

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научный журнал**

**Выпуск № 3 (22), 2019**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

**Воронеж**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».  
Территория распространения — Российская Федерация.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В.С.**, д-р техн. наук, проф.,  
Воронежский государственный технический университет  
**Зам. главного редактора: Ефрюшин С.В.**, канд. техн. наук, доцент,  
Воронежский государственный технический университет  
**Ответственный секретарь: Габриелян Г.Е.**, канд. техн. наук, доцент,  
Воронежский государственный технический университет

**Буренин А.А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре  
**Гриднев С.Ю.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет  
**Зверев В.В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет  
**Кирсанов М.Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»  
**Козлов В.А.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет  
**Колчунов В.И.**, д-р техн. наук, проф., Юго-Западный государственный университет  
**Леденев В.В.**, д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет  
**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам  
**Нугужинов Ж.С.**, д-р техн. наук, проф., Казахский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан  
**Овчинников И.Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет  
**Пшеничкина В.А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет  
**Трещев А.А.**, д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет  
**Турищев Л.С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь  
**Шапиро Д.М.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет  
**Шимановский А.О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь  
**Шитикова М.В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Редактор: Аграновская Н.Н.

Подписной индекс в каталоге агентства «Роспечать» - 66004

Дата выхода в свет 23.10.2019. Усл. печ. л. 11,7. Формат 60×84/8. Тираж 500 экз. Заказ № 213.  
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 - 72895

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
(строительный факультет, кафедра строительной механики)  
тел.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»  
394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2019

**STRUCTURAL MECHANICS  
AND STRUCTURES**

**Scientific Journal  
ISSUE № 3 (22), 2019**

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of solid body under deformation
- Soil mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic affect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

**Voronezh**

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

---

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.  
Territory of distribution — Russian Federation.

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Efrushin S.V.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,  
Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G.E.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,  
Voronezh State Technical University

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

**Burenin A.A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur

**Gridnev S.Yu.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Zverev V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

**Kirsanov M.N.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

**Kozlov V.A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Kolchunov V.I.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., South-West State University

**Ledenyov V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Tambov State Technical University

**Nguyen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam

**Nuguxhinov Zh.S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan

**Ovchinnikov I.G.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University

**Pshenichkina V.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University

**Trechshev A.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University

**Turichshev L.S.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus

**Shapiro D.M.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Shimanovsky A.O.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus

**Shitikova M.V.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Editor: Agranovskaja N. N.

Subscription index in agency catalogue «Rospechat» - 66004

Publication date 23.10.2019. Conventional printed sheets 14,7. Format 60×84/8. Numbers of copies 500. Order № 213.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate III № ФС 77 - 72895

Price is subject to change

---

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation  
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

© Voronezh State Technical University, 2019

# СОДЕРЖАНИЕ

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

<b>Трещев А. А., Кузнецова В. О.</b> <i>Анализ процесса влияния наводороживания на напряжённо-деформированное состояние сферической оболочки из титанового сплава .....</i>	7
<b>Кирсанов Н. М., Бука-Ваиваде К.</b> <i>Аналитический расчет прогиба стержневой рамы с произвольным числом панелей .....</i>	21
<b>Илюшин А. С.</b> <i>Формула для расчет прогиба составной внешне статически неопределимой рамы</i>	29

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

<b>Сафронов В. С., Антипов А. В., Хаустов А. В.</b> <i>Вероятностная оценка несущей способности поврежденной двутавровой железобетонной мостовой балки .....</i>	39
---	----

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

<b>Шапиро Д. М., Сухарева А. Я.</b> <i>Инженерный метод нелинейного расчета плитно-балочных систем, применяемых в мостостроении .....</i>	52
<b>Резунов А. В., Раводин И. В.</b> <i>Анализ методов расчета висячих мостов на статическую нагрузку .....</i>	62

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

<b>Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Востриков В. В.</b> <i>Расчет плоского стального каркаса на постоянную и временную нагрузку с учетом пластических деформаций материала .....</i>	76
---	----

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

<b>Леденёв В. В., Савинов Я. В.</b> <i>Усиление оснований фундаментов мелко заложения цилиндрическими оболочками .....</i>	87
<b>Правила оформления статей .....</b>	101

# CONTENT

## STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

<b>A.A.Treschev, V.O.Kuznetsova</b> <i>Analysis of the process of the influence of hydrogen breeding on stressed-deformed state of spherical titanium alloy shells.....</i>	7
<b>M. N. Kirsanov, K. Buka-Vaivade</b> <i>Analytical calculation of the deflection of the rod frame with an arbitrary number of panels.....</i>	21
<b>A.S. Ilyushin</b> <i>The formula for calculating the deflection of a compound externally statically indeterminate frame.....</i>	29

## CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

<b>V. S. Safronov, A. V. Antipov, A. V. Chaustov</b> <i>Probabilistic assessment of the bearing capacity of a damaged steel-concrete bridge flanged beam.....</i>	39
--	----

## CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES

<b>D. M. Shapiro, A. Ya. Sukhareva</b> <i>Engineering method of nonlinear calculation of plate and beam systems used in bridge building.....</i>	52
<b>A. V. Rezunov, I. V. Ravodin</b> <i>Analysis of calculation methods of suspension bridges under static load.....</i>	62

## CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

<b>V. S. Varnavsky, G.E. Gabrielyan, V.V. Vostrikov</b> <i>Calculation of the flat steel frame for permanent and temporary load taking into account plastic deformations of the material.....</i>	76
--	----

## CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES

<b>V. V. Ledenev, Y. V. Savinov</b> <i>Reinforcement of fine based sub-foundations by cylindrical shells.....</i>	87
<b>Requirements for articles to be published .....</b>	101

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3:620.193:669

## АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ВЛИЯНИЯ НАВОДОРОЖИВАНИЯ НА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ИЗ ТИТАНОВОГО СПЛАВА

А. А. Трещев<sup>1</sup>, В. О. Кузнецова<sup>2</sup>  
Тульский государственный университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Тула

<sup>1</sup> Чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф. кафедры строительства, строительных материалов и конструкций

<sup>2</sup> Аспирант кафедры строительства, строительных материалов и конструкций,  
тел.: +7(920)759-52-80, e-mail: kuznecova\_violetta@mail.ru

Рассмотрено построение математической модели, которая описывает влияние агрессивной водородной среды на НДС тонкой пологой сферической оболочки, выполненной из титанового сплава и нагруженной равномерно-распределённой нагрузкой. Для этого использовалась нелинейная модель, представленная в нормированных пространствах напряжений. Нагрузка принята таким образом, чтобы прогибы оболочки были большими. Закрепление оболочки жёсткое. Разработан алгоритм решения задач наводороживания оболочек из титанового сплава. Практическое решение производилось двухшаговым методом последовательных возмущений параметров с использованием пакетов прикладных программ MatLab и Maple. Для решения системы разрешающих дифференциальных уравнений применён метод конечных разностей. Представлено решение уравнения диффузии агрессивной водородосодержащей среды, произведено сравнение полученного решения с результатами классической теории без учета агрессивного воздействия водородосодержащей среды. Для решения системы разрешающих дифференциальных уравнений применён метод конечных разностей.

**Ключевые слова:** полая оболочка, титановый сплав, конечные разности, нелинейное деформирование, изотропный материал, большие прогибы.

Сплавы титана широко применяются в строительстве для изготовления сооружений в авиационной, ракетной и химической отраслях. Это связано с тем, что титан и его сплавы обладают большим набором ценных свойств, такими как: высокая стойкость к разрушению, малый удельный вес, высокая механо- и жаропрочность, хорошая пластичность при низких температурах, широкое распространение титана в природе и пр. [1]. Сплавы титана, изначально не обладающие восприимчивостью к виду напряженного состояния, в процессе насыщения водородом получают свойства разносопротивляемости, изменяющиеся в процессе времени. Это приводит к повышению хрупкости и раннему разрушению.

Выбранный метод решения задачи влияния наводороживания на НДС тонкой пологой сферической оболочки из титанового сплава представляет собой численный метод, который базируется на замещении производных разностными схемами. Чтобы решить задачу, обладающую тройной нелинейностью, принимаем двухшаговый метод последовательных возмущений параметров [9], который может линеаризовать заданные уравнения, а также обладает высокой точностью. Для решения данной задачи конечными разностями на расчётной зоне строим сетку, затем выбираем разностную схему. Для каждого из узлов сетки записываем разностное уравнение, а затем производим учёт краевых условий. В итоге получаем систему линеаризованных алгебраических уравнений, при решении которой результатом являются приближенные результаты в дискретных узлах.

© Трещев А. А., Кузнецова В. О., 2019

Рассмотрим тонкие пологие сферические оболочки, отношение стрелы подъема которых в центре  $f$  к меньшему радиусу  $a$  в плане составляет

$$\frac{f}{a} \leq \frac{1}{5},$$

а отношение толщины оболочки  $h$  к наименьшему радиусу кривизны

$$\frac{h}{R_{\min}} \leq \frac{1}{20}. \quad (1)$$

В связи с пологостью оболочки геометрия поверхности отождествляется с геометрией на проектной плоскости и криволинейная система координат заменяется полярной системой.

Рассмотрим упругое равновесие пологой сферической оболочки толщиной  $h$  под действием поперечной осесимметричной равномерно-распределенной нагрузки  $q$  и водородосодержащей среды с концентрацией  $\lambda$ . Примем кинетический потенциал деформаций в виде [11]

$$W_1 = (A_e(\lambda) + B_e(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_e(\lambda) + D_e(\lambda)\xi + E_e(\lambda)\eta \cos 3\phi)\tau^2 + \\ + [(A_p(\lambda) + B_p(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi + E_p(\lambda)\eta \cos 3\phi)\tau^2]^n, \quad (2)$$

где  $A_e(\lambda)$ ,  $B_e(\lambda)$ ,  $C_e(\lambda)$ ,  $D_e(\lambda)$ ,  $E_e(\lambda)$ ,  $A_p(\lambda)$ ,  $B_p(\lambda)$ ,  $C_p(\lambda)$ ,  $D_p(\lambda)$ ,  $E_p(\lambda)$  – физические функции потенциала соответственно квазилинейной и нелинейной частей, зависящие от степени водородонасыщения. Зависимости механических свойств материала вычислены в результате полиномиальной интерполяции значений коэффициентов при заданном уровне концентрации среды  $\lambda$  (0; 0,01; 0,03 и 0,05 %), и для сплава ВТ1-0 принимают вид

$$V_{ek}(\lambda) = e_{0k} + e_{1k} \cdot \lambda + e_{2k} \cdot \lambda^2; V_{pk}(\lambda) = p_{0k} + p_{1k} \cdot (p_{2k})^\lambda;$$

$$A_e(\lambda) = V_{e1}(\lambda); B_e(\lambda) = V_{e3}(\lambda); C_e(\lambda) = V_{e2}(\lambda); D_e(\lambda) = V_{e4}(\lambda); E_e(\lambda) = V_{e5}(\lambda); \\ A_p(\lambda) = V_{p1}(\lambda); B_p(\lambda) = V_{p3}(\lambda); C_p(\lambda) = V_{p2}(\lambda); D_p(\lambda) = V_{p4}(\lambda); E_p(\lambda) = V_{p5}(\lambda), \quad (3)$$

где  $e_{ik}$ ,  $p_{ik}$  – коэффициенты полиномов  $i = 0 \dots 3$ ;  $k = 1 \dots 3$ .

Заданную оболочку (рис. 1) принимаем достаточно тонкой, настолько, чтобы считать верными гипотезы Кирхгофа-Лява (1).

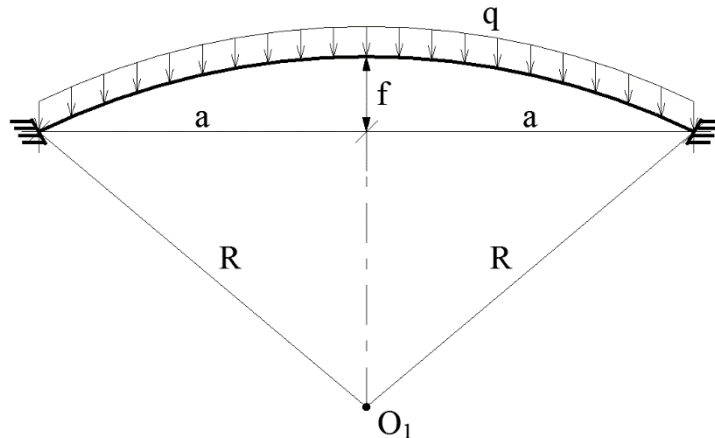


Рис. 1. Схема задачи

Для оболочки принято постоянство основных радиусов кривизны средней поверхности в плане:  $R_1 = R_2 = R$ .



Главные кривизны оболочки обретают значение  $k_1 = k_2 = k = 1/R$ . Рассмотрим такие оболочки, в которых возможно не учитывать разницу между длиной дуги срединной поверхности и её проекцией на плоскость [1].

Тогда используем зависимости вида:

а) компоненты деформации срединной поверхности:

$$\varepsilon_r = u_{,r} - kw + 0,5(w_{,r})^2; \quad \varepsilon_\phi = \frac{u}{r} - kw, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$  – радиальные и окружные относительные деформации в срединных поверхностях;  $u, w$  – радиальные перемещения и прогибы;  $k$  – главная кривизна;  $r$  – радиальная координата;

б) компоненты изгибной деформации:

$$\chi_r = -w_{,rr}; \quad \chi_\phi = -\frac{w_{,r}}{r}; \quad (5)$$

в) формулы для компонентов тензора деформаций через параметры  $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi$  и кривизны  $\chi_r, \chi_\phi$ :

$$e_r = \varepsilon_r + z\chi_r; \quad e_\phi = \varepsilon_\phi + z\chi_\phi, \quad (6)$$

где  $z$  – вертикальная координата, которая отмеряется от средней поверхности оболочки, имеет направление к центру кривизны.

Подставляя зависимости (4)-(5) в (6), в результате получаем выражения для компонентов тензора деформаций через перемещения и прогибы:

$$e_r = u_{,r} - kw + 0,5(w_{,r})^2 - zw_{,rr}; \quad e_\phi = \frac{u}{r} - kw - z\frac{w_{,r}}{r}. \quad (7)$$

Взаимосвязь деформаций с напряжениями получена благодаря применению выражений Кастильяно к потенциалу  $\bar{W}_1$ , которые принимают вид

$$e_k = \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial \sigma_k}; \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial \bar{W}_1}{\partial \tau_{ij}}; \quad (i, j, k = 1, 2, 3); \quad (8)$$

$$e_{ij} = 2C_e(\lambda)\sigma_{ij}/3 + 2(A_e(\lambda) - C_e(\lambda))\sigma\delta_{ij}/3 + T_{ij}(\lambda), \quad (9)$$

При этом  $T_{ij}(\lambda)$  рассматривается как сумма двух слагаемых:

$$T_{ij}(\lambda) = T_{ij}^e(\lambda) + T_{ij}^p(\lambda), \quad (10)$$

где  $T_{ij}(\lambda)$  – нелинейная составляющая уравнений состояния. где  $T_{ij}^e(\lambda)$  – составляющие, которые учитывают восприимчивость механических свойств материала от вида напряженного состояния на квазилинейном этапе деформирования, а  $T_{ij}^p(\lambda)$  – компоненты, позволяющие учесть разносопротивляемость материала и нелинейность экспериментальных диаграмм деформирования.

Сами слагаемые  $T_{ij}^e(\lambda)$  и  $T_{ij}^p(\lambda)$  определяются соответственно следующим образом:

$$T_{ij}^e(\lambda) = 2\tau_{ij}(D_e(\lambda)\xi + E_e(\lambda)\eta \cos 3\phi) / 3 + \{ (B_e(\lambda)\sigma^2 + D_e(\lambda)\tau^2)\xi_{,\tau_{ij}} + E_e(\lambda)\tau^2[\eta(\cos 3\phi)_{,\sigma_{kk}} + \eta_{,\sigma_{kk}} \cos 3\phi] \} / 2, \text{ при } i \neq j; \quad (11)$$

$$T_{ij}^p(\lambda) = n[(A_p(\lambda) + B_p(\lambda)\xi)\sigma^2 + (C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi + E_p(\lambda)\eta \cos 3\phi)\tau^2]^{n-1} \times \\ \times \{ 2\tau_{ij}(C_p(\lambda) + D_p(\lambda)\xi + E_p(\lambda)\eta \cos 3\phi) / 3 + [(B_p(\lambda)\sigma^2 + D_p(\lambda)\tau^2)\xi_{,\tau_{ij}} + E_p(\lambda)\tau^2(\eta(\cos 3\phi)_{,\tau_{ij}} + \eta_{,\tau_{ij}} \cos 3\phi)] / 2 \},$$

где  $\xi_{,\tau_{ij}} = -2\xi\eta^2 S_{ij} / 3\tau^2$ ; при  $i \neq j$ ; ;  $\eta_{,\sigma_{ij}} = 2\xi^3 S_{ij} / 3\sigma\tau$ , при  $i \neq j$ ;

$\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij} / 3$ ;  $\tau = \sqrt{S_{ij}S_{ij} / 3}$ ;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma$ ;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера.

$$(\cos 3\phi)_{,\sigma_{ii}} = \sqrt{2}[(\sigma_{kk} - \sigma)(\sigma_{jj} - \sigma_{ii}) + (\sigma_{jj} - \sigma)(\sigma_{kk} - \sigma_{ii}) + \tau_{ij}^2 + \tau_{ik}^2 - 2\tau_{jk}^2] / (3\tau^3) - \cos 3\phi(\sigma_{ii} - \sigma) / \tau^2; \\ (\cos 3\phi)_{,\tau_{ij}} = 2\sqrt{2}[\tau_{ik}\tau_{jk} - \tau_{ij}(\sigma_{kk} - \sigma) / \tau^3 - 2\cos 3\phi\tau_{ij} / \tau^2]. \quad (12)$$

Связь между деформациями и напряжениями представим в виде

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Обращая соотношения (13), получаем зависимость напряжений от деформаций:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

где  $[B] = [A]^{-1}$ .

Здесь  $A_{11}, A_{12}, A_{44}$  – составляющие симметричной матрицы  $[A]$  – т.е. функции, содержащие постоянные потенциала  $W_I$ .

Усилия и моменты найдём через напряжения традиционным способом:

$$N_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz; \quad N_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi dz; \\ M_r = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz; \quad M_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\phi z dz. \quad (15)$$

Связь моментов и усилий с компонентами деформаций оболочки приведём к виду

$$M_r = K_{11}(\lambda)\varepsilon_r + K_{12}(\lambda)\varepsilon_\phi + D_{11}(\lambda)\chi_r + D_{12}(\lambda)\chi_\phi; \\ M_\theta = K_{21}(\lambda)\varepsilon_r + K_{22}(\lambda)\varepsilon_\phi + D_{21}(\lambda)\chi_r + D_{22}(\lambda)\chi_\phi; \quad (16) \\ N_r = C_{11}(\lambda)\varepsilon_r + C_{12}(\lambda)\varepsilon_\phi + K_{11}(\lambda)\chi_r + K_{12}(\lambda)\chi_\phi; \\ N_\theta = C_{21}(\lambda)\varepsilon_r + C_{22}(\lambda)\varepsilon_\phi + K_{21}(\lambda)\chi_r + K_{22}(\lambda)\chi_\phi.$$

С учётом влияния степени наводороживания материалов при концентрации  $\lambda$  материальные функции имеют вид

$$C_{ij}(\lambda) = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) dz; \quad K_{ij}(\lambda) = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) z dz; \quad D_{ij}(\lambda) = \int_{-h/2}^{h/2} B_{ij}(\lambda) z^2 dz,$$

где  $B_{ij}$  – функции, подлежащие определению из экспериментов по деформированию образцов материала при разных уровнях концентрации водорода  $\lambda$ .

Применение любых определяющих соотношений не меняет уравнений статико-геометрической природы [2], поэтому при условии  $zk \ll 1$  уравнения равновесия принимают вид

$$\begin{aligned} M_{r,rr} - M_{\varphi,r}/r + 2M_{r,r}/r + k(N_r + N_\varphi) + N_r w_{,rr} &= -q; \\ N_{r,r} + (N_r - N_\varphi)/r - k[M_{r,r} + (M_r - M_\varphi)/r] &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Используя условия (17), а также выражения для усилий и моментов (16), получим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений относительно функций  $u$  и  $w$ , связанных с уровнем наводороживания  $\lambda$ . Для линеаризации этих уравнений используем двухшаговый метод последовательных возмущений параметров [9, 10], согласно которому запишем выражения для приращений деформаций и кривизн срединной поверхности:

$$\delta e_r = \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_r} \delta \sigma_r + \frac{\partial e_r}{\partial \sigma_\varphi} \delta \sigma_\varphi + \frac{\partial e_r}{\partial \lambda} \delta \lambda; \quad \delta e_\varphi = \frac{\partial e_\varphi}{\partial \sigma_\varphi} \delta \sigma_\varphi + \frac{\partial e_\varphi}{\partial \sigma_r} \delta \sigma_r + \frac{\partial e_\varphi}{\partial \lambda} \delta \lambda; \quad (18)$$

$$\delta \varepsilon_r = \delta u_{,r} - k \delta w + w_{,r} \delta w_{,r}; \quad \delta \varepsilon_\varphi = \frac{\delta u}{r} - k \delta w, \quad (19)$$

$$\delta \chi_r = -\delta w_{,rr}; \quad \delta \chi_\varphi = -\frac{\delta w_{,r}}{r}. \quad (20)$$

Зависимости приращений деформаций в точке через приращения деформаций срединной поверхности  $\delta \varepsilon_r$  и  $\delta \varepsilon_\varphi$  и кривизн срединной поверхности  $\delta \chi_r$  и  $\delta \chi_\varphi$  представляются следующим образом:

$$\delta e_r = \delta \varepsilon_r + z \delta \chi_r; \quad \delta e_\varphi = \delta \varepsilon_\varphi + z \delta \chi_\varphi \quad (21)$$

Используя уравнения (18) – (20), получим выражения, связывающие приращения деформаций и перемещений:

$$\delta e_r = \delta u_{,r} - k \delta w + w_{,r} \delta w_{,r} - z \delta w_{,rr}; \quad \delta e_\varphi = \frac{\delta u}{r} - k \delta w - z \frac{\delta w_{,r}}{r}. \quad (22)$$

Далее рассматриваем задачу, где процесс воздействия агрессивной водородосодержащей среды на оболочку завершён, и она наводорожена. Таким образом, дифференцировать по параметру  $\lambda$  в выражениях приращений деформаций (18) не требуется. Это необходимо в том случае, когда процесс наводороживания сопровождается ростом нагрузки, а следовательно – увеличением напряжений. Зависимости приращений усилий и моментов от напряжений имеют вид

$$\begin{aligned}\delta N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_r dz; \delta N_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_\phi dz; \\ \delta M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_r z dz; \delta M_\phi = \int_{-h/2}^{h/2} \delta \sigma_\phi z dz,\end{aligned}\quad (23)$$

где  $\delta N_r$ ,  $\delta N_\phi$  – приращения усилий в средней поверхности оболочки;  $\delta M_r$ ,  $\delta M_\phi$  – приращения моментов.

Используя уравнения (16) и зависимости (23), получим зависимости приращений усилий и моментов от приращений перемещений:

$$\begin{aligned}\delta N_r &= C_{11}(\lambda)(u, r - k\delta w + w, r \delta w, r - z\delta w, rr) - \\ &- K_{11}(\lambda)\delta w, rr + C_{12}(\lambda)\left(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w, r}{r}\right) - K_{12}(\lambda)\frac{\delta w, r}{r} \\ \delta N_\phi &= C_{12}(\lambda)(u, r - k\delta w + w, r \delta w, r - z\delta w, rr) - \\ &- K_{12}(\lambda)\delta w, rr + C_{22}(\lambda)\left(\frac{\delta u}{r} - k\delta w - z\frac{\delta w, r}{r}\right) - K_{22}(\lambda)\frac{\delta w, r}{r}; \\ \delta M_r &= K_{11}(\lambda)(u, r - k\delta w + w, r \delta w, r - z\delta w, rr) - \\ &- D_{11}(\lambda)\frac{\delta w, r}{r} + K_{11}(\lambda)\left(\frac{\delta u}{r} - k\delta w\right) - D_{12}(\lambda)\frac{\delta w, r}{r} \\ \delta M_\phi &= K_{12}(\lambda)(u, r - k\delta w + w, r \delta w, r - z\delta w, rr) - \\ &- D_{12}(\lambda)\delta w, rr + K_{22}(\lambda)\left(\frac{\delta u}{r} - k\delta w\right) - D_{22}(\lambda)\frac{\delta w, r}{r}.\end{aligned}\quad (24)$$

Запишем в приращениях уравнения равновесия пологой сферической оболочки, исключая члены второго порядка малости и выше:

$$\begin{aligned}\delta M_{r, rr} - \delta M_{\phi, r} / r + 2\delta M_{r, r} / r + k(\delta N_r + \delta N_\phi) + \delta N_r w, rr + N_r \delta w, rr &= -\delta q \\ \delta N_{r, r} + (\delta N_r - \delta N_\phi) / r - k[\delta M_{r, r} + (\delta M_r - \delta M_\phi) / r] &= 0.\end{aligned}\quad (25)$$

Полученную в приращениях систему разрешающих дифференциальных уравнений (25) дополним граничными условиями. Для осесимметричной задачи в центре оболочки поворот нормали к срединной поверхности, радиальные перемещения и их приращения равны нулю ( $w, r = 0$ ,  $u = 0$ ,  $\delta w, r = 0$ ,  $\delta u = 0$ ). По внешнему контуру оболочки граничные условия зависят от способа закрепления. Для жесткого защемления оболочки по периметру полагаем, что радиальные перемещения, их приращения, прогибы и поворот нормали к срединной поверхности равны нулю ( $u = 0$ ,  $w = 0$ ,  $w, r = 0$ ,  $\delta w, r = 0$ ,  $\delta u = 0$ ).

Подставив в уравнения равновесия (25) выражения для приращений усилий и моментов (24), получаем систему линеаризованных разрешающих дифференциальных уравнений относительно приращений прогибов и радиальных перемещений:

$$\frac{\delta u}{r} [ K_{11}(\lambda)(u, r - k\delta w + w, r \delta w, r - z\delta w, rr) - D_{11}(\lambda)\frac{\delta w, r}{r} + K_{11}(\lambda)\left(\frac{\delta u}{r} - k\delta w\right) - D_{12}(\lambda)\frac{\delta w, r}{r} ] -$$

$$\begin{aligned}
& -\delta w_{,r} [ K_{12}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-D_{12}(\lambda)\delta w_{,rr}+K_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w)-D_{22}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r} ] + \\
& 2\frac{\delta u}{r} [ K_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-D_{11}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r}+K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w)-D_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r} ] + \\
& \quad + k(C_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})- \quad (26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -K_{11}(\lambda)\delta w_{,rr}+C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w-z\frac{\delta w_{,r}}{r})-K_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r}+C_{12}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})- \\
& -K_{12}(\lambda)\delta w_{,rr}+C_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w-z\frac{\delta w_{,r}}{r})-K_{22}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r}+w_{,rr} [ C_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})- \\
& -K_{11}(\lambda)\delta w_{,rr}+C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w-z\frac{\delta w_{,r}}{r})-K_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r} ] +\delta w_{,rr} [ C_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})- \\
& \quad -K_{11}(\lambda)\delta w_{,rr}+C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w-z\frac{\delta w_{,r}}{r})-K_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r} ] = -\delta q
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta u}{r} [ C_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-K_{11}(\lambda)\delta w_{,rr}+C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w-z\frac{\delta w_{,r}}{r})-K_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r} ] + \\
& + (C_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-K_{11}(\lambda)\delta w_{,rr}+C_{12}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w-z\frac{\delta w_{,r}}{r})-K_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r}- \\
& -C_{12}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-K_{12}(\lambda)\delta w_{,rr}+C_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w-z\frac{\delta w_{,r}}{r})-K_{22}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r})- \\
& -k [ \frac{\delta u}{r} [ K_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-D_{11}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r}+K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w)-D_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (K_{11}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-D_{11}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r}+K_{11}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w)-D_{12}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r}- \quad (27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -K_{12}(\lambda)(u_{,r}-k\delta w+w_{,r}\delta w_{,r}-z\delta w_{,rr})-D_{12}(\lambda)\delta w_{,rr}+K_{22}(\lambda)(\frac{\delta u}{r}-k\delta w)-D_{22}(\lambda)\frac{\delta w_{,r}}{r} ] ] = 0.
\end{aligned}$$

В процессе химической адсорбции водород в конечном итоге распадается на атомы, которые затем проникают вглубь материала [5, 6]. Плотность потока  $J$  или количество вещества, проникающего за единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярную этому потоку, строго пропорциональна пространственному градиенту концентрации  $\lambda$ . Для небольших перепадов концентрации водорода в среде возможно применение первого закона Фика, который гласит, что количество вещества, проникающее через воображаемое сечение, перпендикулярное направлению диффундирования, строго пропорционально величине градиента концентрации вещества в этом сечении, площади сечения и времени диффундирования:

$$J = -D \text{grad} \lambda = -D \frac{\delta \lambda}{\delta z}, \quad (28)$$

где  $D$  - константа диффузии,  $z$  - координата в направлении диффузии.

В рассматриваемой задаче физически активная среда контактирует с оболочкой только по верхней или нижней поверхности, что приводит к одномерности процесса диффузии.

Для поставленной одномерной задачи уравнение (28) запишется в виде первого закона Фика, имеющего вид

$$J = -D\delta\lambda_z.$$

Для титановых сплавов концентрация не влияет на коэффициент диффундирования, поэтому из первого закона Фика вытекает второй закон в виде

$$\frac{\partial\lambda(z,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2\lambda(z,t)}{\partial z^2}, \quad (29)$$

где  $t$  – текущее время.

Из выражения (29) очевидно, что скорость изменения процесса диффузии во времени зависит только от константы диффузии  $D$ . Диффундирование водорода в оболочку подобно теплопроводности. Заданное уравнение аналогично дифференциальному уравнению теплопроводности для одномерного потока тепла. Разница лишь в том, что в выражении для передачи тепла вместо константы диффузии принимается коэффициент теплопроводности [8].

Чтобы решить уравнение диффузии, используются методы, что и для решения температурных задач. Используем метод разделения переменных – нахождение совокупности частных решений, которые удовлетворяют уравнению (29) начальными и граничными условиями. Далее рассмотрим решения по принципу наложения: частное решение найдём в виде произведения двух функций – одна из них зависит от времени, а другая – от координаты. Для решения задач наводороживания целесообразно применять метод интегрального преобразования Фурье. Кроме этого применимы численные методы решения, такой как метод конечных разностей [6, 8].

Для решения уравнения (29) при явлении одностороннего и двухстороннего диффундирования используем решения, представленные в работе [9].

При процессе одностороннего диффундирования решение имеет вид

$$\lambda(z,t) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)z/h + (2/\pi) \sum_{i=1}^{\infty} \sin(i \cdot \pi \cdot z/h) \exp(-F_o \pi^2 i^2) \times \quad (30)$$

$$\times [\lambda_2 \cos(i \cdot \pi) - \lambda_1] / i,$$

где  $F_o = Dt/h^2$  – число Фурье;  $i$  – число членов ряда;  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – краевые условия для концентрации среды сверху и снизу оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $z$  – координата по толщине оболочки.

Граничные условия выразим следующим образом:

а) воздействие среды происходит со стороны приложения силовой нагрузки:

$$\lambda(-h/2, t) = \lambda_{\infty} = \lambda_1; \lambda(+h/2, t) = 0 = \lambda_2; \quad (31)$$

б) воздействие среды происходит со стороны свободной от нагружения:

$$\lambda(-h/2, t) = 0 = \lambda_1; \lambda(+h/2, t) = \lambda_{\infty} = \lambda_2,$$

в) при двухсторонней диффузии:

$$\lambda(-h/2, t) = \lambda_{\infty} = \lambda_1; \lambda(+h/2, t) = \lambda_{\infty} = \lambda_2,$$

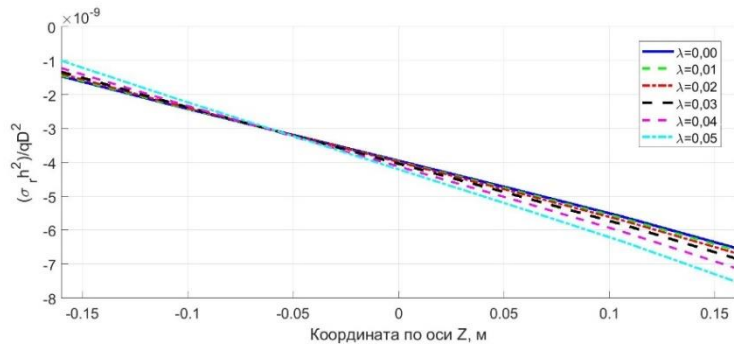
где  $\lambda_{\infty}$  – равновесная концентрация агрессивной водородной среды.

Начальные условия запишутся в виде

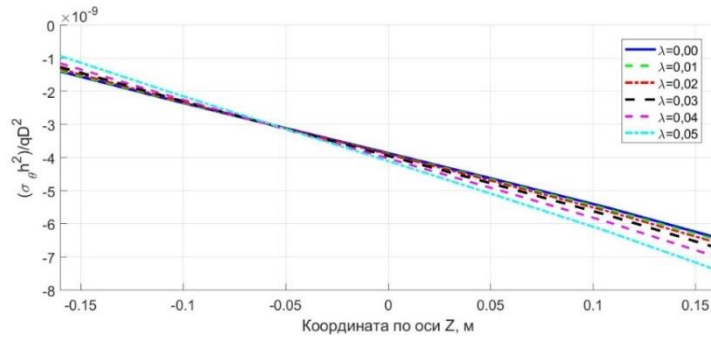
$$\lambda(z, 0) = 0. \quad (32)$$

Учитывая в уравнении (30) начальные (32) и краевые условия (31), получаем модель воздействия активной водородной среды [10, 11].

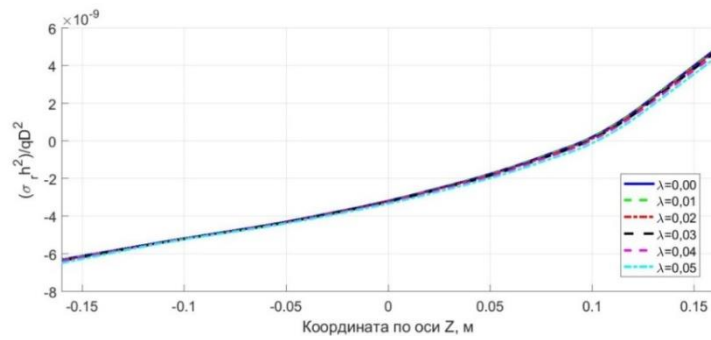
Заменив производные конечными разностями в программном комплексе MATLAB полученные разрешающие уравнения и обработав вычислительный алгоритм, приходим к следующим результатам решения поставленной задачи при процессе односторонней диффузии со стороны приложения поперечной силовой нагрузки, которые приведены на рис. 2 - 7.



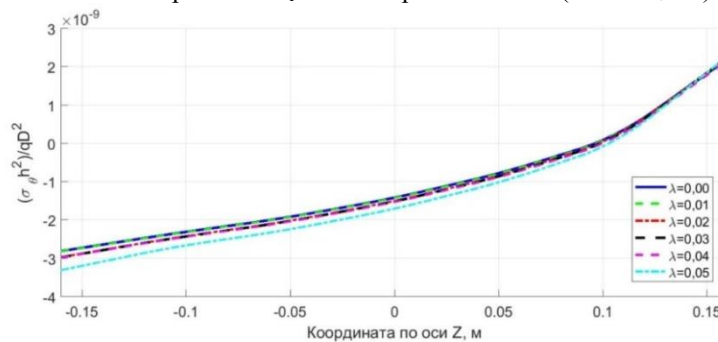
**Рис. 2.** Напряжения  $\sigma_r$  в точке  $1/2$  диаметра оболочки (по толщине)



**Рис. 3.** Напряжения  $\sigma_\theta$  в точке  $1/2$  диаметра оболочки (по толщине)



**Рис. 4.** Напряжения  $\sigma_r$  в точке края оболочки (по толщине)



**Рис. 5.** Напряжения  $\sigma_\theta$  в точке края оболочки (по толщине)

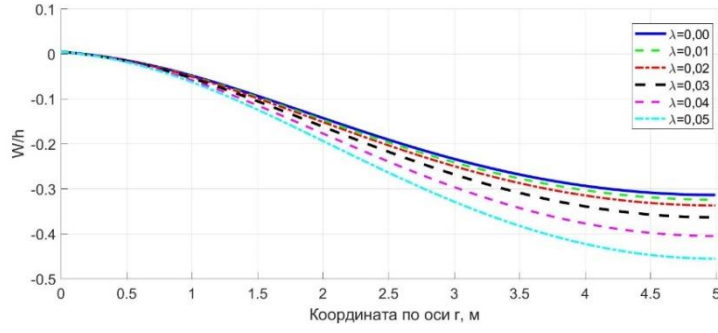


Рис. 6. Прогобы в оболочке

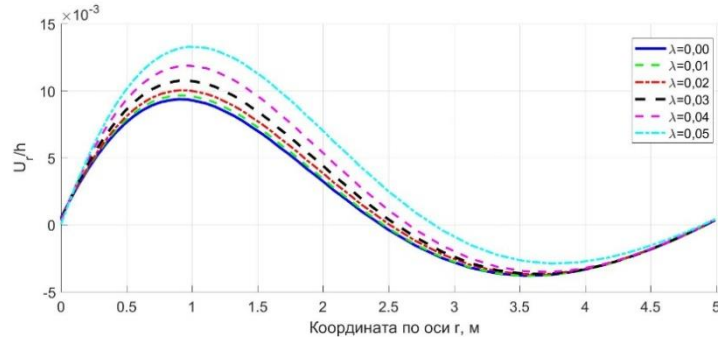


Рис. 7. Горизонтальные перемещения вдоль радиуса

На рис. 2 - 5 показаны графики зависимости напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\phi$  по толщине оболочки от степени концентрации агрессивной водородосодержащей среды. Рис. 6 и 7 отражают графики прогибов и горизонтальных перемещений оболочки.

Сравним полученные результаты с результатами И.Г. Овчинникова и Л.А. Кирилловой [6], при получении которых использовались простейшие физические соотношения, в зависимости от степени концентрации  $\lambda$  [7]:

$$\sigma_r = k \frac{\psi}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\phi);$$

$$\sigma_\phi = k \frac{\psi}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu \varepsilon_r);$$

$$\psi = \sigma_i / \varepsilon_i,$$

где  $\psi$  – функция, учитывающая воздействие вида напряжённого состояния, а также водородного воздействия на характер физических соотношений,  $k$  – главная кривизна оболочки,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\varepsilon_i$  – интенсивность деформаций,  $\nu$  – к-т поперечной деформации.

Считая, что влияние среды не приводит к изменению вида уравнений состояния, а меняются лишь коэффициенты, которые становятся функциями параметров  $\lambda, \varepsilon$ , авторы [6-8] представляют диаграмму деформирования  $\sigma - \varepsilon$  в виде

$$\sigma_i = A \varepsilon_i - B(\lambda, \varepsilon_i) E^{m(\lambda, \varepsilon)};$$

$$\text{где } \sigma_i = (\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\phi + \sigma_\phi^2)^{1/2}; \quad \varepsilon_i = \mu_1 (\varepsilon_r^2 - \mu_2 \varepsilon_r \varepsilon_\phi + \varepsilon_\phi^2)^{1/2}; \quad \psi = (\lambda, \varepsilon) = \begin{cases} \psi^+ = A_0 - B(\lambda) \varepsilon_i^{m(\lambda)-1}, & \varepsilon \geq \varepsilon_0, \\ \psi^- = A_0 - B_0 \varepsilon_i^{m_0-1}, & \varepsilon < \varepsilon_0, \end{cases}$$



$\varepsilon_0$  – критическое значение деформации при насыщении водородом;  $A, B, A_0, B_0, m, m_0$  – константы, определяемые по экспериментальным диаграммам деформирования, которые аппроксимируются функцией

$$\sigma_i = A\varepsilon_i^m - B\varepsilon_i^n,$$

где  $\mu_1 = (1 - \nu + \nu^2)^{1/2} / (1 - \nu^2)$ ;  $\mu_2 = 3\nu / (1 - \nu + \nu^2) - 1$ .

Сравнивая в программном комплексе MATLAB полученные решения по разработанной модели [10-11] с результатами по теории И.Г. Овчинникова [6-7], можно произвести следующий анализ: результаты отличаются из-за того, что в теории И.Г. Овчинникова не учитывается влияние наводороживания при разных сложных видах напряжённого состояния.

