. 318 p.
2. Bell George F. *Experimental foundations of the mechanics of deformable solids. Part 1: Small deformations*. Moscow: Nauka, 1984. 600 p.
3. Bell George F. *Experimental foundations of the mechanics of deformable solids. Part 2: Large deformations*. Moscow: Nauka, 1984. 432 p.

4. Berezin A.V. The effect of damage on the deformation and strength characteristics of solids. Moscow: Nauka, 1990. 135 p.
5. Berezin A.V., Stokov V.I., Barabanov V.N. Deformability and destruction of isotropic graphite materials. Structural materials based on carbon. Moscow: Metallurgy. Vol. 11. 1976. Pp. 102-110.
6. Friedman A.M. Some features of methods of research of strength properties of graphite under a plane stress state. Factory laboratory. No. 9. 1972. Pp. 1137-1140.
7. Stokov V.I., Barabanov V.N. Method of studying the strength and deformation properties of graphite in a complex stress state. Factory laboratory. No. 9. 1974. Pp. 1141-1144.
8. Friedman A.M., Anufriev Yu.P., Barabanov V.N. Study of the destruction of carbon - graphite materials under conditions of a complex stress state. Problems of strength. No. 1. 1973. Pp. 52-55.
9. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials. AIAA Journal. Vol. 18. No. 8. 1980. Pp. 995-1001.
10. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression. AIAA Journal. Vol. 15. No. 1. 1977. Pp. 16-25.
11. Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading. ACI Journal. No. 7. 1979. P. 806-812.
12. Elsufiev S.A., Chebanov V.M. The Study of deformation of fluoroplastic under conditions of plane stress state. Studies in elasticity and plasticity. L.: Publishing house Leningrad state University, 1971. Vol. 8. Pp. 209-213.
13. Kalinka Y.A., Borovikova S.M. Study of physico-mechanical properties of randomly filled with fiberglass. Mechanics of polymers. No. 3. 1971. Pp. 411-415.
14. Amelina E.V. On nonlinear deformation of carbon fiber plastics: experiment, model, calculation. IVT SB RAS. Computing technology. Vol. 20. No. 5. 2015. Pp. 27-52.
15. Kayumov R.A., Lukankin S.A., Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Scientific notes of the Kazan University. Physical and mathematical Sciences. Vol. 157. No. 4. 2015. Pp. 112-132.
16. Berezin A.V. On the laws of deformation of multi-module dilating media. Problems of mechanical engineering and automation. International journal. No. 2. 2007. Pp. 70-72.
17. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treschev A.A. Defining relations of isotropic media with different resistance. Part 1. Quasilinear relations. Izv. RAS MSB. No. 1. 1995. Pp. 73-78.
18. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treschev A.A. Defining relations of isotropic media with different resistance. Part 2. Nonlinear relations. Izv. RAS MSB. No. 4. 1999. Pp. 87-95.
19. Treschev A.A. The theory of deformation and durabilities for the materials with a primary and induced sensitivity to a kind of a stress conditon. Determining correlations. M.; Tula; RAACS; TSU, 2016. 236 p.
20. Treschev A.A., Bobrishev A.A., Shafigullin L.N. Constitutive relations for isotropic materials allowing quasilinear approximation of the deformation law. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 481 (2019) 012014. Pp. 1-7. Doi: 10.1088/1757-899X/481/1/012014.
21. Ambartsumyan S.A. Axisymmetric problem of a circular cylindrical shell made of a material that is resistant to stretching and compression. Izv. USSR ACADEMY OF SCIENCES. Mechanics. No. 4. 1965. Pp. 77-85.
22. Ambartsumyan S.A. Theory of symmetrically loaded, low-torque shells of rotation made of different-modul materials. MSB Engineering journal. No. 6. 1967. Pp. 33-46.
23. Ambartsumyan S.A. Different-Modul theory of elasticity. Moscow: Nauka, 1982. 320 p.
24. Markin A.A. To the justification of the theory of shells. Works on the mechanics of deformable media. Tula: TPI, 1974. Pp. 121-129.

**THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS AS AN OBJECT OF  
THE EXPERIMENTAL DETERMINATION OF CONSTRUCTIONAL MATERI-  
ALS MECHANICAL PROPERTIES  
(ARE THE CLASSICAL TEST REPRESENTATIONS OF TUBULAR SAMPLES  
ALWAYS ACCEPTABLE?)**

A. A. Treschev<sup>1</sup>

Tula State University<sup>1</sup>

Russia, Tula

---

<sup>1</sup> Corresponding member of RAACN, Dr. of Tech. Sciences, Prof. of the Department of Construction,  
Building Materials and Structures  
tel.: +7(905)-622-90-58, e-mail: taa58@yandex.ru

---

This article analyzes the classical methods of testing thin-walled cylindrical shells (tubular samples) in order to confirm the generalized Hooke law, determine the stress and strain phases, and other parameters of the stress-strain state of materials. It is shown that traditional methods of experimental determination of deformations that assume independence of the laws of volume and shape changes, as well as those based on the hypothesis of coincidence of stress and strain phases, do not always give reliable results. It is shown that the classical approach to measuring deformations and processing experimental data for a wide range of composite materials can lead to inaccuracies associated with mismatches in the phases of stress and strain states, as well as with the actual relationship of the laws of change in the volume and shape of materials whose mechanical properties depend on the type of stress state.

**Keywords:** the cylindrical shell, tubular specimens, the elastic moduli, the coefficients of transverse deformation.

## ФОРМУЛА ДЛЯ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЯ МНОГОПРОЛЕТНОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”<sup>1</sup>

Россия, г. Москва

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail:c216@ya.ru

Выводится аналитическая зависимость нижней границы основной частоты колебаний фермы с крестообразной решеткой, инерционные свойства которой моделируются системой грузов в узлах прямолинейного пояса. Показывается, что при четном числе пролетов схема фермы допускает кинематическую изменяемость. Приведена соответствующая схема возможных скоростей узлов. Для решения задачи привлекаются операторы системы компьютерной математики Maple и метод индукции. Сравнение полученной оценки с точным значением основной частоты, полученным численно, показывает что расхождение не превышает 35 %. Предложен алгоритм обобщения решения на случай стержней разной жесткости.

**Ключевые слова:** Ферма, основная частота колебаний, Maple, индукция, число панелей.

### Постановка задачи

Простейшая, но достаточно точная и широко распространенная модель фермы, частоты колебаний которой необходимо определить, представляет собой ферму с невесомыми стержнями и массами, сосредоточенными в узлах. Анализ такой модели допускает аналитическое решение [1]. В спектре частот колебаний фермы наиболее интересны для практики низшие частоты. Значения именно этих частот требуются, например, для более полного исследования колебаний подвижной нагрузки [2,3], если идет речь о мостах или о покрытиях промышленных зданий с крановым оборудованием. Современные математические пакеты, использующие символьную обработку данных и позволяющие получение решения систем линейных уравнений в виде формул, дают возможность вывести зависимости собственных частот сооружения от его геометрических и физических характеристик. Наиболее сложная часть таких решений, состоящая в учете числа панелей, может быть получена методом индукции на основе опыта решения подобных задач о прогибе регулярных ферм [4].

Рассмотрим плоскую ферму с крестообразной решеткой (рис. 1). Обозначим за  $n$  число пролетов. Каждый пролет представлен одной панелью длиной  $a$ .

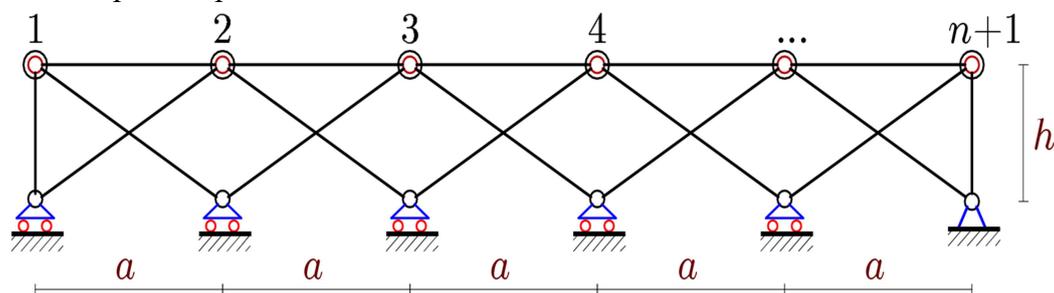


Рис. 1. Ферма,  $n = 5$

Всего в ферме  $n_s = 4n + 4$  стержней, включая  $n + 2$  стержня, моделирующие опоры. Эти стержни примем недеформируемыми.

Располагая массы  $m$  по узлам верхнего пояса, запишем систему  $n+1$  уравнений колебаний масс

$$m\ddot{\bar{Y}} + [D_n]\bar{Y} = 0, \quad (1)$$

где  $\bar{Y}$  – вектор вертикальных перемещений шарниров,  $\ddot{\bar{Y}}$  – вектор ускорений,  $[D_n]$  – матрица жесткости (индекс  $n$  указывает на число пролетов). Элементы матрицы податливости  $[B_n]$ , обратной к матрице жесткости, в случае продольных усилий в стержнях определяются по формуле Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{v=1}^{n_s-n-2} S_v^{(i)} S_v^{(j)} l_v / (EF). \quad (2)$$

Здесь  $S_v^{(i)}$  — усилие от действия единичной силы в узле  $i$  в стержне  $v$ ,  $l_v$  – длина стержня,  $EF$  – жесткость стержня. Площади сечений всех стержней одинаковые. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных.

Предварительный расчет усилий по программе [4], написанной на языке символьной математики Maple, показал, что для четного числа пролетов определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль [5]. Это свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции при таком числе пролетов. Действительно, можно найти кинематически непротиворечивое поле возможных скоростей узлов фермы (рис. 2).

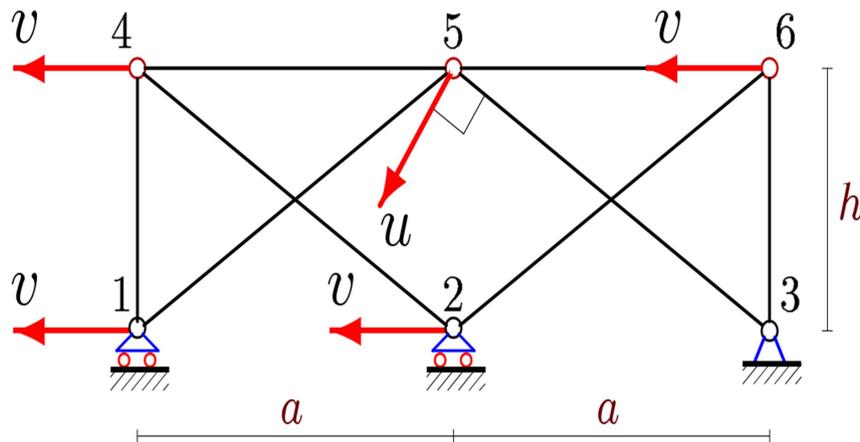


Рис. 2. Схема возможных скоростей изменяемой фермы,  $n = 2$

Здесь стержни 1-4, 2-4 и 2-6 совершают мгновенно поступательные движения со скоростью  $v$ , а стержни 1-5, 5-6 и 6-3 — вращательные движения. При этом имеется соотношение скоростей  $v/h = u/c$ , где  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  — длина раскоса. Аналогичное распределение скоростей можно построить для любого четного числа  $n$ . Будем рассматривать конструкции с нечетным числом пролетов  $n = 2k - 1$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Используем подстановку  $\ddot{\bar{Y}} = -\omega^2 \bar{Y}$ , вытекающую из периодического вида решения  $\bar{Y} = \bar{Z} \sin(\omega t + \varphi_0)$ , и умножим векторное равенство (1) слева на  $[B_n]$ . Сведем задачу к задаче о собственных числах матрицы  $[B_n]$ :

$$[B_n]\bar{Y} = \lambda \bar{Y}, \quad (3)$$

где  $\lambda = 1/(m\omega^2)$  – собственное число матрицы  $[B_n]$ ,  $\omega$  – собственная частота колебаний системы грузов.

## Расчет

Для нижней оценки основной (наименьшей) частоты колебаний  $\tilde{\omega}$  используем формулу Донкерлея

$$\tilde{\omega}^2 = 1 / \sum_{\alpha=1}^{n+1} 1 / \omega_{\alpha}^2, \quad (4)$$

где  $\omega_{\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$  — частота колебания массы  $m_{\alpha}$  верхнего пояса, при отсутствии всех других масс. Дифференциальное уравнение вертикальных колебаний массы имеет вид

$$m\ddot{y}_{\alpha} + d_{\alpha,n}y_{\alpha} = 0,$$

где  $y_{\alpha}$  — вертикальное перемещение массы,  $d_{\alpha,n}$  — коэффициент жесткости ( $\alpha$  — номер массы,  $n$  — число пролетов). Частота колебаний груза

$$\omega_{\alpha} = \sqrt{d_{\alpha,n} / m} = \sqrt{1 / (\delta_{\alpha,n} m)}. \quad (5)$$

Коэффициент податливости  $\delta_{n,k}$  обратный коэффициенту жесткости, определяется по формуле Максвелла-Мора (2):

$$\delta_{\alpha,n} = 1 / d_{\alpha,n} = \sum_{v=1}^{n_s-n-2} \frac{S_v^{(\alpha)2} l_v}{EF}.$$

Размещая массу поочередно в узлах верхнего пояса (слева направо,  $\alpha = 1, 2, \dots, n+1$ ), получаем в каждом случае одно и то же выражение

$$\delta_{\alpha,k} = (C_{\alpha}(a^3 + c^3) + h^3) / (h^2 EF), \quad (6)$$

где при  $\alpha = 1, 2, \dots, 6$   $C_1 = 0, C_2 = 2k - 2, C_3 = 2, C_4 = 2k - 4, C_5 = 6, C_6 = 2k - 6$ . Обобщая эти коэффициенты методом индукции при помощи оператора **rgf\_findrecur** системы Maple, который составляет рекуррентное уравнение для членов последовательности и оператора **rsolve**, возвращающего решение уравнения вида  $C_{\alpha} = -C_{\alpha-1} + C_{\alpha-2} + C_{\alpha-3}$ , получаем зависимость

$$C_{\alpha} = ((-1)^{\alpha}(1 - 2\alpha) - 1) / 2 + k(1 + (-1)^{\alpha}).$$

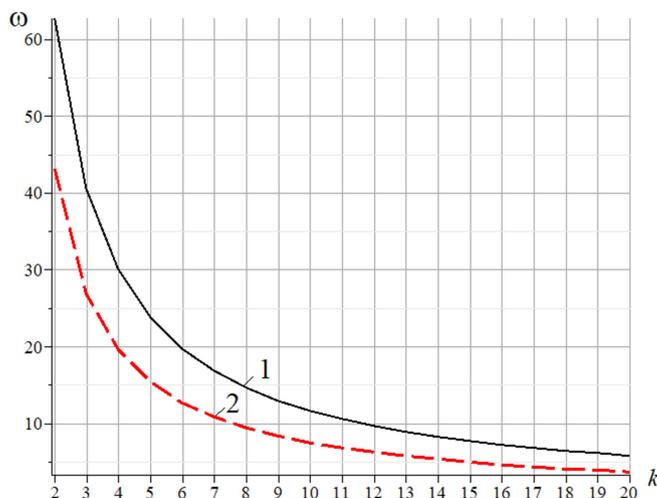
Проверить полученное выражение можно, например, по тождествам  $C_1 = C_{n+1}, C_2 = C_n$ , следующим из симметрии задачи. Подставляя (5) с учетом (6) в сумму (4), получаем с помощью оператора нахождения конечных сумм **sum** нижнюю по Донкерлею границу основной частоты колебаний фермы с  $n=2k-1$  пролетами:

$$\tilde{\omega} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2EF}{m((a^3 + c^3)(k-1) + h^3)}}. \quad (7)$$

## Анализ

Полученную оценку сравним с численным результатом, полученным из решения задачи о колебании  $n+1$  массы. С помощью формулы Максвелла-Мора (2) составим матрицу податливости  $[B_n]$  и найдем ее собственные числа, применив оператор **Eigenvalues** из специализированного пакета линейной алгебры **LinearAlgebra**. Для сравнения потребуется только основная частота, выделить которую из спектра можно оператором **sort**, который сортирует списки. На рисунке пунктиром показана кривая, построенная по формуле (7),

сплошная линия — результат численного решения. Расхождение между значениями основной частоты меняется от 30% при малых числах пролетов до 36% при больших. С увеличением  $k$ , начиная с  $k=20$ , погрешность почти не растет и этот результат мало меняется при изменении размеров  $a$  и  $h$  и жесткости стержней.



**Рис. 3.** Основная частота колебаний (рад/с):

1 — точное численное решение, 2 — аналитическая оценка (7)

В постановке задачи принято, что все стержни имеют одинаковую жесткость. Но это требование легко снимается, если считать, что в конструкции можно выделить три группы стержней в соответствии с их длинами. Если стержни верхнего пояса длиной  $a$  имеют жесткость  $EF_a = \gamma_a EF$ , раскосы длиной  $c$  имеют жесткость  $EF_c = \gamma_c EF$ , а стержни стоек высотой  $h$  — жесткость  $EF_h = \gamma_h EF$ , то формула (7) примет вид

$$\tilde{\omega} = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{2EF}{m((a^3 / \gamma_a + c^3 / \gamma_c)(k-1) + h^3 / \gamma_h)}}.$$

### Заключение

Получена оценка наименьшей частоты собственных колебаний фермы многопролетного сооружения. Несмотря на значительное занижение реальной основной частоты, это решение имеет весьма простой вид и может быть использовано в практических инженерных работах, с учетом поправки в 30-36 %. Вероятно, главное достоинство найденной оценки, помимо ее формульного представления, допускающего простое аналитическое исследование влияния отдельных параметров фермы на частоту колебаний, является практически точное предсказание зависимости частоты от числа панелей. Кривые 1 и 2 на рис. 3 хорошо повторяют форму друг друга, отличаясь некоторым сдвигом по оси ординат. Другим результатом работы является сам алгоритм выделения оценки частоты, допускающий несложное повторение применительно к другим регулярным стержневым системам. Еще один результат работы, напрямую не связанный с заявленной темой, обнаружен неожиданно. При постановке задачи не предполагалось, что конструкция имеет некоторый скрытый и опасный дефект, связанный с ее вырождением. Именно поэтому расчеты основной частоты велись только для нечетного числа пролетов. Аналогичный эффект вырождения отмечен в ряде статически определимых конструкций регулярного типа [4]. Заметим, что первоначальные численные

расчеты за счет погрешностей вычислений иногда пропускали эти особенности ферм. Аналитические же преобразования здесь имеют явное преимущество, хотя для получения результатов в символьном виде требуется значительно больше усилий. Фактически для вывода формулы основной частоты индукция проводилась дважды — по номеру массы и по числу пролетов. В итоге выведена достаточно универсальная формула, применимая к широкому классу конструкций предложенной схемы.

Индуктивный метод вывода формул для прогиба плоской фермы применялся также в работах [6-9], обзор некоторых аналогичных работ можно найти в [10].

#### Библиографический список

1. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. – 2015. – Т. 1.– С. 31-34.
2. Барченков А. Г. Динамический расчет автодорожных мостов. М.: Транспорт. – 1976. – 199 с.
3. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку. Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1983. 196 с
4. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
5. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
6. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.
7. Ткачук Г.Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей //Строительная механика и конструкции. 2019. №2(21). С. 32-39.
8. Бойко А.Ю., Ткачук Г. Н. Вывод формул зависимости прогиба плоской шарнирно-стержневой рамы от числа панелей в системе  $maple$ // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 15-25.
9. Тимофеева Т.А. Формулы для расчета прогиба плоской решетчатой рамы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №4 (23). С. 26-33.
10. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. №. 1. С. 12-33.

#### Reference

1. Kanatova M. I. Frequency equation and analysis of vibrations of a flat beam truss. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M-2015. - Vol. 1.- Pp. 31-34.
2. Barchenkov A. G. Dynamic calculation of road bridges. Moscow: Transport. - 1976. – 199 p.
3. Safronov V. S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges for mobile load. Voronezh: Voronezh publishing House. UN-TA, 1983. 196 p
4. Kirsanov M. N. Planar trusses. Schemes and Formulas. Cambridge Scholars Publishing. 2019.
5. Kirsanov M. N. Derivation of the formula for the deflection of a lattice truss that has cases of kinematic variability. 2017. Vol. 1. No. 14. Pp. 27-30.

6. Belyankin N. A., Boyko A. Yu. Formulas for deflection of a beam truss with an arbitrary number of panels at uniform loading. Construction mechanics and structures. 2019. No. 1(20). Pp. 21-29.
7. Tkachuk G. N. Formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced struts on the number of panels. Construction mechanics and structures. 2019. No. 2(21). Pp. 32-39.
8. Boyko A. Yu., Tkachuk G. N. Derivation of formulas for the dependence of the deflection of a flat hinge-rod frame on the number of panels in the maple system. Construction mechanics and structures. 2019. No. 4 (23). Pp. 15-25.
9. Timofeeva T. A. Formulas for calculating the deflection of a flat lattice frame with an arbitrary number of panels. 2019. No. 4 (23). Pp. 26-33.
10. Osadchenko N. V. Analytical solutions to problems of deflection of flat trusses of arch type. Construction mechanics and structures. 2018. No. 1. Pp. 12-33.

## FORMULA FOR THE MAIN OSCILLATION FREQUENCY OF A MULTI-SPAN TRUSS

M. N. Kirsanov<sup>1</sup>

National Research University "MPEI"<sup>1</sup>

Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>Dr.Sci., Professor, tel.: +7(495)362-73-14; e-mail:c216@ya.ru

---

An analytical dependence of the lower boundary of the fundamental oscillation frequency of a truss with a cross-shaped grating is derived. The inertial properties of truss are modeled by a system of weights in the nodes of a straight belt. It is shown that with an even number of spans, the truss scheme allows for kinematic variability. The corresponding scheme of possible node velocities is given. To solve the problem, the operators of Maple computer math system and the induction method are involved. Comparison of the obtained estimate with the numeric exact value of the fundamental frequency, shows that the discrepancy does not exceed 35%. An algorithm for generalizing the solution to the case of rods of different rigidity is proposed.

**Keywords** Truss, oscillation frequency, Maple, induction, number of panels.

## О МЕТОДАХ ПОЛУЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ДЛЯ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ШАРНИРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

О. В. Воробьев<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”<sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Аспирант, тел.: +7(916)709-06-61; e-mail: olvarg@mail.ru

---

Для эффективного применения стержневых конструкций требуется на ранних этапах разработки определять потенциально оптимальные варианты формы и топологии. Однако данная задача является нетривиальной ввиду того, что пространство поиска оптимальных решений является в общем случае невыпуклым, а отношения, связывающие варьируемые параметры с оптимизируемым качеством системы – неявными и нелинейными. Для решения подобной проблемы используются аналитические методы, для частных случаев обеспечивающие большую точность и быстроедействие, и численные методы, работающие для более общих задач.

Одним из важнейших динамических параметров, по которым можно проводить оптимизацию, является собственная частота конструкции. В данной статье рассмотрены работы по теме вибрационного анализа стержневых конструкций, проблемы поиска аналитических зависимостей динамических характеристик от топологии и геометрии шарнирных ферм, многопараметрической оптимизации методами моделирования дискретными структурами.

**Ключевые слова:** ферма, рама, индукция, аналитическое решение, оптимизация, топология, геометрия.

На ранних этапах разработки стержневых конструкций часто требуется найти общую схему данной системы, которая наиболее естественно и эффективно поддерживает планируемые нагрузки. Данная проблема часто решается оптимизацией общей формы стержневой конструкции, а также связности или топологии структурных элементов, ее составляющих.

Одним из важных критериев оптимизации являются динамические характеристики стержневой конструкции, в частности ее собственные частоты. В данной статье рассматриваются актуальные работы, связанные с вибрационным анализом шарнирных ферм.

В статьях [1-14] представлены аналитические, [15-16] – численные и в [17] – семи-аналитические методы решения.

В [1] рассмотрена задача оптимизации топологии шарнирных ферм, при описании их как дискретные структуры и как сплошные среды. Обозначены проблемы оптимизации геометрии или конфигурации и топологии данной структуры. Задача рассмотрена с точки зрения различных целевых параметров, таких как внутренние напряжения и собственные частоты. В своей формулировке ограничений по частотам, авторы отметили малое количество работ на тему оптимизации топологии на основании требуемых собственных частот и связали это с локальной нестабильностью и множественностью первой собственной частоты. Проблема нахождения собственных чисел характеризуется следующим образом:

$$K\Phi_r = \Omega_r (M_s + M_0)\Phi_r, (r = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь  $\Omega_r$  и  $\Phi_r$  это  $r$ -е собственное значение и собственный вектор соответственно,  $M_s$  и  $M_0$  – матрицы структурных и неструктурных масс,  $K$  – матрица жесткости, а  $n$  это число степеней свободы деформации.

Пусть  $\bar{\Omega}$  – нижняя граница требуемых собственных значений. Тогда проблема оптимизации топологии определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} & \text{Минимизировать } V = \sum_{i=1}^m A_i L_i, \\ & \text{с ограничениями: } \Omega_r \geq \bar{\Omega}, \quad (r = 1, 2, \dots, n), \\ & \quad \quad \quad A_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned}$$

Здесь  $A_i$  и  $L_i$  обозначают площадь сечения и длину  $i$ -ого стержня.

В дальнейшем авторы описывают методологию оптимизации шарнирных ферм, моделируемых как сплошная среда.

В работе [2] рассмотрена плоская статически определимая ферма с одной дополнительной внешней связью и сдвоенными раскосами (рис. 1). Инерционные свойства фермы моделируются точечными массами, расположенными в узлах нижнего прямолинейного пояса фермы. У каждой массы предполагается наличие только одной вертикальной степени свободы, жесткость всех стержней принимается одинаковой. Была поставлена задача получения аналитических зависимостей частот колебаний предложенной модели фермы в зависимости от числа панелей. Вывод искомых формул произведен методом индукции. Для определения общих членов полученных последовательностей коэффициентов применялся аппарат составления и решения рекуррентных уравнений системы компьютерной математики Maple. Задача определения частот свелась к задаче на собственные значения бисимметричной матрицы.

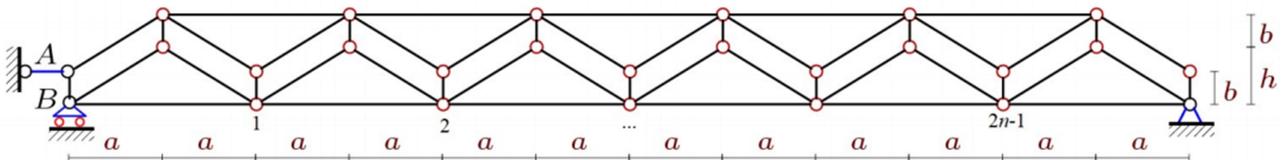


Рис. 1. Ферма с двойными раскосами [2]

Для элементов матрицы податливости  $B_n = \frac{\eta}{n} [b_{j,i}]$  были найдены общие формулы:

$$\begin{aligned} b_{j,i+j-1} &= 4i^3 - \alpha_{2,n}i^2 + \alpha_{1,n}i - \alpha_{0,n}, \\ \alpha_{2,n} &= 12(j-1-2n), \\ \alpha_{1,n} &= 16j^2 - 24(1+2n)j + 32n^2 + 48n + 11, \\ \alpha_{0,n} &= 8j^3 - 16(1+2n)j^2 + (32n^2 + 48n + 11)j - 32n^2 - 22n - 3. \end{aligned}$$

Здесь  $n$  – половина количества панелей рассматриваемой фермы,  $\eta$  – коэффициент, определяемый по формуле  $\eta = (a^3 + 2bh^2 + c^3) / (3h^2EF)$ , где  $E$  – модуль упругости Юнга,  $F$  – площадь сечения стержня фермы, а  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

Для определенного количества случаев  $n$  найдены собственные значения матрицы податливости, например для  $n = 2$ :

$$[B_2] = \frac{\eta}{n} \begin{bmatrix} 75 & 90 & 57 \\ 90 & 132 & 90 \\ 57 & 90 & 75 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 9\eta, \lambda_{2,3} = 3(22 \pm 15\sqrt{2})\eta.$$

Для случая  $n = 3$ :

$$[B_3] = \frac{\eta}{n} \begin{bmatrix} 205 & 308 & 315 & 250 & 137 \\ 308 & 520 & 558 & 452 & 250 \\ 315 & 558 & 657 & 558 & 315 \\ 250 & 452 & 558 & 520 & 308 \\ 137 & 250 & 315 & 308 & 205 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 = 9\eta, \lambda_2 = 42\eta, \lambda_3 = 10\eta/3, \lambda_{4,5} = 6(54 \pm 31\sqrt{3})\eta.$$

Было обнаружено, что для всех случаев  $n$  в собственных значениях встречаются  $\lambda_1 = 9\eta$ , а для всех четных  $n$  –  $\lambda_{2,3} = 3(22 \pm 15\sqrt{2})\eta$ . В дополнение к этому вычисления показали, что для всех  $n$  кратным трем, встречаются собственные значения случая  $n = 3$ , а для всех  $n$  кратных четырем – собственные значения случая  $n = 4$ . Как следствие, выдвинуто более общее предположение, что для фермы с количеством панелей  $n = k_1 k_2$  будут присутствовать собственные значения случаев  $n = k_1$  и  $n = k_2$ .

Также была получена зависимость собственных частот от высоты  $h$  (рис. 2):

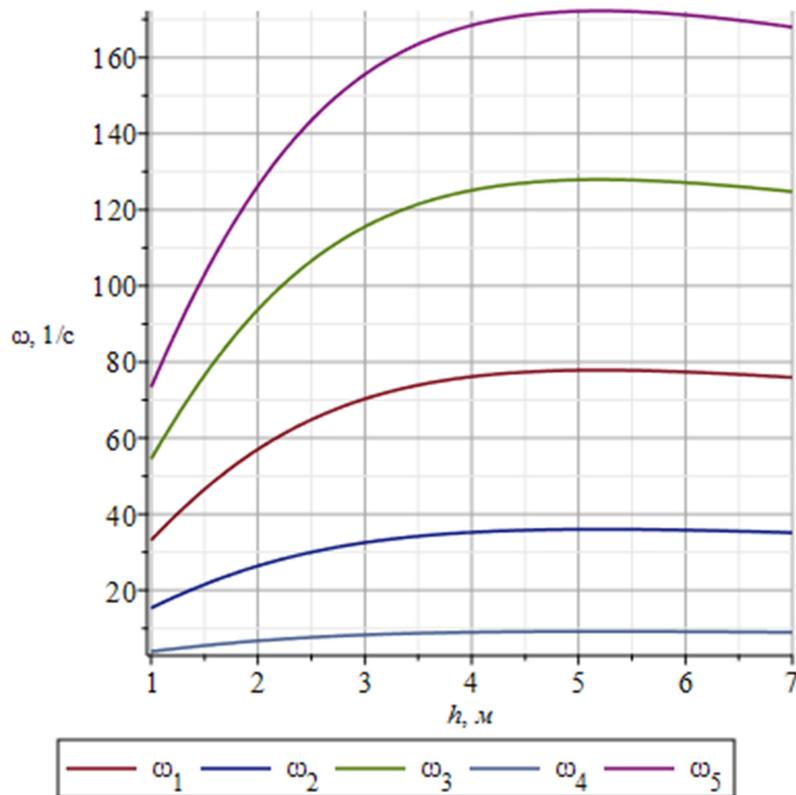


Рис. 2. Зависимость собственных частот от высоты  $h$

Решение найдено для условий  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $EF = 2,0 \cdot 10^7 \text{ N}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $b = 1 \text{ m}$ .

В работе [3] автором рассмотрена балочная ферма (рис. 3) с грузами, закрепленными во всех узлах нижнего пояса. Для данной системы найдена матрица податливости, обнаружено, что она является бисимметричной, получена аналитическая рекуррентная закономерность, позволяющая вычислять ее элементы без каких-либо значительных временных затрат и потери точности.

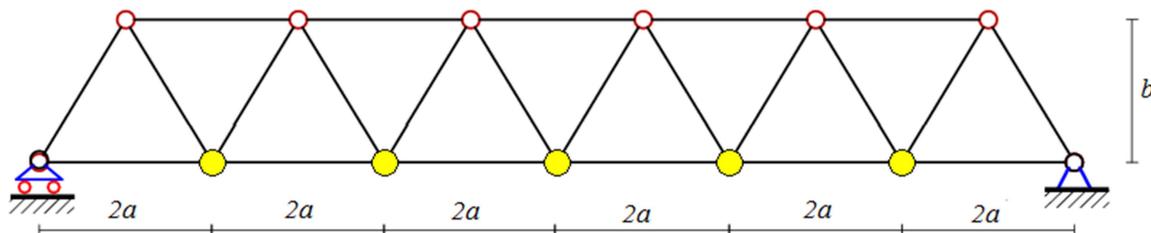


Рис. 3. Балочная ферма [3]

Полученная бисимметричная матрица податливости имеет вид:

$$[B_n] = (4a^3[A_n] / 3n + 2c^3[C_n] / n) / b^2.$$

Здесь  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $[A_n]$  и  $[C_n]$  – числовые бисимметричные матрицы,  $n$  – половина количества панелей фермы. Элементы матрицы  $[C_n]$  определяются как:

$$c_{1,j} = n - j; j = 1, \dots, n - 1; c_{i,j} = i c_{1,j}; i = 2, \dots, n / 2; j = 1, \dots, n - i,$$

а элементы матрицы  $[A_n]$ , в свою очередь, определяются как:

$$a_{i,j} = i(2jn - i^2 - j^2 + 1)(n - j); i = 1, \dots, n / 2, j = i, \dots, n - i.$$

Были получены зависимости собственных частот фермы от размера  $a$  и при различных высотах  $b$ :

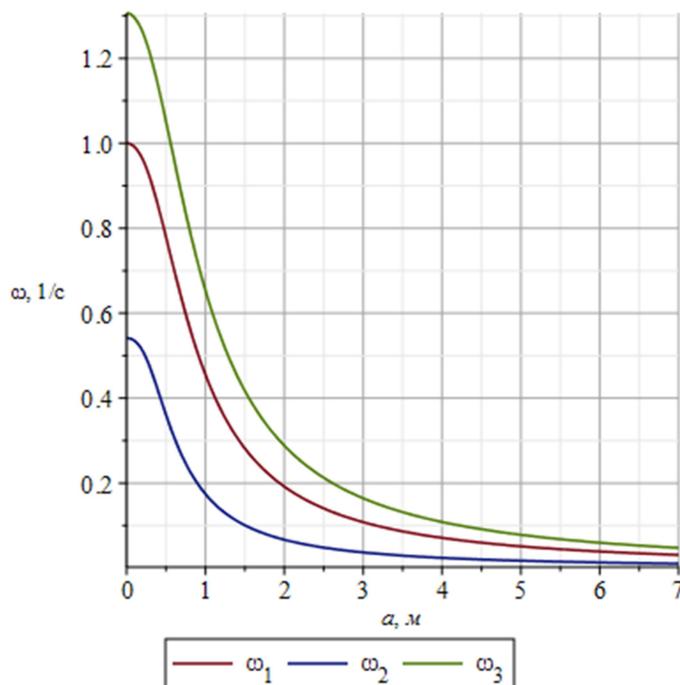


Рис. 4. Зависимость собственных частот от размера  $a$

В работе [4] авторами для анализа плоской балочной фермы (рис. 5) регулярной структуры с произвольным числом панелей и нагруженной массой  $m$  средним узлом нижнего пояса был применен аналитический метод расчета собственных частот, а именно вывод формул индуктивным методом.

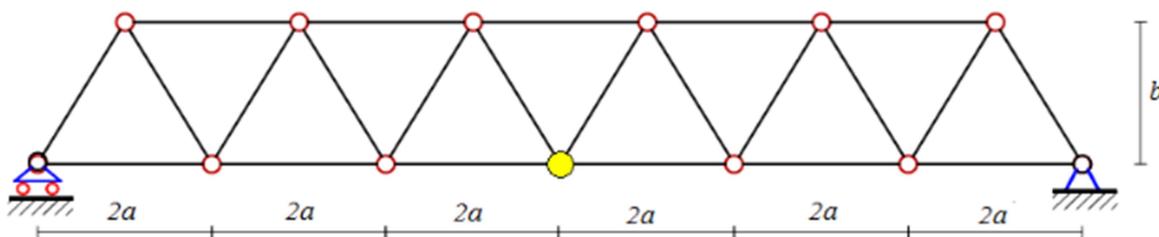


Рис. 5. Балочная ферма [4]

Задача свелась к определению усилий в стержнях фермы и нахождению коэффициентов матрицы податливости. Получены собственные числа матрицы податливости.

В работе [5] рассмотрены малые колебания системы грузов, расположенных в узлах верхнего прямолинейного пояса статически определимой фермы (рис. 6). Масса самой фермы не учитывается. Для определения собственных частот данной конструкции, авторы находят аналитическое выражение для матрицы податливости посредством индукции в СКА Maple. Данная матрица представляется в виде суммы трёх бисимметричных [18] матриц, одна из которых единичная, разреженная нулями.

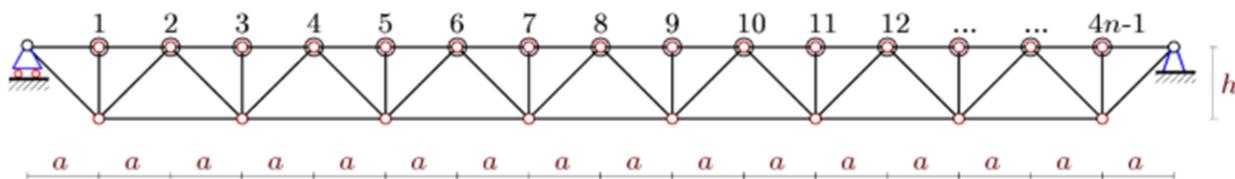


Рис. 6. Ферма, нагруженная в узлах верхнего пояса [5]

Также получены аналитические выражения для собственных чисел фермы:

$$\lambda_1 = (a^3 + c^3 + 2h^3) / (2EFh^2),$$

$$\lambda_{2,3} = (6a^3 + 2c^3 + h^3 \pm \sqrt{h^6 + 32a^6 + 16a^3c^3 + 2c^6}) / (2EFh^2).$$

Здесь  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $E$  – модуль упругости Юнга,  $F$  – площадь сечения стержня фермы.

В работе [6] авторы исследуют вертикальные колебания массивного груза на плоской статически определимой симметричной ферме регулярного типа с параллельными поясами (рис. 7). Масса фермы не учитывается. Для получения аналитических соотношений собственных частот в зависимости от положения груза на ферме, а также от числа панелей её панелей, авторами использовалась СКА Maple. Для определения усилий в стержнях использовался метод вырезания узлов. Было рассмотрено несколько частных случаев для фиксированных положений груза, после чего они были обобщены с помощью метода двойной индукции.

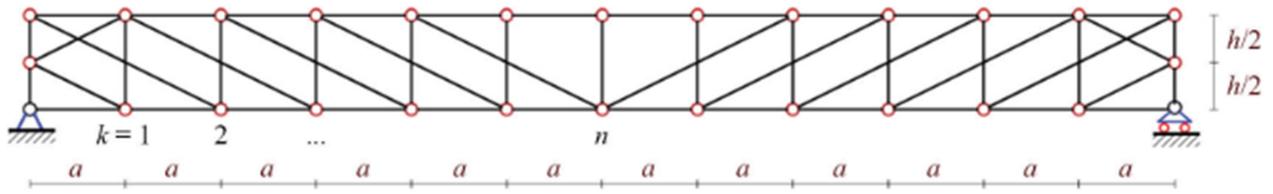


Рис. 7. Ферма регулярного типа с параллельными поясами [6]

Получена общая форма коэффициента податливости:

$$\delta_{n,k} = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (2h^2 n^2),$$

$$c = \sqrt{4a^2 + h^2}.$$

Здесь  $n$  – число панелей в половине пролёта,  $k$  – номер нагруженного узла, а коэффициенты  $C_1, C_2, C_3$  определяются по следующим формулам:

$$C_1 = (8n^3 - 12n^2 + (3(-1)^n + 13)n - 3 + 3(-1)^n) / 3,$$

$$C_2 = (4n^2 + (2 + 2(-1)^n)n + (-1)^n - 1) / 8,$$

$$C_3 = (12n^2 - (2 + 2(-1)^n)n - 3 + 3(-1)^n) / 8.$$

В работе [7] рассматривается задача поиска собственных частот фермы с крестообразной решеткой и двумя неподвижными опорами (рис. 8). Массы расположены в нижних узлах пояса, их горизонтальные колебания не рассматриваются. Для получения аналитического решения была использована СКА Maple, общее решение получено индукцией нескольких частных решений. Жесткость фермы определялась по формуле Максвелла-Мора.