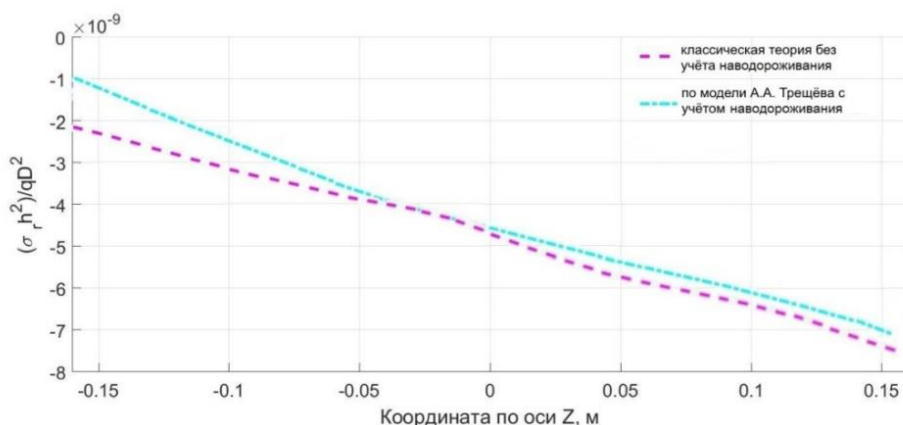


Рис. 8. Напряжения  $\sigma_r$  в точке 1/2 диаметра оболочки (по толщине)

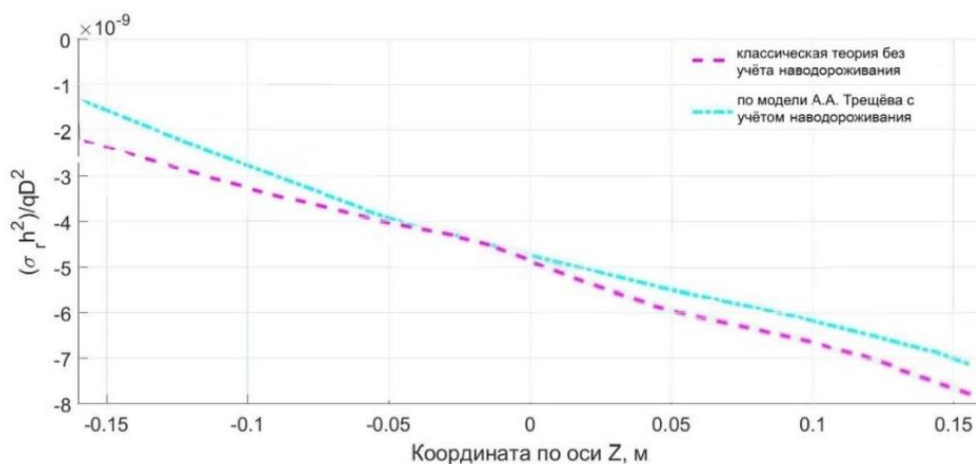
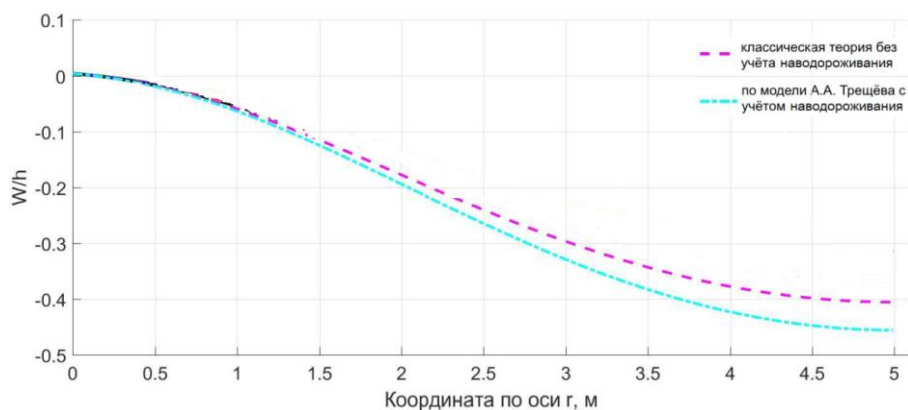
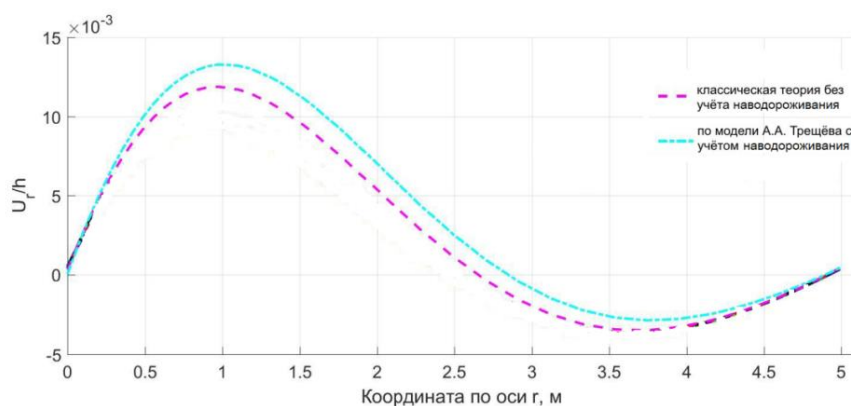


Рис. 9. Напряжения  $\sigma_\theta$  в точке 1/2 диаметра оболочки (по толщине)

На рис. 10 - 11 показано, что разница в величинах максимальных прогибов и перемещений при учёте и без учёта воздействия агрессивной водородной среды значительное, что составляет 16,5 %, напряжений – до 50 %. Такая разница не допустима, так как превышает предельное значение погрешности для строительных конструкций, равное 5 % (рис. 8 - 11).



**Рис. 10.** Прогибы в оболочке



**Рис. 11.** Горизонтальные перемещения в оболочке

Учет зависимости деформационных и прочностных характеристик от степени насыщения водородом вносит значительные поправки в результаты определения напряженно-деформированного состояния сферических оболочек из титановых сплавов, а поэтому необходим для получения достоверных результатов расчета.

## ВЫВОДЫ

Множественные фундаментальные исследования доказывают тот факт, что воздействие водородной среды на конструкционные материалы способствует появлению в них неоднородности и разнсопротивляемости, изменяющейся в течение времени. Это обуславливает потребность создания новых моделей, которые будут описывать НДС тел с учетом наведенной восприимчивости механических свойств материалов к наводороживанию в широком диапазоне изменения напряженного состояния.

Контроль воздействия агрессивной водородной среды в работе был организован на основе нелинейных соотношений, которые учитывают наведенную чувствительность к наводороживанию в широком диапазоне изменения видов напряженного состояния [10-11].

В данной работе произведено построение математической модели влияния наводороживания на НДС пологой сферической оболочки и приведено численное решение задачи с иллюстрацией прогибов, перемещений и напряжений.

## Библиографический список

1. Астафьев, В. И. Накопление поврежденности и коррозионное растрескивание металлов под напряжением / В. И.Астафьев, Л. К.Ширяева. – Самара: Изд-во Самарский университет, 1998. 123 с.
2. Баландин, П. П. К вопросу о гипотезах прочности / П. П.Баландин // Вестник инженеров и техников. – 1937. – №1. – С. 37-41.
3. Колачев, Б. А. Механические свойства титана и его сплавов/ Б. А.Колачев, В. А. Ливанов, Л. А. Буханова. – М.: Металлургия, 1974. 544 с.
4. Маркин, А. А. К обоснованию теории оболочек / А. А. Маркин // Работы по механике деформируемых сред. – Тула: ТПИ. – 1974. – С. 121-129.
5. Овчинников, И. И. Анализ экспериментальных данных по кинетике проникания сульфатосодержащих сред в железобетонные конструкции и влиянию их на механические характеристики компонентов железобетона. Ч. 1. Эксперименты по изучению кинетики проникания / И. И.Овчинников, И. Г.Овчинников, Чэнь Тао, А. М. Успанов // Интернет-журнал «Науковедение». Т. 8. - № 1 (2016). - 14 с.
6. Овчинников, И. Г. О деформировании гибкой круглой пластины из материала, чувствительного к водородному воздействию / И. Г. Овчинников, Л. А. Кириллова. – Саратов, 1989. – 15 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 7 февраля 1990, № 698 – В90.
7. Овчинников, И. Г. Модифицированная модель деформирования и разрушения материала, подвергающегося облучению / И. Г.Овчинников // Строительная механика и расчёт сооружений, 2014. -№ 1. - С. 29-35.
8. Овчинников, И. Г. Анализ экспериментальных данных по влиянию водорода при нормальных температурах на механические свойства металлов и сплавов и построению модели взаимодействия конструктивных элементов с водородом. Ч.1. Проблема воздействия водорода на металлы и пути ее решения. Закономерности проникания водорода в конструктивные элементы / И. Г.Овчинников, А. Б.Рассада. – Саратов: Саратов. политехн. ин-т, 1989. - 28 с.
9. Петров, В. В. Теория наведенной неоднородности и ее приложения к проблеме устойчивости пластин и оболочек / В. В.Петров, В. К.Иноземцев, Н. Ф.Синева. - Саратов: Саратов. гос. техн. ун - т, 1996. – 311 с.
10. Петров, В. В. Методы расчёта конструкций из нелинейно-деформируемого материала / В. В.Петров, И. В.Кривошеин. – М.: Изд-во АСВ, 2009. – 208 с.
11. Трещев, А. А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А.Трещев. - М.; Тула; РААСН; ТулГУ, 2016. - 236 с.

## References

1. Astafyev V.I., Shirvaeva L.K. Accumulation of damage and corrosion cracking of metals under stress. Samara: Samara University Publishing House, 1998. 123 p.
2. Balandin P.P. On the issue of strength hypotheses. Bulletin of engineers and technicians. No. 1. 1937. Pp. 37-41.
3. Kolachev V.A., Livanov V.A., Buhanova L.A. Mechanical properties of titanium and its alloys. M.: Metallurgy, 1974. 544 p.
4. Markin A.A. To the justification of the theory of shells. Works on the mechanics of deformable media. Tula: TPI, 1974. Pp. 121-129.
5. Ovchinnikov I.I., Ovchinnikov I.G., Chen Tao, Usfanov A.M. Analysis of experimental data on the kinetics of penetration of sulfate-containing media into reinforced concrete structures and their influence on the mechanical characteristics of the components of reinforced concrete. Part

1. Experiments on the study of penetration kinetics. Internet-journal "Naukovedenie." Vol. 8. No.1. 2016. 14 p.
6. Ovchinnikov I.G., Kirillova L.A. On the deformation of a flexible round plate from a material that is sensitive to hydrogen exposure. Saratov Polytechnic institute, 1989. 15 p.
7. Ovchinnikov I.G. Modified model of the deformation and destruction of the material subjected to irradiation. Structural mechanics and calculation of structures. No 1. 2014. Pp. 29-35.
8. Ovchinnikov I.G., Rassada A.B. Analysis of experimental data on the effect of hydrogen at normal temperatures on the mechanical properties of metals and alloys and the construction of a model of the interaction of structural elements with hydrogen. Part 1. The problem of hydrogen influence on metals and ways of its solution. Regularities of hydrogen penetration into structural elements. Saratov: Saratov Polytechnic institute, 1989. 28 p.
9. Petrov V.V., Inozemtsev V.K., Sineva N.F. The theory of induced inhomogeneity and its applications to the problem of stability of plates and shells. Saratov: Saratov State Technical University, 1996. 311 p.
10. Petrov V.V., Krivoshein I.V. Methods for calculating structures from a non-linearly deformable material. Moscow: Association of Building Institutions Publishing House, 2009. 208 p.
11. Treschev A.A. The theory of deformation and durabilities for the materials with a primary and induced sensitivity to a kind of a stress condition. Determining correlations. M.: Tula RAACS TSU, 2016. 236 p.

## ANALYSIS OF THE PROCESS OF THE INFLUENCE OF HYDROGEN BREEDING ON STRESSED-DEFORMED STATE OF SPHERICAL TITANIUM ALLOY SHELLS

A. A. Treschev<sup>1</sup>, V. O. Kuznetsova<sup>2</sup>

Tula State University<sup>1,2</sup>  
Russia, Tula

---

<sup>1</sup> Corresponding Member of RAACS, Dr. of Technical Sciences, Prof., Head of the Department of Construction, Building Materials and Structures

<sup>2</sup> Postgraduate Student of the Department of Construction, Building Materials and Structures, Tel: +7 (920) 7595280, e-mail: [kuznecova\\_violetta@mail.ru](mailto:kuznecova_violetta@mail.ru)

---

This article discusses the construction of a mathematical model that describes the effect of an aggressive hydrogen medium on the stress-strain state of a thin shallow spherical shell made of a titanium alloy and loaded with a uniformly distributed load. To do this, we used a nonlinear model presented in normalized stress spaces. The load is adopted so that the deflections of the shell are large. The shell fastening is rigid. An algorithm is developed for solving the problems of hydrogenation of shells made of titanium alloy. The practical solution was made by a two-step method of successive parameter perturbations using the MatLab and Maple application software packages. To solve the system of resolving differential equations, the method of finite difference is used. The diffusion equation solution of a hydrogen-containing medium is presented; the obtained solution is compared with the results of the classical theory without taking into account the aggressive effects of a hydrogen-containing medium. To solve the system of resolving differential equations, the finite difference method is used.

**Keywords:** shallow shell, titanium alloy, finite differences, nonlinear deformation, isotropic material, large deflections.

## АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ПРОГИБА СТЕРЖНЕВОЙ РАМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>, К. Бука-Ваиваде<sup>2</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”<sup>1</sup>

Россия, г. Москва

Рижский технический университет<sup>2</sup>

Латвия, г. Рига

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

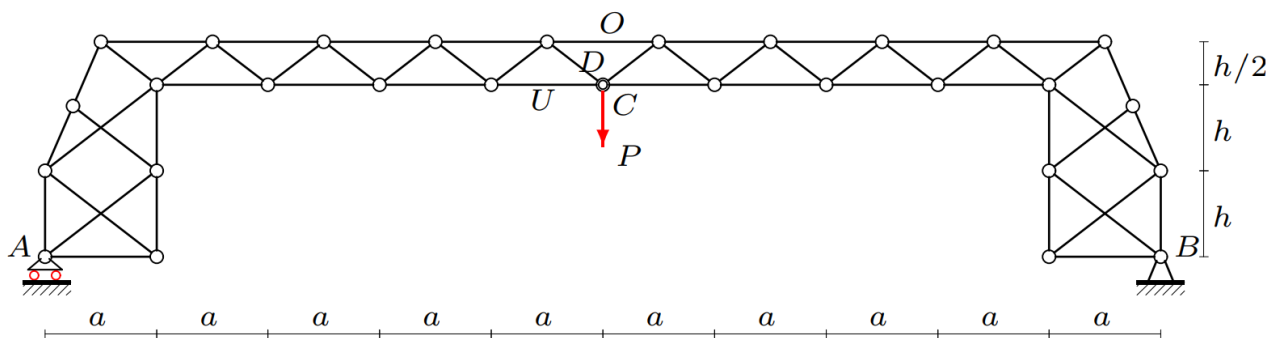
<sup>2</sup>Аспирант, тел.: +37128877852; e-mail: karina.buka-vaivade@rtu.lv

Предлагается модель статически определимой рамы-фермы и формулы для расчета ее прогибов под действием различных нагрузок. Модель определяется двумя натуральными параметрами — числом панелей в ригеле и числом панелей в вертикальных стойках - фермах. Выводятся формулы зависимостей усилий в наиболее опасных стержнях от нагрузок, числа панелей, упругих характеристик материала и размеров конструкции. Смещение узлов рассчитываются с помощью интегральной формулы Максвелла – Мора. Усилия в стержнях конструкции вычисляются в символьной форме с помощью системы символьной математики Maple. Для обобщения частных решений на произвольные числа панелей используется метод двойной индукции.

**Ключевые слова:** ферма, рама, индукция, аналитическое решение, Maple

For a long time, it was believed that the only way to assess the stress state of existing and designed structures (except for the experimental one) is numerical calculation [1-7]. With the advent of symbolic mathematics systems, the monopoly on computation in numerical methods gradually begins to disappear. Of course, such algorithms for symbolic mathematics have not yet been created that could obtain a compact formula for a complex structure taking into account all or most of its characteristics, but time goes on and the experience of programmers is growing. If at first systems like Reduce, Maple, and others could simply replace the numerical data in the condition of the problem and the equations used with symbols with a simple solution suitable for a particular design and specific load, recently, they have joined the number of free (variable) parameters and natural numbers characterizing the format of the design. In trusses, this is the number of panels [8-10], in frames, the number of storeys and the number of panels in the crossbar.

Consider a statically determinate frame consisting of  $2n$  triangular panels in a crossbar and  $m$  panels with a cross-shaped lattice in side support trusses (Fig. 1).



**Fig. 1.** Truss, concentrated load,  $n=4$ ,  $m=2$

The truss under study is statically determinate. The number of hinge assemblies  $4(m+n)+5$ , the number of rods, including three support rods modeling the left movable and right stationary hinge support, is equal  $K = 8(m+n)+10$ . A design feature is the beveled sides of the upper panels of the side parts. From the system of equations of equilibrium of nodes in projections on the axis, one can find the forces in the rods and the reactions of the supports.

Analytical calculations of the deflection and displacement of the movable support of similar structures in the Maple computer mathematics system were obtained in [11-17].

The solutions obtained for farms with a successively increasing number of panels were generalized to the general case by induction using special operators of the Maple system to compose and solve recurrence equations that are satisfied by the members of the sequences of coefficients in the desired formulas. The same method is used in the present work.

Deflection (vertical displacement of the middle node of the lower crossbar belt) is determined by the Maxwell-Mohr formula under the assumption that all the rods have the same longitudinal stiffness  $EF$ :

$$\Delta = \sum_{k=1}^{K-3} S_k^{(P)} S_k^{(1)} l_k / (EF),$$

where  $E, F$  are the elastic modulus and cross-sectional area of the rods,  $S_k^{(1)}$  — is the force in the rod  $k$  from the action of a single vertical force in the middle node of the crossbar,  $S_k^{(P)}$  — is the force in the rod  $k$  from the load,  $l_k$  is the length of the rod  $k$ . Three support rods are assumed to be rigid. Consider several types of loads.

**1.** Under the action of a concentrated force in the middle of the span, we have a general view of the deflection

$$\Delta = P(C_{1,n}a^3 + C_{2,n}c^3 + C_{3,n}h^3 + C_{4,n}d^3) / (EFh^2), \quad (1)$$

where  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ ,  $d = \sqrt{a^2 + 9h^2}$  is the length of the braces in the supporting parts.

Solving a series of problems for farms with a successively increasing number of panels  $n$  for a fixed  $m = 1$ , we obtain the following values for the coefficient  $C_{1,n}$

$$21/2, 36, 171/2, 167, 577/2, 458, 1367/2, 973...$$

The **rgf\_findrecur** operator of the **genfunc** package of the Maple system gives the following recursive equation

$$C_{1,n} = 4C_{1,n-1} - 6C_{1,n-2} + 4C_{1,n-3} - C_{1,n-4}.$$

Solving a homogeneous linear equation returns the **rsolve** operator

$$C_{1,n} = 4n^3 / 3 + 4n^2 + 25n / 6 + 1.$$

Similarly, we obtain the coefficient values in (1) for calculating the deflection:

$$C_{2,n} = (8n+11) / 16,$$

$$C_{3,n} = 0, C_{4,n} = 1/16.$$

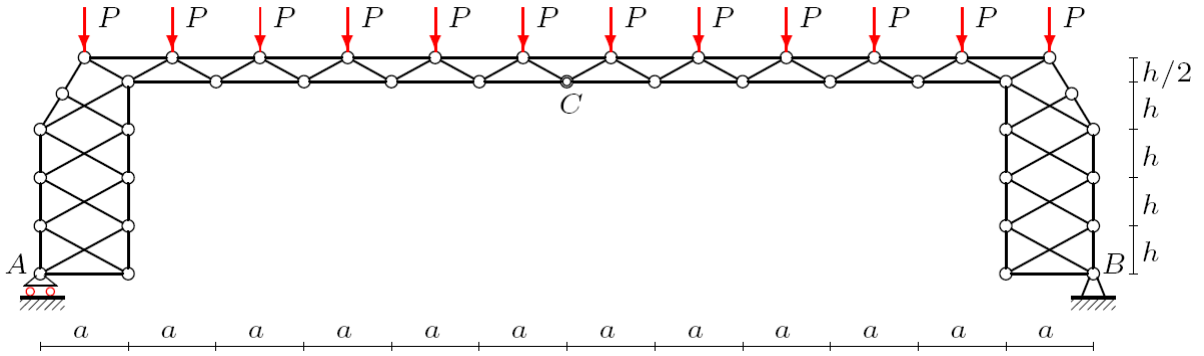
To obtain the formula for the dependence of the deflection on the number  $m$ , it is necessary to obtain the coefficient values at  $m = 2, 3, 4, \dots$ . In this case, the task turned out to be simple: only the coefficient  $C_{3,n} = (m-1)/2$  at  $h^3$  depends on the number of vertical panels.

**2.** Under the action of a distributed load, the deflection of the middle span (Fig. 2) has the same form (1). Odds are also obtained by double induction

$$C_{1,n} = (n+1)(5n^3 + 15n^2 + 16n + 3) / 3,$$

$$C_{2,n} = (4n^2 + 11n + 5) / 8,$$

$$C_{3,n} = (n+1)(m-1), \quad C_{4,n} = (n+1) / 8.$$



**Fig. 2.** Truss, distributed load,  $n=5$ ,  $m=4$

3. The displacement of the movable support from the action of a concentrated force (Fig. 1) has the form

$$\delta_A = P(A_{1,n}a^3 + A_{2,n}c^3 + A_{3,n}h^3 + A_{4,n}d^3) / (ahEF), \quad (2)$$

Where the coefficients are obtained by induction on the parameters  $m$  and  $n$ :

$$A_{1,n} = (1 + 4m)n^2 + (2 + 8m)n + 2m,$$

$$A_{2,n} = (11m + 4) / 8,$$

$$A_{3,n} = (1 + 2m^2 - 4m - (-1)^m) / 4$$

$$A_{4,n} = m / 8.$$

The displacement of the movable support from the action of a uniformly distributed load has the same form, but with coefficients

$$A_{1,n} = 2(n+1)(2n^2 + 8n^2m + 16nm + 4n + 3m) / 3,$$

$$A_{2,n} = (11m + 4)n + 5m + 4,$$

$$A_{3,n} = (n+1)(2m^2 - 4m + 1 - (-1)^m) / 2,$$

$$A_{4,n} = m(n+1) / 4.$$

4. The vertical displacement of the middle node  $C$  of the crossbar from the action of a horizontal lateral load uniformly distributed over the height (Fig. 3) has the form

$$\Delta = P(C_{1,n}a^3 + C_{2,n}c^3 + C_{3,n}h^3 + C_{4,n}d^3) / (ahEF),$$

where only the coefficient depends on the number  $n$   $C_1$

$$C_{1,n} = (1 + 4n + 2n^2)(1 + 2m^2 + 6m) / 4,$$

$$C_{2,n} = (22m^2 + 66m + 5) / 64,$$

$$C_{3,n} = (4m^3 + 3m^2 - 22m + 12 - 3(-1)^m) / 24,$$

$$C_{4,n} = (m^2 + 3m - 1) / 32.$$

5. The horizontal displacement of the node  $C$  from the action of the horizontal force on the crossbar (Fig. 4) has the form

$$\delta_C = P(A_{1,n}a^3 + A_{2,n}c^3 + A_{3,n}h^3 + A_{4,n}d^3) / (a^2(n+1)^2 EF), \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} A_{1,n} &= (2(4n+1)(8n^2 + 13n + 6)m^2 + (26n^3 + 30n^2 + n - 6)m + \\ &\quad + 3(n+1)(3n^2 + 2(-1)^m n + 4n + 2 + 2(-1)^m)) / 12, \\ A_{2,n} &= ((44n^2 + 60n + 22)m^2 + (64n^2 + 109n + 48)m - 4n - 4) / 32, \\ A_{3,n} &= (8(4n^2 + 5n + 4)m^3 - (48n^2 + 54n + 18)m^2 + \\ &\quad + (16n^2 + 32n + 12(-1)^m + 12(-1)^m n + 4)m + 3(n+1)((-1)^m - 1)) / 48, \\ A_{4,n} &= m(4n^2 m + 4nm - n + 2m) / 32. \end{aligned}$$

A feature of this solution is the dependence of the determinant of the system of equilibrium equations of nodes on the number of panels  $n$ , which manifests itself in the presence of a factor  $(n+1)^2$  in the denominator (3). In all other solutions considered here, as well as in most known solutions [8-17], the determinant does not depend on the number of panels, which facilitates the determination of the common terms of the sequences.

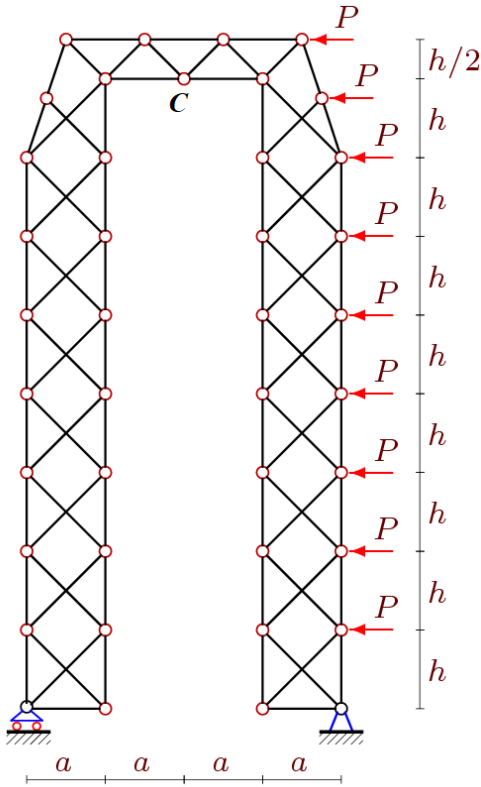


Fig. 3. Frame under the action of lateral load,  $n = 1$ ,  $m = 8$

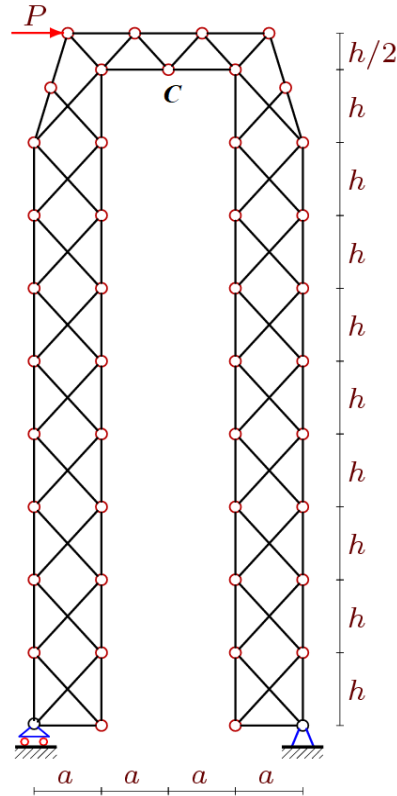


Fig. 4. Frame under the action of lateral load,  $n = 1$ ,  $m = 9$

6. To assess the strength and stability of the structure, it is useful to have formulas for the forces in the most compressed and extended rods. These formulas are automatically obtained when deriving formulas for deflection. It remains only to generalize to an arbitrary number of panels. For efforts in the brace and belts of the middle panel of the crossbar (Fig. 1) when loading the frame



with one force, we have the following expressions

$$D = Pc / (2h), O = -Pa(n+1) / h, U = Pa(2n+1) / (2h).$$

Note that these expressions do not depend on the number of panels  $m$  in the side racks and can be found quite simply by the Ritter section method. Similar expressions have efforts in case of loading with distributed load (Fig. 2):

$$D = 0, O = -Pa(n+1)^2 / h, U = Pa(n+1)^2 / h.$$

## Conclusion

The proposed scheme of a statically determinable frame with two supports allows simple analytical solutions for deflection and horizontal displacement under the influence of various loads. A linear combination of solutions makes it possible to obtain estimates of the deformability of the structure for a wide class of loads, and two independent natural parameters ( $n$  and  $m$ ) make it possible to apply these estimates for a wide variety of structures — from frames of almost beam type ( $m = 1$ ) to tower structures ( $m \gg n$ ). The applied calculation algorithm is easily tuned to arbitrary loads. Thus, a uniformly distributed lateral load simulating a wind load can be replaced by a load that increases linearly with height, a vertical uniformly distributed load can be replaced by some asymmetric model of crane equipment or some other temporary load. In addition, if we consider small deformations and linear formulation, all the proposed solutions will not change if hinges are placed at the points of intersection of the rods in the cruciform lattice. The static definability of the system will not change either, since each new node on the one hand gives two additional equations and, on the other hand, two additional rods appear in the design.

The algorithm used to derive analytical solutions is applicable for spatial trusses [18–20] and in other regular systems, in particular, in problems of structures from a cross-layered beam subjected to bending [21–22].

Reviews of analytical solutions for deflection of trusses with an arbitrary number of panels were made in [9,23].

## Библиографический список

1. Игнатъев А. В., Игнатъев В. А., Онищенко Е. В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник МГСУ. 2016. №. 2. С. 20-33.
2. Feng, L. J., Xiong, J., Yang, L. H., Yu, G. C., Yang, W., Wu, L. Z. Shear and bending performance of new type enhanced lattice truss structures // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Volume 134, December, Pp. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.045>
3. Kaveh A., Laknejadi K. A hybrid evolutionary graph-based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures // *Acta Mechanica*. 2013. Volume 224. No. 2. Pp. 343-364. DOI 10.1007/s00707-012-0754-5
4. Lin W., Yoda T. Bridge Engineering: Classifications, Design Loading, and Analysis Methods. Chapter Eight. Truss Bridges. Butterworth-Heinemann, 2017. Pp. 137–153.
5. Ufimtsev E. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. T. 150. Pp. 1891-1897.
6. Branco J. M. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses // *Engineering Structures*. 2017. Volume 140. Pp. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>

7. Degertekin S. O., Lamberti L., Ugur I. B. Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm // *Applied Soft Computing* 2017, Volume 70, September, Pp. 903–928. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.001>
8. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 25–32) doi: 10.5862/МСЕ.61.3
9. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // *Magazine of civil Engineering*. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/МСЕ.57.6
10. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, Volume 46, No. 1, Pp. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
11. Kirsanov M. N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41 doi: 10.18720/МСЕ.71.7
12. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/МСЕ.71.7
13. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts // *Постулат*. 2018. № 6 (32). С. 105.
14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load // *Постулат*. 2018. № 3 (29). С. 2.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss // *Постулат*. 2018. № 5-1 (31). С. 22.
16. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // В сборнике: *Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики - "KAZCAS-2017". Международная научно-практическая конференция - "ИТОН-2017" Материалы семинара, школы и конференции. Под общей редакцией Ю.Г. Игнатьева. 2017. С. 249-254.*
17. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба впарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
18. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. doi: <https://doi.org/10.5862/МСЕ.64.5>
19. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/МСЕ.76.6
20. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment // *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No.5(40). Pp. 52–58. doi: 10.5862/МСЕ.40.6
21. Vilguts A., Serdjus D., Pakrastins L. Design Methods of Elements from Cross-laminated Timber Subjected to Flexure // *Procedia Engineering*. – 2015. – Т. 117. – С. 10-19 <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.117>
22. Buka-Vaivade K., Serdjus D., Goremikins V., Vilguts A., Pakrastins L. Experimental verification of design procedure for elements from cross-laminated timber // *Procedia Engineering*. – 2017. – Т. 172. – С. 1212-1219. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.142>
23. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // *Строительная механика и конструкции*. 2018. Т.1. №16. С. 12–33.

## Reference

1. Ignatiev A. V., Ignatiev V. A., Onishchenko E. V. Solving geometrically non-linear problems of statics of hinge-rod systems based on the finite element method in the form of the classical mixed method. *Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering*. 2016. issue 2. Pp. 20–33.
2. Feng, L. J., Xiong, J., Yang, L. H., Yu, G. C., Yang, W., Wu, L. Z. Shear and bending performance of new type enhanced lattice truss structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Volume 134, December. Pp. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.045>
3. Kaveh A., Laknejadi K. A hybrid evolutionary graph-based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures. *Acta Mechanica*. 2013. Volume 224. No. 2. Pp. 343-364. doi 10.1007/s00707-012-0754-5
4. Lin W., Yoda T. *Bridge Engineering: Classifications, Design Loading, and Analysis Methods*. Chapter Eight. *Truss Bridges*. Butterworth-Heinemann. 2017. Pp. 137–153
5. Ufimtsev E. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Procedia Engineering*. 2016. T. 150. Pp. 1891-1897.
6. Branco J. M. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses. *Engineering Structures*. 2017. Volume 140. Pp. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>
7. Degertekin S. O., Lamberti L., Ugur I. B. Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm. *Applied Soft Computing* 2017. Volume 70. September. Pp. 903–928. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.001>
8. Tinkov D.V. The optimal geometry of a flat beam diagonal truss, taking into account the linear creep of the material. *Magazine of civil Engineering*. 2016. №1(61). Pp. 25–32. doi: 10.5862/MCE.61.3
9. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Magazine of civil Engineering*. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
10. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Volume 46. No. 1, Pp. 46–52. doi: 10.3103/S1052618817010149
11. Kirsanov M. N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41 doi: 10.18720/MCE.71.7
12. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
13. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts. *Postulat*. 2018. № 6 (32). P. 105.
14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load. *Postulat*. 2018. № 3 (29). Pp. 2.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss. *Postulat*. 2018. № 5-1 (31). Pp. 22.
16. Tinkov D.V. Inductive derivation of the formula for the horizontal movement of the tower structure. In the collection: *International Scientific Seminar "Nonlinear Models in Mechanics, Statistics, Field Theory and Cosmology" - GRACOS-17. International School on Mathematical Modeling in Computer Mathematics Systems - "KAZCAS-2017". International Scientific and Practical Conference - "ITON-2017" Seminar, school and conference materials*. Under the general editorship of Yu.G. Ignatiev. 2017. Pp. 249-254.

17. Tinkov D.V. Formulas for calculating the deflection of a flamed beam diagonal truss with an arbitrary number of panels. Construction mechanics and construction. 2016. Volume 2. № 13 (13). Pp. 10-14.
18. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. doi: <https://doi.org/10.5862/MCE.64.5>
19. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: [10.18720/MCE.76.6](https://doi.org/10.18720/MCE.76.6)
20. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment. Magazine of Civil Engineering. 2013. No.5(40). Pp. 52–58. doi: [10.5862/MCE.40.6](https://doi.org/10.5862/MCE.40.6)
21. Vilguts A., Serdjusks D., Pakrastins L. Design Methods of Elements from Cross-laminated Timber Subjected to Flexure. Procedia Engineering. 2015. Volume 117. Pp. 10-19 <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2015.08.117>
22. Buka-Vaivade K., Serdjusks D., Goremikins V., Vilguts A., Pakrastins L. Experimental verification of design procedure for elements from cross-laminated timber. Procedia Engineering. 2017. Volume 172. Pp. 1212 - 1219. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.142>
23. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems of deflection of flat trusses of arch type. Stroitel'naya mekhanika i konstruksii. 2018. Volume1. No.16. Pp. 12–33.

## ANALYTICAL CALCULATION OF THE DEFLECTION OF THE ROD FRAME WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov<sup>1</sup>, K. Buka-Vaivade<sup>2</sup>

*National Research University "MPEI"<sup>1</sup>  
Russia. Moscow  
Riga Technical University<sup>2</sup>  
Latvia. Riga*

---

<sup>1</sup>Dr.Sci., Professor tel: +7(916)592-49-52; e-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)

<sup>2</sup>Doctoral student tel: +37128877852; e-mail: [karina.buka-vaivade@rtu.lv](mailto:karina.buka-vaivade@rtu.lv)

---

A model of statically determinate frames-truss and formulas for the calculation of its deflection under the action of various loads proposed. The model is determined by two natural parameters — the number of panels in the crossbar and the number of panels in vertical racks-trusses. A formulas dependency effort in the most dangerous rods under the load, number of panels, the elastic characteristics of the material and the size of the structure are obtained. Node displacements are calculated using the Maxwell-Mohr integral formula. The forces in the rods of the construction are calculated in symbolic form using the Maple symbolic mathematics system. The double induction method is used to generalize partial solutions to arbitrary numbers of panels.

**Keywords:** truss, frame, induction, analytical solution, Maple.

## ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА СОСТАВНОЙ ВНЕШНЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

А. С. Илюшин<sup>1</sup>

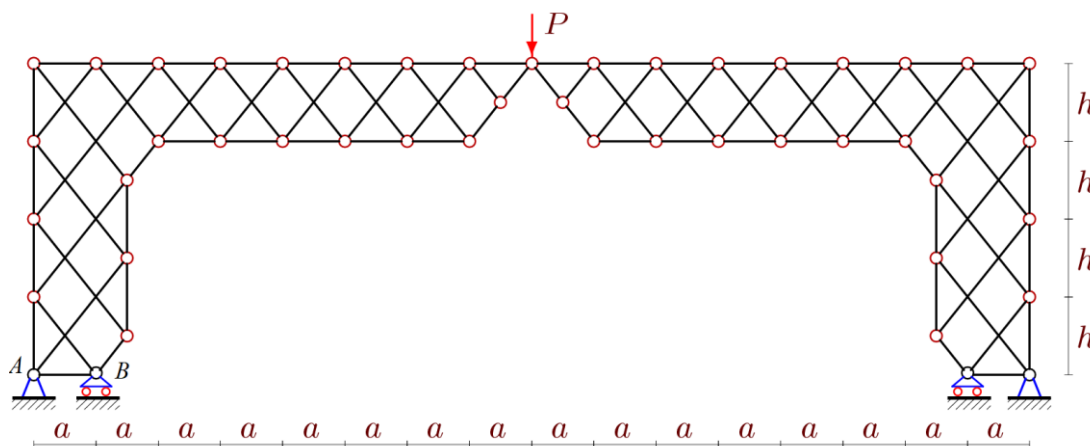
Национальный Исследовательский Университет "МЭИ"<sup>1</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup> Студент института тепловой и атомной энергетики, тел.: +7(915)004-55-91  
e-mail: ilyushin.as@yandex.ru

Для вывода формулы зависимости прогиба от числа панелей в ригеле использована система компьютерной математики Maple и метод индукции. Рама имеет четыре шарнирные опоры, две из которых являются неподвижными. Внешняя нагрузка приложена к сочленяющему шарниру. Найденная зависимость имеет полиномиальный характер. Получена асимптотика решения, имеющая квадратичный характер.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, индукция, Maple, точное решение.

Consider a composite lattice frame with a cross-shaped lattice and four supports (Fig. 1). The peculiarity of the support structures does not allow us to determine their reactions by the usual methods of mechanics from the equilibrium equation of the frame as a whole and its individual parts after breaking it into parts along the internal articulating joint. Support reactions in such “externally indefinable” structures are determined from solving the equilibrium equations of all nodes of the truss along with determining the forces in the rods. In this paper, the task is to obtain the exact formula for the dependence of the deflection of the truss on the number of panels in the cross-bar.



**Fig. 1.** Truss under load

To calculate the deflection of the frame (vertical movement of the articulating unit), a program for determining the forces in the rods of statically determined trusses is used, written in the language of the computer mathematics system Maple [1]. The method used to obtain the formula was previously used to calculate arched-type trusses [2–7], a series of trellised trusses [8–19], and regular-type spatial structures [20–29]. Analytical solutions for trusses that allow instantaneous variability were calculated in [30–33].

The induction method used in [34, 35] made it possible to obtain static ratios for scissor mechanisms. The calculation of the deflection of a flat statically determinate frame by the induction method was made in [36,37]. Analytical solutions for regular trusses such as Bolman or Fink were obtained in [38–42]. In [43], a decision was obtained on the deflection of the L-shaped bracket-truss for fixing street lighting or advertising. Surveys of works using the induction method for calculating trusses are contained in [44–46].

As a result of calculations of a number of trusses with different successively increasing number of panels, an expression is obtained for the deflection of the truss, which does not depend on the number of panels:

$$EF\Delta = P(Aa^3 + Bc^3 + Ch^3) / (2h^2), \quad (1)$$

where  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$  — length of short brace in crossbar. The constancy of the shape of the final solution for a different number of panels is a characteristic feature of *regular* designs [47,48]. All three coefficients depending on the number of panels were found using the induction method [8–14].

The **rgf\_findrecur** operator from the specialized **genfunc** package, according to the calculation of twelve farms, gives linear homogeneous recurrence equations of orders 6 and 5:

$$A_n = 2A_{n-1} + A_{n-2} - 4A_{n-3} + A_{n-4} + 2A_{n-5} - A_{n-6};$$

$$B_n = B_{n-1} + 2B_{n-2} - 2B_{n-3} - B_{n-4} + B_{n-5};$$

$$C_n = C_{n-1} + 2C_{n-2} - 2C_{n-3} - C_{n-4} + C_{n-5}.$$

Using the **rsolve** operator, we find solutions to these equations in the form of polynomials of the third and second order in the number of panels:

$$A = \frac{10n^3 + 66n^2 + 5n(19 - 3(-1)^n) - 39(-1)^n + 63}{48};$$

$$B = \frac{34n^2 + (38 + 14(-1)^n)n - 11(-1)^n + 43}{16};$$

$$C = \frac{4n^2 + 3n(1 + (-1)^n) - 2(-1)^n + 6}{2}.$$

The obtained solution (1) can easily be generalized to an arbitrary ratio of stiffnesses of rods of various lengths:

$$EF\Delta = P(A\gamma_a a^3 + B\gamma_b c^3 + C\gamma_c h^3) / (2h^2),$$

where the stiffness coefficients of the rods of the corresponding length are introduced:

$$EF_a = EF / \gamma_a; \quad EF_b = EF / \gamma_b; \quad EF_c = EF / \gamma_c.$$

The elastic modules of the rods are taken equal, and the cross-sectional areas vary with respect to a certain constant area F.