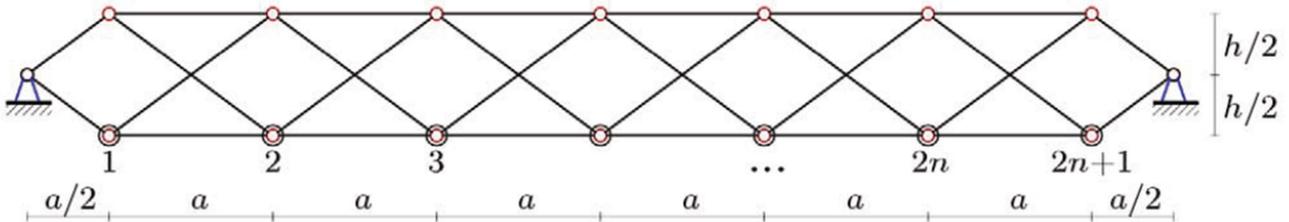


Рис. 8. Ферма с крестообразной решеткой [7]

В работе [8] решается задача поиска собственных частот плоской фермы с нисходящими раскосами и параллельными поясами (рис. 9). Массы размещены в узлах нижнего пояса, исследуются вертикальные смещения грузов. Уравнения движения записываются в матричной форме. Показано, что для симметричной фермы матрицы решения принимают бисимметричный вид, что позволяет получить аналитическое решение для частот конструкции. Общее решение получено индукцией после получения нескольких частных. Найдено, что одна из частот не зависит от количества панелей фермы, и является средней в спектре частот.

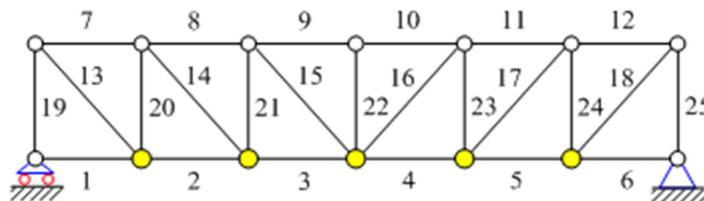


Рис. 9. Плоская ферма с нисходящими раскосами [8]

В [9] автором рассмотрена задача оценки низшей частоты статически определимой плоской фермы с треугольной решеткой (рис. 10), в узлах нижнего пояса которой размещены одинаковые массы, моделирующие ее инерционные свойства. Горизонтальные колебания масс не учитываются, оценка производится методом Донкерлея в СКА Maple. Матрица податливости системы определяется с использованием формулы Максвелла-Мора для вычисления перемещений в упругих стержневых системах. Обобщение решения производится посредством индукции сначала по номеру сосредоточенной массы, а после по числу панелей в ферме. Результаты, полученные с помощью данного метода проверены численным моделированием, максимальная погрешность не превышает 6%, точность растёт с числом панелей.

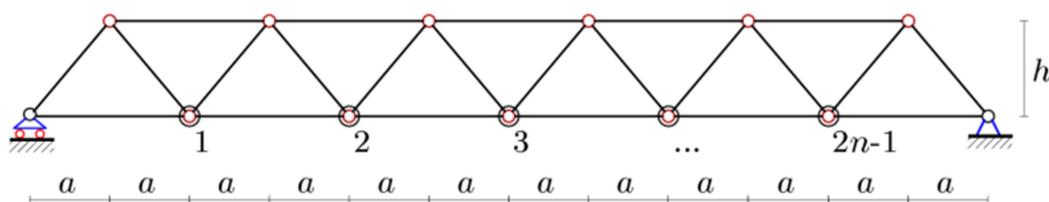


Рис. 10. Ферма с треугольной решеткой, нагруженная в узлах нижнего пояса [9]

В работе [10] рассматривалась задача поиска собственных частот в регулярных стержневых конструкциях, был разработан алгоритм вывода аналитических зависимостей частот собственных колебаний статически определимых симметричных конструкций, в зависимости от упругих свойств, линейных размеров и числа периодических элементов. Доказана бисимметричность матриц, входящих в решение в случае симметричных конструкций, получены простые аналитические оценки первой собственной частоты снизу. Для решения задачи использовалась трехпараметрическая индукция, операторы и алгоритмы СКА Maple. Для проверки результатов решения использовался программный пакет Lira, проводящий численные расчеты. Получено свойство вложения спектров собственных частот колебаний, означающее, что для регулярных систем порядков  $n$  и  $m$  спектры этих систем включены в спектр системы порядка  $nm$ .

В качестве примера, автором приведен пример расчёта матрицы податливости для симметричной фермы (рис. 11):

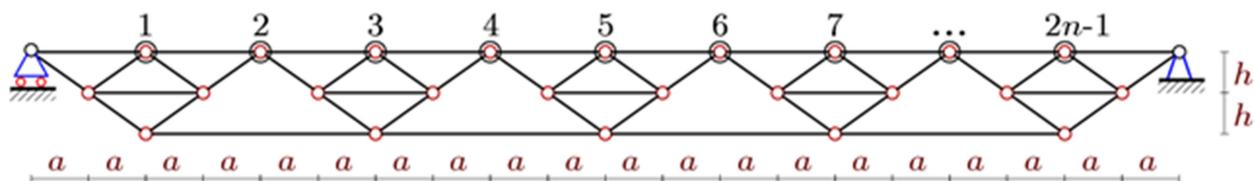


Рис. 11. Симметричная ферма, нагруженная в узлах верхнего пояса [10].

В работе [11] исследована многослойная балка с внутренним слоем, выполненным в качестве шарнирной фермы, с пирамидальным базовым элементом (рис. 12). Данная ферма, в дальнейшем анализе, заменяется однородным материалом с эквивалентными характеристиками. Деформации балки рассматриваются при следующих допущениях: (1) толщина балки во время деформации остается постоянной; (2) для внешних тонких слоев балки рассматриваются только изгибные деформации, влияние поперечных сдвиговых деформаций не учитывается; (3) для среднего слоя балки рассматриваются только сдвиговые деформации, так как данный слой не делает значительного вклада в общую жесткость балки на изгиб. Сдвиговые напряжения принимаются постоянными по всей толщине среднего слоя. Авторы определяют уравнение колебаний исходя из принципа Гамильтона, и находят собственные частоты данной конструкции при граничных условиях свободного опирания балки. В дальнейшем

производятся численные вычисления собственных частот конструкции и соответствующих мод колебаний. Аналитическое решение хорошо согласуется с численными результатами, что показывает применимость вышеуказанного метода для определения собственных частот многослойной балки, со средним слоем, выполненным в качестве шарнирной фермы.

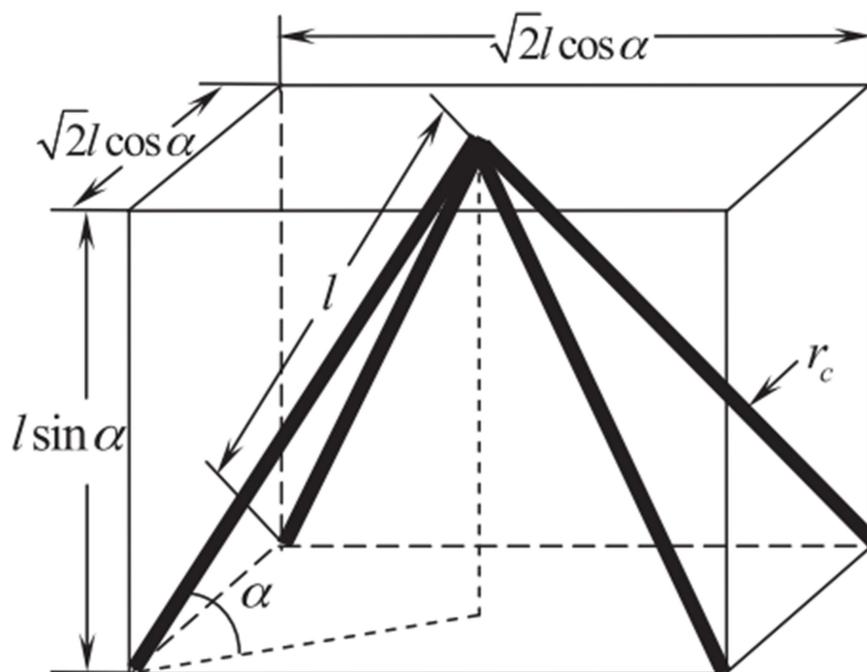


Рис. 12. Пирамидальный базовый элемент многослойной балки [11].

В работе [12] исследуются собственные частоты многослойной балки с помощью комбинирования теории балки Бернулли – Эйлера и теории балки Тимошенко. Общие уравнения колебаний балки получены с помощью принципа Гамильтона, из них найдены аналитические уравнения для собственных частот. После проверки полученного результата численными вычислениями, исследована зависимость спектра собственных частот балки от свойств топологии, геометрии и материала.

Рассматривая различные неопределенности в определении параметров многослойных балок, авторы предложили новый метод интервального анализа, на основании которого они рассмотрели влияние данных неопределенностей на спектр собственных частот балки. В дальнейшем был разработан метод интервальной оптимизации многослойной балки с учетом верхней и нижней границ первой собственной частоты, так как вышеуказанный анализ показал, что неопределенности в параметрах сильно влияют на спектр балки.

В работе [13] предложена упрощенная модель кольцевой шарнирной фермы для развертываемой сегментной антенны, зафиксированной вдоль одной направляющей (рис. 13). Пространственный базовый элемент структуры заменяется плоским, после чего вводится модель цилиндрического каркаса с эквивалентными параметрами. С использованием упрощенного базового элемента и метода гомогенизации были получены эквивалентные жесткость мембраны и жесткость на изгиб. В дальнейшем были выведены дифференциальные уравнения движения цилиндрического каркаса, зафиксированного вдоль одной направляющей, с помощью теории тонкого каркаса Доннелла. Теоретические результаты были проверены с помощью метода конечного элемента, было показано, что модель хорошо согласуется с численными результатами. Также было отмечено, что точность модели определяется количе-

ством заменяемых базовых элементов – малое их количество приводит к увеличению ошибок.

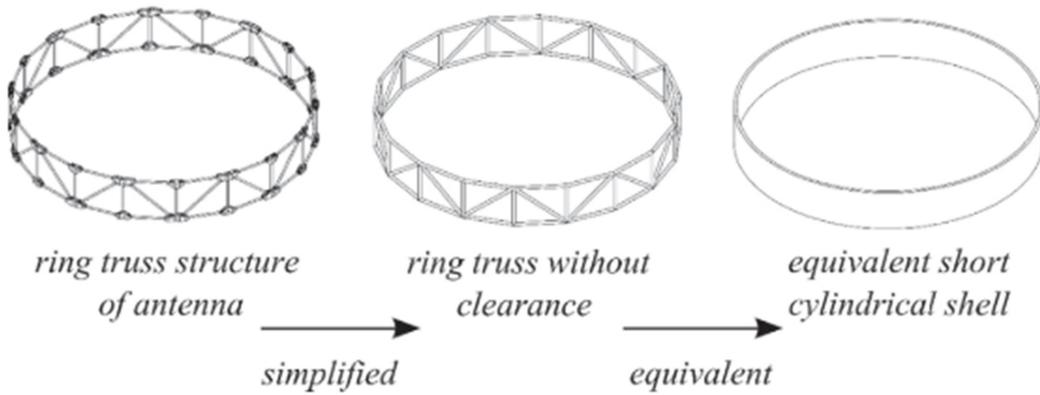


Рис. 13. Схема последовательного приведения реальной структуры к исследуемой модели [13]

В работе [14] авторы предлагают упрощенную математическую модель многоэтажного здания для вибрационного анализа данной комбинированной системы (рис. 14). Так как механические свойства не являются непрерывной функцией вертикальной координаты здания, модель разбивается на участки между точками разрыва, после чего они исследуются как сплошные структуры, с помощью вариационного принципа Гамильтона были получены уравнения движения в общей формы для колебаний многоэтажного здания. Используя метод разделения переменных, частные дифференциальные уравнения движения сводятся к общим с одним переменным коэффициентом, тогда как остальные коэффициенты принимаются постоянными, в предположении того, что поперечные деформации являются гармоническими колебаниями. Для проверки метода было проведено численное моделирование, которое показало его применимость. Полученная математическая модель позволяет провести быстрый анализ динамических характеристик строения на ранних этапах проектирования.

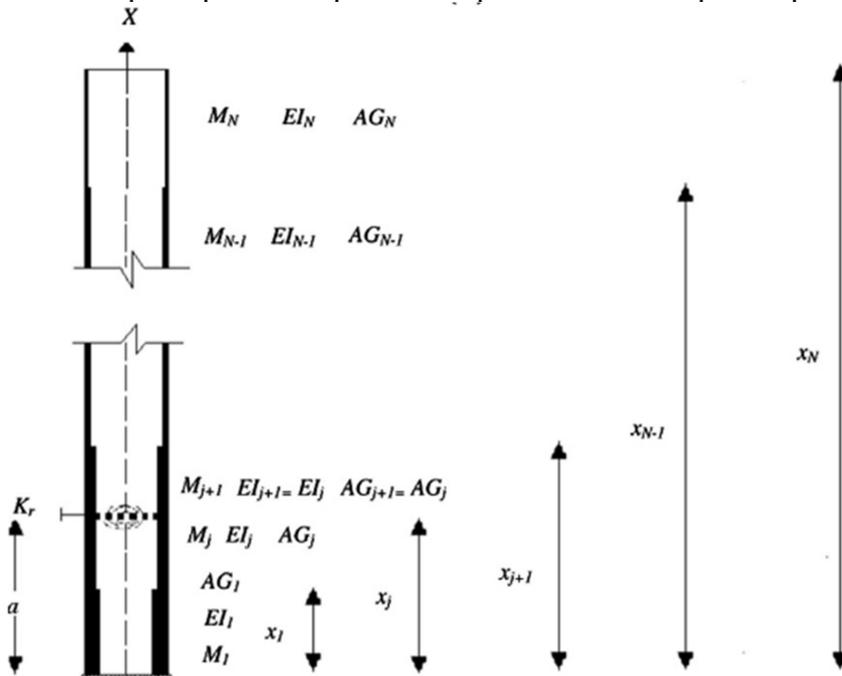
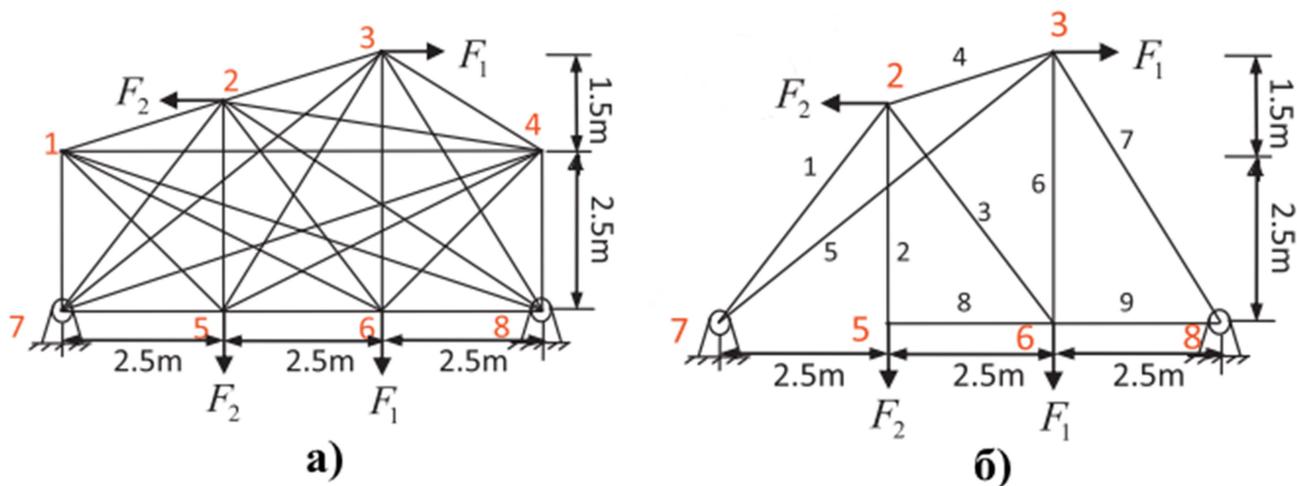


Рис. 14. Схема упрощенной модели многоэтажного здания [14]

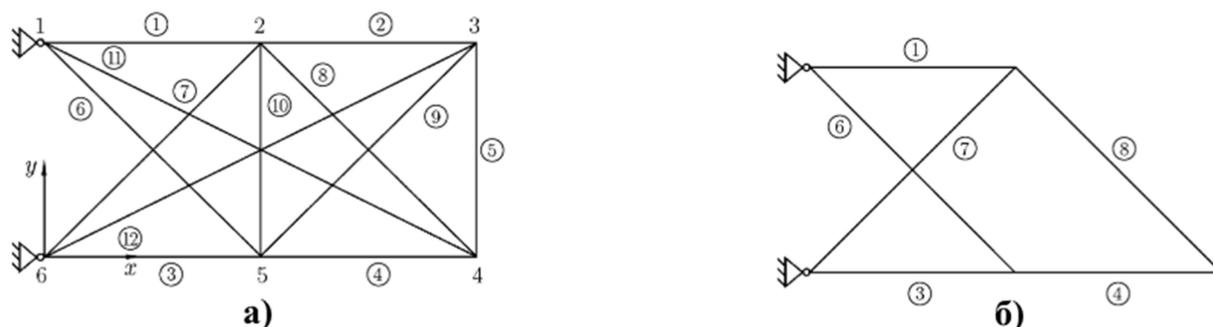
В работе [15] рассмотрена задача оптимизации топологии шарнирной конструкции с ограничениями на внутренние напряжения, смещения, прогиб и собственные частоты. Так

как аналитические выражения ограничений, накладываемых на собственную частоту конструкции, являются нелинейными, невыпуклыми и неявными по отношению к переменным параметрам конструкции, поиск оптимального решения является сложной проблемой. Предлагается использовать недавно разработанный метод CSS (charged system search). Данный метод использует законы электростатики Кулона и Гаусса и законы Ньютоновской механики. Алгоритм работает с массивом агентов, которые называются заряженными частицами (CP – charged particle). Каждый такой агент оказывает влияния на другие посредством законов Кулона и Гаусса. Результирующие усилия и законы движения описывают новое положение агентов. Для определения начальных условий используется метод базовой структуры, в которую включены все возможные узлы и связи между ними. Результаты работы алгоритма представлены на рис. 15:



**Рис. 15.** Результаты работы алгоритма:  
а) – базовая структура, б) – результат работы метода CSS [15]

В работе [16] рассматривается задача оптимизации шарнирной конструкции с наложенными на нее ограничениями на собственные частоты, смещение под действием внешней возбуждающей силы и ускорения под действием ускорения основания. Для решения данной задачи применяется адаптивный генетический алгоритм, предлагаются несколько эвристических стратегий для определения избыточных балок и узлов шарнирной конструкции. Полученный алгоритм может быть обобщен на проблему статической оптимизации топологии и динамической оптимизации топологии с другими возбуждающими силами. Результат работы алгоритма представлен на рис. 16:



**Рис. 16.** Результаты работы алгоритма:  
а) – базовая структура, б) – результат работы алгоритма [16]

Здесь при оптимизации рассматривались два случая нагружения:

1. Две периодические возбуждающих силы, приложены к узлам 4 и 5.

2. Основание, к которому крепится шарнирная ферма, движется с периодическим ускорением

В работе [17] представлен полуаналитический метод динамической гомогенизации и вибрационного анализа многослойной балки (рис. 17) с внутренним слоем, выполненным в качестве шарнирной фермы. Данный метод основывается на прогнозировании распространения и затухания Блоховской волны в периодической структуре шарнирной фермы с использованием метода конечных элементов. С использованием стандартных пакетов можно провести подобную симуляцию с высокой эффективностью, так как моделируется только одна характерная ячейка фермы. В дальнейшем строится динамически эквивалентная модель балки Тимошенко, соотносением с полученными при моделировании волновыми числами распространяющихся и затухающих изгибных деформаций данной многослойной балки. Динамически эквивалентные параметры балки, такие как жесткость при изгибе, жесткость при сдвиге, а также модуль Юнга и модуль сдвига определяются как явные соотношения, зависящие от волновых чисел. В дальнейшем авторы исследовали свободные колебания многослойной балки конечной длины с различными граничными условиями. Полученный метод показал большую точность определения собственных частот, чем существующие численные методы.

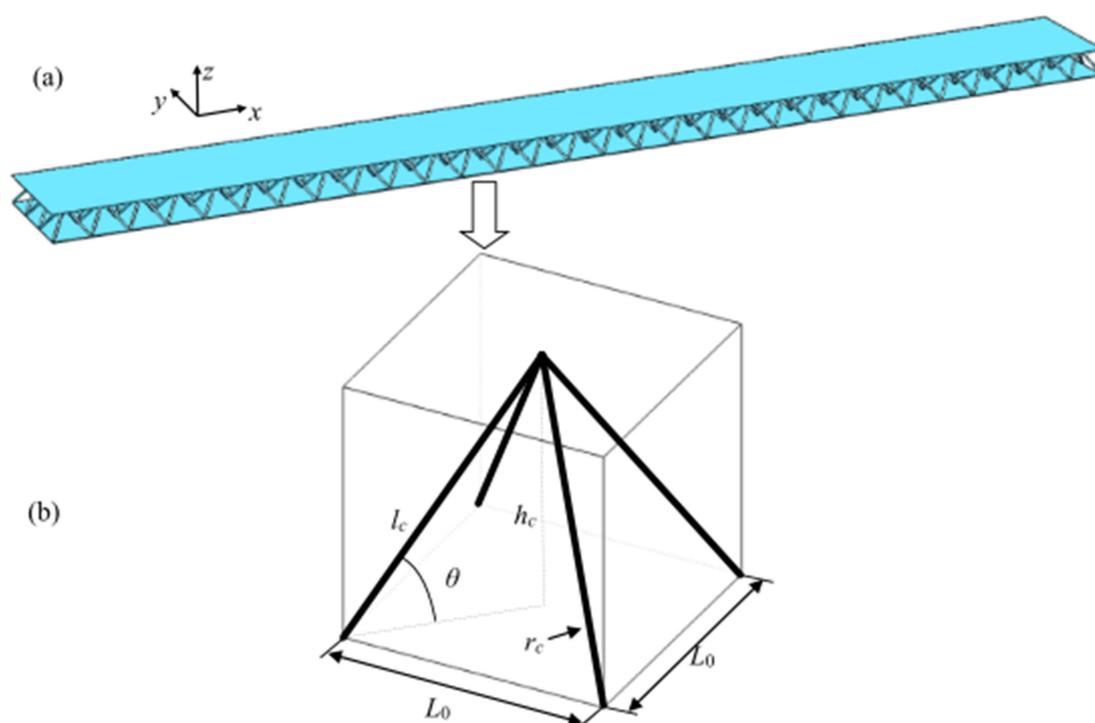


Рис. 17. Расчетная схема:

(a) – многослойная балка, (b) – базовый элемент шарнирной фермы [17]

## Выводы

Так как стержневые конструкции находят все большее применение в различных областях науки, потребность в анализе динамических характеристик и параметров также растёт. Разрабатываемые методы исследования можно разделить в три категории: *аналитические*, которые предоставляют наибольшую точность и быстродействие, позволяющие еще на ранних этапах разработки провести оценку, в частности, собственных частот конструкции; *численные*, позволяющие проводить анализ в более общих случаях или же случаях, где аналитические решения еще не найдены; *смешанные*, с помощью которых можно численными методами создать модель, для которой уже имеются аналитические зависимости.

## Библиографический список

1. Ohsaki M., Swan C. Topology and geometry optimization of trusses and frames // *Recent Advances in Optimal Structural Design* / Edited by S. A. Burns – 2002 – Pp. 97-124.
2. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Анализ собственных частот колебаний плоской фермы с произвольным числом панелей // *Вестник МГСУ*. 2019. - Т.14. - В.3. - С. 179-187.
3. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. М: Инфра-М. 2015. - Т. 1.
4. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 11* / Тамбов: ООО “Консалтинговая компания Юком”, 31 октября 2014. - С. 17-18.
5. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В., Формулы для расчёта спектра частот собственных колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // *Постулат*. 2019. - № 3. - С. 11.
6. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // *Строительство: наука и образование*. 2018. - Т. 8. - №. 4. - Ст. 3.
7. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // *Транспортное строительство*. 2019. - №2. - С. 20-23.
8. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2019. - №1(20). - С. 14-20.
9. Кирсанов М.Н. Формула зависимости низшей частоты колебания балочной фермы от числа панелей // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2019. № 3. С. 45-49.
10. Тиньков Д.В. Аналитические решения задач о собственных частотах колебаний регулярных стержневых систем: автореф. ... канд. техн. наук. – М. – 20 с.
11. Jia L., Li M., Lin-Zhu W. Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core // *Materials Science and Engineering B: Solid-State Materials for Advanced Technology*. – 2012. - № 19. – Pp. 1712-1716.
12. Xu M., Qiu Z. Free vibration analysis and optimization of composite lattice truss core sandwich beams with interval parameters // *Composite Structures*. – 2013. – V. 106. – Pp. 85-96.
13. Zhang W., Xi A., Siriguleng B., Liu G. An equivalent cylindrical shell model of vibration analysis based on simplified repeating unit cell for ring truss structure // *Journal of Sound and Vibration*. – 2019. – V.459.
14. Kamgar R., Saadatpour M.M. A simple mathematical model for free vibration analysis of combined system consisting of framed tube, shear core, belt truss and outrigger system with geometrical discontinuities // *Applied Mathematical Modelling*. – 2012. – V. 36. - № 10. – Pp. 4918-4930.
15. Kaveh A., Zolghadr A. Topology optimization of trusses considering static and dynamic constraints using the CSS // *Applied Soft Computing Journal*. – 2012. – Pp. 8-15.
16. Jin P., De-yu W. Topology optimization of truss structure with fundamental frequency and frequency domain dynamic response constraints // *Acta Mechanica Solida Sinica*. – 2006. - № 3. – Pp. 231-240.
17. Jiajia G., Yong X., Shufeng Z., Jihong W. Bloch wave based method for dynamic homogenization and vibration analysis of lattice core sandwich structures // *Composite Structures*. – 2019. - № 229.

18. Vorobiev O., Kirsanov M., Cherepanov S. About some bisymmetric matrix of regular type // В сборнике: Наука и образование в XXI веке сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции: в 34 частях. 2013. С. 9-10.

References:

1. Ohsaki M., Swan C. Topology and geometry optimization of trusses and frames. Recent Advances in Optimal Structural Design. Edited by S. A. Burns – 2002 – Pp. 97-124.
2. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. Vestnik MGSU. 2019. - V. 14. - №3. – Pp. 284-292. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
3. Kanatova M.I. Frequency equation and vibration analysis of planar frame. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. 2015. - V. 1.
4. Ahmedova E.R., Kanatova M.I. Natural frequencies of waves in regularly structured planar frame. Science and education in XXI century: collection of scientific works of International scientific and practical conference 31 October 2014 г. in 17 parts. Part 11. Tambov: Ltd “Ukom consultancy company”, 31 October 2014. - Pp. 17-18.
5. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Formulas for calculating natural frequencies spectrum of a frame with arbitrary amount of panels. Postulat. 2019. - № 3. - Pp. 11.
6. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical solution of the frequency of the load oscillation at an arbitrary girder node in the system Maple. Construction: Science and Education. 2018. – V. 8. - № 4. – Pp. 3. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3.
7. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Natural frequencies spectrum of statically definable lattice. Transport Construction. 2019. - №2. - Pp. 20-23.
8. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of the frequencies of small oscillations of a girder with an arbitrary number of panels. Construction mechanics and structures. 2019. - №1(20). - Pp. 14-20.
9. Kirsanov M.N. Кирсанов М.Н. Equation for dependency between lowest natural frequency of truss and its number of panels. Construction mechanics and structure design. - 2019. - № 3. - Pp. 45-49.
10. Tinkov D.V. Analytical solutions for the problem of natural frequencies in regular truss systems: synopsis ... candidate of engineering sciences. – M. – 20 p.
11. Jia L., Li M., Lin-Zhu W. Free vibration analysis of simply supported sandwich beams with lattice truss core. Materials Science and Engineering B: Solid-State Materials for Advanced Technology. – 2012. - №19. – Pp. 1712-1716.  
DOI: 10.1016/j.mseb.2012.02.003
12. Xu M., Qiu Z. Free vibration analysis and optimization of composite lattice truss core sandwich beams with interval parameters. Composite Structures. – 2013. – V. 106. – Pp. 85-96.  
DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.05.048
13. Zhang W., Xi A., Siriguleng B., Liu G. An equivalent cylindrical shell model of vibration analysis based on simplified repeating unit cell for ring truss structure. Journal of Sound and Vibration. – 2019. – V.459. DOI: 10.1016/j.jsv.2019.114847
14. Kamgar R., Saadatpour M.M. A simple mathematical model for free vibration analysis of combined system consisting of framed tube, shear core, belt truss and outrigger system with geometrical discontinuities. Applied Mathematical Modelling. – 2012. – V. 36. - № 10. – Pp. 4918-4930. DOI: 10.1016/j.apm.2011.12.029
15. Kaveh A., Zolghadr A. Topology optimization of trusses considering static and dynamic constraints using the CSS. Applied Soft Computing Journal. – 2012. – Pp. 8-15.
16. Jin P., De-yu W. Topology optimization of truss structure with fundamental frequency and frequency domain dynamic response constraints. Acta Mechanica Solida Sinica. – 2006. - № 3. – Pp. 231-240. DOI: 10.1007/s10338-006-0628-2

17. Jiajia G., Yong X., Shufeng Z., Jihong W. Bloch wave based method for dynamic homogenization and vibration analysis of lattice core sandwich structures. *Composite Structures*. – 2019. - № 229. DOI: 10.1016/j.compstruct.2019.111437
18. Vorobiev O., Kirsanov M., Cherepanov S. About some bisymmetric matrix of regular type. *Science and Education in XXI century*. – 2013. – Pp. 9-10.

## **ABOUT METHODS OF OBTAINING ANALYTICAL SOLUTION FOR EIGENFREQUENCIES PROBLEM OF TRUSSES.**

O.V. Vorobyev<sup>1</sup>

National research university “Moscow power engineering institute”<sup>1</sup>

Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>Postgraduate, ph.: +7(916)709-06-61; e-mail: olvarg@mail.ru

---

For effective use of structural systems, it is often desired to find potentially optimal variants of shape and topology in the early design stage. However, it is generally the case, that such problem is nontrivial, due to search space for optimal solutions is nonconvex, and dependencies between design variables and parameters being optimized – implicit and nonlinear. To solve that problem a number of methods are used, such as analytical, that show greater accuracy and better performance for particular cases, and numerical methods, that are used for more general cases.

One of the important dynamical parameters, which can be used for optimization is eigenfrequency of given structure. In this article are considered articles about vibrational analysis of structural systems, problems of obtaining analytical dependencies of dynamical characteristics from topology and geometry of trusses, multi-parameter optimization using discrete structure modeling methods.

**Keywords:** truss, frame, induction, analytical solution, optimization, topology, geometry.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.26

## ОЦЕНКА ДИНАМИЧЕСКИХ КАЧЕСТВ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО АВТОДОРОЖНОГО МОСТА ПО ДАННЫМ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ И ПОВЕРОЧНЫХ РАСЧЕТОВ

В.С. Сафронов<sup>1</sup>, А. В. Антипов<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1</sup>,  
ООО «Дортранспроект»<sup>2</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф., профессор кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 2715230,  
e-mail: [yss22@mail.ru](mailto:yss22@mail.ru)

<sup>2</sup> Ведущий инженер

Для оценки динамических качеств капитально отремонтированного автодорожного моста с металлическим пролетным строением сопоставляются данные натурных динамических испытаний с результатами выполненных расчетов на проезд тяжелых трехосных автомобилей. Обнаружена существенная зависимость колебаний пролетных строений от скорости движения во время нахождения автомобилей на пролетном строении и после съезда, которая объясняется динамическими параметрами сооружения.

Описывается конструкция металлического пролетного строения из двух разрезных несущих балок, объединенных системой вертикальных и горизонтальных связей, а также металлической ортотропной плитой проезжей части. Приводятся прогибограммы зарегистрированных при натурных динамических испытаниях колебаний пролетного строения и результаты выполненного статистического анализа в виде спектральных плотностей прогибов в среднем сечении главных балок одного из пролетов. По данным модального анализа металлического пролетного строения в типовом пролете моста с помощью пространственной конечно-элементной расчетной схемы определяются собственные частоты и формы несущей конструкции. Выявлены особенности спектра частот смонтированных при капитальном ремонте новых пролетных строений. Приводятся результаты динамических расчетов пролетного строения на действие движущегося с постоянной скоростью трехосного грузового автомобиля. Расчетные прогибы сопоставляются с измеренными при натурных динамических испытаниях моста. В численных расчетах подтверждается выявленное при натурных испытаниях влияние скорости движения и неровностей на проезжей части. При исследовании свободных колебаний пролетных строений обнаружены биения, совпадающие по характеру с колебаниями натурального сооружения.

Выполненные экспериментально-теоретические исследования позволяют оценивать динамические качества моста и принимать обоснованные решения по организации безопасного режима эксплуатации транспортного сооружения.

**Ключевые слова:** автодорожный мост, капитальный ремонт, разрезное металлическое пролетное строение, натурные динамические испытания, расчетное моделирование, динамические характеристики, факторы влияния, биения.

### Введение

При замене обладающих благоприятными динамическими качествами сталежелезобетонных пролетных строений на облегченные металлические по проекту капитального ремонта без проведения подробных динамических расчетов при эксплуатации возможны повышенные колебания как в моменты движения автомобилей на мосту, так и после их съезда. Для устранения таких явлений на стадии проектирования следует осуществлять подробные динамические расчеты, позволяющие принимать обоснованные проектные решения или устанавливать безопасные режимы проезда.

© Сафронов В. С., Антипов А. В., 2020

Современные вычислительные комплексы, реализующие эффективные алгоритмы метода конечного элемента, специализированы на весьма разнообразных проблемах строительной механики, однако не имеют апробированных блоков динамического расчета мостовых сооружений на инертную подвижную нагрузку.

Теория динамического расчета мостов на подвижную нагрузку в течение XX века стремительно развивалась как в нашей стране, так и за рубежом. Отметим наиболее существенные публикации по этой проблеме Крылова А. Н. [1], Болотина В. В. [2], Киселева В. А. [3], Ананьина А. И. [5], Фрыбы Л. [6], Моргаевского А. Б. [7] и др. Анализ состояния теории к середине 60-х годов прошлого века приведен в [4].

Существенное развитие теория динамического действия подвижной нагрузки на автодорожные мосты получила в известной научной школе, созданной в Воронежском ИСИ под руководством проф. А.Г. Барченкова [8-12]. При этом развивались инертные модели автотранспортных средств и стохастические представления динамических воздействий.

Метод конечного элемента для задач динамики мостов впервые осуществили в МИИТе под руководством проф. Шапошникова Н. Н. [13], однако дальнейшего развития первые постановки не получили. В настоящее время теория вновь заинтересовала исследователей, что вызвано возведением мостовых сооружений из высокопрочных тонкостенных несущих конструкций, для которых возможно возникновение резонансных колебаний при неблагоприятных динамических качествах [17]. Резонансные колебания многопролетного сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста существенно превышающим нормативное значение динамическим коэффициентом зафиксированы даже при обычных эксплуатационных воздействиях [18].

Новейшие алгоритмы динамического расчета мостовых сооружений ориентируются на использование широко распространенных конечно-элементных комплексов, специализированных на их применение для мостовых сооружений. В работе [19] предложены и апробированы на модельном примере балочного моста уточненный алгоритм и программа динамического расчета на действие подвижной инертной нагрузки, в которых выполняется последовательное применение конечно-элементного комплекса SAP2000 и специализированной математической программы Mathcad. Апробация этой эффективной методики для железобетонного моста с плитным неразрезным пролетным строением выполнена в работе [20] путем сопоставления ее результатов с данными натурных динамических испытаний эксплуатируемого моста. При этом доказана возможность её применения для любых несущих систем мостовой конструкции и произвольных автотранспортных средств, включая многоосные автопоезда.

Теоретический и практический интерес к рассматриваемой проблеме проявился в последние десятилетия исследователями из Китая [14-16]. При этом наряду с численными расчетами совместных колебаний движущихся автомобилей и мостовых сооружений используются экспериментальные исследования поведения тонкостенных металлических пролетных строений на моделях, изготовленных в соответствии с классической теорией подобия.

В настоящей статье изучаются динамические качества капитально отремонтированного автодорожного моста с металлическим пролетным строением путем сопоставления данных натурных динамических испытаний с результатами выполненных расчетов на проезд тяжелых трехосных автомобилей. При этом обнаружена существенная зависимость колебаний пролетных строений от скорости движения во время нахождения автомобилей на пролетном строении и после съезда, которая объясняется динамическими параметрами сооружения. При исследовании свободных колебаний пролетных строений зафиксированы биения, совпадающие по характеру с колебаниями натурального сооружения.

## 1. Описание объекта исследования

Объектом исследования является капитально отремонтированный автодорожный мост через реку Хопер на км 479+350 автомобильной дороги Р-22 «Каспий». Общий вид моста с правой стороны от конца сооружения представлен на рис. 1.

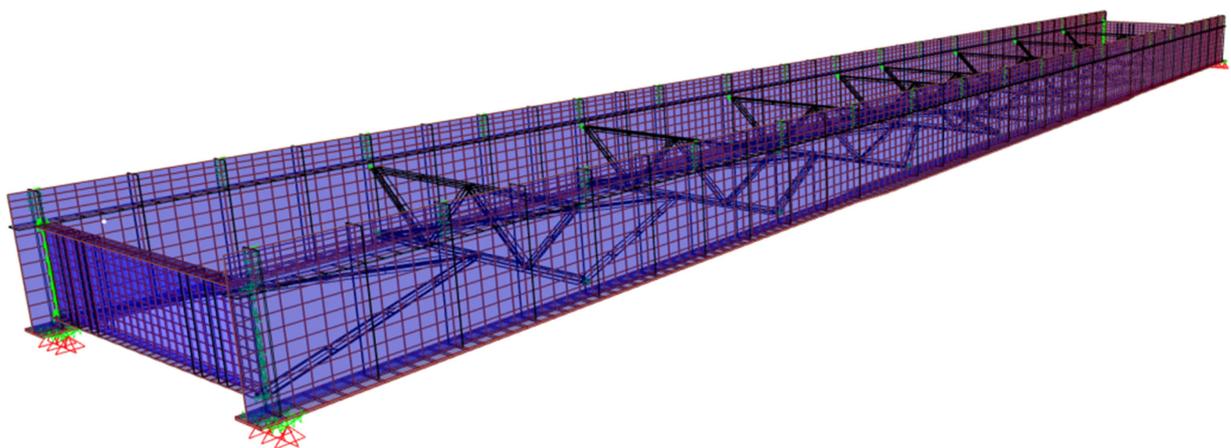
В соответствии с проектом капитального ремонта новые разрезные металлические пролетные строения по схеме  $6 \times 42,5$  м смонтированы на усиленные опоры ранее существовавшего моста. Они представляют собой пространственную конструкцию (рис. 2), состоящую из двух сплошностенчатых

главных балок высотой 2,5м, объединенных между собой поперечными связевыми фермами и металлической ортотропной плитой. В поперечном сечении шаг главных балок составляет 5,8 м. Монтажные блоки главных балок пролетных строений и элементов ортотропной плиты проезжей части соединены на высокопрочных болтах.