The found analytical dependence of the deflection on the number of panels and the size of the truss can be used as an estimate for the outline design of the truss or for testing numerical methods.

The curves in Fig. 2 are constructed according to formula (1) for the dimensionless relative deflection  $\Delta' = \Delta EF / (LP)$  with span length  $L = 100$  m. Panel length  $a$  depends on span:  $a = L / (2n + 5)$ . Height  $h$  indicated in meters.

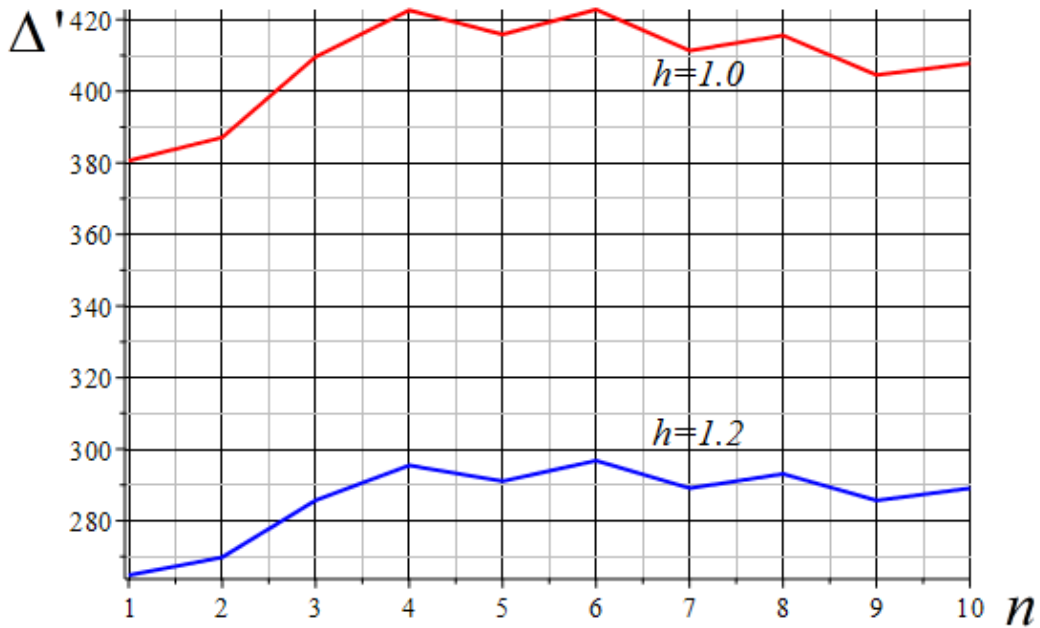


Fig. 2. Dependence of the deflection on the number of panels

Characterized by an increase in deflection with an increase in the number of panels to. Then the dependence takes on an oscillatory character, where the maximum replaces the minimum. For large numbers  $n$ , the curves have a parabolic shape. This follows from the limit obtained by Maple (limit operator) using the formula (1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n^2 = 33h / (8L).$$

A similar “sawtooth” dependence of the deflection on the number of panels was obtained in [15] for the frame (Fig. 3).

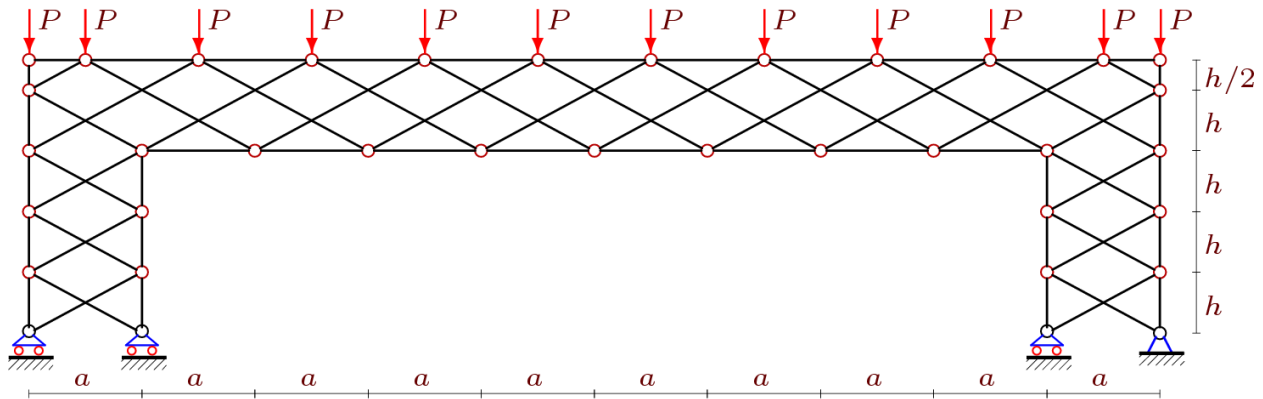


Fig. 3. Shaft externally statically indefinable frame [15]

The design of this frame and the one considered (Fig. 1) combines the type of lattice and the presence of external static indeterminacy. It is possible that this is precisely the reason for the step-wise dependence of the deflection on the number of panels. The practical use of the discovered fact of sharp changes in the rigidity of the frame when changing the number of panels may be in optimizing its design a reasonable choice of its parameters.

For the case of a load uniformly distributed over the upper zone (Fig. 4), the recurrence relations are complicated, their order increases, and the order of polynomials in the coefficients of equation (1) increases:

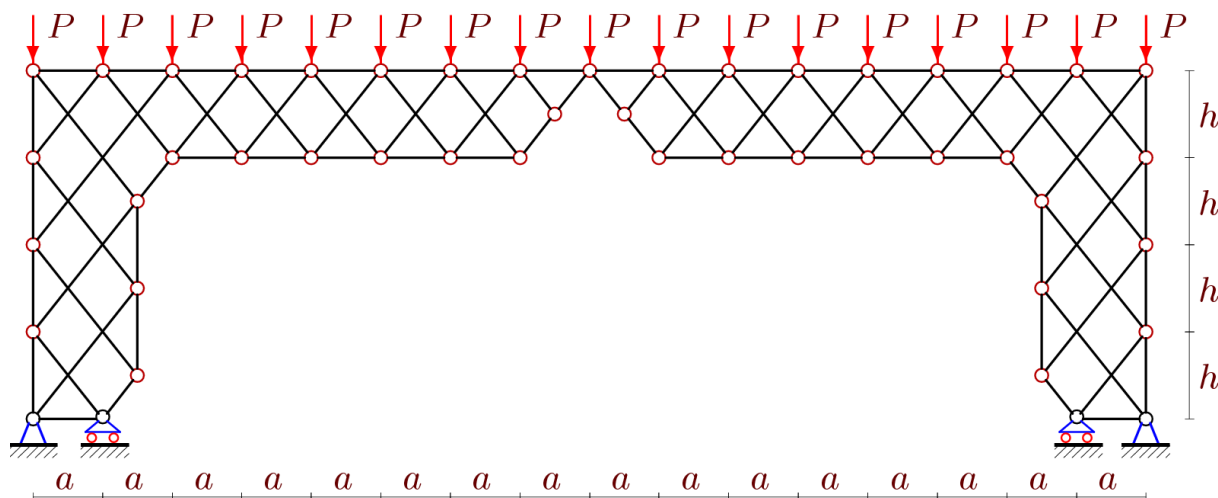


Fig. 4. Truss under the uniform load

$$A = \frac{8n^4 + ((-1)^n + 69)n^3 + (133 - 3(-1)^n)n^2 + (42 - 34(-1)^n)n - 60(-1)^n + 36}{24};$$

$$B = \frac{34n^3 + (7(-1)^n + 49)n^2 - (11(-1)^n + 69)n - 55(-1)^n + 7}{8};$$

$$C = \frac{(8n^3 + 3(3 + (-1)^n)n^2 - 4(3 + (-1)^n)n - 17(-1)^n + 17)}{2}.$$

The obtained dependencies can be used as estimates for the control of numerical calculations, where with an increase in the dimension of the system (increase in the number of panels), an increase in the error of the account is possible. In addition, the analytical form of the solution allows you to use it in optimization problems [49-51].

#### Библиографический список

1. Кирсанов М. Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. – 512 с.
2. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2015. - № 9 (36). - С. 44-55.
3. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2018. Т. 14. - № 1. - С. 64-70.
4. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2015. - № 3 (31). - С. 42-48.
5. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. – 2018. Т. 1. - № 16. - С. 7-11.



6. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2018. - №4 (67). - С. 86-94. doi: 10.18720/CUBS.67.7.
7. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. – 2017. - № 9. - С. 8-10.
8. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. – 2018. - №4(279). - С.10-14.
9. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. - № 6 (257). - С. 2-6.
10. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. - № 3. - С. 23-27.
11. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "Butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. - № 4 (267). - С. 2-5.
12. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. – 2017. Т. 78. - № 4. - С. 20-23.
13. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. - № 3 (260). - С. 7-12.
14. М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. – 2017. - № 5. - С. 11-13.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет рамы с произвольным числом панелей // Инженерно-строительный журнал. – 2018. - №6(82). - С. 127–135. doi: 10.18720/MSE.82.
16. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. – 2017. - № 11 (248). - С. 32-36.
17. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет регулярной балочной фермы с произвольным числом панелей со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. - № 3 (266). - С. 16-19.
18. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. – 2017. Т. 5. - № 2. - С. 122-125.
19. Кирсанов М.Н., Горбунова А.С., Лепетюха В.А. Расчет прогиба симметричной фермы с решеткой "Star" в аналитической форме // Строительная механика и конструкции. – 2017. Т. 1. - № 14. - С. 36-41.
20. Кирсанов М.Н. Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей // Строительная механика и конструкции. – 2018. - №4(19). - С. 52-57.
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. – 2012. - № 5. - С. 5-8.
22. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. – 2015. - № 1 (53). - С. 32-38.
23. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. – 2011. - № 6 (24). - С. 28-34.
24. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2016. - № 1 (41). - С. 93-100.
25. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. – 2014. - С. 239-242.
26. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. – 2016. - № 5 (268). - С. 19-22.

27. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012. - № 1. - С. 49-53.
28. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. – 2014. Т. 4. - № 2 (20). - С. 36-39.
29. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. – 2018. Т. 13. - № 5 (116). - С. 579-586.
30. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. – 2012. - № 3 (242). - С. 48-51.
31. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. – 2017. Т. 1. - № 14. - С. 27-30.
32. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. – 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3.
33. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. – 2017. Т. 2. - № 15. - С. 5-10.
34. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет параллелограммного механизма с произвольным числом секций // Вестник машиностроения. – 2018. - № 1. - С. 37-39.
35. Кийко Л.К., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет подъемника параллелограммного типа с произвольным числом секций // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2016. - № 3. - С. 48-53.
36. Кирсанов М.Н. Расчетная модель плоской фермы рамного типа с произвольным числом панелей // Вестник МГСУ. – 2018. Т. 13. Вып. 9. - С. 1184–1192. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.10.1184-1192.
37. Кирсанов М.Н. Формулы для прогиба шарнирно-стержневой рамы с произвольным числом панелей в ригеле и опорах // Строительная механика и расчет сооружений. – 2019. №4. С. 31-36.
38. Пережилова Е.Д. Точное решение задачи о смещении подвижной опоры фермы с произвольным числом панелей // Научный альманах. – 2016. - № 9-2(23). - С. 42-45.
39. Харик С.А. Индуктивный метод для расчета прогиба плоской статически определимой фермы, загруженной в середине пролета // Научный альманах. – 2016. - № 11-2(25). - С. 332-334.
40. Васильченко Д.И. Формула для смещения опоры балочной фермы типа Больмана // Научный альманах. – 2016. - N 8-1(22). - С. 261-263.
41. Савиных А.С. Формула для расчета смещения подвижной опоры плоской статически определимой фермы // Научный альманах. – 2016. - № 9-2(23). - С. 46-49.
42. Васильков И.Д., Кирсанов М.Н. Формулы для определения прогиба и смещения опоры фермы Больмана с произвольным числом панелей // Научный альманах. 2016. - N11-2(25). - С. 289-292.
43. Кирсанов М.Н. Расчет Г-образной фермы крепления дорожных знаков и оборудования / М.Н. Кирсанов // Научный журнал строительства и архитектуры. – 2019. - № 1 (53). - С. 84-92. - DOI: 10.25987/VSTU.2019.53.1.008.

44. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. – 2015. - №5(57). - С. 66–73.
45. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа// Строительная механика и конструкции. – 2018. - №. 1. - С.12-33.
46. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. – 2017. - №12
47. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. 85, No. 9. P.607 – 617.
48. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2006 Vol.54, No. 4, P. 756-782.
49. Lei H., Zhu X., Chen H., Fan H., Chen M., Fang D. Macroscopic response of carbon-fiber pyramidal truss core panel taking account of local defect // Composites Part B: Engineering, –2015. Vol.79, N 15. 2015.– P. 311-321.
50. Richardson J.N., Coelho R.F., Adriaenssens S. Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: A multiobjective perspective // Computers & Structures. –2015. –Vol. 154. N 1.– P. 41-47.
51. Biegus A. Trapezoidal sheet as a bracing preventing flat trusses from out-of-plane buckling // Archives of Civil and Mechanical Engineering. –2015. Vol. 15, No. 3, –P. 735-741.

#### References

1. Kirsanov M. N. Maple i Maplet. Resheniya zadach mekhaniki. SPb.: Izd-vo Lan', 2012. – 512 s.
2. Kirsanov M.N. Sravnitel'nyj analiz zhestkosti dvuh skhem arochnoj fermy. Stroitel'stvo unikal'nyh zdaniy i sooruzhenij. 2015. - № 9 (36). - P. 44-55.
3. Kirsanov M.N. Induktivnyj analiz deformacii arochnoj fermy. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol.14. - № 1. - P.64-70.
4. Kirsanov M.N. Analiticheskoe issledovanie deformacij ploskoj fermy arochnogo tipa. Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2015. - № 3 (31). - P. 42-48.
5. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba arochnoj fermy. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2018. Vol.1. - № 16. - P. 7-11.
6. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta deformacij arochnoj fermy s proizvol'nym chislom panelej. Stroitel'stvo unikal'nyh zdaniy i sooruzhenij. 2018. - №4 (67). - P. 86-94. doi: 10.18720/CUBS.67.7.
7. Kirsanov M.N. Analiticheskaya ocenka progiba i usilij v kriticheskikh sterzhnyah arochnoj fermy. Transportnoe stroitel'stvo. 2017. - № 9. - P. 8-10.
8. Kirsanov M.N., Moskvina V.G. Deformacii ploskoj fermy s usilennoj reshetkoj. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2018. - №4(279). - P.10-14.
9. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet mnogoreshetchatoj fermy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2014. - № 6 (257). - P. 2-6.
10. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoj fermy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2017. - № 3. - P. 23-27.
11. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet balochnoj fermy s reshetkoj tipa "Butterfly". Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2016. - № 4 (267). - P. 2-5.

12. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usilij v reshetchatoj ferme//Mekhanizaciya stroitel'stva. 2017. Vol.78. - № 4. - P. 20-23.
13. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet balochnoj fermy so slozhnoj reshetkoj. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2015. - № 3 (260). - P. 7-12.
14. Kirsanov M.N. Analiticheskij metod rascheta progiba ploskoj fermy so slozhnoj reshetkoj shprengel'nogo tipa. Transportnoe stroitel'stvo. 2017. - № 5. - P. 11-13.
15. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet ramy s proizvol'nym chislom panelej. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2018. - №6(82). - P. 127–135. doi: 10.18720/MCE.82.
16. Kirsanov M.N. Sticheseskij raschet ploskoj fermy s dvojnoj treugol'noj reshetkoj. Spravochnik. Inzhenernyj zhurnal s prilozheniem. 2017. - № 11 (248). - P. 32-36.
17. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet reguljarnoj balochnoj fermy s proizvol'nym chislom panelej so slozhnoj reshetkoj. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2016. - № 3 (266). - P. 16-19.
18. Belyankin N.A., Bojko A.YU., Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet progiba balochnoj fermy s usilennoj treugol'noj reshetkoj. Stroitel'stvo i arhitektura. 2017. Vol.5. - № 2. - P. 122-125.
19. Kirsanov M.N., Gorbunova A.S., Lepetyuha V.A. Raschet progiba simmetrichnoj fermy s reshetkoj "Star" v analiticheskoj forme. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2017. Vol.1. - № 14. - P. 36-41.
20. Kirsanov M.N. Analiz zavisimosti progiba fermy pryamougol'nogo pokrytiya ot chisla panelej. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2018. - №4(19). - C. 52-57.
21. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet i optimizaciya prostranstvennoj balochnoj fermy. Vestnik Moskovskogo energeticheskogo instituta. 2012. - № 5. - P. 5-8.
22. Kirsanov M.N. Analiz progiba fermy pryamougol'nogo prostranstvennogo pokrytiya. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2015. - № 1 (53). - P. 32-38.
23. Kirsanov M.N. Sticheseskij raschet i analiz prostranstvennoj sterzhnevoj sistemy. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2011. - № 6 (24). - P. 28-34.
24. Kirsanov M.N. Napryazhennoe sostoyanie i deformacii pryamougol'nogo prostranstvennogo sterzhneвого pokrytiya. Nauchnyj vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo arhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Stroitel'stvo i arhitektura. 2016. - № 1 (41). - P. 93-100.
25. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet i analiz prostranstvennoj sterzhnevoj konstrukcii v sisteme Maple. V sbornike: Informatizaciya inzhenernogo obrazovaniya INFORINO-2014 Trudy mezhdunarodnoj nauchno-metodicheskoy konferencii. 2014. - P. 239-242.
26. Kirsanov M.N. Ocenka progiba i ustojchivosti prostranstvennoj balochnoj fermy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2016. - № 5 (268). - P. 19-22.
27. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet prostranstvennoj sterzhnevoj sistemy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij. 2012. - № 1. - P. 49-53.
28. Kirsanov M.N. Uchet stroitel'nogo pod"ema v analiticheskom raschete prostranstvennoj balochnoj fermy. Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI. 2014. Vol.4. - № 2 (20). - P. 36-39.
29. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet progiba prostranstvennogo pryamougol'nogo pokrytiya. Vestnik MGSU. 2018. Vol.13. - № 5 (116). - P. 579-586.
30. Kirsanov M.N. Raschet prostranstvennoj sterzhnevoj sistemy, dopuskayushchej mgnovennuyu izmenyaemost'. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2012. - № 3 (242). - P. 48-51.
31. Kirsanov M.N. Vyvod formuly dlya progiba reshetchatoj fermy, imeyushchej sluchai kinematicheskoy izmenyaemosti. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2017. Vol.1. - № 14. - S. 27-30.

32. Kirsanov M.N., Tin'kov D.V. Analiticheskoe reshenie zadachi o chastote kolebaniya gruzha v proizvol'nom uzle balochnoj fermy v sisteme Maple. Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie. 2018. Vol.8. Vyp. 4. St. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3.
33. Kirsanov M.N. Formula dlya progiba i analiz kinemacheskoy izmenyaemosti reshetchatoj fermy. Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2017. Vol.2. - № 15. - S. 5-10.
34. Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet parallelogrammnogo mekhanizma s proizvol'nym chislom sekcij. Vestnik mashinostroeniya. 2018. - № 1. - S. 37-39.
35. Kijko L.K., Kirsanov M.N. Analiticheskij raschet pod"emnika parallelogrammnogo tipa s proizvol'nym chislom sekcij. Problemy mashinostroeniya i avtomatizacii. 2016. - № 3. - S. 48-53.
36. Kirsanov M.N. Raschetnaya model' ploskoj fermy ramnogo tipa s proizvol'nym chislom panelej. Vestnik MGSU. 2018. Vol.13. Vyp. 9. - S. 1184–1192. DOI: 10.22227/1997-0935.2018.10.1184-1192.
37. Kirsanov M.N. Formuly dlya progiba sharnirno-sterzhnevoj rami s proizvol'nym chislom panelej v rigele i oporah. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzhenij. 2019. №4. S. 31-36.
38. Perezhilova E.D. Tochnoe reshenie zadachi o smeshchenii podvizhnoj opory fermy s proizvol'nym chislom panelej. Nauchnyj al'manah. 2016. - № 9-2(23). - S. 42-45.
39. Harik S.A. Induktivnyj metod dlya rascheta progiba ploskoj staticheski opredelimoj fermy, zagruzhennoj v seredine proleta. Nauchnyj al'manah. 2016. - № 11-2(25). - S. 332-334.
40. Vasil'chenko D.I. Formula dlya smeshcheniya opory balochnoj fermy tipa Bol'mana. Science Almanace. 2016. - N 8-1(22). - S. 261-263.
41. Savinyh A.S. Formula dlya rascheta smeshcheniya podvizhnoj opory ploskoj staticheski opredelimoj fermy. Nauchnyj al'manah. 2016. - № 9-2(23). - S. 46-49.
42. Vasil'kov I.D., Kirsanov M.N. Formuly dlya opredeleniya progiba i smeshcheniya opory fermy Bol'mana s proizvol'nym chislom panelej. Nauchnyj al'manah. 2016. - N11-2(25). - S. 289-292.
43. Kirsanov M.N. Raschet G-obraznoj fermy krepleniya dorozhnyh znakov i oborudovaniya / M.N. Kirsanov. Nauchnyj zhurnal stroitel'stva i arhitektury. 2019. - № 1 (53). - S. 84-92. - DOI: 10.25987/VSTU.2019.53.1.008.
44. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyj analiz analiticheskikh reshenij zadachi o progibe fermennyh konstrukcij. Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. 2015. - №5(57). - S. 66–73.
45. Osadchenko N.V. Analiticheskie resheniya zadach o progibe ploskih ferm arochnogo tipa// Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2018. - №. 1. - S.12-33.
46. Osadchenko N.V. Raschyot progiba ploskoj nerazreznoj staticheski opredelimoj fermy s dvumya prolyotami. Postulat. 2017. - №12.
47. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. ZAMM Z. Angew. Math. Mech. – 2005. 85, No. 9. – P. 607 – 617.
48. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. Journal of the Mechanics and Physics of Solids.– 2006. Vol. 54, Issue 4, P. 756-782.
49. Lei H., Zhu X., Chen H., Fan H., Chen M., Fang D. Macroscopic response of carbon-fiber pyramidal truss core panel taking account of local defect. Composites Part B: Engineering.– 2015. – Vol.79, N 15.– P. 311-321.
50. Richardson J.N., Coelho R.F., Adriaenssens S. Robust topology optimization of truss structures with random loading and material properties: A multiobjective perspective. Computers & Structures.– 2015. Vol. 154. N 1. P. 41-47.
51. Biegus A. Trapezoidal sheet as a bracing preventing flat trusses from out-of-plane buckling. Archives of Civil and Mechanical Engineering. – 2015. Vol. 15, No. 3., P. 735-741.

# THE FORMULA FOR CALCULATING THE DEFLECTION OF A COMPOUND EXTERNALLY STATICALLY INDETERMINATE FRAME

A.S. Ilyushin<sup>1</sup>

National Research University «MPEI»<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Student of Institute of Thermal and Nuclear Power Engineering, ph.: +7(915)0045591  
e-mail: ilyushin.as@yandex.ru

---

Using a computer mathematics system and induction method, a formula is derived for the dependence of the deflection of a flat rod frame of a composite type, based on four articulated supports, two of which are movable. The external load is the vertical concentrated load in the articulated joint. It is shown that the dependence of the deflection on the number of panels in the crossbar is polynomial. The asymptotic behavior of the solution is obtained, which has a quadratic character.

**Keywords:** truss, deflection, induction, Maple, exact solution.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.26

## ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ПОВРЕЖДЕННОЙ ДВУТАВРОВОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ МОСТОВОЙ БАЛКИ

В.С. Сафронов<sup>1</sup>, А. В. Антипов<sup>2</sup>, А. В. Хаустов<sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,3</sup>

ООО «Дортранспроект»<sup>2</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф., профессор кафедры строительной механики., тел.: +7 (473) 2715230

e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

<sup>2</sup> Ведущий инженер

<sup>3</sup> Магистрант кафедры строительной механики

---

Описывается методика и её апробация для расчета надёжности поврежденной в результате удара кузовом проезжающего грузового автомобиля крайней железобетонной предварительно напряженной двутавровой балки пролетного строения автодорожного путепровода. Приводится схема расположения трещин, одна из которых является сквозной магистральной и проходит практически по всей длине стенки ребра. Детерминированный и вероятностный расчет выполняются, исходя из предельных или катастрофических состояний характерных сечений балки в середине пролета по изгибающему моменту и вблизи опоры по поперечной силе. Максимальные расчетные усилия определяются из пространственного статического расчета по конечно-элементной расчетной схеме ослабленной трещинами несущей крайней балки пролетного строения. Вероятностная методика базируется на приближенной модели учета прочности бетона и рабочей арматуры, также параметров постоянных и временных нагрузок в соответствии с нормальным законом распределения. Приводятся результаты численных исследований надежности поврежденной балки. Изучаются зависимости логарифмических показателей риска разрушения от флуктуации прочности бетона и продольной арматуры и действующих нагрузок.

**Ключевые слова:** железобетонный путепровод, балочное пролетное строение, поврежденная двутавровая балка, продольная сквозная трещина, предельные состояния, вероятностная оценка надёжности, логарифмический показатель риска разрушения, разброс прочности материалов и нагрузок.

### Введение

Транспортные сооружения на автомобильных дорогах часто подвергаются механическим воздействиям со стороны проезжающего транспорта. Возникающие при этом повреждения весьма разнообразны и могут существенно снижать безопасность проезда. Для расчетной оценки влияния повреждений на грузоподъемность поврежденных транспортных сооружений обычно применяют положения действующих нормативных документов, которые в своей основе используют детерминированные подходы. Более адекватные действительным параметрам поврежденных конструкций дают вероятностные представления с определением численных характеристик, применяемых в теории надежности [1-2] и в теории риска [3].

Такие расчетные модели рассматриваемых сооружений имеют в своей основе вероятностные описания прочностных характеристик материалов [4-6] и действующих нагрузок [7-10] в виде случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения с заданными средними значениями и среднеквадратическими отклонениями. Используя современные алгоритмы, применяемые в теории рисков [11-12], для оценки вероятности преде-

---

© Сафронов В. С., Антипов А. В., Хаустов А. В., 2019

льных в катастрофические состояния железобетонных конструкций с дефектами и повреждениями, можно делать обоснованные проектные и управленческие решения по назначению временных режимов эксплуатации или вывода из дорожной инфраструктуры поврежденных транспортных сооружений.

В настоящем исследовании на примере подвергнувшегося ударному воздействию от проезжавшего под путепроводом грузового автомобиля железобетонного путепровода предлагается и апробируется вероятностная методика расчета надежности поврежденной двутавровой предварительно напряженной крайней балки пролетного строения. Предлагаемая методика рассматривает возможность образования в поврежденной балке двух предельных состояний в среднем и опорном сечениях.

### **1. Краткое описание объекта исследования и произошедшего транспортного происшествия**

Объектом изучения является железобетонный балочный путепровод на транспортной развязке в двух уровнях в пересечении автомагистрали М-2 «Крым» с автодорогой Ясногорск – Н. Клейменово на км 149+000 автомагистрали М-2 «Крым».

Путепровод над автомобильной дорогой М-2 «Крым» построен в 1993 году по проекту института Союздорпроект, г. Москва под временные нагрузки А11 и НК-80.

В плане путепровод находится на прямой, в профиле - на одностороннем подъеме в сторону н.п. Н. Клейменово. Косина путепровода - 15°.

Под путепроводом проходит автодорога М-2 «Крым». В получившем повреждение пролете № 2 путепровода расположены полосы движения направлением на Москву. Подпутепроводный габарит составляет 5,31 м.

Мостовое полотно путепровода общей шириной 22,06 м состоит из четырехполосной проезжей части шириной 4×3,75 м, полос безопасности шириной 2,0 м и тротуаров шириной 0,85 м с обеих сторон.

Ограждение на путепровode барьерное высотой 1,10 м, шириной 0,41 м, шаг стоек 3,0 м, энергоемкость 160 кДж.

В настоящее время путепровод имеет четырехпролетную, балочную температурно-неразрезную конструкцию по схеме /18,0+33,0//33,0+18,0/, полной длиной 107,95 м. Габарит моста Г15,50 + 2×0,85 м.

Пролетные строения путепровода - балочные сборные железобетонные температурно-неразрезные полной длиной 18 м в пролетах 1 и 4 и 33 м высотой 1,50 м в пролетах № 2 и № 3. Пролетные строения в поперечном сечении состоят из девяти предварительно напряженных железобетонных балок двутаврового сечения по типовому проекту серии 3.503.1-81 инв. №1318, Союздорпроект, 1988 г. Поперечная схема пролетов: К1,15+8×2,44+К1,13.

Поперечное объединение балок осуществлено по продольным швам омоноличивания.

Опираение балок пролетных строений на ригели крайних и промежуточных опор осуществлено через резино-слоистые опорные части..

При проезде со скоростью 43 км/час под путепроводом трехосного автомобиля-самосвала ВОЛЬВО ФМ Трек с поднятым кузовом произошло столкновение автомобиля с крайней балкой в пролете № 2 пролётного строения путепровода, в результате которого крайняя балка Б1 получила повреждения в стенке и втуловой части балки в середине пролета. В результате деформирования балки от ударного воздействия в верхней и нижней зонах стенки возникли трещины с распространением на половину длины разрезного пролета пролетного строения поврежденного путепровода (рис. 1-2).





**Рис. 1.** Фрагмент путепровода в зоне повреждения пролета 2



**Рис. 2.** Магистральная продольная трещина в средней части крайней балки

## 2. Характеристика повреждений несущей крайне балки пролетного строения

При осмотре всех конструкций путепровода через 7 дней после ударного воздействия в августе 2019 года определено, что повреждению подверглись только пролетные строения в пролете № 2 путепровода. Другие конструкции путепровода не затронуты. Наибольшему ударному воздействию подверглась крайняя балка Б1 (см. рис. 1-2). Некоторые следы воздействия видны также в средней части балки Б3 того же пролетного строения путепровода, однако заметных разрушений на этой балке не отмечено.

В результате деформирования балки Б1 от ударного воздействия в верхней и нижней зонах стенки на фасаде стенки со стороны московского подхода возникли две продольные магистральные трещины с распространением на практически половину длины пролета (рис. 3). Верхняя трещина, расположенная вблизи сопряжения стенки балки с плитой проезжей части пролетного строения, является сквозной. Она просматривается с внутренней стороны крайней балки Б1. На рис. 2 показан фрагмент верхней магистральной трещины, ширина раскрытия которой колеблется от 8 до 12 мм.

В нижней зоне стенки вблизи сопряжения стенки с вутом (уширенным ребром) несущей крайней балки видна также продольная магистральная трещина, которая распространяется примерно на половину длины всей балки (рис. 3). В отличие от верхней трещины нижняя магистральная трещина имеет меньшую ширину раскрытия и характеризуется выколами бетона по краям трещины, которые свидетельствуют о разрушении от превышающих прочностные характеристики бетона от сжимающих напряжений.

В средней зоне вутовой части крайней балки имеются разрушения поверхностного слоя бетона на площади около 1,5 м<sup>2</sup> с оголением рабочей ненапряженной арматуры и поперечных хомутов (см. рис. 1). В этой зоне не наблюдается обнажений от ударного воздействия пучковой напрягаемой арматуры.

На внутренней стороне крайней балки Б1 также имеются две продольные магистральные трещины (рис. 3). Верхняя расположена вблизи сопряжения стенки балки с плитой и распространяется практически по всей длине балки. Её внешний вид отвечает признакам разрушения бетона от сжатия. Нижняя трещина, которая не достигает торцевых зон на 5-6 м, возникла от растягивающих напряжений и достигает ширины раскрытия до 6-8 мм.

По концевым участкам поврежденной балки магистральные трещины отклоняются от горизонтальных волокон балки и пересекают вутовую часть балки в зонах, расположенных на расстоянии 8-10 м от опор ОП2 и ОП3. В этих местах характерны небольшие ширины их раскрытия от 1 до 2 мм (рис. 3), однако здесь также имеются разрушения поверхностных слоев бетона с оголением ненапрягаемой арматуры. Повреждений напрягаемой арматуры здесь также не наблюдается.

Специальному осмотру при обследовании технического состояния поврежденной балки Б1 в том же пролете № 2 были подвергнуты концевые участки, где находятся анкерные устройства пучковой предварительно напряженной арматуры. В момент ударного воздействия вследствие закручивания ребра балки Б1 в пучках арматуры могли произойти кратковременные выбросы усилий, которые превышают допустимые для анкеров значения. Осмотр показал, что в концевом участке балки над опорой ОП3 признаки предельного состояния анкеров отсутствуют. На противоположном конце той же балки, расположенном над опорой ОП2, нет полной сохранности бетона вокруг анкерных устройств. Защитный слой бетона на торце балки покрыт сеткой трещин. После удаления отслоившихся кусков бетона явных признаков разрушения концевого участка балки не обнаружено.

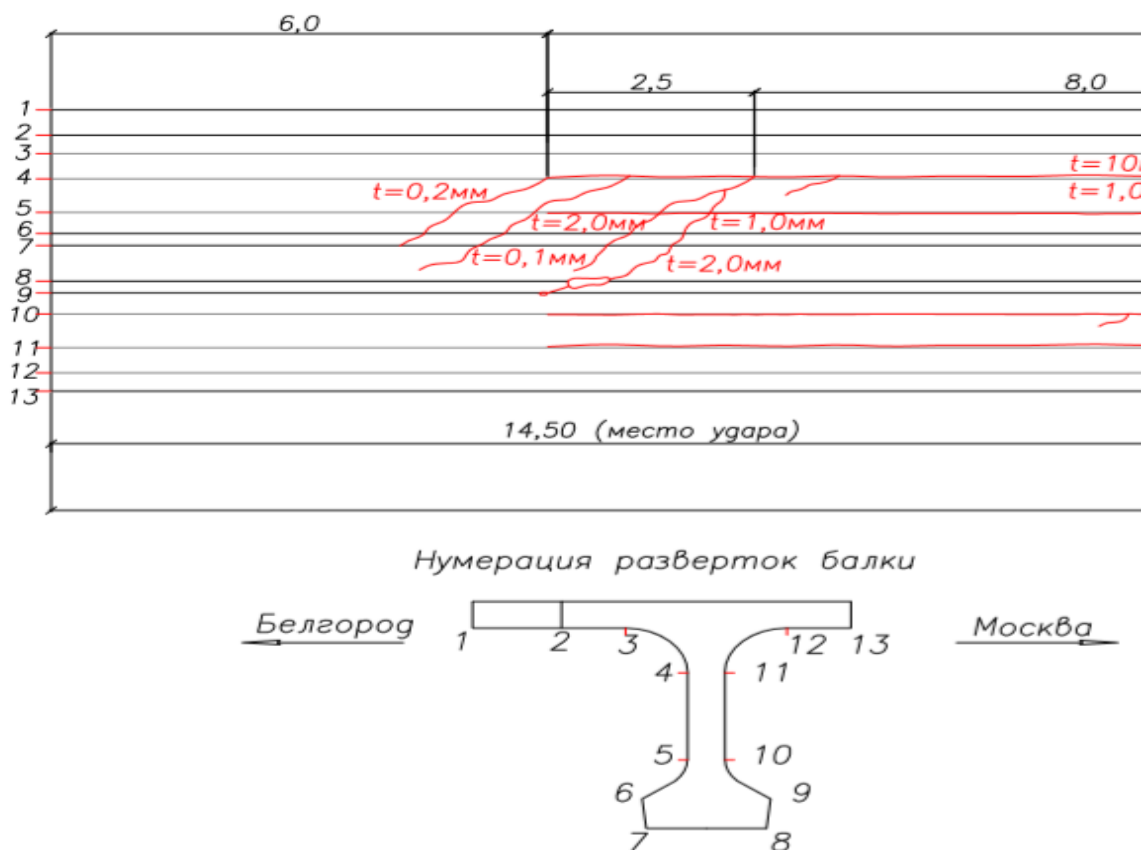


Рис. 3. Схема расположения трещин на балке Б1 пролета № 2

Для оценки стабильности установившегося после ударного воздействия технического состояния балок поврежденного пролета производилась нивелировка балок пролетных строений для определения имеющихся строительных подъёмов или провисаний, которые косвенно характеризуют сохранение усилий предварительного натяжения. Результаты измерений через неделю (28. 02. 2019 г) и через две недели (2. 03. 2019г.) после ударного воздействия представлены иже в таблице. Там же для сопоставления приведены такие данные, полученные при обследовании путепровода в 2013 году.

Таблица

Сопоставление строительных подъемов и провисаний балки Б1 в середине пролета 2 пролетного строения путепровода до и после ударного воздействия

№ п/п	Номер балки в пролете 2 путепровода	Провисания (с плюсом) или строительные подъёмы (с минусом) в мм				
		Измерения в 2013 году	26.02.2019 После ударного воздействия	Изменение по сравнению с 2013 годом	2.03.2019 Повторное измерение	Изменение по сравнению с 2013 годом
1	Балка Б1	-32	-12,5	+19,5	-20	+13
2	Балка Б2	+11	+20	+9	+19	+8
3	Балка Б3	-27	-12,5	+14,5	-18	+9

№ п/п	Номер балки в пролете № 2 путепровода	Провисания (с плюсом) или строительные подъёмы (с минусом) в мм				
		Измерения в 2013 году	26.02.2019 После ударного воздействия	Изменение по сравнению 2013 годом	2.03.2019 Повторное измерение	Изменение по сравнению 2013 годом
4	Балка Б4	+34	+32,5	+1,5	+46	+12
5	Балка Б5	+7	+8	+1	+21	+14
6	Балка Б6	+20	+23,5	+3,5	+20	0
7	Балка Б7	-19	-19	0	-19	0
8	Балка Б8	-4	-8,5	-3,5	+9	+13
9	Балка Б9	-48	-48,5	-0,5	-39	+9

Анализ приведенных в таблице данных нивелировки по нижним поверхностям всех балок пролетного строения в пролете № 2 путепровода приводит к следующим выводам:

- через одну неделю после ударного воздействия в трех балках пролетного строения Б1-Б3, расположенных вблизи места ударного воздействия, произошли провисания от 9 до 29 мм. В остальных балках пролетного строения в пролете 2 - Б4-Б9 имевшиеся в 2013 году провисания и строительные подъёмы практически сохранились. По нашим оценкам, это свидетельствует о снижении усилий предварительного натяжения в пучках ориентировочно на 20-25 %;

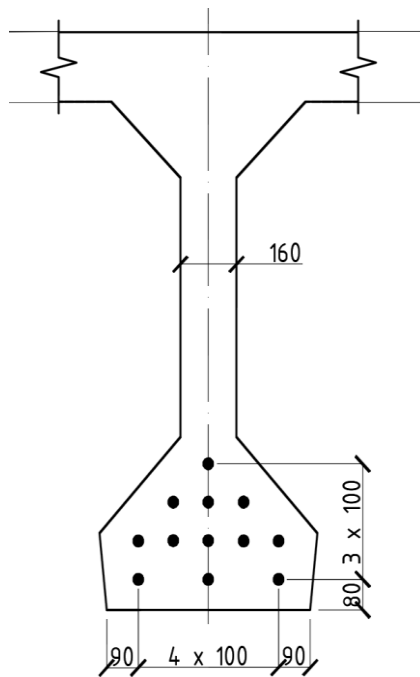
- через две недели после ударного воздействия почти во всех балках пролетного строения, исключая крайние балки Б1, Б2 и Б3, увеличились провисания или уменьшились строительные подъёмы в среднем на 10 мм. Не изменились при этом также строительные подъёмы в балках Б6 и Б7. Это свидетельствует о том, что стабилизация несущей способности на этот момент не закончилась;

- измерения по нижним поясам всех балок в последующие четыре недели выявили полную стабилизацию балок в пролете № 2 путепровода, что дает основание приступить к выполнению усиления поврежденных балок.

### 3. Прочностные расчеты поврежденных балок пролетного строения в детерминированной постановке

Для выполнения прочностных расчетов поврежденной балки рассматривались два характерных сечения в середине пролета и в месте ближайшего к опоре расположения вершины сквозной магистральной трещины. Для определения максимальных усилий в этих сечениях использовалась учитывающая расположение сквозных трещин пластинчатая конечно-элементная расчетная схема балки, для которой временные нагрузки устанавливались в наиболее опасное положение. Для среднего сечения крайней балки Б1 определялись максимальные изгибающие моменты, для расположенного вблизи вершины сквозной трещины сечения балки – максимальные поперечные силы. Учет перераспределения усилий при выполнении пространственных расчетов осуществлялся путем корректировки жесткостных характеристик поврежденных участков.

Для среднего сечения поврежденной железобетонной балки, где пучковая арматура размещена в вутовой части (рис. 4) принимался бетон балок класса В40 по прочности с параметрами:  $R_b = 20,0$  МПа,  $R_{bt} = 1,25$  МПа,  $E = 36000$  МПа. Напрягаемая арматура ребер балок пучковая из 24-х высокопрочных проволок  $\varnothing 5$  мм класса В-II с параметрами:  $R_p = 1055$  МПа,  $E = 190000$  МПа. Балки в средних сечениях армированы 12 горизонтальными пучками.



**Рис. 4.** Расположение предварительно напряженной арматуры в втуловой части балки

Предельное значение изгибающего момента, вычисленное по нормативным положениям при расчете прочности при изгибе, оказалось равным проектной величине для этой балки:  $M_{пред} = 754$  КНм, так как влияние сквозной трещины не является значимым при сохранении верхней и нижней втуловой частей балки.

Сравнивая с вычисленным также максимальным изгибающим моментом в поврежденной балке  $M_{пред} = 699$  КНм, можно сделать вывод об имеющихся резервах прочности этого сечения, непосредственно подвергшегося ударному воздействию

При выполнении прочностного расчета для приопорного сечения балки введем допущение о предельном состоянии поврежденной стенки по наклонному сечению, для которого несущая способность равна

$$Q_{пред} = \sum R_{sw} A_{sw} + Q_b,$$

(1)

где  $\sum R_{sw} A_{sw}$  – суммы проекций усилий всей пересекаемой ненапрягаемой арматуры при длине проекции сечения, с;  $R_{sw}$  – расчетное сопротивление ненапрягаемой арматуры с учетом коэффициента  $m_{a4} = 0,8$ ;  $Q_b$  – поперечное усилие, передаваемое в расчёте на бетон сжатой зоны над концом наклонного сечения.

Для дефектной крайней балки в предельном состоянии имеющиеся сквозные горизонтальные трещины в ребре получают значительное развитие и фактически по горизонтали разделят балку на две части: верхнюю и нижнюю.

Армирование стенки крайней балки рассматриваемого пролетного строения представлено в виде двух арматурных сеток, расположенных вблизи наружных поверхностей (рис. 5). Для крайней дефектной балки в предельном состоянии наибольшие скалывающие напряжения  $\tau_q$  достигнут предельной величины  $R_{b,sh}$ , поэтому коэффициент условий работы принят равным

$$m = 1,3 + 0,4 \cdot (R_{b,sh} / \tau_q - 1) = 1,3. \quad (2)$$

Кроме того, для дефектной крайней балки с учётом характера расположения сквозных трещин в ребре в предельном состоянии уменьшится рабочая высота сечения, по нашим оценкам, до  $h_0 = 45$  см.

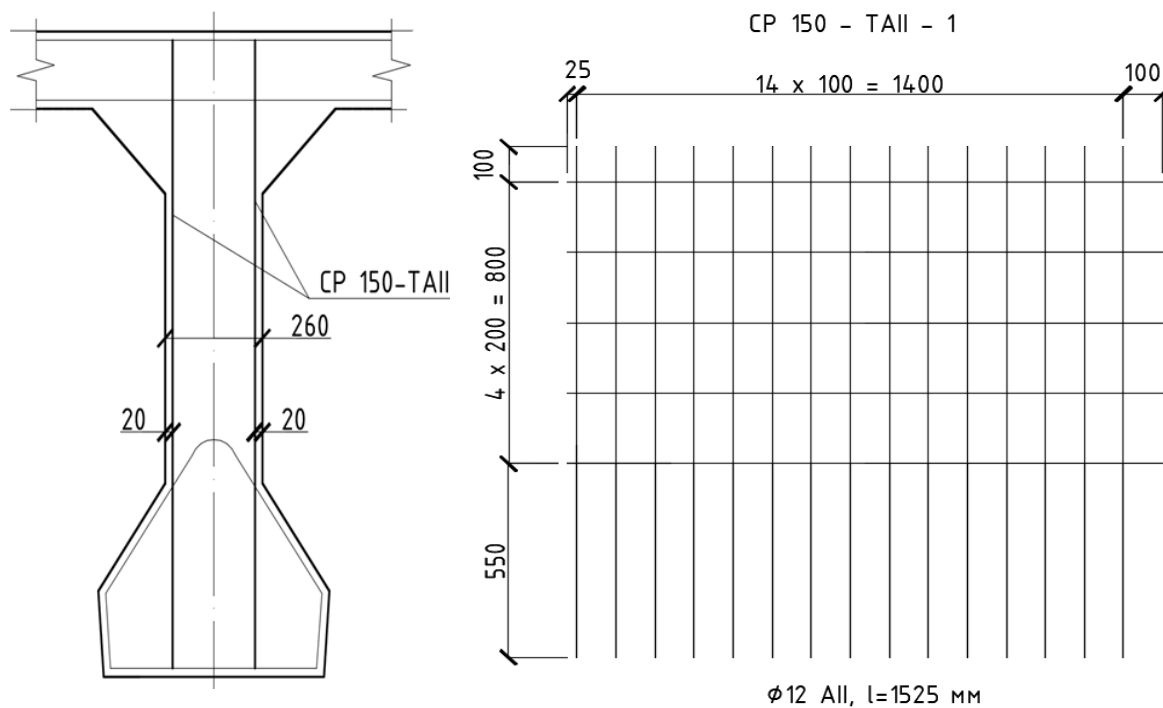


Рис. 5. Армирование стенки крайней балки вблизи опорного сечения

В расчетах в соответствии с описанной методикой и следующими параметрами армирования стенки:

- расстояние от узла опирания до конца наклонного сечения  $s=1,37$  м;
- ненапрягаемые вертикальные хомуты 2  $\text{Ø}12$  А-II;
- площадь поперечного сечения хомута  $A_{sw}=2,26$  см<sup>2</sup>;
- число хомутов, пересекаемых наклонным сечением  $n=11$ ;
- шаг хомутов 10 см,

получено, что действующая от проектной нагрузки А11 максимальная поперечная сила  $Q_{\max}=120$  кН превышает предельную величину  $Q_{\text{пред}}=80$  кН, которая может восприниматься поврежденной стенкой балки. Поэтому для продолжения безопасной эксплуатации путепровода необходимо либо ограничить временные нагрузки, или выполнить усиление поврежденной балки.

#### 4. Основные положения методики и результаты количественной оценки параметров, оценивающих надежность характерных сечений поврежденной балки

Для определения количественных параметров риска разрушения поврежденной балки путепровода определяется вероятность разрушения в характерных сечениях поврежденной балки с использованием положений теории надежности и теории риска [1- 4]. При

этом рассматриваются в вероятностной постановке появление катастрофических состояний, аналогичных рассмотренным выше в детерминированной постановке предельным состояниям поврежденной балки в среднем сечении от действия изгибающего момента и в приопорном наклонном сечении от действия поперечной силы. В отличие от детерминированной методики здесь при описании прочностных характеристик материалов принимаются не расчетные, а нормативные сопротивления материалов. Так для определения математических ожиданий прочностных характеристик материалов применим допущение о 95-процентной обеспеченности нормативных сопротивлений бетона  $R_{bn}$  или арматуры  $R_{sn}$ :

$$m_R = \frac{R_{bn}(R_{sn})}{1-1.64 \cdot \nu_R} \quad (3)$$

а стандарты прочности материалов вычислим через регламентируемые государством коэффициенты вариации прочности  $\nu_R$  по формуле

$$\sigma_R = m_R \cdot \nu_R \quad (4)$$

Статистические параметры действующих нагрузок для использования в вероятностных расчетах определялись через расчетные значения нагрузок  $S_{pi}$ , коэффициенты надежности по нагрузкам  $\gamma_{fi}$  и коэффициентам вариации  $\nu_S$  из следующих выражений:

математические ожидания нагрузок  $i$ -го типа:  $m_{si} = \frac{S_{pi}}{\gamma_{fi}}$ , (5)

стандарты нагрузок  $i$ -го типа:  $\sigma_{si} = m_{si} \cdot \frac{\gamma_{fi}-1}{1.64}$ , (6)

суммарные математические ожидания нагрузок:  $m_s = m_{s1} + m_{s2} + \dots + m_{sn}$ , (7)

стандарты суммарных нагрузок:  $\sigma_s = \sqrt{\sigma_{s1}^2 + \sigma_{s2}^2 + \dots + \sigma_{sn}^2}$ . (8)

Полученные статистические характеристики прочности и нагрузок используются для вычисления параметров, оценивающих вероятность риска разрушения поврежденной балки при пропуске расчетных временных нагрузок А11 и НК-80:

- характеристика безопасности:

$$\beta = \frac{(m_{S_{пред}} - m_{S_{max}})}{\sqrt{\sigma_{S_{пред}}^2 + \sigma_{S_{max}}^2}}; \quad (9)$$

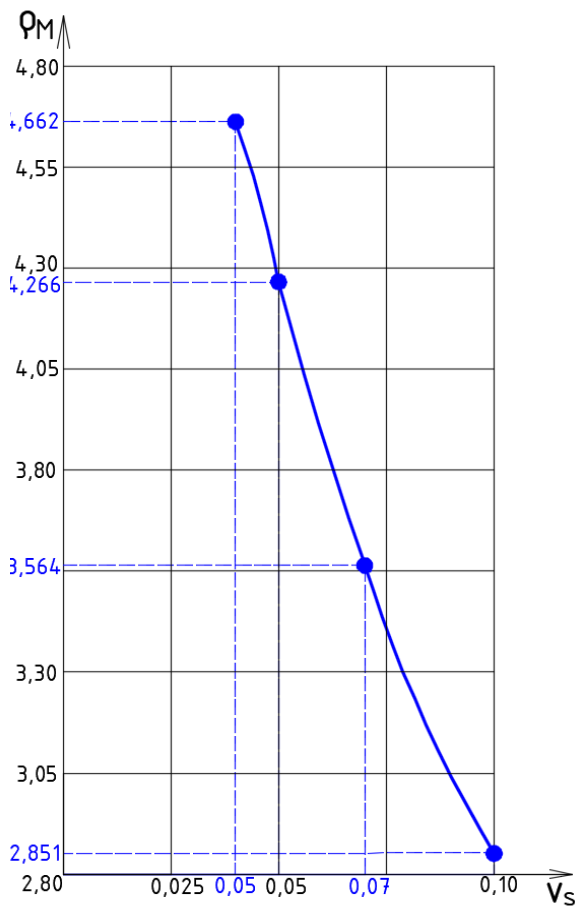
- вероятность катастрофического состояния:  $Q = 0,5 - \Phi(\beta)$ , (10)

где  $\Phi(\beta)$  – функция Лапласа,  $\Phi(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_0^\beta e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ; (11)

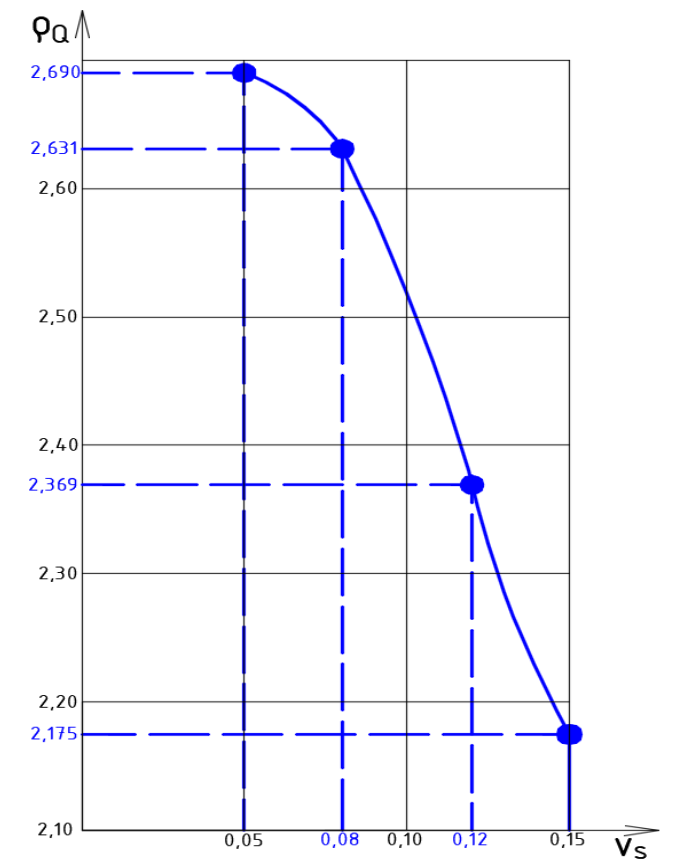
- логарифмический показатель риска возникновения катастрофического состояния в характерных сечениях поврежденной конструкции:

$$\rho = -\lg(1 / Q) \quad (12)$$

Описанная выше вероятностная методика оценки использовалась при оценке риска разрушения поврежденной балки путепровода. При этом варьировались коэффициенты вариации прочностных характеристик рабочей арматуры. Графики зависимости логарифмического показателя риска разрушения в характерных сечениях железобетонной двутавровой балки с трещинами от коэффициента вариации рабочей арматуры в вутовой части или стенке приведены соответственно на рис. 6 и 7.



**Рис. 6.** График зависимости логарифмического показателя риска разрушения нормального сечения балки в середине пролета от коэффициента вариации пучковой арматуры



**Рис. 7.** График зависимости логарифмического показателя риска разрушения по наклонным сечениям стенки балки вблизи опоры от коэффициента вариации поперечной арматуры

Результаты численных расчетов, представленные на приведенных графиках, показывают, что риски разрушения стенки и втуловой части поврежденной балки различаются весьма существенно. При нормативных значениях коэффициентов для пучковой арматуры и стержневой поперечной арматуры, составляющих соответственно 0,05 и 0,08 риски разрушения балки в втуловой части и в стенке, равные соответственно  $Q_{\text{вута}}=10^{-4,266}$  и  $Q_{\text{стенки}}=10^{-2,631}$ , отличаются в 43 раза, однако скорость возрастания риска от увеличения разброса прочностных характеристик арматуры для втуловой части балки выше.

### Выводы

Предложенная вероятностная методика расчета риска разрушения поврежденных железобетонных мостовых балок, которая построена на учитывающих случайные разбросы прочностных характеристик материалов и действующих нагрузок, апробирована при оценке возможности продолжения временной эксплуатации поврежденного эксплуатируемого транспортного сооружения.



По результатам численных вероятностных расчетов с учетом регламентируемых действующими нормативными документами параметров разброса прочностных характеристик материалов и действующих нагрузок получены важные для практических выводов сопоставительные оценки часто возникающих повреждений расположенных над автодорогами железобетонных многобалочных путепроводов с предварительно напряженной арматурой.

Доказана предпочтительность использования по сравнению с рекомендуемым действующими нормативными документами прочностными детерминированными расчетами предлагаемой вероятностной методики оценки несущей способности поврежденных мостовых балок, так как она является более чувствительной и позволяет более обоснованно разрабатывать проектные решения по установлению режимов временной безопасной эксплуатации.

#### Библиографический список

1. Райзер, В. Д. Теория надежности сооружений/ В.Д. Райзер. – М.: АСВ, 2010. – 252 с.
2. Перельмутер, А. В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций// А. В. Перельмутер. –Киев: УкрНИИпроектстальконструкция, 2000. – 216 с.
3. Сеницын, А. П. Расчет конструкций на основе теории риска/ А. П. Сеницын. –М.: Стройиздат, 1885. – 304с.
4. Сафронов, В. С. Надежность усиленного накладной плитой плитного пролетного строения автодорожного моста/ В. С. Сафронов, А. В. Черников, А. В. Антипов, Н. В. Сафронов, А. С. Суханов // Строительная механика и конструкции. - 2017. - Т. 2. - № 15. - С. 85-94.
5. Сафронов, В. С. Современные конечно-элементные модели балочных бездиафрагменных пролетных строений автодорожных мостов/ В. С. Сафронов, А. В. Антипов// Строительная механика и конструкции. -2013. -№ 1. -С. 92-101.
6. Сафронов, В. С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных мостов, имеющих дефекты и повреждения / В. С. Сафронов, А. А. Петранин, Е. Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. -1996. -№ 6. -С. 103-109.
7. Сафронов, В. С. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой/ В. С. Сафронов, С. Д. Степанов, А. А. Петранин, Е. Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. -1998. - № 11-12.- С. 31-35.
8. Сафронов, В. С. Деформационный расчет составных изгибаемых железобетонных стержневых элементов / В. С. Сафронов, А. В.Черников// Строительная механика и конструкции. -2018. - Т. 3. - № 18. - С. 81-92.
9. Сафронов, В. С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок/ В. С. Сафронов, Нгуен Динь Хоа// Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2010. -№1(17). – С. 152-166
10. Сафронов, В. С. Прочностной анализ несущих конструкций висячего трубопровода через реку Оку в г. Орле/В.С. Сафронов, Ю.А Суханова//Строительная механика и конструкции. -2010. -Т. 1. - № 1. - С. 61-66.

11. Сафронов, В. С. Оценка риска разрушения нормальных сечений железобетонных балок произвольной формы/ В. С. Сафронов, Д. И. Доманов// Механика разрушения бетонов, железобетонов и других строительных материалов: сб. ст. по материалам 7-й междуна-родн. научн. конф.: в двух томах. – 2013. - С. 31-38.
12. Сафронов, В. С. Применение теории риска для оценки вероятности трещинообразова-ния при стесненном кручении железобетонных мостовых балок/ В. С. Сафронов, Д. А. Доманов // Строительная механика и конструкции. – 2013. - Вып. 2(7). – С. 47-52.

#### References

1. Perelmuter A.V. Selected problems of reliability and safety of building structures. Kiev: UkrNIIProektstalkonstruksiya, 2000. 216 p.
2. Raiser V.D. The theory of reliability of structures. M.: DIA, 2010. 252 p.
3. Sinitsyn A.P. Structural Calculations based on risk theory. M.: Stroyizdat, 1885304 p.
4. Safronov V.S., Chernikov A.V., Antipov A.V., Safronov N.V., Sukhanov A.S. Reliability of a road bridge reinforced with an overlay plate of a slab span structure of a highway bridge. Construction mechanics and structures. Vol. 2. No. 15. 2017. Pp. 85-94.
5. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern finite element models of beam bridges without road diaphragm structures of road bridges. Building mechanics and structures. No. 1. 2013. Pp. 92-101.
6. Safronov V.S., Petranin A.A., Petrenya E.N. Super element calculation in mixed formula- tion of reinforced concrete bridges with defects and damage. Proceedings of higher educational institutions. Construction. No. 6. 1996. Pp. 103-109.
7. Safronov V.S., Chernikov A.V. Deformation calculation of composite bending reinforced concrete core elements. Construction mechanics and constructions. Vol. 3. No. 18. 2018. Pp. 81-92.
8. Safronov V.S., Stepanov S.D., Petranin A.A., Petrenya E.N. Algorithm for calculating re- constructed slab-beam structures reinforced with a slab. Proceedings of higher educational institutions. Construction. No. 11-12. 1998. Pp. 31-35.
9. Safronov V.S., Nguyen Dinh Hoa. Probabilistic assessment of the risk of limiting states in sections of flexible concrete beams. Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture. No. 1 (17). 2010. Pp. 152-166.
10. Safronov V.S., Sukhanova Yu.A. Strength analysis of supporting structures of the hanging pipe- line across the Oka river in the town of Orel. Building mechanics and structures. Vol. 1. No. 1. 2010. Pp. 61-66.
11. Safronov V.S., Domanov D.I. Assessment of the risk of destruction of normal sections of rein- forced concrete beams of arbitrary shape. Mechanics of destruction of concrete, reinforced con- crete and other building materials: Sat. Art. Based on materials of the 7th international scientific Conference (in two volumes). 2013. Pp. 31-38.
12. Safronov V.S., Domanov D.I. The use of risk theory to estimate the probability of crack for- mation under constrained torsion of reinforced concrete beams. Construction mechanics and structures. Vol. 2 (7). 2013. Pp. 47-52.

# PROBABILISTIC ASSESSMENT OF THE BEARING CAPACITY OF A DAMAGED STEEL-CONCRETE BRIDGE FLANGED BEAM

V. S. Safronov<sup>1</sup>, A. V. Antipov<sup>2</sup>, A. V. Chaustov<sup>3</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,3</sup>

Dortransproekt LLC<sup>2</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> Dr. of Technical Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7 (473) 2715230,  
e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

<sup>2</sup> Senior Engineer

<sup>3</sup> MA Student of the Department of Structural Mechanics

---

The methodology and its testing are described for calculating the reliability of an extreme reinforced concrete pre-stressed double-tee beam damaged by a body of a passing truck by a span of a road overpass. A crack arrangement is presented, one of which is through the trunk and runs along almost the entire length of the rib wall. A deterministic and probabilistic calculation is performed based on the limiting states of the beam cross-sections in the middle of the bending moment and near the support along with the lateral force. The maximum design forces are determined from the spatial static calculation according to the finite element design scheme of the beam weakened by cracks.

The probabilistic technique is based on representations of the strength characteristics of concrete and working reinforcement, as well as parameters of constant and temporary loads in accordance with the normal distribution law.

The results of numerical studies of the reliability of a damaged beam are presented. The dependences of the logarithmic reliability indices are studied depending on the variation in the strength of concrete and longitudinal reinforcement and current loads.

**Keywords:** reinforced concrete overpass, beam span, damaged flanged beam, longitudinal through crack, limit states, probabilistic reliability assessment, logarithmic reliability indicator, variation in the strength of materials and loads.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.046:624.21

## ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО РАСЧЁТА ПЛИТНО-БАЛОЧНЫХ СИСТЕМ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В МОСТОСТРОЕНИИ

Д. М. Шапиро<sup>1</sup>, А. Я. Сухарева<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики; тел.: +7(473) 271-52-30; e-mail: [davshap@mail.ru](mailto:davshap@mail.ru)

<sup>2</sup> Магистр техники и технологий, асс. кафедры строительной механики; тел.: +7(910) 432-18-35;  
e-mail: [arina.sukhareva95@gmail.com](mailto:arina.sukhareva95@gmail.com)

Содержится описание инженерного метода нелинейного расчёта железобетонных плитно-балочных систем на примере разрезных пролётных строений мостовых сооружений. Для расчётов принимается пространственная расчётная схема МКЭ, состоящая из плитных конечных элементов (КЭ) с тремя степенями свободы в узле и стержневых КЭ с шестью степенями свободы в узле, заменяющих плиту и балки пролётного строения. Временные нормируемые вертикальные нагрузки по схемам АК и НК заменяются эквивалентными полосами, соответствующими наибольшим изгибающим моментам во всех сечениях балочных пролётных строений. В расчётах используются приведенные геометрические характеристики сечений балок, определяемые в соответствии с условиями гипотезы плоских сечений и допущением о деформировании бетона при растяжении без сопротивления. Нелинейная упругопластическая задача решается по итерационной процедуре метода упругих решений. В качестве невязки силы используются линейные нагрузки, приложенные к продольным осям балок. Приводится пример расчёта.

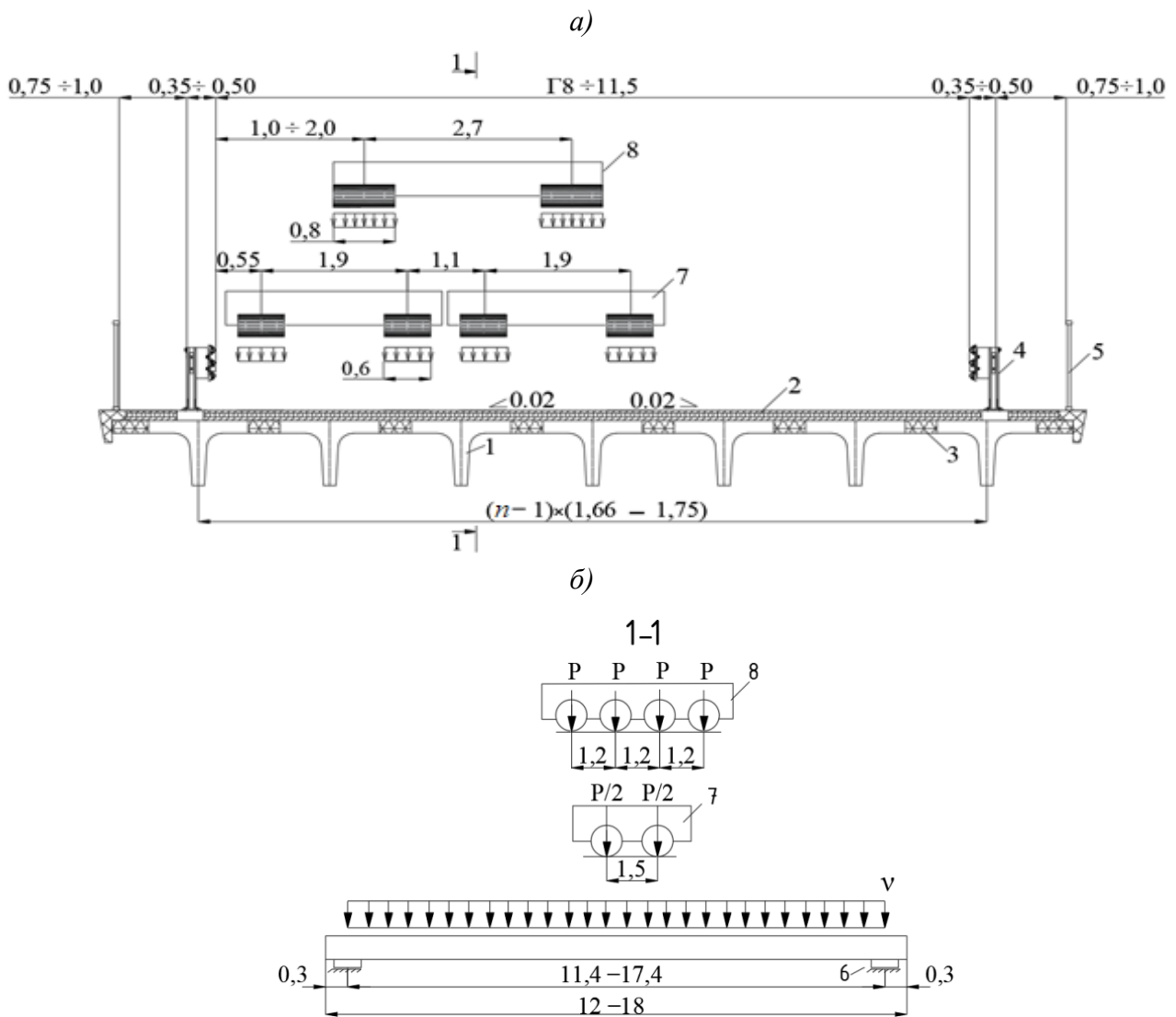
**Ключевые слова:** железобетонные плитно-балочные пролётные строения, эквивалентная полосовая нагрузка, метод конечных элементов, метод упругих решений.

### Введение

В современном строительстве широко применяются железобетонные плитно-балочные конструкции с неравномерным распределением нагрузок между балками. Наиболее известным примером таких систем являются железобетонные разрезные пролётные строения автодорожных и городских мостов, собираемые из балок таврового и двутаврового сечений длиной до 33 м (рис. 1).

При проектировании и оценках грузоподъёмности мостовых сооружений используются условные нормируемые (назначенные по результатам специальных исследований) вертикальные нагрузки по схемам АК и НК (рис. 1), заменяющие транспортные средства (колонны автомобилей и одиночные экипажи), допущенные к движению на автомобильных дорогах. Технические описания нагрузок АК и НК, указания по их расположению на проезжей части, коэффициенты надёжности, сочетаний, динамические коэффициенты содержатся в межгосударственных стандартах ГОСТ 32960-2014, ГОСТ 33390-2015 и своде правил СП 35.13330.2011 (СНиП 2.05.03-84\*). Схемы (в том числе геометрические размеры) нагрузок АК и НК впервые введены в 1984 г. и с тех пор не меняются. Меняется класс нагрузок  $K$ , под которым понимается множитель к физическим параметрам: 1,0 кН/м, 10 кН – к интенсивности полосовой нагрузки и нагрузке на ось тележки нагрузки АК; 18 кН – к нагрузке на ось четырёхосного экипажа НК. Класс нагрузок в 1984 г. был установлен в размере  $K=11$ , в 2007 г. увеличен (для вновь строящихся объектов) до  $K=14$ . При оценках грузоподъёмности эксплуатируемых пролётных строений расчётный класс нагрузок может отличаться от проектного.

© Шапиро Д. М., Сухарева А. Я., 2019



**Рис. 1.** Сечение плитно-балочного пролётного строения и схемы нагрузок АК и НК с размерами, м:

1 – балка таврового сечения, 2 – многослойная дорожная одежда, 3 – продольный шов омоноличивания, 4 – металлические барьерные ограждения, 5 – металлические перила, 6 – резинометаллические опорные части, 7 – автомобильная нагрузка АК, состоящая из полосы с интенсивностью  $v=1,0$  К (кН/М) и двухосной тележки с нагрузкой на ось  $P=10$ К (кН), 8 – тяжёлая колёсная нагрузка НК с нагрузкой на ось  $P=18$ К (кН);  
 $n$  – число балок в пролётном строении

Из изложенного следует, что пролётные строения мостов, построенные 20–40 лет назад, фактически пропускают более тяжёлые временные вертикальные нагрузки, чем предусмотренные проектами. Это положение применимо к недавно построенным, строящимся и проектируемым мостовым сооружениям, если увеличение нормируемых нагрузок продолжится в будущем. Кроме того, периодически по мостовым сооружениям санкционированно пропускаются сверхпроектные нагрузки, требующие выполнения индивидуальных контрольных расчётов.

По условиям эксплуатации временные нагрузки могут занимать разные расчётные положения на проезжей части. При каждом таком положении распределение усилий между балками является неравномерным с одной или двумя наиболее нагруженными балками. В технических расчётах с использованием линейных расчётных схем в пролётном строении определяются невыгоднейшие положения временных нагрузок, при которых выделяется од-

на наиболее (экстремально) нагруженная балка. По расчётным усилиям в этой балке при проектировании назначается армирование всех балок или оценивается несущая способность эксплуатируемого пролётного строения.

Темой настоящей статьи является продолжение исследований, направленных на вскрытие резервов несущей способности железобетонных пролётных строений, объясняющее их способность пропускать сверхпроектные нагрузки в определяемых расчётом размерах. В предыдущих исследованиях [4–14] пространственные задачи, относящиеся к рассматриваемой теме, решались теоретически строго с использованием деформационной модели с трёхлинейными диаграммами состояния бетона и арматуры (в соответствии с СП 63.13330.2011) и математических процедур методов «последовательных приближений» и Ньютона - Рафсона [3].

В настоящей статье задача нелинейного расчёта железобетонных плитно-балочных пролётных строений с обычным армированием решается упрощённо, но с достаточной теоретической строгостью, методом «упругих решений» [3] с использованием билинейных диаграмм соотношений «кривизна изгиба балок – изгибающий момент».

**Эквивалентная полосовая нагрузка.** При практическом применении инженерного метода расчёта железобетонных плитно-балочных пролётных строений удобно использовать замену расчётных нагрузок по схемам на рис. 1 эквивалентными полосовыми нагрузками. На расчётных схемах пролётного строения эквивалентные погонные нагрузки с интенсивностью  $q$ , заменяющие одну полосу АК и тяжёлую четырёхосную нагрузку НК, изображаются двумя лентами в соответствии со схемами на рис. 2, б, в. На рис. 2, г изображены диаграммы зависимостей расчётных параметров (соотношений)  $q/K$  (кН/м) от расчётной длины пролёта  $l$  для нагрузок АК и НК для треугольных линий влияния.

Интенсивность  $q$  эквивалентных нагрузок незначительно изменяется в зависимости от положения (по длине расчётного пролёта) вершин треугольных линий влияния с установленными над ними (вершинами) сосредоточенных грузов: тележки АК и четырёхосной нагрузки НК.

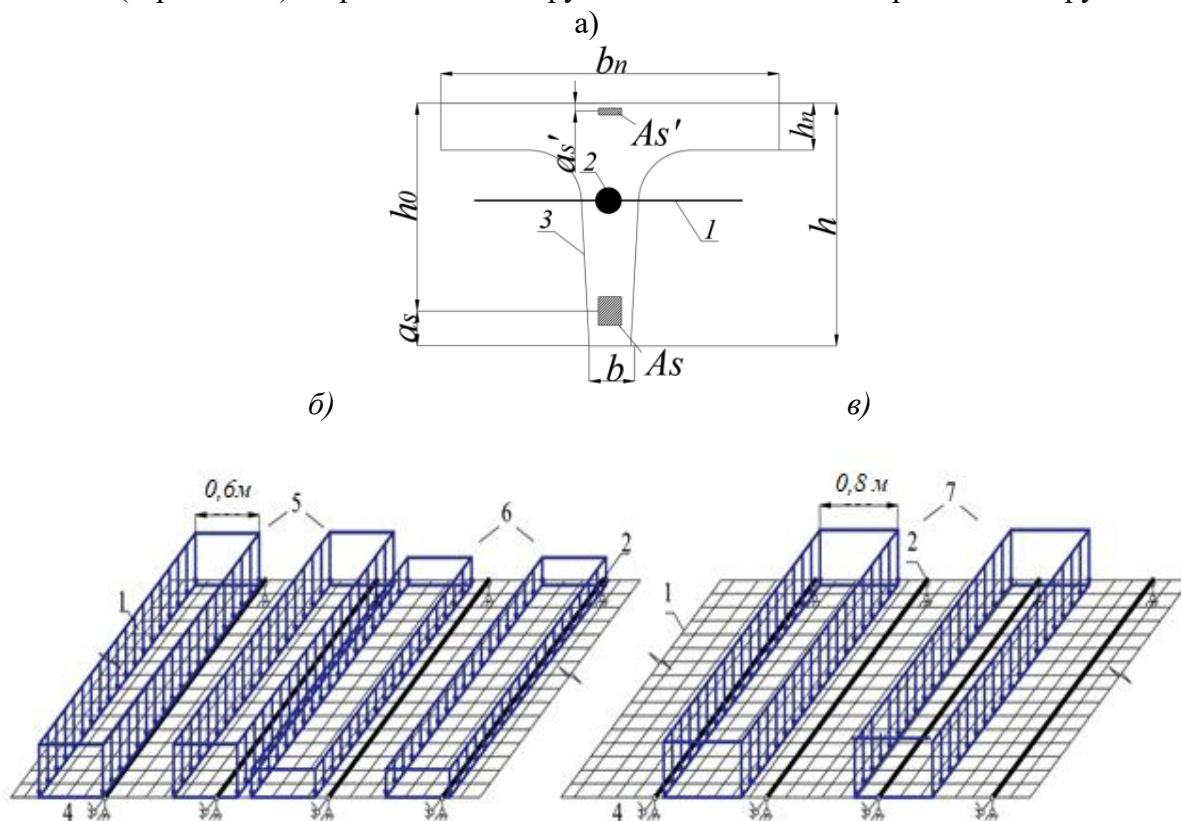
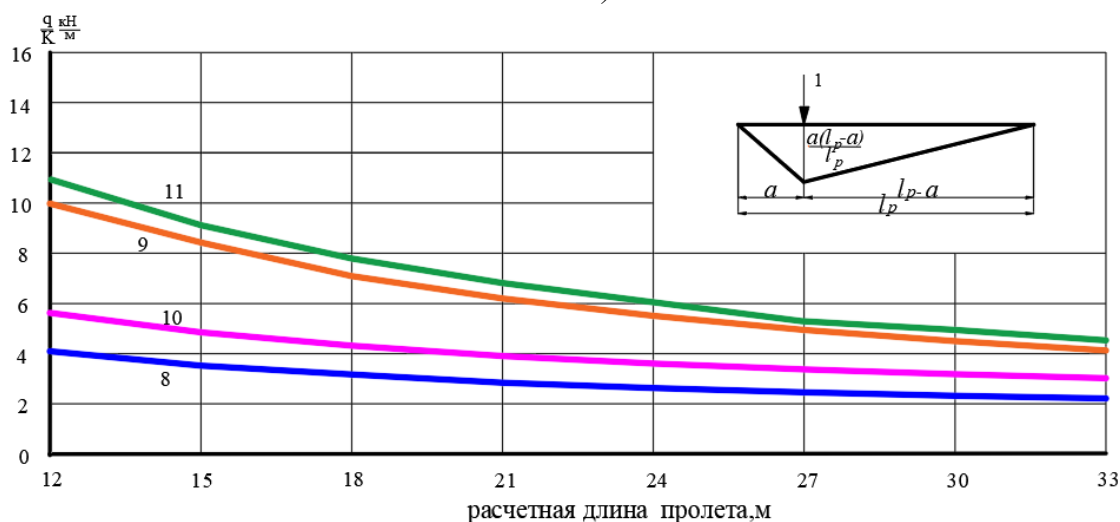


Рис. 2 (начало). Плитно-стержневая расчётная схема МКЭ

з)



**Рис. 2 (окончание).** Плитно-стержневая расчётная схема МКЭ:

$a$  – расчётная схема балки;  $b, в$  – расчётная схема пролётного строения с условными полосовыми нагрузками, заменяющими нагрузки АК и НК;  $з$  – диаграммы зависимостей соотношений  $q/K$  от длины расчётного пролёта  $l$ ;  $l$  – конечные элементы плиты;  $2$  – стержневой конечный элемент, моделирующий балку;  $3$  – контур балки пролётного строения;  $4$  – узлы опирания балок на опорные части;  $5$  – полосовая условная нагрузка АК с коэффициентом сочетаний  $\psi=1,0$ ;  $6$  – полосовая условная нагрузка АК с коэффициентом  $\psi=0,6$ ;  $7$  – полосовая условная нагрузка НК;  $8-11$  – зависимости  $q/K=f(l)$ : нормативная нагрузка АК, нормативная нагрузка НК, расчётная нагрузка АК (без динамического коэффициента), расчётная нагрузка НК

Из этого следует, что эпюры расчётных моментов от эквивалентных нагрузок  $q$ , определённых при помощи расчётных параметров  $q/K$ , являются объёмлющими, определяющими наибольшие суммарные моменты от временных вертикальных нагрузок во всех сечениях балочных пролётных строений. Однократно пропускаемые индивидуальные нагрузки также могут заменяться эквивалентными полосовыми для выполнения контрольных расчётов и сравнения с проектными аналогами.

**Описание инженерного метода.** Рассматриваемая научно-техническая задача решается средствами метода конечных элементов (МКЭ). Для расчётов принимается пространственная расчётная схема (см. рис. 2,  $a, б, в$ ), состоящая из плитных конечных элементов (КЭ) с тремя степенями свободы в узле и стержневых КЭ с шестью степенями свободы в узле, заменяющих плиту и балки пролётного строения.

Постоянные нагрузки (вес балок и конструкций мостового полотна на ширине плиты каждой балки) действуют в виде вертикальных линейных полос, приложенных к стержням, моделирующим балки. Временные вертикальные нагрузки прикладываются к плитным КЭ в виде полос в соответствии со схемами на рис. 2,  $б, в$ .

На стадии линейного деформирования (при напряжениях в бетоне  $\sigma_b \leq R_b$  и арматуре  $\sigma_s \leq R_s$ , где  $R_b$  и  $R_s$  – соответствующие расчётные сопротивления) в расчёте используются геометрические характеристики сечений балок, определяемые в соответствии с условиями гипотезы плоских сечений и допущением о деформировании бетона при растяжении без сопротивления. Приведенный момент инерции  $I_{red}$  и высота  $x$  сжатой зоны сечений балок определяется по следующим известным формулам [2]:

$$I_{red} = \frac{1}{3} b_n x^3 - \frac{1}{3} (b_n - b) (x - h_n)^3 + n A_s (h_0 - x)^2 + n A'_s (x - a'_s)^2, \quad (1)$$

$$x = -\frac{n(A_s + A'_s) + (b_n - b)h_n}{b} + \sqrt{\frac{[n(A_s + A'_s) + (b_n - b)h_n]^2}{b^2} + \frac{h_n^2(b_n - b) + 2n(A_s h_0 + A'_s a'_s)}{b}}, \quad (2)$$

где  $b, b_n, h_0, h_n$  – геометрические размеры сечения на рис. 2,  $a; A_s, A'_s$  – площади сечения растянутой и сжатой арматуры,  $n$  – отношение модулей упругости арматуры и бетона.

В расчёте определяются предельные изгибающие моменты  $M_{пред}$ , соответствующие исчерпанию несущей способности балок, и «граничные» изгибающие моменты  $M_{зр}$ , соответствующие пределу линейного деформирования сечений перед началом пластического течения бетона ( $\sigma_b = R_b$ ) на сжатой грани сечения или рабочей арматуры  $\sigma_s = R_s$  [1].

Исследование [1], а также наши расчёты показали, что для балок с обычным армированием по типовым проектам разных лет значения  $M_{зр}$  и  $M_{пред}$  близки между собой. Изгибные жёсткости сечений, определяемые как произведения  $E_b I_{ред}$  ( $E_b$  – модуль упругости бетона) и  $M_{пред} / (1/\rho)$ , где

$$1/\rho = \frac{\frac{R_b}{E_b} + \frac{R_s}{E_s}}{h_0 - x}, \quad (3)$$

где  $x$  – высота сжатой зоны сечения при  $M_{пред}$ , отличаются не более, чем на 10–15 %.

Изложенное выше позволяет считать, что железобетонные балки исследуемых конструкций (при принятых условиях деформирования) изгибаются с постоянной изгибной жёсткостью  $E_b I_{ред}$  при расчётных моментах  $M_{расч} < M_{пред}$  до образования пластических шарниров в сечениях, где  $M_{расч} = M_{пред}$ .

Нелинейная упругопластическая задача решается по итерационной процедуре метода упругих решений (МУР) по версии «начальных напряжений» [3]. В качестве исходного (начального) решения используется результат линейного расчёта плитно-балочной системы. На каждой  $i$ -й ступени итерации выполняются два шага.