На устоях моста выполнена забивка дополнительных железобетонных призматических свай. Усиление промежуточных опор моста выполнено путем устройства монолитных обойм контурных блоков и ригелей.



**Рис. 1.** Общий вид моста с правой стороны от конца сооружения



**Рис. 2.** Конструктивная схема одного из пролетов мостового сооружения из двух главных стальных двутавровых балок (ортотропная плита проезжей части условно не показана)

## 2. Методика и результаты проведения динамических испытаний моста

При проведении динамических испытаний моста использовались два загруженных трехосных самосвала SHACMAN массой каждого около 41 т. Общий вес испытательной нагрузки – 82,28 тс. Испытания осуществлялись пропуском автомобилей с различными скоростями друг за другом по полосам проезда в различных направлениях через уложенную на проезжей части доску толщиной 5 см (рис. 3).



**Рис. 3.** Проезд грузовых трехосных автомобилей друг за другом через уложенную на проезжей части моста доску толщиной 50 мм

При испытаниях измерялись вертикальные прогибы главных металлических балок Б1 и Б2 в сечениях посередине 1-го пролёта моста. Регистрация колебаний главных балок пролетного строения осуществлялась с помощью электронного измерительного комплекса с использованием двух триангуляционных лазерных датчиков серии РФ603 производства ООО «РИФТЕК» республики Беларусь. Установленные под мостом электронные датчики измеряли вертикальные прогибы нижнего пояса в среднем сечении балки Б1 и среднем сечении балки Б2 в 1-м пролете.

Измерения вертикальных прогибов главных стальных балок пролетного строения осуществлялись относительно неподвижной точки на берегу реки Хопер. Для этого между нижними поясами главных балок Б1 и Б2 пролетного строения и укрепленном в грунте на берегу реки деревянным брусом располагалась проволочная связь, к которой через гибкую металлическую пружину жесткостью около 1,0 кгс/см был закреплен экран на расстоянии 105 мм для отражения лазерного луча измерительного датчика. При этом максимальный диапазон измерения перемещений составляет 50 мм. При такой схеме измерения перемещения экрана с точностью до продольных деформаций участка проволочной связи между нижним поясом главной балки пролетного строения и экраном совпадали. Таким образом, измеряя с помощью лазера изменения базового расстояния между экраном и датчиком, производится регистрация прогибов главных балок пролетного строения. В соответствии с паспортными

данными датчика серии РФ603 погрешность измерений, которая определяется разрешением лазерного прибора, не превышает 0,01 измеряемого диапазона, что соответствует при максимальном диапазоне измерений 50 мм величине  $\delta = 50$  мкм.

При измерениях колебаний пролетного строения регистрация осуществлялась в цифровом виде с частотой около 25 Гц. По каналам проволочной связи между измерительными датчиками и портативным компьютером данные регистрации архивировались массивами десятичных чисел с помощью программы Excel. При визуальном анализе зарегистрированных данных строились графики изменения перемещений точек пролетного строения в зависимости от времени, а также вычислялись спектральные плотности амплитуд построенных графиков с помощью численного преобразования Фурье по программе Mathcad.

Обработка записанных при динамических испытаниях прогибограмм колебаний пролетного строения показала, что с ростом скорости движения автомобилей динамический коэффициент прогибам существенно растёт. Для скорости движения до 30 км/час он находится в диапазоне от  $1+\mu = 1,17$  до  $1+\mu = 1,24$ , для скорости от 40 до 50 км/час он повышается до значений от  $1+\mu = 1,34$  до  $1+\mu = 1,47$ , что близко к рекомендуемому действующим нормативным документом СП 35.13330.2011 для тележки автомобильной нагрузки АК и составляющего  $1+\mu = 1,4$ . Для скорости движения, превышающей 50 км/час, в динамических испытаниях зафиксирован динамический коэффициент  $1+\mu = 1,65$ .

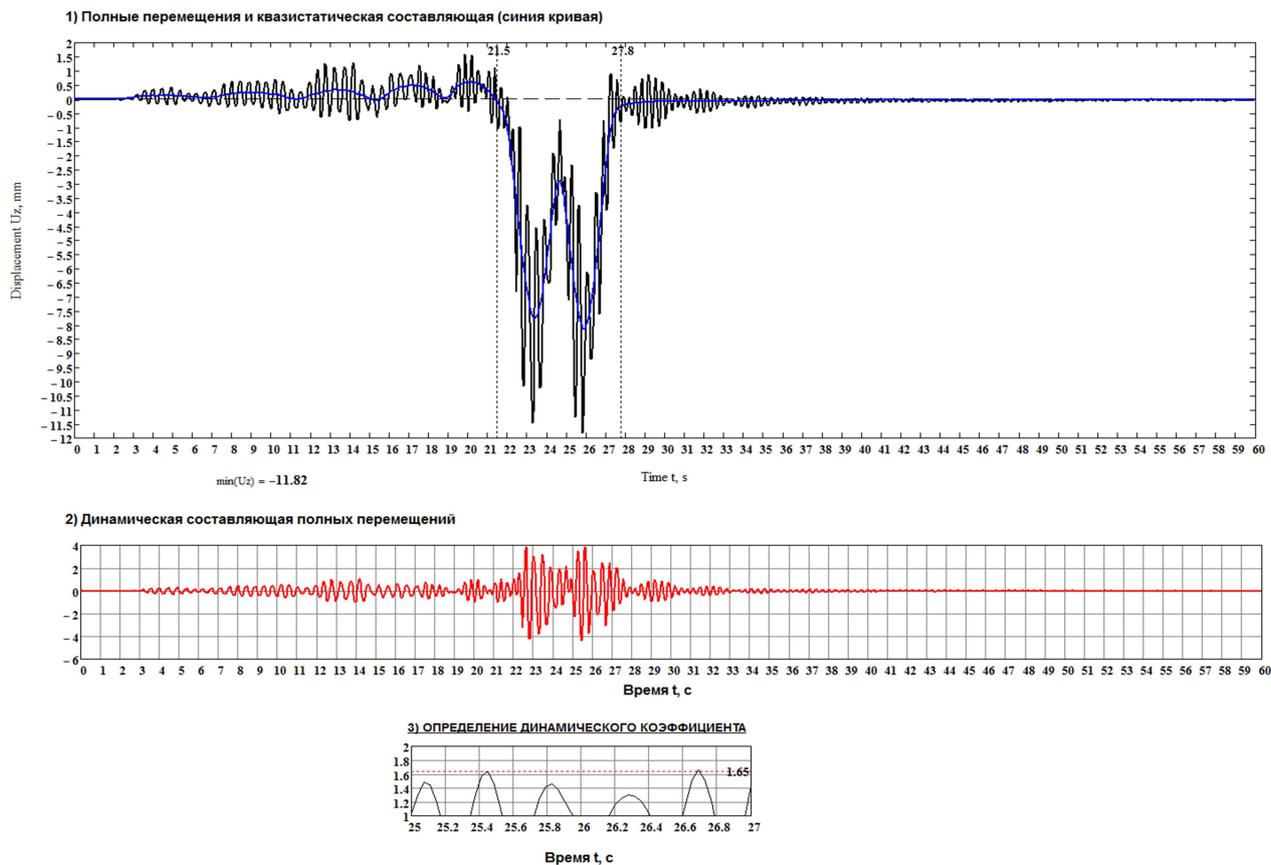
Для иллюстрации на рис. 4 приведены результаты обработки прогибограмм средних сечений балок Б1 и Б2 в пролете 1 при проезде автомобилей из Саратова в Воронеж со скоростью  $v=60$  км/час. Используя специальную встроенную в Mathcad функцию ksmooth сглаживания данных, записанных при испытаниях прогибограмм, получены представленные на рис. 4 синим цветом кривые квазистатических прогибов балок Б1 и Б2. Динамические составляющие прогибов, изображенные на рис. 4 красным цветом, получены вычитанием из полных прогибов квазистатических составляющих. Графики изменения динамических коэффициентов, приведенные на рис. 4 только для прогибов балки Б1, построены последовательным делением полных прогибов на квазистатические составляющие для тех же моментов времени.

Спектральная плотность колебаний пролетного строения, вычисленная по зарегистрированным прогибограммам для среднего сечения главной балки Б1, приведена на рис. 5. Из этого графика видно, что при проезде на скорости 60 км/час возбуждаются колебания преимущественно в диапазоне частот от 1,7 до 3,5 Гц.

В режиме свободных колебаний после съезда автомобилей с пролетного строения наблюдались биения с периодическим возрастанием и убыванием амплитуд (рис. 6). Из динамики сооружений известно, что такие явления возникают при колебаниях по двум близким гармоникам с различными фазами. Это явление в колебательных системах возникает при наличии кратных собственных частот или внутреннем резонансе при целых соотношениях между высшими частотами. В дальнейших исследованиях, выполненных с использованием пространственной конечно-элементной расчетной модели пролетного строения, результаты которых представлены ниже, обнаружены близкие по частотам собственные формы свободных колебаний пролетного строения, которые объясняют обнаруженные при испытаниях явления.

С целью подробного анализа динамической реакции мостового сооружения на проезд автомобилей в настоящем исследовании выполняются расчеты по изучению динамических параметров капитально отремонтированного моста и динамической реакции на проезд трехосных автомобилей с различными скоростями. Целью исследования является расчетное выявление факторов, оказывающих влияние на динамический коэффициент, который интегрально характеризует увеличение максимальных значений прогибов и усилий в наиболее нагруженных элементах конструкции по сравнению с этими величинами при статическом воздействии от проезжающего автотранспортного средства.

## Балка Б1



## Балка Б2

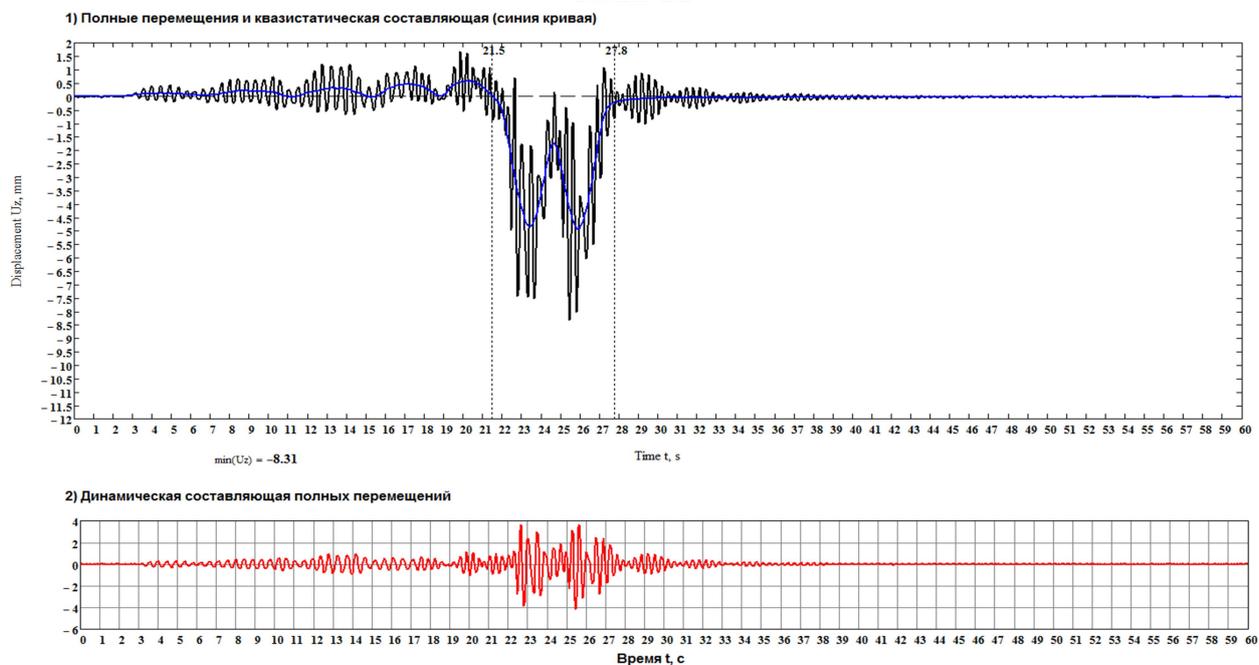
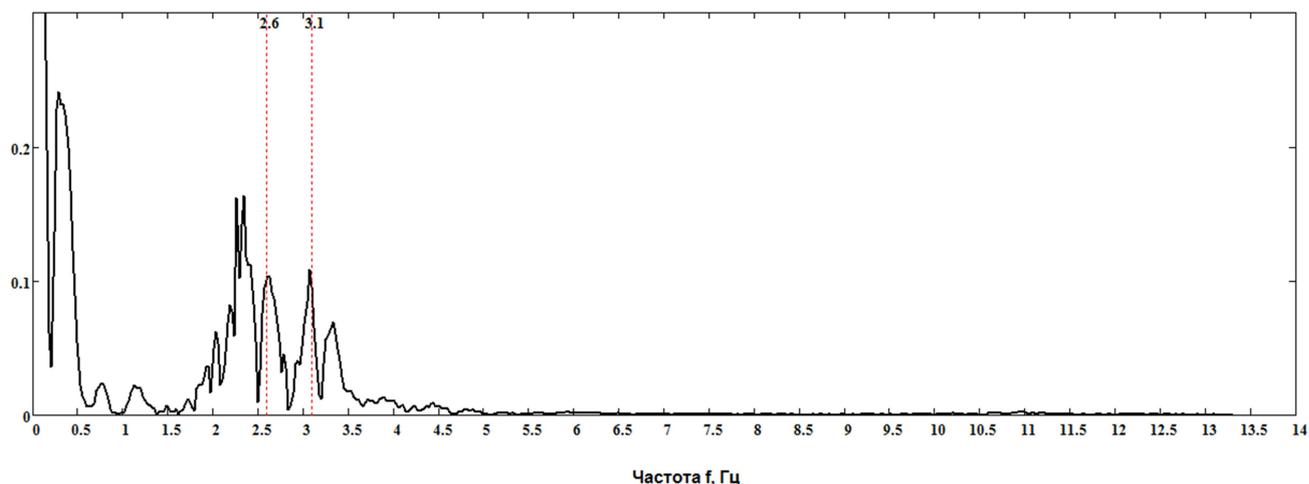
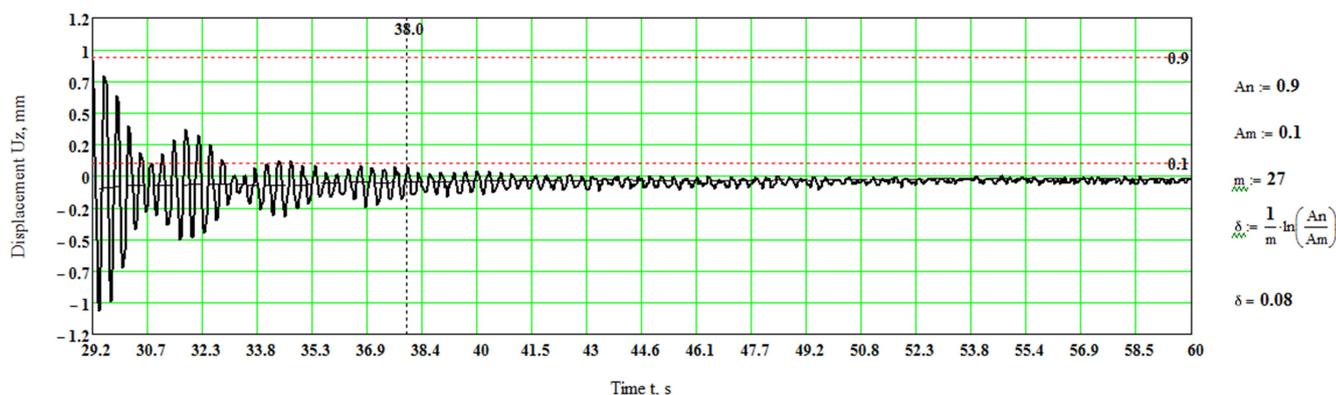


Рис. 4. Графики колебаний пролетного строения по данным динамических испытаний



**Рис. 5.** Спектральная плотность изменения прогибов в среднем сечении главной балки при проезде автомобилей со скоростью 60 км/час



**Рис. 6.** Прогибограмма свободных колебаний главной балки Б1 после проезда автомобилей

#### 4. Расчетное моделирование колебаний пролетного строения при динамических испытаниях

Для обоснованного анализа динамических качеств капитально отремонтированного автодорожного моста выполнены следующие исследования:

- построена КЭ-элементная пространственная динамическая расчетная схема пролетного строения;
- выполнен модальный анализ спектра низших собственных частот и отвечающих им форм свободных колебаний;
- динамический расчет совместных пространственных колебаний движущегося трехосного автомобиля и пролетного строения с учетом одиночной неровности на проезжей части.

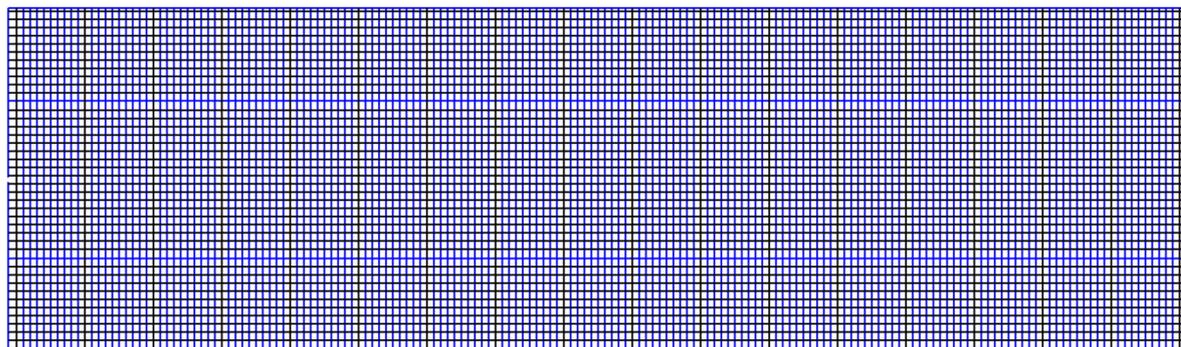
Пластинчато-стержневая расчетная схема типового пролета моста, составленная на основе библиотеки конечных элементов вычислительного комплекса SAP2000, представлена на рис. 7.

При разработке расчетной схемы использованы следующие КЭ:

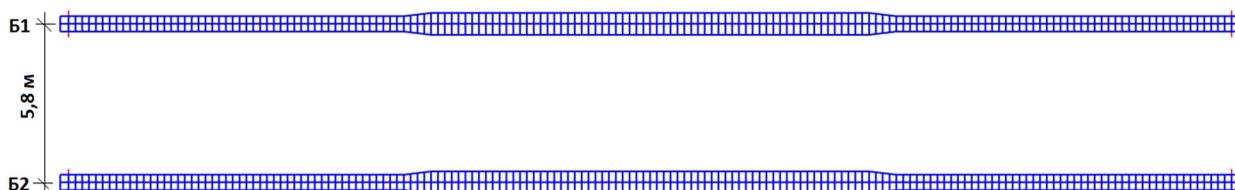
- универсальный стержневой КЭ без учета сдвиговых деформаций;
- универсальный четырехугольный плоский оболочечный КЭ;

- специальный двухузловой элемент упругой связи между узлами с характеристиками жестких вставок.

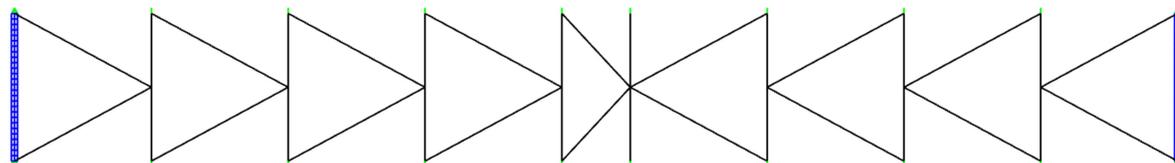
Вид сверху на ортотропную плиту проезжей части



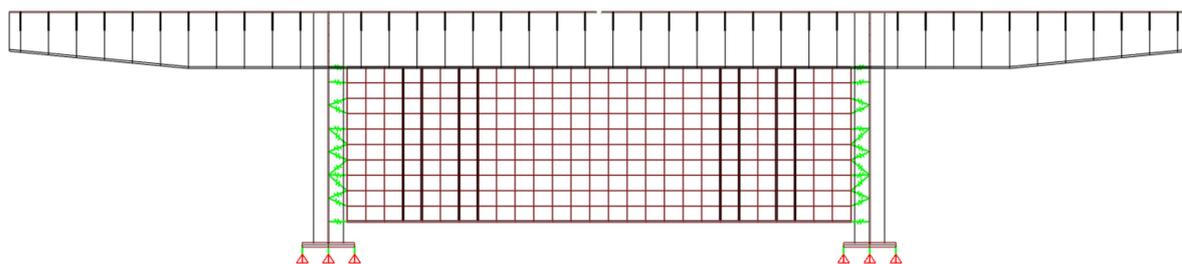
Горизонтальное сечение на уровне нижнего пояса главных балок



Горизонтальное сечение на уровне продольных связей



Поперечное сечение над опорой ( $x = 0$ )



Поперечное сечение в пролёте ( $x = 10,0$  м)

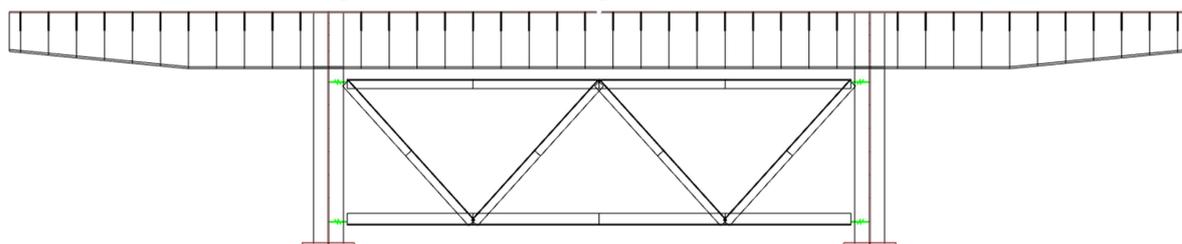
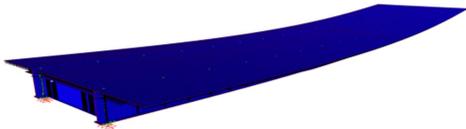
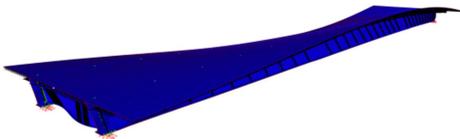
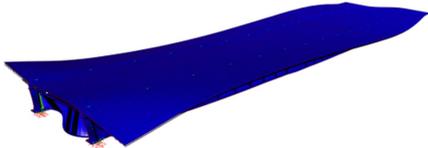
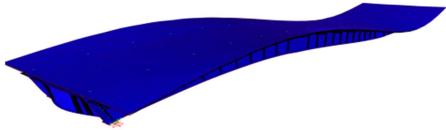
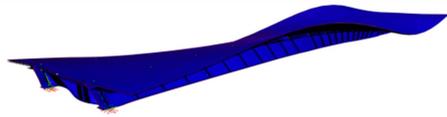


Рис. 7. Фрагменты КЭ-й модели металлического пролетного строения

Результаты модального анализа динамической расчетной схемы пролетного строения, выполненные по ПК SAP2000 с использованием представленной на рис. 7 КЭ-й модели, приведены в таблице. Они содержат низшие собственные частоты и описание собственных форм при колебаниях по этим частотам.

Таблица

Собственные частоты и формы свободных колебаний  
разрезного металлического пролетного строения с ортотропной плитой

Номер формы	Период, с	Технич. частота, Гц	Описание деформированного состояния главных балок моста	Деформированное состояние главных балок
1	0,393	2,54	Изгибные деформации главных балок по одной полуволне синусоиды	
2	0,310	3,23	Изгибно-крутильные деформации главных балок по одной полуволне синусоиды	
3	0,151	6,61	Изгибно-крутильные деформации главных балок по двум полу волнам синусоиды	
4	0,128	7,83	Изгибные деформации главных балок по двум полу волнам синусоиды	
5	0,128	7,83	Изгибно-крутильные деформации главных балок по двум полу волнам синусоиды	

Из приведенной таблицы следует, что в диапазоне выявленных частот при динамических испытаниях моста по данным модального анализа динамической расчетной схемы пролетного строения располагаются две низшие собственные частоты, отвечающие первой изгибной форме с частотой  $\omega_1 = 2,54$  Гц и второй изгибно-крутильной форме с частотой  $\omega_2 = 3,23$  Гц. В этом же частотном диапазоне, также находится частота  $\omega_{авт} = 2,0$  Гц собственных вертикальных перемещений кузова движущегося автомобиля. Отличительной особенностью спектра частот всех пролетов моста после ремонта является полное совпадение частот по четвертой изгибной и пятой изгибно-крутильной формам  $\omega_4 = \omega_5 = 7,83$  Гц по двум полу волнам синусоиды. При таких динамических параметрах возможны длительные параметрические колебания с перекачкой энергии от одной из собственных форм к другой и резонансные режимы в виде биений с периодическими возрастающими и убывающими амплитудами. Такие колебания наблюдались при динамических испытаниях после съезда движущихся с большой скоростью автомобилей с моста (см. рис. 6).

Расчетное моделирование совместных колебаний пролётного строения и движущихся через уложенную на проезжей части доску трехосных грузовых автомобилей выполнено по разработанной

и апробированной нами методике [19]. Для её реализации применялась описанная выше КЭ-я расчетная схема пролетного строения и два вычислительных комплекса:

1. ВК SAP2000 – для определения квазистатической реакции на движение системы неинертных вертикальных сил;
2. МК Mathcad – для моделирования динамической составляющей реакции моста с учетом упругого опирания, инертности, обратной связи и неровностей на проезжей части.

На 2-м этапе расчета использовались полученные при модальном анализе и приведенные в таблице низшие собственные формы пролетного строения.

Результаты расчетного моделирования проезда одиночного трехосного автомобиля с параметрами, отвечающими использованному при динамических испытаниях автомобиля SHACMAN общей массой 41 т, приведены на рис. 8. Шаг дискретизации по времени - 0,005 с. Скорость движения трёхосного грузовика принимается постоянной:  $v=16 \text{ м/с} = 57,6 \text{ км/час}$ . Время движения автомобиля 10,25 с. В расчетах начальные условия для автомобиля принимались статическими, для несущих конструкций моста – нулевыми. Одиночная неровность на проезжей части вблизи четверти пролета моделировалась в расчетах на обоих колесах проезда синусоидой длиной 1,0 м. В динамических расчетах демпфирование колебаний металлического пролетного строения выполнялось в соответствии с рекомендациями, приведенными в монографии [21] и инструкции для ПК SAP2000 по Релею пропорционально матрицам жесткости и инертности динамической модели пролетного строения.

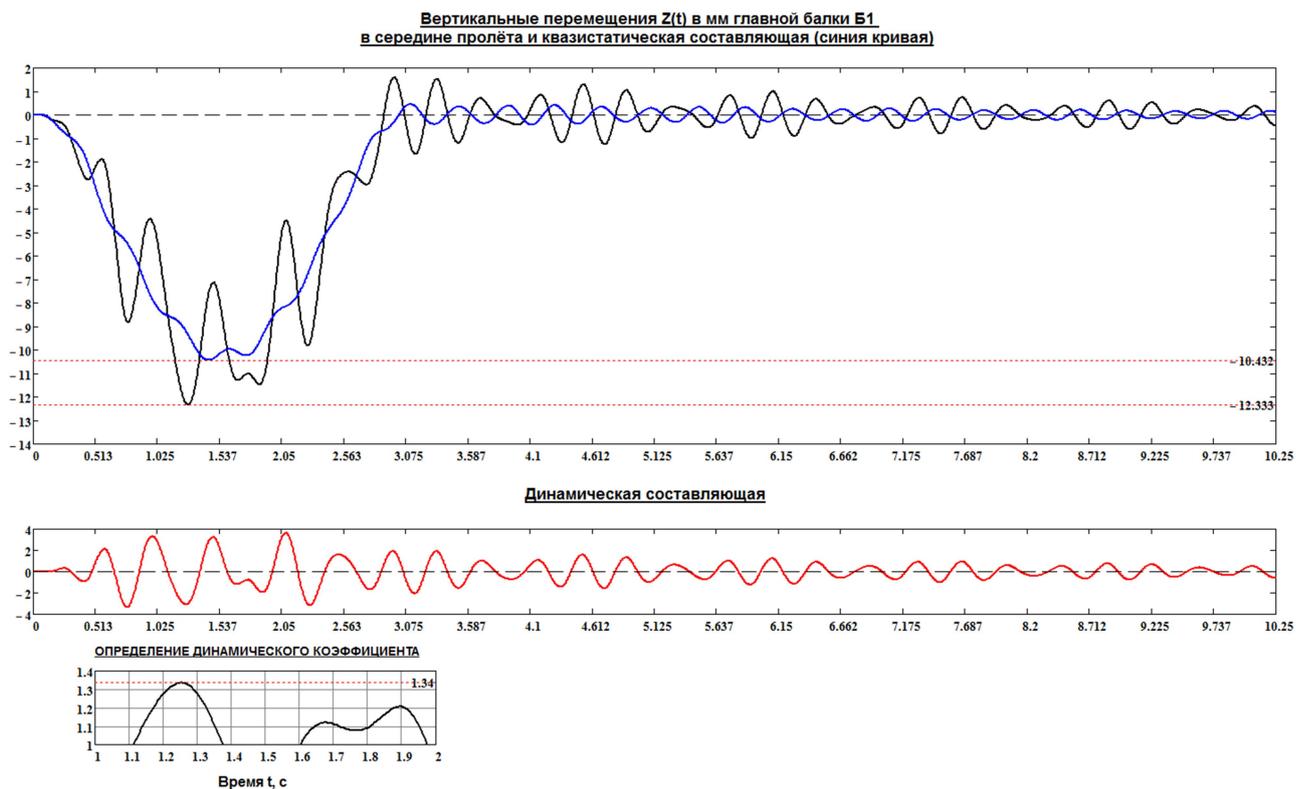
С целью изучения особенностей колебаний для каждой из главных балок Б1 и Б2 черным цветом показаны графики полных прогибов балок в средних сечениях пролета 1, синим цветом изображены квазистатические составляющие. Затем красным цветом показаны динамические составляющие колебаний.

Между отвечающими балкам Б1 и Б2 верхними и нижними графиками приведен вычисленный только для балки Б1 расчетный график изменения динамического коэффициента, построенный для интервала проезда автомобиля в средней части пролета при максимальных квазистатических прогибах.

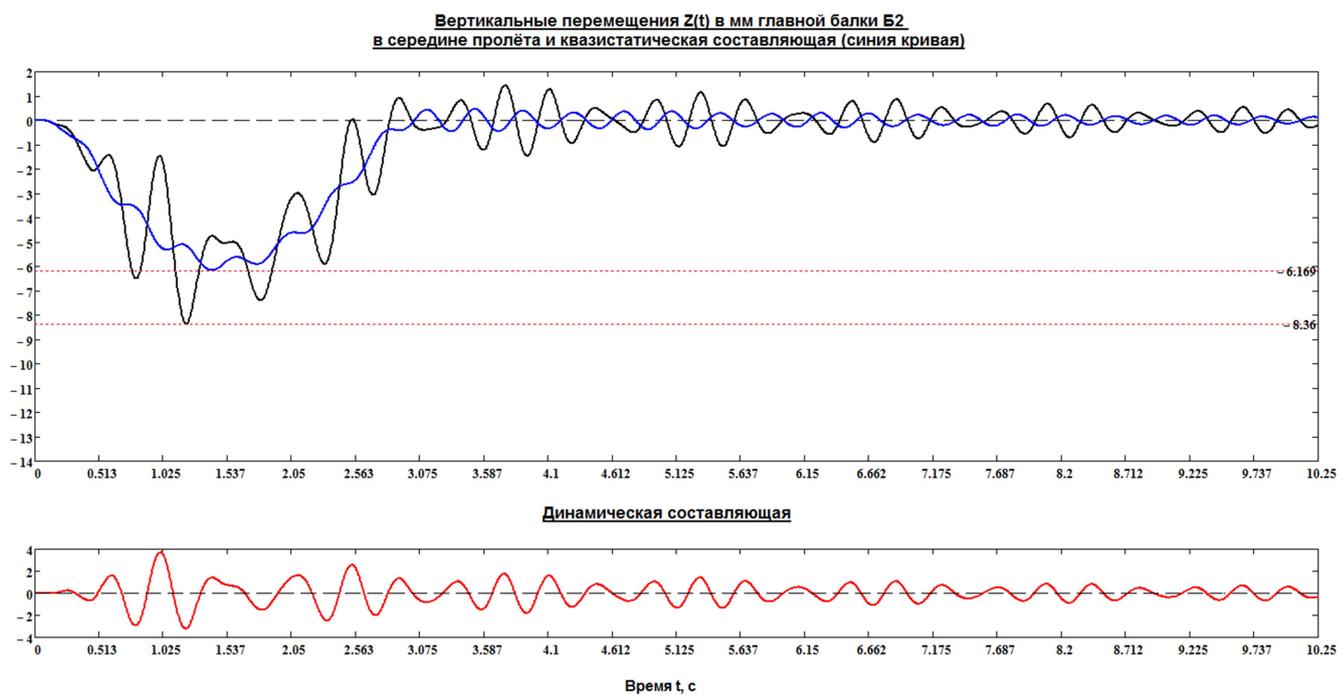
Анализ представленных графиков показывает, что основную роль в возбуждении колебаний пролетного строения при проезде тяжелого грузового автомобиля играет наличие неровностей на проезжей части. Динамическая составляющая колебаний пролетного строения, обусловленная обратной связью, незначительна.

Расчётные спектральные плотности амплитуд вертикальных колебаний главных балок Б1 и Б2 при проезде по рассматриваемому металлическому пролётному строению одиночного самосвала SHACMAN, вычисленные по результатам расчетного моделирования, приведены на рис. 9. На этих графиках хорошо просматриваются особенности колебаний, которые отражаются в виде трех пиковых участков графиков. Первый из них, имеющий частоту  $\omega_{\text{авт}}=2.0 \text{ Гц}$ , соответствует частоте вынужденных колебаний кузова автомобиля. Второе и третье пиковое возрастание спектральной плотности отражает колебания пролетного строения с частотами, соответствующими первой изгибной форме с частотой  $\omega_1=2,54 \text{ Гц}$  и второй изгибно-крутильной форме с частотой  $\omega_2=3,23 \text{ Гц}$  (см. таблицу). На участке свободных колебаний моста после съезда автомобиля с пролетного строения проявляются выявленные при натурных испытаниях моста биения с периодическими возрастающими и убывающими амплитудами колебаний.

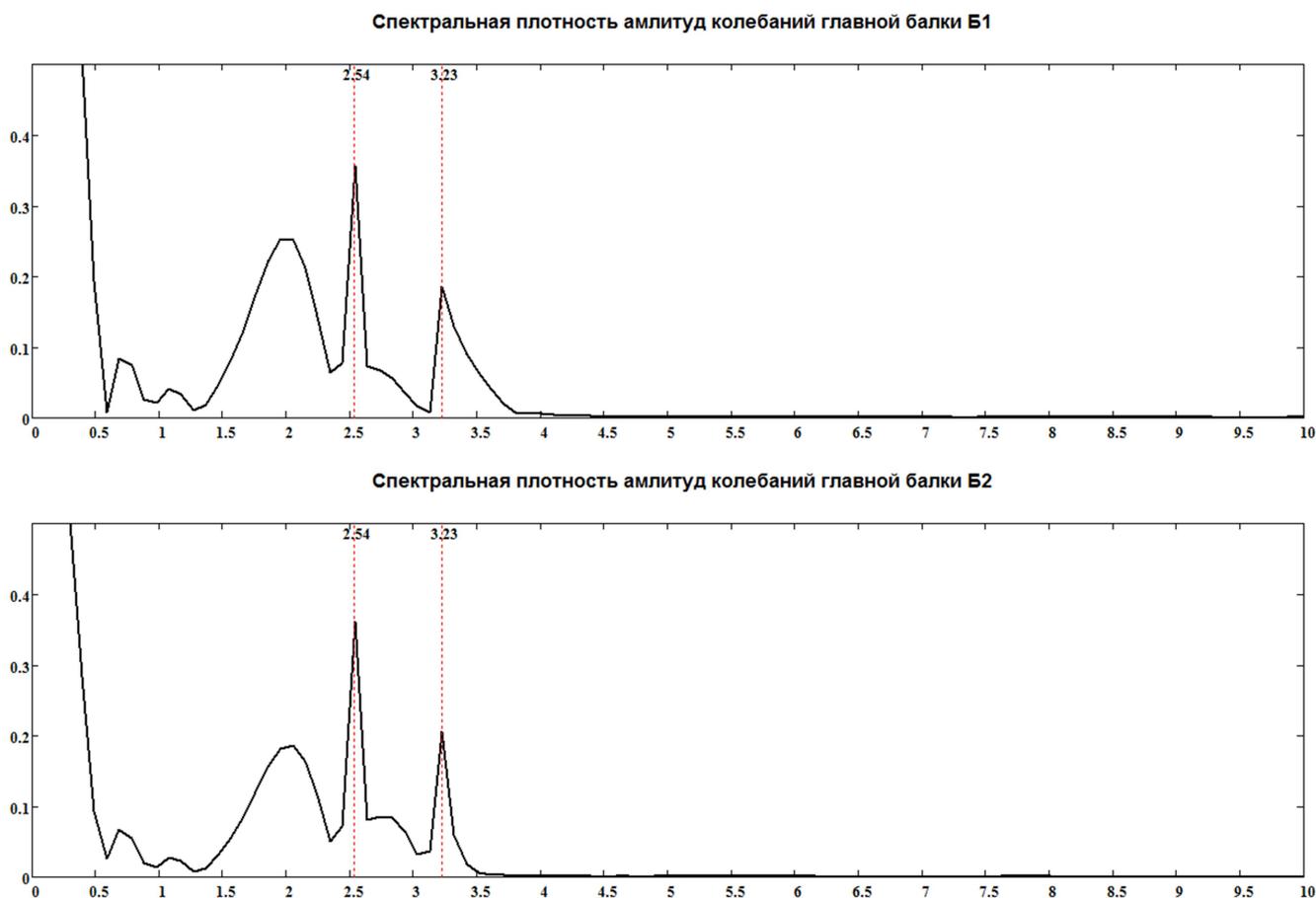
## Балка Б1



## Балка Б2



**Рис. 8.** Расчетные графики прогибов в средних сечениях балок при проезде одиночного трёхосного автомобиля SHACMAN со скоростью  $v=57,6$  км/час



**Рис. 9.** Расчётные спектральные плотности амплитуд вертикальных колебаний

при проезде по рассматриваемому металлическому пролётному строению одиночного самосвала SHACMAN

Изучение характера затухания колебаний после съезда автомобилей с пролётного строения позволило получить величины логарифмических показателей затухания колебаний. Его величина для рассматриваемого пролётного строения находится в диапазоне от  $\delta = 0,06$  до  $\delta = 0,08$ , что для металлических пролётных строений является несколько пониженным, что объясняет длительный характер колебаний пролётного строения после съезда автомобилей. По многочисленным измерениям в натуральных условиях для металлических пролётных строений с дорожным покрытием из асфальтобетона логарифмический коэффициент обычно составляет  $\delta = 0,10$ .

Выполненные для рассматриваемого моста многочисленные расчеты с варьированием различных параметров: скорости движения, расположения колеи проезда на проезжей части моста, направления движения показали, что в расчетах получаются закономерности, которые совпадают с имеющимися на натурном объекте.

Сопоставление представленных на рис. 8 расчетных графиков изменения прогибов в средних сечениях главных балок в пролете 1 пролётного строения с приведенными на рис. 4 зарегистрированными при натуральных статических испытаниях капитально отремонтированного автодорожного моста через реку Хопер виброграммами показывает их близость как по характеру, амплитудам и проявляющимся гармоникам. Это свидетельствует об адекватности принятых в расчетной методике физических и математических моделей мостового сооружения и грузового автомобиля. Этот вывод подтверждается сравнением приведенных на рис. 9 и 5 спектральных плотностей для расчетных и записанных при испытаниях виброграмм средних сечений главных балок в пролете 1 моста.