1. Выделяются «перегруженные» балки, в середине (среднем сечении) которых расчётные моменты  $M_{расч,i-1,j}$  ( $j$  – номера «перегруженных» балок), полученные на предыдущей ступени итерации, превышают предельные моменты  $M_{пред}$ , которые сечение способно воспринять. Определяются линейные погонные нагрузки с интенсивностью  $p_{i,j}$ , которые необходимо приложить к «перегруженным» балкам, чтобы перевести их в физически возможное изогнутое состояние:

$$p_{i,j} = \frac{8}{l^2} (M_{пред} - M_{расч,i-1,j}). \quad (4)$$

«Перегруженные» ( $j$ -е) балки условно вырезаются из плитно-балочной системы и разгружаются путём приложения линейных погонных нагрузок  $p_{i,j}$ .

При этом одновременно разгружаются слабее армированные сечения по всей длине «вырезанных» балок. Образуется «невязка сил» в виде линейных нагрузок  $p_{i,j}$ , приложенных к  $j$ -м балкам.

2. Устранение «невязки силы». Линейные погонные нагрузки  $p_{i,j}$  с противоположным знаком (в обратном направлении) прикладываются к тем же балкам в составе плитно-балочной системы. При этом в восприятии нагрузок  $p_{i,j}$  принимают участие все балки пролётно-строения. Происходит перераспределение усилий, ведущее к снижению расчётных моментов в перегруженных и увеличению в остальных балках.

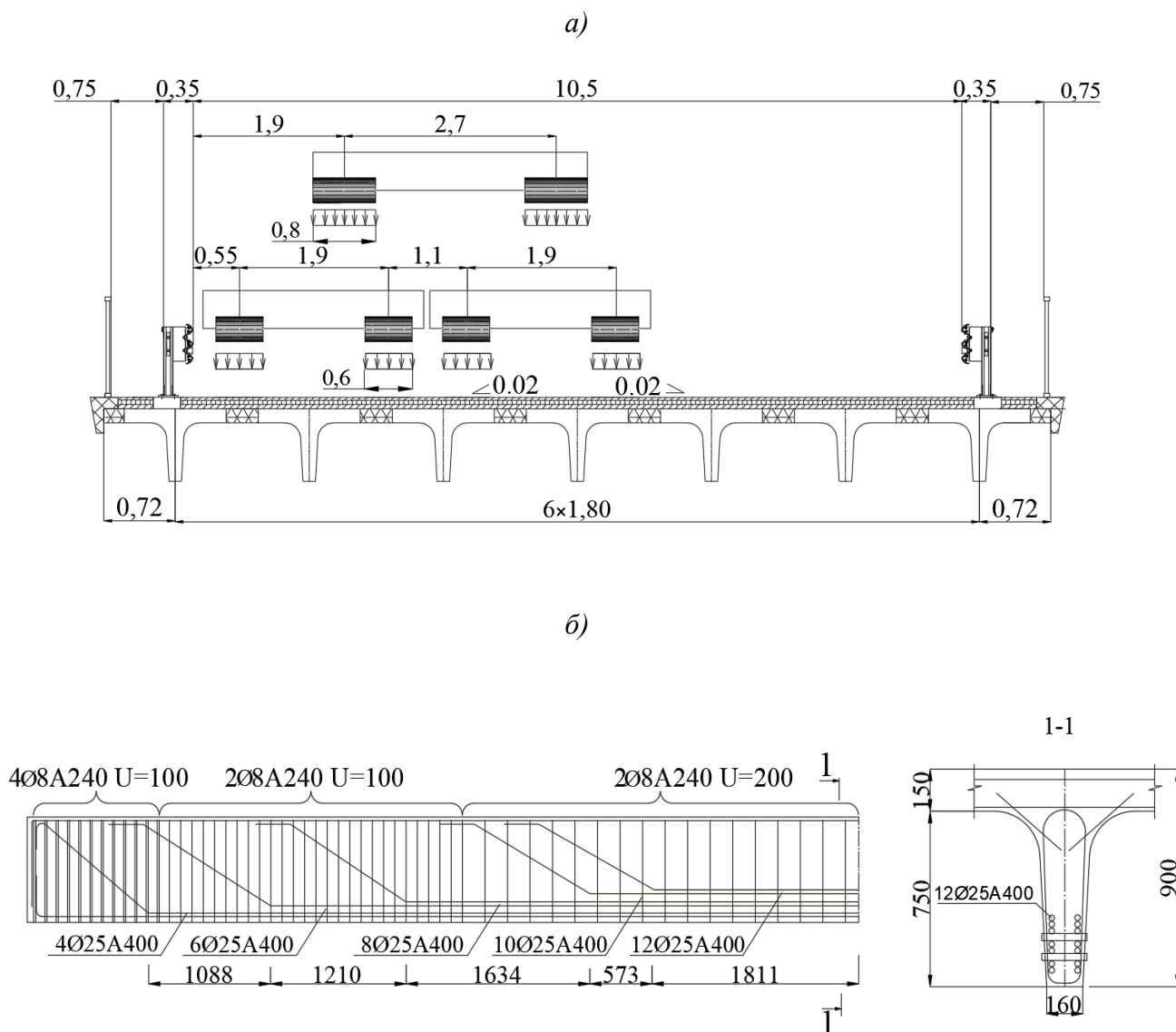
При сходящейся итерации достигается положительное решение задачи, при котором во всех балках получено  $M_{расч} \leq M_{пред}$ .

**Пример расчёта** (рис. 3). Пролётное строение длиной 15 м (расчётный пролёт 14,4 м) по типовому проекту серии 3.503.1-73 (Союздорпроект, 1987) (рис. 4, а) рассчитано на про-



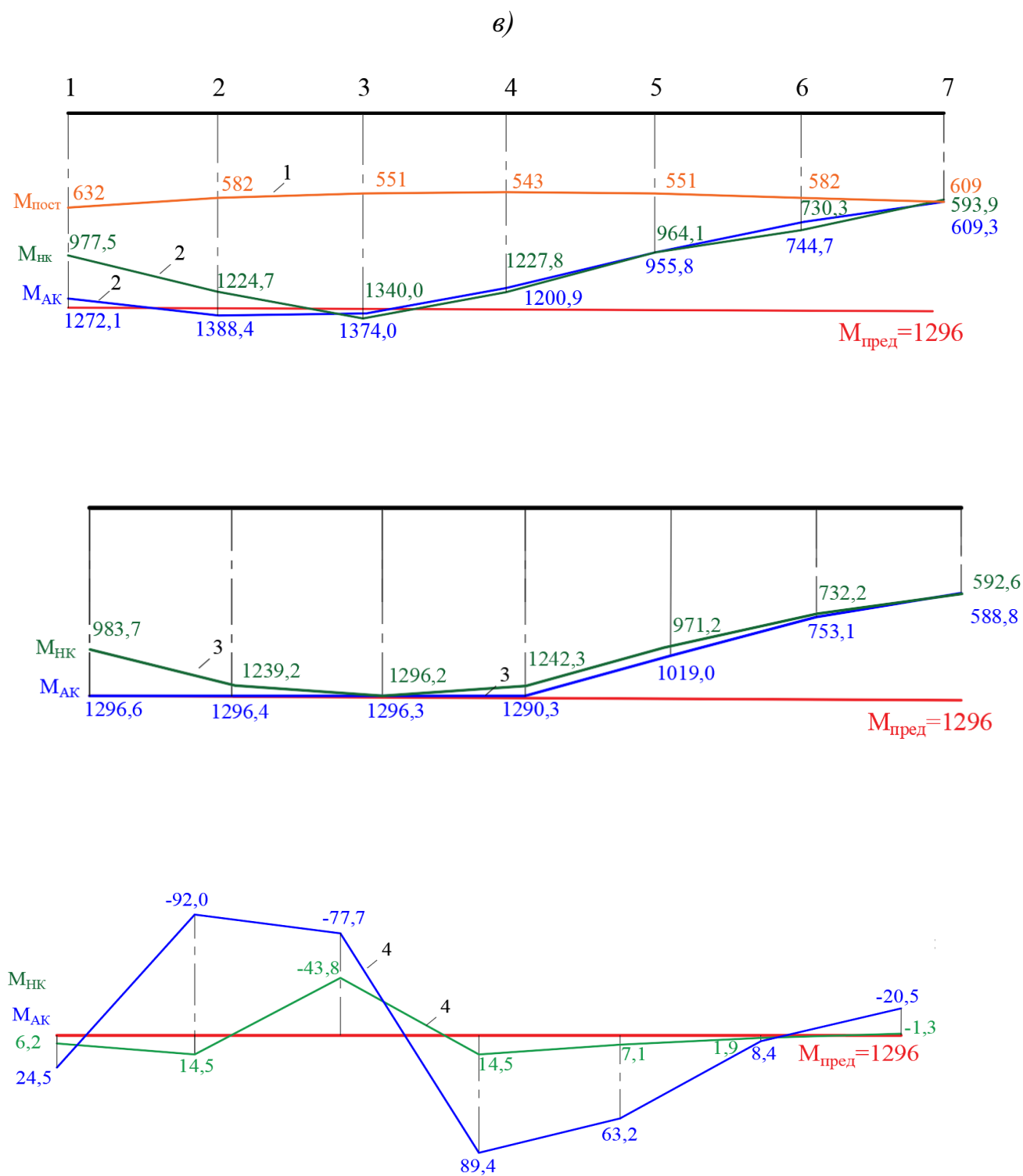
пуск нагрузок проектных нагрузок А11, Н11. Требуется по результатам нелинейного расчёта обосновать возможность увеличения его расчётной грузоподъёмности до А14, Н14.

На рис. 3 показано сечение пролётного строения, армирование и сечение балки, распределение моментов между балками в среднем сечении пролётного строения от постоянных и полных (постоянных и временных А14, Н14) нагрузок по результатам линейного пространственного расчёта МКЭ с использованием плитно-стержневой расчётной схемы. Там же показано новое распределение и перераспределение моментов между балками. После двенадцати ( $m=12$ ) для А14 и одной ( $m=1$ ) для Н14 ступеней итерации с общим перераспределением моментов, показанном на рис. 3, в, во всех балках были получены расчётные изгибающие моменты  $M_{расч,i=m,j} \leq M_{пред}$ .



**Рис. 3 (начало).** К примеру расчёта пролётного строения длиной 15 м:

- a* – сечение пролётного строения (размеры в м);
- б* – размеры (мм) и схема армирования балки (U – шаг хомутов);
- в* – эпюры распределения моментов (кНм) между балками в среднем сечении пролётного строения:
  - 1 – от постоянных нагрузок, 2 – от полных нагрузок по результатам линейного пространственного расчета;
  - 3 – по результатам нелинейного расчета; 4 – перераспределение моментов между балками по результатам нелинейного расчета



**Рис. 3 (окончание).** К примеру расчёта пролётного строения длиной 15 м:  
*a* – сечение пролётного строения (размеры в м); *б* – размеры (мм) и схема армирования балки (U – шаг хомутов); *в* – эпюры распределения моментов (кНм) между балками в среднем сечении пролётного строения:  
 1 – от постоянных нагрузок, 2 – от полных нагрузок по результатам линейного пространственного расчета;  
 3 – по результатам нелинейного расчета; 4 – перераспределение моментов между балками по результатам нелинейного расчета

## Выводы

1. Показана возможность получения эквивалентных полосовых нагрузок, позволяющих получить в плитно-балочном пролётном строении эпюры изгибающих моментов, близкие к объемлющим эпюрам моментов от нагрузок по схемам АК и НК. Этому условию соответствует полосовые нагрузки с интенсивностью в соответствии с диаграммами на рис. 2.
2. Разработан (и реализован на примере типового пролётного строения длиной 15 м по типовому проекту 1987 г.) инженерный метод нелинейного расчёта плитно-балочных пролётных строений по методу упругих решений с использованием в качестве «невязки силы» линейных нагрузок, приложенных к продольным осям балок.

Расчёты выполнены МКЭ с использованием плитно-стержневой расчётной схемы плитно-балочного пролётного строения.

## Библиографический список

1. Агарков, А. В. Совершенствование расчётных моделей для проектирования и определения несущей способности железобетонных балочных бездиафрагменных пролётных строений мостовых сооружений / А. В. Агарков. – Автореф. дис. на ... канд. техн. наук. – Воронеж, 2008. – 22 с.
2. Евграфов, Г. К. Расчёт мостов по предельным состояниям / Г. К. Евграфов, Н. Б. Лялин. – М.: Трансжелдориздат, 1962. – 336 с.
3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 375 с.
4. Сафронов, В. С. Современные конечно-элементные модели балочных бездиафрагменных пролётных строений автодорожных мостов / В. С. Сафронов, А. В. Антипов // Строительная механика и конструкции, 2013, №1 (6). – С. 92 – 101.
5. Улупов, А. С. Проблемы расчета железобетонных элементов мостов / А. С. Улупов // Институт Гипростроймост, 2008, № 2. – С. 56 -68.
6. Шапиро, Д.М. Деформационный нелинейный расчёт изгибаемых железобетонных балок в составе плитно-ребристых систем / Д. М. Шапиро, А. П. Тютин// Бетон и железобетон, 2011, №6. – С. 19–23.
7. Шапиро, Д. М. Нелинейный деформационный пространственный расчёт железобетонных пролётных строений автодорожных мостов / Д. М. Шапиро, А. П. Тютин// Строительная механика и конструкции, 2013, № 1 (5).– С. 102–108.
8. Шапиро, Д. М. Нелинейное деформирование и несущая способность мостовых плитно-балочных железобетонных пролётных строений / Д. М. Шапиро, А. П. Тютин// Строительная механика и конструкции, 2014, № 1 (8).– С. 78–87.
9. Шапиро, Д. М. Нелинейный пространственный расчёт изгибаемых плитно-балочных систем из железобетонных балок со смешанным армированием / Д. М. Шапиро, А. П. Тютин// Бетон и железобетон. – 2014. – №6. – С. 12 – 17.
10. Шапиро, Д. М. Нелинейный расчёт по методу Ньютона-Рафсона и предельные состояния железобетонных плитно-ребристых систем / Д. М. Шапиро, А. П. Тютин // Механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов: сб. науч. стат. по матер. 7-й Междунар.

науч. конф. В 2 т. / Т. 2/ РААСН, Воронежский ГАСУ – Воронеж, 2013, Т. 2. – С. 174–181.

11. Шапиро, Д. М. Пространственный нелинейный деформационный расчёт пролётных строений автодорожных мостов // Д. М. Шапиро, А. В. Агарков, Чан Тхи Тхюи Ван// Науч. вестник ВГАСУ. Серия «Строительство и архитектура» – Воронеж, 2008. – Вып. 2. – С. 29-37.
12. Шапиро, Д. М. Расчёт и проектирование балочных железобетонных предварительно напряжённых пролётных строений мостов / Д. М. Шапиро, А. П. Тютин// Строительная механика и конструкции, 2012, № 2 (5). – С. 60 – 68.
13. Шапиро, Д. М. Теория численного расчёта плитно-балочных железобетонных пролётных строений мостовых сооружений / Д. М. Шапиро, А. П. Тютин// Научный журнал строительства и архитектуры, 2019. - № 2 (54).– С. 134–144.

#### References

1. Agarkov A.V. Improvement of design models for the design and determination of the bearing capacity of reinforced concrete beam diaphragm-free span structures of bridge structure. Abstract. dis. on cand. tech. sciences. Voronezh, 2008. 22 p.
2. Evgrafov G.K., Lyalin N.B. Calculation of bridges by limiting states. M.: Transzheldorizdat, 1962. 336 p.
3. Zenkevich O. The finite element method in technology. M.: Mir, 1975. 375 p.
4. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern finite element models of beam non-diaphragm spans of road bridges. Structural Mechanics and Structures. No. 1(6). 2013. Pp. 92-101.
5. Ulupov A.S. Problems of calculation of reinforced concrete elements of bridges. Institute Giprostroymost. No. 2. 2008. Pp. 56-68.
6. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Non-deformational deformational calculation of flexible reinforced concrete beams as a part of plate-ribbed systems. Concrete and reinforced concrete. No. 6. 2011. Pp. 19-23.
7. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Non-linear deformational spatial calculation of reinforced concrete spans of road bridges. Structural Mechanics and Structures. No. 1(5). 2013. Pp. 102-108.
8. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Non-linear deformation and bearing capacity of bridge slab-beam reinforced concrete spans. Structural Mechanics and Structures. No. 1(8). 2014. Pp. 78-87.
9. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Non-linear spatial calculation of flexible plate-beam systems of reinforced concrete beams with mixed reinforcement. Concrete and reinforced concrete. No. 6. 2014. Pp. 12-17.
10. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Nonlinear calculation by the Newton-Raphson method and limit states of reinforced concrete slab-ribbed systems. Mechanics of destruction of concrete, reinforced concrete and other building materials: collection. scientific stat. by mater. 7th International scientific conf. Vol. 2. RAASN. Voronezh State Administrative University. Voronezh. 2013. Pp. 174-181.
11. Shapiro D.M., Agarkov A.V., Chan Thi Thuy Wang. Spatial nonlinear deformation calculation of the span structures of road bridges. Scientific. Bulletin of VSASU. Series "Construction and Architecture." Voronezh. 2008. Pp. 29-37.
12. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Calculation and design of beam reinforced concrete prestressed bridge spans. Structural Mechanics and Structures. No. 2(5). 2012. Pp. 60-68.

13. Shapiro D.M., Tyutin A.P. Theory of numerical calculation of slab-beam reinforced concrete spans of bridge structures. Scientific journal of construction and architecture. No. 2(54). 2019. Pp. 134-144.

## ENGINEERING METHOD OF NONLINEAR CALCULATION OF PLATE AND BEAM SYSTEMS USED IN BRIDGE BUILDING

D. M. Shapiro<sup>1</sup>, A. Ya. Sukhareva<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> Dr. of Technical Sciences, Prof. of the Department of Structural Mechanics, Tel.: +7(473)2715230,  
e-mail: [davshap@mail.ru](mailto:davshap@mail.ru)

<sup>2</sup> MA of Engineering and Technology, Assistant of the Department of Structural Mechanics; Tel: +7(910)4321835,  
e-mail: [arina.sukhareva95@gmail.com](mailto:arina.sukhareva95@gmail.com)

---

The description of the engineering method for the nonlinear calculation of reinforced concrete slab-beam systems on the example of split spans of bridge structures is provided. For calculations, the spatial calculation scheme of the FEM is taken, consisting of plate finite elements (FE) with three degrees of freedom in the node and rod FEs with six degrees of freedom in the node, replacing the plate and beams of the span structure. Temporary normalized vertical loads according to the AK and NK schemes are replaced by equivalent strips corresponding to the largest bending moments in all sections of the beam spans. The geometric characteristics of the beam sections determined in accordance with the conditions of the hypothesis of flat sections and the assumption of concrete deformation under tension without resistance are used for calculations. The nonlinear elastoplastic problem is solved by the iterative procedure of the method of elastic solutions. As a residual of the force, linear loads are applied to the longitudinal axes of the beams. An example of the calculation is given.

**Keywords:** reinforced concrete slab-beam spans, equivalent band load, finite element method, elastic solution method.

## АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ВИСЯЧИХ МОСТОВ НА СТАТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ

А. В. Резунов<sup>1</sup>, И. В. Раводин<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры строительной механики

Тел.: +7(910)7440700, e-mail: [rezav1950@rambler.ru](mailto:rezav1950@rambler.ru)

<sup>2</sup> Аспирант кафедры строительной механики

Рассматриваются расчеты висячих мостов при статическом нагружении как линейными методами (метод сил [1]), так и с учетом геометрической нелинейности (полуаналитический метод [2], метод конечных элементов). В качестве примера выполняются расчеты однопролетных один раз статически неопределимых висячих мостов. Для аналитических и сравнительно простых численных расчетов используется пакет компьютерной математики Mathcad, расчеты по МКЭ проводятся с помощью ПК Лира и Мидас Сivil. Сделан вывод о возможной области применения линейных методов и методов, учитывающих геометрическую нелинейность, для расчета висячих мостов.

**Ключевые слова:** висячий мост, кабель, балка жесткости, подвески, распор. прогиб, изгибающий момента, Mathcad, метод сил, МКЭ.

Висячие мосты просты в монтаже, достаточно надёжны в эксплуатации, высокоэкономичны, обладают архитектурной выразительностью. Используются для перекрытия сверхбольших пролетов и там, где применение иных конструкций затруднено или невозможно: для преодоления горных ущелий, крупных водных преград с интенсивным судоходством, сложными гидрологическими и геологическими условиями, там, где не эффективно строительство промежуточных опор.

До середины прошлого века расчет висячих мостов проводился в линейной постановке.

### 1. Метод сил

Сначала рассмотрим расчёт моста традиционным для строительной механики методом сил [1]. Примем следующие допущения:

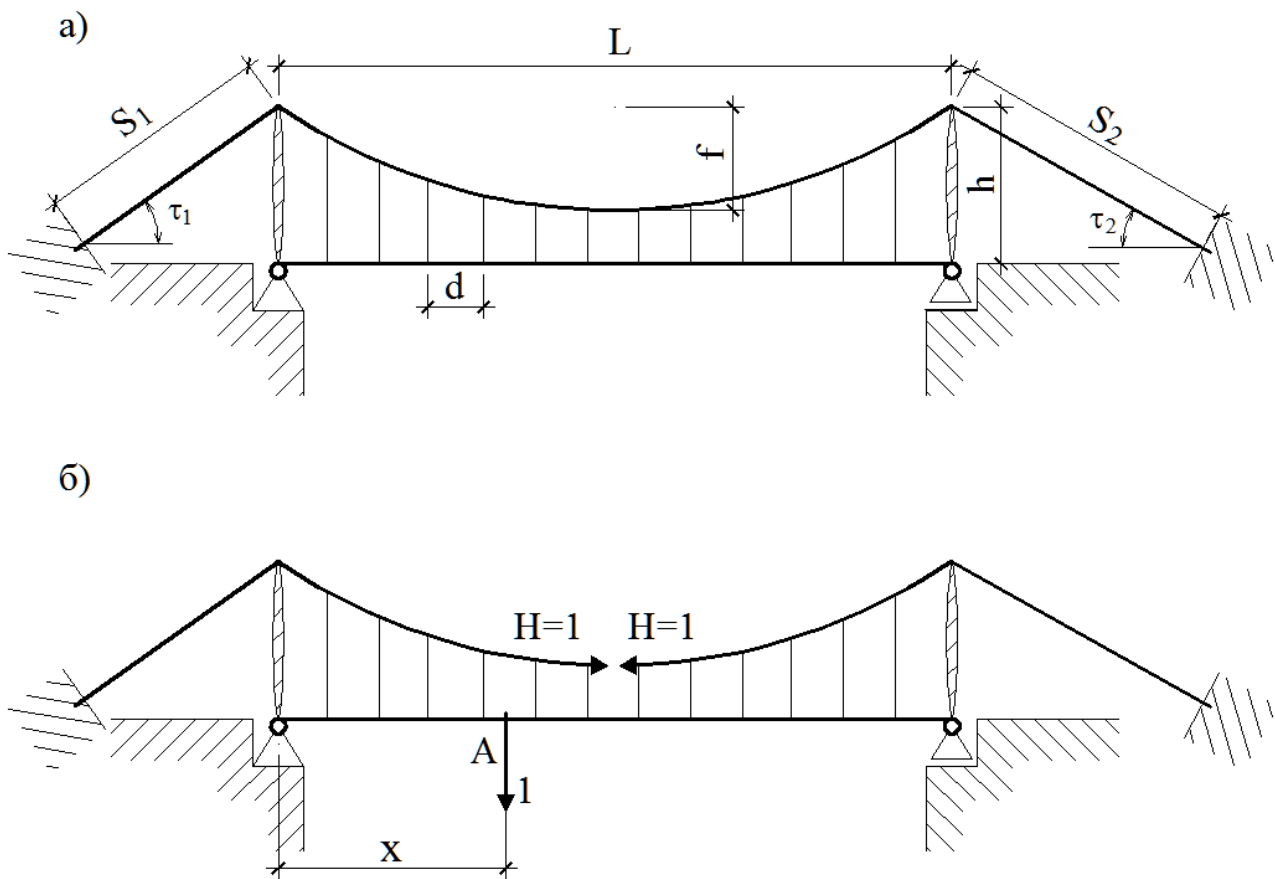
- постоянная нагрузка равномерно распределена по длине пролета;
- ось кабеля очерчена по квадратной параболе;
- кабель можно отнести к пологим гибким нитям, и поэтому горизонтальными перемещениями точек оси кабеля можно пренебречь;
- балка жесткости имеет постоянное сечение.

Расчетная схема однопролетного висячего моста, используемая в дальнейшем, показана на рис. 1, а. Данная система один раз статически неопределимая. Основную систему метода сил примем в виде, показанном на рис. 1, б. Запишем каноническое уравнение метода сил:

$$H \cdot \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0, \quad (1)$$

где  $\delta_{11}$  – сближение концов кабеля в месте разреза под влиянием парной силы  $H=1$ ;

$\Delta_{1p}$  – сближение этих же концов под влиянием вертикальной силы  $P=1$ , направленной вниз и приложенной в произвольной точке А балки жесткости.



**Рис. 1.** Расчетная схема однопролетного висячего моста:  
а) расчетная схема моста, б) основная система метода сил

Подробности решения уравнения (1) приведены в [1]. Выражение для ординат линии влияния распора кабеля имеет вид

$$\eta_H(x) = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{5(L^3x - 2Lx^3 + x^4)}{8L^3f \cdot \varepsilon}, \quad (2)$$

где

$$\varepsilon = 1 + \left\{ \frac{L + \frac{16}{3} \cdot \frac{f^2}{L}}{E_k F_k} + \left( \frac{S_1}{\cos^2 \tau_1} + \frac{S_2}{\cos^2 \tau_2} \right) \frac{1}{E_o F_o} + \frac{64f^2 d \cdot \left( h - \frac{2}{3} f \right)}{L^3 E_n F_n} \right\} \frac{15E_o J}{8f^2 L}. \quad (3)$$

В (3) не учитывается продольная деформация пилонов (соответствующее слагаемое опущено),  $J$  – момент инерции поперечного сечения балки,  $E$  – модуль упругости,  $F$  – площадь поперечного сечения. Индексы: к, б, о, п – относятся к кабелю, балке, оттяжкам, подвескам соответственно.

Линии влияния усилий в оттяжках и подвесках пропорциональны  $\eta_H(x)$  и легко находятся.

$$\eta_{o1}(x) = \frac{\eta_H(x)}{\cos \tau_1}, \quad \eta_{o2}(x) = \frac{\eta_H(x)}{\cos \tau_2}, \quad \eta_n(x) = \frac{8fd}{L^2} \eta_H(x). \quad (4)$$

Линия влияния изгибающего момента в балке жесткости в сечении  $x=a$  определяется выражением

$$\eta_M(x, a) = \eta_{M_0}(x, a) - \frac{4fa(L-a)}{L^2} \cdot \eta_H(x) = \frac{L-x}{L} a - (a-x) \cdot [a > x] - \frac{4fa(L-a)}{L^2} \cdot \eta_H(x), \quad (5)$$

где  $\eta_{M_0}(x, a)$  – линия влияния простой шарнирно опертой по концам балки,  $[x > a]$  – скобка Айверсона

$$[Q] = \begin{cases} 1, & \text{если } Q \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если } Q \text{ ложно.} \end{cases}$$

Примеры построения линий влияния изгибающего момента в сечениях балки жесткости при  $\varepsilon = 1.04$  приведены на рис. 2.

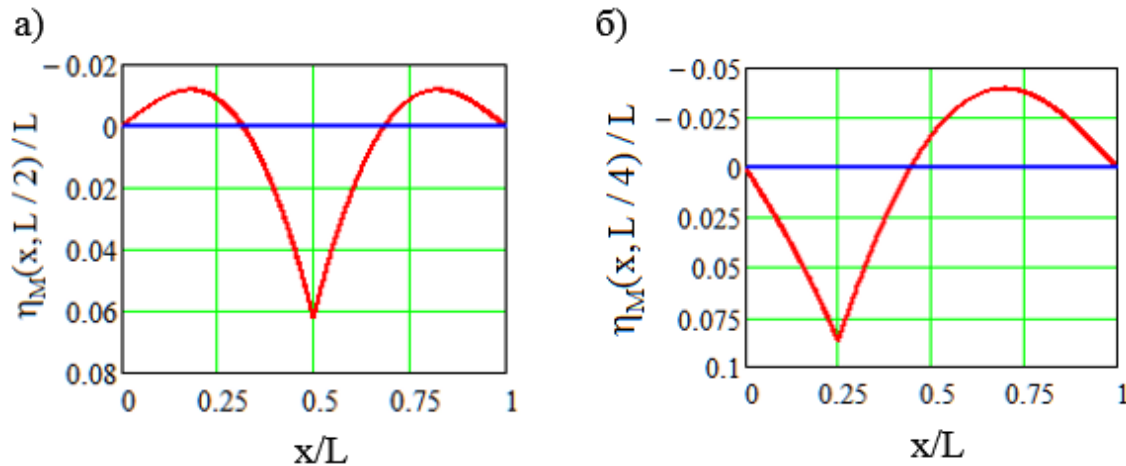


Рис. 2. Линии влияния изгибающего момента в сечениях:  
а)  $x=L/2$  и б)  $x=L/4$

Для определения усилий в канате, оттяжках, пилонах и подвесках соответствующие линии влияния загружаются постоянной и временной нагрузками, а для определения изгибающих моментов в балке жесткости – только временной, так как систему при строительстве регулируют так, чтобы вся постоянная нагрузка передавалась через подвески на канат [1].

Величина распора от временной нагрузки  $q(x)$  находится из выражения

$$H = \int_0^L \eta_H(x) \cdot q(x) dx.$$

Значение изгибающего момента в сечении  $x=a$  балки при загрузке, например только положительных участков линии влияния произвольной нагрузкой  $q(x)$ , определяется формулой

$$M^+(a) = \int_0^L \eta_M(x, a) \cdot [\eta_M(x, a) \geq 0] \cdot q(x) \cdot dx.$$

Ординаты линии влияния прогибов в сечении  $x=a$  балки жесткости задаются соотношением

$$\eta_v(x, a) = \frac{(L-a)x}{6LE_\sigma J} (-x^2 + 2La - a^2) + \frac{(x-a)^3}{6E_\sigma J} [x > a] - \frac{fx \eta_H(a)}{3L^2 E_\sigma J} (L^3 - 2Lx^2 + x^3). \quad (6)$$

На рис. 3 приведены линии влияния прогиба балки жесткости в середине и четверти пролета при  $\varepsilon = 1,04$ .



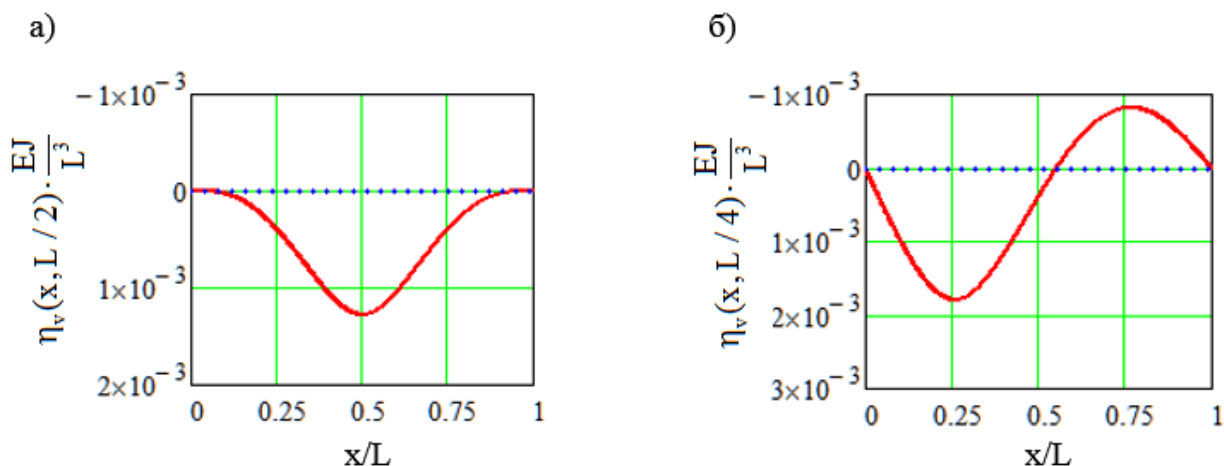


Рис. 3. Линии влияния прогиба в сечениях:  
а)  $a=L/2$  и б)  $a=L/4$

Величина прогиба в сечении  $x=a$  от временной нагрузки  $q(x)$  находится с помощью выражения

$$V(a) = \int_0^L \eta_v(x, a) q(x) dx .$$

## 2. Полуаналитический метод [2]

С середины прошлого века в связи с развитием вычислительной техники стали интенсивно развиваться методы расчета висячих мостов с учетом геометрической нелинейности. Рассмотрим не требующий сложных численных расчетов полуаналитический метод, подробно изложенный в монографии [2].

Изложение основных положений метода проведем на примере расчета однопролетного висячего моста, схема которого представлена на рис. 1, а. Воспользуемся теми же допущениями, что и ранее при описании метода сил. Кроме того, ради простоты выводов будем считать подвески нерастяжимыми.

На рис. 4 показана расчетная схема, которая получена из заданной системы моста (см. рис. 1, а) путем разрезания всех подвесок.

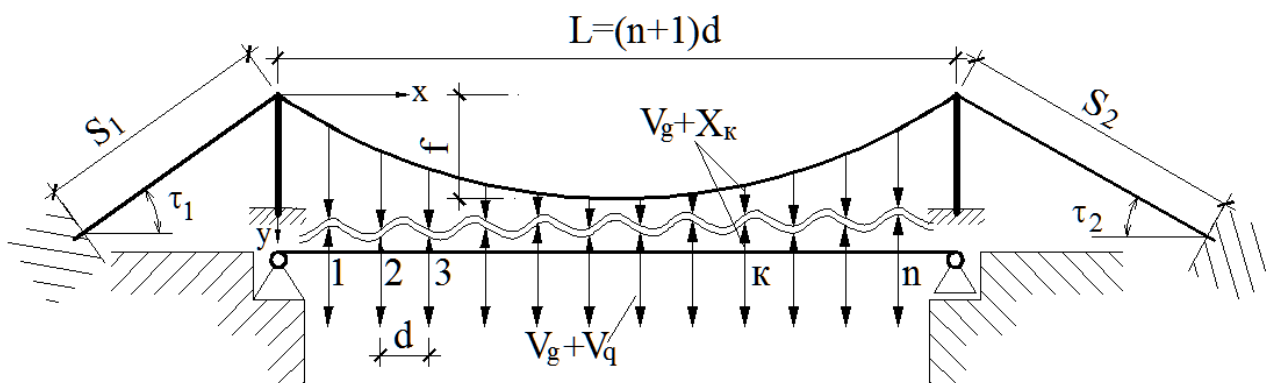


Рис. 4. Расчетная схема моста

При этом кабель и балку можно рассматривать как отдельные системы, имеющие, однако, совместные деформации.

При монтаже моста сначала к нему прикладывают постоянную равномерно распределенную по длине пролета нагрузку  $g$  и тем или иным способом [1, 2] добиваются, чтобы деформации балки жесткости от постоянной нагрузки отсутствовали. Усилия в подвесках от постоянной нагрузки равны  $V_g = g \cdot d$ .

В процессе загрузки моста временной нагрузкой  $V_q$  в подвесках появляются дополнительные усилия  $x_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Суммарные усилия, действующие на балку, будут равны

$$V = V_g + V_q - V_g - x = V_q - x. \quad (7)$$

Прогибы балки жесткости в точках прикрепления подвесок обозначим через

$$\vec{\eta} = (\eta_1 \ \eta_2 \ \dots \ \eta_n)^T. \quad (8)$$

Вектор  $\vec{\eta}$  можно найти по формуле

$$\vec{\eta} = L_1 (\vec{v}_q - \vec{x}), \quad (9)$$

где  $L_1$  – матрица влияния прогибов с элементами

$$L_{1,i,j} = \frac{1}{E_0 J} \int_0^L M(s, i \cdot d) \cdot M(s, j \cdot d) ds, \quad (10)$$

$M(x, t) = \frac{L-t}{L} \cdot x \cdot [x \leq t] + \frac{t}{L} \cdot (L-x) \cdot [x > t]$  – изгибающий момент в балке в сечении с координатой  $x$  от единичной силы, приложенной в сечении с координатой  $t$ .

Примем в качестве неизвестных  $n$  величин прогибов  $\eta_k$  и распор  $H$ . Для их определения рассмотрим равновесие  $k$ -го узла кабеля в точке крепления  $k$ -й подвески, предполагая, что на участках между соседними узлами ось кабеля представляет собой отрезок прямой (рис. 5).

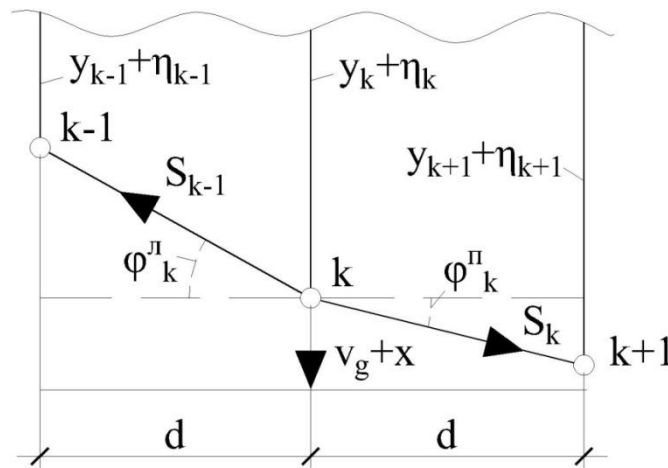


Рис. 5. Равновесие к  $k$ -го узла кабеля

На рис. 5  $y_k$  – прогиб кабеля от постоянной нагрузки,  $S_k$  – усилие в кабеле,  $S_k \cdot \cos \varphi_k = H$ . Составляя уравнения равновесия в проекциях на ось  $y$ , после ряда преобразований [2] получим  $n$  уравнений относительно  $n$  прогибов  $\eta_k$  и распора  $H$ :

$$\vec{\eta} = (E^* + \lambda \cdot A)^{-1} \cdot (\vec{\eta}^* - \lambda \cdot \vec{y}^*), \quad (11)$$

где

$$\lambda = \frac{Hd^2}{(n+1)E_6J}, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{(n+1) \cdot E_6J}{d^2} L_1 L_2; \\ \bar{\eta}^* &= L_1(\bar{v}_g + \bar{v}_q); \\ \bar{y}^* &= \frac{8fdE_6J}{(n+1) \cdot d^3} L_1 \bar{\sigma}. \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

$$L_2 = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\bar{\sigma} = (1 \ 1 \dots 1)^T,$$

$E^*$  – единичная матрица.

Дополнительное уравнение деформации кабеля получим, воспользовавшись принципом Лагранжа (работа внешних и внутренних сил от постоянной нагрузки на перемещениях от временной нагрузки равна нулю). Этому уравнению можно придать вид [2]

$$-\lambda + \alpha + \beta \cdot \sum_{k=1}^n \eta_k = 0, \quad (15)$$

где

$$\alpha = \frac{gL^2d^2}{8f(n+1)E_6J}, \quad \beta = \frac{8f E_k F_k}{(n+1)^4 E_6J \left( \mu + \frac{S_1}{L} \cdot \sec^2 \tau_1 + \frac{S_2}{L} \cdot \sec^2 \tau_2 \right)}, \quad (16)$$

$$\mu = \left( \frac{5}{8} + 4 \frac{f^2}{L^2} \right) \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{L^2}} + \frac{3}{32} \frac{L}{f} \operatorname{Ln} \left( 4 \frac{f}{L} + \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{L^2}} \right), \quad (17)$$

Подставляя в (15) сумму  $\sum_{k=1}^n \eta_k$ , выраженную через  $\lambda$  из уравнения (11), получим нелинейное уравнение относительно параметра  $\lambda$ , решив которое найдем распор из (12) и перемещения узлов балки по (11).

Усилия в подвесках находятся по формуле

$$\bar{P} = \bar{V}_g + \bar{x} = H \left( \frac{8fd}{L^2} \bar{\sigma} + L_2 \bar{\eta} \right). \quad (18)$$

Вектор нагрузок, действующих на балку, имеет вид

$$\bar{\Phi} = (\bar{V}_g + \bar{V}_q) - \bar{P}. \quad (19)$$

Вектор изгибающих моментов, действующих в сечениях, проходящих через точки крепления подвесок, определяется соотношением

$$\bar{T} = L_m \cdot \bar{\Phi}, \quad (20)$$

где  $L_m$  – матрица влияния изгибающих моментов с элементами  $L_{m,i,j} = M(i \cdot d, j \cdot d)$ .

Возможно обобщение изложенной методики для расчета трехпролетных висячих мостов, выполнение расчетов с учетом податливости и наклона подвесок и влияния температуры и т.д. [2].

### 3. Метод конечных элементов

В настоящее время для выполнения сложных численных расчетов строительных конструкций широко используется метод конечных элементов (МКЭ). В данной работе использовались программные комплексы Лира и Midas Civil. Кратко рассмотрим особенности выполнения с помощью этих комплексов расчетов висячих мостов.

#### ПК Лира

Для моделирования кабеля висячего моста применялся КЭ – 310 “Геометрически нелинейный универсальный пространственный стержень (нить)”. Для этого элемента на каждом шаге происходит учет продольной силы при построении матрицы жесткости. Для решения геометрически нелинейных задач реализован автоматический выбор шага нагружения.

Для задания преднапряжения в кабеле от постоянной нагрузки применялась система «Монтаж». При работе в этой системе по умолчанию производится накопление усилий и перемещений, то есть учитывается предыстория. Расчет моста выполнялся в три стадии.

На первой стадии происходит нагружение кабеля постоянной нагрузкой. Кабель при этом деформируется, в нём возникают усилия «преднапряжения» (рис. 6).

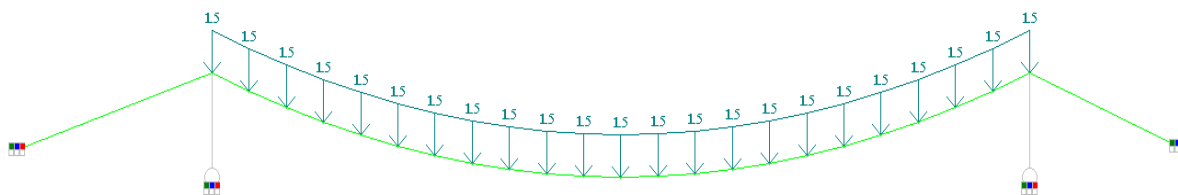


Рис. 6. Первая стадия (загружение постоянной нагрузкой)

На следующей стадии геометрическая схема моста дополняется балкой и подвесками. Деформированная ось кабеля принимает первоначальный вид (считается, что усилия преднапряжения компенсируют деформации от постоянной нагрузки). Таким образом, распор в кабеле сохраняется и в дальнейшем учитывается в расчёте, тогда как изгибающие моменты в балке жёсткости равны нулю (рис. 7).

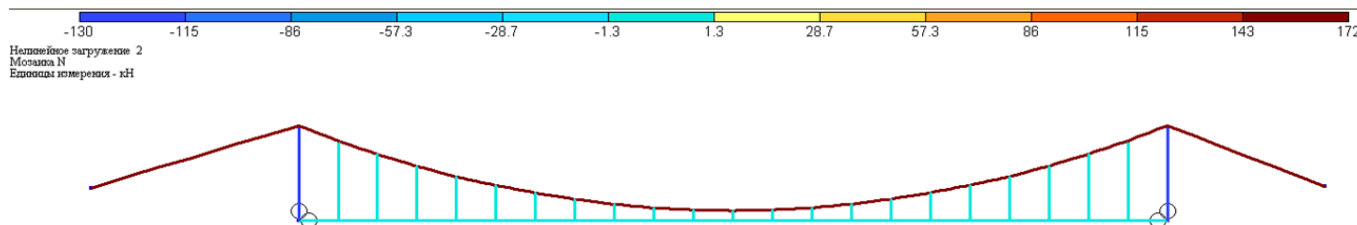
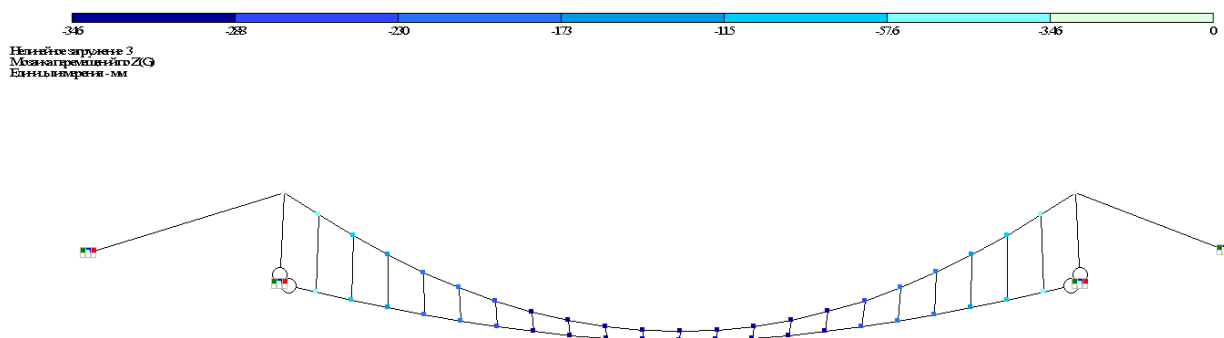


Рис. 7. Вторая стадия (монтаж балки и подвесок)

На третьем этапе мост загружается полезной нагрузкой (рис. 8).



**Рис. 8.** Третья стадия (загружение балки временной нагрузкой)

Следует заметить, что в том случае, когда расчёт выполняется с допущением о линейно-упругом поведении материала кабеля и балки (как в данной статье), усилия преднапряжения могут быть определены независимо из уравнений равновесия или в отдельной задаче средствами МКЭ.

Изложенный выше стадийный расчёт позволяет, при необходимости, учитывать нелинейные свойства материала.

### **Midas Civil**

Программный комплекс Midas Civil имеет ряд встроенных функций, предназначенных для анализа подвесных систем. Процедура расчёта висячего моста в Midas Civil также включает в себя несколько стадий.

1. Автоматическое построение геометрической схемы моста с использованием модуля «Suspension Bridge Wizard».
2. Уточнение построенной на первом этапе модели и задание граничных условий.
3. Вычисление усилий преднапряжения с использованием модуля «Suspension Bridge Analysis Control».
4. Расчёт конструкции на полезную нагрузку.

Функция «Suspension Bridge Wizard» (мастер конструкций, рис. 9) позволяет формировать стержневую схему висячего моста с заданными параметрами. Такая модель зачастую содержит неточности в геометрии, но, тем не менее, значительно сокращает время расчёта.

Функция «Suspension Bridge Analysis Control» выполняет анализ первоначального равновесного состояния висячего моста и позволяет определить силы преднапряжения в кабеле. Так как изгибающий момент в балке жёсткости от постоянной нагрузки должен быть равен нулю, в балку перед использованием функции «Suspension Bridge Analysis Control» вводят шарниры. После применения функции шарниры удаляют. Данный подход является своего рода аналогом стадийного расчёта в системе «Монтаж» в Лире.

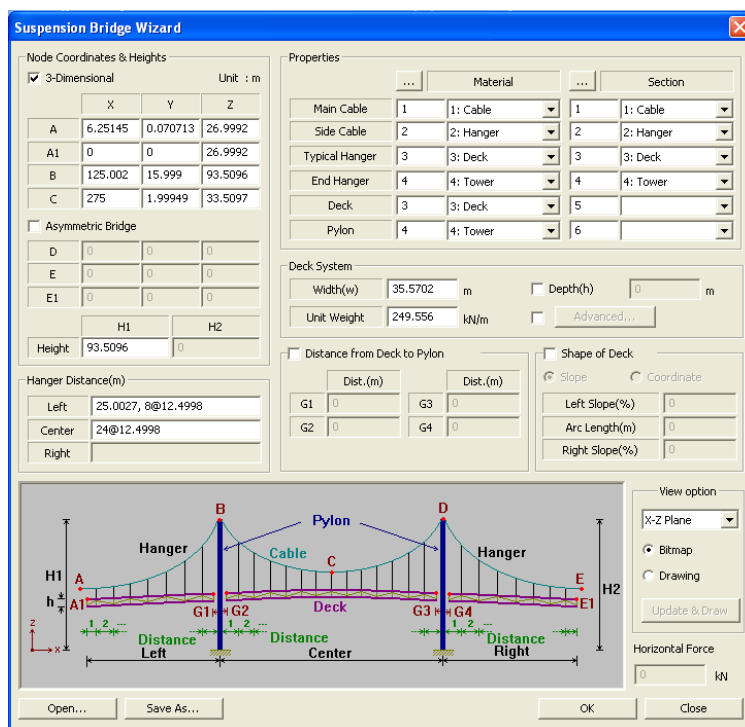


Рис. 9. Диалоговое окно “Suspension Bridge Wizard”

Встроенные модули для расчёта висячих мостов программы Midas Civil существенно упрощают создание конечно элементной модели. При этом расчёт выполняется в геометрически-нелинейной постановке.

На рис. 10 приведен пример результатов расчета висячего пешеходного моста, полученных с помощью ПК Midas Civil.

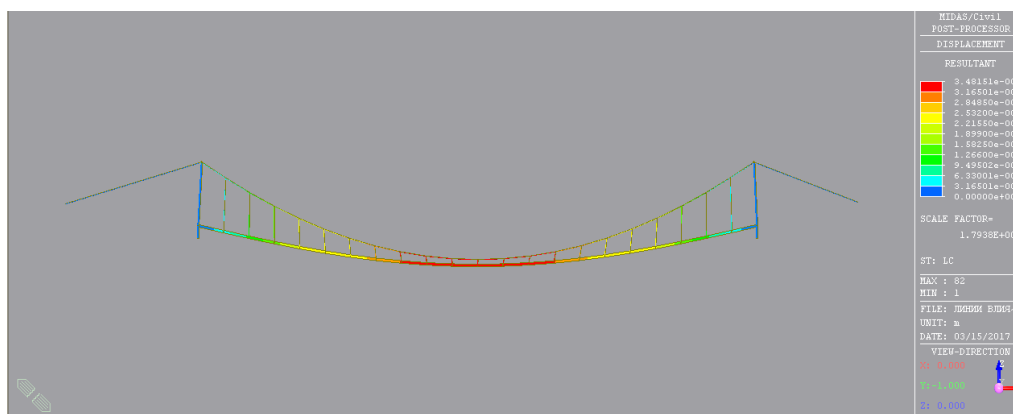


Рис. 10. Результаты расчета перемещений элементов висячего пешеходного моста через реку Репинка в г. Обнинск (в настоящее время перестроен)

#### 4. Численные исследования

Рассмотрим результаты расчетов однопролетных висячих мостов с различной длиной пролета с помощью вышеизложенных методов. Расчеты методом сил и полуаналитическим методом были выполнены в среде программы Mathcad, расчеты по МКЭ проводились с использованием ПК Лира и Midas Civil. Исходные данные конструкций мостов, необходимые для выполнения расчетов, приведены в табл. 1.

Основными критериями для оценки работы моста под нагрузкой и сравнения результатов расчетов, полученных разными методами, будем считать:  $V$  – максимальный прогиб балки,  $M$  – максимальный изгибающий момент в балке жесткости,  $H$  – распор в кабеле от постоянной и временной нагрузок.

Таблица 1

Исходные данные для расчётов мостов

Параметр	Обозначение и размерность	Пешеходный мост через р. Репинка	Пример №1	Пример №2
Длина пролёта	$L$ , м	88	200	500
Стрела прогиба кабеля	$f$ , м	8,98	20	50
Постоянная нагрузка	$g$ , кН/м	1,5	120	100
Временная нагрузка	$q$ , кН/м	7,2	60	50
Момент инерции балки жесткости	$J$ , м <sup>4</sup>	0,00275	0,5	2,0
Модуль упругости балки жёсткости	$E_б$ , КПа	$2,2 \cdot 10^8$	$2,2 \cdot 10^8$	$2,2 \cdot 10^8$
Расстояние между подвесками	$d$ , м	4	200/6	500/12
Площадь сечения кабелей и оттяжек	$F_k$ , м <sup>2</sup>	0,0031896	0,1	0,327
Модуль упругости кабелей и оттяжек	$E_k$ , КПа	$1,67 \cdot 10^8$	$1,833 \cdot 10^8$	$1,833 \cdot 10^8$
Длина оттяжек	$S_1, S_2$ , м	20,97; 15,93	35,3	80
Углы наклона оттяжек	$\tau_1, \tau_2$	$17,51^\circ, 21,73^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$

Для исходных данных примеров №№ 1 и 2 использовались материалы монографии [2].

Результаты расчетов мостов методом сил и полуаналитическим методом при загрузке мостов равномерно распределенной нагрузкой  $q$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение результатов расчета мостов

Мост	Исследуемый параметр	Метод расчета		Погрешность линейной теории, %
		Метод сил	Полуаналитический метод	
Пешеходный мост через р. Репинка	$V$ , м	0,360	0,350	2,86
	$M$ , кНм	270,2	256,7	5,26
	$H$ , кН	901,5	875,1	3,02
Пример №1	$V$ , м	0,536	0,514	4,28
	$M$ , кНм	14150	13390	5,68
	$H$ , кН	42880	43220	0,79
Пример №2	$V$ , м	0,854	0,820	4,15
	$M$ , кНм	14430	12820	12,6
	$H$ , кН	92880	91990	0,97

Из проведенных расчетов следует, что различия в результатах, полученных по линейной теории и с учетом геометрической нелинейности, для висячих мостов с длиной пролета до 200 м обычно не превосходит 6 %. Наибольшее расхождение в результатах наблюдается в величине изгибающего момента в балке жесткости. Эта разница растет с увеличением длины пролета или уменьшением жесткости балки.

Многочисленные примеры использования полуаналитического метода для анализа влияния параметров висячего моста на его напряженно-деформированное состояние имеются в монографии [1].

В табл. 3 приведено сравнение результатов расчёта пешеходного моста через реку Репинка, полученных полуаналитическим методом и по МКЭ с помощью программных комплексов Лира и Midas Civil. Указана погрешность результатов полуаналитического метода по отношению к результатам, найденным по МКЭ.

Таблица 3

Результаты расчётов моста через реку Репинка

Вид загрузки	Параметр	Метод расчёта и погрешность				
		Полуаналитический метод	МКЭ ПК Лира	$\Delta$ , %	МКЭ Midas Civil	$\Delta$ , %
Весь пролёт	V, м	0,350	0,352	0,57	0,348	0,57
	M, кНм	256,7	260,8	1,57	257,6	0,35
	H, кН	875,1	864,5-934,8	–	854,8-924,4	–
Половина пролёта	V, м	0,386	0,380	1,58	0,378	2,12
	M, кНм	823,4	808,4	1,86	789,7	4,27
	H, кН	549,9	544,3-596,5	–	538,6-569,8	–

Разница в результатах, найденных полуаналитическим методом и по МКЭ, не превосходит 2 % для ПК Лира и 4,3 % при использовании Midas Civil. Переменная величина распора кабеля при использовании МКЭ объясняется наклоном подвесок под действием временной нагрузки (рис. 11), который не учитывался при расчетах полуаналитическим методом.



Рис. 11. Деформированный вид моста (ПК Лира)

В обеих программах погрешность в расчётах между МКЭ и полуаналитическим методом не превышает 5 % и не имеет чёткой закономерности. Разница обусловлена способом определения сил преднатяжения, сеткой конечных элементов, учетом наклона подвесок.

На рис. 12 приведена эпюра изгибающих моментов, действующих в балке жесткости, при загрузении временной нагрузкой левой половины моста, построенная в ПК Лира.



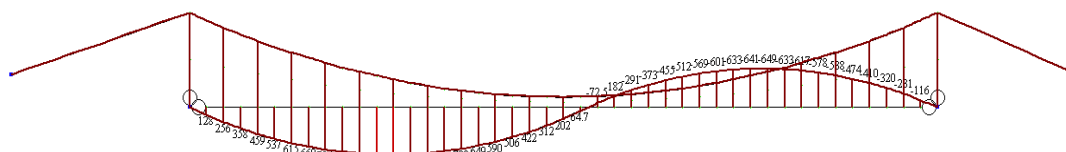


Рис. 12. Эпюра изгибающих моментов в балке жесткости (ПК Лира)

Рассмотрим в заключение результаты расчета висячих мостов с разной длиной пролета полуаналитическим методом и по МКЭ с помощью ПК Лира. Исходные данные для расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 4

Параметры мостов

Мост	Длина пролета L, м	Длина панели d, м	Стрела провисания кабеля f, м	Жесткость кабеля $E_k F_k \cdot 10^6$ , т	Жесткость балки $E_b J \cdot 10^7$ , тм <sup>2</sup>
Через р. Репинка	88	4	8,98	0,053	0,00605
№1	851.2	7.6	70,7	4,8	4
№2	1275	15	140	11,77	12
№3	1988	14	200	28,1	28

При задании параметров мостов №№ 1, 2 и 3 использовались данные средних пролетов известных висячих мостов – Такомского, Золотые ворота и Акаси-Кайкё соответственно. Результаты расчетов при загрузке всего пролета равномерно распределенной нагрузкой даны в табл. 5.

Таблица 5

Анализ результатов расчетов

Метод расчета	Расчетный параметр	Мост			
		Через р. Репинка	№1	№2	№3
	L, м	88	851.2	1275	1988
Полуаналитический метод	V, м	0,35	2,08	1,8	3,85
	M, тм	25,7	1021	1090	2209
МКЭ	V, м	0,35	2,10	1,81	3,92
	M, тм	26,0	1071	1183	2590
Процент расхождения, %	V, м	0	0,95	0,55	1,8
	M, тм	1,2	4,7	7,9	14,7

В последней строке табл. 5 приведено расхождение результатов, найденных полуаналитическим методом, по отношению к результатам, полученным методом конечных элементов.

Из данных табл. 5 следует, что разница в значениях прогибов невелика (менее 2 %) при любой длине пролета. Расхождение в максимальной величине изгибающего момента растет с увеличением длины пролета и составляет более 5 % при длине пролета около 1000 м.

### Выводы

Результаты численных исследований, включая приведенные в данной статье, показывают следующее:

1. При длине пролета менее 200 м при эскизном проектировании висячих мостов можно использовать линейный расчет методом сил. Погрешность в этом случае обычно не превышает 5÷6 %. Решение получается в конечной форме, что удобно для исследования влияния параметров расчетной схемы на значения параметров напряженно-деформированного состояния сооружения.

2. При длине пролета от 200 до 1000 м можно использовать полуаналитический метод, который учитывает геометрическую нелинейность, но основан на ряде упрощающих допущений. От некоторых из этих допущений можно отказаться (например, учесть растяжимость и наклон подвесок), но это приводит к значительному усложнению определяющих соотношений.

3. При большой длине пролета и необходимости наиболее полно учесть все особенности конструкции моста следует использовать программные комплексы, основанные на методе конечных элементов.

Заметим, что метод сил и полуаналитический метод позволяют выполнить расчет висячего моста только по плоской расчетной схеме. Расчет методом конечных элементов можно выполнить как по плоской, так и по пространственной схеме. Метод конечных элементов позволяет, в частности, учесть влияние дефектов несущих элементов, в том числе (при пространственном расчете) носящих односторонний характер (обрыв подвесок с одной стороны моста, частичная потеря предварительного напряжения в одном из кабелей и т. д.). Все современные большепролетные висячие мосты рассчитываются методом конечных элементов.

В данной работе рассмотрены однопролетные мосты, но расчеты показывают, что сделанные выводы справедливы и для наиболее распространенной трехпролетной схемы висячих мостов.

Более подробную информацию о висячих мостах и методах их расчета можно найти в работах [1-6].

### Библиографический список

1. Смирнов, В.А. Висячие мосты больших пролетов / В. А. Смирнов. – М.: Высш. школа, 1975. – 368 с.
2. Качурин, В. К. Проектирование висячих и вантовых мостов / В. К. Качурин, А. В. Брагин, Б. Г. Ерунов– М.: Транспорт, 1971. – 280 с.
3. Кирсанов, Н. М. Висячие и вантовые конструкции. / Н. М. Кирсанов. – М.: Стройиздат, 1981. – 158 с.
4. Сафронов, В. С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку/ В. С. Сафронов. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983 – 195 с.
5. Бахтин, С. А. Висячие и вантовые мосты. Проектирование, расчет, особенности конструирования: учеб. пособие / С. А. Бахтин, И. Г. Овчинников, Р. Р. Инамов. – Саратов: Саратов. гос. техн. ун-т, 1999. – 124 с.
6. Gimsing, N.J. Cable Supported Bridges: Concept and Design 3rd Ed. / N. J. Gimsing, C. T. Georgakis. – John Wiley & Sons, Ltd. 2012. – 592 pp.

## References

1. Smirnov V.A. Suspension bridges of large spans. M.: Higher School, 1975. 368 p.
2. Kachurin V.K., Bragin A.V., Yerunov B.G. Design of suspension and cable stayed bridges. M.: Transport, 1971. 280 p.
3. Kirsanov N.M. Suspension and cable stayed constructions. M.: Stroyizdat, 1981. 158 p.
4. Safronov V.S. Calculation of suspension and cable stayed bridges under moving load. Voronezh: Publishing House of the Voronezh State University, 1983. 195 p.
5. Bakhtin S.A., Ovchinnikov I.G., Inamov R.R. Suspension and cable stayed bridges. Design, calculation, design features: textbook. Saratov: Saratov State Tech. Univ., 1999. 124 p.
6. Gimsing N.J., Georgakis C.T. Cable Supported Bridges: Concept and Design. 3rd Ed. John Wiley & Sons, Ltd. 2012. 592 p.

## ANALYSIS OF CALCULATION METHODS OF SUSPENSION BRIDGES UNDER STATIC LOAD

A. V. Rezunov<sup>1</sup>, I. V. Ravodin<sup>2</sup>  
Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Physical and Mathematical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Structural Mechanics  
Tel.: + 7 (910) 7440700, e-mail: [rezav1950@rambler.ru](mailto:rezav1950@rambler.ru)

<sup>2</sup> PhD Student of the Department of Structural Mechanics

---

Suspension bridge calculations under static load are considered both by linear methods (force method [1]) and taking into account geometric nonlinearity (semi-analytical method [2], finite element method). As an example, calculations of single-span once statically indeterminate suspension bridges are performed. For analytical and relatively simple numerical calculations, the Mathcad computer mathematics package is used; FEM calculations are performed using the Lira and Midas software. The conclusion is drawn about the possible field of application of linear methods and methods that take into account geometric nonlinearity for calculating suspension bridges.

**Keywords:** suspension bridge, cable, stiffening girder, suspension, strut. deflection, bending moment, Mathcad, force method, FEM.

УДК 624.042+624.072

## РАСЧЁТ ПЛОСКОГО СТАЛЬНОГО КАРКАСА НА ПОСТОЯННУЮ И ВРЕМЕННУЮ НАГРУЗКУ С УЧЁТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МАТЕРИАЛА

В. С. Варнавский<sup>1</sup>, Г. Е. Габриелян<sup>2</sup>, В. В. Востриков<sup>3</sup>  
Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики. e-mail: mailVVS@inbox.ru

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, e-mail: grayr2010@rambler.ru

<sup>3</sup>Магистрант кафедры строительной механики, e-mail: vlad-vost2012@yandex.ru

---

Рассматривается определение несущей способности металлического плоского каркаса по критерию предельного равновесия. Моделируется пошаговый процесс упругопластического деформирования конструкции вплоть до разрушения конструкции. Дается оценка возможностей ПК ЛИРА для выполнения расчётов статически неопределимого стержневого стального каркаса с учётом пластических деформаций материала.

**Ключевые слова:** стальная рама, несущая способность, предельное равновесие, программный комплекс ЛИРА

Существует два наиболее распространённых вида расчёта строительных стальных конструкций на прочность с учётом пластических деформаций стали :

1. Расчёт по критерию ограниченных пластических деформаций, когда не нарушается целостность элементов конструкции и не ухудшаются эксплуатационные свойства материала. Этот метод рассматривается в нормативных документах. В качестве примеров можно привести исследования, проведённые в работах [1- 9].
2. Расчёт на определение предельной несущей способности всей конструкции или её части. Расчёт производится на максимальную возможную нагрузку, возникающую в исключительных случаях эксплуатации.

В данной работе рассматривается расчёт на определение предельной несущей способности плоского стержневого стального каркаса промышленного здания с применением программно-вычислительного комплекса ЛИРА широко распространённого в России в расчётах строительных конструкций. Представленные здесь результаты являются продолжением и развитием выполненных ранее исследований [10, 11, 12] для других видов стальных каркасов.

Задачами представленной работы являются:

1. Упругопластический расчёт металлического каркаса и его сравнение с результатами линейно-упругого расчёта; оценка сходимости и достоверности результатов расчёта;
2. Определение схемы и последовательности разрушения элементов каркаса с учётом возникновения пластических шарниров в колоннах вплоть до превращения всей конструкции в геометрически изменяемую систему, то есть до потери конструкцией своей несущей способности;
3. Нахождение предельной нагрузки, вызывающей потерю несущей способности всей конструкции или её отдельных частей.

В качестве объекта исследования принят плоский стальной стержневой каркас одноэтажного промышленного здания пролетом 24 м. Расчетная схема поперечного плоского каркаса является три раза статически неопределимой стержневой системой.

На каркас действуют следующие нагрузки: 1) постоянная нагрузка от собственного веса конструкций и покрытия; 2) крановая нагрузка от мостового крана; 3) снеговая нагрузка; 4) ветровая нагрузка.

Согласно поставленным задачам в первом разделе данной работы был выполнен линейно-упругий расчёт на действие всей указанной нагрузки с целью подбора поперечных сечений стержней фермы и колонн в соответствии с нормативными документами.

Затем во второй части работы выполнялся упругопластический расчёт. Целью упругопластического расчёта является оценка пластического резерва несущей способности конструкции при возникновении значительных сверхнормативных значений временных нагрузок. Из эксплуатационной практики известно, что плотность снега, лежащего на кровле конструкции может меняться в широких пределах. Поэтому на практике фактическая снеговая нагрузка может заметно превысить нормативное значение. В исключительных случаях эксплуатации превышение может быть и для крановой нагрузки. В связи с этим упругопластический расчёт проводился для двух случаев сочетания нагрузок: 1) постоянная нагрузка (собственный вес конструкции и покрытия) и снеговая нагрузка; 2) постоянная нагрузка (собственный вес конструкции и покрытия) и вертикальная крановая нагрузка;

Для выполнения упругопластических расчетов выбирается соответствующий тип элементов – физически нелинейный универсальный пространственный стержневой КЭ. Поведение материала описывается экспоненциальным законом деформирования из базы данных ПК Лира. Максимальная нагрузка для упругого расчета  $P_0$  является начальной для упругопластического расчёта. Условно ей присваивается коэффициент  $k=1$ . В ходе пластического расчета увеличение нагрузки оценивается для удобства не абсолютной величиной  $P$ , а соответствующим ей коэффициентом  $k$ , где  $P=k \cdot P_0$ .

Обязательным требованием к решению нелинейной задачи численными методами является обеспечение сходимости и достоверности численной схемы решения. В ПК ЛИРА решение физически нелинейной задачи выполняется методом пошагового увеличения нагрузки. Поэтому в упругопластическом расчете на результат заметное влияние могут оказывать два фактора: шаг приращения нагрузки; точность (плотность) конечно-элементной сетки разбиения конструкции (КЭ-сетки).

В связи с этим для обеспечения сходимости и достоверности решения необходимо было провести: 1) исследование влияния шага нагружения на результат расчета; 2) исследование влияния точности КЭ-сетки на результат; 3) подбор соответствующего шага нагружения и КЭ-сетки, которые обеспечивали бы нам достоверный результат расчета.

Под результатом понимается: 1) схема и порядок разрушения элементов каркаса с учётом пластического течения материала в элементах фермы и возникновения пластических шарниров в колоннах; 2) величины нагрузок, приводящих к потере несущей способности каркаса или его частей.

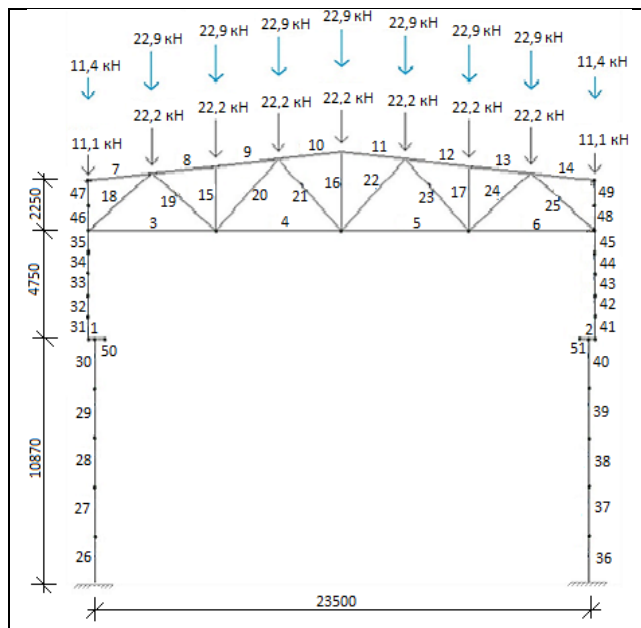
В настоящей работе было выполнено несколько расчётов каркаса при различных шагах приращения по нагрузке. Было установлено, что применение шагов приращения по нагрузке  $\Delta P=0,02P_0$ ,  $\Delta P=0,01P_0$ ,  $\Delta P=0,005P_0$  (где  $P_0$  – начальная нагрузка, то есть максимальная нагрузка из упругого расчета) даёт наиболее достоверные результаты.

Всего было рассмотрено три различных КЭ-сетки. Во всех этих КЭ-сетках каждый стержень фермы представлялся одним стержневым КЭ (тип 210), а колонны разбивались на различное число стержневых КЭ (тип 210).

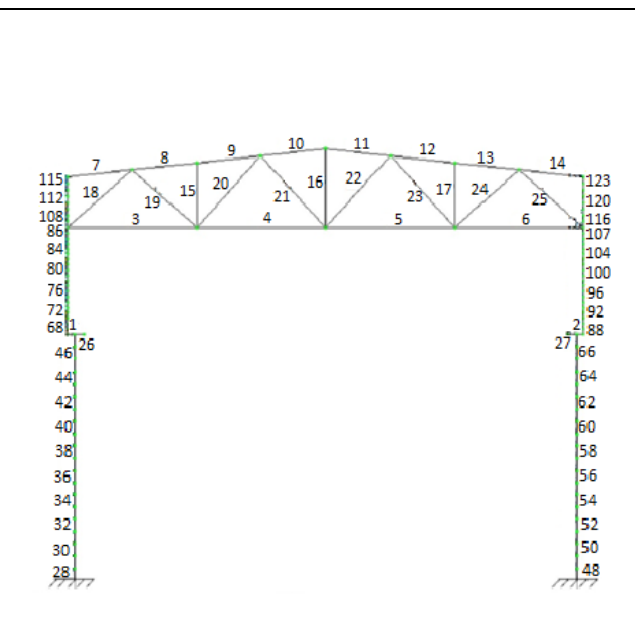
На рис. 1, 10, 2 представлены расчётные схемы каркаса с соответствующими последовательными вложенными КЭ-сетками. Условно им присваиваются номера: КЭ-сетка № 1, КЭ-сетка № 2 и КЭ-сетка № 3. Расчёт на вложенных КЭ-сетках позволяет оценить сходимость и достоверность численной схемы расчёта.

В данном разделе представлены результаты упругого и упругопластического расчётов на совместное действие постоянной нагрузки ( собственный вес конструкции и покрытия ) и вре-

менной нагрузки. Для упругого расчёта и для постоянной и для временной нагрузок использовались их максимальные проектные значения. В случае упругопластического расчёта постоянная нагрузка оставалась неизменной и совпадала с упругим нагружением, а временная возрастала до полного разрушения каркаса и оценивалась величиной  $P=k \cdot P_0$ .



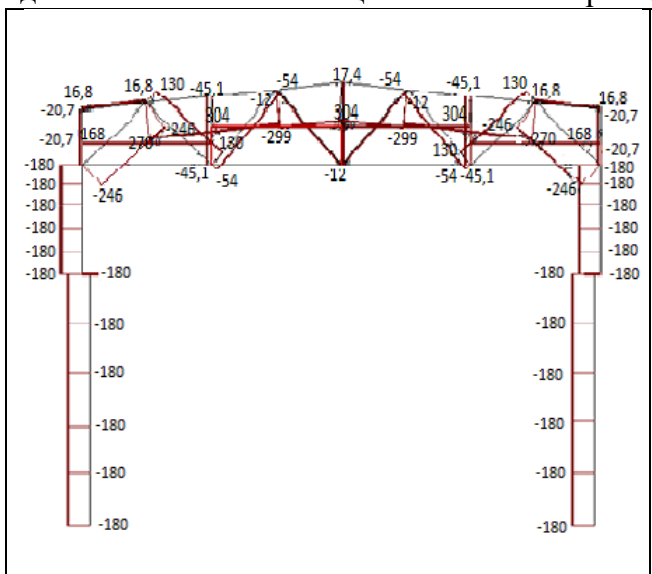
— нагрузки от собственного веса  
 — нагрузки от снега  
**Рис. 1.** Упругий расчёт. КЭ-сетка № 1.  
 Расчетная схема



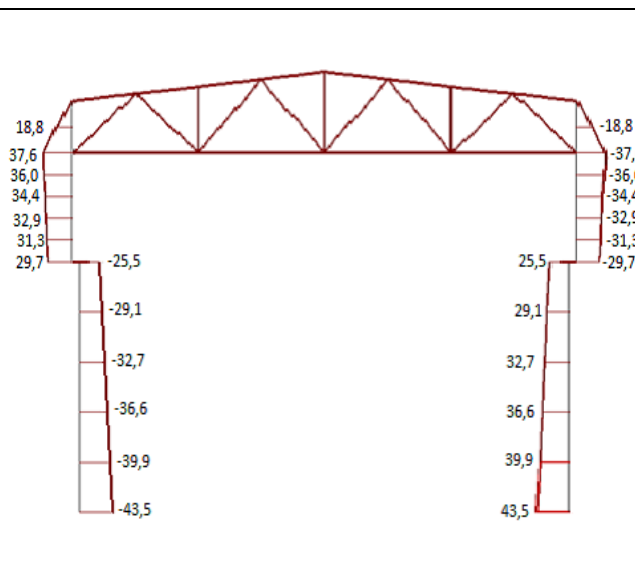
**Рис. 2.** Расчетная схема плоского поперечного стального каркаса. КЭ-сетка № 3

### Расчёт № 1

Производился расчёт на совместное действие постоянной нагрузки и снеговой нагрузки. Для упругого расчёта расчетная схема с КЭ-сеткой № 1 показана на рис. 1, а эпюры продольных сил и изгибающих моментов на рис. 3 и 4 соответственно.



**Рис. 3.** Упругий расчёт. КЭ сетка № 1.  
 Эпюра продольных сил N, кН

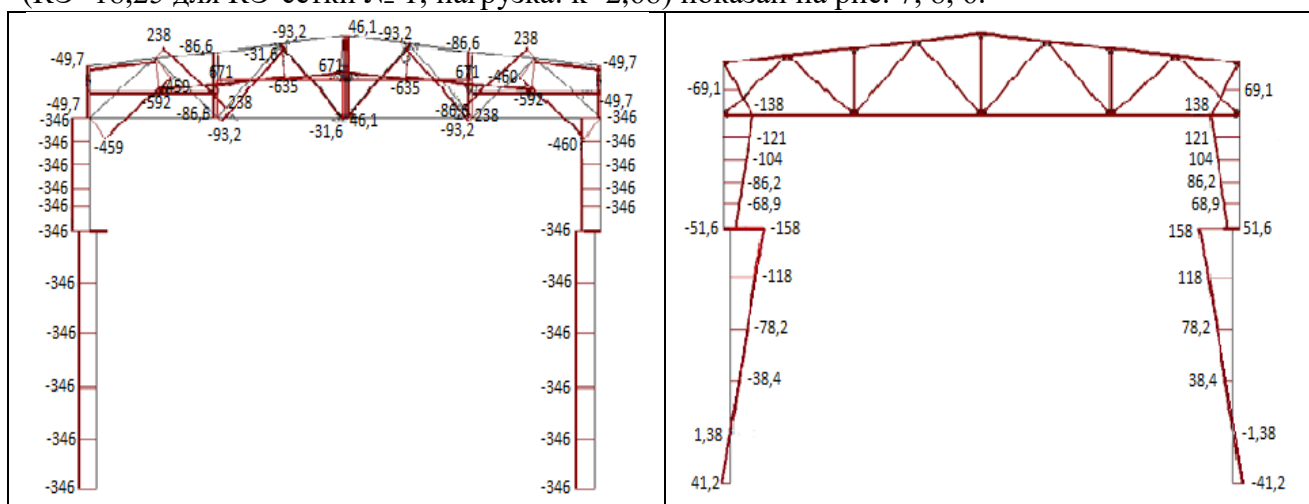


**Рис. 4.** Упругий расчёт. КЭ сетка № 1.  
 Эпюра изгибающих моментов M, кН\*м

Упругопластический расчёт осуществлялся с КЭ-сеткой №1 (см. рис. 1), с КЭ-сеткой № 2 (рис. 10), с КЭ-сеткой № 3 (см. рис. 2).

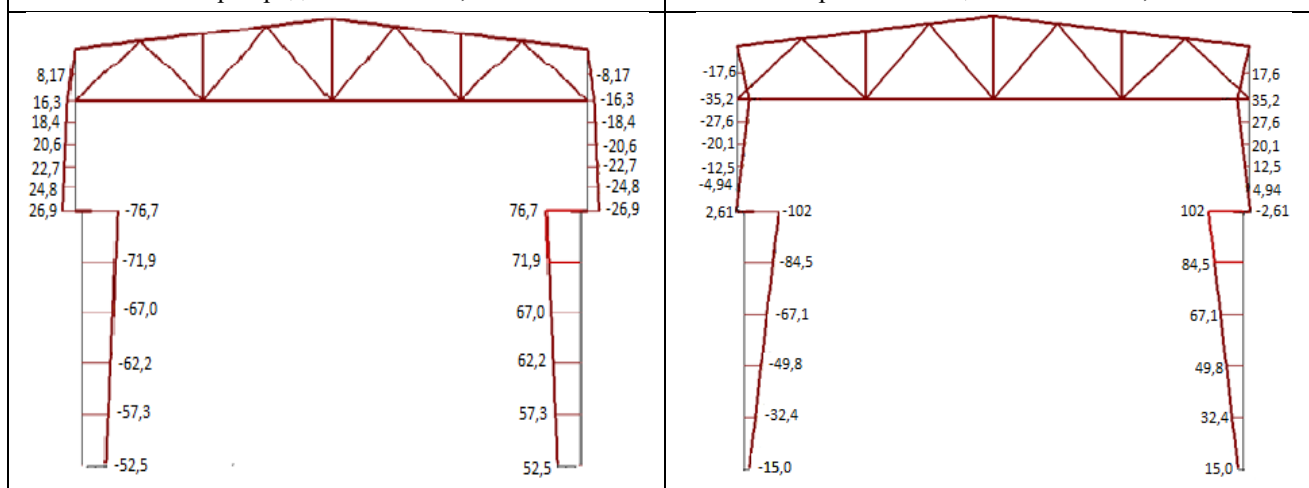
Эпюры продольных сил и изгибающих моментов при упругопластическом деформировании для КЭ-сетки № 1 представлены на рис. 5 и 6. Эти эпюры соответствуют предельному состоянию рамы в момент исчерпания её несущей способности. Эпюры продольных сил и изгибающих моментов при упругопластическом деформировании для КЭ-сетки № 2 и для КЭ-сетки № 3, возникающие в предельном состоянии каркаса практически совпадают с эпюрами КЭ-сетки № 1 и поэтому здесь не приводятся.

Прежде чем сравнивать результаты упругопластических расчётов для различных КЭ-сеток, отметим интересное изменение внутренних усилий в данной раме по сравнению с линейно-упругим деформированием. На рис. 5 и 6 видно, что с возрастанием нагрузки и развитием пластических деформаций на эпюре продольных сил  $N$  увеличиваются значения, но сама эпюра имеет тот же качественный характер, что и в упругом случае. С эпюрой изгибающих моментов  $M$  ситуация другая. При нарастании пластических деформаций в каркасе происходит заметное перераспределение внутренних усилий. Из-за этого эпюра  $M$  в колоннах по сравнению с упругим случаем меняется не только количественно, но и принципиально качественно. Характер изменения эпюры  $M$  после разрушения крайних раскосов фермы ( $KЭ=18,25$  для КЭ-сетки № 1; нагрузка:  $k=2,68$ ) показан на рис. 7, 8, 6.



**Рис. 5.** Упругопластический расчет. КЭ сетка № 1.  
Эпюра продольных сил  $N$ , кН

**Рис. 6.** Упругопластический расчет. КЭ сетка № 1.  
Эпюра изгибающих моментов  $M$ , кН\*м



**Рис. 7.** Упругопластический расчет. КЭ сетка №1.  
Эпюра изгибающих моментов  $M$ , кН\*м.  
Промежуточное состояние,  $k=2,72$

**Рис. 8.** Упругопластический расчет. КЭ сетка №1.  
Эпюра изгибающих моментов  $M$ , кН\*м.  
Промежуточное состояние,  $k=2,75$

На рис. 9 указаны места разрушения элементов и образования пластических шарниров и номера, соответствующие последовательности их возникновения.

Получена следующая схема разрушения каркаса:

- 1) разрушаются крайние раскосы фермы (  $KЭ=18,25$  для КЭ-сетки № 1 ); нагрузка:  $k=2,68$
- 2) разрушаются центральные нижние растянутые стержни фермы (  $KЭ=4,5$  для КЭ-сетки № 1); нагрузка:  $k=2,80$

При этом происходит преобразование каркаса в механизм, т. е. полная потеря несущей способности. Для КЭ-сеток № 2 и КЭ-сеток № 3 схема и последовательность разрушений полностью совпадает с КЭ-сеткой № 1.