## Выводы

1. По результатам выполненных натурных и теоретических исследований выявлено, что динамическая реакция пролетного строения на проезд грузовых автомобилей существенно зависит от скорости движения транспортного средства и ровности проезжей части на мосту. Особенно скорость движения становится решающим фактором влияния при неудовлетворительном состоянии проезжей части как на самом мосту, так и на участках подходов к мосту.
2. В режиме свободных колебаний после съезда автомобилей с пролетного строения при движении в сторону г. Воронежа, когда влияние других пролетов моста не существенно, наблюдались биения с периодическим возрастанием и убыванием амплитуд. Так как эти явления на отремонтированном мосту через реку Хопер имеют затухающий характер, они не являются опасными, но продолжительность колебаний увеличивается, а это снижает долговечность рассчитанного на длительную эксплуатацию транспортного сооружения.
3. Выполненные экспериментально-теоретические исследования для оценки динамических качеств капитально отремонтированного моста могут также эффективно использоваться при обосновании оптимальных транспортных режимов на эксплуатируемых мостах.

## Библиографический список

1. Крылов, А. Н. Вибрации судов/ А. Н. Крылов. –М.: ОНТИ, 1936. - 310 с.
2. Болотин, В. В. Задача о колебаниях мостов под действием подвижной нагрузки/ В. В. Болотин// Механика и машиностроение, 1961.№4. - С.109-105
3. Киселев, В. А. Динамические линии влияния перемещений и внутренних сил в балках рамах и плитах простых и на упругом основании от груза, движущегося с равномерной скоростью/ В. А. Киселев. – М.: Автотрансиздат,1956. - С. 139-171 ( Труды МАДИ, вып. 18).
4. Мучников, В. М. Некоторые методы расчета упругих систем на колебания при подвижной нагрузке/ В. М. Мучников. –М. -Л.: Гос. изд. лит. по строит. и арх., 1953. – 112 с.
5. Ананьин, А. И. К решению задачи Виллиса - Стокса/ А. И. Ананьин, А. Ф Хмыров // Исследования по строительной механике конструкций. –Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984. – С. 60—65.
6. Фрыба, Л. Динамический расчет пролетных строений мостов/ Л. Фрыба //Строительная механика и расчет сооружений.– М. 1964.- №2. - С. 24-29.
7. Моргаевский, А. Б. О влиянии рессор на динамическую величину динамического эффекта от подвижной нагрузки/ А. Б. Моргаевский// Исследования по теории сооружений.- Вып. XIV. – М.: Стройиздат, 1965. - С. 65-71.
8. Сафронов, В. С. К динамическому расчету на АВМ рам и балок при движении подрессоренных грузов/ В. С. Сафронов, А. Г. Барченков, А.Н. Котуков, Р.И. Мальцев //Строительная механика и расчет сооружений. – М., 1968. - №5. - С. 34-36,
9. Барченков, А. Г. Динамический расчет автодорожных мостов/ А. Г. Барченков. – М.: Транспорт, 1976. – 198 с.
10. Ананьин, А.И. Динамика автодорожных мостов/ А.И. Ананьин, А. Г. Барченков, В. С. Сафронов// Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций: справочник проектировщика. – М., 1986. - С. 327 – 348.
11. Сафронов, В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку/ В. С. Сафронов. - Воронеж: Изд-во ВГУ,1983. - 196 с.
12. Гриднев, С. Ю. Развитие динамического расчета автодорожных мостов на подвижную нагрузку: дис. на ... д-ра техн. наук/ С.Ю. Гриднев. – Воронеж, 2013.
13. Шапошников Н.Н., Кашаев, А. К. Бабаев В.Б. Расчет конструкций на действие подвижной нагрузки с использованием метода конечных элементов// Строит.механика и расчет сооружений. – 1986. - №1. - С. 50-54.
14. Gui Shui-rong. Liu Lu. Chen Shui-Seng. Zhao Hui. Research on Models of a Highway Bridge Subjected to a Moving Vehicle Based on the LS-DYNA Simulator// Journal of Highway and Transportation Research and Development.- 2014. –Vol. 8. №3.

15. Sheng Guo-gang, Peng Xian, Li Chuan-xi. The Dynamic Analysis of Bridge under Moving Vehicles // Journal of Changsha Communications University. 2003. 19. pp.10-13.
16. Tan Guo-jin, Liu Han-bing, Cheng Yong-shun, et al. Analysis of Impact of Vehicle to Simply Supported Beam Bridge Based of Vehicle-bridge Coupled Vibration // Journal of Jilin University, Engineering and Technology Edition, 2011, 41(1). -pp.52-67.
17. Сафронов, В. С. К вопросу опасного изменения динамических характеристик пролетного строения при его реконструкции/ В. С. Сафронов, Д. В. Боровков, С. Ю. Гриднев // Научный Вестник ВГАСУ. Дорожное и транспортное строительство. - 2004. -Вып. 3. - С. 159-163.
18. Сафронов, В. С. Экспериментально-расчетный анализ резонансных колебаний сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста/ В. С. Сафронов, А. В. Антипов// Строительная механика и конструкции. - 2012. -Вып. 2(5). - С. 52-59.
19. Сафронов, В. С. Современные алгоритмы динамического расчета стержневых систем на подвижную подрессоренную нагрузку/ В. С. Сафронов, А. В. Антипов// Строительная механика и конструкции. -2018. -Т. 3. -№ 18. -С. 81-92.
20. Сафронов, В.С. Колебания плитного железобетонного моста при проезде трехосного автомобиля/ В. С. Сафронов, А. В. Антипов // Транспортные сооружения. - 2019. Т.6. №2. - С. 11.
21. Бате К., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов/ К. Бате, Е. Вилсон. - М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

#### References

1. Krylov A.N. Vibrations of ships. M.: ONTI, 1936. 310 p.
2. Bolotin V.V. The problem of oscillations of bridges under the action of a moving load. Mechanics and Mechanical Engineering. No. 4. 1961. Pp.105-109.
3. Kiselev V.A. Dynamic lines of influence of displacements and internal forces in beam frames and plates simple and on an elastic foundation from a load moving with uniform speed. M.: Avtotransizdat, 1956. Pp. 139-171 (Transactions of MADI, issue 18).
4. Muchnikov V.M. Some methods of calculating elastic systems for vibrations under a moving load. M. L.: State. ed. lit. by building. and arch., 1953. 112 p.
5. Ananyin A.I., Khmyrov A.F. To the solution of the Willis – Stokes problem. Studies in structural construction mechanics. Voronezh: Publishing House of the Voronezh State University, 1984. Pp. 60-65.
6. Fryba L. Dynamic calculation of bridge spans. Structural mechanics and calculation of structures. No. 2. 1964. Pp. 24-29.
7. Morgaevsky A.B. On the effect of springs on the dynamic value of the dynamic effect of a moving load. Studies in the theory of structures. M.: Stroyizdat, 1965. Vol. 14. Pp. 65-71.
8. Safronov V.S., Barchenkov A.G., Kotukov A.N., Maltsev R.I. On the dynamic calculation of frames and beams on the AVM during the movement of sprung loads. Structural mechanics and calculation of structures. No. 5. 1968. Pp. 34-36.
9. Barchenkov A.G. Dynamic calculation of road bridges. M.: Transport, 1976. 198 p.
10. Ananyin A.I., Barchenkov A.G., Safronov V.S. Dynamics of road bridges. Dynamic calculation of special engineering structures and structures: designer reference. M., 1986. Pp. 327-348.
11. Safronov V.S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges on a moving load. Voronezh: VSU Publishing House, 1983. 196 p.
12. Gridnev S.Yu. Development of the dynamic calculation of road bridges on a moving load: dis. on ...Dr. tech. sciences. Voronezh, 2013.
13. Shaposhnikov N.N., Kashaev A.K., Babaev V.B. The calculation of structures on the action of a moving load using the finite element method. Construction mechanics and calculation of structures. No. 1. 1986. Pp. 50-54.
14. Gui Shui-Rong, Liu Lu, Chen Shui-Seng, Zhao Hui. Research on models of a highway bridge subjected to a moving vehicle based on the LS-DYNA simulator. Journal of highway and transportation research and development. Vol. 8. No. 3. 2014.
15. Sheng Guo-gang, Peng Xian, Li Chuan-Xi. The Dynamic Analysis of Bridge under Moving Vehicles. Journal of Changsha Communications University. No. 19. 2003. Pp. 10-13.

16. Tan Guo-Jin, Liu Han-Bing, Cheng Yong-Shun, et al. Analysis of Impact of Vehicle to Simply Supported Beam Bridge Based of Vehicle-bridge Coupled Vibration. Journal of Jilin University, Engineering and Technology Edition. No. 41(1). 2011. Pp. 52-67.
17. Safronov V.S., Borovkov D.V., Gridnev S.Yu. On the dangerous change in the dynamic characteristics of the span during its reconstruction. Scientific Herald of the Voronezh State Technical University. Road and transport construction. Issue. 3. 2004. Pp. 159-163.
18. Safronov V.S., Antipov A.V. Experimental and computational analysis of resonant vibrations of steel-reinforced concrete span of the road bridge. Structural Mechanics and Structures. Issue. 2. No. 5. 2012. Pp. 52-59.
19. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern algorithms for the dynamic calculation of rod systems for a movable sprung load. Structural Mechanics and Structures. Vol. 3. No. 18. 2018. Pp. 81-92.
20. Safronov V.S., Antipov A.V. Oscillations of a slab reinforced concrete bridge during the passage of a three-axle vehicle. Transport facilities. Vol. 6. No. 2. 2019. Pp. 11.
21. Bate K., Wilson E. Numerical analysis methods and the finite element method. M.: Stroyizdat, 1982. 448 p.

## EVALUATION OF DYNAMIC QUALITIES OF A METAL ROAD BRIDGE ACCORDING TO DATA OF NATURAL TESTS AND TEST CALCULATIONS

V. S. Safronov<sup>1</sup>, A.V. Antipov<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1</sup>

Dortransproekt LLC<sup>2</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> Dr. of Tech. Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230,  
e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

<sup>2</sup> Senior Engineer

---

To assess the dynamic qualities of a thoroughly repaired road bridge with a metal span, the data of full-scale dynamic tests are compared with the results of the calculations for the passage of heavy three-axle vehicles. A significant dependence of the span fluctuations on the speed of movement was found while the cars were on the span and after the exit, which is explained by the dynamic parameters of the structure.

The design of a metal span of two split load-bearing beams, combined by a system of vertical and horizontal ties, as well as a metal orthotropic plate of the carriageway, is described. Deflection patterns of span vibrations recorded during full-scale dynamic tests and the results of statistical analysis in the form of spectral deflection densities in the middle section of the main beams of one of the spans are presented. According to the modal analysis of the metal span in a typical bridge span, the eigenfrequencies and forms of the supporting structure are determined using a spatial finite-element calculation scheme. The features of the frequency spectrum of new spans mounted during major repairs were revealed. The results of dynamic calculations of the span on the action of a triaxial truck moving at a constant speed are presented. Design deflections are compared with those measured during full-scale dynamic tests of the bridge. In numerical calculations, the influence of the speed of movement and irregularities on the roadway revealed during field tests is confirmed. In the study of free vibrations of spans, beats were found that coincided in nature with the vibrations of the natural structure.

The performed experimental and theoretical studies allow us to evaluate the dynamic qualities of the bridge and make informed decisions on the organization of a safe operation mode of a transport structure.

**Keywords:** road bridge, overhaul, split metal span, full-scale dynamic tests. calculation modeling, dynamic characteristics, influence factors, runoff.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ СДВИГОВОЙ ЖЁСТКОСТИ СТЫКА СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ КОНСТРУКЦИИ С ГИБКИМИ ШТЫРЕВЫМИ УПОРАМИ

А. В. Козлов<sup>1</sup>, В. А. Козлов<sup>2</sup>, А. М. Хорохордин<sup>3</sup>, П. П. Чураков<sup>4</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>,  
ООО «ТИИС»<sup>4</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Доц. кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов тел.: +7(473)271-52-02;  
e-mail: kozlov.a.v@inbox.ru

<sup>2</sup> Д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики  
тел.: +7(473)276-40-06, e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

<sup>3</sup> Начальник Центра коллективного пользования им. профессора Ю. М. Борисова  
тел.: +7(473)292-66-64, e-mail: ckp@vgasu.vrn.ru

<sup>4</sup> Главный инженер

---

В предлагаемой работе приводятся результаты натурных испытаний стыка на сдвиг, выполненных на объемных моделях с наиболее распространенным типом соединения железобетонной плиты со стальной балкой при помощи гибких штыревых упоров. При этом исключение сцепления железобетонной плиты со стальной балкой достигается применением изолирующей прокладки. По результатам проведения испытаний построена графическая зависимость между деформациями и усилиями сдвига плиты. Полученные экспериментальные значения сдвиговой жесткости стыка сравниваются с посчитанными аналитически, а также при помощи численной модели с применением МКЭ. Результаты экспериментальных исследований подтверждают достоверность разработанного аналитического подхода, используемого для определения линейной сдвиговой жесткости стыка с гибкими штыревыми упорами.

**Ключевые слова:** сталежелезобетонные конструкции и пролётные строения мостов, сдвиговая жёсткость стыка, экспериментальные исследования.

**Введение.** В работах [1, 2] предложен алгоритм расчета однопролётных и неразрезных многопролётных балок мостовых сооружений с возможностью учета податливости сдвигового соединения между железобетонными и стальными конструктивными элементами. Отмечено, что при этом повышается точность определения напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции, уточняется расчёт мостовых сооружений. Уточнение правил расчёта сталежелезобетонных пролётных строений мостов с учётом предлагаемых авторами указанных работ аналитических зависимостей при совместном использовании современных вычислительных мощностей позволит повысить уровень надежности мостовых сооружений, закладываемый на стадии проектирования.

Элементы, объединяющие железобетонные плиты с несущими стальными балками, в зарубежной литературе называют соединителями (connectors), в отечественной технической литературе – упорами или анкерами, если упор способен работать не только на сдвиг, но и на растяжение (отрыв плиты). В работе [3] представлены виды этих соединительных элементов, их классификация, формулы, определяющие несущую способность. Для наиболее распространенного в настоящее время типа соединения с помощью гибких стержневых упоров рассмотрена схема работы упора при сдвигающих воздействиях, табличные значения несущей способности упоров разного диаметра в зависимости от класса бетона плиты ( $\kappa H$ ), коэффициентов жесткости на единицу площади стыка ( $\kappa H/m^3$ ), погонной сдвиговой жесткости стыка при 3 упорах в поперечном ряду ( $\kappa H/m^2$ ).

В предлагаемой работе представлены результаты натурных испытаний на сдвиг, выполненных на объемных моделях с наиболее распространенным типом соединения железобетонной плиты со стальной балкой при помощи гибких штыревых упоров. Целью проведения экспериментальных исследований является подтверждение достоверности предложенных аналитических зависимостей [1, 2], используемых для определения линейной сдвиговой жесткости стыка с гибкими штыревыми упорами, и соответствия численных решений результатам, полученным в рамках проведенных испытаний.

**Описание моделей.** Для испытания на сдвиг было изготовлено 3 одинаковых объемных модели, состоящих из двух железобетонных плит, стального сварного двутавра, изолирующей прокладки из пергамина и гибких штыревых упоров. Геометрические размеры, расположение упоров, армирование изготовленных моделей представлены на рис. 1.

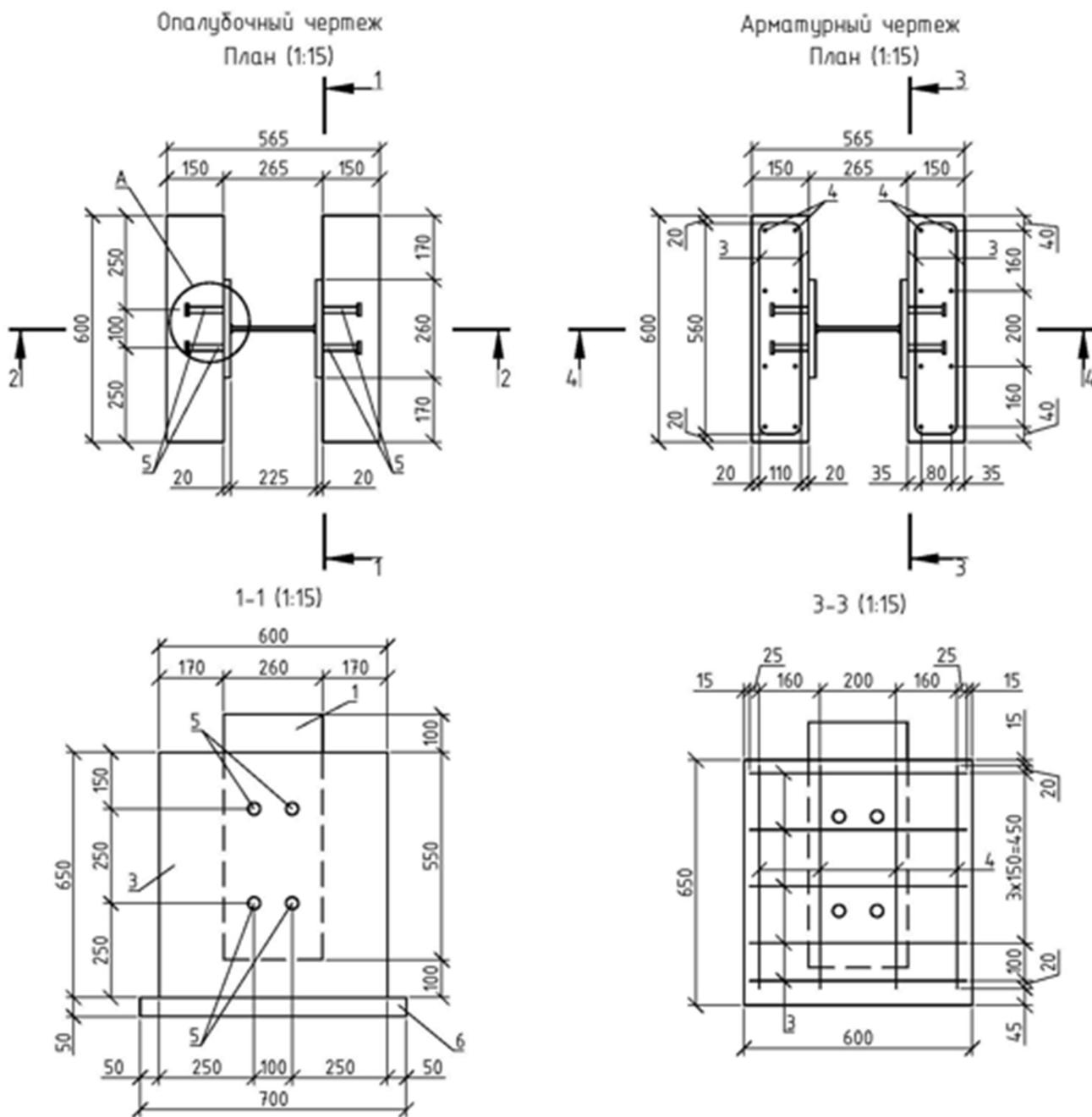


Рис. 1. Опалубочный и арматурный чертежи объемных моделей

Металлоконструкции испытательных образцов изготовлены на АО «Воронежсталь-мост», бетонирование произведено на АО «Завод ЖБИ-2». Все конструкционные материалы испытываемых образцов выполнены в соответствии с требованиями соответствующих ГОСТов к бетону, арматуре, стали двутавра, материалу гибкого штыревого упора, сварным соединениям. Сцепление по контакту между полками стального двутавра и железобетоном исключается с помощью изолирующей прокладки из пергамина с целью моделирования жесткости стыка без учета данного непрогнозируемого и нерасчетного фактора. Выдержка объемных моделей выполнялась в естественных условиях.

Натурные испытания проведены в лаборатории в «Центре коллективного пользования имени профессора Ю. М. Борисова» Воронежского государственного технического университета, свидетельство ФБУ «Воронежский ЦСМ» о состоянии измерений в лаборатории №979.08/33. Центр оснащен передовым высокотехнологичным научно-исследовательским оборудованием российского и иностранного производства, в том числе англо-американскими гидравлическими станциями INSTRON (рис. 2).

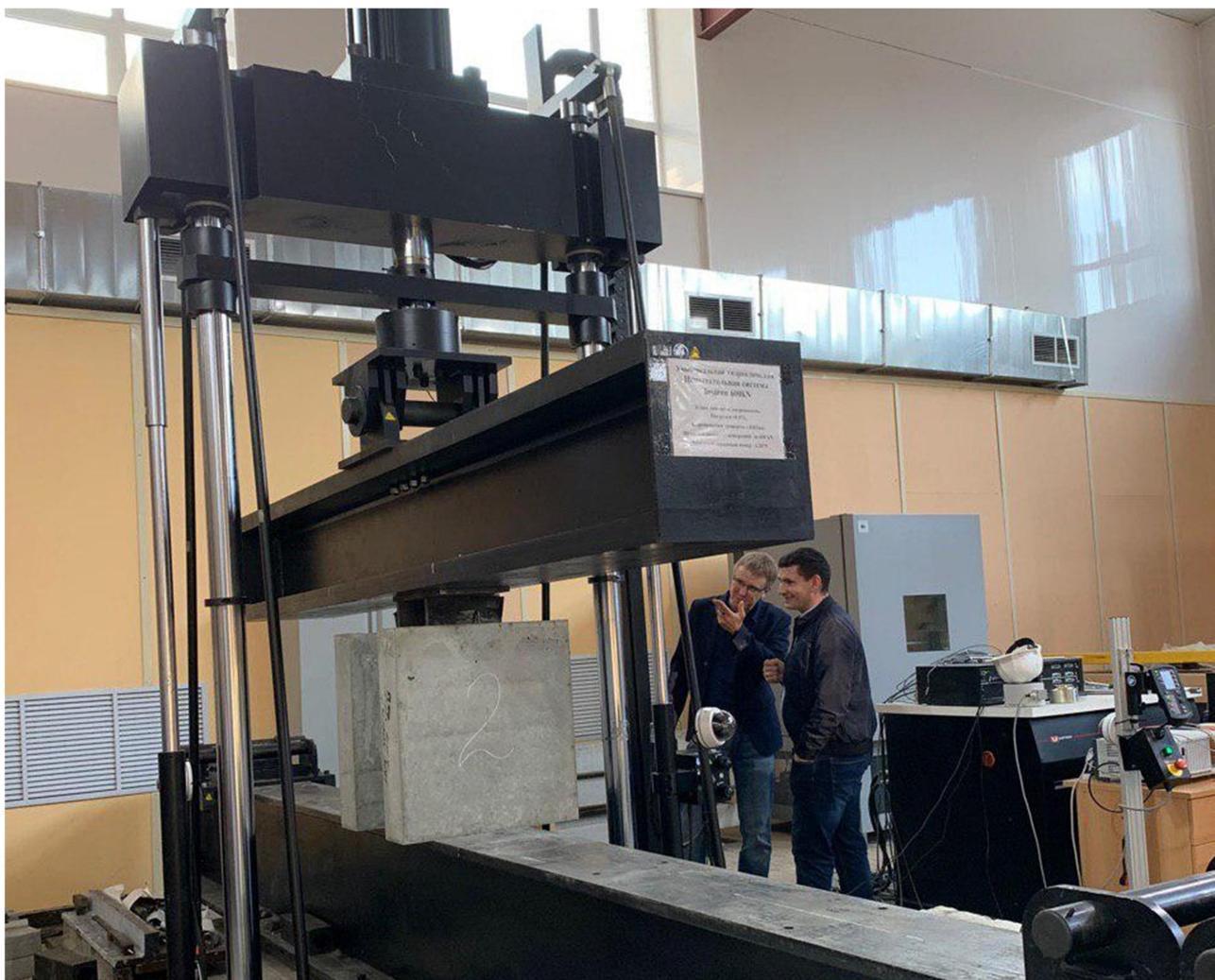


Рис. 2. Объемная модель на испытательном стенде INSTRON 600 kN

**Анализ зависимости «усилие-сдвиг». Сдвиговая жёсткость.** В работе [3] дан анализ усредненной графической зависимости «относительная нагрузка – деформация сдвига» для большинства составных конструкций, соединенных с помощью гибких стержневых упоров (рис. 3). Здесь по горизонтали отложены остаточные деформации сдвига  $\Delta$ , мм, а по

вертикали относительная величина нагрузки  $V_d/V_u$ , где  $V_d$  – прикладываемая нагрузка,  $V_u$  – предельная нагрузка, при которой наступает разрушение конструкции.

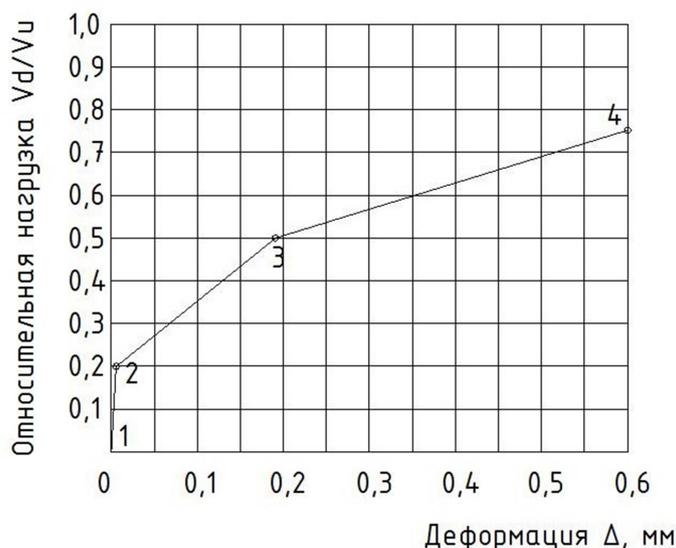


Рис. 3. Усредненная графическая зависимость «усилие – сдвиг»

Участок 1-2 характеризуется тем, что при возрастании нагрузки видимых деформаций не возникает. На участке 2-3 с возрастанием нагрузки появляются умеренные деформации, а на участке 3-4 нагрузки вызывают опережающий рост деформаций. Переходная точка 3, соответствующая приложению половины значения предельной нагрузки, может быть определена как предельное состояние по эксплуатационной пригодности. Согласно [4–6], деформация в точке 3 для различных типов упоров имеет среднее значение  $\Delta = 0,18$  мм при относительной нагрузке  $V_d/V_u = 0,5$ . Это же значение подтверждают результаты проведенных в рамках настоящей работы численных экспериментов для физически нелинейных расчетных моделей, построенных с применением МКЭ, для упоров с различными диаметрами. Опираясь на полученное среднее значение, сдвиговую жесткость гибкого штыревого упора на участке 2-3, где его работа оптимальна, можно выразить через его несущую способность

$$C_1 = \frac{0,5 \cdot V_u}{0,18 \cdot 10^{-3}} = 2780 \cdot V_u, \quad (1)$$

где  $C_1$  – линейная сдвиговая жесткость одного упора, кН/м.

Линейную сдвиговую жесткость одного упора можно выразить через максимальный сдвиг при достижении несущей способности в виде отношения

$$C_1 = \frac{V_u}{\delta_{x,\max}}. \quad (2)$$

Несущая способность одного упора при отношении длины стержня к диаметру  $l/d > 4,2$  (такое соотношение всегда выполняется для применяемых в настоящее время в мостовых сооружениях конструкциях стыков):

$$V_u = d^2 \cdot \sqrt{10 \cdot R_b}, \quad (3)$$

где  $d$  – диаметр стержневого упора, см;  $R_b$  – прочность бетона, МПа.

Следовательно, линейная сдвиговая жесткость одного упора (1), выраженная через его несущую способность, равна

$$C_1 = 8791,13 \cdot d^2 \cdot \sqrt{R_b} \text{ (кН/м)} \text{ или } C_1 = 896,14 \cdot d^2 \cdot \sqrt{R_b} \text{ (т/м)}. \quad (4)$$

Соединение каждой железобетонной плиты с поясами объемной модели осуществляется с помощью 4 упоров 22x100 мм. Отношение длины к диаметру составляет  $l/d = 100/22 = 4,5 > 4,2$ . На момент испытаний прочность бетона соответствует классу В30. Следовательно, в соответствии с (3) несущая способность одного упора равна

$$V_u = 2,2^2 \cdot \sqrt{10 \cdot 15,5} = 60,2 \text{ (кН)}.$$

Согласно (1) теоретическое значение сдвиговой жесткости стыка с одним упором принимает значение  $C_1 = 167356 \text{ кН/м}$ .

Теоретическое значение несущей способности на сдвиг испытываемой объемной модели в целом (2 плиты по 4 упора):

$$V_{max} = 2 \cdot 4 \cdot 60,2 = 481,6 \text{ (кН)} = 49 \text{ (т)}.$$

Соответственно теоретическое значение сдвиговой жесткости всей объемной модели:

$$C = 2 \cdot 4 \cdot 167356 = 1338848 \text{ (кН/м)} = 136478 \text{ (т/м)}.$$

Для учета в теоретических расчетах деформации сжатия плиты на участке от точки опирания на стенде до первого ряда упоров была составлена физически нелинейная расчетная модель с использованием МКЭ в ПК ЛИРА-САПР. На рис. 4 слева представлены полученные численно изополя вертикальных перемещений при сжатии плиты, справа синими точками показано расположение упоров.

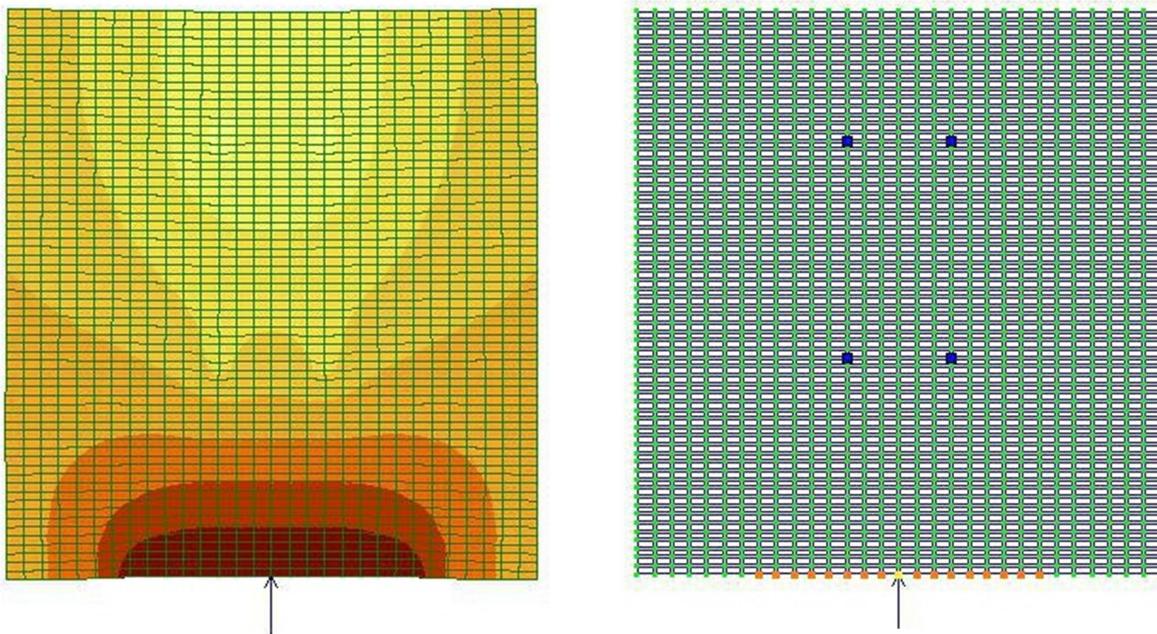


Рис. 4. Изополя вертикальных перемещений и расположение упоров в расчётной модели

При численном расчёте МКЭ значение сдвиговой жесткости  $C_ч$  с учётом деформации сжатия несколько меньше теоретического значения 1338848 кН/м:  $C_ч = 1163895 \text{ кН/м}$ . Уменьшение жесткости в МКЭ-модели относительно аналитического значения объясняется тем, что к величине деформации самого упора добавляется деформация сжатия плиты.

**Методика проведения испытаний, полученные результаты.** Согласно принятой методике испытания в соответствии с требованиями Еврокода EN 1994-1-1 [7, 8], на начальном этапе нагрузка прикладывается постепенно до достижения 40% от ожидаемой разрушающей нагрузки. Требование о начальном загрузении образцов до 40% предельной нагрузки и выдержке на этой ступени обоснованы тем, что при первых сдвиговых нагружениях подобных конструкций на начальной стадии нарастание смещения получается гораздо выше теоретического: во-первых, происходит обжатие и смятие торцов железобетонных плит на

основании гидравлической станции, во-вторых, упругая деформация самих плит. Поэтому в рамках проводимого эксперимента было принято решение оценивать приращение смещений плиты по балке на стадиях выше 40% предельной нагрузки, т.е. после первого нагружения (условный сдвиг). При этом остаточная деформация от смятия торцов составила в среднем 0,19 мм. На следующем этапе нагрузка прикладывается циклически (нагрузка-разгрузка) до достижения ожидаемой разрушающей нагрузки. Продольные деформации сдвига по контакту между каждой железобетонной плитой и стальным сечением измеряются непрерывно в процессе нагружения.

Ниже в табл. 1 представлены расчетные значения и результаты испытаний трёх объемных моделей на сдвиг. Соответствующие графические зависимости построены на рис.5 (горизонталь – значения ступенчато прикладываемой нагрузки в  $kH$ , вертикаль – величина сдвига в  $мм$ ): верхний график (фиолетовый) – образец №3; второй сверху (зеленый) – образец №2; третий сверху (красный) – образец №1; нижний график (синий) – теоретическое значение.

Таблица 1

Шаг	Нагрузка		Сдвиг стальной части относительно железобетонных плит			
	%	$kH$	<i>мм</i>			
			Расчетное значение	Образец №1	Образец №2	Образец №3
1	40	192	0,1684	0,3691	0,3912	0,4147
2	50	245	0,2105	0,4105	0,4351	0,4612
3	45	220,5	-	0,4218	0,4471	0,4739
4	55	269,5	0,2316	0,4316	0,4575	0,485
5	50	245	-	0,4442	0,4708	0,499
6	60	294	0,2526	0,4542	0,4814	0,5103
7	55	269,5	-	0,4633	0,4911	0,5206
8	65	318,5	0,2737	0,4693	0,4975	0,5274
9	60	294	-	0,4816	0,5105	0,5411
10	70	343	0,2947	0,4862	0,5154	0,5463
11	65	318,5	-	0,4969	0,5267	0,5583
12	75	367,5	0,3158	0,5024	0,5325	0,5645
13	70	343	-	0,5117	0,5424	0,5749
14	80	392	0,3368	0,5181	0,5492	0,5822
15	75	367,5	-	0,5265	0,5581	0,5916
16	85	416,5	0,3579	0,5333	0,5653	0,5992
17	80	392	-	0,5426	0,5752	0,6097
18	90	441	0,3789	0,5485	0,5814	0,6163
19	85	416,5	-	0,5572	0,5906	0,626
20	95	465,5	0,4	0,5611	0,5948	0,6305
21	90	441	-	0,5749	0,6094	0,646
22	100	490	0,421	0,5809	0,6157	0,6526
23	95	465,5	-	0,5673	0,6013	0,6374
24	100	490	0,421	0,5762	0,6108	0,6474

Примечания.

1. Согласно программе испытаний, производится первичное нагружение образцов нагрузкой 40% от предельной, выдержка 10 мин. на этой ступени, а затем циклы (нагрузка + 10% - разгрузка -5%) до достижения 100% от теоретической разрушающей нагрузки.

2. Для расчетных значений ступени разгрузки не указываются (т.к. значения совпадают с соответствующими значениями по нарастающей).

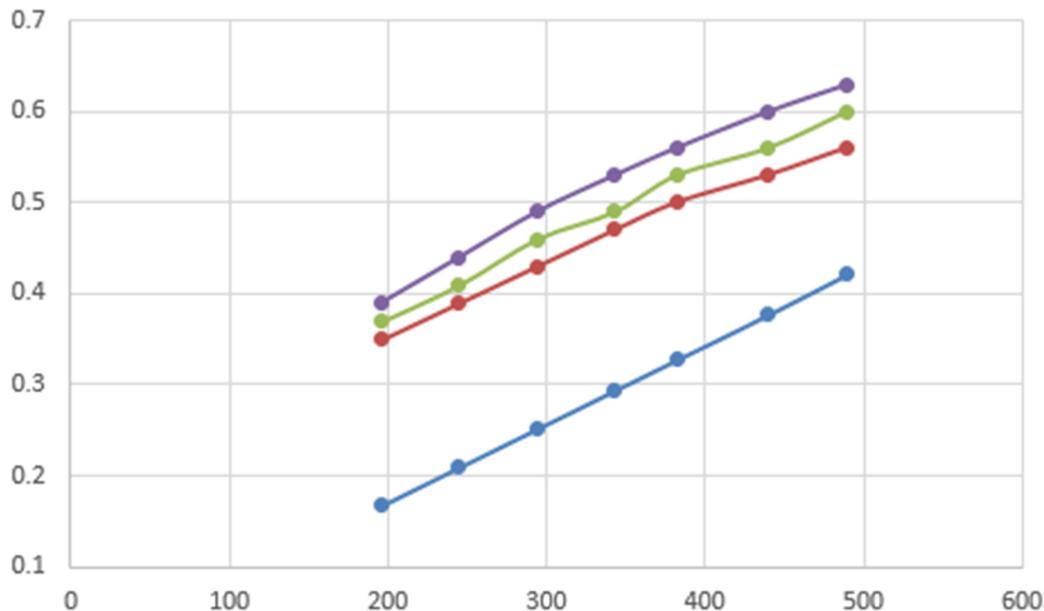


Рис. 5. Сравнение теоретической и экспериментальных зависимостей сдвига от нагрузки

На рис. 6 представлены графические зависимости условного сдвига от нагрузки, построенного с применением аналитической формулы (синяя прямая), и условного осреднённого сдвига в соответствии с полученными экспериментальными данными (фиолетовая ломаная). Условное значение сдвига представляет собой теоретическое и измеренные на трёх образцах значения сдвига, уменьшенные на величину остаточной деформации смятия торцов (0,19 мм).

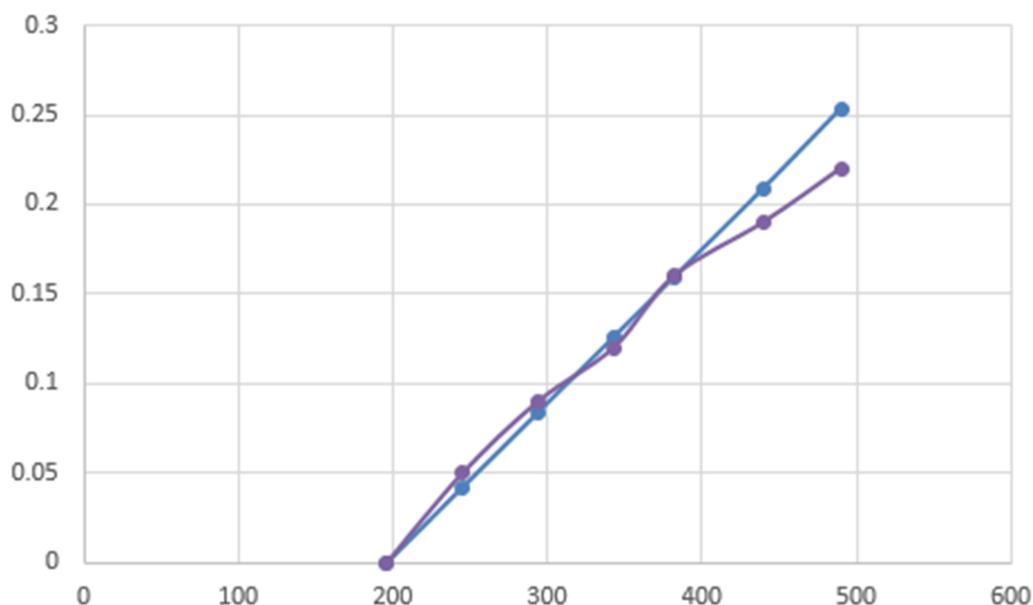


Рис. 6. Сравнение теоретической (прямая) и осреднённой (ломаная) зависимостей условного сдвига от нагрузки

В табл. 2 представлено окончательное сравнение теоретических, численных и экспериментальных значений сдвиговой жёсткости стыка между железобетонной плитой и стальной балкой, сочленённых с помощью гибких штыревых упоров, при максимальной нагрузке.

Таблица 2

Максимальная нагрузка, кН	Значение жёсткости, кН/м		
	аналитическое	численное МКЭ	экспериментальное
490	1338848	1163895	1262887

Анализ результатов, представленных в табл. 2, свидетельствует о том, что экспериментальное значение на -6 % отличается от аналитического и на +8 % от численного. Удовлетворительное совпадение значений жёсткости, полученных тремя способами, подтверждает состоятельность разработанной методики расчета сталежелезобетонных конструкций с учетом сдвига плиты по стальной балке.

**Выводы.** В ходе проведения экспериментальных исследований на объёмных моделях показана возможность неразрушающим методом определить сдвиговую жесткость стыка между железобетонной плитой и стальной балкой, по результатам испытаний определена линейная сдвиговая жесткость стыка на гибких штыревых упорах. Экспериментальные данные хорошо коррелируют со значениями, полученными разработанным аналитическим подходом, и расчётными с применением МКЭ. Результаты экспериментальных исследований подтверждают достоверность разработанного аналитического подхода, используемого для определения линейной сдвиговой жесткости стыка с гибкими штыревыми упорами.

#### Библиографический список

1. Ерёмин, В. Г. Аналитическая зависимость смещения от сдвиговой жесткости шва между железобетонной плитой и стальной балкой в пролетных строениях мостов / В. Г. Ерёмин, А. В. Козлов // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2019, № 3 (55). – С. 94-104. (Англ.: Yeremin V. G., Kozlov A. V. Analytical dependence of the shift from the shear stiffness of the seam between the concrete slab and steel beam in bridge spans // Russian Journal of Building Construction and Architecture. Issue №.4 (44). 2019. – Pp. 70-81.)
2. Ерёмин, В. Г. Аналитические зависимости, учитывающие сдвиг между железобетонными и стальными конструктивными элементами мостов в неразрезных многопролетных балках / В. Г. Ерёмин, А. В. Козлов // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2019, № 4 (56). – С.109-120.
3. Козлов, А. В. Классификация конструкций объединения железобетонной плиты со стальными балками/ А. В. Козлов // Научно-технический журнал «Строительная механика и конструкции». – 2019, №2(21). – С.50-63.
4. Корнеев, М. М. Сталежелезобетонные мосты: теоретическое и практическое пособие по проектированию / М. М. Корнеев. – СПб.: ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2015 – 400 с.
5. Fatigue of Stud Shear Connectors in the Negative Moment Region of Steel Girder Bridges: a Synopsis of Experimental Results and Design Recommendations. CTS 00-03. University of Minnesota, 2000.
6. Ростовых, Г. Н. Совершенствование методики расчетов гибких упоров в конструкциях сталежелезобетонных мостов / Г. Н. Ростовых // Известия Петербургского Университета Путей Сообщения. – 2007, №3. – С. 81-88.
7. ТКП EN 1994-2-2009 Технический кодекс установившейся практики. Еврокод 4. Проектирование сталежелезобетонных конструкций. Часть 2. Основные принципы и правила для мостов. – Минск, 2010. – 71 с.

8. Хенди Крис Р., Джонсон Роджер П. Руководство для проектировщиков к EN 1994-2. Еврокод 4: проектирование сталежелезобетонных конструкций. Часть 2: общие правила и правила для мостов. – М.: Издательство МИСИ-МГСУ, 2014 – 351 с.

#### References

1. Yeremin V.G., Kozlov A.V. Analytical dependence of the shift from the shear stiffness of the seam between the concrete slab and steel beam in bridge spans. Russian Journal of Building Construction and Architecture. No. 4(44). 2019. Pp. 70-81.
2. Yeremin V.G., Kozlov A.V. Analytical dependencies that take into account the shift between reinforced concrete and steel structural elements of bridges in continuous multi-span beams. Scientific Journal of Construction and Architecture. No. 4(56). 2019. Pp. 109-120.
3. Kozlov A.V. Classification of combining reinforced concrete slabs structures with steel beams. Scientific and Technical Journal "Structural Mechanics and Structures". No. 2(21). 2019. Pp. 50-63.
4. Korneev M.M. Steel Concrete bridges: Theoretical and Practical Guide to Design. SPb.: VPO RGUPS, 2015. 400 p.
5. Fatigue of Stud Shear Connectors in the Negative Moment Region of Steel Girder Bridges: a Synopsis of Experimental Results and Design Recommendations. CTS 00-03. University of Minnesota, 2000.
6. Rostov G.N. Improvement of methods of calculation of flexible stops in the structures of steel-concrete bridges. News of St. Petersburg University of Railway Engineering. No 3. 2007. Pp. 81-88.
7. ТКР EN 1994-2-2009 Technical code of routine practice. Eurocode 4. Design of steel-concrete structures. Part 2. Basic principles and rules for bridges. Minsk, 2010. 71 p.
8. Hendy Chris R., Johnson Roger P. Guidelines for designers to EN 1994-2. Eurocode 4. Design of steel-concrete structures. Part 2. General rules and regulations for bridges. M.: Publishing MISI-MGSU, 2014. 351 p.

### EXPERIMENTAL RESEARCH OF SHEAR JOINT STIFFNESS FOR A REINFORCED CONCRETE STRUCTURE WITH FLEXIBLE PINES

A. V. Kozlov<sup>1</sup>, V. A. Kozlov<sup>2</sup>, A. M. Khorokhordin<sup>3</sup>, P. P. Churakov<sup>4</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2,3</sup>,

“TiS” LLC<sup>4</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> Associate Professor of the Department of Design of Roads and Bridges, Tel.: +7(473)2715202, e-mail: [kozlov.a.v@inbox.ru](mailto:kozlov.a.v@inbox.ru)

<sup>2</sup> Dr. of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2764006, e-mail: [vakozlov@vgasu.vrn.ru](mailto:vakozlov@vgasu.vrn.ru)

<sup>3</sup> Head of the Center for Collective Use Named After Yu. M. Borisov, Tel.: +7(473)2926664, e-mail: [ckp@vgasu.vrn.ru](mailto:ckp@vgasu.vrn.ru)

<sup>4</sup> Senior Engineer

---

The proposed work presents the results of full-scale shear joint tests performed on volumetric models with the most common type of connection of a reinforced concrete slab with a steel beam using flexible pin stops. In this case, the exclusion of adhesion of the reinforced concrete slab to the steel beam is achieved by the use of an insulating strip. Based on the test results, a graphical relationship between deformations and plate shear forces is constructed. The obtained experimental values of the shear stiffness of the joint are compared with those calculated analytically, as well as using a numerical model using the FEM. The results of experimental studies confirm the reliability of the developed analytical approach used to determine the linear shear stiffness of the joint with flexible pin stops.

**Keywords:** steel-reinforced concrete structures and bridge spans, shear joint stiffness, experimental studies.

## МАГНИТОРЕЗИСТИВНЫЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЙ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДВЕСОК И ВАНТ МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЙ

В. В. Волков<sup>1</sup>, В. Н. Горячев<sup>2</sup>, М. Г. Ордян<sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры строительной механики; e-mail: kotlac@yandex.ru

<sup>2</sup>Ст. преп. кафедры строительной механики; e-mail: vgor05@mail.ru

<sup>3</sup>Канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры строительной механики; e-mail: omg84@mail.ru

---

Мостовые сооружения - важные элементы дорожной сети страны, которые с момента их строительства и в процессе длительной эксплуатации подвергаются различным воздействиям: транспортные нагрузки, погодные условия, старение материалов моста и т.д. Прочность и надежность снижаются, поэтому определение эксплуатационного состояния моста является важным этапом при его оценке. Одним из методов исследования моста является метод определения напряженно-деформированного состояния силовых элементов. В данной работе рассмотрено измерение напряженно-деформированного состояния подвесок и вант мостовых сооружений магниторезистивным методом. В результате исследования получена зависимость напряженно-деформированного состояния подвесок мостовых сооружений при различных нагрузках.

Показана возможность применения двухчастотного магниторезистивного метода для диагностики эксплуатационного состояния металлических подвесок и вант. Увеличение срока службы ванты приводит к увеличению дифференциала частотной зависимости глубинного проникновения магнитного поля. Изменение сечения, вызванное предельными деформациями, выражено в мультипликативном изменении магнитного поля материала силового элемента. Это позволяет производить диагностику подвесок и вантовых сооружений мостов.

**Ключевые слова:** магниторезистивный метод, напряженно-деформированное состояние, висячий мост.

**Анализ проблемы.** Мосты - важные элементы дорожной сети, и от их состояния зависит инфраструктурная непрерывность транспортного сообщения. Висячие мосты находят наиболее частое применение в случае большой длины моста и определяют жесткие требования к элементам силовых конструкций. Одними из главных элементов являются силовые, исполненные из металла – подвески, силовые канаты и ванты,. Представим модель висячего моста в виде пространственной системы, состоящей из двух упруго связанных подсистем: балки жесткости и пилонов. Связь между подсистемами осуществим с помощью кабеля и подвесок, которые моделируем деформируемыми стержнями [1, 2]. Такое представление комбинированной системы позволяет упростить описание поведения конструкции под транспортной нагрузкой.

Цель настоящей работы - разработка методики определения напряженно-деформированного состояния подвесок в эксплуатационный период [3, 4].

Объектом исследования являются подвески висячего мостового сооружения.

Предмет исследования - магниторезистивный метод измерений и определения напряженно-деформированного состояния металлических подвесок висячего моста [5 - 11].

Для анализа используется расчетная схема заземленного в фундаменте пилон с двумя симметричными относительно оси моста кабелями с подвесками. Подвески, объединяющие подсистему кабелей с балкой, считаем линейно-упругими без инерционных связей, массу подвески учтем приближенно пропорционально их длине.

В качестве объекта исследования взят висячий мост, соединяющий левый берег г. Воронежа с Придаченской дамбой Воронежского водохранилища.

На рис. 1 показано изображение висячего моста с подвесками, на котором проводились измерения двухчастотным магниторезистивным методом.



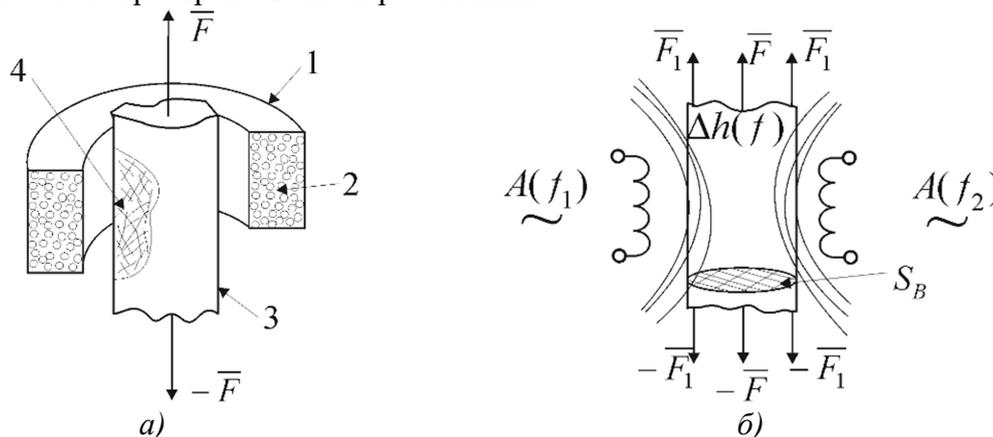
**Рис. 1.** Общий вид висячего моста, соединяющего левый берег г. Воронежа с Придаченской дамбой Воронежского водохранилища:

1 – балка жесткости, 2 – пилон, 3 – кабель, 4 – подвеска с указанием места измерения

Нагрузка рассматривается как одиночный двухосный автомобиль.

В процессе эксплуатации происходит износ (деградация) силовых элементов висячего моста, выполненных из металлических материалов. И хотя этот процесс пролонгирован во времени, он необратим и может привести к разрушению подвесок и, как следствие, выводу мостового сооружения из эксплуатации.

**Методика эксперимента.** На рис. 2, а показано схематическое сечение датчика с железной подвеской, помещенной в пространственно-однородное двухчастотное гармоническое по времени магнитное поле. Модель пространства усекается с областью бесконечных элементов с аппроксимирующей областью, которая продолжается до бесконечности. При рассмотрении данного объекта в бесконечной элементной области граничное условие вне области моделирования незначительно влияет на решение, поскольку оно размещается на большом физическом пространственном расстоянии.



**Рис. 2.** Конструкция датчика измерения напряженно-деформированного состояния металлической подвески или ванты: а) схематическое сечение датчика, б) принцип функционирования датчика, 1 - катушка, 2 – провода катушки, 3 – подвеска, 4 – верхний слой металлической подвески,  $\bar{F}$  - растягивающие усилия,  $\bar{F}_1$ ,  $-\bar{F}_1$  - напряжение поверхностного слоя;  $\Delta h(f)$  - глубина проникновения поля;  $A(f_1)$ ,  $A(f_2)$  - наведенная электрическая величина магнитного поля,  $S_B$  - сечение подвески или ванты

На рис. 2, б показан принцип функционирования датчика, металлическая подвеска или ванта помещена в поле составной двухобмоточной электромагнитной катушки. К каждой из обмоток подведен переменный синусоидальный гармонический ток с различными частотами  $A(f_1)$  и  $A(f_2)$ . С помощью первой обмотки индуцируется переменное магнитное поле с частотой  $f_1$  и слабое измерительное поле  $f_2$ , с помощью которого измеряется проводимость поверхностного слоя – магниторезистивная составляющая проводимости  $\Delta\sigma(B(f))$  скин-слоя  $\Delta h(f) = \delta$ . Расчет основных параметров производится в математическом пакете COMSOL Multiphysics 5.5 с использованием AC/DC Module методом конечных элементов. Основные физико-механические параметры взяты из описания конструкции и использованных материалов [3]. В расчете железная подвеска имеет относительную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon_r = 1$ , относительную проницаемость  $\mu_r = 4000$  и электрическую проводимость  $\sigma = 1,12 \cdot 10^7$  Сим/м. Сделанные основные ограничения при моделировании в частотной области возбуждающего магнитного поля состоят в том, что все свойства материала не зависят от напряженности поля, но зависят от  $B(f)$  - частотно зависимой индукции в сечении сердечника подвески или ванта. При приложенной напряженности поля 1 мТ можно считать постоянной проницаемость - эффекты насыщения в железе незначительны.

Для всех моделей с изменяющимися во времени магнитными полями важно учитывать глубину скин-слоя  $\delta$ , которая определяется как

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{Re} \sqrt{i\omega\mu_0\mu_r(\sigma + i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r)}}, \quad (1)$$

При рабочей частоте 12 Гц глубина скин-слоя железа составляет  $\delta \sim 0,9$  мм. Окружающий воздух имеет  $\varepsilon_r = 1$ ,  $\mu_r = 1$ , и  $\sigma = 1,12 \cdot 10^7$  Сим/м. Таким образом, отношение наибольшей глубины к наименьшей глубине стремится к бесконечности и это приводит к уменьшению сходимости при решении задачи.

Можно избежать этой численной трудности, добавив искусственную проводимость в воздушную область. Основная концепция, лежащая в основе этого подхода, заключается в рассмотрении глубины скин-слоя во всех областях модели, а в областях, где глубина скин-слоя очень велика или равна бесконечности, проводимость должна быть увеличена. Эта искусственная проводимость должна быть достаточно большой, чтобы отношение наибольшей к наименьшей глубине слоя проводимости было около 1000:1. Чем больше искусственная проводимость, тем менее точны результаты, но слишком малая искусственная проводимость отрицательно влияет на конвергенцию [5, 9].

На рис. 3 показано распределение магнитного потока по толщине материала, где видно возникновение вихревой структуры, приводящей к скин-эффекту. Это позволяет определить напряженное состояние основного стержня и измерить дифференциальную глубину проникновения поля при изменении сечения. Это связано в предельном случае с коэффициентом Пуассона:

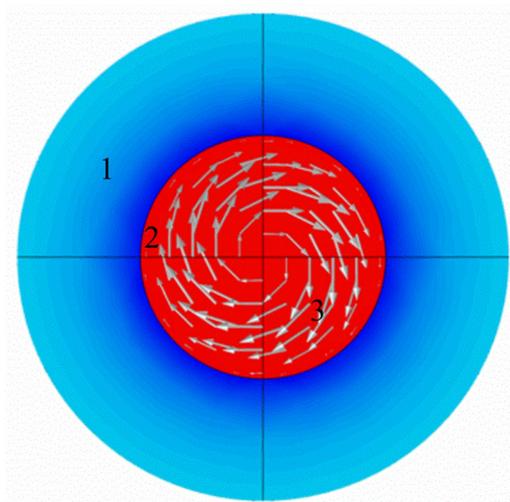
$$\mu = -\frac{\Delta d}{d} \frac{l}{\Delta l}, \quad (2)$$

где  $d, l$  – сечение и длина соответственно,  $\Delta d, \Delta l$  - изменение сечения и длины ванта соответственно.

Изменение магнитной проницаемости материала, вызванной деформацией, обнаруживается частотной зависимостью намагничивания сердечника.

$$\mu_r = \left( \frac{1}{\mu_0 \left( -\frac{\Delta d}{d} \frac{l}{\Delta l} \right)} \right) dB / dH, \quad (3)$$

где  $dB$  - изменение индукции в сечении,  $dH$  - изменение коэрцитивной силы.



**Рис. 3.** Распределение магнитного потока по толщине ванты:  
1 - катушка, 2 – провода катушки, 3 – ванта

Магниторезистивная (дифференциальная часть) составляющая скин-эффекта может быть выражена соотношением

$$\Delta s(B(f)) = \Delta s(0) \mu_r^2 B(f)^2, \quad (4)$$

где  $B(f)$  - частотно зависящая индукция в сечении ванты,  $\Delta s(0)$  - начальная проводимость слоя, эквивалентная  $\sigma$ .

Альтернативный подход, который не требует значительного увеличения искусственной проводимости, заключается в использовании калибровки. Это добавляет дополнительное уравнение к решаемой системе уравнений и, как следствие, значительно увеличивает вычислительные усилия, необходимые для решения модели.

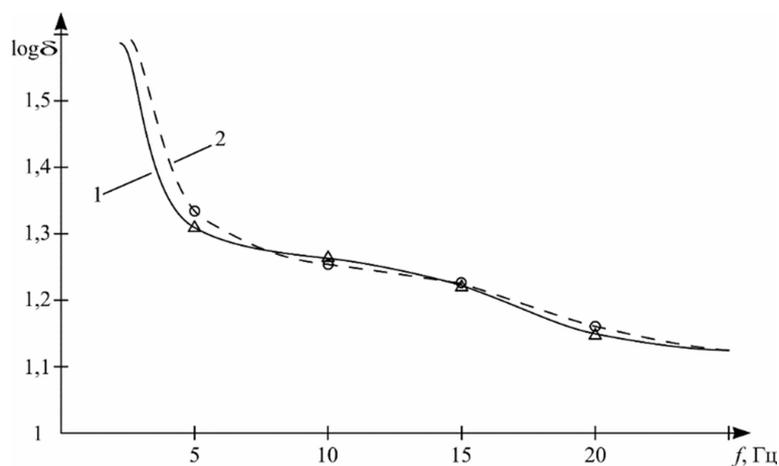
**Исследование висячего моста.** Исследование параметров подвесок висячего моста выполнялось на основе пространственной расчетной схемы [3] путем измерения магниторезистивной составляющей и последующим изучением частоты резонанса в материале при статической нагрузке автомобилем.

Для моделирования воздействия на мост автомобилей использовалась пространственная расчетная схема двухосного автомобиля с параметрами, близкими к КамАЗ-53605, загруженного четырьмя фундаментными блоками с общей массой  $m = 15,14 \text{ тн}$ .

На подвеску укреплялся датчик с катушкой, генерирующий магнитное поле и измеряющий магниторезистивный эффект. Посредством сканирования частотных характеристик катушки - проводимости поверхностного слоя  $s(B(f))$ . Используя лазерный измеритель расстояния, определяется длина подвеса  $l$ . В последующем при статическом нагружении в районе данной подвески автомобилем определяется второй резонанс и длина нагруженной подвески и находится изменение частоты резонанса системы и приращения длины подвески.

### Анализ результатов исследования

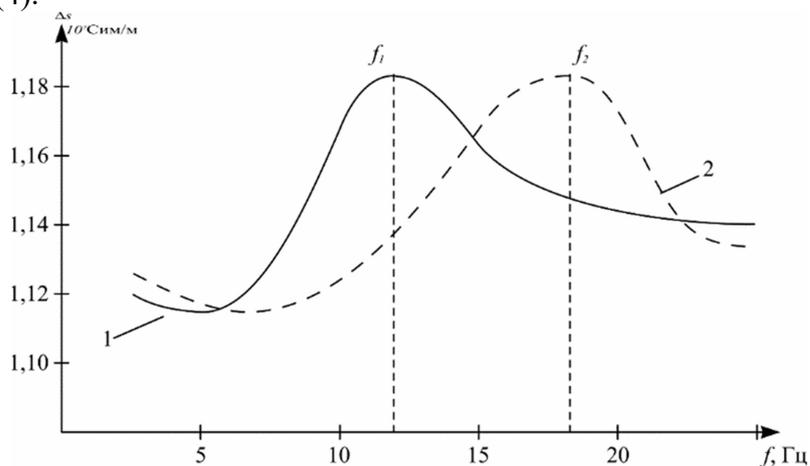
Измерения, проведенные на вантовом мосту с указанными выше параметрами, показали возможность определения напряженно-деформируемого состояния металлической ванты магниторезистивным методом. На рис. 4 показано изменение частотной компоненты скин-эффекта под нагрузкой.



**Рис. 4.** Частотно зависимое изменение толщины скин-слоя под различной нагрузкой:  
1 – без нагрузки, 2 – под нагрузкой  $m = 15,14 \text{ тн}$  от КамАЗ-53605, загруженного четырьмя фундаментными блоками

Следует отметить незначительную величину отклонения толщины скин-слоя под действием нагрузки. Это не позволяет проводить точные измерения влияния динамической нагрузки. Анализ кривых 1, 2 показывает, что в области частот магнитного поля 10-20 Гц присутствует неоднородность, связанная с магниторезистивным эффектом.

На рис. 5 показаны экспериментально определенные частотно зависимые кривые проводимости скин-слоя при действии нагрузки. Данные кривые получены измерением на основании соотношения (4).



**Рис. 5.** Частотно зависимое изменение проводимости скин-слоя под различной нагрузкой:  
1 – без нагрузки, 2 – под нагрузкой  $m = 15,14 \text{ тн}$  от КамАЗ-53605, загруженного четырьмя фундаментными блоками, частоты магниторезистивного резонанса  $f_1 = 12,1 \text{ Гц}$ ,  $f_2 = 17,6 \text{ Гц}$

Изменение центральной частоты магниторезистивного эффекта при нагружении свидетельствует о сжатии верхнего слоя ферромагнитного материала. Этот обжимающий эффект приводит к увеличению подвижности электронных зон (вытягиванию доменов). Для данного экспериментального исследования получена чувствительность метода, равная  $0,37 \pm 0,012 \text{ Гц/тн}$ .

### Выводы

1. Магниторезистивная технология измерений напряженно-деформированного состояния силовых элементов подвеса висячих мостов позволяет определять как в статическом, так и в динамическом режиме их состояние в эксплуатационный период.

2. Использование двухчастотного метода позволяет определить по изменению резонансной частоты магнитного поля в металлической подвеске или ванте моста обжимающее усилие, а по высокочастотной составляющей магнитного поля - изменение состояния верхнего слоя силового подвеса мостовой конструкции.

3. Вышеуказанная методика позволяет определить напряженно-деформированное состояние подвески или ванты висячего моста и на его основе сделать вывод об эксплуатационной пригодности металлических силовых подвесок и вант. При этом возможность проведения измерений одновременно на всех аналогичных элементах позволяет произвести измерение динамического воздействия от транспортных средств и других силовых воздействий.

#### Библиографический список

1. Качурин, В. К. Проектирование висячих и вантовых мостов / В. К. Качурин, А. В. Брагин, Б. Г. Ерунов. – М.: Изд-во «Транспорт», 1971. – 280 с.
2. Кирсанов, Н. М. Висячие и вантовые конструкции: учеб. пособие для вузов / Н. М. Кирсанов. – М.: Стройиздат, 1981. – 158 с.
3. Сафронов, В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку / В. С. Сафронов. - Воронеж, 1983. 195 с.
4. Кужахметова, Э. Р. Особенности напряженно-деформированного состояния здания с цилиндро-плито-вантовым покрытием / Э. Р. Кужахметова // Вестник науки: сборник статей // Актуальные вопросы современной науки: XII Междунар. науч.-практ. конф. – Томск, 2018. – С. 93–98.
5. Christen R., Bergamini A., Motavalli M. Three-dimensional localization of defects in stay cables using magnetic flux leakage methods, Journal of Nondestructive Evaluation, Vol. 22, No. 3, September 2003: p. 93-101.
6. Shcherbinin V. E., Zatsepin N. N., Calculation of the magnetostatic field of surface defects. II. Experimental verification of the principal theoretical relationships, Defectoscopy, 5:394–399 (1966).
7. Cunha A., Caetano E., Delgado R. Dynamic tests on large cable-stayed bridge. J Bridge Eng 2001; 6(1): 54–62.
8. An Y., Zhong Y., Tan Y. Experimental and numerical studies on a test method for damage diagnosis of stay cables. Adv Struct Eng 2017; 20(2): 245–256.
9. Mao J.X., Wang H., Feng D.M. Investigation of dynamic properties of long-span cable-stayed bridges based on one-year monitoring data under normal operating condition. Struct Control Health Monit 2018; 25: e2146.
10. Nazarian E., Ansari F., Zhang X. Detection of tension loss in cables of cable-stayed bridges by distributed monitoring of bridge deck strains. J Struct Eng 2016; 142(6): 04016018.
11. Mehrabi A.B. In-service evaluation of cable-stayed bridges, overview of available methods and findings. J Bridge Eng 2006; 11(6): 716–724.

#### References

1. Kachurin V.K., Bragin A.V., Erunov B.G. Design of suspension and cable-stayed bridges. M.: Publishing house "Transport", 1971. 280 p.
2. Kirsanov N.M. Suspension and cable-stayed structures: textbook. M.: Stroyizdat, 1981. 158 p.

3. Safronov V.S. Calculation of hanging and cable-stayed bridges for mobile loading. Voronezh, 1983. 195 p.
4. Kuzhakhmetova E.R. Features of the deflected mode of a building with a cylinder-plate-cable-stayed coating. Bulletin of science: collection of articles. Actual problems of modern science: XII Intern. scientific-practical conf. Tomsk, 2018. Pp. 93-98.
5. Christen R., Bergamini A., Motavalli M. Three-dimensional localization of defects in stay cables using magnetic flux leakage methods. Journal of Nondestructive Evaluation. Vol. 22. No. 3. 2003. Pp. 93-101.
6. Shcherbinin V.E., Zatsepin N.N. Calculation of the magnetostatic field of surface defects. Part II. Experimental verification of the principal theoretical relationships. Defectoscopy. No. 5. 1966. 394-399.
7. Cunha A., Caetano E., Delgado R. Dynamic tests on large cable-stayed bridge. J. Bridge Eng. No. 6(1). 2001. Pp. 54-62.
8. An Y., Zhong Y., Tan Y. Experimental and numerical studies on a test method for damage diagnosis of stay cables. Adv. Struct. Eng. No. 20(2). 2017. Pp. 245-256.
9. Mao J.X., Wang H., Feng D.M. Investigation of dynamic properties of long-span cable-stayed bridges based on one-year monitoring data under normal operating condition. Struct. Control Health Monit. No. 25. 2018. e2146.
10. Nazarian E., Ansari F., Zhang X. Detection of tension loss in cables of cable-stayed bridges by distributed monitoring of bridge deck strains. J. Struct. Eng. No. 142(6). 2016. 04016018.
11. Mehrabi A.B. In-service evaluation of cable-stayed bridges, overview of available methods and findings. J. Bridge. Eng. No. 11(6). 2006. Pp. 716-724.

## **MAGNETIC-RESISTIVE METHOD OF MEASURING THE DEFLECTED MODE OF SUSPENDED AND CABLE STAYED BRIDGE STRUCTURES**

V. V. Volkov<sup>1</sup>, V. N. Goryachev<sup>2</sup>, M. G. Ordyan<sup>3</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2,3</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Phys. & Math. Sciences, Assoc. Prof. of Department of Structural Mechanics, e-mail: kotlac@yandex.ru

<sup>2</sup> Assistant Prof. of the Department of Structural Mechanics, e-mail: vgor05@mail.ru

<sup>3</sup> PhD of Phys. & Math. Sciences, Assoc. Prof. of Department of Structural Mechanics, e-mail: omg84@mail.ru

---

Bridge structures are important elements of a country's road network, which, from the moment of their construction and during long-term operation, are subjected to various influences: transport loads, weather conditions, aging of bridge materials, etc. The strength and reliability of bridges are reduced, therefore, the determination of the operational state of a bridge is an important step in its assessment. One of the methods for studying a bridge is a method for determining the deflected mode of power elements. In this paper, we consider the measurement of the deflected mode of suspended and cable-stayed bridge structures using the magneto-resistive method. As a result of the study, the dependence of the deflected mode of the suspension structures of bridge structures at various loads is obtained.

The possibility of using the two-frequency magneto-resistive method for diagnosing the operational state of metal suspensions and cables is shown. An increase in the service life of the cable leads to an increase in the differential of the frequency dependence of the deep penetration of the magnetic field. The change in cross-section caused by ultimate strains is expressed in the multiplicative change in the magnetic field of the material of the force element. This allows diagnosing suspensions and cable-stayed bridge structures.

**Keywords:** magnetic-resistive method, deflected mode, suspension bridge.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.014

## СИЛОВАЯ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЬ ПОЭЛЕМЕНТНОЙ СБОРКИ

Д. Н. Кузнецов<sup>1</sup>, Д. И. Емельянов<sup>2</sup>, Т. М. Павленко<sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1, 2, 3</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Ст. преподаватель кафедры металлических и деревянных конструкций  
Тел.: +7(910)3468912, e-mail: [kuznecov82@bk.ru](mailto:kuznecov82@bk.ru)

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой металлических и деревянных конструкций

<sup>3</sup> Доц. кафедры основ проектирования и архитектурной графики

---

В практике современного строительства находят широкое применение криволинейные конструктивные формы. На начальном этапе проектирования сложная конструктивная форма здания или сооружения моделируется архитекторами. В дальнейшем конструкторы создают и оптимизируют параметры несущих элементов каркаса. Условиям прочности и жесткости должны отвечать не только несущие, но и ограждающие конструкции.

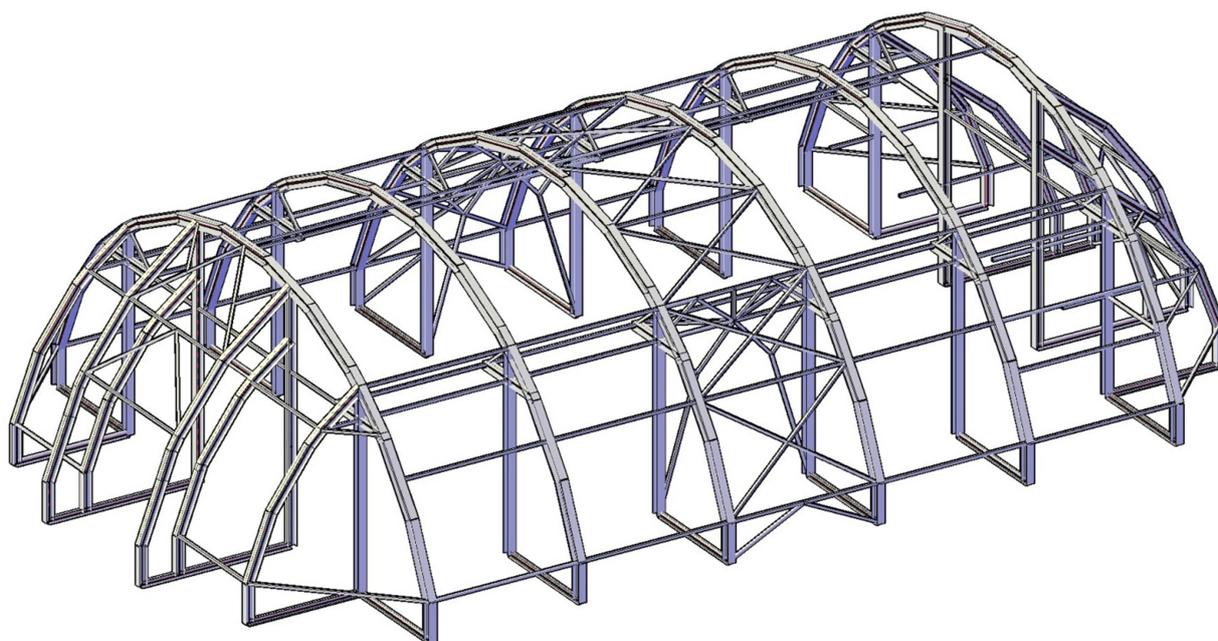
Сэндвич-панели поэлементной сборки часто применяют в качестве ограждающих конструкций для прямолинейных участков кровли и фасадов. Но в случае сложных криволинейных форм отдельные участки ограждающих конструкций испытывают атмосферные нагрузки пиковых интенсивностей. Если несущая способность типовых решений сэндвич-панелей поэлементной сборки в местах экстремальных интенсивностей нагрузок не обеспечена, конструкции панели требуется усиление. В работе рассматривается конструктивное решение по увеличению несущей способности сэндвич-панели поэлементной сборки, на примере производственного корпуса арочного очертания. Вводится понятие «силовая сэндвич-панель поэлементной сборки». Приводятся особенности сбора нагрузок и расчет усиливающего элемента жесткости. Приводятся рекомендации по дальнейшим исследованиям по уточнению несущей способности силовых панелей. Материалы представленной работы могут быть полезны действующим проектировщикам.

**Ключевые слова:** сэндвич-панель, сэндвич-панель поэлементной сборки, усиление сэндвич-панели, внутренний элемент жесткости, расчет на кручение, пиковые нагрузки на сэндвич-панель.

### Введение

В качестве ограждающих конструкций покрытия прямолинейных поверхностей в зданиях и сооружениях нежилого назначения часто принимаются сэндвич-панели [1, 2]. Архитектор и конструктор принимают решение об использовании сэндвич-панелей совместно и/или согласованно. Сэндвич-панели имеют множество достоинств: высокая скорость монтажа, не требуют внутренней отделки, высокие характеристики по теплопроводности, легкий собственный вес, невысокая стоимость и другие. При поэлементной сборке сэндвич-панелей [3], мы дополнительно получаем возможность свободно подбирать требуемый утеплитель, назначать различные кровельные и фасадные облицовки, покрывать криволинейные поверхности.

Закрепилось мнение, что производственные корпуса не являются объектами с высокой выразительностью архитектурного стиля. Однако данное представление является устаревшим, многие современные производители уделяют большое внимание внешнему облику промышленных корпусов [4]. В 2018 году, при проектировании «Комплекса зданий и сооружений по выпуску МетеоРакет, в Каширском районе Воронежской области», у проектной группы ВГТУ возникла необходимость в разработке документации на строительство производственного здания (рис. 1). Конструктивная форма производственного корпуса имеет несущий каркас арочного вида в продольном направлении и полуарочного очертания с торцов (рис. 1).



**Рис. 1.** Общий вид несущего каркаса производственного корпуса

Указанная конструктивная схема формирует выразительный облик производственного корпуса и позволяет выдержать единый архитектурный стиль всего комплекса зданий. Но форма здания в виде арочного очертания, согласно схемам снеговых и ветровых нагрузок, указанных в СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия», имеет области экстремальных интенсивностей, по величине. Ограждающие конструкции приняты в виде сэндвич-панелей поэлементной сборки. В 2013 году ЦНИИПСК им. Мельникова разработал рекомендации по определению несущей способности кровельных и фасадных панелей поэлементной сборки [5]. Согласно рекомендациям предельная нагрузка на панель, покрывающую пролет 6 м, для двухопорной конструкции не превышает 1,9 кПа [5]. С типовым усилением, предусмотренным производителями профиля сэндвич-панелей поэлементной сборки, несущая способность панели возрастает, но не допускает превышения расчетной снеговой нагрузки более 2,68 кПа на пролете 6 м. Следует отметить, что прочность типового элемента жесткости в рекомендациях [5] проверялась без учета действия нормальных напряжений от изгибного кручения. Указанная несущая способность усиленной конструкции не обеспечивает прочность панели в местах повышенных снеговых отложений, даже после усиления элементами жесткости от производителя панелей.

Появляются работы [6, 7] по исследованию несущей способности стеновой панели заводской сборки из кассетного сэндвич-профиля. В выводах указанного исследования отмечена целесообразность определения предельной несущей способности и жесткости панели по средствам испытаний. Однако в указанной работе исследована панель с фасадной поверхностью из стенового профилированного настила одного вида — НС 35-1000-0.8, по ГОСТ 24045. Важным достоинством панелей поэлементной сборки является многообразие применяемого утеплителя и внешних облицовок. Испытать большое число вариантов панелей в сборке, с различными облицовками и утеплителями представляется затруднительным. Для достижения требуемой несущей способности сэндвич-панелей поэлементной сборки возникла необходимость разработки усиливающего профиля нетиповой конструкции. Рассмотрению вопросов особенностей конструктивного решения, методов расчета и прочности внут-

ренного элемента усиления силовой сэндвич-панели поэлементной сборки посвящается данная работа.

## 1. Общие сведения по объекту исследования

Исследуемая сэндвич-панель является ограждающей конструкцией цеха пролетом 24 м и длиной 42 м. Цех имеет несущий стальной каркас арочного очертания с внутренним радиусом арки — 12 м (рис. 2). Производственный корпус оснащен подвесным крановым оборудованием грузоподъемностью  $Q=49$  кН. Шаг стальных арок - 6 м. Место строительства: Каширский район Воронежской области.

Сэндвич-панель поэлементной сборки конструктивно представляет собой сэндвич-профили, которые по геометрии похожи на «лотки». Каждый такой сэндвич-профиль имеет плотный замок в виде гофра для соединения и последующего механического крепежа облицовки самонарезающими винтами. В проекте применялся сэндвич-профиль шириной 595 и высотой 150 мм, маркировка СП—150х595 [3] с толщиной листа 1 мм. В полость профиля укладывают утеплитель (рис. 3), который по характеристикам должен удовлетворять теплотехническим требованиям [8]. Далее может крепиться облицовка (профилированный настил, металлочерепица) или слой более жесткого утеплителя с верхним гидроизоляционным покрытием, например полимерная мембрана, как в рассматриваемом проекте.

Для увеличения несущей способности сэндвич-панелей поэлементной сборки запроектирован элемент жесткости, который представляет собой гнутый, открытый, не симметричный С-образный профиль, с квадратной трубой, приваренной к верхней полке (рис. 4, 5).

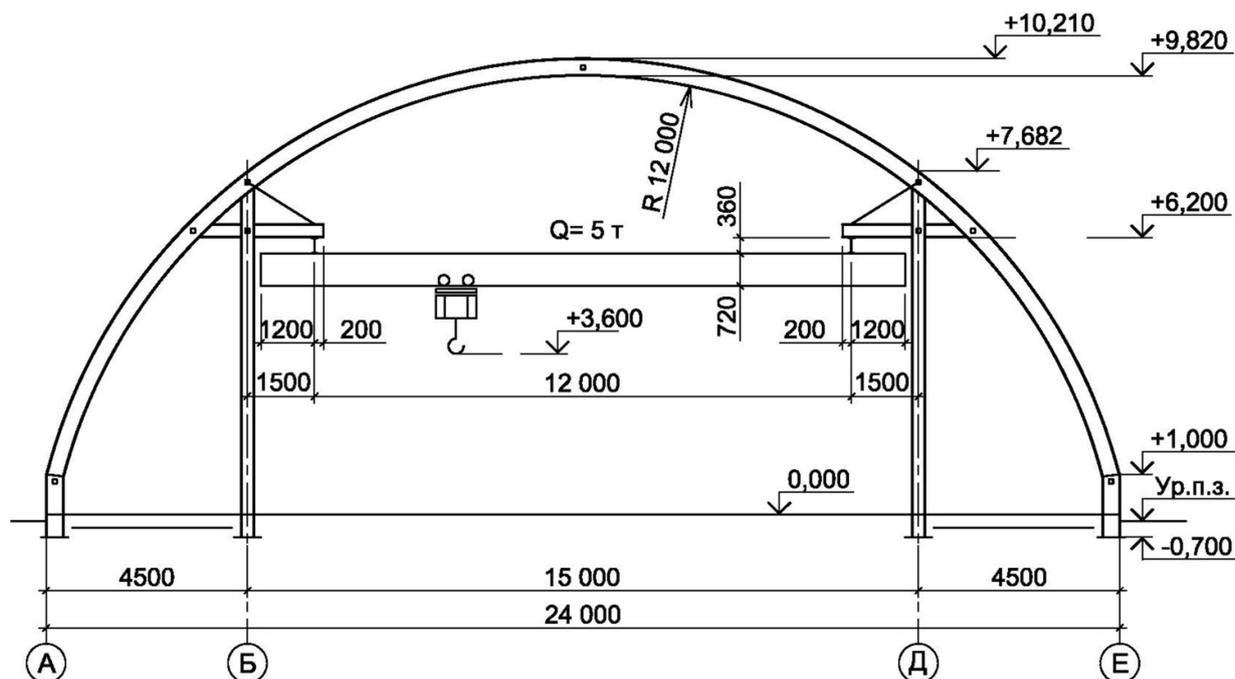


Рис. 2. Поперечный разрез производственного корпуса

Профиль открытый для возможности утепления внутренней полости. Усиливающий профиль заводится в полость сэндвич-профиля и имеет пролет, равный шагу несущих арок каркаса, 6 м. Усиливать следует именно те панели, которым это необходимо. Элемент жесткости позволяет добиться силовой работы прочих элементов панели не на пролете, равном шагу арок, — 6000 мм, а на пролете, равном шагу элементов жесткости, — 595 мм (рис. 5). Но из-за сложной геометрии и характера действующих нагрузок несущая способность панели в целом и отдельно элемента жесткости требует дополнительных исследований.

Полимерная мембрана LOGICROOF V-RP		- 1,5 мм;
Геотекстиль		- 1 слой;
Минераловатный утеплитель ТЕХНОРУФ В ОПТИМА		- 40мм;
Минераловатный утеплитель ТЕХНОРУФ Н ПРОФ		- 150мм;
Паробарьер С (А500)		
Сендвич-профиль	СП-150х595	- 1мм;
Уплотнитель колонна-сэндвич		

Элемент жесткости

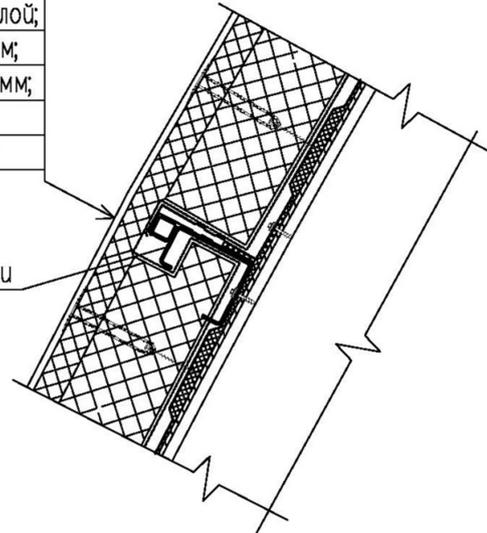


Рис. 3. Узел примыкания сэндвич-панелей с элементом жесткости

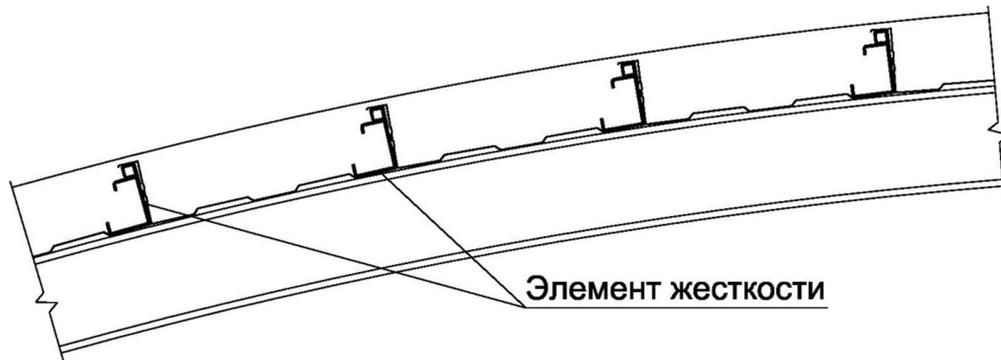


Рис. 4. Схема раскладки элементов жесткости в составе сэндвич-панелей

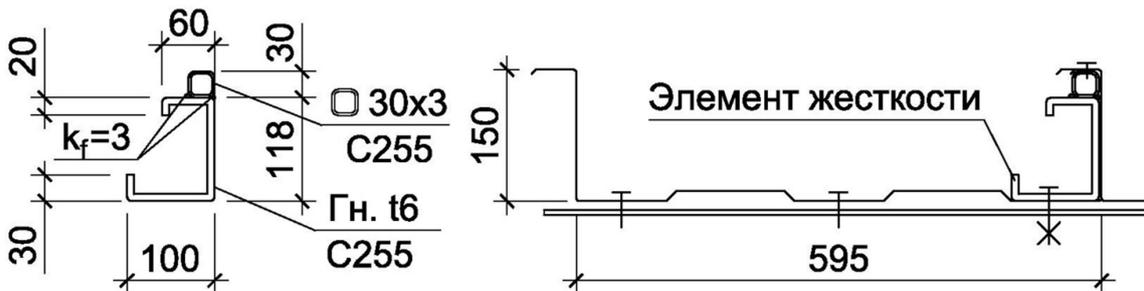


Рис. 5. Схема конструктивного решения усиливающего элемента жесткости

## 2. Геометрические характеристики сечения элемента жесткости

Поперечное сечение элемента усиления интегрированного внутрь сэндвич-профиля имеет сложную геометрию. Для нахождения требуемых характеристик сечения мы применяли связку программ: «Конструктор сечений» и «Консул» [9], из пакета SCAD Office. На рис. 6 показано геометрическое место точек центра тяжести и центра изгиба составного сечения запроектированного элемента жесткости.

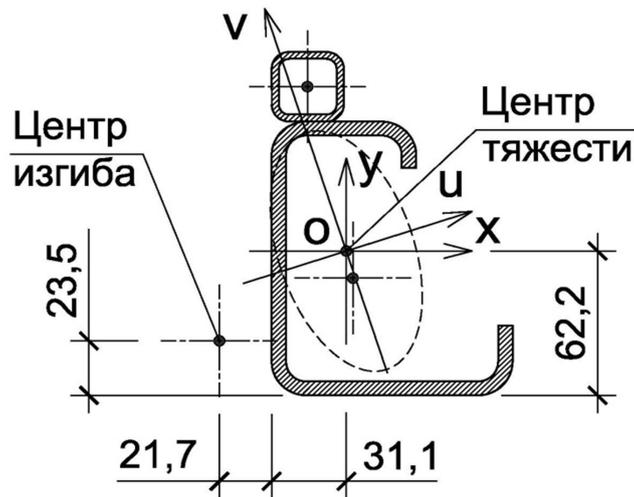


Рис. 6. Схема поперечного сечения профиля усиления, с характерными точками, мм

Для элемента жесткости центр изгиба является важной точкой, которая определяет силовую работу исследуемого профиля только на изгиб в двух главных плоскостях или изгиб с дополнительным кручением. Кручение возникает в случае, если поперечная нагрузка не проходит через центр изгиба профиля [10-12]. Если сечение не имеет осей симметрии, то центр изгиба не лежит ни на одной из главных осей. В таблице приводятся расчетные величины моментов инерции, в том числе и секториальный момент инерции — единственная геометрическая величина, характеризующая сопротивляемость поперечного сечения элемента жесткости, депланации (искривлениям) поперечного сечения. Отгибы полок внутрь значительно увеличивают секториальную жесткость профиля —  $EI_{\omega}$ . Сопротивляемость искривлениям поперечного сечения элемента усиления важна с точки зрения эксплуатации и для теоретической строгости расчетов. Недеформируемость контура поперечного сечения является условием применимости закона распределения нормальных напряжений в поперечном сечении элемента при совместном действии изгиба и кручения.

Таблица

Значения расчетных моментов инерции

Момент инерции	Величина
$J_X$ — Момент инерции относительно центральной оси X, см <sup>4</sup>	568,05
$J_Y$ — Момент инерции относительно центральной оси Y, см <sup>4</sup>	211,26
$J_U$ — Максимальный момент инерции U, см <sup>4</sup>	610,53
$J_V$ — Минимальный момент инерции V, см <sup>4</sup>	168,78
$J_t$ — Момент инерции при свободном кручении t, см <sup>4</sup>	2,20*
$J_{\omega}$ — Секториальный момент инерции $\omega$ , см <sup>6</sup>	28635,50*

Примечание: Значения со знаком «\*» определены только для нижней С-образной части сечения элемента жесткости, потому что в замкнутых профилях с недеформируемым контуром нормальные напряжения от кручения равны нулю. Проверка прочности с учетом составляющей от бимоментов верхней, замкнутой, квадратной трубы не требуется.

### 3. Прочность исследуемого элемента жесткости

При поиске неблагоприятных сочетаний рассмотрены варианты совместного действия постоянной и кратковременных нагрузок: собственный вес, два варианта снеговой нагрузки и ветровая в двух направлениях. От действия снеговой нагрузки наиболее неблагоприятным вариантом по СП 20.13330.2016 является «Вариант 2», показанный на рис. 7. Переход максимумов веса снегового покрова с поверхности земли на покрытие, с учетом уклона и геометрии кровли нормирован отдельными коэффициентами —  $\mu$  [13]. Но в результате подтаивания возможно смещение пиковых снеговых отложений. Интенсивность снеговой нагрузки быстро убывает от экстремумов, и несущие конструкции могут быть не рассчитаны, даже на незначительные смещения снеговых отложений. Можно отметить, что нормированные варианты снеговых нагрузок отражают характер снеговых отложений на покрытии, но не рассматривают нагрузочный эффект как физический процесс, происходящий во времени, при эксплуатации. В зимний период аварийность конструкций, имеющих арочное очертание, повышена [14], авторы полагают, что одной из причин может быть смещение максимальных снеговых отложений.

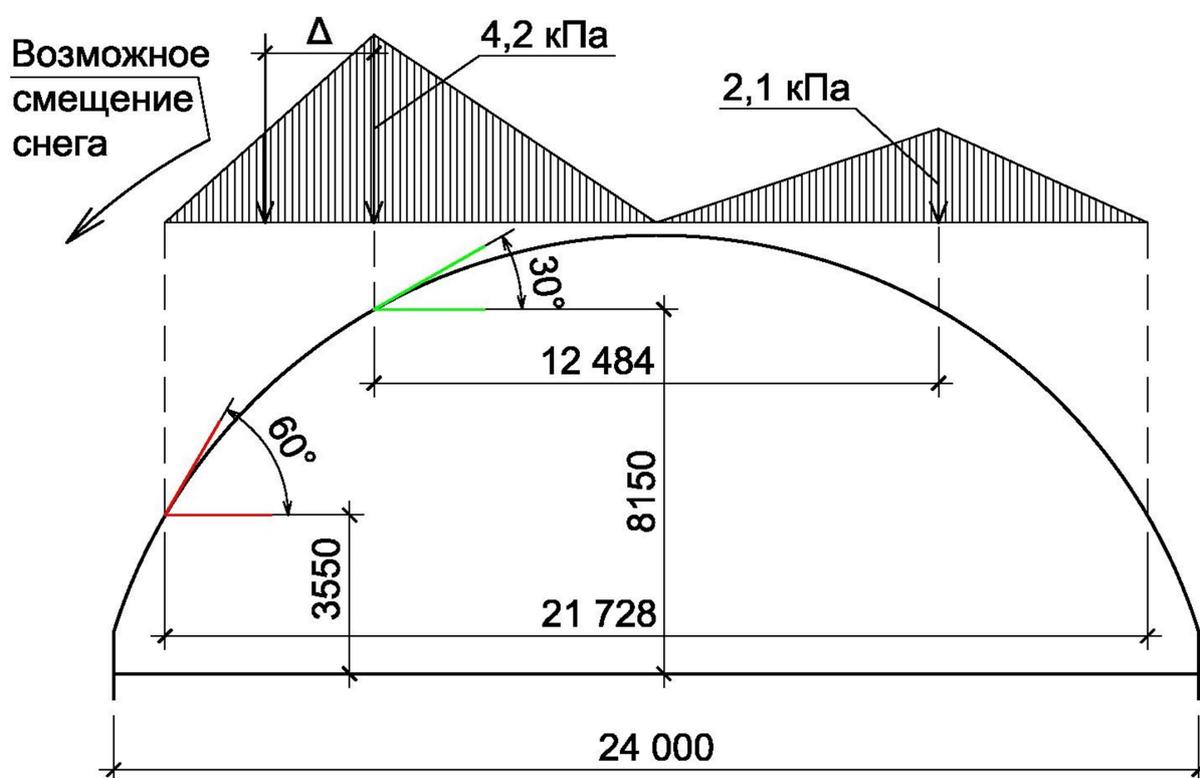


Рис. 7. Схема снеговой нагрузки, Вариант 2 по прил. Б2 СП 20.13330.2016

Ветровая нагрузка прикладывается нормально к поверхности или от поверхности покрытия (рис. 8). В случае направления от поверхности покрытия, при совместном действии, ветровая нагрузка будет частично компенсировать снеговую и такое сочетание не является расчетным для элемента жесткости. Участок дуги при действии ветра, направленного к конструкции покрытия, согласно схеме норм, не совпадает с участком пиковых снеговых отложений. Поэтому для расчета элемента жесткости наиболее неблагоприятным сочетанием является сочетание нагрузок от действия собственного веса и снега, собранных в точке, где касательная к арке имеет угол  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 9) без учета действия ветровой нагрузки.

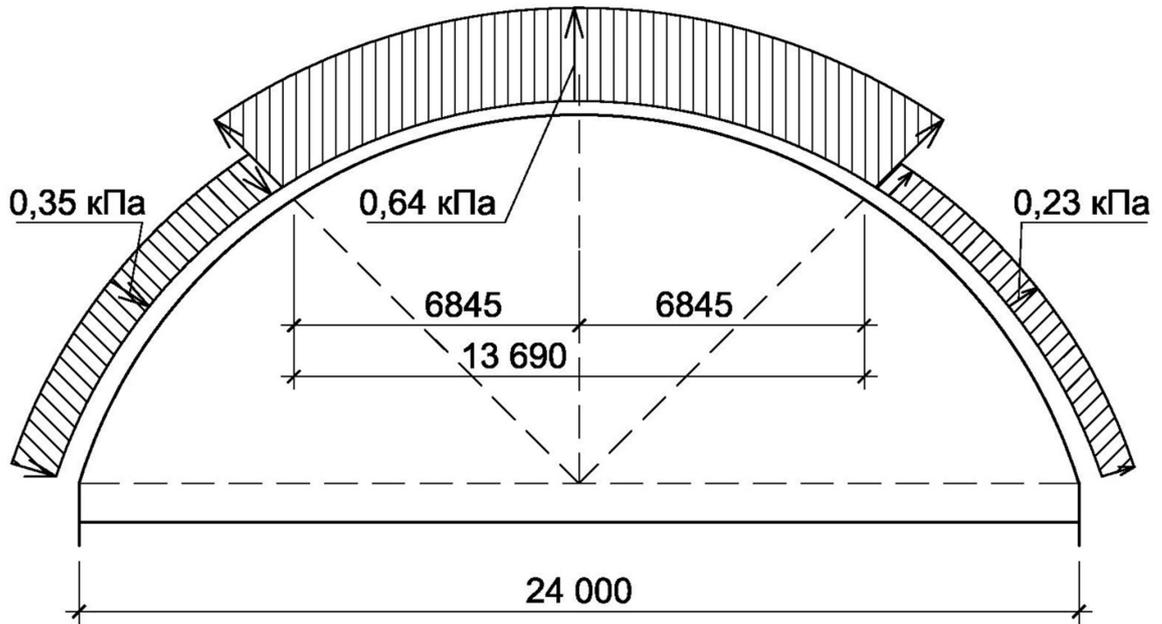


Рис. 8. Схема ветровой нагрузки, по прил. В.1.3 СП 20.13330.2016

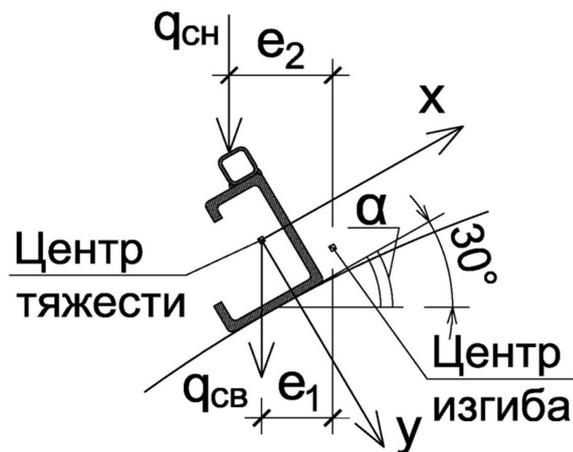


Рис. 9. Схема прикладываемых нагрузок на сечение элемента жесткости в точке с  $\alpha = 30^\circ$

Так как действующая на элемент жесткости вертикальная нагрузка не лежит ни в одной из главных плоскостей сечения и не проходит через центр изгиба, то проверку прочности следует выполнять при действии моментов в двух главных плоскостях и наличии бимо-мента, по выражению (43) норм СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции»:

$$\frac{M_x}{I_{xn} R_y \gamma_c} y \pm \frac{M_y}{I_{yn} R_y \gamma_c} x \pm \frac{B \cdot \omega}{I_{on} R_y \gamma_c} \leq 1, \quad (1)$$

где  $J_{xn}$ ,  $J_{yn}$ ,  $J_{on}$  — моменты инерции сечения нетто, относительно осей  $x$ — $x$ ,  $y$ — $y$  и сектори-альный момент инерции соответственно (значения указаны в таблице);  $\gamma_c$  — коэффициент

условий работы (принимаям  $\gamma_c = 1$  по табл. 1 СП 16.13330.2017);  $R_y$  — расчетное сопротивление стали по пределу текучести (240 МПа для С255);  $M_x$  и  $M_y$  — моменты в плоскости осей  $y$ — $y$  и  $x$ — $x$ ;  $B$  — изгибно-крутящий бимомент;  $x$  и  $y$  — расстояния от главных осей до рассматриваемой точки,  $\omega$  — секториальная координата рассматриваемой точки.

Моменты в двух главных плоскостях, определяются по выражениям:

$$M_x = \frac{(q_{CB} + q_{CH})l^2}{8} \cos \alpha; \quad (2)$$

$$M_y = \frac{(q_{CB} + q_{CH})l^2}{8} \sin \alpha, \quad (3)$$

где  $q_{CB}$  и  $q_{CH}$  — интенсивности нагрузок от собственного веса и снега соответственно, собранные на грузовой ширине, равной одной сэндвич-панели (595 мм);  $l$  — пролет (6 м).

Можно заметить, что отношение изгибающих моментов равно соответствующей тригонометрической функции:

$$\frac{M_y}{M_x} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

Слагаемые в выражении (1) могут быть положительными или отрицательными для разных точек сечения. Знак слагаемых зависит от того, совпадают ли напряжения растяжения и сжатия при кручении с соответствующими напряжениями при изгибе в двух главных плоскостях. Далее будет рассмотрено определение напряжений от изгибного кручения, так как это представляет наибольшую сложность для практических расчетов.

Значение бимомента в середине пролета для двухопорной балки, закрепленной от закручивания и депланаций (искривлений) по концам, с равномерно распределенной эксцентрично прикладываемой нагрузкой (рис. 10), определяется по выражению (5) [11, табл. 3]:

$$B_{\omega(l/2)} = \frac{(q_{CB}e_1 + q_{CH}e_2)}{k^2} \left( 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}(kl/2)} \right); \quad (5)$$

$$\operatorname{ch}(kl/2) = \frac{e^{kl/2} + e^{-kl/2}}{2}; \quad (6)$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}}, \quad (7)$$

где  $e_1$  и  $e_2$  — кратчайшие расстояния от центра изгиба, до линии действия нагрузки;  $k$  — изгибно-крутильная характеристика элемента жесткости;  $\operatorname{ch}$  — гиперболический косинус;  $e$  — математическая константа ( $e \approx 2,718$ );  $GI_t$  — жесткость при чистом кручении;  $EI_\omega$  — секториальная жесткость;  $E$  — модуль упругости стали ( $2,06 \times 10^5$  МПа);  $G$  — модуль сдвига стали ( $0,79 \times 10^5$  МПа);  $I_t$  — момент инерции при свободном кручении;  $I_\omega$  — секториальный момент инерции;  $l$  — пролет (6 м).

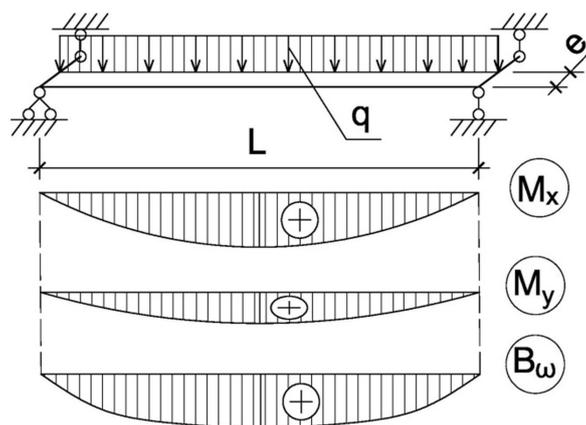


Рис. 10. Расчетная схема

Можно отметить, что так называемый момент инерции поперечного сечения при кручении должен определяться с учетом поправочного коэффициента —  $\alpha$ . Компьютерная программа указанный коэффициент не учитывает. Отдельные полоски профиля работают независимо и каждая воспринимает свою часть крутящего момента, за исключением областей, где стенки соединяются с полками. Данную неточность учитывает поправочный коэффициент  $\alpha$ , который определяется экспериментально и зависит от формы поперечного сечения:

$$I_t = \alpha \sum \frac{b\delta^3}{3}, \quad (8)$$

где  $\alpha$  — поправочный коэффициент, определяемый экспериментально;  $b$  и  $\delta$  — высота (ширина) и толщина отдельных прямоугольников, из которых составлен профиль.

Уточним момент инерции при кручении, ранее указанный в таблице и найденный в программах из пакета SCAD Office: «Конструктор сечений», «Консул». Умножим величину коэффициента на справочное значение  $\alpha = 1,12$ , указанное для швеллера [15, с. 9]. Хотя рассмотренное сечение не является швеллером! Безразмерную изгибно-крутильную характеристику для рассчитываемого профиля, определяем по выражению

$$kl = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} l = 3,42. \quad (9)$$

Далее необходимо построить эпюры секториальных координат. Мы сделали это только для открытого профиля, нижней С-образной части сечения. Секториальные координаты представляют собой удвоенную площадь сектора, образованного: начальным радиусом —  $AM_0$ , подвижным радиусом —  $AM$  и серединной линией профиля. Секториальную площадь будем считать положительной, если она описывается вращением подвижного радиус-вектора по ходу движения часовой стрелки [15—17]. Площадь сектора удобно определять, используя программу AutoCAD, назначив штриховку рассматриваемому сектору (рис. 11, а). Штриховка в среде комплекса автоматизированного проектирования AutoCAD в свойствах отображает площадь, в требуемых единицах измерения. Положение секториального полюса совпадает с ранее найденным центром изгиба  $A$ , а главную нулевую секториальную точку  $M_0$  необходимо определить. Зададим главную нулевую секториальную точку  $M_0$  как точку серединной линии сечения, расположенную на кратчайшем расстоянии от секториального полюса (центра изгиба). Введем параметр  $t$  — расстояние от серединной линии нижней полки до ранее назначенной точки  $M_0$  (рис. 11, б). Построим эпюры секториальных координат, которые

будут функциями параметра —  $t$ . При известном положении полюса  $A$ , параметр  $t$  определим из условия равенства нулю секториального статического момента для ранее заданной нулевой точки  $M_0$ , по выражению

$$S_{\omega} = \int_F \omega \cdot dF = \int_l \omega \cdot \delta \cdot dl = 0. \quad (10)$$

По найденному параметру  $t=4,4$  см находим истинное положение главной нулевой секториальной точки и строим эпюру секториальных площадей с полюсом в центре изгиба (рис. 11, в).

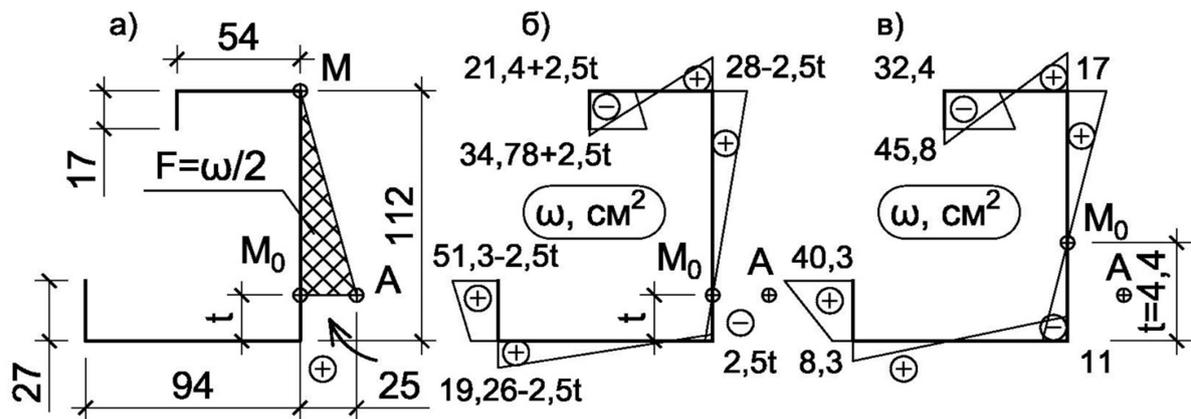


Рис. 11. Схемы построения эпюры секториальных координат:

а — схема серединной линии сечения, мм; б — эпюра секториальных координат с параметром « $t$ », см<sup>2</sup>; в — эпюра секториальных координат, см<sup>2</sup>

Нормальные напряжения, возникающие при изгибном кручении в характерных точках сечения для середины элемента жесткости по длине, находим по выражению

$$\sigma_{\omega(l/2)} = \frac{B_{\omega} \cdot \omega}{I_{\omega}}, \quad (11)$$

где  $\omega$  — секториальная площадь;  $B_{\omega}$  — изгибно-крутящий бимомент;  $I_{\omega}$  — секториальный момент инерции.

На рис. 12 показаны эпюры, характеризующие напряженно-деформированное состояние (НДС) профиля под расчетной нагрузкой.

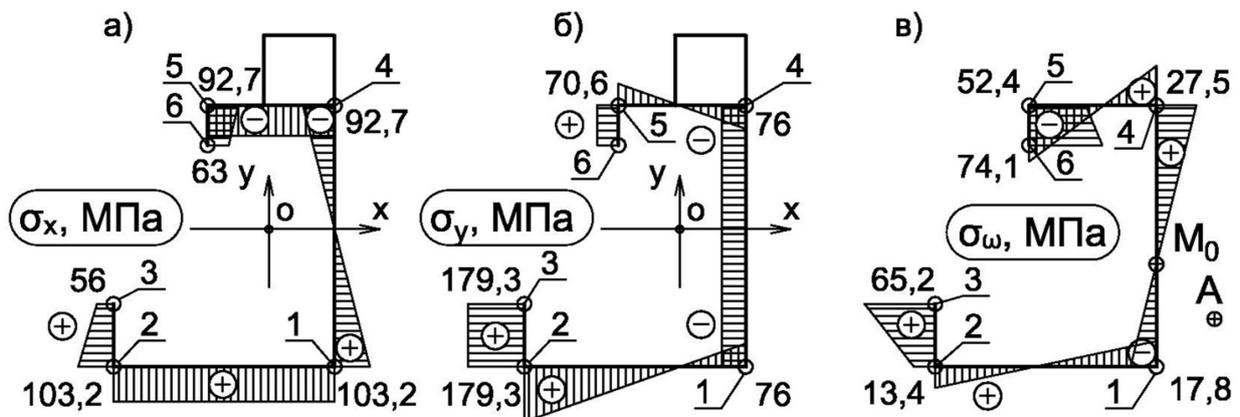


Рис. 12. Эпюры распределения нормальных напряжений от изгибного кручения, МПа:

а — эпюра нормальных напряжений, от изгиба  $\sigma_x$ ; б — эпюра нормальных напряжений, от изгиба  $\sigma_y$ ; в — эпюра нормальных напряжений, от изгибного кручения  $\sigma_{\omega}$

Выполним проверку условия прочности в наиболее напряженной точке 3, по ранее указанному выражению (1), соответствующему условию прочности (43) в СП 16.13330.2017:

$$\frac{56\text{МПа}}{240\text{МПа}\cdot 1} + \frac{179,3\text{МПа}}{240\text{МПа}\cdot 1} + \frac{65,2\text{МПа}}{240\text{МПа}\cdot 1} = 1,25 \leq 1. \quad (12)$$

Условие прочности в точке 3 не выполнено. Следует назначить сталь для элемента жесткости С355.

Выполним проверку условия прочности по выражению (38) устаревшей редакции СНиП II-23-81\* «Стальные конструкции» (редакция 2006 года) без учета напряжений от изгибного кручения в наиболее напряженной точке 3:

$$\frac{56\text{МПа}}{240\text{МПа}\cdot 1} + \frac{179,3\text{МПа}}{240\text{МПа}\cdot 1} = 0,98 \leq 1. \quad (13)$$

Получим долю максимальных напряжений от изгибного кручения по отношению к расчетному сопротивлению по пределу текучести, ранее назначенной стали С255:

$$\Delta = \frac{\sigma_{\omega}}{R_y \gamma_c} \times 100(\%) = \frac{65,2\text{МПа}}{240\text{МПа}\cdot 1} \times 100(\%) = 27,2\%. \quad (14)$$

Определим значения поперечных сил в опорном сечении элемента жесткости в двух главных плоскостях:

$$Q_x = \frac{(q_{CB} + q_{CH})l}{2} \cos \alpha; \quad (15)$$

$$Q_y = \frac{(q_{CB} + q_{CH})l}{2} \sin \alpha, \quad (16)$$

где  $q_{CB}$  и  $q_{CH}$  — интенсивности нагрузок от собственного веса и снега соответственно, собранные на грузовой ширине, равной одной сэндвич-панели (595 мм);  $l$  — пролет (6 м).

Выполним проверку прочности в опорном сечении С-образного сечения элемента жесткости от действия поперечных сил по условиям (54) и (55) СП 16.13330.2017:

$$\frac{Q_x}{A_w R_s \gamma_c} = \frac{6,6\text{kH}}{6,36\text{см}^2 \cdot 20\text{kH} / \text{см}^2 \cdot 1} = 0,052 \leq 1; \quad (17)$$

$$\frac{Q_y}{2A_f R_s \gamma_c} = \frac{3,9\text{kH}}{8,16\text{см}^2 \cdot 20\text{kH} / \text{см}^2 \cdot 1} = 0,024 \leq 1, \quad (18)$$

где  $Q_x$  и  $Q_y$  — поперечные силы в плоскости осей  $y$ — $y$  и  $x$ — $x$ ;  $R_s$  — расчетное сопротивление стали сдвигу (200 МПа для С355, по табл. 2 СП 16.13330.2017);  $\gamma_c$  — коэффициент условий работы (принимается  $\gamma_c = 1$  по табл. 1 СП 16.13330.2017);  $A_w$  — площадь сечения стенки С-образного профиля;  $2A_f$  — площадь сечения двух полок С-образного профиля (без отгибов внутрь).

## Заключение и рекомендации

Разработка силовых ограждающих конструкций является актуальной и важной тематикой. Включение в работу усиливающих элементов жесткости в составе типовых ограждающих конструкций повышает их несущую способность. Для уточнения несущей способности рассмотренной в данной работе силовой сэндвич-панели поэлементной сборки требуются дальнейшие исследования. Можно отметить следующие актуальные направления исследований:

- экспериментальное определение предельной несущей способности силовых сэндвич-панелей поэлементной сборки,
- численное исследование НДС сэндвич-профиля при пиковых нагрузках,
- исследование совместной работы сэндвич-профиля и элемента жесткости,
- определение шага крепежных элементов для лицевой обшивки панели,
- разработка эффективных тонкостенных усиливающих профилей,
- определение влияния жесткости утеплителя на несущую способность панели,
- разработка силовых рам для отверстий в панелях и другие.

За счет введения внутреннего элемента жесткости несущая способность типовой конструкции сэндвич-панели поэлементной сборки повышена с указанной 1,9 кПа до теоретической 4,9 кПа (для стали С355). Рассмотренный в данной работе усиливающий элемент жесткости испытывает изгиб в двух главных плоскостях и кручение вокруг центра изгиба, причем напряжения от стесненного кручения для некоторых точек сечения вносят решающий вклад в прочность элемента. Так, напряжения от кручения профиля в точке 3 составили 27,2 %, от расчетного сопротивления по пределу текучести для стали С255. Если не учитывать нормальные напряжения от изгибного кручения, можно значительно зависить предельную нагрузку для элемента жесткости и, как следствие, для всей силовой панели.

Прошло более 80 лет с момента разработки группой ученых во главе с В. З. Власовым [16, 18] инженерной теории расчета стержней открытого профиля с учетом секториальных деформаций, распределяющихся по сечению в соответствии с законом секториальных площадей. Только в 2011 году в СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции» в состав условия прочности балок было включено слагаемое от действия изгибно-крутящего бимоменты. В современной России выполнены прикладные исследования в развитие и/или с применением теории В. З. Власова по расчету тонкостенных конструкций [19—22]. Но пособие в развитие норм по расчетам на кручение тонкостенных стальных конструкций не выпущено. В Великобритании рекомендации для Европейских норм по расчету открытых профилей на стесненное кручение вышли в свет в 2011 году [23]. Для достижения высокой теоретической строгости инженерных расчетов важно разработать практическое пособие по расчету на стесненное кручение несущих элементов тонкостенных стальных конструкций. Также важно выполнить эксперименты для определения поправочных коэффициентов к моменту инерции поперечного сечения при кручении для различных видов открытых тонкостенных профилей. В сортамент необходимо включить геометрические величины, характеризующие сопротивление тонкостенного открытого профиля деформациям (искривлениям) в процессе стесненного кручения.

## Библиографический список

1. Тюленев, М. Д. Технология сэндвич-панелей с минераловатным утеплителем / М. Д. Тюленев, М. А. Бурцева, Е. А. Медникова // Бюллетень науки и практики. — 2016. — № 10 (11). — С. 162—164.
2. Ермолович, Г. Ю. Инновационные технологии в строительстве с использованием сэндвич-панелей / Г. Ю. Ермолович // *Gaudeamus Igitur*. — 2016. — № 1. — С. 38—41.

3. Тамеев, А. В. Конструкции стеновых и кровельных сэндвич-панелей поэлементной сборки. Альбом технических решений / А. В. Тамеев — М.: ООО «ПК Металл Профиль-Лобня», 2009. — 113 с.
4. Викторова, Л. А. Архитектура промышленных предприятий в контексте современных архитектурных течений / Л. А. Викторова // Архитектура и строительство России. — 2012. — № 3. — С. 12.
5. Пресняков, Н. И. Рекомендации по определению несущей способности кровельных и фасадных сэндвич-панелей поэлементной сборки / Н. И. Пресняков — М.: ЦНИИПСК им. Мельникова, 2013. — 44 с.
6. Мартынов, Ю. С. Стеновые панели на основе кассетных профилей. Часть 1. Теоретические исследования / Ю. С. Мартынов, В. В. Надольский, Ф. А. Верева // Строительство и реконструкция. — 2019. — №4 (84). — С. 26—37.
7. Надольский, В. В. Стеновые панели на основе кассетных профилей. Часть 2. Экспериментальные исследования / В. В. Надольский, Ю. С. Мартынов, Ф. А. Верева // Строительство и реконструкция. — 2019. — №5 (85). — С. 35—47.
8. Умнякова, Н. П. Развитие методов нормирования теплозащиты энергоэффективных зданий / Н. П. Умнякова, И. Н. Бутовский, А. Г. Чеботарев // Жилищное строительство. — 2014. — № 7. — С. 19—23.
9. Карпиловский, В. С. SCAD Office. Формирование сечений и расчет их геометрических характеристик / В. С. Карпиловский, Э. З. Криксунов, А. А. Маляренко, А. В. Перельмутер, М. А. Перельмутер — М.: Изд-во АСВ, 2006. — 80 с.
10. Уманский, А. А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций / А. А. Уманский. — М.: Гос. Изд-во Обр. Пром., 1939. — 109 с.
11. Бычков, Д. В. Кручение металлических балок / Д. В. Бычков, А. К. Мроцинский — М.: Гос. изд-во стр. лит-ры, 1944. — 258 с.
12. Власов, В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем / В. З. Власов — М.: Гос. Изд-во Стр. Лит-ры., 1949. — 434 с.
13. Савельев, В. А. Предложения по назначению расчетной снеговой нагрузки / В. А. Савельев, В. И. Малый, А. Б. Павлов, Г. В. Калашников, В. И. Мейтин // Промышленное и гражданское строительство. — 2004. — № 5. — С. 25—28.
14. Зверев, В. В. К вопросу обеспечения надежности бескаркасных арочных зданий / В. В. Зверев, К. Е. Жидков, Н. В. Капырин, И. В. Карманов // Строитель Донбасса. — 2019. — № 2. — С. 45—48.
15. Кузьмин, Н. А. Расчет конструкций из тонкостенных стержней и оболочек / Н. А. Кузьмин, П. А. Лукаш, И. Е. Милейковский. — М.: Госстройиздат, 1960. — 262 с.
16. Власов, В. З. Тонкостенные упругие стержни (Прочность, Устойчивость, Колебания) / В. З. Власов. — М.: Госстройиздат, 1940. — 268 с.
17. Саргсян, А. Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов: учебник / А. Е. Саргсян, А. Т. Демченко, Н. В. Дворянчиков, Г. А. Джинчвелашвили — М.: Высш. шк., 2000. — 416 с.
18. Стельмах, С. И. В. З. Власов и его вклад в создание современной строительной механики тонкостенных конструкций / С. И. Стельмах, В. В. Власов. — М.: Стройиздат, 1982. — 75 с.
19. Туснин, А. Р. Экспериментальные исследования работы балок двутаврового сечения при действии изгиба и кручения / А. Р. Туснин, М. Прокич // Инженерно-строительный журнал. — 2015. — № 1 — С. 24—31. doi 10.5862/МСЕ.53.3.
20. Россихин, Ю. А. Аналитический обзор теории типа Тимошенко для тонкостенных балок открытого профиля / Ю. А. Россихин, М. В. Шитикова // Промышленное и гражданское строительство. — 2010. — № 9 — С. 15—19.

21. Туснина, О. А. Особенности работы тонкостенного холодногнутого прогона С-образного сечения / О. А. Туснина // Вестник МГСУ. — 2014. — № 10. — С. 64—74.
22. Лалин, В. В. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных систем / В. В. Лалин, В. А. Рыбаков, С. А. Морозов // Инженерно-строительный журнал. — 2012. — № 1. — С. 53—73. doi 10.5862/МСЕ.27.7.
23. SCI (The Steel Construction Institute) Publication P385. Design of steel beams in torsion / In accordance with Eurocode 3. — 2011. — 133 p.

#### References

1. Tyulenev M.D., Burtzeva M.A., Mednikova E.A. Sandwich panels technology with mineral wool insulation. Bulletin of science and practice. No. 10(11). 2016. Pp. 162-164.
2. Ermolovich G.Yu. Innovative technologies in construction using sandwich-panels. Gaudeamus Igitur. No. 1. 2016. Pp. 38-41.
3. Tameev A.V. Designs of wall and roof sandwich panels of element assembly. Technical solutions album. M.: LLC "PC Metal Profil-Lobnya", 2009. 113 p.
4. Viktorova L.A. The architecture of industrial enterprises in the context of contemporary architectural trends. Architecture and construction of Russia. No. 3. 2012. 12 p.
5. Presnyakov N. I. Recommendations for determining the bearing capacity of roofing and facade sandwich panels of element assembly. M.: CNIIPSK named after Melnikov, 2013. 44 p.
6. Martynov Y.S., Nadolski V.V., Viarouka F.A. Wall panels based on cassette profiles. Part 1. Theoretical researches. Building and reconstruction. No. 4(84). 2019. Pp. 26-37.
7. Nadolski V.V., Martynov Y.S., Viarouka F.A. Wall panels based on cassette profiles. Part 2. Experimental researches. Building and reconstruction. No. 5(85). 2019. Pp. 35-47.
8. Umnyakova N.P., Butovskiy I.N., Chebotarev A.G. Development of methods for thermal protection regulation of energy-efficient buildings. Housing construction. No. 7. 2014. Pp. 19-23.
9. Karpilovsky V.S., Kryksunov E.Z., Maliarenko A.A., Perelmuter A.V., Perelmuter M.A. SCAD Office. Formation of sections and calculation of their geometric characteristics. M.: Publishing House ASV, 2006. 80 p.
10. Umansky A.A. Torsion and bending of thin-walled aircraft structures. M.: Gos. Izd-vo Obr. Prom, 1939. 109 p.
11. Bychkov D.V., Mroschinsky A.K. Torsion of metal beams. M.: Gos. Izd-vo Str. Lit-ry, 1944. 258 p.
12. Vlasov V.Z. Construction mechanics of thin-walled spatial systems. M.: Gos. Izd-vo Str. Lit-ry, 1949. 434 p.
13. Savelev V.A., Malaya V.I., Pavlov A.B., Kalashnikov G.V., Meitin V. I. Proposals for the assignment of the estimated snow load. Industrial and civil construction. No. 5. 2004. Pp. 25-28.
14. Zverev V.V., Zhidkov K.E., Kapyrin N.V., Karmanov I.V. To the issue of ensuring reliability of arched buildings. Donbass Builder. No. 2. 2019. Pp. 45-48.
15. Kuzmin N.A., Mileikovskiy I.E. Calculation of structures from thin-walled rods and shells. M.: Gosstroyizdat, 1960. 262 p.
16. Vlasov V.Z. Thin-walled elastic rods (Strength, Stability, Vibrations). M.: Gosstroizdat, 1940. 268 p.
17. Sargsyan A.E., Demchenko A.T., Noble N.V., Jinchvelashvili G.A. Construction mechanics. Foundations of theory with examples of calculations: Textbook. M.: High school, 2000. 416 p.
18. Stelmakh S.I., Vlasov V.V. Vlasov and his contribution to the creation of modern structural mechanics of thin-walled structures. M.: Sroyizdat, 1982. 75 p.

19. Tusnin A.R., Prokich M. Experimental research of i-beams under bending and torsion actions. *Engineering and Construction Journal*. No. 1. 2015. Pp. 24-31. doi 10.5862/MCE.53.3.
20. Rossikhin Yu.A., Shitikova M.V. Analytical review of Timoshenko type theory for thin-walled beams of open profile. *Industrial and civil engineering*. No. 9. 2010. Pp. 15-19.
21. Tushina O.A. The Features of Behaviour of a Thin-Walled Cold-Formed C-Purlin. *Vestnik MGSU*. No.10. 2014. Pp. 64-74.
22. Lalin V.V., Rybakov V.A., Morozov S.A. The finite elements research for calculation of thin-walled bar systems. *Journal of Civil Engineering*. No.1. 2012. Pp. 53-73. doi 10.5862/MCE.27.7.
23. SCI (The Steel Construction Institute) Publication P385. Design of steel beams in torsion. In accordance with Eurocode 3. 2011. 133 p.

## POWER SANDWICH PANEL OF THE ELEMENTAL ASSEMBLY

D. N. Kuznetsov<sup>1</sup>, D. I. Emelyanov<sup>2</sup>, T. M. Pavlenko<sup>3</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2,3</sup>

Russia, Voronezh

<sup>1</sup> Assistant Professor of Department of Metal and Wooden Structures, Tel.: +7(910)3468912, e-mail: kuznecov82@bk.ru

<sup>2</sup> PhD of Tech. Sc., Associate Professor, Head of the Department of Metal and Wooden Structures

<sup>3</sup> Associate Professor of the Department of Project Fundamentals and Architectural Graphics

In the practice of modern construction, curved structural forms are widely used. At the initial stage of design, the complex structural form of a building or structure is modeled by architects. In the future, designers create and optimize the parameters of the supporting elements of the frame. The conditions of strength and stiffness must meet not only load-bearing, but also enclosing structures.

Sandwich panels of elemental assembly are often used as fencing structures for straight sections of the roof and facades. But in the case of complex curvilinear forms, certain sections of the building envelope experience atmospheric loads of peak intensities. If the load-bearing capacity of typical solutions of sandwich-panels of element-wise assembly is not provided in places of extreme stress intensities, reinforcement of the panel structure is required. The paper considers a constructive solution to increase the carrying capacity of the sandwich panel of the elemental assembly, on the example of the production case of the arched outline. The concept of "power sandwich panel of element wise assembly" is introduced. Features of the collection of loads and the calculation of the reinforcing element of rigidity are given. Considerations are being made of further research to clarify the load-bearing capacity of power panels. The materials of this work may be useful to existing designers.

**Keywords:** sandwich panel, sandwich panel element assembly, reinforcement of sandwich panel, internal element of rigidity, calculation for torsion, peak loads on the sandwich panel.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.07

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПЕСЧАНОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ НА ФУНДАМЕНТ ПЛОСКОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

В. М. Антонов<sup>1</sup>, А. В. Колодкин<sup>2</sup>, В. В. Леденёв<sup>3</sup>, Ч. К. Дык<sup>4</sup>

Тамбовский государственный технический университет<sup>1,2,3,4</sup>

Россия, г. Тамбов

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры конструкций зданий и сооружений

<sup>2</sup>Магистрант кафедры конструкций зданий и сооружений

<sup>3</sup>Д-р техн. наук, проф. кафедры конструкций зданий и сооружений

<sup>4</sup>Инженер

---

Приводятся результаты лабораторных экспериментальных исследований ползучести песчаного основания в воздушно-сухом состоянии при действии на жесткий незаглубленный штамп плоской системы сил. Анализируется влияние: величины и уровня нагрузки, плотности и влажности песчаного основания, эксцентриситета и угла наклона силы к вертикали, диаметра проволоки арматурной сетки и глубины ее расположения от штампа, длительности действия нагрузки и скорости ее приложения.

Получены функциональные зависимости между влияющими параметрами, которые могут быть использованы для уточнения методов прогноза ползучести основания.

**Ключевые слова:** здание (сооружение), фундаменты, основание, нагрузка, перемещения, ползучесть, несущая способность.

### Введение

Ползучесть грунтов оснований, материалов, конструкций, конструктивных систем является проявлением одного из важных фундаментальных свойств реологии [4, 6, 10-11, 16-18].

Наблюдения за осадками фундаментов зданий показали, что они часто продолжают с разной скоростью в течение всего жизненного цикла объекта, приводя к дефектам и повреждениям, нарушая эксплуатационные функции. Ползучесть ускоряется при изменении условий эксплуатации: температуры, влажности, агрессивности, деградации материалов, динамических неучтенных воздействиях и т. п. Следствием является перераспределение усилий и напряжений, подвижка конструкции, изменение жесткостных характеристик конструкций, узловых соединений, расчетных схем, приспособления зданий к меняющимся условиям. Одной из основных причин повреждения зданий являются неравномерные осадки оснований фундаментов. Часто они возникают и развиваются вследствие неравномерной по площади ползучести грунтов оснований.

Исследованию ползучести посвящен ряд работ [3-10]. Однако многообразие грунтовых условий, их свойств определяет необходимость дальнейших теоретических и экспериментальных исследований ползучести с целью прогноза напряженно-деформированного состояния "основание – фундаменты – здание" для обеспечения требуемой долговечности и надежности.

---

© Антонов В. М., Колодкин А. В., Леденёв В. В., Дык Ч. К., 2020

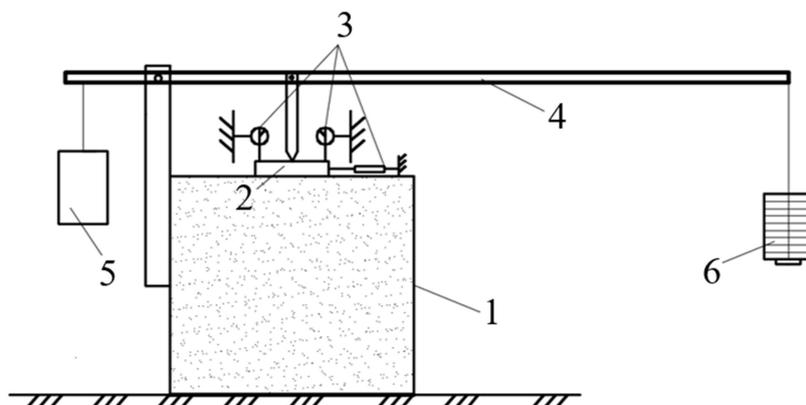
В [2] приведена небольшая часть описанных ниже экспериментов, в которых внесены некоторые уточнения. Для полноты изложения они были включены и в данную статью.

**Целью работы являлось:** определение функциональных зависимостей между влияющими параметрами:

- основания: физическими (плотность  $\rho$ , т/см<sup>3</sup>; влажность  $w$ , %) и механическими (модуль деформации  $E$ , МПа; удельное сцепление  $c$ , кПа) характеристиками;
- нагрузки (сосредоточенной силы  $F$ , кН; уровня силы  $\bar{F} = F / F_u$ ,  $F_u$  – разрушающая величина); скорости нагружения  $\dot{F}$ ; угла наклона силы к вертикали  $\delta$ , град; эксцентриситета приложения силы  $e$ ; относительного эксцентриситета  $e_0 = 2e/b_{st}$ ,  $b_{st}$  – размер стороны квадратного штампа;
- перемещений жесткого штампа: осадки  $s$ , мм; горизонтального перемещения  $u$ , мм; крена  $i$ ; относительных перемещений  $\bar{s} = s/b_{st}$ ,  $\bar{u} = u/b_{st}$ ; предельных величин перемещений  $s_u$ ,  $u_u$ ,  $i_u$ ; скоростей перемещений  $\dot{s}$ ,  $\dot{u}$ ,  $\dot{i}$ ;
- армирующих элементов оснований: размеров сеток  $l_s$ ,  $b_s$ ; диаметра проволоки  $d_s$  (B500); шага стержней  $s$ ; глубины расположения сетки  $h_s$ ;
- времени фиксации перемещений  $t$  (сут, час, сек).

**Методика экспериментов.** Исследования проводили в подвале учебного корпуса, расположенного в 200 м от дороги. Температура и влажность воздуха были постоянными и равными  $t = 17^\circ \text{C}$ ,  $w = 50\%$ . Специальными опытами показано, что влияние вибрации от транспорта было незначительным.

Испытания проводили в стальных пространственных лотках размером  $50 \times 50 \times 50$  см (рис. 1).



**Рис. 1.** Схема опытной установки по определению несущей способности основания и деформаций ползучести песка: 1 – металлический лоток с песком; 2 – штамп; 3 – индикаторы; 4 – рычаг; 5 – противовес; 6 – грузы

Основанием моделей фундаментов является мелкозернистый песок из Красенького карьера г. Тамбова в воздушно-сухом состоянии со средней влажностью  $\omega = 2,71\%$ .

Песок укладывали слоями по 7 см и уплотняли трамбовками до требуемой плотности  $\rho$ . В большинстве опытов  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ . Плотность контролировали протарированным конусом с углом при вершине  $30^\circ$ . Для снижения трения песка о стенки лотков их смазывали машинным маслом и покрывали полиэтиленовой пленкой.

В качестве моделей фундаментов принимали жесткие стальные квадратные пластины размером  $10 \times 10$  см. Контактные поверхности делали шероховатыми из приклеенного песка.

В штампах прорезали пазы для более точной передачи нагрузки от рычага при соотношении плеч 1:5. Перемещения моделей фундаментов измеряли индикаторами ИЧ-10, прикрепленными к независимой от лотка реперной раме.

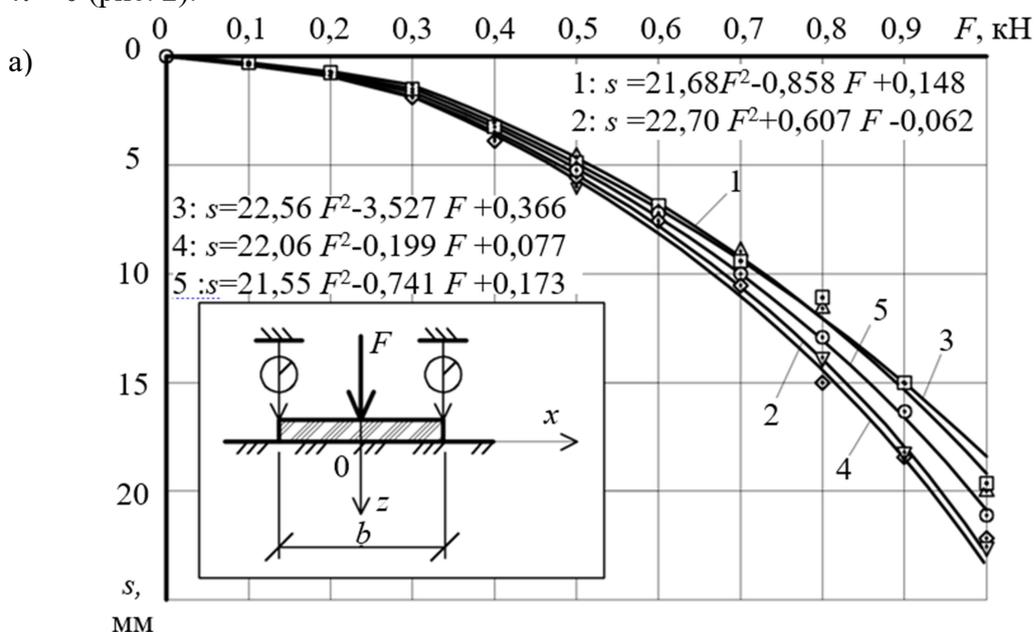
**Проведение экспериментов.** Разработана программа исследований.

Нагрузку повышали ступенями, составляющими примерно 15 % от заранее определенной осредненной разрушающей. На каждой ступени нагрузку выдерживали до условной стабилизации, равной 0,1 мм за 1 час наблюдения. Показания индикаторами снимали через  $t = 0, 15, 30$  и далее через каждые 60 мин до уровня нагрузки ( $\bar{F} = const$ ), при которой исследуют деформации ползучести основания штампа. После завершения наблюдений за деформациями ползучести в ряде случаев определяли крупность песка и сравнивали с начальной.

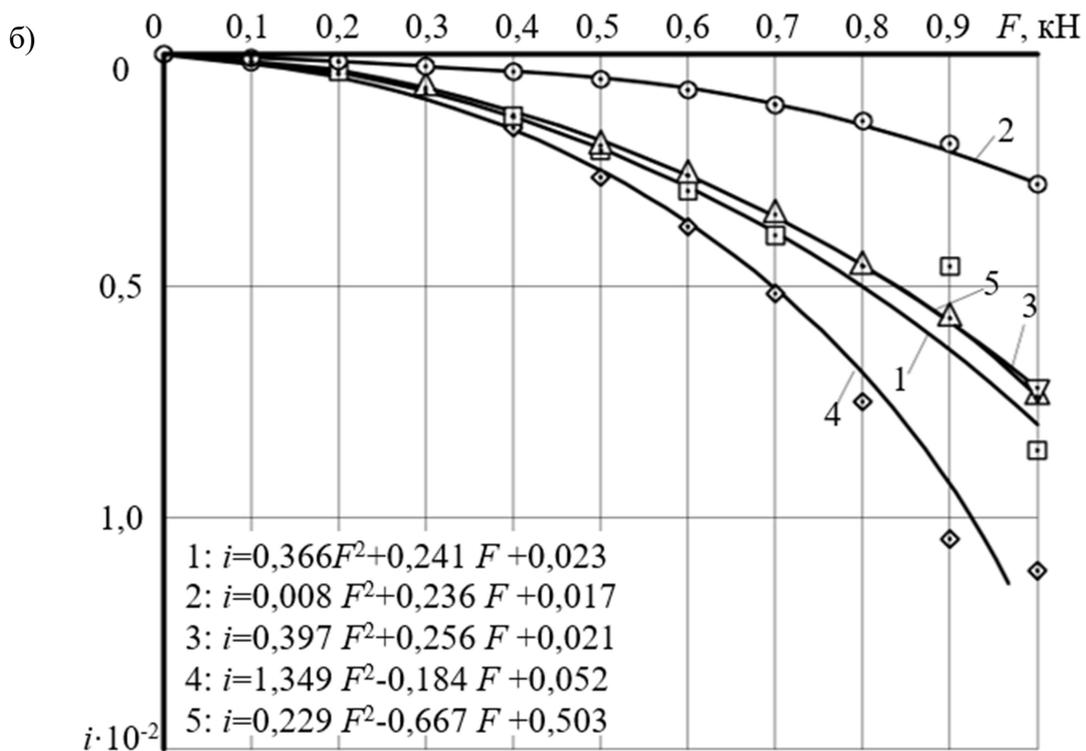
В проведенных сериях опытов исследовали:

- 1) зависимости осадки штампа от нагрузки (рис. 2);
- 2) влияние начальной плотности песчаного основания на осадку штампа (рис. 3);
- 3) зависимость осадок штампа от влажности песка (рис. 4);
- 4) влияние относительного эксцентриситета на осадки, горизонтальное перемещение и крена штампа (рис. 5);
- 5) зависимость осадки, горизонтального перемещения и крена штампа от угла наклона силы к вертикали (рис. 6);
- 6) влияние диаметра арматурной сетки и нагрузки на осадки штампов (рис. 7);
- 7) зависимости осадки штампов от глубины заложения арматурной сетки (рис. 8, 9);
- 8) зависимости скорости приложения ступенчато-возрастающей нагрузки на осадки штампов (рис. 10, 11);
- 9) развитие осадки штампов во времени при разных уровнях нагрузки (рис. 12, 13);
- 10) зависимости осадки штампов во времени при разных уровнях нагрузки и при  $\bar{F} = const$  (рис. 14).

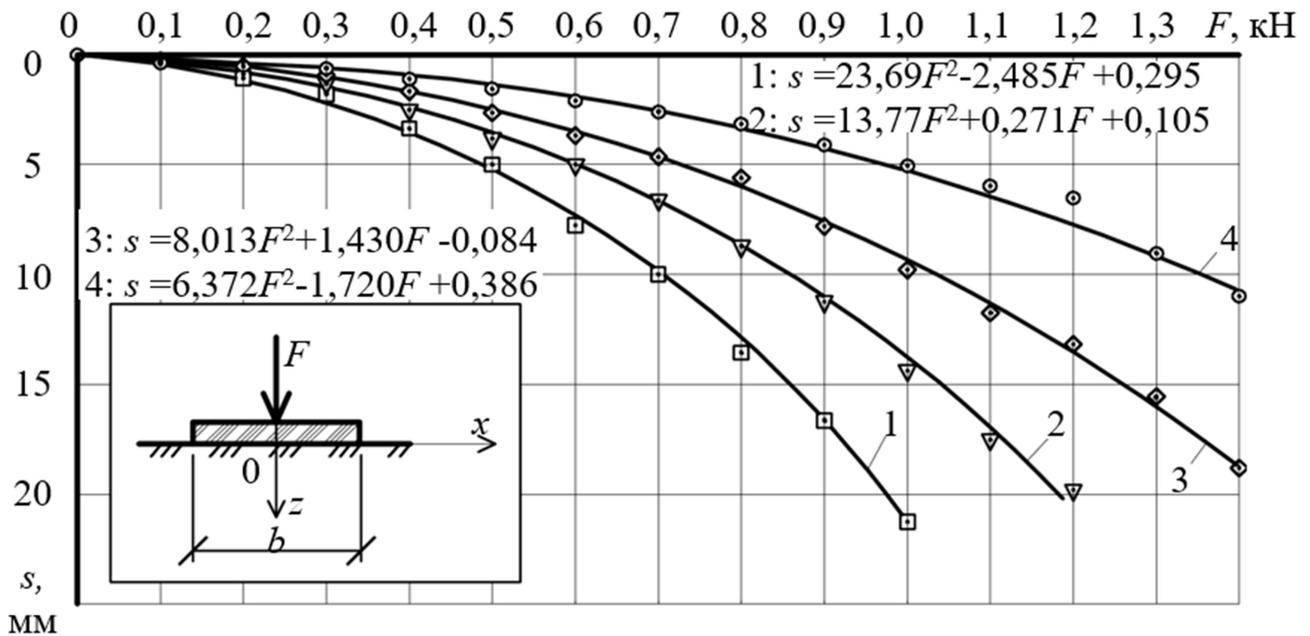
**Результаты экспериментов.** Получены функциональные зависимости при  $b_{st} = 10$  см;  $e = 0$ ;  $\lambda = 0$  (рис. 2).



**Рис. 2 (начало).** Графики зависимости средней осадки (а) и крена (б) модели фундамента от нагрузки при  $\delta=0$  и  $\rho=1,53$  г/см<sup>3</sup>,  $\omega=2,71$  %, 1 - опыт 1; 2 - опыт 2; 3 - опыт 3; 4 - опыт 4; 5 – осредненный график



**Рис. 2 (окончание).** Графики зависимости средней осадки (а) и крена (б) модели фундамента от нагрузки при  $\delta=0$  и  $\rho=1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega=2,71 \%$ ,  
 1 - опыт 1; 2 - опыт 2; 3 - опыт 3; 4 - опыт 4; 5 – осредненный график



**Рис. 3.** Графики зависимости осадки штампа от нагрузки и плотности основания  $\rho, (\text{г/см}^3)$ : 1-1,53; 2-1,62; 3-1,70; 4-1,77 при  $\delta = 0$ ,  $\omega = 2,71 \%$

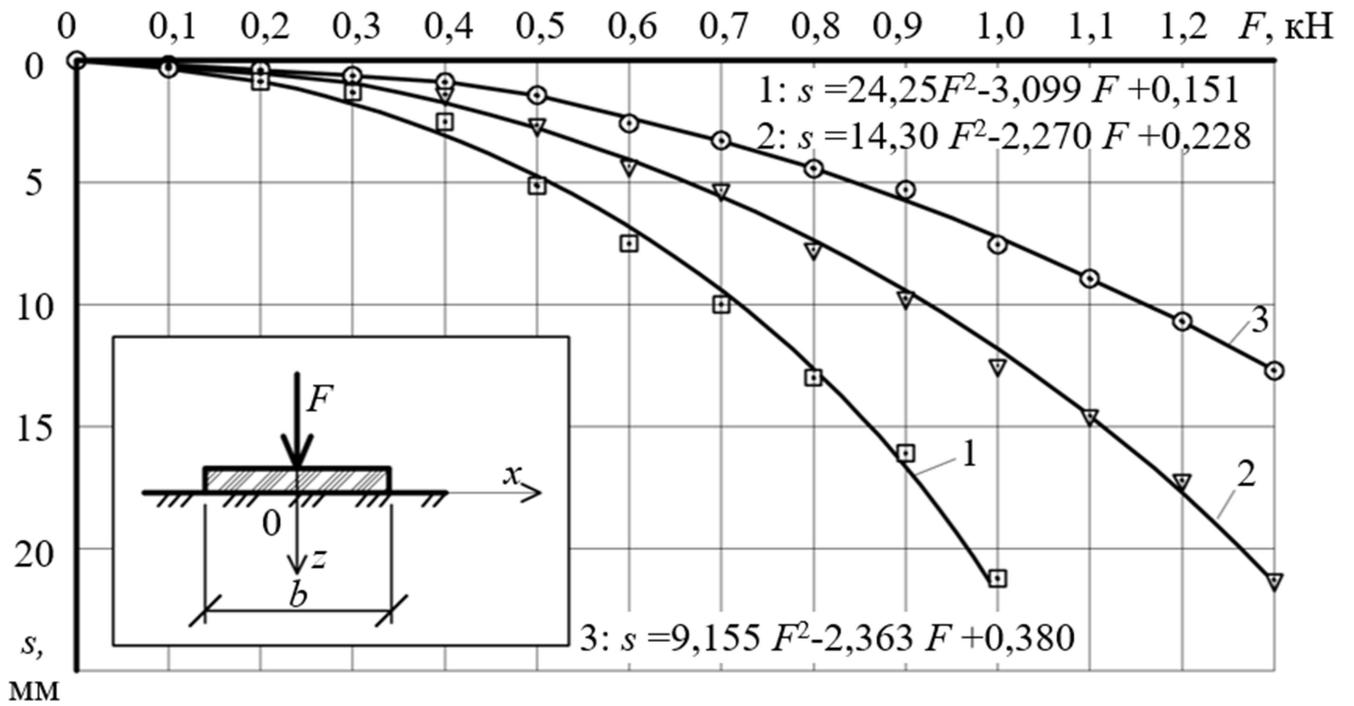


Рис. 4. Графики зависимости осадки штампа от нагрузки и влажности основания  $\omega$ , (%): 1-2,71; 2-4,45; 3-6,15 при  $\delta = 0, \rho = 1,53 \text{ г/см}^3$

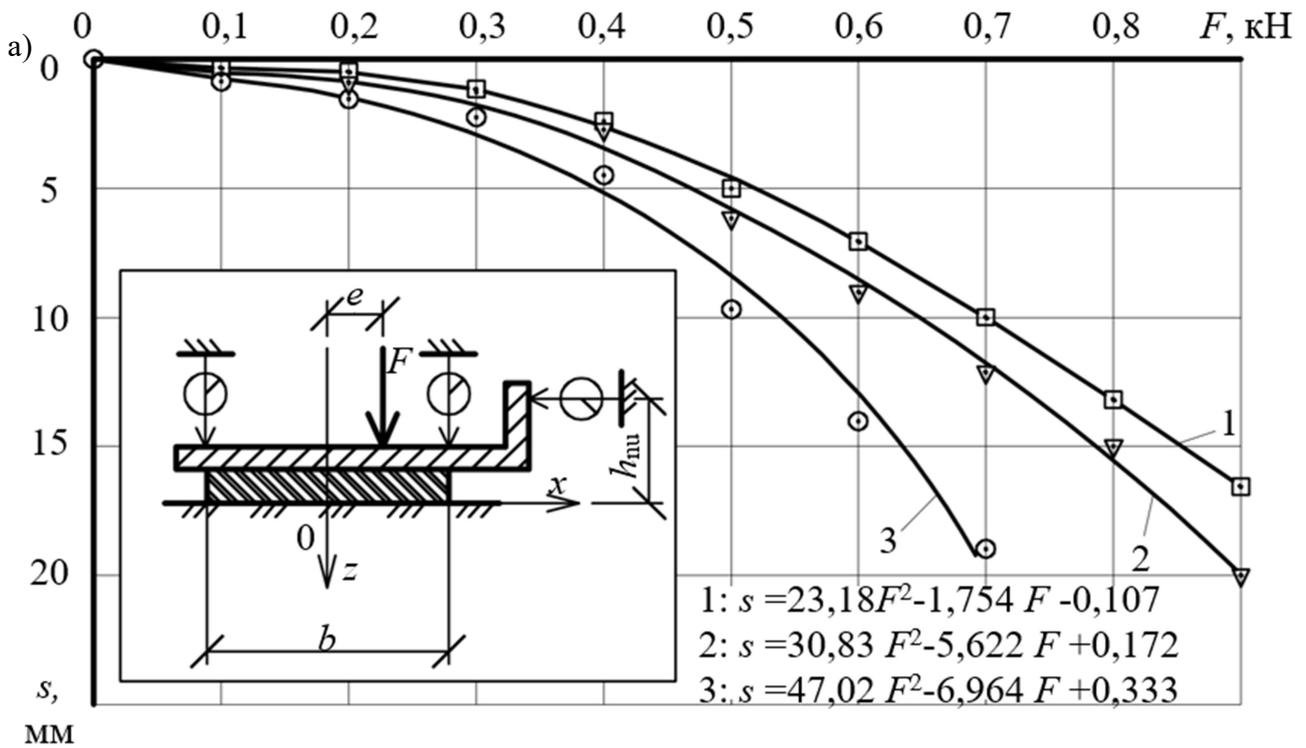


Рис. 5 (начало). Графики зависимости осадки штампа (а), горизонтального перемещения (б), крена (в) от нагрузки и относительного эксцентриситета  $e_0$ : 1-0; 2-0,1; 3-0,2 при  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3, \omega = 2,71 \%, \delta = 0$

а)

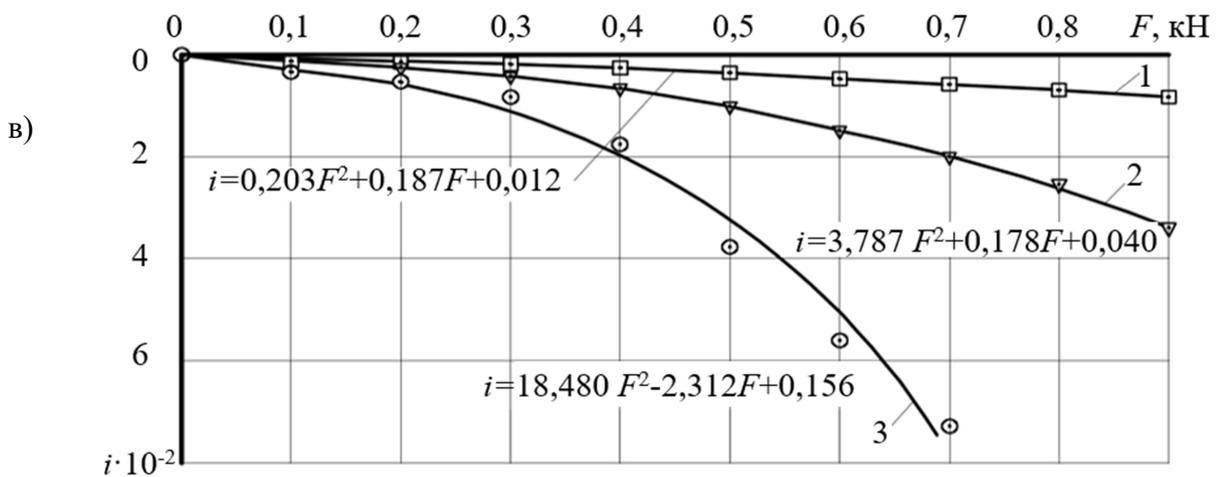
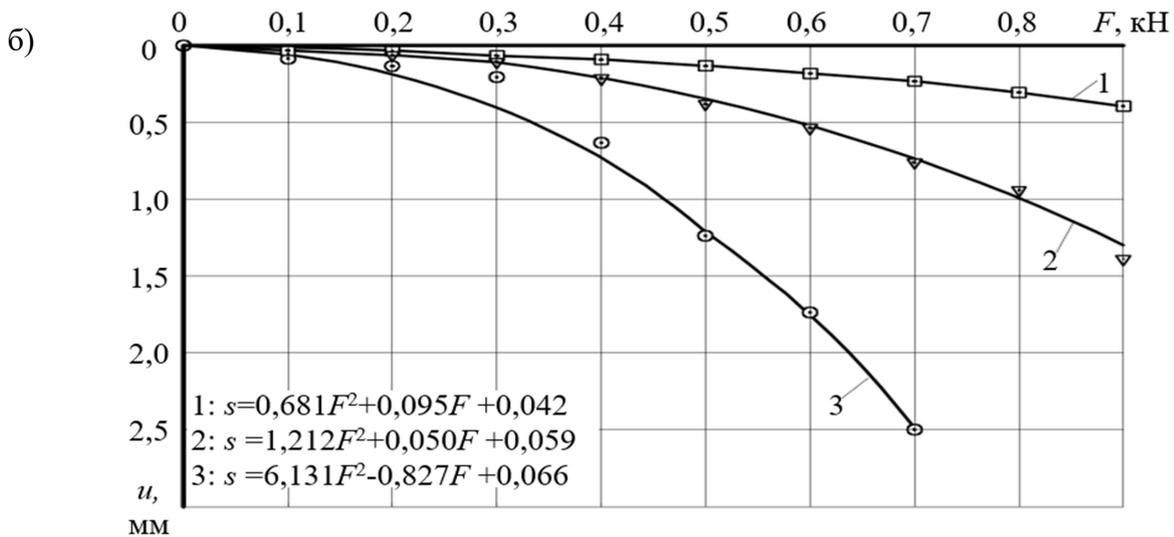


Рис. 5 (окончание). Графики зависимости осадки штампа (а), горизонтального перемещения (б), крена (в) от нагрузки и относительного эксцентриситета  $e_0$ : 1-0; 2-0,1; 3-0,2 при  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71 \%$ ,  $\delta = 0$

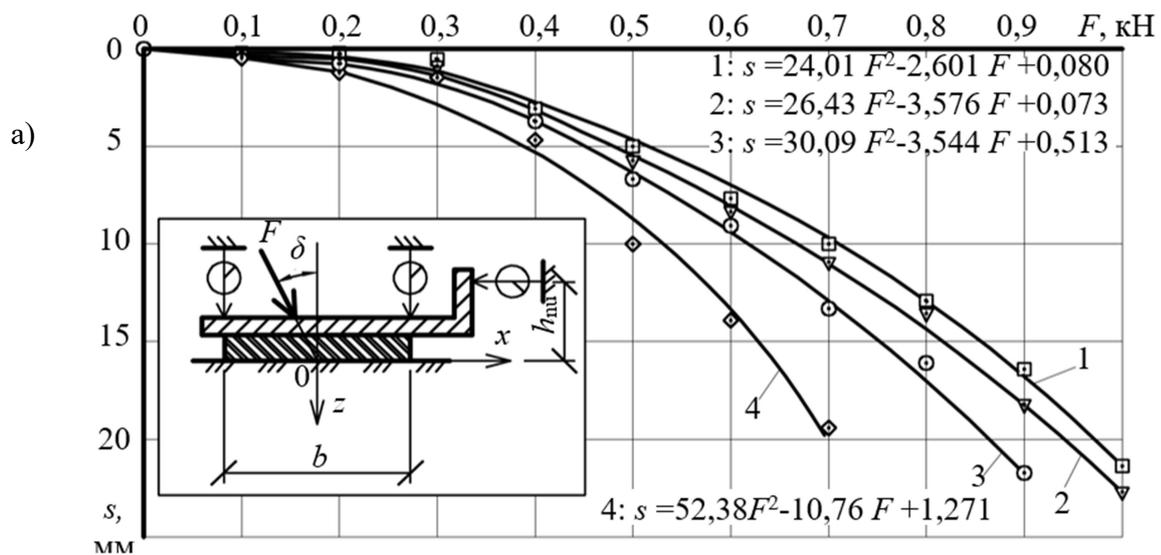
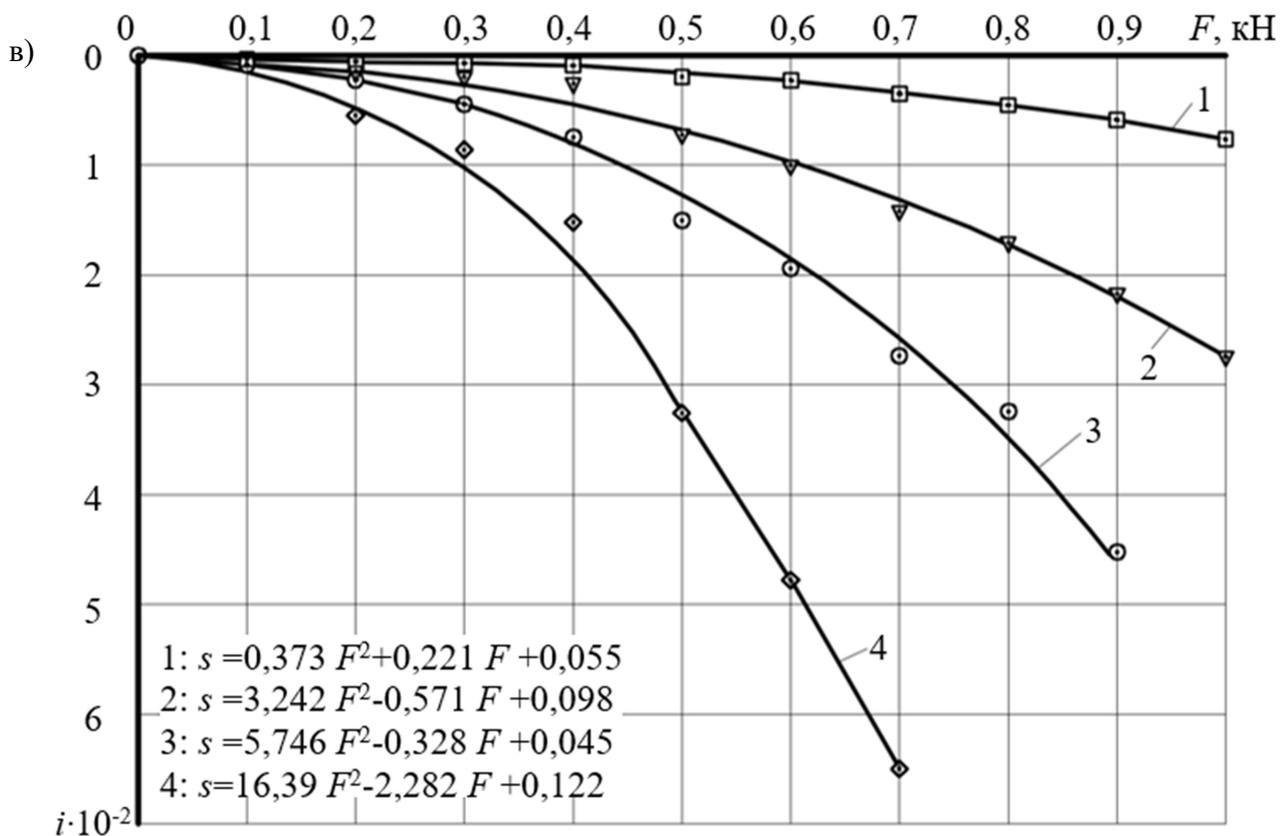
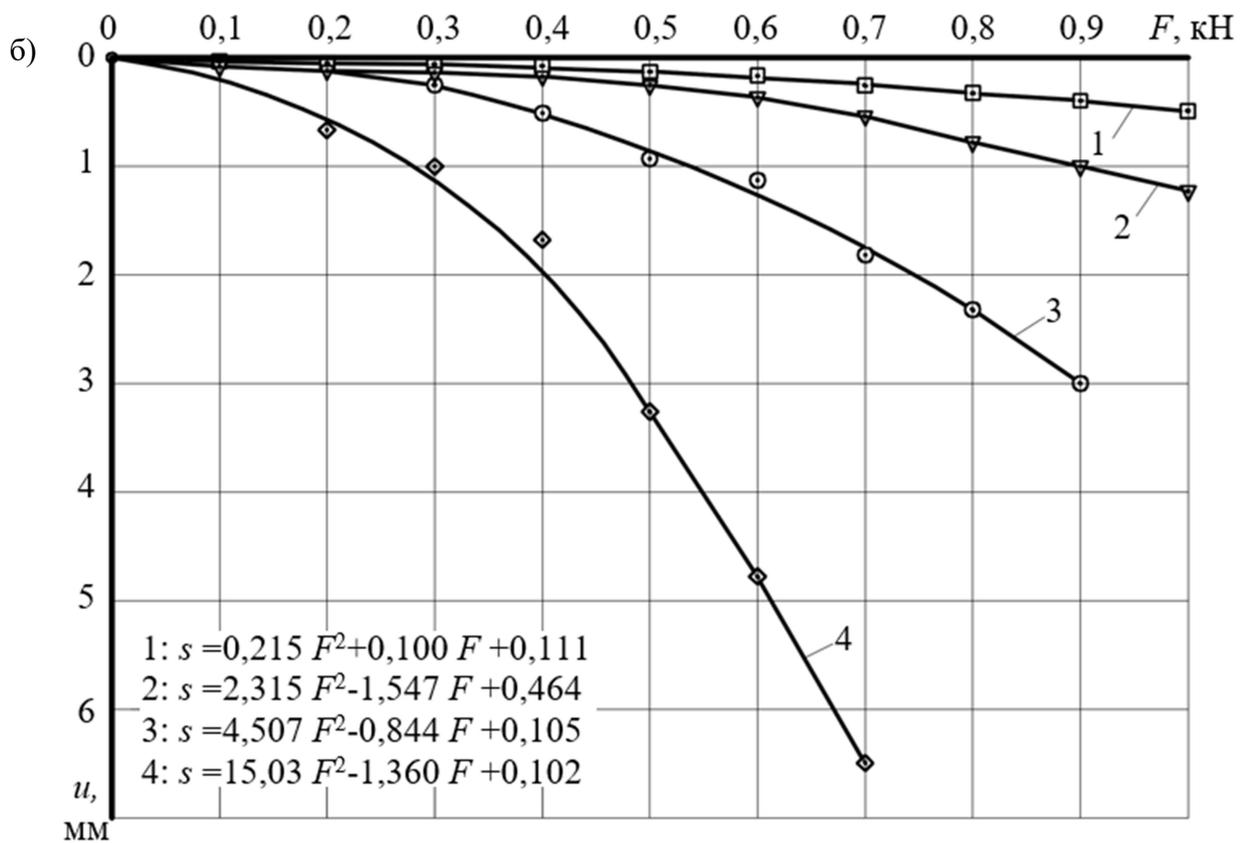


Рис. 6 (начало). Графики зависимости осадки (а), горизонтального перемещения (б), крена (в) штампа от нагрузки и угла наклона силы к вертикали  $\delta$ , (град): 1-0; 2-5; 3- 5; 4 5 при  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,7 \%$ ,  $e_0=0$



**Рис. 6 (окончание).** Графики зависимости осадки (а), горизонтального перемещения (б), крена (в) штампа от нагрузки и угла наклона силы к вертикали  $\delta$ , (град): 1-0; 2-5; 3-15; 4-25 при  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71 \%$ ,  $e_0 = 0$

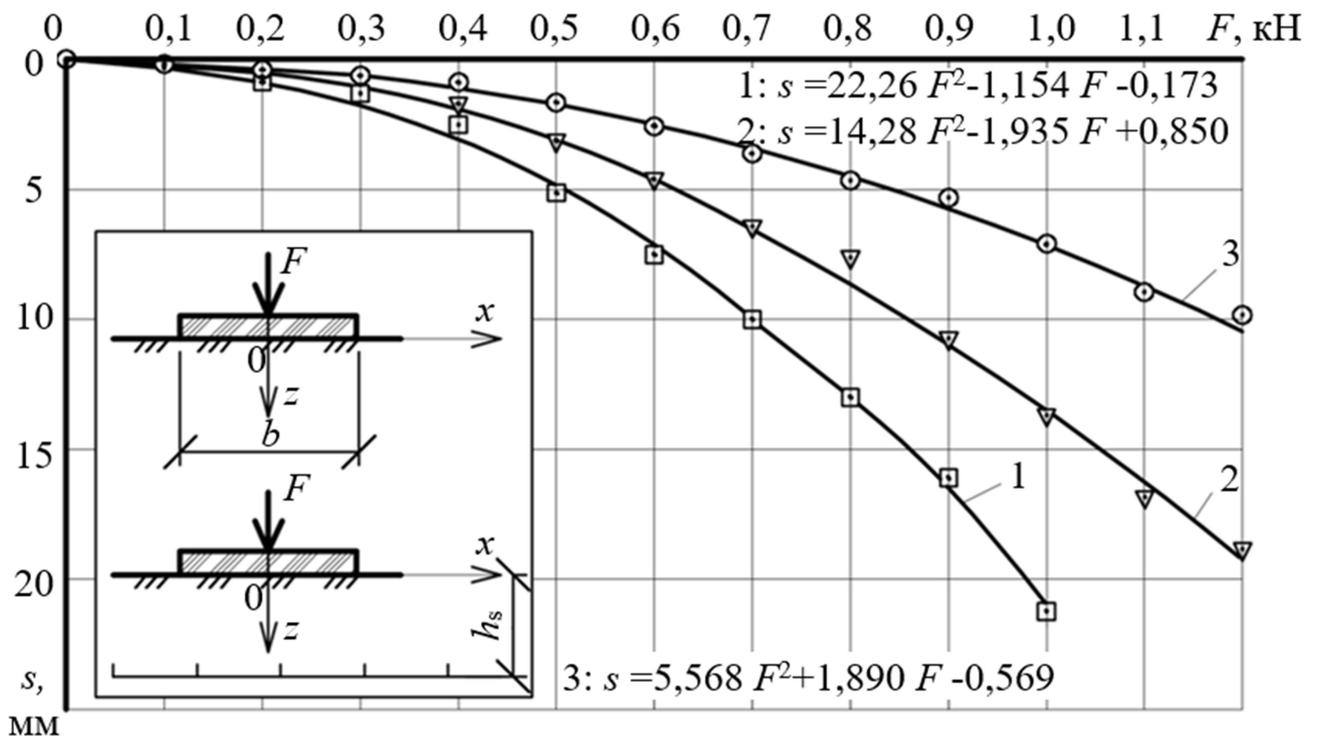


Рис. 7. Графики зависимости осадки от нагрузки при  $d_s$ , (мм): 1-0; 2-2; 3-4  
и  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71 \%$ ,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$ ;  $l_s = b_s = 150 \text{ мм}$ ;  $h_s = 2 \text{ см}$

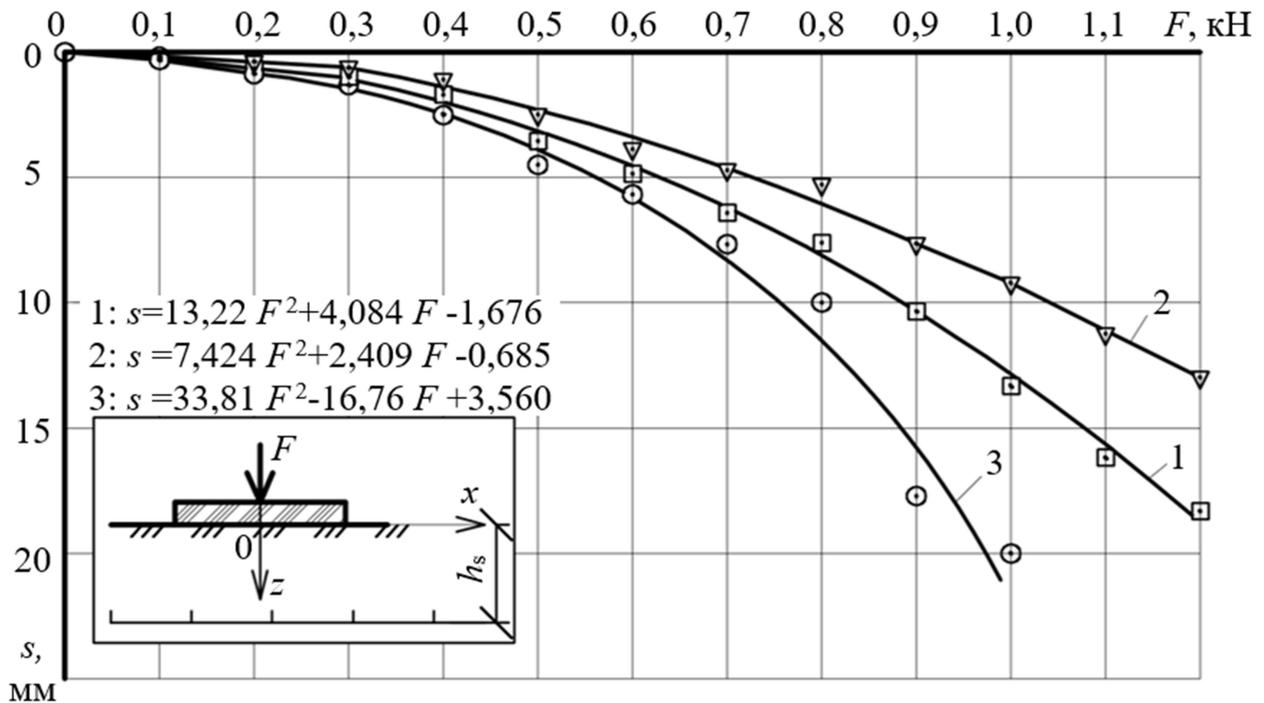


Рис. 8. Графики зависимости осадки от нагрузки при  $h_s$ , (см): 1-2; 2-4; 3-6  
и  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71 \%$ ,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$ ;  $l_s = b_s = 150 \text{ мм}$

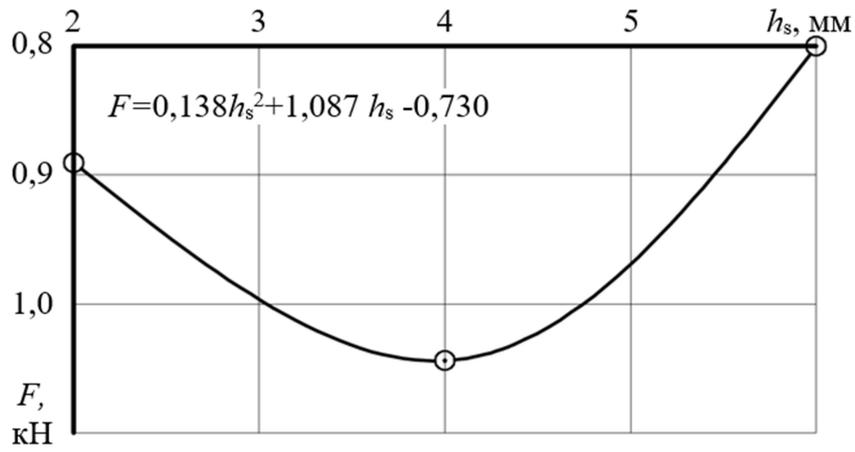


Рис. 9. Графики зависимости нагрузки на штамп от глубины установки армирующих элементов при осадке штампа  $s = 10$  мм и данных, приведенных на рис. 8

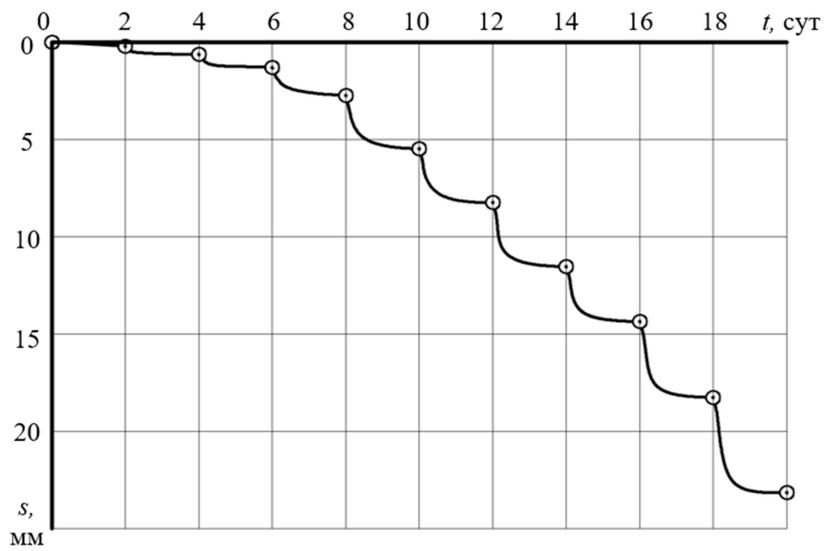


Рис. 10. График роста осадки во времени при скорости нагружения  $0,05$  кН/сут и  $\rho = 1,53$  г/см<sup>3</sup>,  $\omega = 2,71$  %,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$

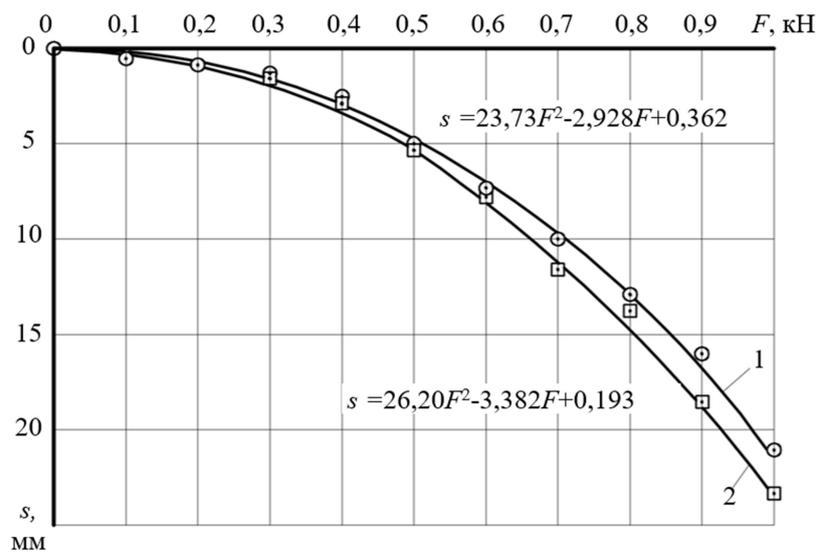
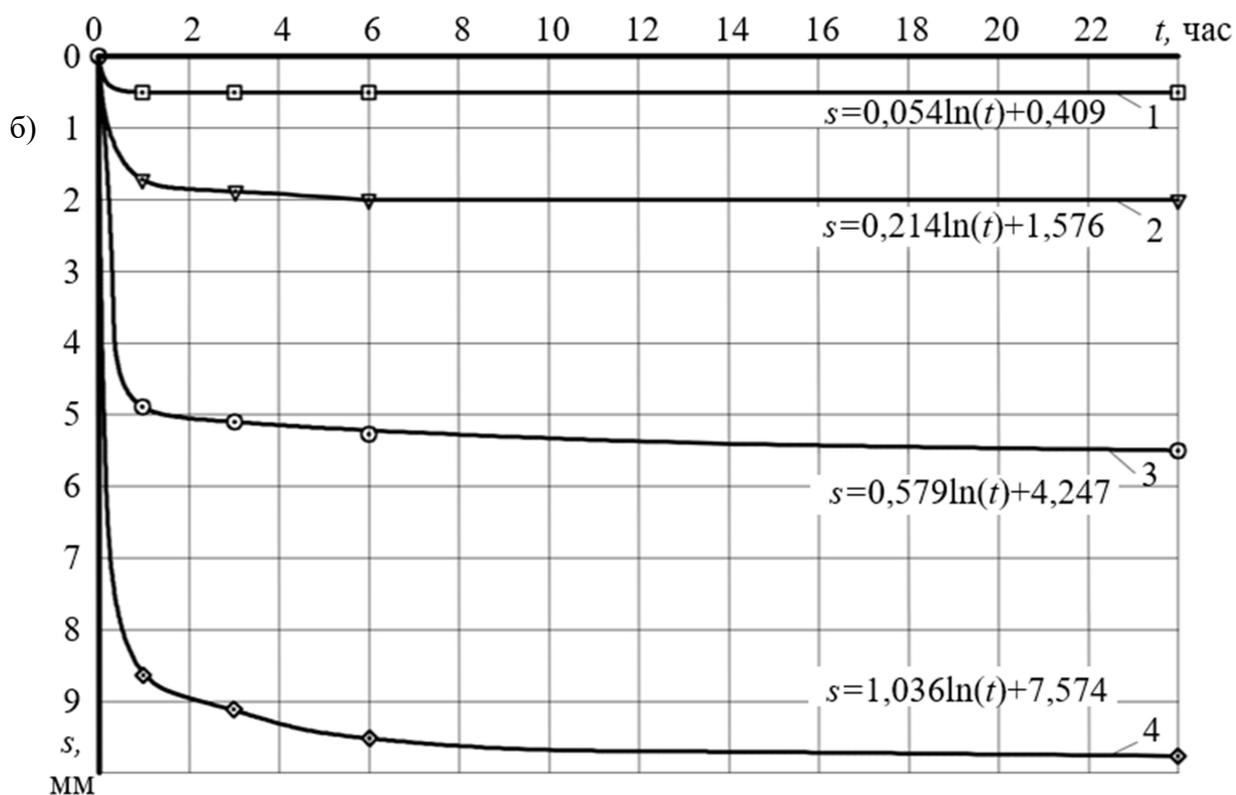
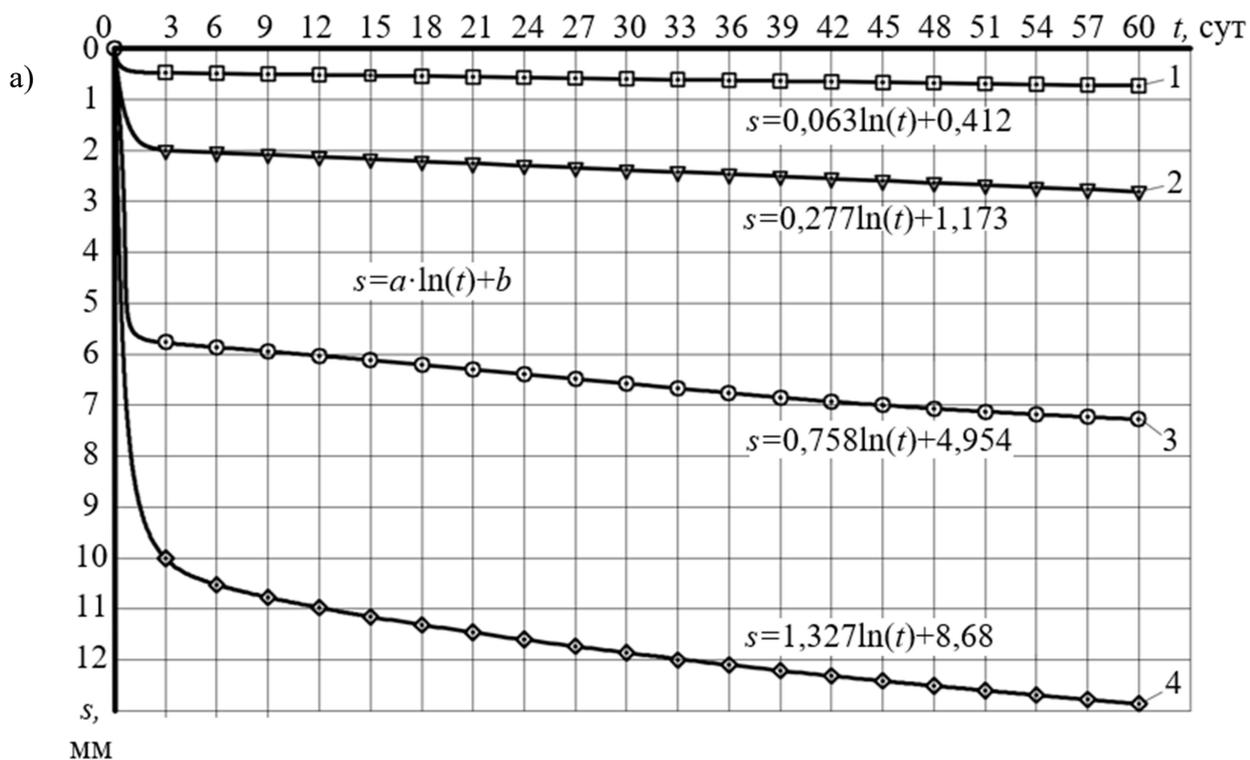
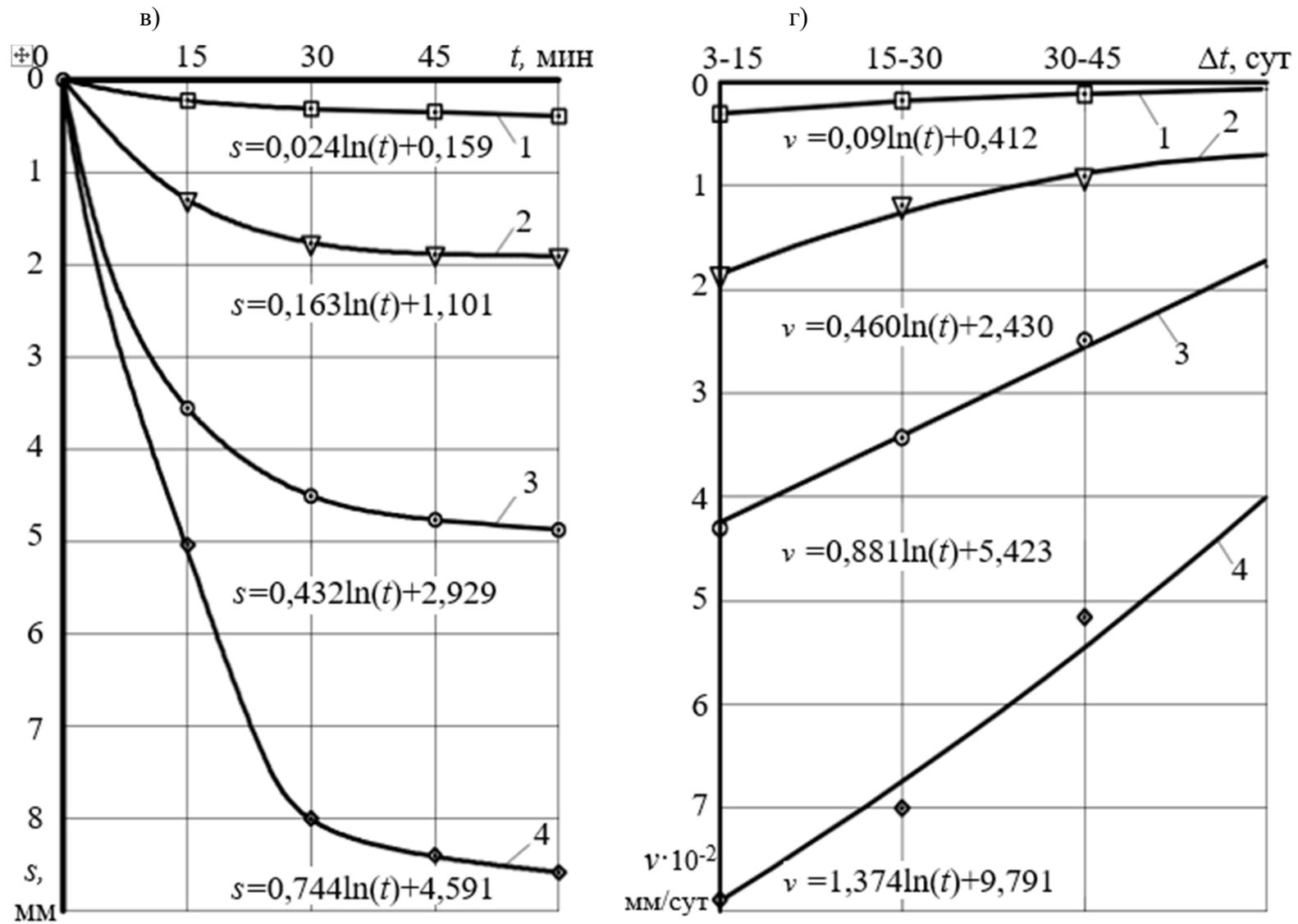


Рис. 11. Графики зависимости осадки штампы от нагрузки при скоростях нагружения  $0,4$  кН/час и  $0,05$  кН/сут при  $\rho = 1,53$  г/см<sup>3</sup>,  $\omega = 2,71$  %,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$



**Рис. 12 (начало).** Кривые ползучести в течение 60 суток (а), 1 суток (б), 1 часа (в), скорости осадки штампа при  $\bar{F}$ :  
 1-0,2; 2-0,4; 3-0,6; 4-0,8;  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71 \%$ ,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$



**Рис. 12 (окончание).** Кривые ползучести в течение 60 суток (а), 1 суток (б), 1 часа (в), скорости осадки штампа при  $\bar{F}$ : 1-0,2; 2-0,4; 3-0,6; 4-0,8;  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71 \%$ ,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$

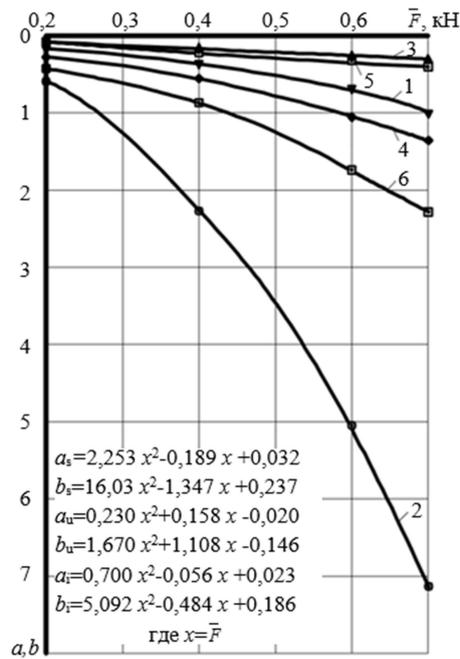


Рис. 13. Графики зависимости коэффициентов  $a$  и  $b$  от уровня нагрузки при  $\bar{F}$ : 1-0,2; 2-0,4; 3-0,6; 4-0,8;  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71\%$ ,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$

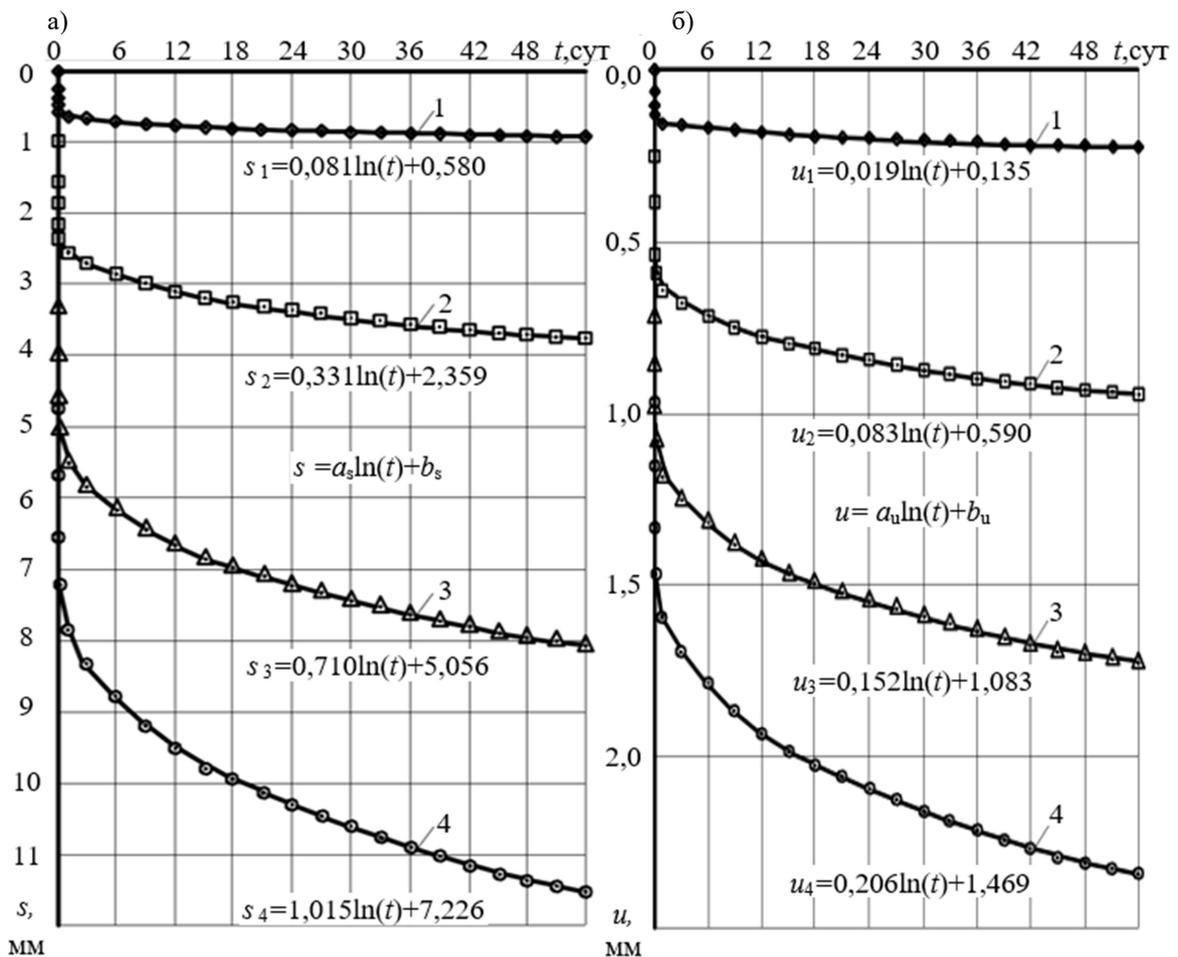
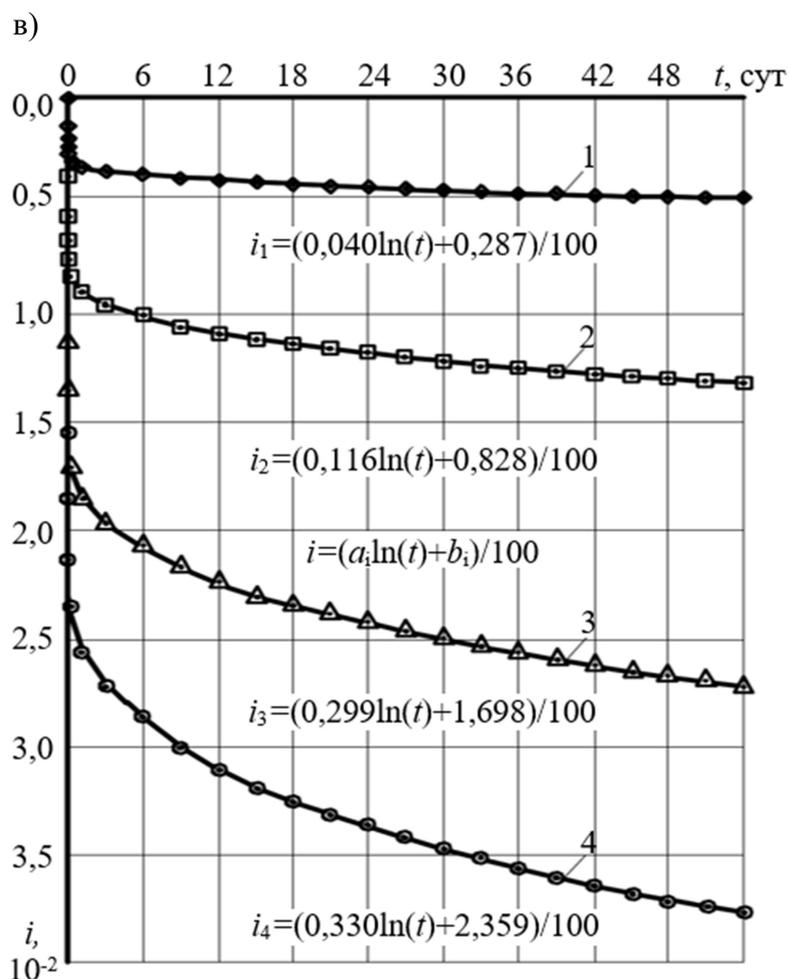


Рис. 14 (начало). Графики развития во времени осадки (а), горизонтального перемещения (б), крена штампа (в) при  $\bar{F}$ : 1-0,2; 2-0,4; 3-0,6; 4-0,8 и  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71\%$ ,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$



**Рис. 14 (окончание).** Графики развития во времени осадки (а), горизонтального перемещения (б), крена штампа (в) при  $\bar{F}$ : 1-0,2; 2-0,4; 3-0,6; 4-0,8 и  $\rho = 1,53 \text{ г/см}^3$ ,  $\omega = 2,71 \%$ ,  $\delta = 0$ ,  $e_0 = 0$

### Выводы

1. Исследовано влияние плотности, влажности, угла наклона силы, эксцентриситета, параметров армирующих элементов и скорости приложения нагрузки на несущую способность основания и деформации ползучести.
2. Наблюдения в течение 6 месяцев показали, что перемещения штампов при  $\bar{F} > 0,3$  не стабилизируются. Наиболее интенсивно ползучесть при  $\bar{F} = 0,4 - 0,7$  происходит в первые 2 месяца.
3. Причиной деформаций ползучести являются: дробление частиц при больших контактных напряжениях, более плотная укладка частиц, упругопластические деформации.
4. Выбран оптимальный вариант армирования основания при средней глубине установки арматуры диаметром  $d_s = 4 \text{ мм}$ .
5. Построены кривые ползучести песка и получены функциональные зависимости. Кривые ползучести предложены описывать логарифмической функцией, а коэффициенты уравнений - степенной.
6. Показана необходимость дальнейшего исследования структурной прочности и ползучести песка.

### Библиографический список

1. Антонов, В. М. Исследование ползучести песчаного основания / В. М. Антонов, В. В. Леденев // Основания и фундаменты: Респ. Межвед. науч.-техн. сб. - Киев, 1990. -

- Вып. 23. - С. 3-6.
2. Антонов, В. М. Развитие осадок песчаного основания во времени / В. М. Антонов, В. В. Леденев, Чхонг Куанг Дык // Вестник центрального регионального отделения РААСН. Вып. 8. - Воронеж - Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2009. С. 155-160.
  3. Вялов, С. С. Ползучесть грунтов / С. С. Вялов // Реологические проблемы механики грунтов - М.: Стройиздат, 1978. - С. 138-151.
  4. Генки, Г. В. Новая теория пластичности, упрочнения, ползучести и опыты над неупругими материалами / Г. В. Генки// Теория пластичности [Сборник статей]. - М., Изд. иностр. лит., 1948. - С. 427-446.
  5. Жихович, В. В. Ползучесть песчаных грунтов при одноплоскостном сдвиге / В. В. Жихович // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1985, № 6. - С. 25-26.
  6. Качанов, Л. М. Теория ползучести / Л. М. Качанов. - М.: Физматгиз, 1960. - 455 с.
  7. Леденев, В. В. Прочность и деформативность оснований заглубленных фундаментов / Леденев В. В. - Воронеж: Изд. ВГУ, 1990. – 224 с.
  8. Леденев В. В. Основания и Фундаменты при сложных воздействиях / Леденев В.В. - Тамбов. гос. техн. ун-т, - Тамбов, 1995. – 400 с.
  9. Леденев В. В. Экспериментальное исследование заглубленных фундаментов / В. В. Леденев. – Воронеж: ВГУ, 1985. – 156 с.
  10. Малинин, Н. Н. Основы расчетов на ползучесть / Н. Н. Малинин. – М.: Машгиз, 1948. – 120 с.
  11. Надаи, А. Влияние времени на ползучесть /А. Надаи// Теория пластичности: сборник статей. - М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – С. 405-426.
  12. Nguyễn V.Q. Nền Móng Nhà Cao Tầng / Nguyễn V.Q. - Nxb Khoa học kỹ thuật, 2007. - 190 с.
  13. Nguyễn B.K. Kỹ thuật nền móng công trình vùng đồi dốc / Nguyễn B.K. - Nxb Xây dựng, 2008. - 151 с.
  14. Odqvist F. K. G. Mathematical theory of creep and creep rupture, / Odqvist F. K. G. - Clarendon Press, 1966. - 170 с.
  15. BCP Commiter. Field Tests on Piles in Sand. Soils and Foundations, / BCP Commiter. - 1971, Vol.11, №2. - С. 29-48.
  16. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций/ Ю. Н. Работнов. - М.: Наука, 1966. - 752 с.
  17. Соснин, О. В. Анизотропная ползучесть упрочняющихся материалов /О. В. Соснин // «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1968, № 4. - С. 143-146.
  18. Finnie I. Creep of engineering materials, // Finnie I., Heller W. R. - Me. Graw-Hill Book Company, Inc., 1959. - 341с.
  19. Щукле, Л. Реологические проблемы механики грунтов. / Л. Щукле : пер. с англ. - М., 1978. - 357 с.

#### References

1. Antonov V.M., Ledenev V.V. Sand base creep research. Bases and foundations: Technical collection. Kiev, 1990. No. 23. Pp. 3-6.
2. Antonov V.M., Ledenev V.V., Chong Quang Duc. Development of sand base sediment in time. Bulletin of the Central Regional Department of the RAASN: Voronezh-Tambov: TSTU. No. 8. 2009. Pp. 155-160.
3. Vyalov S.S. Soil creep. Rheological problems of soil mechanics. M.: Stroizdat, 1978. Pp. 138-151.
4. Genki G.V. New theory of plasticity, hardening, creep and experiments on inelastic materials [Collected papers]. M.: foreign literature, 1948. Pp. 427-446.
5. Jahovic V.V. Sandy soils creep in a single-plane shear. Bases, foundations and soil mechanics. No. 6. 1985. Pp. 25-26.

6. Kachanov L.M. Creep theory. M.: Fizmatgiz, 1960. 455 p.
7. Ledenev V.V. Strength and deformability of buried foundations bases. Voronezh: VSU, 1990. 224 p.
8. Ledenev V.V. Bases and Foundations under complex influences. Tambov: FGBOU VPO "TSTU", 1995. 400 p.
9. Ledenev V.V. Experimental study of buried foundations. Voronezh: VSU, 1985. 156 p.
10. Malinin N.N. Fundamentals of creep calculations. M.: Mashgiz, 1948. 120 p.
11. Nadai A. Influence of time on creep: Theory of plasticity. Collected papers. M.: foreign. literature, 1948. Pp. 405-426.
12. Nguyen V.Q. The foundation of high-rise building. Publishing house of Science and technology, 2007. 190 p.
13. Nguyen B.K. Foundation engineering works in the steep hills. Publishing house of construction, 2008. 151 p.
14. Odqvist F.K.G. Mathematical theory of creep and creep rupture. Clarendon Press, 1966. 170 p.
15. BCP Commiter. Field Tests on Pilis in Sand. Soils and Foundations, 1971. Vol. 11. No. 2. Pp. 29-48.
16. Rabotnov Yu.N. Creep of structural elements. M.: Science, 1966. 752 p.
17. Sosnin O.V. Anisotropic creep of hardening materials. Engineering journal. Mechanics of a solid body. No. 4. 1968. Pp. 143-146.
18. Finnie I., Heller W.R. Creep of engineering materials. Graw-Hill Book Company, Inc., 1959. 341 p.
19. Shukla L. Rheological problems of soil mechanics. M., 1978. 357 p.

## **EXPERIMENTAL STUDIES OF A SANDY BASE CREEP UNDER THE ACTION OF A FLAT SYSTEM OF FORCES ON THE FOUNDATION**

V. M. Antonov<sup>1</sup>, A. V. Kolodkin<sup>2</sup>, V. V. Ledenev<sup>3</sup>, C. Q. Duc<sup>4</sup>

Tambov State technical University<sup>1,2,3,4</sup>

Russia, Tambov

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sc., Associate Professor of the Department of Constructions of Buildings and Structures

<sup>2</sup> Master Student of the Department of Constructions of Buildings and Structures

<sup>3</sup> Dr. of Tech. Sc., Professor of the Department of Constructions of Buildings and Structures

<sup>4</sup> Engineer

---

The results of laboratory experimental studies of the creep of the sand base in the air-dry state under the action of a flat system of forces on a rigid non-submerged stamp are presented.

Analyses the impact of the size and load level, density and moisture content of the sand base, the eccentricity and angle of inclination to the vertical, the diameter of the wire mesh and the depth of its location from the stamp, the duration of action of the load and the speed of its application.

Functional dependencies between the influencing parameters are obtained, which can be used to Refine methods for predicting base creep.

**Keywords:** building (structure), foundations, base, load, displacement, creep, load-bearing capacity.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).

Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографический список. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,  
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Козлов Владимир Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, проф.,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.