Значения нагрузок, вызывающих разрушение соответствующих элементов каркаса, можно найти с помощью коэффициентов  $k$  из табл. 1

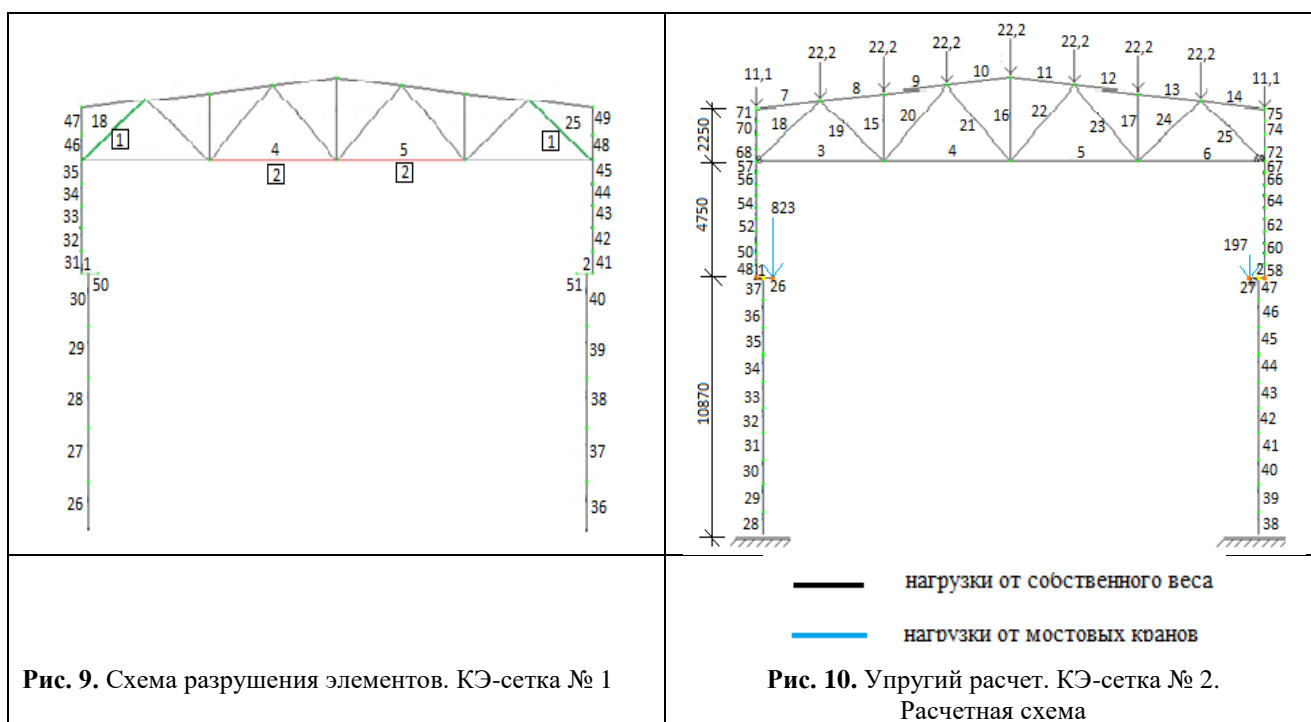


Рис. 9. Схема разрушения элементов. КЭ-сетка № 1

Рис. 10. Упругий расчет. КЭ-сетка № 2.  
Расчетная схема

Таблица 1

Номера разрушаемых КЭ и значения коэффициента  $k$  в расчёте № 1

Шаг нагрузки $\Delta P$	КЭ-сетка №1		КЭ-сетка №2		КЭ-сетка №3	
	Коэффициент $k$ , для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)	Коэффициент $k$ , для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)	Коэффициент $k$ , для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)
$0,005P_0$	2,680	18,25	2,680	18,25	2,680	18,25
	2,805	4,5	2,805	4,5	2,805	4,5
$0,01 \cdot P_0$	2,680	18,25	2,680	18,25	2,680	18,25
	2,810	4,5	2,810	4,5	2,810	4,5
$0,02 \cdot P_0$	2,680	18,25	2,680	18,25	2,680	18,25
	2,820	4,5	2,820	4,5	2,820	4,5

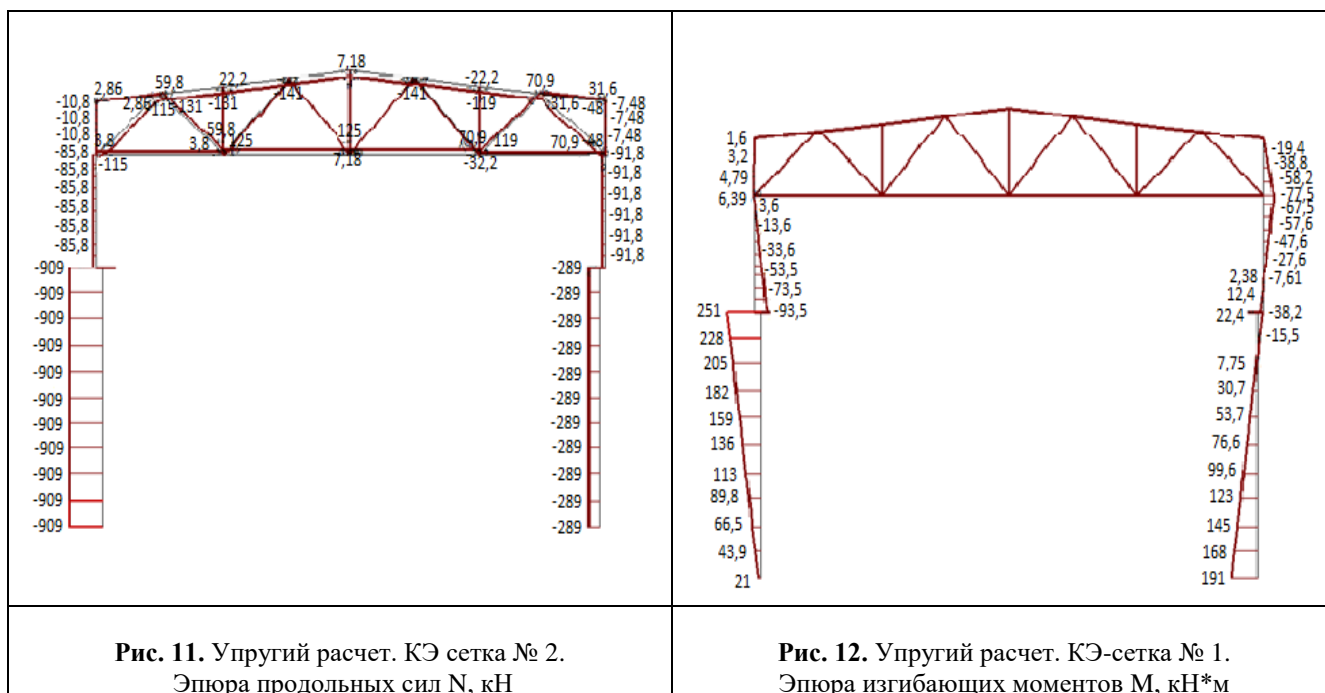


Согласно представленным результатам для упругопластических расчётов с использованием трех последовательных вложенных КЭ-сеток № 1, 2 и 3 можно сделать следующие выводы:

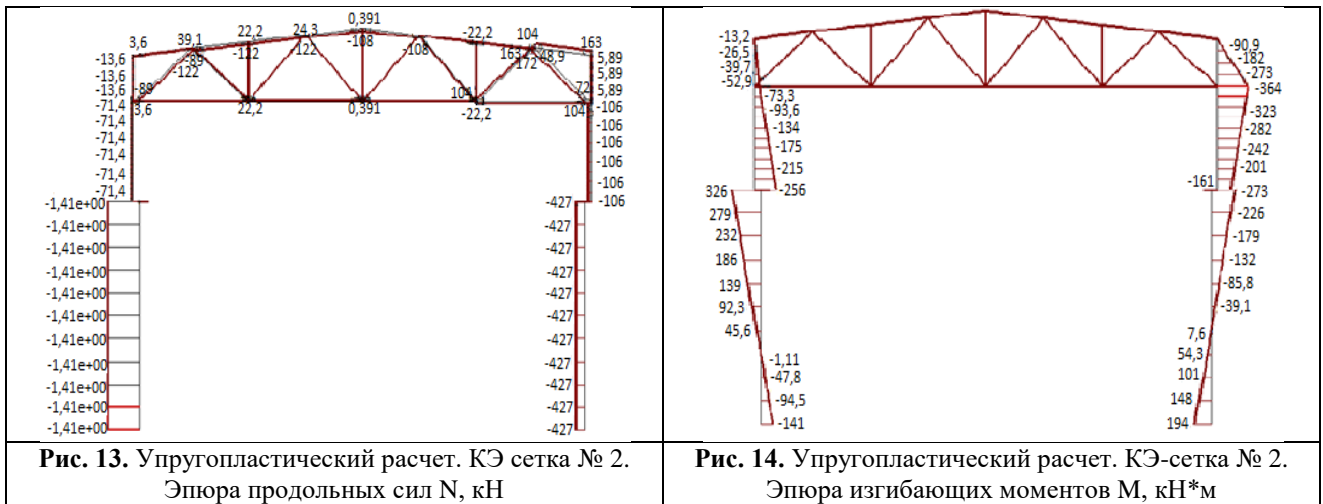
1. Наблюдается хорошее совпадение эпюр продольных сил и эпюр изгибающих моментов. Различие в продольных силах и в изгибающих моментах для разных КЭ-сеток не превышает 1 %;
2. Для всех трёх КЭ-сеток имеет место полное совпадение местоположения и порядка возникновения разрушений в каркасе, а также величин соответствующих им разрушающих нагрузок.
3. В случае любой из трёх КЭ-сеток для всех трёх шагов приращения нагрузки  $\Delta P=0,02P_0$ ,  $\Delta P=0,01P_0$ ,  $\Delta P=0,005P_0$  также имеет место полное совпадение местоположения и порядка возникновения разрушений в каркасе. При этом величины соответствующих им разрушающих нагрузок отличаются для различных шагов не более чем на 1 %.

### Расчёт № 2

Производился расчёт на совместное действие постоянной нагрузки и вертикальной крановой нагрузки (вертикальное давление крана). Для упругого расчёта расчётная схема с КЭ-сеткой № 2 показана на рис. 10, а эпюры продольных сил и изгибающих моментов - на рис. 11 и 12 соответственно.



Упругопластический расчёт осуществлялся с КЭ-сетками № 1, 2, 3. Эпюры продольных сил N и изгибающих моментов M при упругопластическом деформировании представлены для КЭ-сетки № 2 на рис. 13 и 14. Для КЭ-сетки № 1 и КЭ-сетки № 3 эпюры продольных сил N и изгибающих моментов M имеют аналогичный характер .



На рис. 15, 16 указаны места разрушения элементов и образования пластических шарниров и номера, соответствующие последовательности их возникновения. Номера разрушаемых КЭ приведены в табл. 2. Значения нагрузок, вызывающих разрушение соответствующих элементов каркаса можно найти с помощью коэффициентов k из табл. 2.

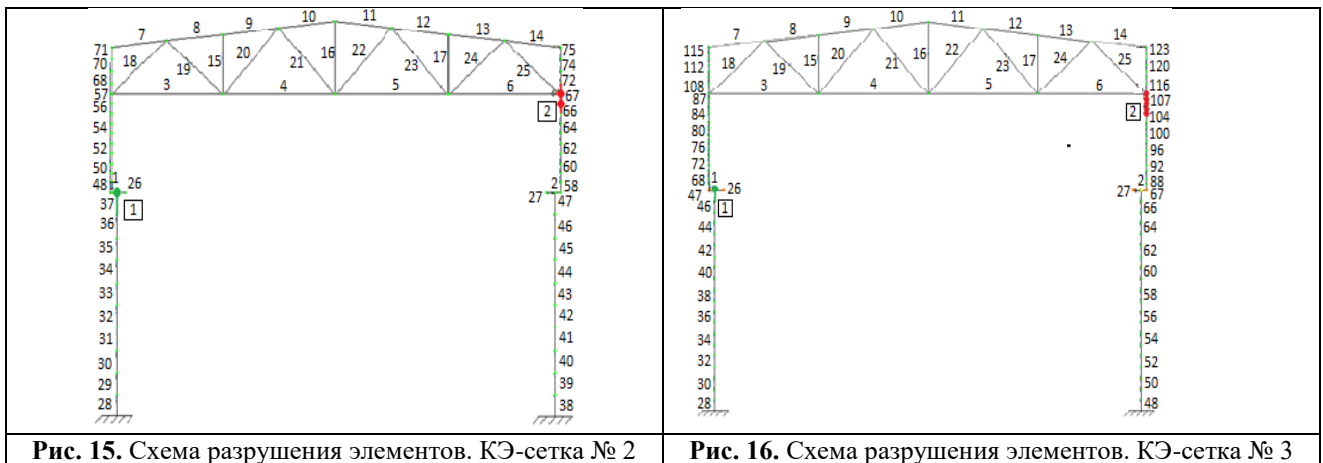


Таблица 2

Номера разрушаемых КЭ и значения коэффициента k в расчёте № 2

Шаг нагрузки $\Delta P$	КЭ-сетка №1		КЭ-сетка №2		КЭ-сетка №3	
	Коэффициент k, для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)	Коэффициент k, для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)	Коэффициент k, для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)
	1,575	30(2)	1,575	37(2)	1,575	47(2)
0,005P <sub>0</sub>	1,635	44(2), 45(1,2), 48(1)	1,630	66(2), 67(1,2), 72(1)	1,630	103(2), 104(1,2), 105(1,2), 106(1,2), 107(1,2), 116(1)

Шаг нагрузки $\Delta P$	КЭ-сетка №1		КЭ-сетка №2		КЭ-сетка №3	
	Коэффициент $k$ , для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)	Коэффициент $k$ , для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)	Коэффициент $k$ , для разрушающей нагрузки, где $P=k \cdot P_0$	Номер разрушаемых КЭ-элементов и (их узлов)
0,01·P <sub>0</sub>	1,570	30(2)	1,570	37(2)	1,570	47(2)
	1,660	44(2), 45(1,2), 48(1)	1,660	64(2),65(1,2), 66(1,2), 67(1,2), 72(1)	1,620	46(2), 47(1,2)
0,02·P <sub>0</sub>	1,580	30(2)	1,580	37(2)	1,580	47(2)
	1,720	26(1),41(2), 42(1,2),43(1,2), 44(1,2),45(1,2), 48(1)	1,660	36(2), 37(1,2)	1,620	46(2), 47(1,2)

Получена следующая схема разрушения каркаса:

1. Образуется пластический шарнир в месте сопряжения верхней и нижней ветви левой колонны ( $KЭ=30$  для КЭ-сетки № 1,  $KЭ=37$  для КЭ -сетки № 2 и  $KЭ=47$  для КЭ -сетки № 3).
2. Образуются пластические шарниры в зоне сопряжения верхней ветви правой колонны с фермой (для шага  $\Delta P=0.005P_0$   $KЭ=44,45,48$  для КЭ-сетки № 1,  $KЭ=66,67,72$  для КЭ -сетки № 2,  $KЭ=103-107,116$  для КЭ-сетки № 3).

Согласно представленным результатам для упругопластических расчётов с использованием трёх последовательных вложенных КЭ-сеток № 1 - 3 можно сделать следующие выводы:

1. Наблюдается хорошее совпадение эпюр продольных сил и эпюр изгибающих моментов. Для разных КЭ-сеток различие в продольных силах не превышает 1 % , а в изгибающих моментах – 5 %;

2. Применение более грубых шагов  $\Delta P=0,02P_0$  ,  $\Delta P=0,01P_0$  для КЭ-сеток № 2, 3 не позволяет получить точную схему разрушения. При наиболее точном шаге по нагрузке  $\Delta P=0,005P_0$  и шаге  $\Delta P=0,0025P_0$  для всех трёх КЭ-сеток схема и последовательность разрушений получается одинаковой. Значения разрушающих нагрузок также совпадают.

### Выводы

Согласно представленным результатам для расчётов № 1 и 2 можно сделать вывод, что обеспечена сходимость решения задачи по параметру – плотность КЭ сетки и по параметру – шаг приращения нагрузки  $\Delta P$ . Это позволяет говорить о достоверности используемой численной схемы нелинейного расчёта.

Таким образом, для рассматриваемых видов упругопластического нагружения ПК ЛИ-РА позволил в рамках применяемой модели расчёта получить схему разрушения рассматриваемой конструкции и величины предельных нагрузок по критерию предельного равновесия.

## Библиографический список

1. Биджиев, Р. Х. Алгоритм расчета колебаний стержня под действием подвижной нагрузки с учетом упругопластических деформаций/ Р. Х. Биджиев, В. С. Варнавский// Методы и алгоритмы расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1990. С. 77-83.
2. Биджиев, Р. Х. Расчет сталежелезобетонных балок на подвижную нагрузку с учетом ограниченных пластических деформаций/ Р. Х. Биджиев, В. С. Варнавский //Расчет прочности, устойчивости и колебаний сооружений: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1990. С. 18-25.
3. Варнавский, В. С. Алгоритм расчета колебания упругопластического стержня под действием подвижной нагрузки с учетом деформации сдвига и инерции вращения/ В. С. Варнавский //Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1993. - С. 33-38.
4. Варнавский, В. С. Численные исследования упругопластического деформирования балок под действием неинертной подвижной нагрузки/ В. С. Варнавский // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1994. - С. 101-108.
5. Варнавский, В. С. Расчёт неразрезной балки под действием подвижной нагрузки с учётом упругопластических деформаций материала/ Варнавский В. С.//Материалы 47-й научно-технической конференции тезисы докладов аспирантов и соискателей по проблемам архитектуры и строительных наук. - Воронеж, 1994. - С. 16-18.
6. Варнавский, В. С. Расчет балочных и стержневых систем на подвижную нагрузку с учетом пластических деформаций материала: автореф. дис. ... канд. техн. наук / В. С. Варнавский; Воронеж. гос. арх-строит акад. - Воронеж, 1994.
7. Варнавский, В. С. Динамический расчет упруго-вязкопластичной балки на подвижную нагрузку/ В. С. Варнавский / Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1998. С. 36-43.
8. Варнавский, В. С. Численные исследования деформирования балок в области малых пластических деформаций при подвижной нагрузке/ В. С. Варнавский// Современные проблемы механики и прикладной математики: тезисы докладов школы. 1998. С. 65.
9. Варнавский, В. С. Упругопластическое деформирование неразрезной балки под действием подвижной нагрузки/ В. С. Варнавский// Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2000. - С. 91-97.
10. Варнавский, В. С. Моделирование процессов повторно-переменного и знакопеременного нагружений для строительных сталей в области малых пластических деформаций/ В. С. Варнавский// Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2000. - С. 47-53.
11. Варнавский, В. С. Алгоритм моделирования колебаний сталежелезобетонных мостовых балок при нелинейных колебаниях с учетом влияния скорости деформации и предыстория загрузки/ В. С. Варнавский, Р. Х. Биджиев// Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Серия: Дорожно-транспортное строительство. – Воронеж, 2004. - № 3. - С. 40-45.
12. Варнавский, В. С. Определение несущей способности металлического рамного каркаса с применением программного комплекса Лира/ В. С. Варнавский, А. С. Поворин// Строительная механика и конструкции. - 2011. - Т. 2. - № 3. - С. 113-121.

13. Варнавский, В. С. Численное исследование несущей способности металлической рамы на основе программного комплекса Лира/ В. С. Варнавский, А. О. Болотов // Строительная механика и конструкции. - 2014. - Т. 1. - № 8. - С. 117-125.
14. Варнавский, В. С. Расчёт плоского стального каркаса на статическую нагрузку с учётом пластических деформаций материала/ В. С. Варнавский, Г. Е. Габриелян, М. М. Мартынова // Строительная механика и конструкции. - 2018. - Т. 3. - № 18. - С. 51-60.

#### References

1. Bidjiev R.H., Varnavsky V.S. The algorithm for calculating the vibrations of the rod under the action of a moving load taking into account elastic-plastic deformations. In the collection: Methods and algorithms for calculating structures. Voronezh, 1990. Pp. 77-83.
2. Bidjiev R.H., Varnavsky V.S. Calculation of steel-concrete composite beams to moving load taking into account the limited plastic deformations. In the collection: Calculation of strength, stability and vibrations of structures. Interuniversity collection of scientific works. Voronezh Institute of Civil engineering. Voronezh, 1990. Pp. 18-25.
3. Varnavsky V.S. The algorithm of calculation of vibrations of elasto-plastic rod under the action of a moving load taking into account shear deformation and rotational inertia. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures. Voronezh, 1993. Pp. 33-38.
4. Varnavsky V.S. Numerical studies of elastic-plastic deformation of beams under the action of non-inert moving load. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures and structures. Voronezh, 1994. Pp. 101-108.
5. Varnavsky V.S. Calculation of a continuous beam under the action of a moving load taking into account elastic-plastic deformations of the material. In the collection: Proceedings of the 47th scientific and technical conference abstracts of postgraduates and applicants on the problems of architecture and construction Sciences. Voronezh, 1994. Pp. 16-18.
6. Varnavsky V.S. Calculation of beam and rod systems to moving load taking into account plastic deformations of material. Abstract of the thesis for the degree of candidate of technical Sciences. Voronezh Academy of architecture and construction. Voronezh, 1994.
7. Varnavsky V.S. Dynamic analysis of elastic-viscoelastic beams to moving load. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures. Interuniversity collection of scientific works. Voronezh, 1998. Pp. 36-43.
8. Varnavsky V.S. Numerical investigation of deformation of beams in the field of small plastic deformations under dynamic load. In the book: Modern problems of mechanics and applied mathematics. Abstracts of the school reports. 1998. 65 p.
9. Varnavsky V.S. Elastic-plastic deformation of a continuous beam under the action of moving load. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures. Voronezh, 2000. Pp. 91-97.
10. Varnavsky V.S. Modeling of re-alternating and alternating loading processes for building steels in the field of small plastic deformations. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures and structures. Voronezh, 2000. Pp. 47-53.
11. Varnavsky V.S., Bidjiev R.H. The algorithm of modeling of vibrations of steel-concrete composite bridge beams in nonlinear oscillations taking into account the influence of strain rate and background loading. Scientific Bulletin of Voronezh state University of architecture and construction. Series: Road and transport construction. No. 3. 2004. Pp. 40-45.

12. Varnavsky V.S., Povorin A.S. Determination of metal frame load-bearing capacity using design-computational complex Lira. Structural mechanics and structures. No.2(3). 2011. Pp. 113-121.
13. Varnavsky V.S., Bolotov A.O. Numerical investigation of load-bearing capacity of metal frame using design-computational complex Lira. Structural mechanics and structures. No.1(8). 2014. Pp. 117-125.
14. Varnavsky V.S., Gabrielyan G.E., Martynova M.M. Calculation of a flat steel frame on static load taking into account plastic deformations of a material. Structural mechanics and structures. No.3(18). 2018. Pp. 51-60.

## CALCULATION OF THE FLAT STEEL FRAME FOR PERMANENT AND TEMPORARY LOAD TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC DEFORMATIONS OF THE MATERIAL

V. S. Varnavsky<sup>1</sup>, G.E. Gabrielyan<sup>2</sup>, V.V. Vostrikov<sup>3</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2,3</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Technical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Structural Mechanics,  
e-mail: [mailVVS@inbox.ru](mailto:mailVVS@inbox.ru)

<sup>2</sup> PhD of Technical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Structural Mechanics,  
e-mail: [grayr2010@rambler.ru](mailto:grayr2010@rambler.ru)

<sup>3</sup> MA Student of the Department of Structural Mechanics,  
e-mail: [vlad-vost2012@yandex.ru](mailto:vlad-vost2012@yandex.ru)

---

The distribution of the bearing capacity of a metal flat frame according to the criterion of limiting equilibrium is considered. A step-by-step process of elastoplastic deformation of a structure is simulated up to the destruction of the structure. An assessment is given of the capabilities of LIRA PCs for performing calculations of a statically indeterminate rod steel frame taking into account plastic deformations of the material.

**Keywords:** steel frame, bearing capacity, ultimate balance, LIRA software package

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.07

## УСИЛЕНИЕ ОСНОВАНИЙ ФУНДАМЕНТОВ МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ОБОЛОЧКАМИ

В. В. Леденёв<sup>1</sup>, Я. В. Савинов<sup>2</sup>

Тамбовский государственный технический университет<sup>1</sup>

АО «ТАМАК»<sup>2</sup>

Россия, г. Тамбов

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры конструкций зданий и сооружений

<sup>2</sup> Канд. техн. наук, эксперт инвестиционных проектов

Приведены результаты экспериментальных исследований напряженно-деформированного состояния оснований фундаментов мелкого заложения, усиленных цилиндрическими оболочками.

Рассмотрены эпюры горизонтальных напряжений в основании фундаментов при наличии и отсутствии цилиндрических оболочек.

Исследован механизм взаимодействия подземных конструкций.

**Ключевые слова:** грунтовое основание, жесткий штамп, цилиндрическая оболочка, несущая способность, перемещения.

### Введение

Проблемы безопасного строительства обсуждалось в [4, 5...12, 13]. Одновременно в течение длительного времени научно обосновываются способы повышения экономичности, долговечности и надежности возведения различных объектов [1...5, 11...13]. Механизм деформирования и разрушения оснований фундаментов описан в [6...9]. Одним из эффективных способов повышения несущей способности основания является ограничение боковых сдвиговых деформаций цилиндрическими оболочками [1, 9].

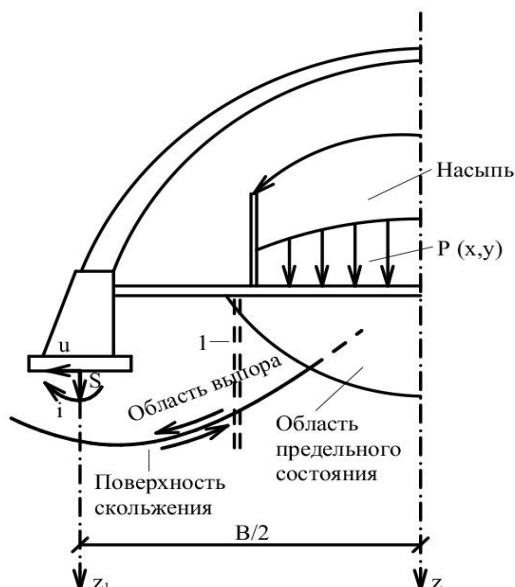
На практике применяют и такие решения, как устройство ограждающих стенок, вдавливание в грунт оболочек, насадок, блоков, свай и др.

В ряде случаев близко расположенные фундаменты оказывают взаимное влияние друг на друга, увеличивая неравномерности деформаций оснований, что приводит к повреждениям конструкций и нарушению технологического процесса (рис. 1). То же касается и близко расположенных зданий или сооружений.

**Цель и задачи экспериментов.** Предусматривалось получение функций влияния параметров ограждающих конструкций на несущую способность и перемещения основания и фундаментов для обоснования оптимальных инженерных решений.

Поставлены и решены следующие экспериментальные задачи:

- смоделировать механизмы взаимодействия системы «основание - фундаменты»
- выбрать геометрические и жесткостные параметры ограждающих конструкций
- установить влияние этих параметров на напряженно-деформированное состояние основания
- исследовать распределение горизонтальных напряжений, вызванных нагружением модели фундамента, на вертикальные штампы
- разработать конструктивные рекомендации.



**Рис. 1.** Пример влияния вертикальной нагрузки  $p(x, y)$  на устойчивость фундамента арочной конструкции: I – рекомендуемая ограждающая стенка

**Постановка опытов.** Эксперименты проводили в стальных пространственных лотках размером  $2000 \times 2000 \times 1100$  (h) мм и  $1800 \times 1000 \times 850$  (h) мм с учетом силового и геометрического подобия.

Грунтовым основанием являлся послойно уплотнённый до  $\rho = 1.60$  г/см<sup>3</sup> мелкозернистый песок в маловлажном состоянии ( $w \approx 0,035$ ,  $\phi = 28^\circ$ ,  $c = 2$  кПа). Моделями фундаментов служили жесткие (по критерию М. И. Горбунова-

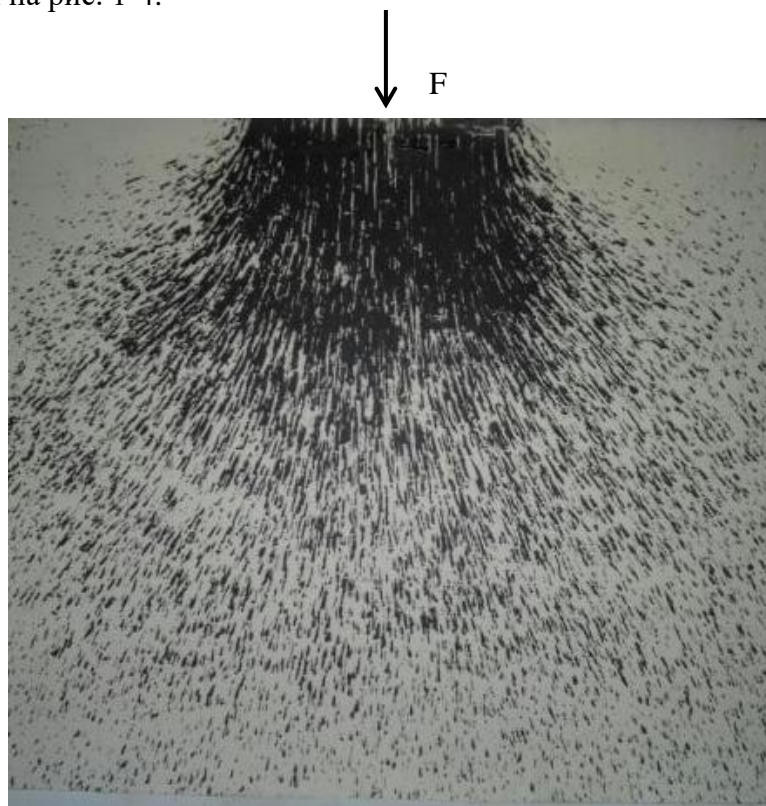
Посадова) стальные круглые диски с шероховатой контактной поверхностью.

Нагрузку (центральную или внецентренную вертикальную, или наклонную) создавали гидравлическим домкратом через цилиндрический шарнир или рычагом с острым и плоским концом, входящим в пазы штампа.

Методика экспериментов подробно описана в [7, 8, 14]. Ограждающие цилиндрические стенки изготавливали из листовой стали, пластика в виде цилиндров, жестких, гибких и конечной жесткости листов.

Дополнительные сведения о методике экспериментов можно найти в [6].

**Обсуждение результатов опытов.** Особенности деформирования и разрушения основания отмечены на рис. 1-4.



**Рис. 2.** Следы смещений частиц песка по окрашенному меловым раствором стеклу. Опыты проводили в плоском лотке со стеклянной передней стеной



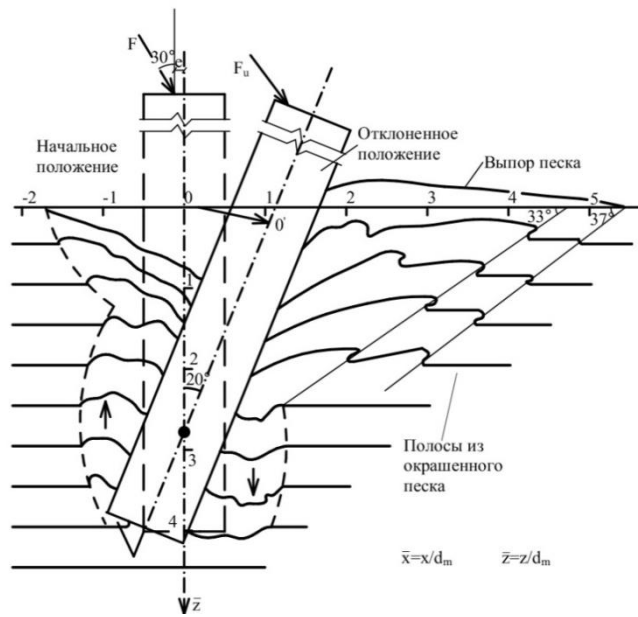
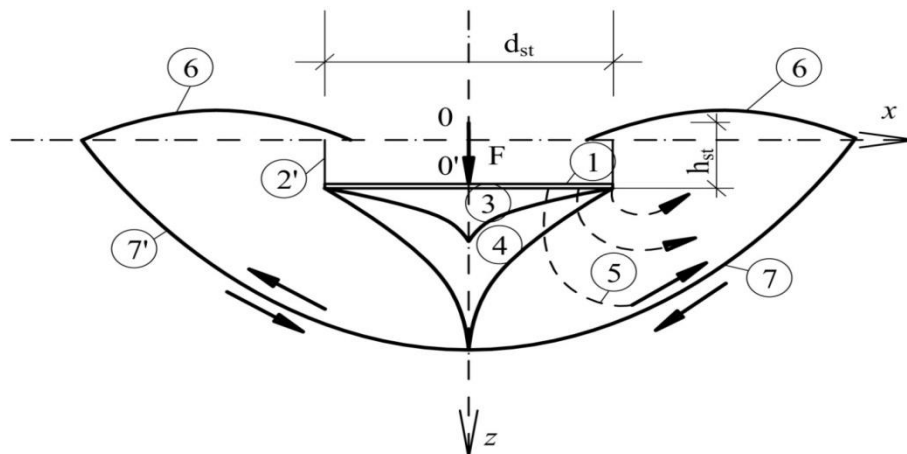


Рис. 3. Картина деформирования первоначально горизонтальных полос из окрашенного песка

а)



б)

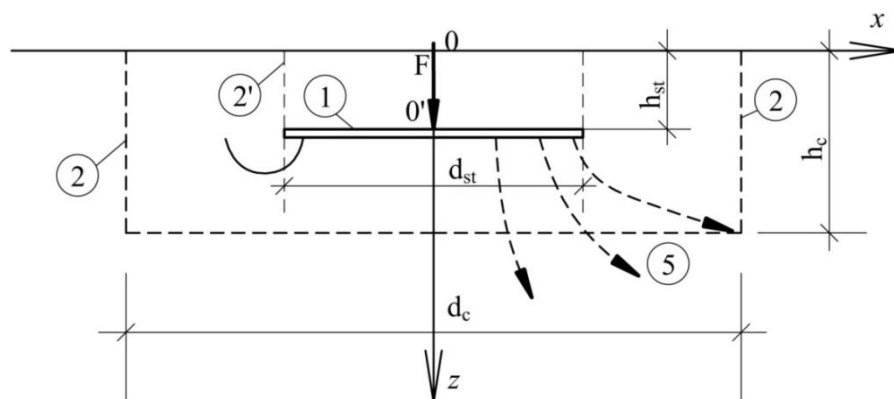
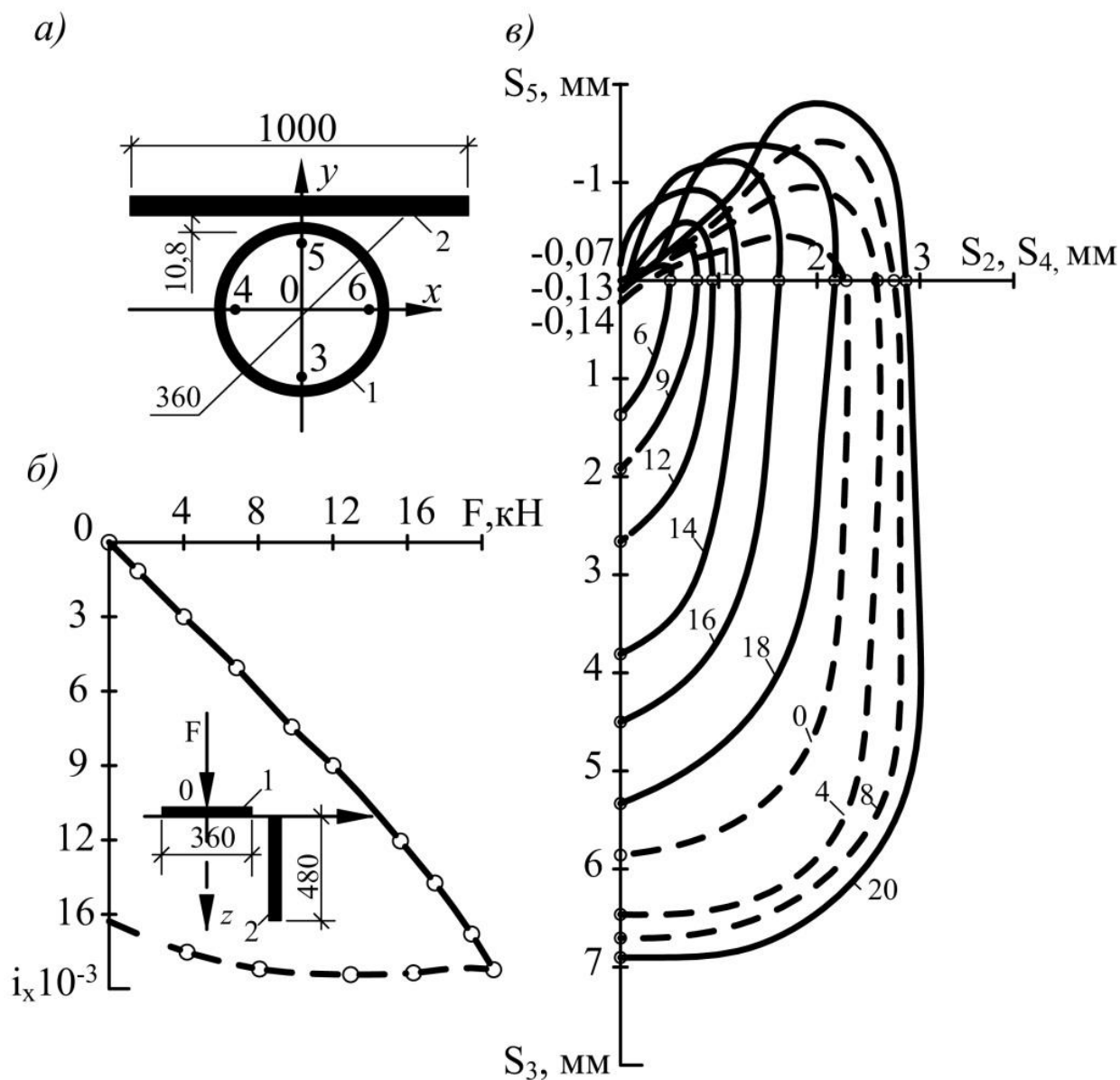


Рис. 4. Схема деформирования основания без ограждающего кольца (а) и при наличии его (б):  
 1-круглый штамп; 2-ограждающее кольцо, ограничившее боковые деформации грунта;  
 2'-кольцо для предохранения от осыпания песка; 3-жесткое ядро; 4-пластическое ядро;  
 5-траектории частиц песка; 6-поверхность выпираемого штампом грунта; 7-поверхность скольжения

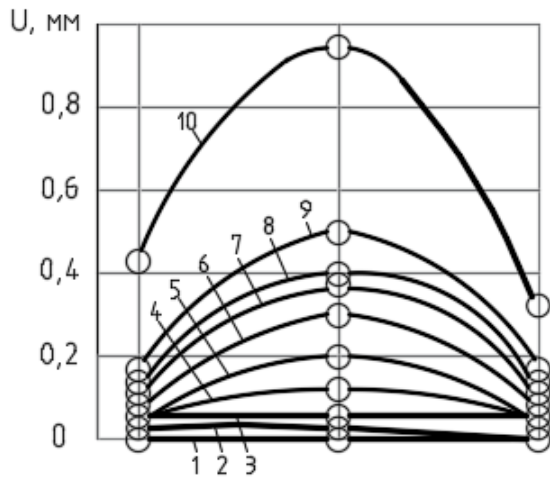
**Влияние ограждающих конструкций на несущую способность и перемещение нагружаемого штампа.** Как показано на рис. 5-7, ограничение деформаций основания приводит к многократному увеличению несущей способности, изменению величин и направлений перемещений нагруженной модели фундамента.



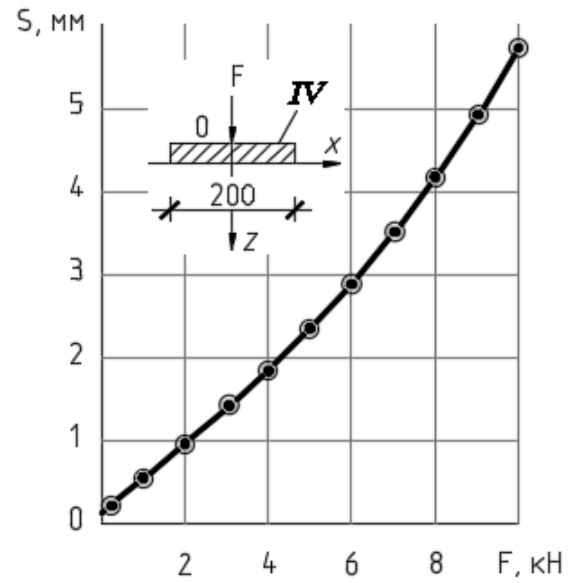
**Рис. 5.** Расположение горизонтального жесткого штампа (1) и вертикальной стенки (2) в плане (а); график зависимости крена горизонтального штампа от нагрузки (б); эпюры вертикальных перемещений краевых точек по осям  $Ox$  и  $Oy$  (в)

(Опыты проводили Ю. А. Клинков, В. В. Леденёв, Я. В. Савинов)

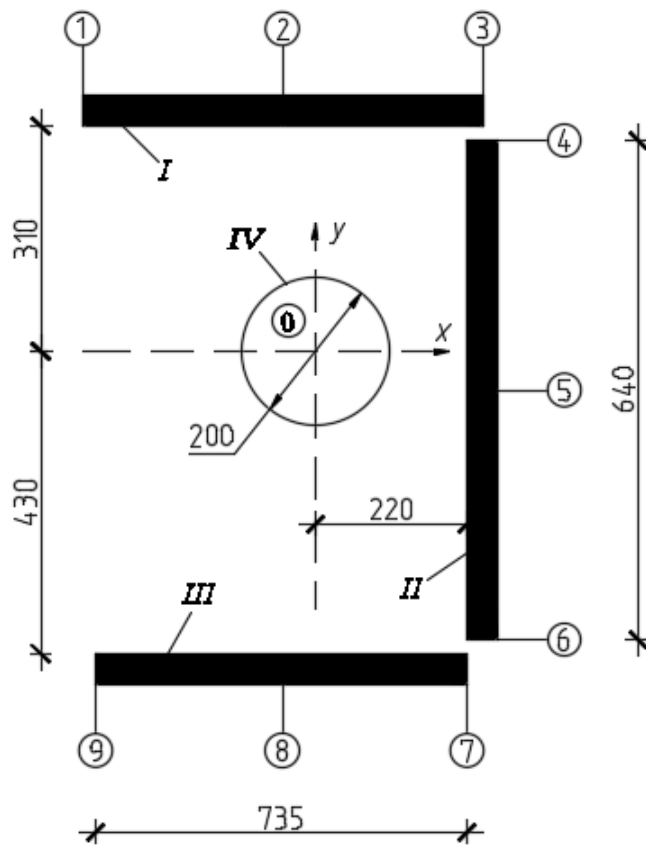
a)



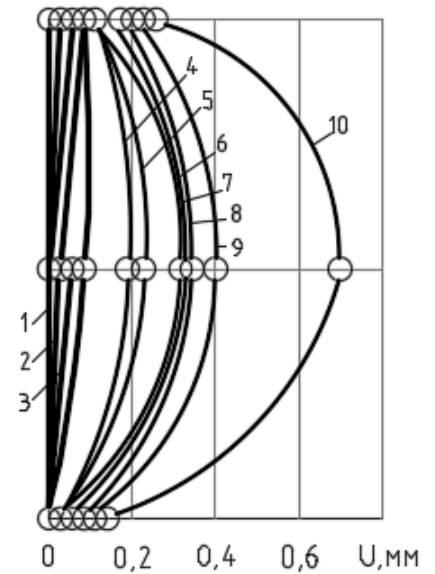
б)



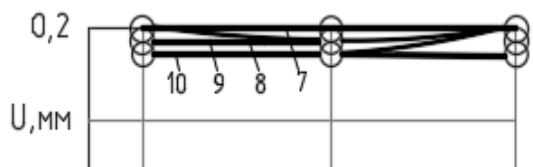
в)



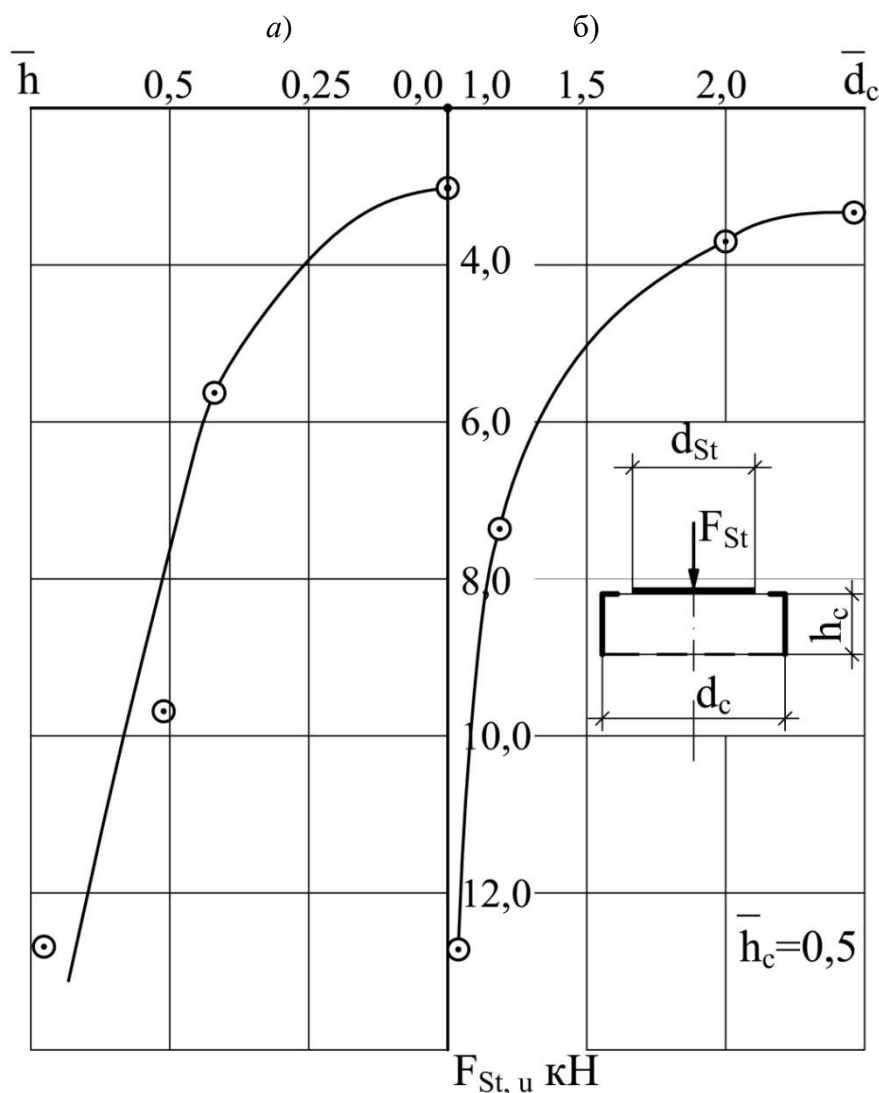
г)



д)



**Рис. 6.** Эпюры (а, д, г) горизонтальных перемещений ограждающих гибких стенок I, II, III от действия осевой вертикальной силы на штамп IV (в); зависимость между нагрузкой на штамп IV и его осадкой (б); цифры в кружочках (1-9) обозначают номера индикаторов. Нагрузки, кН: 1-1; 2-2; 3-3; 4-4; 5-5; 6-6; 7-7; 8-8; 9-9; 10-10



**Рис. 7.** Графики зависимости несущей способности основания жесткого незаглубленного штампа  $F_{st, u}$  от относительной глубины ограждающего кольца  $\bar{h}_c = h_c / d_{st}$  (а) и его относительного диаметра  $\bar{d}_c = d_c / d_{st}$  (б) при  $d_{st} = 200$  мм

**Исследование распределения горизонтальных напряжений.** При нагружении фундамента формируются поля напряжений и деформаций. Характер их зависит от множества факторов:

- вида и состояния грунта
- формы фундаментов
- нагрузок и воздействий
- жесткостных свойств системы «основание – фундамент – здание (сооружение)»
- наличия в основании близко расположенных подземных конструкций и их параметров
- изменений во времени механических, реологических и жесткостных свойств как отдельных элементов, так и системы в целом
- ошибок при определении свойств материалов, нагрузок и воздействий, моделировании, выборе расчетных схем и др.

В общем случае исследовали функцию:

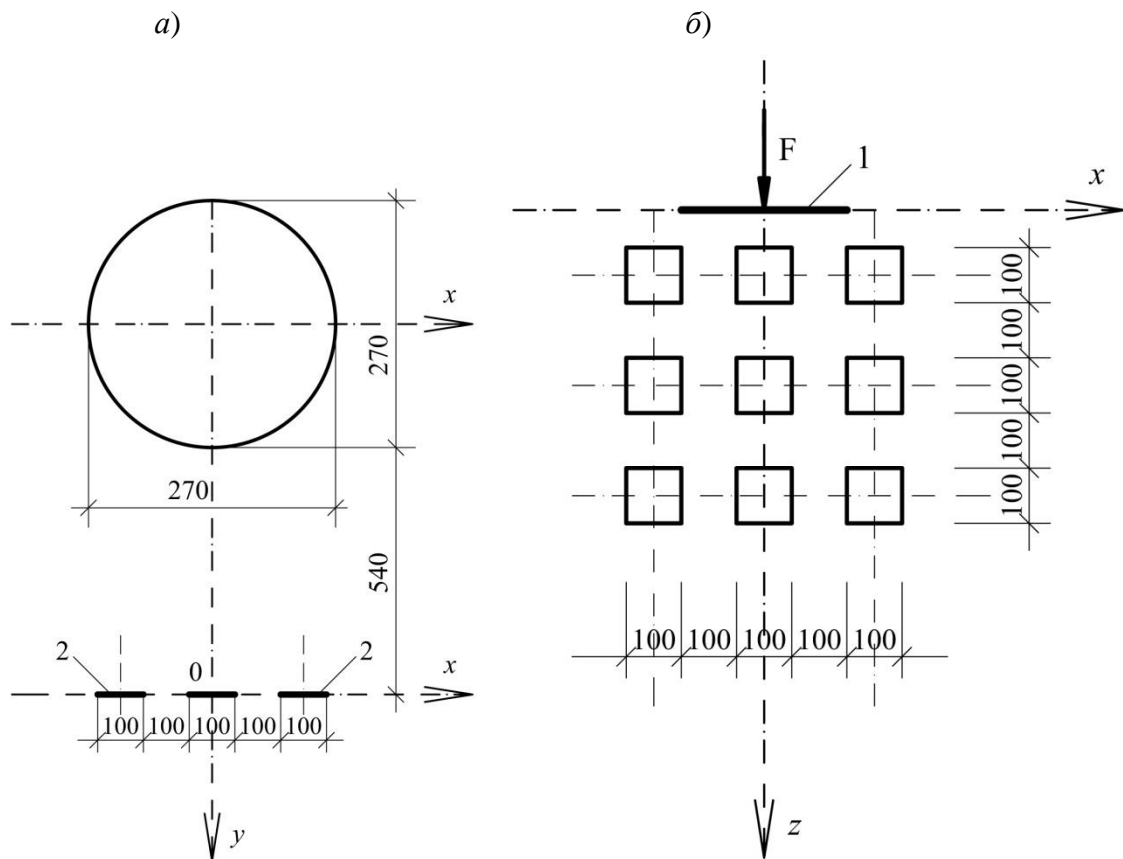
$$\sigma_{y,c} = \sigma_y(\rho, \omega, c, \varphi, E, F, F_u, \bar{F}, d_{st}, \delta_x, \delta_y, e_{ox}, e_{oy}, L_i, \bar{L}_1, \lambda_{st}),$$

где  $i = x, y, z$ ;  $\rho, \omega$  – плотность и влажность грунта;  $c, \varphi, E$  – удельное сцепление, угол внутреннего трения и модуль деформаций грунта;  $F, F_u$  – сосредоточенная сила и её разрушающая величина;  $\bar{F} = F/F_u$ ;  $\delta_x$  – угол наклона силы к вертикали;  $e_x, e_y$  – эксцентриситеты силы  $F$  по координатным осям;  $e_{ox}, e_{oy}$  – относительные эксцентриситеты;  $e_o = e/R_{st}$ ;  $R_{st}$  – радиус штампа;  $d_{st}$  – диаметр штампа;  $L_i$  – расстояние от оси штампа до вертикальной плоскости, на которой определяются горизонтальные напряжения;  $\bar{L}_i = L_i/d_{st}$ ;  $\lambda_{st} = h/d_{st}$ ;  $h$  – заглубление штампа от поверхности основания.

В экспериментах исследовали распределение горизонтальных составляющих напряжений, действующих в активной зоне и вызываемых нагружением фундаментов или их моделей.

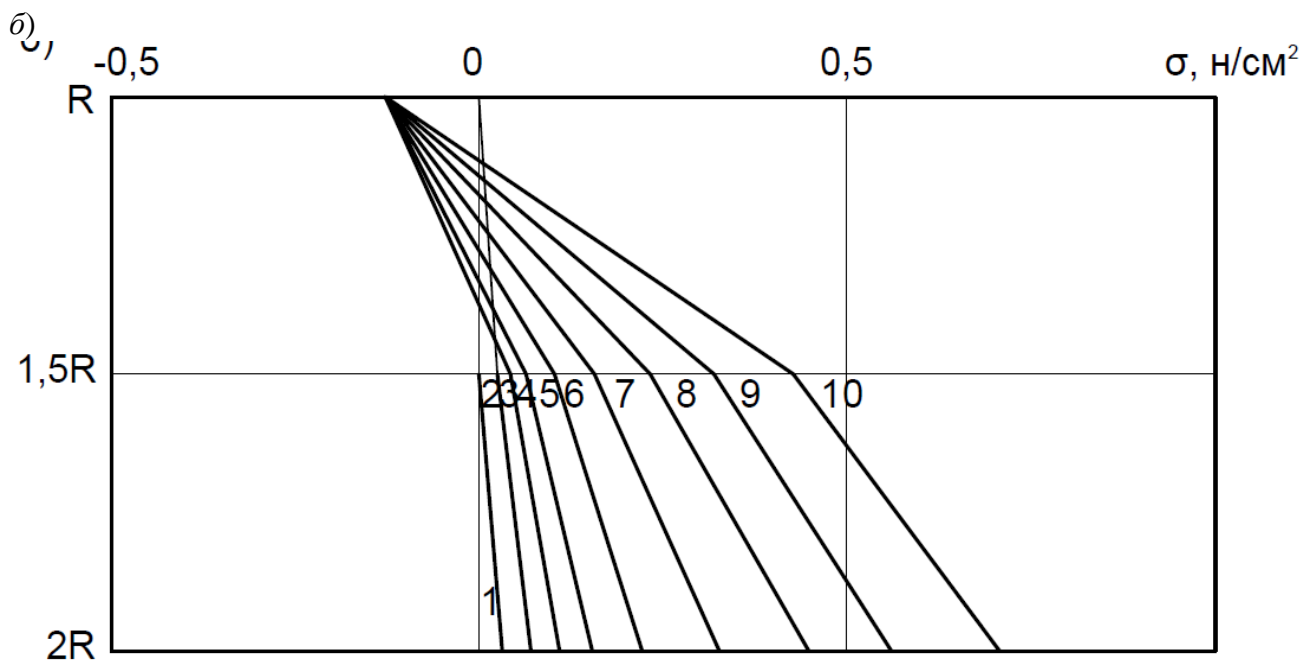
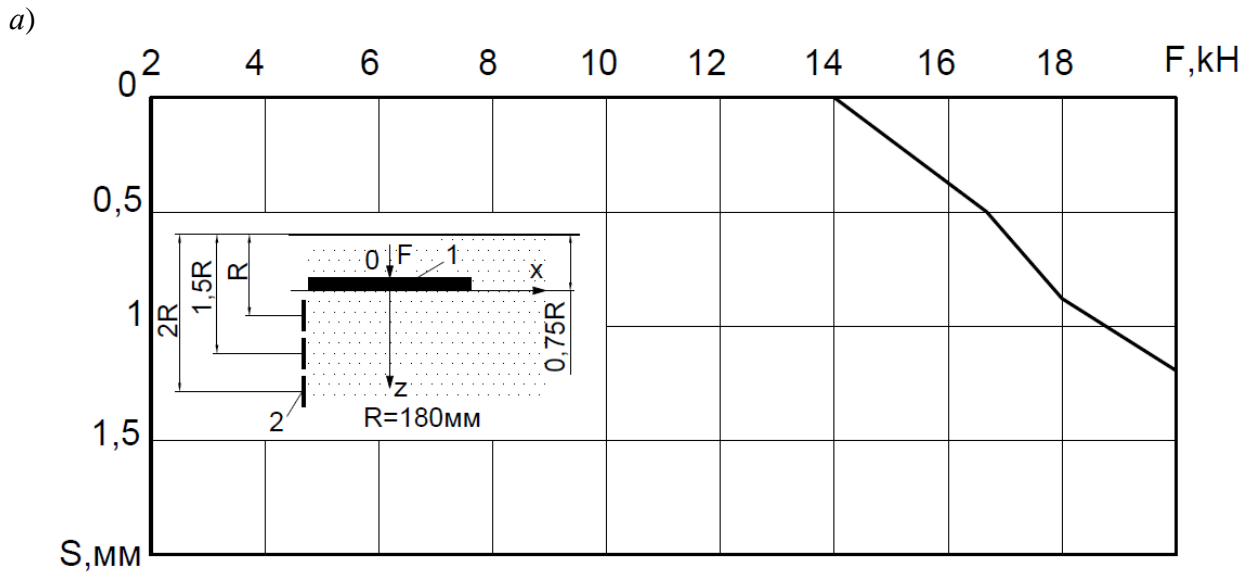
С этой целью в основании по определённой схеме устанавливали жесткие вертикальные штампы. С помощью динамометров сжатия измеряли средние величины напряжений.

Как правило, в опытах устанавливали по девять штампов с девятью динамометрами, расположенными в вертикальных плоскостях  $yOz$ , перпендикулярных оси  $x$  (рис. 8 а, б) и удаленных от оси круглых штампов или цилиндрических моделей фундаментов на расстояния, кратные их диаметрам.

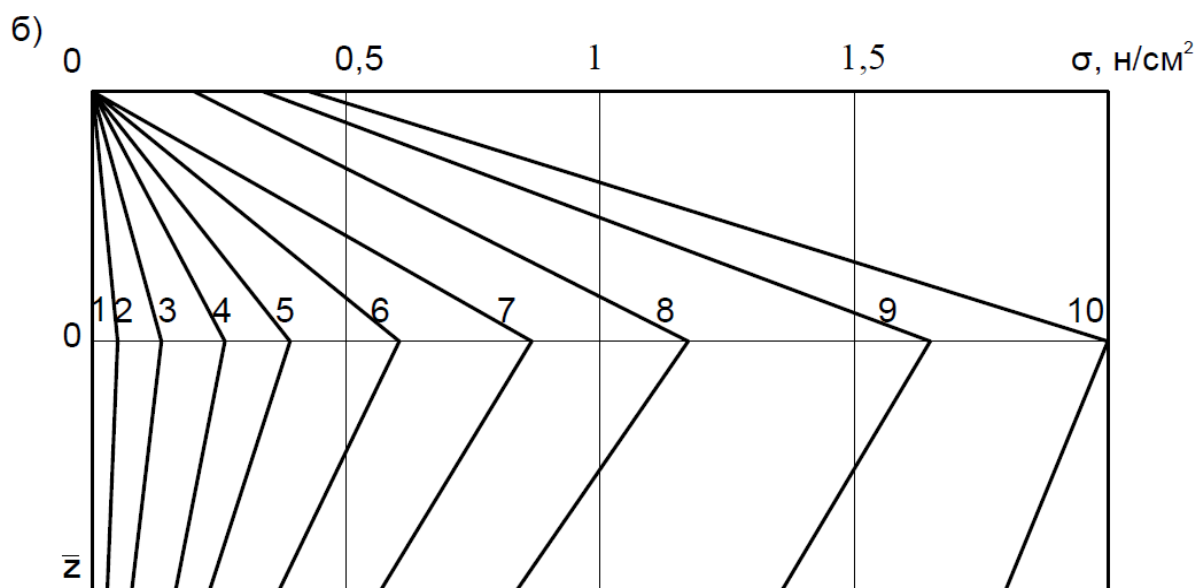
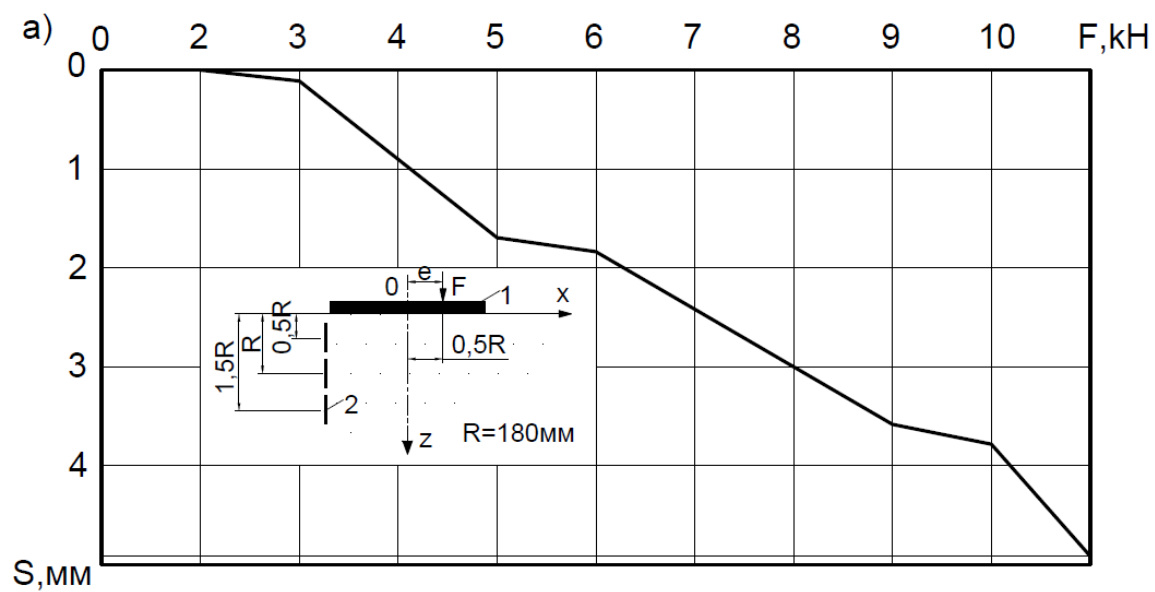


**Рис. 8.** Расположение горизонтального незаглубленного жесткого штампа (1) и вертикальных (2) в плане (а) и в разрезе (б)

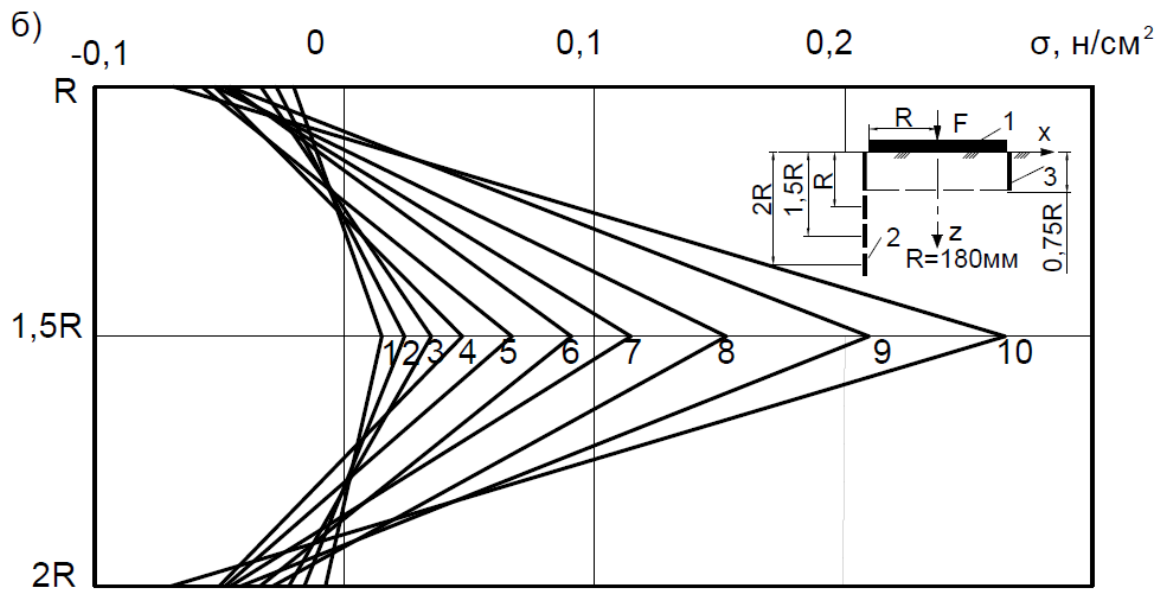
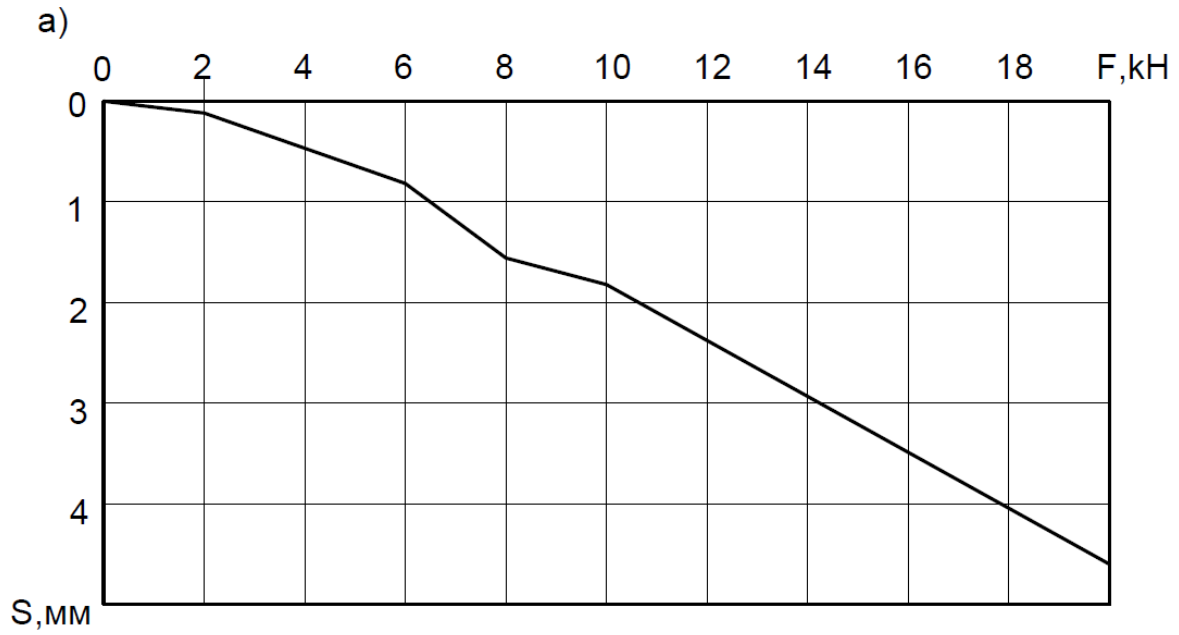
На рис 9-12 приведены графики перемещений нагружаемого штампа и эпюры вертикальных давлений грунта на вертикальные штампы при разных расположениях ограждающего цилиндрического кольца и схемах нагружения.



**Рис. 9.** График зависимости осадки заглубленного горизонтального штампа (1) от нагрузки при  $\lambda = 0,375$ ;  $e_0 \approx 0$  (а); эпюры горизонтального давления грунта на вертикальные штампы (2) при  $F_{st}$  (кН): 1-2, 2-4, 3-6, 4-8, 5-10, 6-12, 7-14, 8-16, 9-18, 10-20

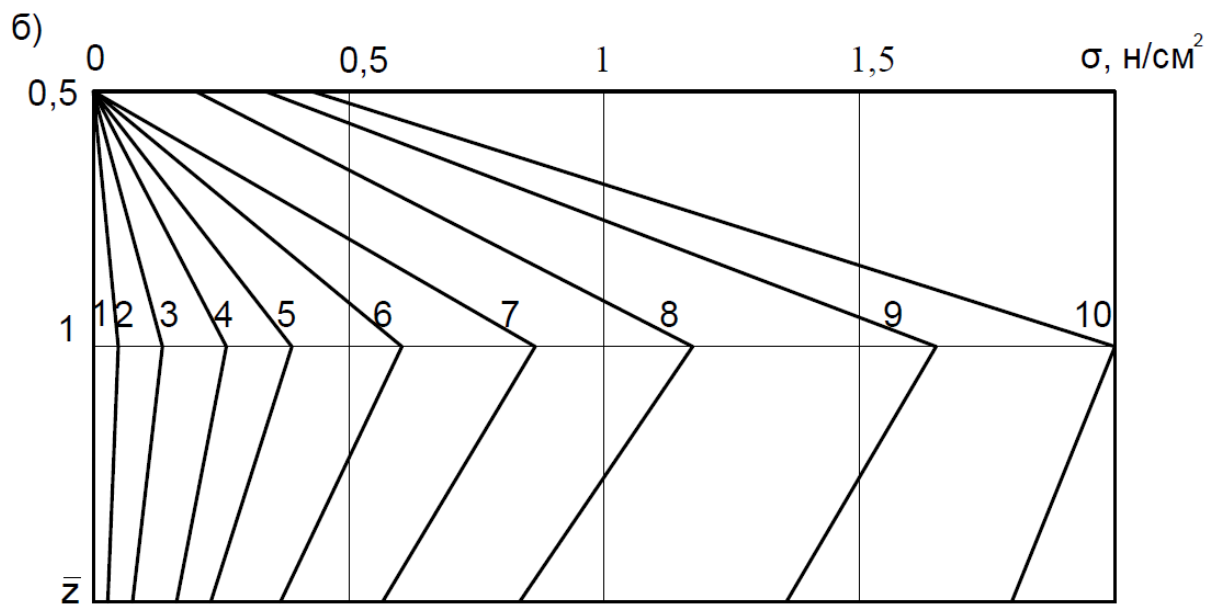
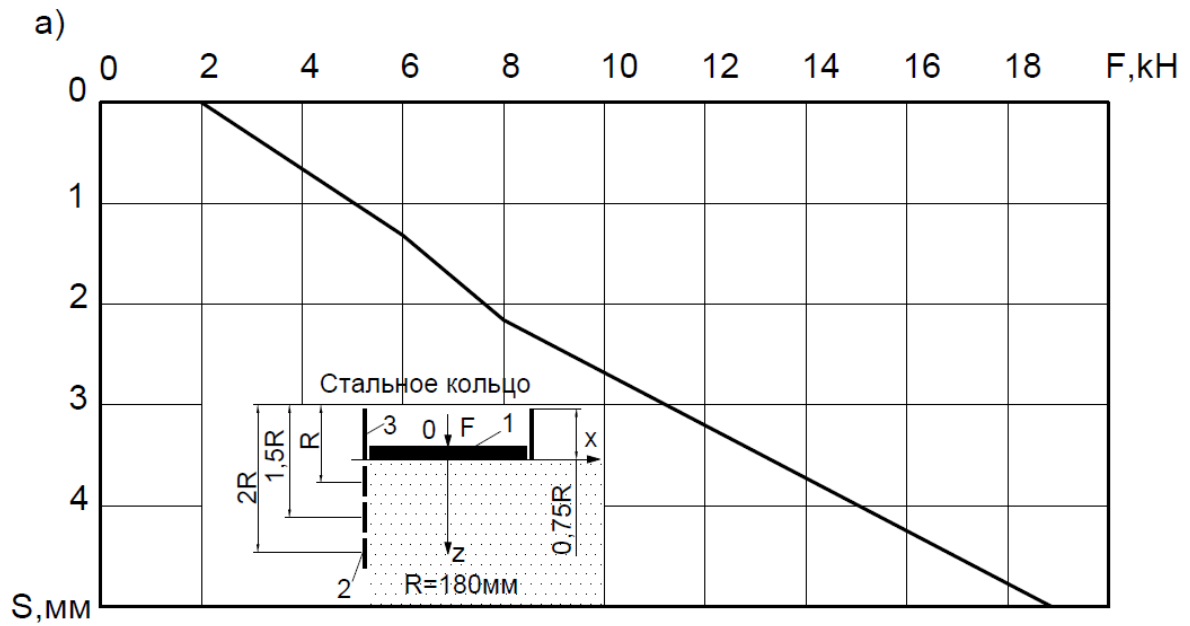


**Рис. 10.** График зависимости осадки горизонтального незаглубленного штампа (1) от нагрузки при  $\lambda \approx 0$ ;  $e_0 = 0,5$  (а); эпюры горизонтального давления грунта на вертикальные штампы (2) при  $F_{sr}$  (кН): 1-2, 2-4, 3-6, 4-8, 5-10, 6-12, 7-14, 8-16, 9-18, 10-20



**Рис. 11.** График зависимости осадки горизонтального незаглубленного штампа (1) передающего нагрузку на основание через грунт в кольце (3) при  $\lambda \approx 0$ ;  $e_0 \approx 0$  (а); эпюры горизонтального давления грунта на вертикальные штампы (2) при  $F_{sr}$  (кН): 1-2, 2-4, 3-6, 4-8, 5-10, 6-12, 7-14, 8-16, 9-18, 10-20





**Рис. 12.** График зависимости осадки заглубленного горизонтального штампа (1) с ограждающим кольцом (3) от нагрузки при  $\lambda = 0,375$ ;  $e_0 \approx 0$  (а); эпюры горизонтального давления грунта на вертикальные штампы (2) при  $F_{ст}$  (кН): 1-2, 2-4, 3-6, 4-8, 5-10, 6-12, 7-14, 8-16, 9-18, 10-20

Отмечено значительное повышение несущей способности основания с увеличением заглубления штампа и с установкой ограждающего кольца.

## Выводы и практические рекомендации

1. Устройство ограждающих стенок является эффективным инженерным приёмом, обеспечивающим:
  - значительное повышение несущей способности оснований фундаментов;
  - ограничение по величине, направлению и соотношению составляющих перемещений фундаментов;
  - снижение перемещений близко расположенных подземных конструкций и предохранение конструкций от возможных повреждений и разрушений.
2. Наиболее оптимальное решение по расходу материалов, стоимости и трудоёмкости при обеспечении необходимой надёжности и долговечности может быть достигнуто:
  - локальным уплотнением грунтов основания, закреплением или армированием,
  - изменением формы и пространственного расположения фундаментов (смещение от разбивочных осей, устройство наклонной подошвы, краевых ребер, нагрузочных консолей),
  - регулированием параметров нагрузки, например, созданием разгрузочных моментов,
  - выбором оптимальной комбинации влияющих параметров.
3. Важными направлениями исследований, на наш взгляд, являются:
  - разработка методов расчета систем «основание – фундаменты - сооружение»
  - учет технологии строительства, изменений условий эксплуатации и, в первую очередь, повышения влажности и агрессивности грунтов
  - разработка способов регулирования усилий в конструктивных системах
4. Предложенная и опробованная методика измерения горизонтальным составляющих напряжений может быть использована и для решения других экспериментальных задач по исследованию напряженно-деформированного состояния среды.

## Библиографический список

1. Болдырев, Г. Г. Механика грунтов. Основания и фундаменты (в вопросах и ответах): монография / Г. Г. Болдырев, М. В. Малышев: ООО «Прондо», 2015. – 426 с.
2. Горбунов-Посадов, М. И. Устойчивость фундаментов на песчаном основании / М. И. Горбунов-Посадов. – М.: Госстройиздат, 1962. – 96 с.
3. Дашков, А. З. Опыт проектирования конструкций фундаментов с оболочками для строительства каркасного производственного здания / А. З. Дашков, Э. В. Аринина // Межвуз. сб. «Основания и фундаменты». Новочеркасск: НПИ, 1976. – С. 85-90.
4. Дегтярев, Б. М. Концепция инженерно-строительной безопасности городских территорий/ Б. М. Дегтярев// Academia.-№2.-2010.-С.43-48
5. Крутов, В. И. Фундаменты мелкого заложения /В.И. Крутов, Е.А. Сорочан, В.А. Ковалев.-М.:АСВ, 2009. – 232 с.
6. Леденёв, В. В. Зависимость горизонтальных напряжений в грунте от действия вертикальной нагрузки на фундамент и плотности основания / В. В. Леденёв, М. А. Чуканов, В. С. Чуксин // Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2011. Вып. 1(2). – С. 86-92.
7. Леденев, В. В. Несущая способность и деформативность оснований и фундаментов при сложных силовых воздействиях: монография/ В. В. Леденев. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 324 с.
8. Леденёв, В. В. Расчёт буронабивных фундаментов: монография/ В. В. Леденёв, Тью Тхи Хоанг Ань. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 284 с.

9. Мурзенко, Ю. Н. Экспериментально-теоретические исследования силового взаимодействия фундаментов и песчаного основания: автореф., дис. ... д-ра техн. наук/ Ю. Н. Мурзенко/ НПИ. – Новочеркасск, 1972. – 44 с.
10. Осипов, В. И. Оценка и управление геологическими рисками (состояние, проблема)/ В. И. Осипов// Геоэкология, инженерная геология, гидрогеология, геокриология, 2007.- №3. – С. 201-211.
11. Проектирование фундаментов зданий и подземных сооружений: учебное пособие / под ред. Б. И. Далматова. – М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2006. – 428 с.
12. Сафронов, В. С. Расчетно-экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния железобетонного свода грунтозасыпного автодорожного моста / В. С. Сафронов, В. В. Зазвонов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - №2. – 2011. - С. 29-38.
13. Тетиор, А. Н. Совершенствование пространственных конструкций фундаментов / А. Н. Тетиор // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 2011. – №2. – С. 13-16.
14. Экспериментальное исследование горизонтальных напряжений в основании фундамента / В. В. Леденёв, А. А. Мазов, М. А. Чуканов, В. С. Чуксин // Вестник ЦРО РААСН – Вып. Р. – Воронеж – Тамбов, 2009. – С. 161-167.
15. Ghosh, P., Rajesh S., ai Chand J. Lineaz and nonlinear elastic analysis of closely spaced strip foundations using Pasternak model. Frontal structures civil Engineering, 2017 11 (2) 228-243.

#### References

1. Boldyrev G.G., Malyshev M.V. Soil mechanics. Bases and foundations (in questions and answers): monograph. LLC "Pronto," 2015. 426 p.
2. Gorbunov-Posadov M.I. Stability of foundations on a sandy base. M.: Gosstroizdat. 1962. 96 p.
3. Dashkov A.Z., Arinina E.V. Experience in designing foundation structures with shells for the construction of a frame industrial building. Proceedings of "foundations." Novoche-kassk, 1976. Pp. 85-90.
4. Degtyarev B.M. Concept of engineering and construction safety of urban areas. Academia. No. 2. 2010. Pp. 43-48.
5. Krutov V.I., Sorochan E. A., Kovalev V.A. Shallow foundations. Moscow: DIA, 2009. 232 p.
6. Ledenev V.V., Chukanov M.A., Chuksin V.S. Dependence of horizontal stresses in the soil on the action of vertical load on the Foundation and the density of the base. Structural mechanics and structures. Voronezh, 2011. No. 1 (2). Pp. 86-92.
7. Ledenev V.V. Bearing capacity and deformability of bases and foundations under complex force influences: monograph. Tambov: FGBOU VPO "TSTU", 2015. 324 p.
8. Ledenev V.V., TEW thi Hoang Anh. Calculation of drilled-in foundations: monograph. Tambov: FGBOU VPO "TSTU", 2015. 284 p.
9. Murzenko Y.N. Experimental and theoretical studies of the force interaction of foundations and sand Foundation, PhD Dissertation. NPI. Novoche-kassk, 1972. 44 p.
10. Osipov V.I. Assessment and management of geological risks (state, problem). Geoecology, engineering geology, hydrogeology, geocryology. No. 3. 2007. Pp. 201-211.
11. Design of foundations of buildings and underground structures; tutorial. Under the editorship of Dalmatov B.I. M.: DIA; SPb.: SPbGASU, 2006. 428 p.
12. Safronov V.S., Zazvonov V.V. Computational and experimental study of the stress-strain state of the reinforced concrete arch of the soil-filled road bridge. Structural mechanics of engineering structures and structures. No. 2. 2011. Pp. 29-38.
13. Tetior A.N. Improvement of spatial structures of foundations. Bases, foundations and soil mechanics. No. 2. 2011. Pp. 13-16.

14. Ledenev V.V., Mazov A.A., Chukanov M.A., Chuksin V.S. Experimental study of horizontal stresses in the Foundation base. Vestnik CRO RAASN: No. R. Voronezh-Tambov, 2009. Pp. 161-167.
15. Ghosh P., Rajesh S., Chand J. Linear and nonlinear elastic analysis of closely spaced strip foundations using Pasternak model. Frontal structures civil Engineering. No. 11(2). 2017. Pp. 228-243.

## **REINFORCEMENT OF FINE BASED SUB-FOUNDATIONS BY CYLINDRICAL SHELLS**

V. V. Ledenev <sup>1</sup>, Y. V. Savinov <sup>2</sup>

Tambov State Technical University <sup>1</sup>

JSC "TAMAK" <sup>2</sup>

Russia, Tambov

---

<sup>1</sup> Dr. of Technical Sciences, Prof. of the Department of Constructions of Buildings and Structures

<sup>2</sup> PhD in Technical Sciences, Specialist of Investment Projects

---

The results of experimental studies of the stress-strain state of fine based sub-foundations reinforced by cylindrical shells are presented.

Diagrams of horizontal stresses at the base of foundations in the presence and absence of cylindrical shells are considered.

The mechanism of interaction of underground structures is investigated.

**Keywords:** soil foundation, rigid stamp, cylindrical shell, bearing capacity, displacement.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.  
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
  - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
  - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
  - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
  - 3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
  - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
  - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
  - 3.7. Текст статьи;
  - 3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);
  - 3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
  - 3.10. Сведения о финансировании (если есть).
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).  
Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографический список. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,  
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Ефрюшин Сергей Владимирович, канд. техн. наук, доцент,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru).