

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научный журнал
Выпуск № 2 (21), 2019**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».
Территория распространения — Российская Федерация.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

Главный редактор: Сафронов В.С., д-р техн. наук, проф.,
Воронежский государственный технический университет
Зам. главного редактора: Ефрюшин С.В., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет
Ответственный секретарь: Габриелян Г.Е., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Буренин А.А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РАН, Институт машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, г. Комсомольск-на-Амуре
Гриднев С.Ю., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет
Зверев В.В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет
Кирсанов М.Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»
Козлов В.А., д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет
Колчунов В.И., д-р техн. наук, проф., Юго-Западный государственный университет
Леденев В.В., д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет
Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам
Нугужинов Ж.С., д-р техн. наук, проф., Казахский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан
Овчинников И.Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет
Пшеничкина В.А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет
Трещев А.А., д-р техн. наук, проф., чл.-корр. РААСН, Тульский государственный университет
Турищев Л.С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь
Шапиро Д.М., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет
Шимановский А.О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь
Шитикова М.В., д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Редактор: Аграновская Н.Н.

Подписной индекс в каталоге агентства «Роспечать»- 66004

Дата выхода в свет 20.06.2019. Усл. печ. л. 14,7. Формат 60×84/8. Тираж 500 экз. Заказ № 118.
Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 - 72895

Цена свободная

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
(строительный факультет, кафедра строительной механики)
тел.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»
394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2019

**STRUCTURAL MECHANICS
AND STRUCTURES**

**Scientific Journal
ISSUE № 2 (21), 2019**

- Structural Mechanics and strength of materials
- Applied problems of solid body under deformation
- Soil Mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic affect on elastic systems
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.
Territory of distribution — Russian Federation.

EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

Chief editor: Safronov V. S., Dr. of Tech. Sc., Prof.,
Voronezh State Technical University

The deputy chief editor: Efrushin S.V., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

Executive secretary: Gabrielyan G.E., PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,
Voronezh State Technical University

EDITORIAL BOARD MEMBERS:

Burenin A.A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Corresponding Member of RAS, Institute of Mechanical Engineering and Metallurgy of the Far Eastern Branch of RAS, Komsomolsk on Amur

Gridnev S.Yu., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Zverev V.V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

Kirsanov M.N., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

Kozlov V.A., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Kolchunov V.I., Dr. of Tech. Sc., Prof., South-West State University

Ledenyov V.V., Dr. of Tech. Sc., Prof., Tambov State Technical University

Nguyen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam

Nuguxhinov Zh.S., Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan

Ovchinnikov I.G., Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University

Pshenichkina V.A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University

Trechshev A.A., Dr. of Tech. Sc., Prof., Corresponding Member of RAACS, Tula State University

Turichshev L.S., PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus

Shapiro D.M., Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Shimanovsky A.O., Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus

Shitikova M.V., Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Editor: Agranovskaja N. N.

Subscription index in agency catalogue «Rospechat» - 66004

Publication date 20.06.2019. Conventional printed sheets 14,7. Format 60×84/8. Numbers of copies 500. Order № 118.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate III № ФС 77 - 72895

Price is subject to change

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University
84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

© Voronezh State Technical University, 2019

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Кирсанов М. Н. Статический и кинематический анализ плоской фермы регулярного типа	7
Резунов А. В., Лютоева Ю. Н. Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты при различных способах опирания краев и произвольном нагружении.....	20
Ткачук Г. Н. Формула зависимости прогиба несимметрично нагруженной плоской фермы с усиленными раскосами от числа панелей.....	32
Кирсанов М. Н. Свойство вложения спектров частот собственных колебаний регулярных механических систем	40

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Козлов А. В. Классификация конструкций объединения железобетонной плиты со стальными балками	50
---	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

Беляева С.Ю., Флавианов В.М., Шрамов Р.К. Оптимизация конструктивного решения трехгранного блока покрытия путем введения предварительно-напряженных элементов.....	64
---	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Сафронов В. С., Антипов А.В., Черников А. В. Надежность и долговечность сборно-монолитного плитного пролетного строения автодорожного моста.....	76
Трещев А. А., Теличко В.Г., Золотов Н. В. Новое о расчете монолитного железобетонного остова многоэтажного здания	89

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЗДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

Даниш А. Б., Леденев В. В., Савинов Я. В., Аль-Бухейти А. Я. Высокая изменчивость деформативных свойств грунтов как основная причина повреждений каменных зданий в г. Тамбове	98
Даниш А. Б., Леденев В. В., Савинов Я. В., Аль-Бухейти А. Я. Повреждения стен близко расположенных зданий вследствие взаимного влияния их фундаментов	109
Правила оформления статей	118

CONTENT

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

M. N. Kirsanov	
Static and kinematic analysis of flat truss of regular type.....	7
A.V. Rezunov, Yu. N. Lyutoeva	
Analysis of stressed-deformed state rectangular plate with different methods of the surfacing of the edges and arbitrary loading.....	20
G. N. Tkachuk	
The formula for the dependence of the deflection of an asymmetrically loaded flat truss with reinforced braces on the number of panels.....	32
M. N. Kirsanov	
The property of embedding of natural frequencies spectra of regular mechanical systems	40

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES

A. V. Kozlov	
Classification of structures combining reinforced concrete slab with steel beams.....	50

CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

S. Yu. Belyaeva, V. M. Flavianov, R. K. Shramov	
Optimization of a constructive three-grided blocks covering solution by introduction preliminary-stressed elements	64

CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

V. S. Safronov, A. V. Antipov, A. V. Chernikov	
Reliability and durability of team-monoolithic tire flight of the road bridge.....	76
A. A. Treschev, V. G. Telichko, N. V. Zolotov	
New on the calculation of monoolithic reinforced concrete skeleton multistory building....	89

CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS OF BUILDINGS AND STRUCTURES

A.B. Danish, V.V. Ledenev, Y.V. Savinov, A.Y. Al-Bukhaiti	
High variability of deformation properties of soils as the main cause of damage of stone buildings in city of Tambov.....	98
A.B. Danish, V.V. Ledenev, Y.V. Savinov, A.Y. Al-Bukhaiti	
Damage of wall close located buildings because of their mutual impact.....	109
Requirements for articles to be published	118

УДК 624.04

СТАТИЧЕСКИЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ РЕГУЛЯРНОГО ТИПА

М. Н. Кирсанов¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Анализируются схемы статически определимых ферм, обладающих периодической структурой. Выводятся формулы для прогиба фермы в зависимости от размеров фермы и числа панелей. Для обобщения ряда решений для ферм с разным числом панелей на общий случай применяется метод индукции. Все преобразования и решения уравнений равновесия узлов выполняются в системе компьютерной математики Maple. Для нахождения рекуррентных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты в формулах, привлекаются специализированные операторы системы компьютерной математики Maple. Показывается, что в некоторых случаях при определенном числе панелей фермы становятся кинематически изменяемыми. Приводятся соответствующие схемы распределения возможных скоростей узлов. Найдено асимптотическое свойство решения. Задача решена для трех видов симметричной нагрузки. Показано, что полученная зависимость имеет скачкообразный характер. Это позволяет использовать решение в задачах оптимизации при выборе числа панелей проектируемой конструкции.

Ключевые слова: ферма, индукция, Maple, прогиб, изменяемость кинематическая.

Введение

Численные методы расчета строительных конструкций [1-7] в настоящее время теряют свою монополию при оценке деформаций и напряженного состояния проектируемых сооружений. Аналитические решения в виде простых формул имеют очевидное преимущество за счет простоты и точности. Безусловно, формулы, которые дают полное решение задачи строительной механики с учетом всех внешних факторов, для произвольных нагрузок и свойств материала, получить в общем виде невозможно. Такие задачи и не ставятся. Однако основные задачи в случае простой модели сооружения решить в аналитическом виде несложно. Развитие систем компьютерной математики делает это возможным. При этом самые простые решения этого вида относятся к задачам для конкретных конструкций, например ферм, в которых известно число панелей, положение опор и вид нагрузки. Остается только найти зависимость решения от размеров, величины нагрузки или нагрузок и свойств материала. Такие решения имеют право на существование, однако область их применения весьма узка. Значительно интереснее и полезнее для практики проектирования формулы для некоторого класса ферм с различным числом панелей. Подобные решения уже существуют для плоских [8-17] и пространственных ферм [18-21]. Задачи решены методом индукции, применимым для регулярных статически определимых сооружений, имеющих некоторые ячейки периодичности [22,23]. Проблемы регулярных стержневых систем рассматривались также в [24-30]. Методом в [31-36] индукции в аналитической форме решены также задачи о собственных колебаниях регулярных ферм. В таких задачах масса сосредотачивалась в узлах конструкции. Обзор работ, использующих метод индукции при выводе формул для прогиба статически определимых плоских ферм арочного типа, приведен в [37].

В настоящей работе методом индукции выводятся формулы для прогиба фермы с двумя дополнительными опорами.

Схема фермы. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую решетчатую ферму (рис. 1) с $2n$ панелями в нижнем поясе. Особенность конструкции – дополнительные опоры, предназначенные для смягчения условия опирания. При этом решетка фермы такова, что система остается статически определимой. Число стержней в ферме вместе с пятью стержнями, моделирующими опоры, равно $m = 8n + 10$, а число шарниров $4n + 5$. Предлагаемая схема фермы может быть использована в составе пространственной конструкции, например перекрытия (рис. 2). Ставится задача о нахождении зависимости прогиба от числа панелей в аналитической форме.

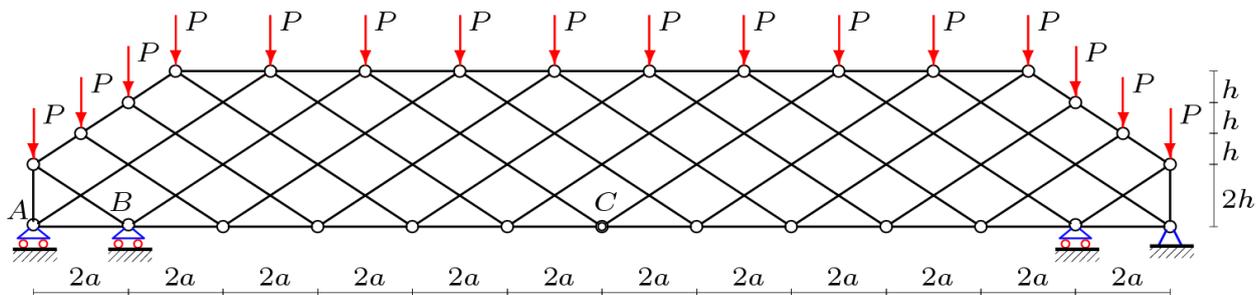


Рис. 1. Ферма, $n=6$



Рис. 2. Ферма в составе пространственной конструкции, $n=6$

Для решения задачи используем программу расчета усилий в стержнях фермы на языке Maple [38]. В программу вводятся координаты узлов, для чего узлы и стержни нумеруются (рис. 3). Начало координат выбрано в левой подвижной опоре № 1.

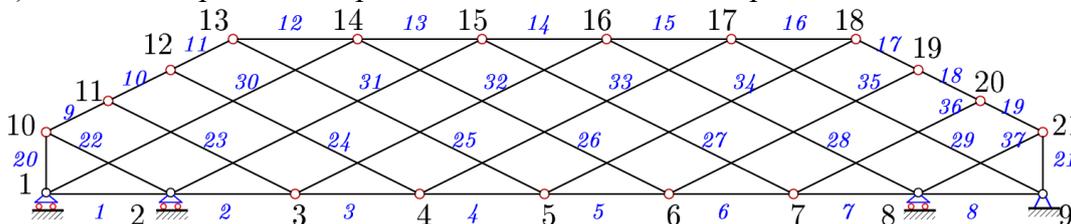


Рис. 3. Нумерация узлов и стержней, $n=4$

Координаты вводятся в циклах по числу узлов:

$$x_i = 2a(i-1), y_i = 0, i = 1, \dots, 2n+1,$$

$$x_{i+2n+4} = a(2i+1), y_{i+2n+4} = 5h, i = 1, \dots, 2n-2,$$

$$x_{i+2n+1} = a(i-1), y_{i+2n+1} = h(i+1),$$

$$x_{i+4n+2} = x_{4n+2} + ai, y_{i+4n+2} = h(5-i).$$

Для ввода в программу порядка соединения стержней по аналогии с заданием графа в дискретной математике используются специальные списки $\bar{N}_i, i = 1, \dots, m$, содержащие номера шарниров по концам соответствующих стержней. Стержни поясов, например, кодируются следующим образом:

$$\bar{N}_i = [i, i + 1], i = 1, \dots, 2n,$$

$$\bar{N}_{i+2n} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2], i = 1, \dots, 2n + 3.$$

В матрицу \mathbf{G} системы уравнений равновесия узлов размером $m \times m$ заносятся направляющие косинусы усилий в стержнях, вычисленные по проекциям на оси координат. Направляющие косинусы на горизонтальную ось x заносятся в нечетные строки, на ось y — в четные.

Направляющие косинусы вычисляются по координатам узлов по концам стержней $l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, i = 1, \dots, m, l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}$. Первый индекс i в номере $N_{i,j}$ соответствует номеру стержня, второй j — номеру компоненты. При этом значение $j=1$ соответствует номеру шарнира в условном начале стержня, $j=2$ определяет номер его конца. Направляющие косинусы в \mathbf{G} записываются следующим образом:

$$G_{q,i} = -l_{j,i} / l_i, q = 2N_{i,2} - 2 + j, q \leq m, j = 1, 2, i = 1, \dots, m,$$

$$G_{q,i} = l_{j,i} / l_i, q = 2N_{i,1} - 2 + j, q \leq m, j = 1, 2, i = 1, \dots, m.$$

Усилия во всех стержнях вычисляются из решения системы линейных уравнений $\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B}$, где \bar{S} вектор усилий в стержнях, \bar{B} — вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i , записываются в нечетные элементы B_{2i-1} , вертикальные — в четные B_{2i} .

Решение системы линейных уравнений находим с помощью обратной матрицы $\bar{S} = \mathbf{G}^{-1}\bar{B}$. Этот метод хорошо реализуется в системе Maple [38] и не требует привлечения специального пакета линейной алгебры Linear Algebra и кодируется просто: **S:=1/G.B:**. Первые вычисления усилий показали, что для некоторых значений числа панелей n определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль. При этом если задавать численные значения размеров в вещественной форме, то независимо от точности вычислений вырождение определителя может остаться незамеченным. Подтверждением этому факту является схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы (рис. 4).

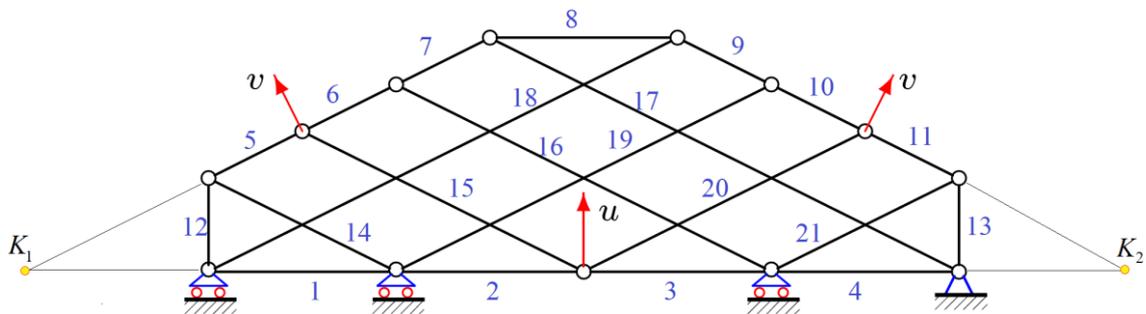


Рис. 4. Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы, $n=2$

Стержни 15 и 20 совершают мгновенные повороты вокруг мгновенных центров скоростей K_1 и K_2 , стержни 2, 3, 5, 6, 10 и 11 вращаются вокруг своих концов. Опоры и остальные стержни неподвижны. Очевидно соотношение $v/c = u/(2a)$.

Только при расчете в символьной форме или с целочисленными данными факт вырождения определителя наиболее нагляден. В частности, получено, что недопустимыми значениями n являются значения 2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 17, 18 Прослеживается очевид-

ная периодичность этих чисел. Исключая их из рассмотрения, введем функцию $n = (5 - (-1)^k + 10k) / 4$. Теперь для нахождения искомой зависимости прогиба от числа панелей, последовательно увеличивая k , можно получить ряд решений для прогиба ферм с различным допустимым числом панелей.

Прогиб центрального узла нижнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m-5} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

здесь введены обозначения: S_k – усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки, s_k – усилия от единичной нагрузки, приложенной к центральному узлу в середине пролета, l_k – длины стержней. Материал стержней и площадь их сечений предполагаются одинаковыми. Для всех стержней фермы модуль упругости равен E . Последовательно задавая в программе $k=1, 2, 3, \dots$, имеем следующие результаты:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= P(100a^3 + 17c^3 + 40h^3) / (2h^2 EF), \\ \Delta_2 &= P(148a^3 + 5c^3) / (h^2 EF), \\ \Delta_3 &= P(2036a^3 + 47c^3 + 56h^3) / (2h^2 EF), \end{aligned}$$

...

Все эти решения имеют общий вид:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF), \quad (2)$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Остается только получить зависимость коэффициентов от числа панелей. Для получения последовательности коэффициентов при a^3 необходимо решить задачу для ферм с числом панелей $n=1, \dots, 18$. При этом получается последовательность 50, 148, 1018, 1784, 5610, 8196, 18538, 24672, 46514, 58500, 98250, 118968, 184458, 217364, 317850, 366976, 513138, 583092. Рекуррентное уравнение, которому подчиняются члены этой последовательности, дает оператор **rgf_findrecur** :

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

Для нормальной работы этого оператора требуется четное число членов последовательности. В случае, если последовательность имеет недостаточную длину, коэффициенты рекуррентного уравнения получаются дробными, а при проверке их решения численным методом обнаруживаются ошибки. Решение рекуррентного уравнения дает оператор **rsolve**:

$$\begin{aligned} C_1 &= (250k^4 + 4(125 - 53(-1)^k)k^3 + (518 - 318(-1)^k)k^2 + \\ &+ 316(1 - (-1)^k)k + 15(-1)^k - 15) / 48. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогично, но из решения более простых уравнений получаются и другие коэффициенты формулы:

$$\begin{aligned} C_2 &= (10k^2 + (10k - 19)(1 - (-1)^k)) / 8, \\ C_3 &= 2(k + 4)(1 - (-1)^k). \end{aligned} \quad (4)$$

В случае нагрузки на узлы нижнего пояса (рис. 5) коэффициенты формулы (2) имеют похожую форму и определяются из решения тех же рекуррентных уравнений:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (250k^4 + 4(125 - 53(-1)^k)k^3 + (218 - 318(-1)^k)k^2 + 16(1 - (-1)^k)k - 75(-1)^k + 75) / 48, \\
C_2 &= 5(2k^2 + (2k - 1)(1 - (-1)^k)) / 8, \\
C_3 &= 2k(1 - (-1)^k).
\end{aligned}
\tag{5}$$

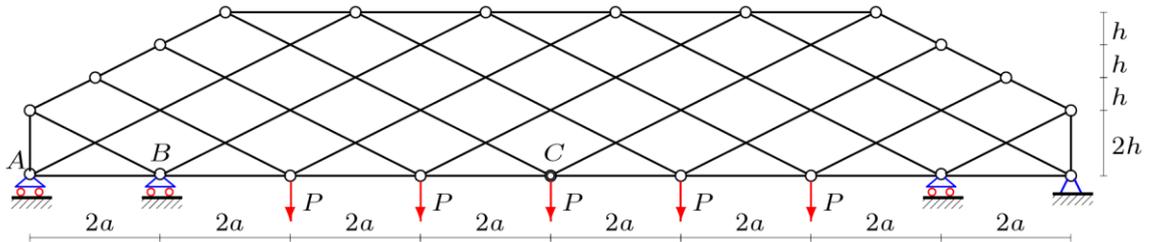


Рис. 5. Ферма, $n=4$. Нагрузка, распределенная по нижнему поясу

Более простое решение для коэффициентов в формуле прогиба (2) получается при действии одной силы в середине пролета (рис. 6):

$$\begin{aligned}
C_1 &= (20k^3 + 30(1 - (-1)^k)k^2 + 10(4 - 3(-1)^k)k - 3(-1)^k + 3) / 12, \\
C_2 &= 5(2k + 1 - (-1)^k) / 4, \\
C_3 &= 2(1 - (-1)^k).
\end{aligned}
\tag{6}$$

Заметим, что степени полиномов в этом случае меньше, чем в задаче о действии распределенной нагрузки.

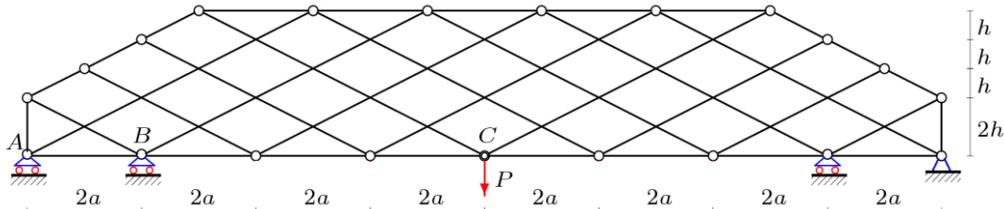


Рис. 6. Ферма, $n=4$. Сосредоточенная сила в середине пролета

Анализ полученных результатов. Прогиб. Рассмотрим, например, ферму постоянной длины с постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузкой. Интересно проследить, как в этом случае решение зависит от числа панелей и есть ли какие-нибудь рекомендации к выбору этого числа. Для этого построим графики решений (2) с коэффициентами, найденными для нагрузки по верхнему поясу при $P_0 = 2(n+2)P$, $L = 4na$ (рис. 7). Относительный прогиб обозначим как $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$.

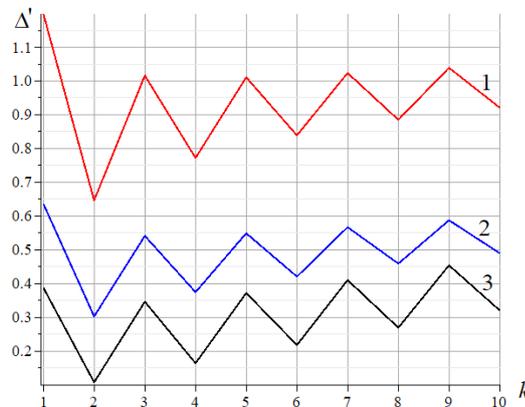


Рис. 7. Зависимость относительного прогиба от числа панелей для распределенной по верхнему поясу нагрузки. $L=60$ м, 1- $h=1$ м; 2- $h=2$ м; 3- $h=6$ м

Кривые имеют резкие скачки, показывающие, что неудачный выбор числа панелей может заметно уменьшить жесткость конструкции. Относительный прогиб при $k=6$ и $k=7$ различается почти в два раза. С увеличением числа панелей (при фиксированном пролете и нагрузке) относительный прогиб, хотя и не монотонно, но растет. В системе Maple можно найти предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = h / (4L)$, свидетельствующий о наличии наклонной асимптоты с таким углом.

Графики зависимости прогиба от числа панелей, построенные для случая нагружения нижнего пояса, имеют подобный вид. Эта же зависимость для случая одной силы имеет принципиально иной вид (рис. 8).

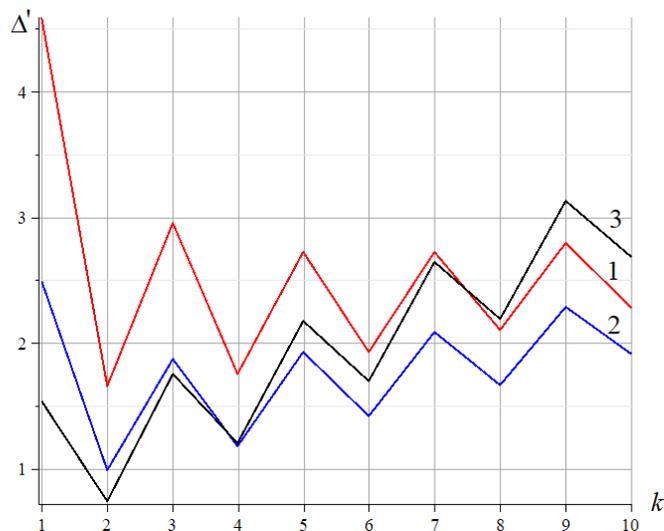


Рис. 8. Зависимость относительного прогиба от числа панелей для сосредоточенной нагрузки. $L=60$ м, 1– $h = 1$ м; 2– $h = 2$ м; 3– $h = 6$ м

Кривые также имеют сильные изломы и также не монотонно растут, но порядок кривых, построенных для различных высот при $k=4$, меняется. Оказывается, что ферма с наибольшей высотой не самая жесткая. Это видно из самопересечения кривых 2 и 3 при $k=4$.

Анализ решения и кривых на рис. 6 и 7 показывает, что зависимость прогиба от высоты нелинейная. Проиллюстрируем это на рис. 9 при длине пролета $L=40$ м в случае равномерного нагружения узлов верхнего пояса фермы.

В зависимости от числа панелей точка минимума выражена сильнее ($k=10$) или слабее ($k=2$). Однако она в любом случае существует. Это показывает предел, выражающий угол наклона асимптоты $\lim_{h \rightarrow \infty} \Delta' / h = P(10k^2 + 26k + 83 - (-1)^k(26k + 83)) / (8L) > 0$. Характерно, что зависимость угла наклона от числа панелей квадратичная. Это также прослеживается из графика на рис. 8.

Распределение усилий. Помимо величины прогиба фермы важной ее характеристикой является распределение усилий по стержням поясов и решетки. Средства Maple позволяют это наглядно проиллюстрировать, выделив таким образом наиболее опасные сжатые стержни, для которых необходим расчет на устойчивость, и растянутые, рассчитываемые на потерю прочности.

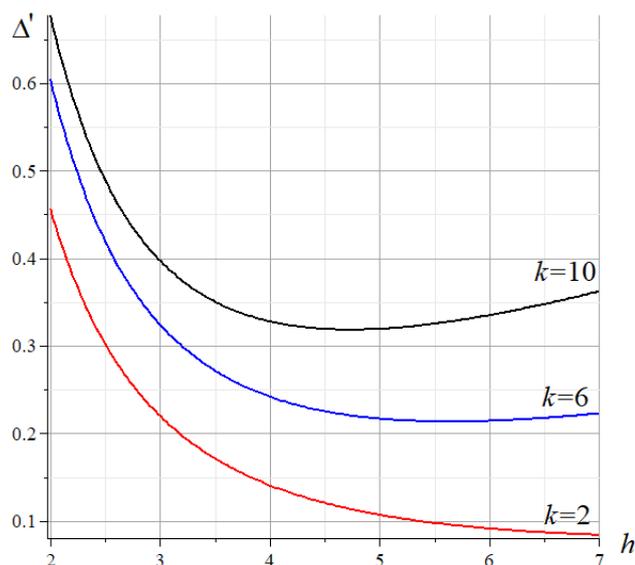


Рис. 9. Зависимость относительного прогиба от высоты h для распределенной по верхнему поясу нагрузки, $L = 40$ м

На схемах рис. 10 и 11, построенных для случая загрузки нижнего пояса, сжатые стержни выделены синим цветом, растянутые – красным. Толщина линий пропорциональна усилиям. Цифрами указаны относительные значения S/P_0 , где $P = P_0/(2n-3)$. Для сравнения одна схема (рис. 10) приведена для четного числа панелей между опорами, другая (рис. 11) — для нечетного. Принят пролет $L=4na= 50$ м, высота $h=2$ м.

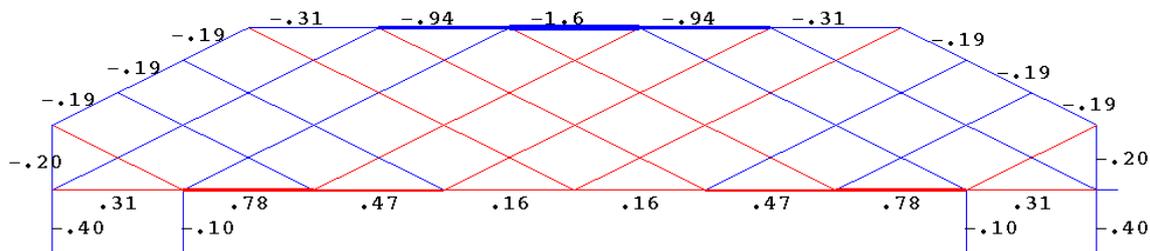


Рис. 10. Распределение усилий при $n=4, k=1, a=L/(4n)= 3,12$ м

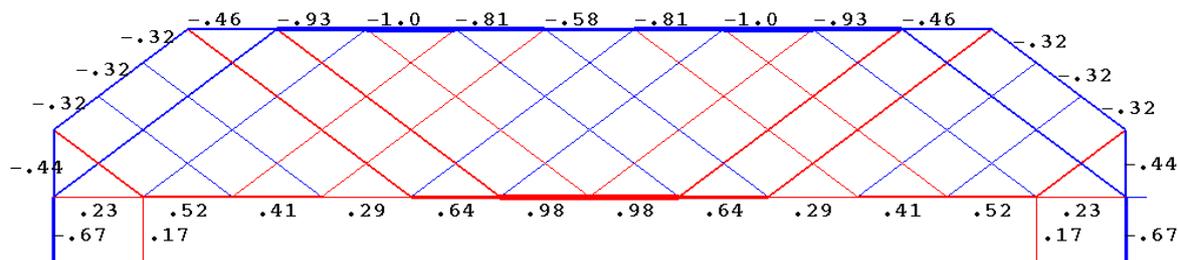


Рис. 11. Распределение усилий при $n=6, k=2, a=L/(4n)=2,08$ м

Сопоставляя распределения при $n= 4$ и $n=6$, замечаем, что при одной и той же длине пролета, высоте фермы и суммарной нагрузке усилия в некоторых стержнях отличаются не только по величине (в боковых стойках отличие в два раза), но и знаком. Наиболее характерно изменение знака реакции второй с края подвижной опоры. Вместо того, чтобы поддерживать конструкцию, разгружая тем самым боковую опору, эта опора, имея растягивающее усилие, только нагружает сжатую боковую опору. Этот же эффект наблюдается и при других

значениях числа k . Обобщая описанным образом решения для различного числа панелей, получим значения реакций (знак реакции обратный к знаку усилия в соответствующем опорном стержне):

$$Y_A = Pk(5 + (-1)^k) / 2, Y_B = -P((-1)^k(2k + 1) + 1) / 4.$$

Этот факт подсказывает, использование фермы с такой схемой при четном числе k не рационально, особенно учитывая, что при этом два раскоса в середине пролета оказываются сжатыми, а это заставляет использовать стержни с увеличенным сечением во избежание потери устойчивости сжатых стержней.

Заключение

Предложена не совсем обычная схема фермы. Дополнительные опоры выравнивают усилия при опирании, а скошенные края верхнего пояса делают ее удобной в конструкциях покрытий зданий и сооружений. Несмотря на достаточно сложную конструкцию, не позволяющую, в частности, применять при расчете такие методы, как метод последовательного вырезания узлов и метод сечений, ферма допускает для прогиба компактное аналитическое решение. Линейная комбинация решений, полученных для трех рассмотренных видов нагрузки, дает возможность использовать их для широкого класса задач о прогибе. Дополнительным преимуществом аналитического решения является его точность, не зависящая от сложности фермы (числа панелей). Численные методы при весьма большом числе панелей склонны к потере точности. Это можно продемонстрировать и на модельных задачах в системе Maple. Искусственно занижая точность вычислений (параметр Digits) и решая задачу численно в той же программе, в которой выводились формулы для прогиба, можно в этом убедиться. Не последнее значение имеет и время счета. Еще одно положительное свойство предложенного алгоритма проявилось неожиданно, когда при некоторых значениях числа панелей было обнаружено, что определитель обращается в ноль. Первоначальные численные расчеты этот момент пропустили за счет погрешности счета. Действительно, если совсем немного изменить координаты некоторых узлов, то кинематически непротиворечивой картины возможных скоростей узлов (см. рис. 2) уже не будет иметь место и определитель в ноль не обратится. Кроме того, при численном счете модели фермы с жесткими креплениями в узлах можно упустить случаи, опасные для шарнирной системы. Такие конструкции будут держаться только за счет жестких соединений в узлах, в то время как было бы разумнее просто немного изменить число панелей и ферма была бы жесткой даже при нарушении жестких связей в узлах.

Если кратко, то в качестве главных выводов из работы можно указать два. Первое — простое аналитическое решение задачи о прогибе фермы с произвольным числом стержней возможно и оно может быть достаточно компактным. Второе — фермы могут иметь скрытые и опасные дефекты, которые иногда проявляются при одном числе панелей и отсутствуют в других случаях. Перенос решений, полученных для одних ферм на другие, следует делать осторожно, имея в виду указанный эффект вырождения определителя.

Библиографический список

1. Degertekin S. O., Lamberti L., Ugur I. B. Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm // *Applied Soft Computing* 2017, Volume 70, September, Pp. 903–928. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.001>

2. Feng, L. J., Xiong, J., Yang, L. H., Yu, G. C., Yang, W., Wu, L. Z. Shear and bending performance of new type enhanced lattice truss structures // *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Volume 134, December, Pp. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.045>
3. Kaveh A., Laknejadi K. A hybrid evolutionary graph-based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures // *Acta Mechanica*. 2013. Volume 224. No. 2. Pp. 343-364. DOI 10.1007/s00707-012-0754-5
4. Lin W., Yoda T. Bridge Engineering: Classifications, Design Loading, and Analysis Methods. Chapter Eight . Truss Bridges. Butterworth-Heinemann, 2017. Pp. 137–153.
5. Ufimtsev E. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. Т. 150. Pp. 1891-1897.
6. Branco J. M. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses // *Engineering Structures*. 2017. Volume 140. Pp. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>
7. Игнатъев А. В., Игнатъев В. А., Онищенко Е. В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // *Вестник МГСУ*. 2016. № 2. С. 20-33.
8. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // *Magazine of civil Engineering*. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
9. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. №1(61). С. 25–32) doi: 10.5862/MCE.61.3
10. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, Volume 46, No. 1, Pp. 46–52. DOI: 10.3103/S1052618817010149
11. Kirsanov M. N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41 doi: 10.18720/MCE.71.7
12. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
13. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts // *Постулат*. 2018. № 6 (32). С. 105.
14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load // *Постулат*. 2018. № 3 (29). С. 2.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss // *Постулат*. 2018. № 5-1 (31). С. 22.
16. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // В сборнике: *Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" - GRACOS-17. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики - "KAZCAS-2017". Международная научно-практическая конференция - "ИТОН-2017"* Материалы семинара, школы и конференции. Под общей редакцией Ю.Г. Игнатъева. 2017. С. 249-254.
17. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вспарушенной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // *Строительная механика и конструкции*. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.

18. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment // Magazine of Civil Engineering. 2013. No.5(40). Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.40.6
19. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. doi: <https://doi.org/10.5862/MCE.64.5>
20. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure // Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
21. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586. DOI: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
22. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Volume 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
23. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Volume 54. No. 4. Pp. 756-782.
24. Kaveh A., Rahami H., Ardalan Asl M., Mirghaderi S.R. Analysis of regular structures with member non-regularity using the equilibrium equations and singular valued decomposition // Eng. Comput. 2013. Volume 30. Pp.21–48.
25. Kaveh A., Rahami H. Topology and graph products; eigenproblems in optimal structural analysis // Commun Numer Methods Eng 2008. Volume 24. Pp. 929–45.
26. Kaveh A., Rahami H. Tri-diagonal and penta-diagonal block matrices for efficient eigen-solutions of problems in structural mechanics // Acta Mech 2007. Volume 192. Pp.77–87.
27. Kaveh A., Rahami H. Factorization for efficient solution of eigenproblems of adjacency and Laplacian matrices for graph products // Int. J. Numer Methods. Eng. 2008. Volume 75. Pp.58–82.
28. Kaveh A., Rahami H. An efficient method for decomposition of regular structures using graph products // Int. J. Numer. Methods. Eng. 2004. Volume 61 Pp. 1797–808.
29. Галишникова В.В., Игнатьев В.А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. - Волгоград: ВолгГАСУ, 2006.
30. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем - Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
31. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (125). С. 284-292. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
32. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. 2019. №2. С. 20-23.
33. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 14-20.
34. Заборская Н.В. О зависимости частоты колебаний груза от его местоположения на ферме // В книге: Радиоэлектроника, электротехника и энергетика. Тезисы докладов Двадцать второй Международной научно-технической конференции студентов и аспирантов: в 3 томах. 2016. С. 244.
35. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015.Т. 1. С. 31-34.

36. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов. Тамбов: 31 октября 2014. С. 17-18.
37. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
38. Кирсанов М.Н. Maple и Maple. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.

Reference

1. Degertekin S. O., Lamberti L., Ugur I. B. Sizing, layout and topology design optimization of truss structures using the Jaya algorithm. *Applied Soft Computing* 2017. Volume 70. September. Pp. 903–928. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.10.001>
2. Feng, L. J., Xiong, J., Yang, L. H., Yu, G. C., Yang, W., Wu, L. Z. Shear and bending performance of new type enhanced lattice truss structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, Volume 134, December. Pp. 589–598. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.10.045>
3. Kaveh A., Laknejadi K. A hybrid evolutionary graph-based multi-objective algorithm for layout optimization of truss structures. *Acta Mechanica*. 2013. Volume 224. No. 2. Pp. 343-364. doi 10.1007/s00707-012-0754-5
4. Lin W., Yoda T. *Bridge Engineering: Classifications, Design Loading, and Analysis Methods*. Chapter Eight . Truss Bridges. Butterworth-Heinemann. 2017. Pp. 137–153
5. Ufimtsev E. Research of Total Mechanical Energy of Steel Roof Truss during Structurally Nonlinear Oscillations. *Procedia Engineering*. 2016. T. 150. Pp. 1891-1897.
6. Branco J. M. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses. *Engineering Structures*. 2017. Volume 140. Pp. 209-224. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.02.053>
7. Ignatiev A. V., Ignatiev V. A., Onishchenko E. V. Solving geometrically non-linear problems of statics of hinge-rod systems based on the finite element method in the form of the classical mixed method. *Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering*. 2016. issue 2. Pp. 20–33.
8. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Magazine of civil Engineering*. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
9. Tinkov D.V. The optimal geometry of a flat beam diagonal truss, taking into account the linear creep of the material. *Magazine of civil Engineering*. 2016. №1(61). Pp. 25–32. doi: 10.5862/MCE.61.3
10. Tinkov D.V., Safonov A.A. Design Optimization of Truss Bridge Structures of Composite Materials. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017. Volume 46. No. 1, Pp. 46–52. doi: 10.3103/S1052618817010149
11. Kirsanov M. N. The exact formulas for calculating deflection and forces in the rods of the 'Molodechno' truss with an arbitrary number of panels. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 1. Pp. 33–41 doi: 10.18720/MCE.71.7
12. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7
13. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts. *Postulat*. 2018. № 6 (32). P. 105.
14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load. *Postulat*. 2018. № 3 (29). Pp. 2.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss. *Postulat*. 2018. № 5-1 (31). Pp. 22.
16. Tinkov D.V. Inductive derivation of the formula for the horizontal movement of the tower structure. In the collection: *International Scientific Seminar "Nonlinear Models in Mechanics, Statistics, Field Theory and Cosmology" - GRACOS-17*. International School on Math-

- emational Modeling in Computer Mathematics Systems - "KAZCAS-2017". International Scientific and Practical Conference - "ITON-2017" Seminar, school and conference materials. Under the general editorship of Yu.G. Ignatiev. 2017. Pp. 249-254.
17. Tinkov D.V. Formulas for calculating the deflection of a flamed beam diagonal truss with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and construction*. 2016. Volume 2. № 13 (13). Pp. 10-14.
 18. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analysis of the effect of elastic deformation of the mast on the positioning of antenna and radar equipment. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No.5(40). Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.40.6
 19. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. doi: <https://doi.org/10.5862/MCE.64.5>
 20. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
 21. Kirsanov M.N. Analytical calculation of deflection of rectangular spatial roof structure. *Proceedings of the Moscow State University of Civil Engineering*. 2018. Volume 13, issue 5 (116), pp. 579–586. doi: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
 22. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Volume 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
 23. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Volume 54. No. 4. Pp. 756-782.
 24. Kaveh A., Rahami H., Ardalan Asl M., Mirghaderi S.R. Analysis of regular structures with member non-regularity using the equilibrium equations and singular valued decomposition. *Eng. Comput.* 2013. Volume 30. Pp.21–48.
 25. Kaveh A., Rahami H. Topology and graph products; eigenproblems in optimal structural analysis. *Commun Numer Methods Eng* 2008. Volume 24. Pp. 929–45.
 26. Kaveh A., Rahami H. Tri-diagonal and penta-diagonal block matrices for efficient eigen-solutions of problems in structural mechanics. *Acta Mech* 2007. Volume 192. Pp.77–87.
 27. Kaveh A., Rahami H. Factorization for efficient solution of eigenproblems of adjacency and Laplacian matrices for graph products. *Int. J. Numer Methods. Eng.* 2008. Volume 75. Pp.58–82.
 28. Kaveh A., Rahami H. An efficient method for decomposition of regular structures using graph products. *Int. J. Numer. Methods. Eng.* 2004. Volume 61. Pp. 1797–808.
 29. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. Regular core systems. Theory and methods of calculation. - Volgograd: VolgASU, 2006.
 30. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems – Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
 31. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2019. Volume 14. No. 3 (125). Pp. 284-292. doi: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
 32. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Spectrum of natural frequencies of oscillations of externally statically indefinable truss. *Transport construction*. 2019. №2. Pp. 20-23.
 33. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of frequencies of small oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and construction*. 2019. №1 (20). Pp. 14-20.
 34. Zaborskaya N. V. On the dependence of the frequency of oscillations of the cargo from its location on the truss. In the book: Radio electronics, electrical engineering and energy. Abstracts of the Twenty-second International Scientific and Technical Conference of Students and Postgraduates: in 3 volumes. 2016. Pp. 244.
 35. Kanatov M.I. Frequency equation and analysis of oscillations of a flat beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M. 2015. Volume 1. Pp. 31-34.

36. Akhmedova E.R., Kanatova M.I. Own vibration frequencies of a flat beam truss of a regular structure. Science and education in the XXI century: a collection of scientific papers on the materials. Tambov: October 31. 2014. Pp. 17-18.
37. Osadchenko N. V. Analytical solutions of deflection problems for flat trusses of arch type. Construction mechanics and construction. 2018. Volume 1. No. 6. Pp.12-33.
38. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.

STATIC AND KINEMATIC ANALYSIS OF FLAT TRUSS OF REGULAR TYPE

M. N. Kirsanov¹

National Research University "MPEI"
Moscow, Russia

¹Dr of Physics and Mathematics, professor, tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

The scheme of statically determinate truss with a periodic structure are analyzed. Formulas are derived for the deflection of the truss, depending on the size of the truss and the number of panels. To generalize a number of solutions for trusses with different number of panels, the induction method is applied to the general case. All transformations and solutions of the equations of node equilibrium are performed in the system of computer mathematics Maple. To find the recurrence equations, which are satisfied by the coefficients in the formulas, special operators of the computer mathematics system Maple are involved. It is shown that in some cases with a certain number of panels the trusses become kinematically variable. Appropriate schemes for the distribution of possible node velocities are given. The asymptotic property of the solution is found. The problem is solved for three types of symmetric load. It is shown that the obtained dependence has a jump-like character. This allows you to use the solution in optimization problems when choosing the number of panels of the designed structure.

Keywords: Формы, induction, Maple, deflection, kinematic variability

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБАХ ОПИРАНИЯ КРАЕВ И ПРОИЗВОЛЬНОМ ЗАГРУЖЕНИИ

А. В. Резунов¹, Ю. Н. Лютоева²Воронежский государственный технический университет^{1,2}

Россия, г. Воронеж

¹ Канд. физ.-мат. наук, доц. кафедры строительной механики
Тел.: +7(910)7440700, e-mail: rezav1950@rambler.ru

² Магистрант кафедры строительной механики

Рассматривается расчет прямоугольной плиты по технической теории (тонкая жёсткая плита), основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява. Подобные плиты наиболее широко используются в строительной практике. Для расчета применяется решение М. Леви в одинарных тригонометрических рядах. Выводятся аналитические выражения для искомых величин при всех случаях закрепления краев плиты, для которых возможно использовать решение Леви. Вычисления выполняются с использованием пакета компьютерной математики Mathcad, в среде которого была разработана и зарегистрирована программа для ЭВМ. Полученные результаты сопоставлялись с численным решением тех же задач с помощью ПК Лири. Исследовалась сходимость численного решения к аналитическому решению Леви при уменьшении размеров конечных элементов.

Ключевые слова: прямоугольная плита, прогиб, изгибающий момент, крутящий момент, поперечная сила, Mathcad, МКЭ.

Решение Леви, полученное в конце 19-го века, может быть использовано для расчета плиты, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других могут быть шарнирно оперты, защемлены или свободны [1, 2, 3]. В литературе обычно рассматриваются случаи, когда все края плиты шарнирно оперты либо два противоположных края шарнирно оперты, а два других края защемлены. При этом плита нагружена равномерно распределенной нагрузкой. Соотношения, охватывающие все указанные выше случаи применения решения Леви для расчета на изгиб прямоугольных плит при произвольном нагружении, приведены в данной работе.

Рассматривается расчет прямоугольной плиты (рис. 1), у которой два противоположных края ОС и АВ шарнирно оперты, а каждый из двух других краев ОА и ВС может быть шарнирно опертым, защемлен или свободен. Нагрузка задается с помощью произвольной функции двух аргументов $q(x, y)$.

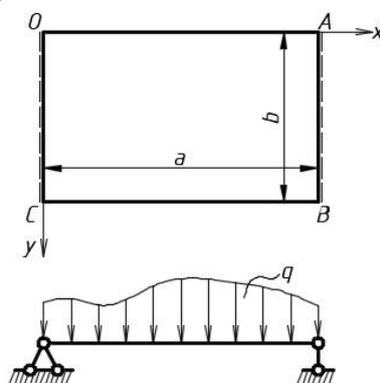


Рис. 1. Прямоугольная плита

Все параметры напряженно-деформированного состояния плиты полностью определяются через ее прогиб $w(x, y)$. Функция $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению Софи Жермен – Лагранжа [1–3]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

и на краях ОС и АВ при $x = 0$ и $x = a$ следующим граничным условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2)$$

Здесь $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жёсткость, E – модуль упругости,

ν – коэффициент Пуассона, h – толщина плиты.

Решение задачи (1) – (2) будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \cdot \sin(\lambda x), \quad (3)$$

где $\lambda = m\pi / a$, $Y_m(y)$ – некоторые функции одного аргумента. При этом условия (2) удовлетворяются тождественно. Для определения функций $Y_m(y)$ подставим (3) в (1), функцию нагрузки $q(x, y)$ разложим в ряд Фурье по синусам и полученное выражение также подставим в (3). После этого сгруппируем слагаемые при $\sin(\lambda x)$ и приравняем их нулю. Получим линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$Y_m^{IV} - 2\lambda^2 Y_m'' + \lambda^4 Y_m = \frac{q_m}{D}, \quad (4)$$

где $q_m(y) = \frac{2}{Da} \cdot \int_0^a q(x, y) \cdot \sin(\lambda x) dx$.

Общее решение уравнения (4) можно представить в виде

$$Y_m(y) = C_{1m} \operatorname{ch} \lambda y + C_{2m} \lambda y \operatorname{sh} \lambda y + C_{3m} \operatorname{sh} \lambda y + C_{4m} \lambda y \operatorname{ch} \lambda y + F_m(y), \quad (5)$$

где $F_m(y)$ – частное решение уравнения (4), которое возьмем в виде [1]:

$$F_m(y) = \frac{1}{\lambda^2 Da} \int_0^y \left\{ \left[(y-t) \operatorname{ch}[\lambda(y-t)] - \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh}[\lambda(y-t)] \right] \cdot \int_0^a q(x, y) \sin \lambda x dx \right\} dt. \quad (6)$$

Произвольные постоянные $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ находятся из условий закрепления границ плиты ОА и ВС (см. рис. 1). Все возможные варианты закрепления этих границ для использования решения Леви [1-3] исчерпываются шестью случаями, которые рассмотрены ниже.

1. Оба края ОА и ВС шарнирно оперты.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a, y = 0: & w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \\ 0 \leq x \leq a, y = b: & w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Из (7) с учетом (3) найдем

$$Y_m(0) = 0, \quad Y_m''(0) = 0, \quad Y_m(b) = 0, \quad Y_m''(b) = 0. \quad (8)$$

2. Края ОА и ВС защемлены.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a, y = 0: & w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ 0 \leq x \leq a, y = b: & w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из (9) с учетом (3) получим

$$Y_m(0) = 0, \quad Y'_m(0) = 0, \quad Y_m(b) = 0, \quad Y'_m(b) = 0. \quad (10)$$

3. Край ОА заземлен, ВС шарнирно оперт.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a, y = 0: & w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0; \\ 0 \leq x \leq a, y = b: & w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Из (11) с учетом (3) будем иметь

$$Y_m(0) = 0, \quad Y'_m(0) = 0, \quad Y_m(b) = 0, \quad Y''_m(b) = 0. \quad (12)$$

4. Край ОА свободный, ВС заземлен.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a, y = 0: & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0; \\ 0 \leq x \leq a, y = b: & w = 0, \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Из (13) с учетом (3) найдем

$$Y'''_m(0) - \lambda_m^2 \cdot (2 - \nu) \cdot Y'_m(0) = 0, \quad Y''_m(0) - \nu \cdot \lambda_m^2 \cdot Y_m(0) = 0, \quad Y_m(b) = 0, \quad Y'_m(b) = 0. \quad (14)$$

5. Край ОА свободный, ВС шарнирно оперт.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a, y = 0: & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0; \\ 0 \leq x \leq a, y = b: & w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Из (15) с учетом (3) получим

$$Y'''_m(0) - \lambda_m^2 \cdot (2 - \nu) \cdot Y'_m(0) = 0, \quad Y''_m(0) - \nu \cdot \lambda_m^2 \cdot Y_m(0) = 0, \quad Y_m(b) = 0, \quad Y''_m(b) = 0. \quad (16)$$

6. Край ОА и ВС свободные.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq a, y = 0, b: \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Из (17) с учетом (3) будем иметь

$$\begin{cases} Y'''_m(0) - \lambda_m^2 \cdot (2 - \nu) \cdot Y'_m(0) = 0, \quad Y''_m(0) - \nu \cdot \lambda_m^2 \cdot Y_m(0) = 0, \\ Y'''_m(b) - \lambda_m^2 \cdot (2 - \nu) \cdot Y'_m(b) = 0, \quad Y''_m(b) - \nu \cdot \lambda_m^2 \cdot Y_m(b) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Подставляя в (8), (10), (12), (14), (16), (18) выражения (5) и решая полученную систему линейных алгебраических уравнений, найдем значения постоянных $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$ (табл. 1). Входящие в полученные выражения производные от функции $F_m(y)$ имеют вид

$$F'_m(y) = \frac{1}{\lambda^2 Da} \int_0^y \left\{ \text{sh}[\lambda \cdot (t-y)] \cdot \lambda \cdot (t-y) \cdot \int_0^a q(x,t) \cdot \sin(\lambda x) dx \right\} dt,$$

$$F''_m(y) = \frac{-1}{\lambda Da} \int_0^y \left\{ \left[\text{ch}[\lambda \cdot (t-y)] \cdot \lambda \cdot (t-y) + \text{sh}[\lambda \cdot (t-y)] \right] \cdot \int_0^a q(x,t) \cdot \sin \lambda x dx \right\} dt,$$

$$F'''_m(y) = \frac{1}{Da} \int_0^y \left\{ \left[\text{sh}[\lambda \cdot (t-y)] \cdot \lambda \cdot (t-y) + 2\text{ch}[\lambda \cdot (t-y)] \right] \cdot \int_0^a q(x,t) \sin(\lambda x) dx \right\} dt.$$

Из этих соотношений следуют условия

$$F_m(0) = F'_m(0) = F''_m(0) = F'''_m(0) = 0.$$

Изложенная выше методика расчета прямоугольных плит была реализована в виде программы для ЭВМ [6] с использованием пакета компьютерной математики Mathcad. Программа позволяет по известным геометрическим размерам плиты, значениям упругих постоянных и виду нагрузки найти в заданной точке значения прогиба плиты, изгибающих и крутящего моментов, поперечных сил и построить объёмный график любой из этих величин.

Возможно использование программы в строительной практике, а также в учебном процессе при преподавании таких дисциплин, как "Теория упругости", "Теория расчета пластин и оболочек" и т. д.

В литературе имеется ряд источников [4, 5], содержащих таблицы с результатами расчетов прямоугольных плит. Недостаток использования этих таблиц заключается в том, что в них рассматривается дискретный набор геометрических параметров, некоторое фиксированное значение коэффициента Пуассона и ограниченный набор видов нагружения. Для других значений исходных данных приводятся достаточно сложные формулы.

Для расчета реальных объектов в настоящее время широко используются программные комплексы на основе метода конечных элементов. Для применения этих методов необходимо наличие и умение пользоваться достаточно сложным программным обеспечением.

В данной работе приводятся результаты расчетов конкретной плиты методом Леви и с помощью ПК Лира. Использовался прямоугольный конечный элемент №11. Для анализа точности численного решения выполнялось разбиение области решения на конечные элементы разного размера.

Рассмотрим плиту с размерами в плане $a = 2,8$ м, $b = 3,8$ м и высотой $h = 0,08$ м из материала со значением коэффициента Пуассона $\nu = 0,13$ и модуля упругости $E = 3,6 \cdot 10^7$ кПа. Значения прогибов и силовых факторов найдем в точке с координатами $x_0 = 1,8$ м, $y_0 = 1,0$ м. В табл. 2-4 и на рис. 2-11 (Mathcad) приведены результаты расчетов, соответствующие равномерно распределенной нагрузке $q(x,y) = 4$ кН/м².

Значения произвольных постоянных $C_{1m}, C_{2m}, C_{3m}, C_{4m}$

Края OA и BC шарнирно оперты	
$C_{1m} = 0, C_{2m} = 0, C_{4m} = (\lambda_m^2 F_m(b) - F_m''(b)) / (2 \lambda_m^2 \sinh(\alpha_m)), C_{3m} = -(F_m(b) + C_{4m} \alpha_m \cosh(\alpha_m)) / \sinh(\alpha_m)$	
Края OA и BC жестко защемлены	
$C_{1m} = 0, C_{2m} = \frac{b \lambda_m^2 \sinh(\lambda_m) F_m(b) + (\sinh(\alpha_m) - \alpha_m \cosh(\alpha_m)) F_m'(b)}{\lambda_m (\alpha_m^2 - \sinh(\alpha_m)^2)}, C_{3m} = \frac{(\sinh(\alpha_m) + \alpha_m \cosh(\alpha_m)) F_m(b) - b \sinh(\lambda_m) F_m'(b)}{\alpha_m^2 - \sinh(\alpha_m)^2}, C_{4m} = -C_{3m}$	
Края OA и BC свободные	
$\Delta_m = \alpha_m^2 (v-1)^2 - \left(\frac{3-2v-v^2}{1-v} \right)^2 \sinh(\alpha_m)^2, \Delta_{2m} = - \left(v F_m(b) - \frac{F_m''(b)}{\lambda_m^2} \right) \alpha_m (1-v) \sinh(\alpha_m) - \frac{-F_m'''(b) + \lambda_m^2 (2-v) F_m'(b)}{\lambda_m^2} \left[\frac{3-2v-v^2}{1-v} \sinh(\alpha_m) + \alpha_m (1-v) \cosh(\alpha_m) \right],$ $\Delta_{4m} = \frac{-F_m'''(b) + \lambda_m^2 (2-v) F_m'(b)}{\lambda_m^2} \alpha_m (1-v) \sinh(\alpha_m) - \left(v F_m(b) - \frac{F_m''(b)}{\lambda_m^2} \right) \left[\frac{3-2v-v^2}{1-v} \sinh(\alpha_m) - \alpha_m (1-v) \cosh(\alpha_m) \right], C_{2m} = \frac{\Delta_{2m}}{\Delta_m}, C_{4m} = \frac{\Delta_{4m}}{\Delta_m}, C_{1m} = \frac{-2}{1-v} C_{2m}, C_{3m} = \frac{1+v}{1-v} C_{4m}$	
Край OA жестко защемлен, BC шарнирно оперт	
$C_{1m} = 0, C_{2m} = \frac{\lambda_m^2 (\sinh(\alpha_m) + \alpha_m \cosh(\alpha_m)) F_m(b) + (\sinh(\alpha_m) - \alpha_m \cosh(\alpha_m)) F_m''(b)}{2 \lambda_m^2 (\alpha_m - \sinh(\alpha_m) \cosh(\alpha_m))}, C_{3m} = \frac{\lambda_m (2 \cosh(\alpha_m) + \alpha_m \sinh(\alpha_m)) F_m(b) - b \sinh(\alpha_m) F_m''(b)}{2 \lambda_m^2 (\alpha_m - \sinh(\alpha_m) \cosh(\alpha_m))}, C_{4m} = -C_{3m}$	

Край ОА свободный, ВС шарнирно оперт

$$\Delta_m = \left(\alpha_m \sinh(\alpha_m) - \frac{2}{1-\nu} \cosh(\alpha_m) \right) \left[\frac{(3-\nu) \sinh(\alpha_m)}{1-\nu} + \alpha_m \cosh(\alpha_m) \right] - \left[\frac{1+\nu}{1-\nu} \sinh(\alpha_m) + \alpha_m \cosh(\alpha_m) \right] \alpha_m \sinh(\alpha_m) - \frac{2\nu}{1-\nu} \cosh(\alpha_m), \Delta_{2m} = -F_m(b) \left[\frac{(3-\nu) \sinh(\alpha_m)}{1-\nu} + \alpha_m \cosh(\alpha_m) \right] + \frac{F_m''(b)}{\lambda_m^2} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \sinh(\alpha_m) + \alpha_m \cosh(\alpha_m) \right), \Delta_{4m} = \frac{-F_m''(b)}{\lambda_m^2} \left(\alpha_m \sinh(\alpha_m) - \frac{2}{1-\nu} \cosh(\alpha_m) \right) + F_m(b) \left(\alpha_m \sinh(\alpha_m) - \frac{2\nu}{1-\nu} \cosh(\alpha_m) \right), C_{2m} = \frac{\Delta_{2m}}{\Delta_m}, C_{4m} = \frac{\Delta_{4m}}{\Delta_m}, C_{1m} = \frac{-2C_{2m}}{1-\nu}, C_{3m} = \frac{1+\nu}{1-\nu} C_{4m}$$

Край ОА – свободный, ВС – жестко защемлен

$$\Delta_m = \left(\alpha_m \sinh(\alpha_m) - \frac{2}{1-\nu} \cosh(\alpha_m) \right) \left(\frac{2 \cosh(\alpha_m)}{1-\nu} + \alpha_m \sinh(\alpha_m) \right) - \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \sinh(\alpha_m) + \alpha_m \cosh(\alpha_m) \right) \left(\alpha_m \cosh(\alpha_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \sinh(\alpha_m) \right),$$

$$\Delta_{2m} = -F_m(b) \left(\frac{2 \cosh(\alpha_m)}{1-\nu} + \alpha_m \sinh(\alpha_m) \right) + \frac{F_m''(b)}{\lambda_m} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \sinh(\alpha_m) + \alpha_m \cosh(\alpha_m) \right),$$

$$\Delta_{4m} = \frac{-F_m''(b)}{\lambda_m} \left(\alpha_m \sinh(\alpha_m) - \frac{2}{1-\nu} \cosh(\alpha_m) \right) + F_m(b) \left(\alpha_m \cosh(\alpha_m) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \sinh(\alpha_m) \right),$$

$$C_{2m} = \Delta_{2m} / \Delta_m, \quad C_{4m} = \Delta_{4m} / \Delta_m, \quad C_{1m} = \frac{-2}{1-\nu} C_{2m}, \quad C_{3m} = \frac{1+\nu}{1-\nu} C_{4m}$$

Прогибы и усилия, полученные в ПК Лира		Прогибы и усилия, полученные в среде Mathcad
Сетка с шагом 0,1 м	Сетка с шагом 0,05 м	Решение М. Леви
$w(x_a, y_a) = 0,690 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 0,690 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 0,690 \text{ мм}$
$M_x(x_a, y_a) = 1,433 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 1,435 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 1,436 \text{ кН}$
$M_y(x_a, y_a) = 1,07 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 1,073 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 1,073 \text{ кН}$
$Q_x(x_a, y_a) = -0,871 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -0,871 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -0,872 \text{ кН/м}$
$Q_y(x_a, y_a) = 1,058 \text{ кН/м}$	$Q_y(x_a, y_a) = 1,059 \text{ кН}$	$Q_y(x_a, y_a) = 1,059 \text{ кН}$
$H(x_a, y_a) = 0,321 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = 0,321 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = 0,321 \text{ кН}$

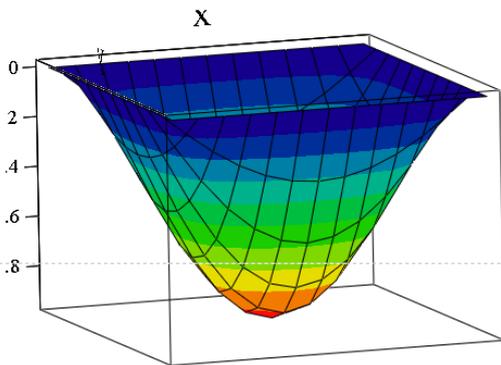


Рис. 2. График прогибов w , мм

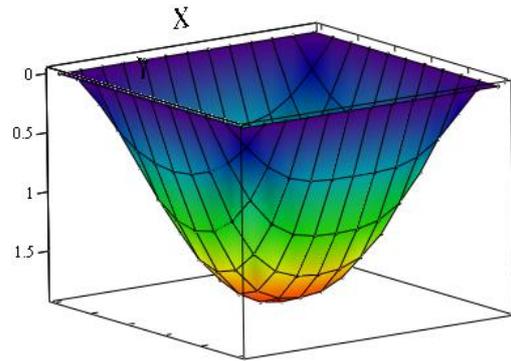


Рис. 3. График изгибающих моментов M_x , кН

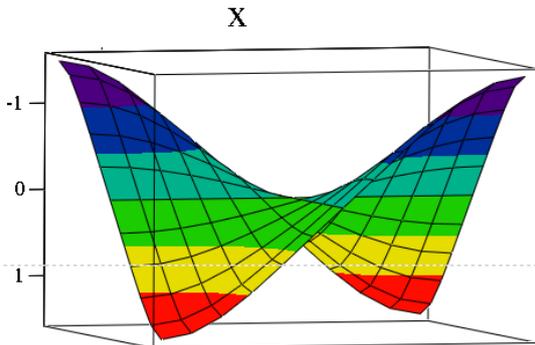


Рис. 4. График крутящих моментов H , кН

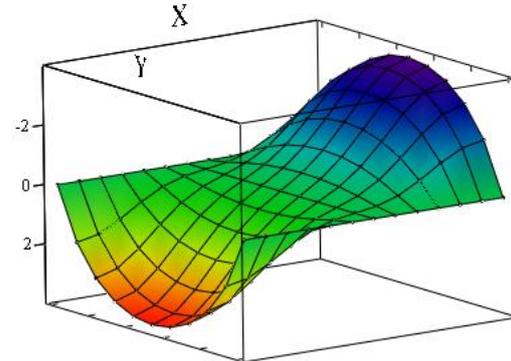


Рис. 5. График поперечных сил Q_x , кН/м

Прогибы и усилия, полученные в ПК Лира		Прогибы и усилия, полученные в среде Mathcad
Сетка с шагом 0,1 м	Сетка с шагом 0,05 м	Решение М. Леви
$w(x_a, y_a) = 1,366 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 1,365 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 1,365 \text{ мм}$
$M_x(x_a, y_a) = 2,680 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 2,684 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 2,684 \text{ кН}$
$M_y(x_a, y_a) = 0,650 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 0,651 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 0,651 \text{ кН}$
$Q_x(x_a, y_a) = -1,252 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -1,252 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -1,252 \text{ кН/м}$
$Q_y(x_a, y_a) = -0,251 \text{ кН/м}$	$Q_y(x_a, y_a) = -0,251 \text{ кН/м}$	$Q_y(x_a, y_a) = -0,251 \text{ кН/м}$
$H(x_a, y_a) = -0,248 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = -0,249 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = -0,249 \text{ кН}$

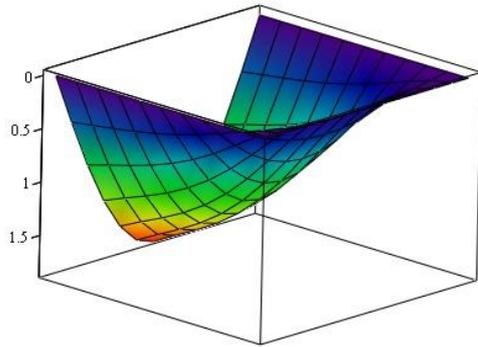


Рис. 6. График прогибов w , мм

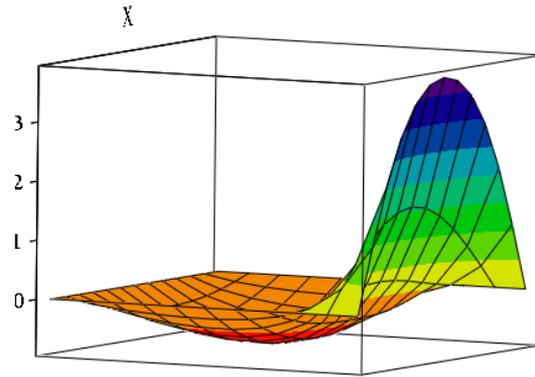


Рис. 7. График изгибающих моментов M_y , кН

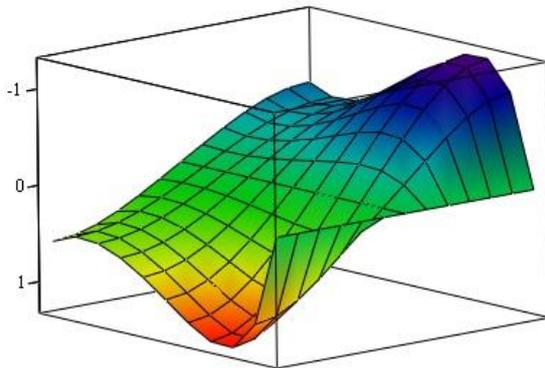


Рис. 8. График крутящих моментов H , кН

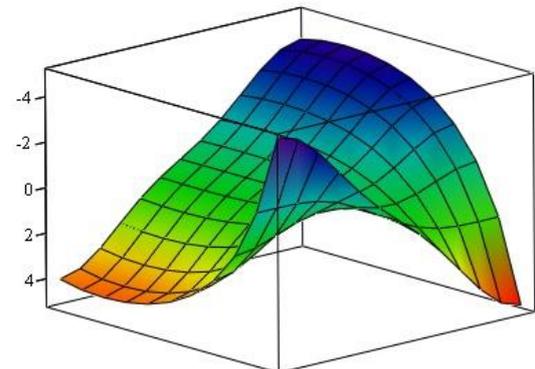


Рис. 9. График поперечных сил Q_x , кН/м

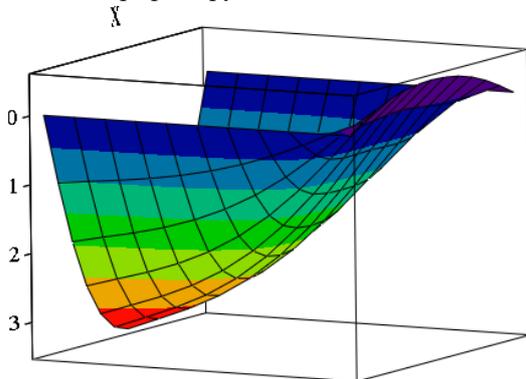


Рис. 10. График изгибающих моментов M_x , кН

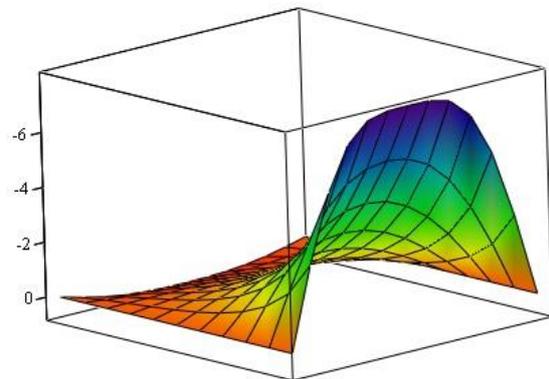


Рис. 11. График поперечных сил Q_y , кН/м

В табл. 4-5 и на рис. 13-24 (Mathcad) приведены результаты расчетов, соответствующие нагрузке $q(x, y) = 4x^2(a - x)y(b - y)$ кН/м² (рис. 12).

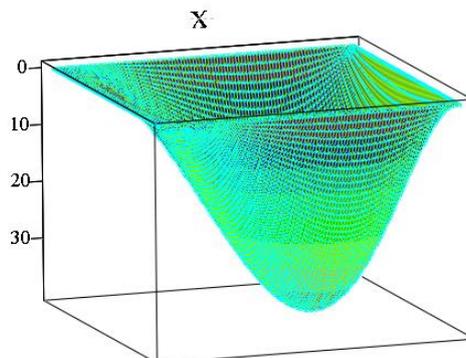
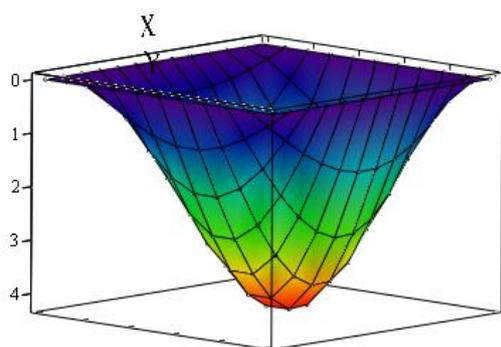
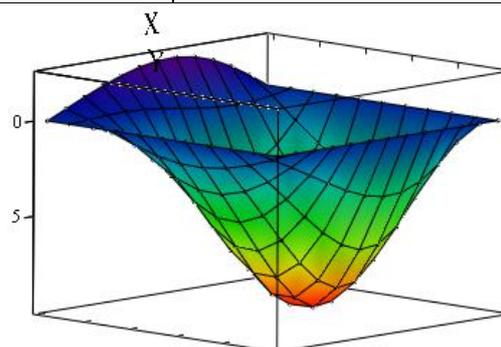
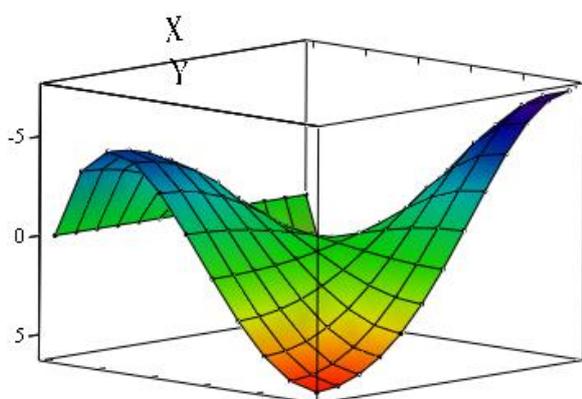
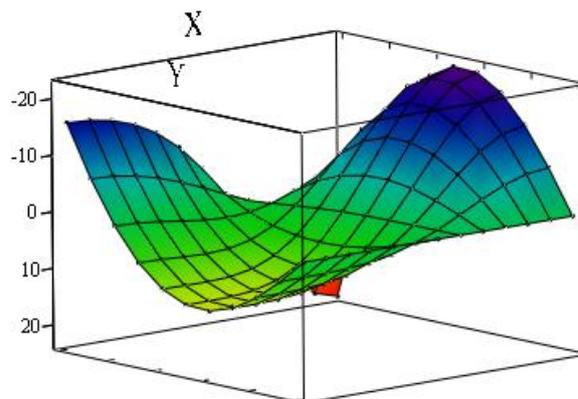
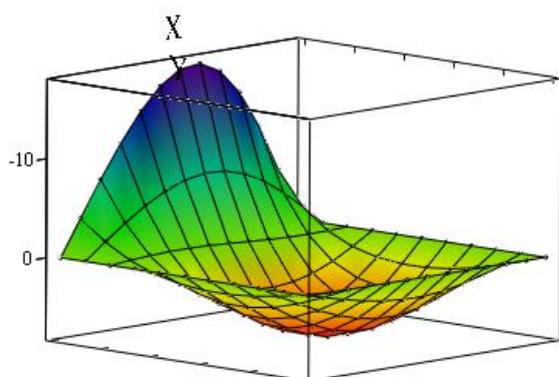
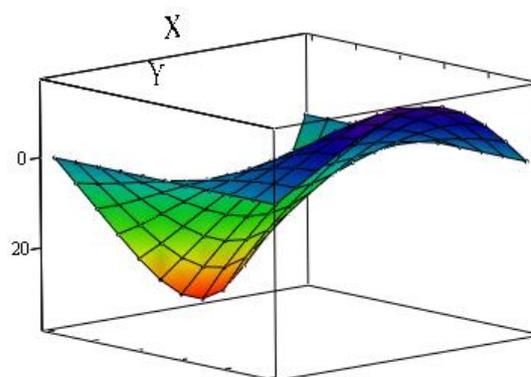


Рис. 12. Вид нагрузки на плиту

Прогибы и усилия, полученные в ПК Лира		Прогибы и усилия, полученные в среде Mathcad
Сетка с шагом 0,2 м	Сетка с шагом 0,1 м	Решение М. Леви
$w(x_a, y_a) = 2,531 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 2,518 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 2,518 \text{ мм}$
$M_x(x_a, y_a) = 5,951 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 6,015 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 6,043 \text{ кН}$
$M_y(x_a, y_a) = 3,391 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 3,480 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 3,516 \text{ кН}$
$Q_x(x_a, y_a) = -1,411 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -1,356 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -1,356 \text{ кН/м}$
$Q_y(x_a, y_a) = 15,118 \text{ кН/м}$	$Q_y(x_a, y_a) = 15,206 \text{ кН/м}$	$Q_y(x_a, y_a) = 15,244 \text{ кН/м}$
$H(x_a, y_a) = 1,781 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = 1,790 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = 1,793 \text{ кН}$

Рис. 13. График прогибов w , ммРис. 14. График изгибающих моментов M_x , кНРис. 15. График крутящих моментов H , кНРис. 16. График поперечных Q_x , кН/мРис. 17. График изгибающих моментов M_y , кНРис. 18. График поперечных сил Q_y , кН/м

Прогибы и усилия, полученные в ПК Лира		Прогибы и усилия, полученные в среде Mathcad
Сетка с шагом 0,2 м	Сетка с шагом 0,1 м	Решение М. Леви
$w(x_a, y_a) = 7,462 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 7,455 \text{ мм}$	$w(x_a, y_a) = 7,474 \text{ мм}$
$M_x(x_a, y_a) = 15,748 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 15,877 \text{ кН}$	$M_x(x_a, y_a) = 15,960 \text{ кН}$
$M_y(x_a, y_a) = 4,052 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 4,076 \text{ кН}$	$M_y(x_a, y_a) = 4,089 \text{ кН}$
$Q_x(x_a, y_a) = -5,846 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -5,830 \text{ кН/м}$	$Q_x(x_a, y_a) = -5,835 \text{ кН/м}$
$Q_y(x_a, y_a) = 4,450 \text{ кН/м}$	$Q_y(x_a, y_a) = 4,509 \text{ кН/м}$	$Q_y(x_a, y_a) = 4,505 \text{ кН/м}$
$H(x_a, y_a) = -0,264 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = -0,268 \text{ кН}$	$H(x_a, y_a) = -0,278 \text{ кН}$

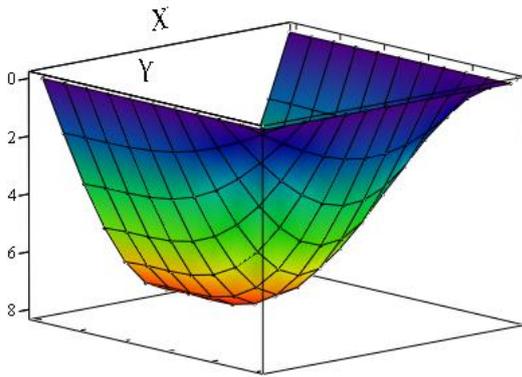


Рис. 19. График прогибов w , мм

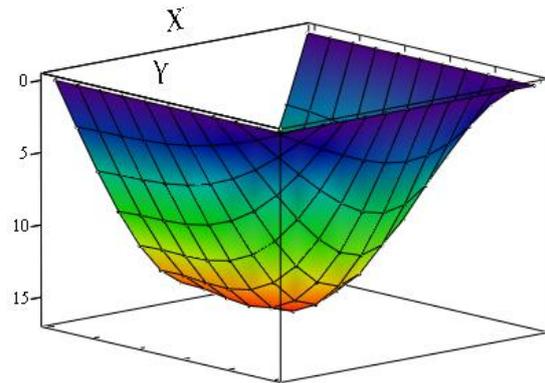


Рис. 20. График изгибающих моментов M_x , кН

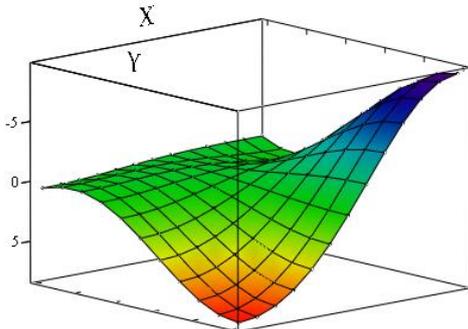


Рис. 21 - График крутящих моментов H , кН

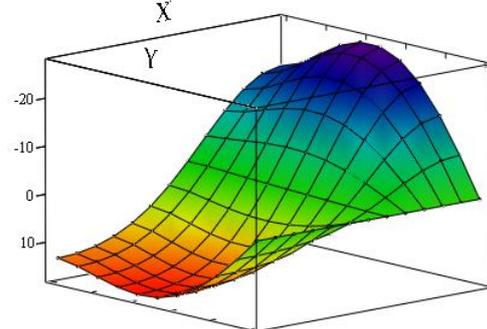


Рис. 22 - График поперечных Q_x , кН/м

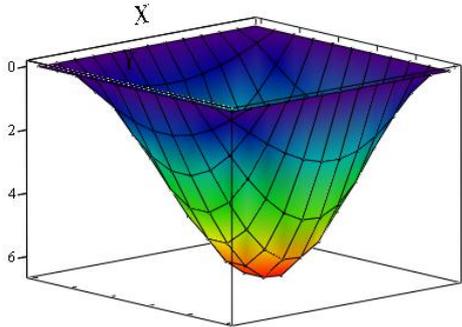


Рис. 23. График изгибающих моментов M_y , кН

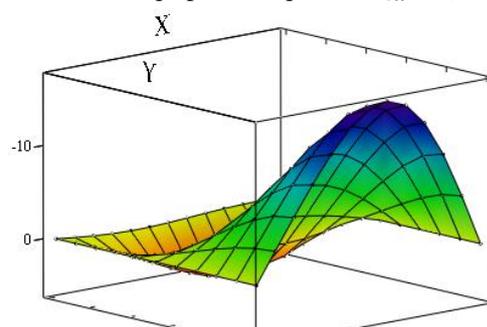


Рис. 24. График поперечных сил Q_y , кН/м

При выполнении решения методом Леви в выражениях для прогибов и силовых факторов использовалось $7 \div 9$ членов ряда. Если же функция загрузки задается гладкой функ-

цией, то с точностью до 1 % можно ограничиться 3÷5 слагаемыми. Ряды для прогибов сходятся очень быстро, для моментов и поперечных сил - медленнее. При числе слагаемых более 9 в Matchad возможна потеря значимости при вычислении гиперболических функций.

Сравнение результатов расчетов, полученных методами Леви и МКЭ, показывает, что с уменьшением размеров конечных элементов численное решение сходится к аналитическому. При размерах КЭ 0,05x0,05 м (общее количество элементов 4256) численное и аналитическое решения рассматриваемой задачи совпадают с точностью до 4 значащих цифр (см. табл. 2, 3). При использовании более редкой сетки 0,1x0,1 м разница между решениями не превосходит 0,5 % (см. табл. 4, 5) и лишь для одного значения составила 3,6 % (см. табл. 5). Заметим, что в ПК Лира задание загрузки с помощью функции возможно только в последних платных версиях программы.

Библиографический список

1. Самуль, В. И. Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие для студентов вузов. / В. И. Самуль. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. школа, 1982. – 264 с.
2. Александров, А. В. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. спец. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. – М.: Высш. школа, 1990. – 400 с.
3. Тимошенко, С. П. Курс теории упругости / С. П. Тимошенко; под ред. Э. И. Григолюка. – Киев: Наукова Думка, 1972. – 507 с.
4. Калманюк, А. С. Расчет пластинок: Справочное пособие / А. С. Калманюк; под ред. И. К. Снитко. – М.: Гос. изд. лит. по стр-ву, арх-ре и строит. мат-ам, 1959. – 212 с.
5. Вайнберг, Д. В. Расчет пластин. / Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг. – 2-е изд., перераб. – Киев: Будівельник, 1970. – 436 с.
6. Резунов, А. В., Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты при произвольном нагружении и различных способах опирания краев с использованием решения Леви. – А. В. Резунов, Ю. Н. Куликова. – Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019615169 от 19 апреля 2019 (<http://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=PrEVM&id=ED2D0AA5-AFA7-4692-9D8C-A812117868AA>).

References

1. Samul V.I. Basics of the Theory of Elasticity and Plasticity: Proc. manual for university students. 2nd ed. revised. M.: Higher School, 1982. 264 p.
2. Aleksandrov A.V., Potapov V.D. Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity: Proc. for builds specialist. universities. M.: Higher School, 1990. 400 p.
3. Timoshenko S.P. Course of the theory of elasticity. By ed. Grigolyuk E.I. Kiev: Naukova Dumka, 1972. 507 p.
4. Kalmanyuk A.S. The Calculation of Records: A Reference Manual. By ed. Snitko I.K. M.: State. ed. literature on building, architecture and building materials, 1959. 212 p.
5. Weinberg, D.V., Weinberg, E.D. Calculation of plates. 2nd ed. revised. Kiev: Budivel'nik, 1970. 436 p.
6. Rezunov A.V., Kulikova Yu.N. Investigation of the stress-strain state of a rectangular plate with arbitrary loading and various ways of supporting edges using the Levy solution. Certificate of state registration of computer programs No. 2019615169 dated April 19, 2019 ([http://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=PrEVM & id = ED2D0AA5-AFA7-4692-9D8C-A812117868AA](http://new.fips.ru/publication-web/publications/document?type=doc&tab=PrEVM&id=ED2D0AA5-AFA7-4692-9D8C-A812117868AA)).

**ANALYSIS OF STRESSED-DEFORMED STATE
RECTANGULAR PLATE WITH DIFFERENT METHODS
OF THE SURFACING OF THE EDGES AND ARBITRARY LOADING**

A. V. Rezunov¹, Yu. N. Lyutoeva²

Voronezh State Technical University^{1,2}
Russia, Voronezh

¹ PhD of Physical and Mathematical Sciences, Assoc. Prof. of the Department of Structural Mechanics
Tel.: + 7 (910) 7440700, e-mail: rezav1950@rambler.ru

² MA Student of the Department of Structural Mechanics

The calculation of a rectangular slab according to the technical theory (thin rigid slab), based on the Kirchhoff-Love hypotheses, is considered in this article. Such plates are most widely used in construction practice. For the calculation, the solution of M. Levi in a single trigonometric series is applied. Analytical expressions for the desired quantities are derived for all cases of fixing the edges of the slab for which it is possible to use the Levy solution. Calculations are performed using the Mathcad computer math package, in the medium of which the computer program was developed and registered. The results obtained were compared with the numerical solution of the same problems with the help of PC Lyra. The convergence of the numerical solution to the Levy analytical solution was investigated with decreasing finite element sizes.

Keywords: rectangular plate, deflection, bending moment, torque, shear force, Mathcad, FEM.

ФОРМУЛА ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА НЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ С УСИЛЕННЫМИ РАСКОСАМИ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

Г. Н. Ткачук¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Россия, г. Москва

¹Студент, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: geoyukos@yandex.ru

Статически определимая балочная ферма с восходящими раскосами и параллельными поясами усилена дополнительными раскосами. На половине верхнего пояса ферма нагружена равномерно распределенными по узлам силами. Прогиб фермы рассчитывается по формуле Максвелла-Мора. Усилия в стержнях в аналитическом виде находятся методом вырезания узлов по программе символьных преобразований Maple. По данным решения серии задач с различным последовательно увеличивающимся числом панелей получается последовательность коэффициентов искомой формулы. Общий член последовательности коэффициентов определяется с помощью решения линейного однородного рекуррентного уравнения.

Ключевые слова: ферма, прогиб, индукция, Maple

Фермы обычно рассчитываются на деформации, прочность и устойчивость, как правило, в специализированных компьютерных программах, основанных на методе конечных элементов или других численных методах. Эти программы могут рассчитывать сложные конструкции, статически неопределимые и пространственные. Аналитические же расчеты, несмотря на распространение систем символьных преобразований (Reduce, Maple, Maxima, Derive и др.), встречаются значительно реже, особенно те, которые дают решение в виде компактной формулы. В [1] приведены аналитические решения для прогиба плоских ферм под действием распределенной и сосредоточенной симметричной нагрузки. В настоящей работе ставится задача рассчитать шпренгельную ферму на несимметричную нагрузку. Известно, что такая нагрузка может быть более опасной для конструкции, чем эквивалентная ей симметричная.

Рассмотрим ферму с усиленными восходящими раскосами (рис. 1), равномерно нагруженную по половине верхнего пояса. В каждую панель фермы добавлены две дополнительные вертикальные стойки и два раскоса. В ферме с n панелями в половине пролета содержится $N=24n+4$ стержня вместе с тремя стержнями, моделирующими опоры. Расчет усилий произведем по программе [1] методом вырезания узлов.

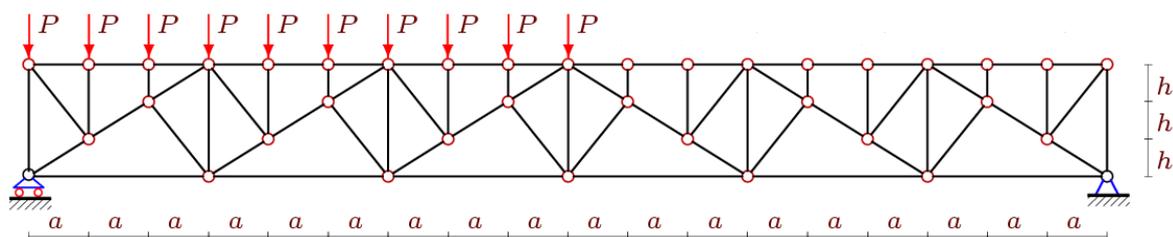


Рис. 1. Ферма под действием равномерной нагрузки, $n=3$

Эта программа использовалась в расчетах ряда арочных [2-13] и ферм пространственного типа [14-23]. Статически определимые решетчатые фермы рассчитывались в аналитической форме в [24-29]. Решение для деформации плоской фермы башенного типа получено в [30]. Выражения для прогиба шпренгельных ферм методом индукции найдены в работах [31-34]. Фермы, допускающие при определенном числе панелей кинематическую изменяемость, рассмотрены в [35-37].

Все шарниры и стержни нумеруются (рис. 2). Сначала нумеруются стержни поясов (слева направо), затем стержни решетки. В программу вводятся координаты узлов. Приведем фрагмент программы, написанной на языке системы Maple:

```
>for i to 2*n+1 do x[i]:=3*a*(i-1): y[i]:=0: end:
>for i to n do
> x[i+2*n+1]:=3*i*a-2*a: y[i+2*n+1]:=h:
> x[i+3*n+1]:=3*i*a+3*a*n-a: y[i+3*n+1]:=h:
> x[i+4*n+1]:=3*i*a-a: y[i+4*n+1]:=2*h:
> x[i+5*n+1]:=3*i*a+3*a*n-2*a:y[i+5*n+1]:=2*h:
> end:
>for i to 6*n+1 do x[i+6*n+1]:=i*a-a:y[i+6*n+1]:=3*h: end:
```

В результате расчетов получено выражение для прогиба фермы, не зависящее по форме от числа панелей:

$$EP\Delta = (Aa^3 + Bc^3 + Ch^3) / (2h^2),$$

где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ — длина короткого раскоса. Все три коэффициента, зависящие от числа панелей, найдены с помощью метода индукции.

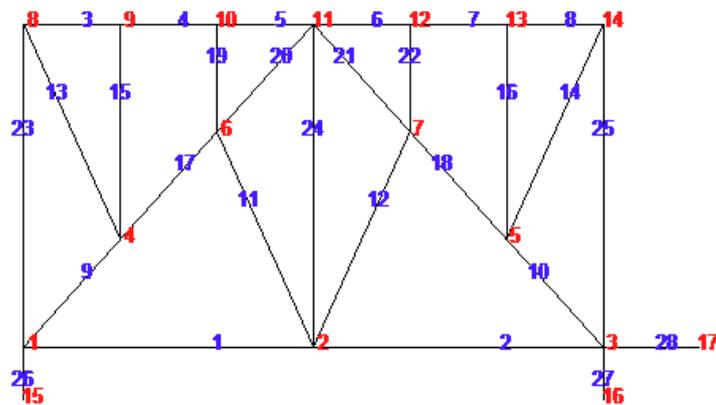


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней, $n=1$

Оператор **rgf_findrecur** из специализированного пакета **genfunc** по данным расчета десяти ферм дает линейные однородные рекуррентные уравнения порядков 5 и 3:

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5};$$

$$B_n = 3B_{n-1} - 3B_{n-2} + B_{n-3};$$

$$C_n = 3C_{n-1} - 3C_{n-2} + C_{n-3}.$$

С помощью оператора **rsolve** находим решения этих уравнений в виде полиномов четвертого и второго порядка по числу панелей:

$$A = (15n^4 + 4n^3 + 7n^2 + 2n) / 4, B = (9n^2 + 3n) / 2, C = (9n^2 - 9n + 8) / 2.$$

Найденную аналитическую зависимость прогиба от числа панелей и размеров фермы можно использовать как оценочную при эскизном расчете фермы или для тестирования численных методов.

На рис. 3 приведены графики полученной зависимости безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$, $P_s = P(3n - 1)$ от числа панелей при длине пролета $L=100$ м.

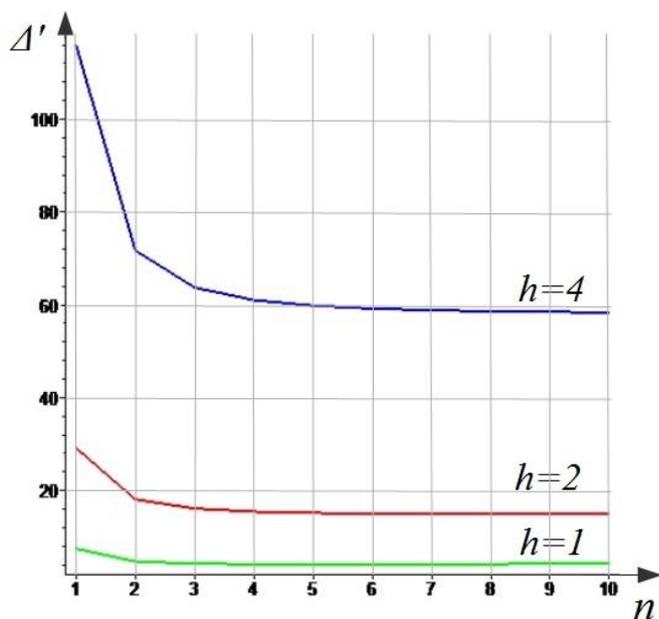


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей, высота h в метрах

Длина панели a зависит от пролета: $a=L/(6n)$. При малых n (начало графика) прогиб падает, затем очень медленно растет, стремясь к наклонной асимптоте. Тангенс угла наклона асимптоты можно найти с помощью вычисления предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = 3h / (2L)$.

В системе Maple эта операция выглядит так: `limit(Del/n, n=infinity)`.

Экстремальная (минимум) точка находится вблизи значений $n=4...8$. Найти точное решение задачи о мини-

муме прогиба в системе Maple не удастся.

Средствами Maple можно построить картину распределения усилий в стержнях фермы. На рис. 4 синим цветом выделены сжатые стержни, красным — растянутые. Цифрами указаны усилия в стержнях, отнесенные к силе P . Расчеты произведены при $a=4$ м, $h = 3$ м.

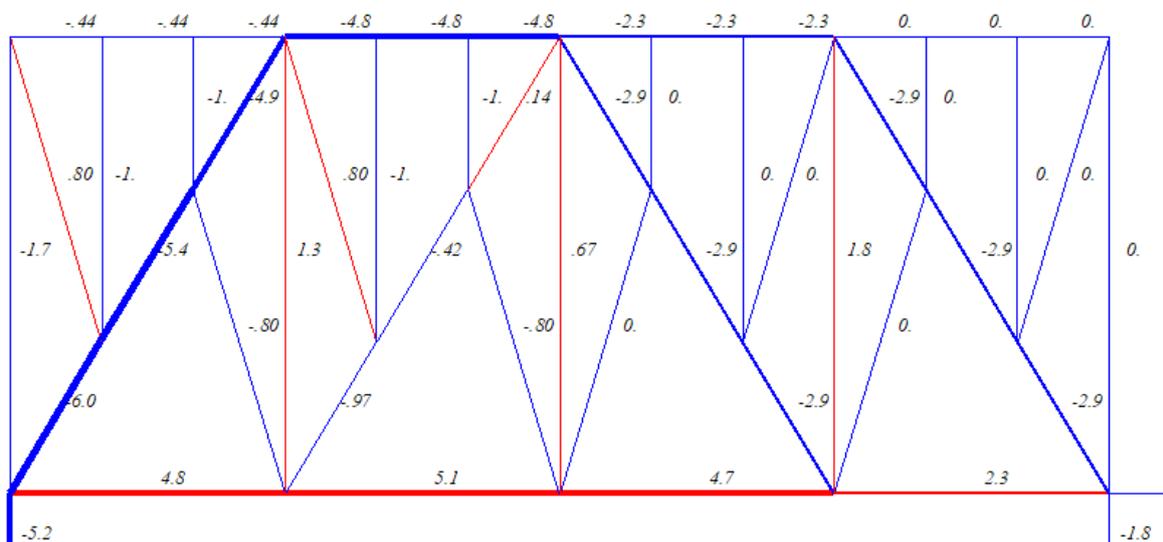


Рис. 4. Распределение усилий в стержнях, $n=2$

Аналитические обзоры некоторых простых решений для плоских ферм, полученные аналогичным методом в системе символьной математики Maple [38,39] с помощью метода индукции, содержатся в работе [40].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
2. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
3. Кунов И.М. О жесткости арочной фермы треугольного очертания в зависимости от перераспределения площадей стержней и числа панелей // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 253-256.
4. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
7. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
9. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. № 4 (67). С. 86-94.
11. Компанеец К. А. Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
12. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосой фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.
13. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
14. Кирсанов М.Н. Учет строительного подъема в аналитическом расчете пространственной балочной фермы // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. 2014. Т. 4. № 2 (20). С. 36-39.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
17. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
18. Кирсанов М.Н. Особенности аналитического расчета пространственных стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2011. № 5 (238). С. 11-15.
19. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
20. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитек-

- турно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
21. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
 22. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
 23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
 24. Kirsanov M., Komerzan E., Sviridenko O. Analytical calculation of the deflection of an externally statically indeterminate lattice truss// MATEC Web of Conferences, vol. 265, 0527 (2019) <https://doi.org/10.1051/matecconf/201926505027>
 25. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
 26. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
 27. Кирсанов М.Н., Хроматов В.Е. Моделирование деформаций плоской фермы треугольного очертания // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 6 (275). С. 24-28.
 28. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. № 4 (279). С. 10-14.
 29. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. № 2 (70). С. 17-22.
 30. Тиньков Д.В. Индуктивный вывод формулы для горизонтального перемещения башенной конструкции // Международный научный семинар "Нелинейные модели в механике, статистике, теории поля и космологии" -GRACOS-17. Казань: Изд-во Академии наук РТ, 2017. С. 249-254.
 31. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
 32. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
 33. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в шпренгельной ферме с произвольным числом панелей // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 2. С. 90-95.
 34. Гавриленко А.Б., Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка жесткости шпренгельной фермы // Строительство и реконструкция. 2018. 2(76). С. 11-17.
 35. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
 36. Кирсанов М.Н. Формула для прогиба и анализ кинематической изменяемости решетчатой фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 2. № 15. С. 5-10.

37. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы с декоративной решеткой // Строительство: наука и образование. 2019. Т. 9. Вып. 1. Ст. 1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2019.1.1
38. Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики. СПб: БХВ-Петербург, 2001. 528 с.
39. Голоскоков Д. П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
40. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.

Reference

1. Kirsanov M.N. Flat trusses. Schemes and calculation formulas: Handbook. Moscow, INFRA-M, 2019. 238 p.
2. Tinkov D.V. Calculation of the deflection of a flat arched truss with a cross-shaped grating. Postulate. 2017. No. 12 (26). Pp.74.
3. Kunov I.M. On the rigidity of the arched truss of a triangular shape depending on the redistribution of the areas of the rods and the number of panels. Scientific Almanac. 2016. № 6-2 (19). Pp. 253-256.
4. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. On the dependence of deformations of a flat arched truss on the number of panels. Construction mechanics and structure calculation. 2017. No. 5 (274). Pp. 9-14.
5. Kirsanov M.N. Comparative analysis of the rigidity of two arched truss schemes. Construction of unique buildings and structures. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55.
6. Kirsanov M.N. Inductive analysis of deformation of an arched truss. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. 1. Pp. 64-70.
7. Kirsanov M.N. Formulas for calculating the deflection of an arched truss. Building mechanics and structures. 2018. vol. 1. No. 16. Pp. 7-11.
8. Kirsanov M.N. Analytical study of deformations of a flat arch type truss. Bulletin of the State University of Marine and River Fleet. Admiral S.O. Makarova. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48.
9. Kirsanov M.N. Analytical assessment of the deflection and effort in the critical rods of the arched truss. Transport Construction. 2017. No. 9. Pp. 8-10.
10. Kirsanov M.N. Formulas for calculating deformations of an arched truss with an arbitrary number of panels. Construction of unique buildings and structures. 2018. No. 4 (67). Pp. 86-94.
11. Kompaneets K. A. Calculation of the displacement of the movable support of a flat arched diagonal truss with a load in the middle of the span. Youth and Science. 2017. №4. Pp.108.
12. Savinykh A. C. Analysis of the deflection of an arched braced truss loaded on the upper belt. Construction and Architecture. 2017. Volume 5. Issue 3 (6). Pp. 12-17.
13. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems of deflection of flat trusses of arch type. Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii. 2018. Volume 1. №16. Pp.12-33.
14. Kirsanov M.N. Accounting for the construction boom in the analytical calculation of a spatial beam truss. News of Moscow State Technical University MAMI. 2014. Volume 4. No. 2 (20). Pp. 36-39.
15. Kirsanov M.N. Analytical calculation and optimization of a spatial beam truss. Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute. 2012. No. 5. Pp. 5-8.

16. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a spatial rectangular coating. *Vestnik MGSU*. 2018. Volume 13. No. 5 (116). Pp. 579-586.
17. Kirsanov M.N. Estimation of the deflection and stability of the spatial beam truss. *Construction mechanics and the calculation of structures*. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
18. Kirsanov M.N. Features of the analytical calculation of spatial core systems. *Construction mechanics and the calculation of structures*. 2011. No. 5 (238). Pp. 11-15.
19. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of the spatial core system. *Engineering and Construction Journal*. 2011. No. 6 (24). Pp. 28-34.
20. Kirsanov M.N. Stress state and deformations of a rectangular spatial core coating. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture*. 2016. № 1 (41). Pp. 93-100.
21. Kirsanov M.N. Calculation of a spatial core system that allows instant variability. *Construction mechanics and structure calculation*. 2012. № 3 (242). Pp. 48-51.
22. Leonov Pp.G., Kirsanov M.N. Analytical calculation and analysis of the spatial core structure in the Maple system. In the collection: *Informatization of engineering education INFORINO-2014 Proceedings of the international scientific-methodical conference*. 2014. Pp. 239-242.
23. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the spatial core system. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2012. № 1. Pp. 49-53.
24. Kirsanov M., Komerzan E., Sviridenko O. Analytical calculation of an externally statically indeterminate lattice truss. *MATEC Web of Conferences*, Volume 265, 0527 (2019) <https://doi.org/10.1051/mateconf/201926505027>
25. Kirsanov M.N. The number of panels is a number of panels. *Russian Journal of Building and Architecture*. 2018. No. 1 (37). Pp. 92-99.
26. Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of a flat lattice trusses on the number of panels. *Mechanization of construction*. 2017. Volume 78. No. 10. Pp. 24-27.
27. Kirsanov M.N., Khromatov V.E. Modeling deformations of a flat truss of a triangular shape. *Construction mechanics and structure calculation*. 2017. No. 6 (275). Pp. 24-28.
28. Kirsanov M.N., Moskvina V.G. Deformations of a flat truss with a reinforced lattice. *Construction mechanics and structural analysis*. 2018. No. 4 (279). Pp. 10-14.
29. Kirsanov M.N. Inductive derivation of formulas for deformations of a flat lattice truss. *Construction and reconstruction*. 2017. No. 2 (70). Pp. 17-22.
30. Tinkov D.V. Inductive derivation of the formula for the horizontal movement of the tower structure. *International scientific seminar "Nonlinear models in mechanics, statistics, field theory and cosmology" -GRACOS-17*. Kazan: Publishing House of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, 2017. Pp. 249-254.
31. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss. *Building Mechanics and Structures*. 2018. No. 2 (17). Pp. 72-79.
32. Kirsanov M.N. Analytical method for calculating the deflection of a flat truss with a complex truss-type grating. *Transport Construction*. 2017. No. 5. Pp. 11-13.
33. Kirsanov M.N. Formulas for calculating deflection and effort in a trusses with an arbitrary number of panels. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*. 2018. Volume 14. No. 2. S. 90-95.
34. Gavrilenko, AB, Kirsanov, M.N. Analytical assessment of stiffness trusses. *Construction and reconstruction*. 2018. 2 (76). Pp. 11-17.

35. Kirsanov M.N. Derivation of a formula for deflection of a lattice truss with cases of kinematic variability. Construction mechanics and structures. 2017. Volume 1. No. 14. Pp. 27-30.
36. Kirsanov M.N. The formula for the deflection and analysis of the kinematic variability of the lattice truss. Building mechanics and structures. 2017. Volume 2. No. 15. Pp. 5-10.
37. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a truss with a decorative lattice. Construction: science and education. 2019. Volume 9. No. 1. Article 1. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227 / 2305-5502.2019.1.1
38. Matrosov A.V. Maple 6. The solution of problems of higher mathematics and mechanics. St. Petersburg: BHV-Petersburg, 2001. 528 p.
39. Goloskokov D.Pp. Practical course of mathematical physics in the Maple system. SPb.: Park-Com Publishing House, 2010. 644 p.
40. Osadchenko N. Calculation of the deflection of a flat continuous statically definable truss with two spans. Postulate. 2017. No. 12. Pp. 28.

**THE FORMULA FOR THE DEPENDENCE OF THE DEFLECTION OF AN
ASYMMETRICALLY LOADED FLAT TRUSS WITH REINFORCED BRACES ON THE
NUMBER OF PANELS**

G. N. Tkachuk

National Research University "MPEI"
Moscow, Russia

¹Student, tel.: +7(495)362-73-14; e-mail: geoyukos@yandex.ru

Statically determinate girder with upward braces and parallel belts reinforced with additional braces. On the half of the upper belt, the truss is loaded with forces evenly distributed over the nodes. The deflection of the truss is calculated by the Maxwell-Mohr formula. The forces in the rods in the analytical form are the method of cutting nodes according to the program of symbolic transformations Maple. According to the solution of a series of problems with different successively increasing number of panels, a sequence of coefficients of the desired formula is obtained. The General term of the coefficients sequence is determined by solving a linear homogeneous recurrent equation.

Keywords: truss, deflection, induction, Maple

СВОЙСТВО ВЛОЖЕНИЯ СПЕКТРОВ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ РЕГУЛЯРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. Н. Кирсанов¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ"
Россия, г. Москва

¹Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Анализируются спектры собственных колебаний некоторых простых регулярных систем. Обнаружено свойство вложения спектров систем с меньшим порядком в спектры систем с большим порядком. Показано, что свойство вложения спектров в классической задаче о колебании упруго соединенных грузов на гладкой плоскости проявляется в зависимости от крепления системы. В задаче о вертикальном колебании равномерно расположенных грузов на упругой невесомой балке получено, что высшая частота не зависит от числа грузов. Определение частот колебаний систем, обладающих свойством вложения, свелось к нахождению собственных чисел бисимметричной матрицы.

Ключевые слова: собственные колебания, свойство вложения, спектр, балка, высшая частота колебаний, бисимметричная матрица

Introduction. Analysis of eigenfrequency spectra of mechanical systems and structures is of great practical importance. In [1] on the specifics of the spectrum of oscillations of the system is proposed to detect defects in products. The temperature and the crystallographic orientation of the lattice, as shown in [2], affect the spectrum of the oscillations of the single-crystal rotor blades of the engine. Analysis of the adequacy of the mathematical model of the compressor-condenser unit in [3] is carried out on the spectrum of oscillations obtained by the finite element method.

Among the mechanical systems and building structures, a class of regular systems can be singled out separately, having periodically repeated elements or groups of elements in their structure [5 -8]. We show that the spectra of some regular systems have one previously unnoticed property — the embedding property of frequency spectra.

Natural oscillations of regular trusses were studied in [9-13].

Cargo system on a smooth plane fixed on one side. Consider the equations of small oscillations of the system of loads connected by linear elastic elements (springs) with stiffness c (Fig. 1).



Fig. 1. Cargo system with elastic bonds on a smooth plane, $n=6$

Applying the Lagrange formalism, we introduce generalized coordinates — linear displacements of loads. The kinetic energy of the system of loads of the same mass m has the form

$$T = m \sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2 / 2, \quad (1)$$

where \dot{x}_k is the velocity of the k -th point. The coordinate x_0 corresponds to the attachment point of the left spring. The potential energy of compression of springs has the form

$$\Pi = c \sum_{k=1}^n (x_{k-1} - x_k)^2 / 2, \quad x_0 = 0.$$

We write the system of n Lagrange equations of the 2nd kind ($k=1, \dots, n$)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_k} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_k},$$

in matrix form

$$m \ddot{\bar{X}} + [D_n] \bar{X} = 0, \quad (2)$$

where $[D_n]$ is the stiffness matrix, \bar{X} — the displacement vector of loads of length n , $\ddot{\bar{X}}$ — vector of accelerations. For $n=4$ this matrix, for example, has the form

$$[D_4] = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 & 0 \\ -c & 2c & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c & -c \\ 0 & 0 & -c & c \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Note that this matrix is not symmetric with respect to the side diagonal. If we multiply (2) by the matrix of compliance $[B_n]$ inverse to $[D_n]$, then taking into account the substitution $\bar{X} = \bar{A} \sin(\omega t + \varphi_0)$ equivalent to the replacement $\ddot{\bar{X}} = -\omega^2 \bar{X}$, the problem is reduced to the problem of the eigenvalues of the matrix $[B_n]$: $m\omega^2 [B_n] \bar{X} = \bar{X}$, where $\lambda_k^{(n)}$ the eigenvalue corresponds to the eigenfrequency ω , or $[B_n] \bar{X} = \lambda_k^{(n)} \bar{X}$. At $n=4$ the matrix $[B_n]$ has the form

$$[B_4] = \frac{1}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

The elements of the upper (right) triangle of this symmetric matrix in General for an arbitrary value n have the form:

$$b_{i,j} = i, \quad i = 1, \dots, n-j, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Eigenfrequency spectra for systems with different number of loads at $c=1$ N/m, $m=1$ kg are shown by curves (Fig. 2). Conventionally, each curve connects the points corresponding to the frequencies of the system with n masses, and k is the number of frequencies.

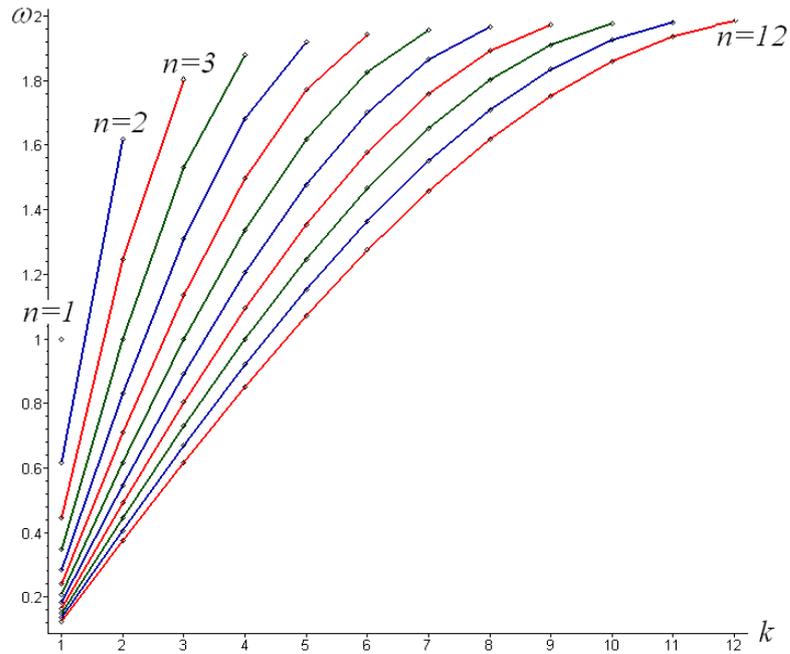


Fig. 2. Eigenfrequency spectra of unilaterally fixed cargoes, c^{-1}

Discovered the next match of frequencies:

$$\begin{aligned} \omega_1^{(2)} = \omega_2^{(7)} = \omega_3^{(12)} \dots &= 0,618c^{-1}, & \omega_2^{(2)} = \omega_5^{(7)} = \omega_8^{(12)} \dots &= 1,618c^{-1}, \\ \omega_1^{(4)} = \omega_2^{(7)} = \omega_3^{(10)} \dots &= 1,000c^{-1}, & \omega_2^{(3)} = \omega_5^{(10)} = \omega_8^{(17)} \dots &= 1,247c^{-1}, \\ \omega_3^{(3)} = \omega_8^{(10)} = \omega_{13}^{(17)} \dots &= 1,802c^{-1}, & \dots & \end{aligned}$$

The observed patterns allow to obtain some frequencies without resorting to calculations:

$$\begin{aligned} \omega_k^{(5k-3)} = 0,618c^{-1}, & \quad \omega_{3k-1}^{(5k-3)} = 1,618c^{-1}, & \quad \omega_k^{(3k+1)} = 1,000c^{-1}, & \quad \omega_{3k-1}^{(7k-4)} = 1,247c^{-1}, \\ \omega_{5k-2}^{(7k-4)} = 1,802c^{-1}, & \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

The list goes on.

Cargo system on the plane, fixed on both sides. The equations of oscillation of loads, connected by springs, not stressed at rest (Fig. 3), almost no different from the previous example. The potential energy of compression of springs has the form:

$$\Pi = c \sum_{k=1}^{n+1} (x_{k-1} - x_k)^2 / 2, \quad x_0 = x_{n+1} = 0.$$



Fig. 3. Cargo system with elastic ties on a smooth plane and double-sided fastening, $n=6$

The stiffness matrix in (2) at $n=4$ differs from (3) only in the element on the last line and has the form

$$[D_4] = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 & 0 \\ -c & 2c & -c & 0 \\ 0 & -c & 2c & -c \\ 0 & 0 & -c & 2c \end{bmatrix}.$$

The matrix of compliance inverse to the matrix $[D_n]$ has the property of symmetry. At $n=4$ it has the form:

$$[B_4] = \frac{1}{5c} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

A generalization of the form of this matrix to the General case is obvious. The compliance matrices for an arbitrary number of loads n have the form

$$[B_n] = \frac{1}{(n+1)c} \begin{bmatrix} n & n-1 & \dots & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & \dots & 4 & 2 \\ n-2 & 3(n-1) & \dots & 6 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n \end{bmatrix}.$$

Graph of frequency distribution in the spectra (Fig. 4) with a different number of masses is similar to the schedule in figure 2. However, there is a fundamental difference that constitutes the main idea of this article. If in the first problem on the oscillation of loads fixed on the one hand there is only a coincidence of some frequencies, here, in the symmetric problem, the frequency spectra $\{\Omega_k\}$, $k=1,2,\dots$ have the property of embedding (Fig. 5): $\{\Omega_\alpha\} \subset \{\Omega_\beta\}$, where α, β is the number of masses in the systems. We have the following relations at $k=1,2,\dots$

$$\{\Omega_1\} \subset \{\Omega_{2k+1}\}, \{\Omega_2\} \subset \{\Omega_{3k+2}\}, \{\Omega_3\} \subset \{\Omega_{4k+3}\}, \{\Omega_4\} \subset \{\Omega_{5k+4}\}, \dots \quad (4)$$

Moreover, these relations admit one more simple generalization:

$$\{\Omega_j\} \subset \{\Omega_{(j+1)k+j}\}, \quad j, k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

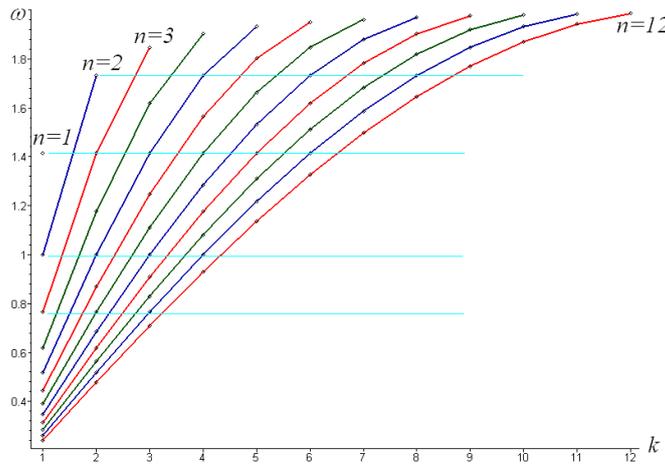


Fig. 4. Spectra of the eigenfrequencies of the system of goods two sides fixed, c^{-1} . Horizontal lines indicate the matching frequency

$n= 1, [1.414]$
 $n= 2, [1.000, 1.732]$
 $n= 3, [0.765, 1.414, 1.848]$
 $n= 4, [0.618, 1.176, 1.618, 1.902]$
 $n= 5, [0.518, 1.000, 1.414, 1.732, 1.932]$
 $n= 6, [0.445, 0.868, 1.247, 1.564, 1.802, 1.950]$
 $n= 7, [0.390, 0.765, 1.111, 1.414, 1.663, 1.848, 1.962]$
 $n= 8, [0.347, 0.684, 1.000, 1.286, 1.532, 1.732, 1.879, 1.970]$
 $n= 9, [0.313, 0.618, 0.908, 1.176, 1.414, 1.618, 1.782, 1.902, 1.975]$
 $n= 10, [0.285, 0.563, 0.831, 1.081, 1.310, 1.511, 1.683, 1.819, 1.919, 1.980]$
 $n= 11, [0.261, 0.518, 0.765, 1.000, 1.218, 1.414, 1.587, 1.732, 1.848, 1.932, 1.983]$
 $n= 12, [0.241, 0.479, 0.709, 0.929, 1.136, 1.326, 1.497, 1.646, 1.771, 1.870, 1.942, 1.985]$
 $n= 13, [0.224, 0.445, 0.661, 0.868, 1.064, 1.247, 1.414, 1.564, 1.693, 1.802, 1.888, 1.950, 1.987]$
 $n= 14, [0.209, 0.416, 0.618, 0.813, 1.000, 1.176, 1.338, 1.486, 1.618, 1.732, 1.827, 1.902, 1.956, 1.989]$

Fig. 5. The attachment of the spectra of eigenfrequencies of the system loads, mounted on two sides

Loads on an elastic beam (version 1). Consider the vertical oscillations of the system of loads of mass m , located on a linearly elastic weightless beam at the same distance from each other and from the supports (Fig. 6).



Fig. 6. Beam with masses, $n=9$ (version 1)

The differential equation of small oscillations of this system does not differ from equation (2), where \bar{X} – the vector of vertical displacements of masses, and the elements of the matrix of compliance, inverse to $[D_n]$, are calculated by the Maxwell-Mohr formula:

$$b_{i,j} = \int_0^L \frac{m_i m_j}{EJ} dx,$$

where $m_i(x)$ and $m_j(x)$ are the diagrams of bending moments in the beam from the action of vertical unit forces applied to the places of masses i and j (Fig. 7), where EJ is the bending rigidity of beams. Diagrams of moments included in the Maxwell – Mohr formula have the form

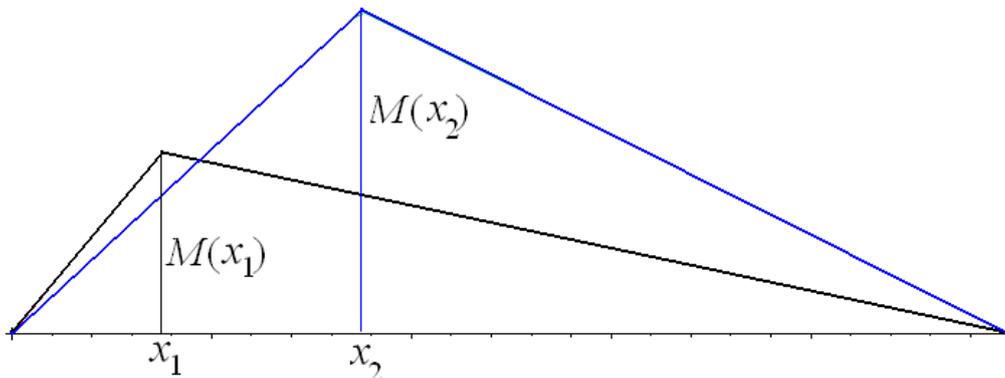


Fig. 7. Moment plots for calculating the elements of the compliance matrix

Maximum plot values:

$$M_k(x_k) = x_k(L - x_k)/L, \quad k = i, j, \quad (6)$$

where $L = (n+1)a$ is the beam length. If the loads are at the same distance from each other and from the supports (span split with step a), then $x_k = ak$, $k = i, j$. Plots have an analytical expression

$$m_k(x) = \begin{cases} xM_k(x_k)/x_k, & 0 \leq x \leq x_k, \\ (L-x)M_k(x_k)/(L-x_k), & x_k \leq x \leq L. \end{cases}$$

Thus, the coefficients of the compliance matrix have the form

$$b_{i,j} = \int_0^L \frac{m_i m_j}{EJ} dx = \frac{i(j-n-1)(i^2 + j^2 - 2j(n+1))a^3}{EJ}, \quad j > i,$$

$$b_{j,i} = b_{i,j}, \quad j \leq i.$$

At $n = 4$ the matrix has the form:

$$[B_4] = \frac{a^3}{30EJ} \begin{bmatrix} 32 & 45 & 40 & 23 \\ 45 & 72 & 68 & 40 \\ 40 & 68 & 72 & 45 \\ 23 & 40 & 45 & 32 \end{bmatrix}.$$

The eigenvalue $\lambda_k^{(n)}$ of this matrix corresponds to the eigenfrequency $\omega_k^{(n)} = 1/\sqrt{\lambda_k^{(n)}m}$. The spectra of own frequencies of fluctuations, related to $\sqrt{EJ/(ma^3)}$, for beams with various numbers of goods displayed curves (Fig. 8) similar curves in figures 2 and 4.

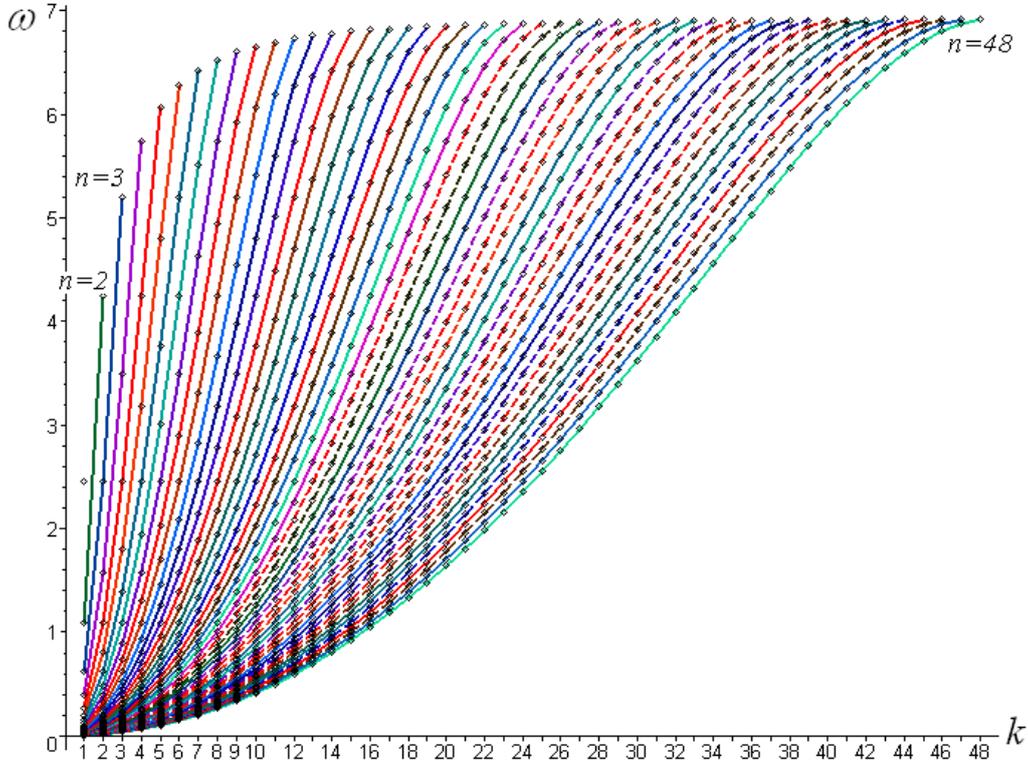


Fig. 8. Natural frequency spectra of loads on the beam, $n = 1-48$ (version 1)

$n= 1, [2.449]$
 $n= 2, [1.095, 4.243]$
 $n= 3, [0.617, 2.449, 5.201]$
 $n= 4, [0.395, 1.575, 3.487, 5.742]$
 $n= 5, [0.274, 1.095, 2.449, 4.243, 6.070]$
 $n= 6, [0.201, 0.805, 1.807, 3.176, 4.793, 6.281]$
 $n= 7, [0.154, 0.617, 1.385, 2.449, 3.766, 5.201, 6.424]$
 $n= 8, [0.122, 0.487, 1.095, 1.942, 3.008, 4.243, 5.507, 6.525]$
 $n= 9, [0.099, 0.395, 0.888, 1.575, 2.449, 3.487, 4.628, 5.742, 6.599]$
 $n= 10, [0.082, 0.326, 0.734, 1.303, 2.030, 2.903, 3.895, 4.943, 5.925, 6.654]$
 $n= 11, [0.069, 0.274, 0.617, 1.095, 1.708, 2.449, 3.305, 4.243, 5.201, 6.070, 6.697]$
 $n= 12, [0.058, 0.234, 0.525, 0.934, 1.457, 2.092, 2.831, 3.658, 4.539, 5.414, 6.187, 6.730]$
 $n= 13, [0.050, 0.201, 0.453, 0.805, 1.257, 1.807, 2.449, 3.176, 3.969, 4.793, 5.592, 6.281, 6.757]$
 $n= 14, [0.044, 0.175, 0.395, 0.702, 1.095, 1.575, 2.138, 2.779, 3.487, 4.243, 5.012, 5.742, 6.366, 6.779]$

Fig. 9. The attachment of the spectra of eigenfrequencies of the system loads on the beam. Same frequency are underlined

There is also an embedding of spectra of the form (4) and (5) found in the problem of loads with elastic bonds on a smooth plane (Fig. 3). The dimensionless oscillation frequency $\omega_1^{(1)} = \sqrt{6} = 2,449$ at $n=1$ coincides with the known result for the oscillation frequency of the load on a beam length $2a$: $\omega = \sqrt{6EJ / (ma^3)}$ [14].

Loads on a shortened elastic beam (version 2). Consider another fastening of masses, also evenly distributed over the beam (Fig. 10). The difference from the previous problem is the shortened distances of the initial and last masses to the supports. Here the beam length $L=na$.

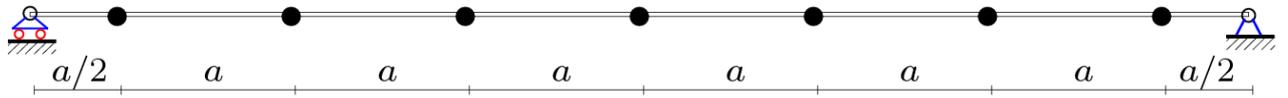


Fig. 10. Beam with masses, $n=7$, (version 2)

The maximum values of the moments plots are calculated by the same formulas (6), where $x_k = a(k-1/2)$, $k = i, j$. The coefficients of the compliance matrix, the eigenvalues of which determine the oscillation frequency, have the form

$$b_{i,j} = \int_0^L \frac{m_1 m_2}{EJ} ds = a^3 (2i-1)(2j-2n-1)(2(i^2 + j^2 - i - j - 2nj + n) + 1) / (48nEJ), \quad i < j,$$

$$b_{j,i} = b_{i,j}, \quad j \leq i.$$

At $n=4$ the matrix has the form

$$[B_4] = \begin{bmatrix} 49 & 95 & 81 & 31 \\ 95 & 225 & 207 & 81 \\ 81 & 207 & 225 & 95 \\ 31 & 81 & 95 & 49 \end{bmatrix}.$$

Let's write the sets of eigenvalues $\Lambda^{(n)} = \{\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}\}$ of several matrices, where the lower index means the eigenvalue number, the upper – the order of the system. Let us refer these values to $\lambda_1^{(1)} / 48 = a^3 / (EJ)$:

$$\Lambda^{(1)} = \{1\}, \Lambda^{(2)} = \{1, 8\}, \Lambda^{(3)} = \{1, 8/3, 40\},$$

$$\Lambda^{(4)} = \{1, 8, 64 \pm 44\sqrt{2}\}, \Lambda^{(5)} = \{1, 52/5 \pm 4\sqrt{5}, 156 \pm 68\sqrt{5}\},$$

$$\Lambda^{(6)} = \{1, 8/3, 8, 40, 320 \pm 184\sqrt{3}\}.$$

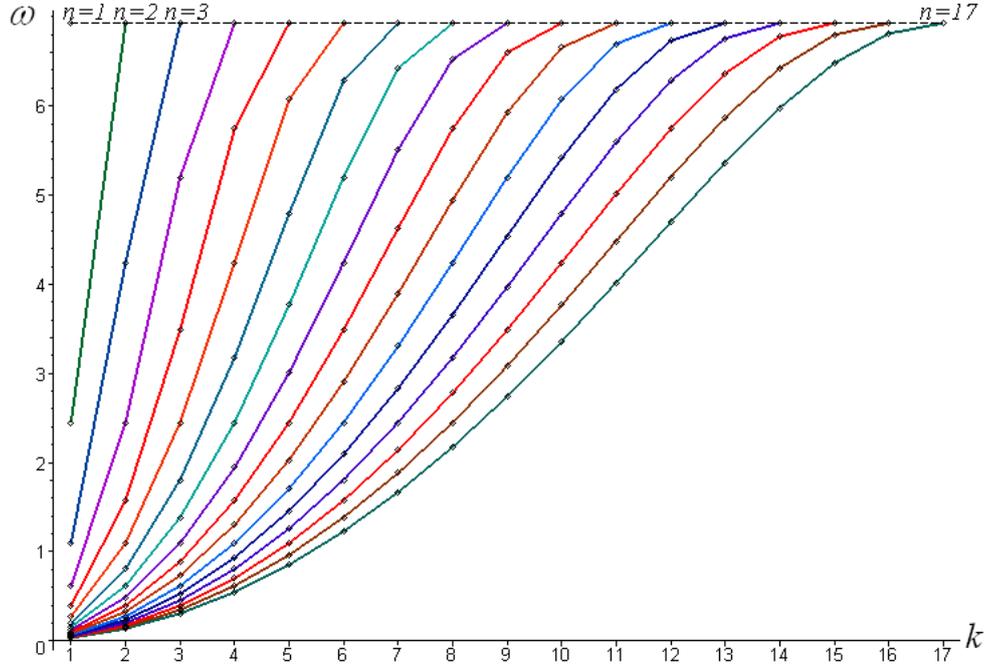


Fig. 11

You can see that the embedding of spectra here is simpler than (4). At $k=1,2,\dots$ we have:

$$\{\Omega_1\} \subset \{\Omega_k\}, \{\Omega_2\} \subset \{\Omega_{2k}\}, \{\Omega_3\} \subset \{\Omega_{3k}\}, \{\Omega_4\} \subset \{\Omega_{4k}\},$$

or $\{\Omega_j\} \subset \{\Omega_{jk}\}$, $j,k=1,2,\dots$. The latter equality also means that if the number of masses with this arrangement on the beam is expressed as a *Prime* number, then in the case of joint operation of several similar systems with different number of loads, there will be no internal resonance phenomenon. Another property of the frequency spectra found is that the higher frequency here does not depend on the number of loads n , while for the first variant of the cargo arrangement (Fig. 6) this frequency increases with n smoothly, asymptotically approaching the value $\omega = \sqrt{48EJ / (ma^3)} \approx 6,928c^{-1}$ (Fig. 8) — the highest frequency for the second variant of the location of goods. In fact, this corresponds to the principle of Saint-Venant.

Conclusion. The analysis of the spectra of frequencies of natural oscillations of two simple regular systems have identified a property investment or spectra match the frequency of the systems of different order. This property makes it possible in some cases to easily obtain simple solutions to the eigenfrequency problems of large-dimensional systems, reducing them to simple systems. A simple illustrative representation of the frequency spectra in the form of certain curves connecting the frequency points of the spectra is proposed. Formulas for matrix elements whose eigenvalues determine the frequencies of the system are obtained for an arbitrary order of the system. In the problem of small oscillations of loads on the beam it is shown that the higher frequency of oscillations does not depend on the number of loads.

Библиографический список

1. Ваньков Ю. В., Казаков Р. Б., Яковлева Э. Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов // Техническая акустика. 2003. Т. 3. № 3.
2. Придорожный Р. П., Шереметьев А. В., Зиньковский А. П. Влияние кристаллографической ориентации на спектр собственных частот и форм колебаний монокристаллических рабочих лопаток турбин // Вісник двигунобудування. 2006. № 2.
3. Напрасников В. В., Красновская С. В. Влияние упрощающих предположений в конечно-элементных моделях компрессорно-конденсаторных агрегатов на спектр собственных частот // Системный анализ и прикладная информатика. 2014. № 1-3.
4. Bao T. et al. Critical insights for advanced bridge scour detection using the natural frequency // Journal of Sound and Vibration. 2017. Т. 386. С. 116-133. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.06.039>
5. Галишникова В.В., Игнатьев В.А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. - Волгоград: ВолгГАСУ, 2006.
6. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
7. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. Volume 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Volume 54. No. 4. Pp. 756-782.
9. Рыбаков Л. С., Мишустин И. В. Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // Механика композиционных материалов и конструкций. 1999. Т. 5. № 2. С. 3-16.
10. Рыбаков Л. С., Мишустин И. В. Применение метода сосредоточенных масс к анализу собственных упругих колебаний одной регулярной ферменной структуры // Механика композиционных материалов и конструкций. 1999. Т. 5. № 4. С. 51-64.
11. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 14-20.
12. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 3 (125). С. 284-292. DOI: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
13. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Спектр собственных частот колебаний внешне статически неопределимой фермы // Транспортное строительство. 2019. №2. С. 20-23.
14. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Л. : Политехника, 1990. 271 с.

Reference

1. Van'kov Yu. V., Kazakov R. B., Yakovleva E. R. Own frequencies of the product as an informative sign of the presence of defects./ Technical Acoustics. 2003. Volume 3. No. 3
2. Pridorozhny R.P., Sheremetyev A.V., Zinkovsky A.P. Influence of crystallographic orientation on the spectrum of natural frequencies and vibration modes of single-crystal turbine blades. Visnik dvigunobuduvannya. 2006. No. 2
3. Naprasnikov V.V., Krasnovskaya S.V. Influence of simplifying assumptions in finite element models of compressor-condenser units on the spectrum of natural frequencies. System analysis and applied informatics. 2014. No. 1-3.

4. Bao T. et al. Critical insights for the use of the natural frequency. *Journal of Sound and Vibration*. 2017. T. 386. p. 116-133. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.06.039>
5. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. Regular core systems. Theory and methods of calculation. Volgograd: VolgGASU, 2006.
6. Ignatiev V.A. Calculation of regular core systems. Saratov: Saratov Higher Military Chemical Military School, 1973.
7. Hutchinson R. G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.* 2005. Volume 85. No. 9. Pp. 607 – 617.
8. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006. Volume 54. No. 4. Pp. 756-782.
9. Rybakov L.S., Mishustin I.V. Natural oscillations of plane regular elastic trusses of orthogonal structure. *Mechanics of composite materials and structures*. 1999. Vol. 5. No.2. Pp. 3-16.
10. Rybakov L.S., Mishustin I.V., Application of the method of concentrated masses to the analysis of natural elastic oscillations of one regular truss structure. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. 1999. Volume 5. No. 4. Pp. 51-64.
11. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical expressions of frequencies of small oscillations of a beam truss with an arbitrary number of panels. *Construction mechanics and construction*. 2019. No. 1 (20). Pp. 14-20.
12. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analysis of the natural frequencies of oscillations of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering*. 2019. Volume 14. No. 3 (125). Pp. 284-292. doi: 10.22227/1997-0935.2019.3.284-292
13. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Spectrum of natural frequencies of oscillations of externally statically indefinable truss. *Transport construction*. 2019. No. 2. Pp. 20-23.
14. Panovko Ya. G. *Osnovy of the applied theory of oscillations and shock*. L.: Polytechnic, 1990. 271 p.

THE PROPERTY OF EMBEDDING OF NATURAL FREQUENCIES SPECTRA OF REGULAR MECHANICAL SYSTEMS

M. N. Kirsanov¹

National Research University “MPEI”
Moscow, Russia

¹Dr of Physics and Mathematics, professor, tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

The frequency spectra of natural oscillations of some simple regular systems are analyzed. The property of embedding the spectra of systems with a smaller order in the spectra of systems with a large order has been found. It is shown that the property of embedding spectra in the classical problem of oscillation of elastically connected loads on a smooth plane is manifested depending on the mounting system. In the problem of vertical oscillation of uniformly located loads on an elastic weightless beam, it was found that the highest frequency does not depend on the number of loads. Determination of the oscillation frequencies of systems with the property of an embedding is reduced to finding eigenvalues of a bisymmetric matrix.

Keywords: truss, induction, Maple, deflection, kinematic variability.

УДК 624.21:533.6; 699.83

**КЛАССИФИКАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ ОБЪЕДИНЕНИЯ
ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ СО СТАЛЬНЫМИ БАЛКАМИ**

А. В. Козлов¹

Воронежский государственный технический университет
Россия, г. Воронеж

Доц. кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов
тел.: +7(473) 271-52-02; e-mail: kozlov.a.v@inbox.ru

Одна из проблем при рассмотрении работы сталежелезобетонных мостов – учет влияния сдвига между железобетонными и стальными конструктивными элементами. Надежность и долговечность сооружения напрямую зависит от повышения точности расчета путем моделирования реальной работы сооружения любой сложности. Однако требуется разработать научно-обоснованную методику составления расчетных моделей сталежелезобетонных пролетных строений и конструкций объединения бетона и стали.

При анализе экспериментально-теоретических исследований расчета сталежелезобетонных мостов отмечаются значительные расхождения значений жесткости, полученных различными авторами, для связующих элементов стальной и железобетонной частей поперечного сечения конструкции. Требования к технологии расчета сталежелезобетонных пролетных строений мостов, в том числе с учетом конечной сдвиговой жесткости швов объединения стальной балки с железобетонной плитой, не регламентированы в разработанных межгосударственных стандартах, и их скорейшая разработка в составе национальных стандартов является, безусловно, одной из важнейших задач в рамках реализации ТР ТС 014/2011.

Предлагаемый алгоритм расчета с возможностью учета податливости сдвигового соединения позволяет уточнить расчет сталежелезобетонных пролетных строений мостов в соответствии с современными вычислительными мощностями, позволяет повысить уровень надежности мостовых сооружений, закладываемый на стадии проектирования.

Ключевые слова: соединительные элементы железобетонной и стальной части пролетного строения; упор жесткий, гибкий, непрерывный; анкер

Основные принципы работы упоров. Анализ экспериментальных зависимостей «усилие-сдвиг». В Еврокодах конструкции объединения железобетонных плит со стальными балками называют соединителями (connectors). В отечественной технической литературе применяют термин «упор», а в случае, если упор способен работать не только на сдвиг, но и на растяжение (отрыв плиты), его называют анкером.

По характеру работы упоры разделяют на жесткие и гибкие. К отдельному виду относят упоры в виде перфорированной полосы (гребенчатые). Также для соединения плит с поясом балки применяют высокопрочные болты со следующими поверхностями трения: сталь-сталь; сталь-бетон; клеевой контакт.

При жестком упоре бетон равномерно сминается на упорной площадке [1]: с ростом сдвигающей нагрузки бетон, «наталкиваясь» на жесткий упор, разрушается с образованием треугольного скола с уклоном 1:2...1:2,5.

С уменьшением жесткости упора (переходом его в тип гибкого) его деформации по высоте становятся неравномерными, а с дальнейшим уменьшением жесткости меняют знак.

В гибких упорах наибольшие напряжения сжатия бетона локализованы у пояса (т. е. вблизи места крепления упора к поясу). При смещении плиты относительно пояса бетон «двигается» по гибкому упору, растягивая его и отрывая от пояса (рис. 1).

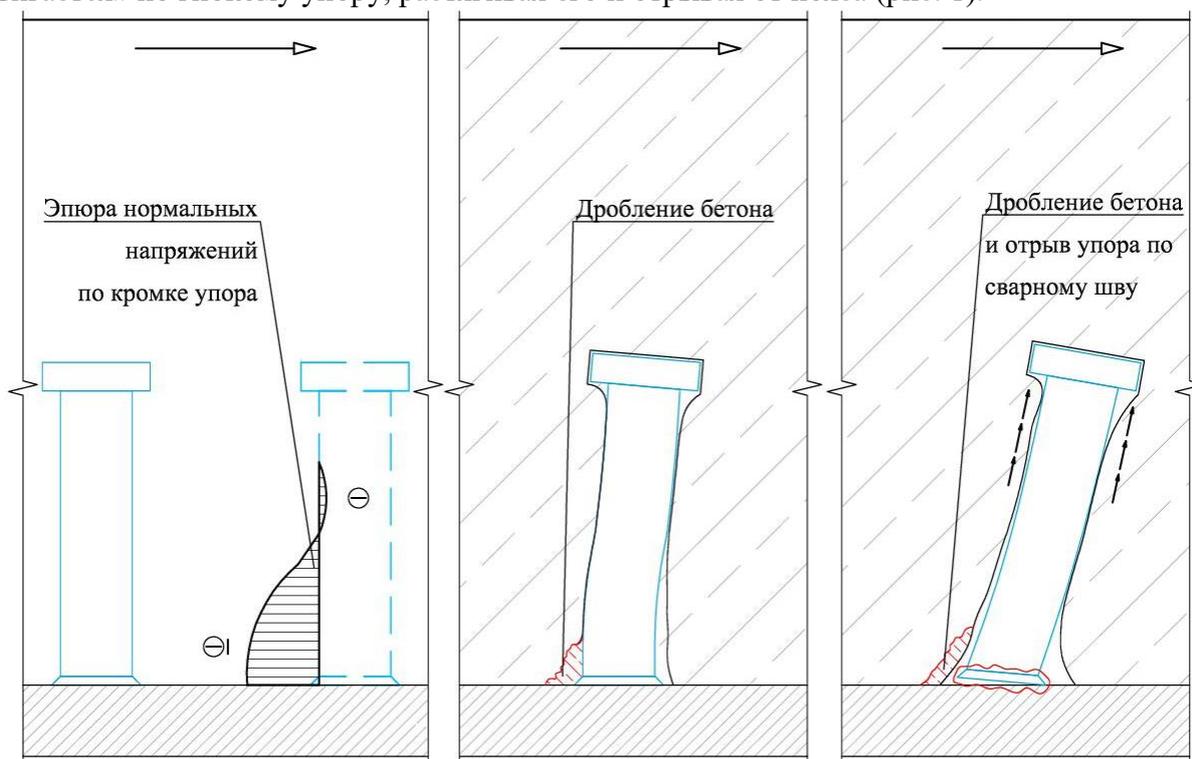


Рис. 1. Этапы разрушения гибкого упора

Несущая способность упора любого типа оценивается по двум критериям:

- разрушение бетона под упором, если напряжение сжатия превышает R_b ;
- разрушение стали упора или места его соединения с балкой (как правило, от совместного действия сдвига и растяжения).

Механизм разрушения бетона под упором очень сложен, аналитическая оценка практически невозможна, и для расчета несущей способности по бетону используются данные натурных испытаний. При проведении испытаний за критерий разрушения (наступления предельного состояния), как правило, берут предельное значение смещения плиты относительно пояса. За нормативную величину несущей способности принимают среднее арифметическое значение

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)},$$

где \bar{x} – среднее арифметическое значение переменной величины;

x_i – i -е значение переменной величины;

n – количество проб (испытаний).

Расчетное значение получают делением нормативного на коэффициент надежности.

При испытаниях устанавливается зависимость между деформациями и усилиями сдвига плиты. Если по горизонтали откладывать остаточные деформации сдвига, а по вертикали – относительную нагрузку, равную отношению действующей нагрузки к предельной,

при которой наступает разрушение: V_d/V_u , то для большинства конструкций гибких стержневых упоров график деформаций сдвига, как правило, имеет вид, представленный на рис. 2.

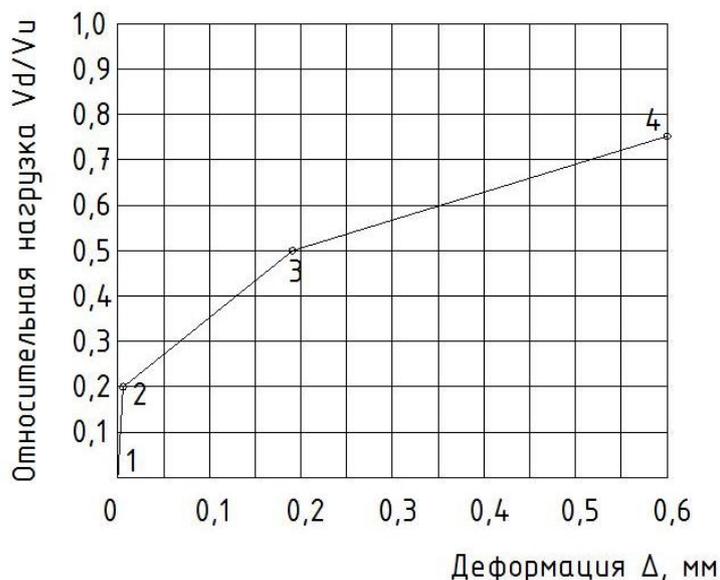


Рис. 2. Усредненный график деформаций сдвига

На участке 1-2 рост нагрузки проходит без видимых деформаций; на участке 2-3 нагрузка возрастает с умеренными деформациями; на участке 3-4 рост деформаций опережает возрастание нагрузки.

Точка перелома 3 может быть определена как предельное состояние по эксплуатационной пригодности. Согласно [2, 3], а также проведенным в рамках настоящей работы численным экспериментам с различными диаметрами упоров в физически нелинейных расчетных моделях с использованием МКЭ отношение V_d/V_u , при котором малые перемещения переходят к значительным (точка 3 на рис. 2), варьируется для разных типов упоров и имеет среднее значение $\Delta = 0,18$ мм при $V_d/V_u = 0,5$.

Таким образом, линейная сдвиговая жесткость гибкого штыревого упора на оптимальном участке его работы (отрезок 2-3, рис.2) может быть выражена через его несущую способность:

$$C = \frac{0,5V_u}{0,18 \cdot 10^{-3}} = 2780V_u \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}} \right).$$

Жесткий упор согласно [1] имеет неупругий характер работы: статические испытания на сдвиг с повторными загрузками и разгрузками на большинстве ступеней нагрузки выявили накопление остаточных перемещений сдвига с уменьшением модуля упругих деформаций по мере этого накопления. Стабилизация перемещений сдвига для жесткого упора на уровне $\Delta=0,5$ мм наступила при $V_d/V_u = 0,7$.

Непрерывные гребенчатые упоры согласно [4] при нагрузке 50 % от предельной показали перемещение 0,021 мм, что на порядок меньше перемещений гибких стержневых и жестких упоров. Столь малые перемещения подтвердились и численными экспериментами в рамках настоящей работы и обусловлены широким включением в работу прилегающего к гребню бетона посредством поперечных стержней, проходящих через отверстия и пазы гребенки (рис. 3). Здесь при максимальном сжимающем напряжении 224 т/м^2 , на краю бетонной полосы напряжение падает довольно незначительно до 162 т/м^2 . Центральный пустой уча-

сток – стальная полоса (гребенка), не показана рис. 3 с целью отображения напряжений исключительно в бетоне.

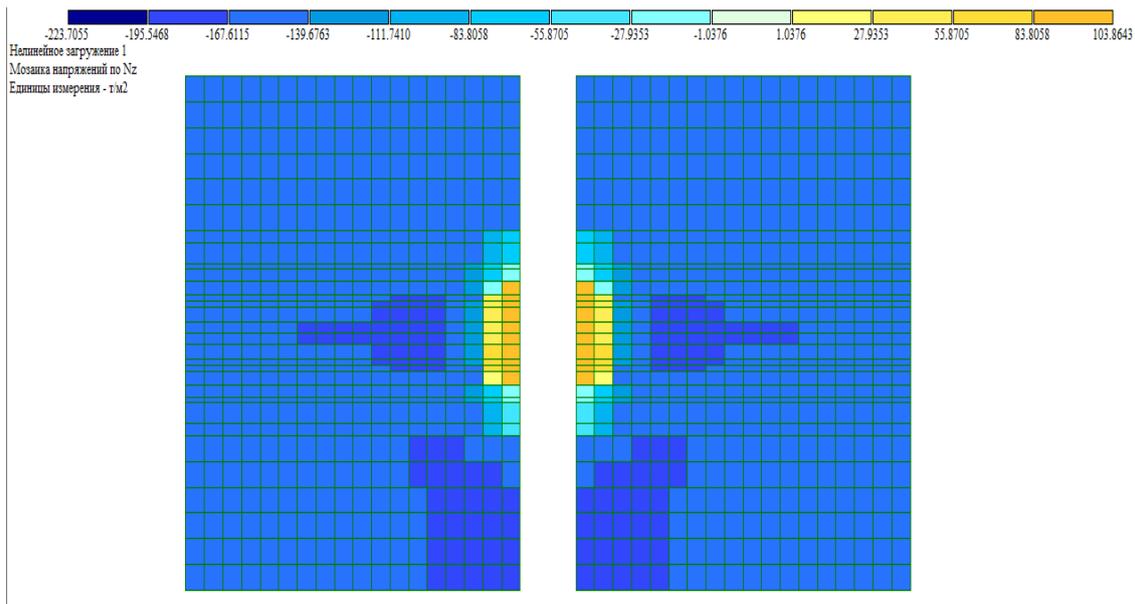


Рис. 3. Мозаика нормальных (вдоль направления сдвига) напряжений в бетоне плиты шириной 40 см, высотой 20 см, по разрезу в месте нахождения поперечного стержня гребенчатого упора

Конструкции упоров. Ниже приводятся наиболее распространенные конструкции упоров.

1. *Жесткий упор, у которого упорная пластина подкреплена одним или двумя ребрами* (рис. 4).

Толщина пластины должна обеспечивать равномерное напряжения сжатия по её площади (предполагается прямоугольная эпюра сжимающих напряжений). Несущая способность упора согласно [5]:

$$S_h \leq 1.6R_b A_{b,dr} \text{ – по прочности в автодорожных, городских и пешеходных мостах;}$$

$$S_h \leq 2R_b A_{b,dr} \text{ – по прочности в железнодорожных мостах;}$$

$$S_w \leq 1.5m_{b1}R_b A_{b,dr} \text{ – по выносливости в железнодорожных мостах.}$$

Здесь S_h , S_w – сдвигающие усилия, приходящиеся на один упор, соответственно при расчете по прочности и выносливости;

$A_{b,dr}$ – площадь поверхности смятия бетона упором; при цилиндрических и дугообразных упорах – площадь их диаметрального сечения;

m_{b1} – коэффициент условий работы бетона под многократно повторяющейся нагрузкой согласно 7.26 [5].



Рис. 4. Жесткий упор

Для автодорожных мостов, т. к. проверки выносливости допускается не выполнять, значение предельного сдвига меньше, чем по формуле прочности для железнодорожных мостов.

Расстановка жестких упоров должна отвечать следующим требованиям:

- расстояние в свету между жесткими упорами не должно превышать 8-кратной средней толщины плиты, определяемой делением площади учитываемой в составе сечения плиты (совместно с ребрами или вутами) на расчетную ширину b_{sl} ;
- расстояние в свету между жесткими упорами должно быть не меньше 3,5-кратной высоты расчетной площади смятия бетона упором.

2. Гибкие упоры в виде прокатных швеллеров, двутавров, уголков без подкрепляющих ребер (рис. 5).



Рис. 5. Гибкий упор

Несущая способность согласно [5]:

$$S_h \leq 0.55(t_{fr} + 0.5t_w)b_{dr}\sqrt{10R_b},$$

где S_h – сдвигающее усилие, приходящееся на один упор, кН;

t_{fr} – сумма радиуса закругления и наибольшей толщины полки прокатного профиля, см;

t_w – толщина стенки прокатного профиля, см;

b_{dr} – ширина площади смятия бетона упором, см;

R_b – расчетное сопротивление бетона сжатию, МПа.

3. Гибкий наклонный анкер из арматурной стали круглого сечения, а также петлевой анкер (рис. 6).



Рис.6. Петлевой анкер

Несущая способность одной ветви согласно [5]:

$$S_h \leq 0.1A_{an}mR_y\cos\alpha + d^2\sqrt{10R_b}\sin\alpha;$$

$$S_h \leq 0.1A_{an}mR_y(\cos\alpha + 0.8\sin\alpha),$$

где S_h – сдвигающее усилие, приходящееся на один анкер, кН;

A_{an} – площадь поперечного сечения стержня анкера или ветви анкера, см²;

α – угол наклона анкера к поверхности стальной конструкции;

R_y – расчетное сопротивление стали, МПа.

Для анкеров, разведенных в плане, в формулах выше вместо $\cos\alpha$ следует подставлять произведение $\cos\alpha \cdot \cos\beta$, где β – угол между горизонтальной проекцией анкера и направлением действия сдвигающей силы.

Сдвигающее усилие, воспринимаемое сжатыми наклонными анкерами, не должно превышать 25% полного сдвигающего усилия, действующего на рассчитываемом участке.

При использовании наклонных анкеров из полосовой стали толщиной t_{an} от 8 до 20 мм и шириной от 20 до 80 мм сдвигающее усилие S_h , приходящееся на один анкер или одну ветвь петлевого анкера, проверяют по формуле

$$S_h \leq 0.1A_{an}mR_y\cos\alpha + t_{an}\sqrt{10R_b \cdot A_{an}}\sin\alpha,$$

где t_{an} , см; R_b , МПа; A_{an} , см².

4. Объединение жестких упоров и петлевых анкеров (рис. 7).



Рис. 7. Объединенный жесткий упор и петлевой анкер

При одновременном использовании в конструкции объединения жестких упоров и наклонных (петлевых) анкеров допускается учитывать их совместную работу, полагая полное сопротивление объединительного шва равным сумме сопротивлений упоров и анкеров.

Для автодорожных мостов

$$S_h \leq 1.6R_bA_{b,dr} + \text{Min}[0.1A_{an}mR_y\cos\alpha + d^2\sqrt{10R_b}\sin\alpha; 0.1A_{an}mR_y(\cos\alpha + 0.8\sin\alpha)];$$

для железнодорожных мостов

$$S_h \leq 2R_bA_{b,dr} + \text{Min}[0.1A_{an}mR_y\cos\alpha + d^2\sqrt{10R_b}\sin\alpha; 0.1A_{an}mR_y(\cos\alpha + 0.8\sin\alpha)].$$

5. Упоры PBL (Perfobond Leisten), они же perforated-plate dowels, перфорированные пластины со шпонками (рис. 8).

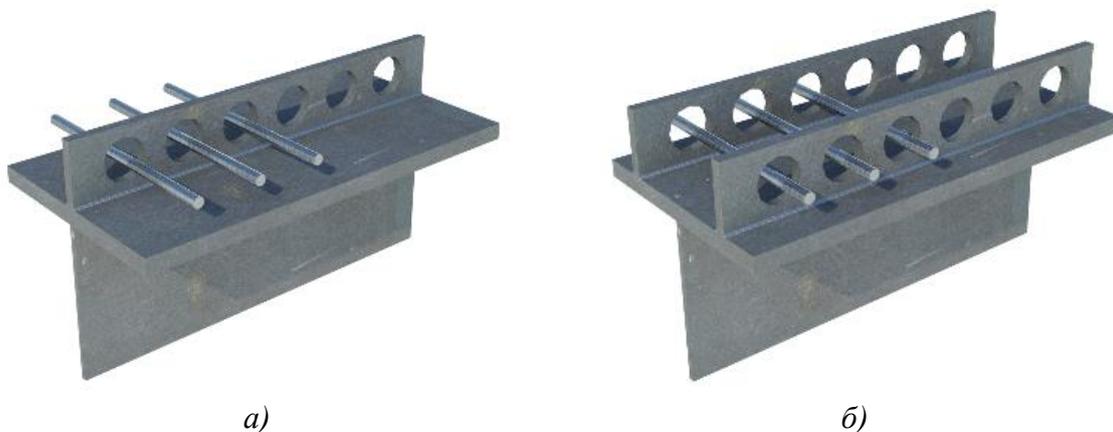


Рис. 8 (начало). Перфорированные пластины со шпонками



в)

Рис. 8 (окончание). Перфорированные пластины со шпонками:

- а) – одиночные перфорированные пластины; б) – парные перфорированные пластины;
в) - комбинация перфорированных пластин и гибких штыревых упоров

За рубежом широко применяют упоры в виде вертикальной перфорированной полосы, одиночные или парные, со стержнями в отверстиях или без них, кроме того, возможно комбинированное применение совместно с гибкими стержневыми упорами.

Методика расчета изложена в «Технических условиях для стальных и сталежелезобетонных конструкций» Японской ассоциации инженеров-строителей (Standard specifications for steel and composite structures, JSCE, 2009). В перфорированных пластинах со шпонками сдвигающее усилие воспринимается бетоном, заполняющим отверстия (шпонкой). Увеличение несущей способности достигается установкой в отверстия поперечных стержней. Расчетная несущая способность одного отверстия перфорированной полосы без поперечного стержня по бетону вычисляется по формуле

$$Q_b = \frac{3.38d^2 \sqrt{\frac{t}{d}} R_b - 121000}{\gamma_b},$$

при выполнении граничных условий:

$$35800 \text{ (Н)} < d^2 \sqrt{\frac{t}{d}} R_b < 194000 \text{ (Н)},$$

где d – диаметр отверстий перфорации, мм;

t – толщина перфорированной пластины, мм;

R_b – расчетное сопротивление бетона на сжатие, МПа;

γ_b – коэффициент условий работы, равный 1,3.

Расчетная несущая способность одного отверстия перфорированной полосы с поперечным стержнем по бетону вычисляется по формуле

$$Q_b = \frac{1.45[(d^2 - d_s^2)R_b + d_s^2 R_s] - 106100}{\gamma_b},$$

при выполнении граничных условий:

$$73200 \text{ (Н)} < [(d^2 - d_s^2)R_b + d_s^2 R_s] < 488000 \text{ (Н)},$$

где d_s – диаметр поперечного стержня в отверстии, мм;

R_s – расчетное сопротивление поперечного стержня растяжению, МПа;

γ_b – коэффициент условий работы, равный 1,3.

Расчетная несущая способность поперечного сечения перфорированной полосы по стали выражается формулой:

$$Q_s = 0.962R_y A_n,$$

где R_y – расчетное сопротивление стали перфорированной полосы, МПа;

A_n – площадь поперечного сечения перфорированной полосы нетто (по отверстию), мм².

Прочность на сдвиг по стали перфорированной полосы Q_s должна быть больше прочности всего упора на сдвиг по бетону Q_b .

6. Непрерывные гребенчатые упоры (рис. 9).

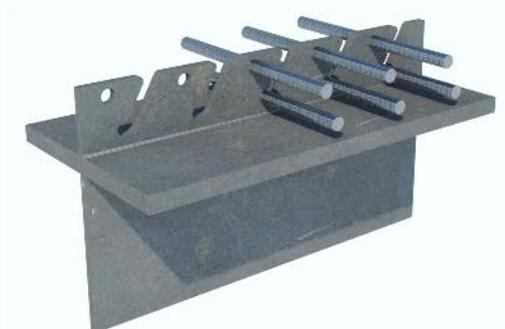


Рис. 9. Непрерывные гребенчатые упоры

Проектирование и расчет непрерывных гребенчатых упоров следует вести по ОДМ 218.4.003-2009. Объединение монолитной плиты проезжей части со стальной главной балкой осуществляется с помощью непрерывных гребенчатых упоров в виде стальной полосы, привариваемой к верхнему поясу в процессе заводского изготовления металлоконструкций. Упоры данного типа воспринимают усилия сдвига и отрыва.

Гребенчатые упоры имеют наклонные прорези под углом примерно 60°, расположенные с шагом 150-200 мм. При ширине верхнего пояса до 300 мм включают один гребень, более 300 мм – двойной. Толщину гребня принимают равной 16-20 мм.

Поперечные стержни, проходящие через пазы и отверстия гребня, рассчитывают как гибкие стержневые упоры в соответствии с [5] при $l/d > 4.2$

$$S_h \leq d^2 \sqrt{10R_b},$$

где d – диаметр поперечного стержня, см;

l – длина поперечного стержня, см;

R_b – расчетное сопротивление бетона на сжатие, Мпа.

Кроме того, должно выполняться условие прочности стали поперечного стержня на срез

$$S_l \leq 0.063d^2 m R_y,$$

где R_y – расчетное сопротивление поперечного стержня на растяжение, МПа;

m – коэффициент условий работы, принимаемый равным 1,0.

Расчетное усилие среза, воспринимаемое бетонными шпонками в пазах гребня, вычисляется по формуле

$$S_b = 0,1R_{b,cut}A_{cut}n_s,$$

где $R_{b,cut}$ – расчетное сопротивление бетона на сдвиг, МПа;

A_{cut} – площадь поперечного сечения шпонки, см²;

n_s – число шпонок на расчетном участке.

При расчете прочности гребенчатого упора на сдвиг допускается предположение, что всё сдвигающее усилие воспринимают поперечные стержни, проходящие сквозь пазы и отверстия гребня (влияние работы бетонных шпонок S_b составляет 3-5%, и им можно пренебречь).

7. Гибкие штыревые упоры с головками (рис. 10)



Рис. 10. Гибкие штыревые упоры с головками

Гибкие штыревые упоры с головками (анкера Нельсона) в настоящее время являются самым распространенным в мире способом объединения. Правила расстановки и расчета приведены в нормативах практически всех стран. Однако в нормах РФ присутствуют лишь правила расчета, а правила расстановки ограничены минимальным расстоянием в свету между анкерами – не менее 3-х диаметров стержня анкера, п.9.40 [5].

Наиболее полные требования к расстановке и конструкции штыревых упоров указаны в разделе 6.6.5 [6]:

- расстояние в свету между нижней частью головки упора и нижней арматурой плиты должно быть не менее 30 мм;

- в случае, если над стальной балкой железобетонная плита имеет утолщение, наружные границы этого утолщения должны находиться за пределами прямой, проведенной под 45° от наружного края стержня анкера;

- минимальный защитный слой бетона от боковой поверхности вута до стержня анкера должен быть не менее 50 мм;

- в нижней части утолщения плиты должны быть предусмотрены поперечные стержни, располагаемые на расстоянии не менее 40 мм ниже головки анкера, для противодействия отрыву;

- расстояние e_D между краем соединительного элемента и краем полки балки, к которой он приваривается, должно быть не менее 25 мм (для сжатой полки ограничивается также максимальное расстояние $e_D \leq 9t_f\sqrt{235/R_y}$, где t_f – толщина полки, R_{yn} – номинальный предел текучести, МПа);

- высота стержня анкера должна быть не менее $3d$, где d – диаметр стержня;

- диаметр головки должен составлять не менее $1,5d$, а её высота – не менее $0,4d$;

- шаг упоров в направлении сдвигающего усилия должен быть не менее $5d$, а в поперечном направлении – не менее $2,5d$ в сплошных монолитных плитах и $4d$ в иных случаях;

- максимальный шаг упоров в направлении сдвигающего усилия не должен превышать толщину плиты более чем в 4 раза, или 800 мм.

- отношение диаметра стержня упора d к толщине полки, к которой он приваривается, t_f , не должно превышать:

- $d \leq 1,5 \cdot t_f$ – для растянутых элементов, рассчитываемых на выносливость, в том числе и для упоров, находящихся непосредственно над стенкой;

- $d \leq 2,5 \cdot t_f$ – для прочих элементов, за исключением расположения стержня непосредственно над стенкой.

Сдвигающее усилие S_h , приходящееся на один гибкий штыревой упор при отношении длины стержня к его диаметру $l/d \leq 4,2$

$$S_h \leq 0.24ld\sqrt{10R_b},$$

а при $l/d > 4,2$

$$S_h \leq d^2 \sqrt{10R_b},$$

где d – диаметр поперечного стержня, см;

l – длина поперечного стержня, см;

R_b – расчетное сопротивление бетона на сжатие, МПа.

Кроме того, должно выполняться условие прочности стали поперечного стержня на срез

$$S_l \leq 0.063d^2 m R_y,$$

где R_y – расчетное сопротивление поперечного стержня на растяжение, МПа;

m – коэффициент условий работы, принимаемый равным 1,0 для автодорожных и 0,9 для железнодорожных мостов.

Параметры сдвиговых жесткостей для различных конструкций объединения.

Согласно данным натурных и численных экспериментов, для наиболее распространенного в настоящее время типа соединения – гибких стержневых упоров, при нагрузке $V=0,5V_u$ на один упор, среднее значение сдвига составляет 0,18 мм. Коэффициент жесткости стыка определяется соотношением

$$C = \frac{0.5V_u}{0.18 \cdot 10^{-3}} = 2780V_u,$$

где C – линейная сдвиговая жесткость одного упора, кН/м.

Таблица 1

Несущая способность упоров разного диаметра
в зависимости от класса бетона плиты (кН)

Диаметр упора d , см	Класс бетона плиты			
	B25	B30	B35	B40
	$R_b = 13$ МПа	$R_b = 15,5$ МПа	$R_b = 17,5$ МПа	$R_b = 20$ МПа
1	11,402	12,450	13,229	14,142
1,4	22,347	24,402	25,928	27,718
1,6	29,188	31,872	33,866	36,204
1,9	41,160	44,944	47,756	51,053
2,2	55,184	60,257	64,027	68,448
2,5	71,261	77,812	82,680	88,388

Таблица 2

Коэффициенты жесткости на единицу площади стыка (кН/м³)

Диаметр упора d , см	Класс бетона					
	B25			B30		
	Ячейка установки упоров, мм			Ячейка установки упоров, мм		
	200x200	300x300	400x400	200x200	300x300	400x400
1,4	1553147	994014.1	559132.9	1695925	1085392	610533.1
1,6	2028600	1298304	730296	2215086	1417655	797431
1,9	2860643	1830812	1029832	3123618	1999115	1124502
2,2	3835322	2454606	1380716	4187897	2680254	1507643
2,5	4952637	3169688	1782949	5407925	3461072	1946853

Диаметр упора d , см	Класс бетона					
	В35			В40		
	Ячейка установки упоров, мм			Ячейка установки упоров, мм		
	200x200	300x300	400x400	200x200	300x300	400x400
1,4	1802021	1153294	648727.6	1926442	1232923	693519
1,6	2353660	1506343	847317.7	2516169	1610348	905820.8
1,9	3319029	2124178	1194850	3548191	2270842	1277349
2,2	4449889	2847929	1601960	4757132	3044564	1712567
2,5	5746241	3677594	2068647	6142990	3931514	2211476

Выразив C через максимальный сдвиг при достижении несущей способности, получаем

$$C = \frac{V_u}{\delta_{x,max}}$$

Несущая способность одного упора при $l/d > 4,2$

$$V_u = d^2 \sqrt{10R_b}$$

Таким образом, линейная сдвиговая жесткость одного упора, выраженная через его несущую способность и усредненные данные испытаний, равна:

$$C = 2780V_u = 8791.13d^2 \sqrt{R_b} \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}} \right), \text{ или } 896,14d^2 \sqrt{R_b}, \left(\frac{\text{Т}}{\text{м}} \right),$$

где независимо от результирующих единиц измерения, в вычисления диаметр стержня d следует подставлять в см, а прочность бетона R_b – в МПа.

Для наиболее часто применяемых диаметров стержней, классов бетона от В25 до В40 и ячеек установки упоров от 200x200 мм до 400x400 мм, определим интервал коэффициентов жесткости на единицу площади стыка. Физический смысл – это усилие в кН, которое следует приложить к единице площади стыка (1 м^2), чтобы сдвиг составил 1 м. Таким образом, единица измерения – $\text{кН}/\text{м}^3$. Для ячейки 200x200 мм принято 25 упоров на 1 м^2 , для 300x300 мм – 16 упоров на 1 м^2 , для 400x400 мм – 9 упоров на 1 м^2 .

Коэффициент жесткости стыка на единицу его площади для упоров диаметром от 14 мм до 25 мм находится в интервале от $560 \text{ МН}/\text{м}^3$ до $6150 \text{ МН}/\text{м}^3$.

Преобразуем табл. 2 с учетом того, что наиболее часто, независимо от диаметра упора и ширины пояса, на балке в направлении, перпендикулярном сдвигу, устанавливается 3 упора в ряду (табл. 3).

Таблица 3

Погонная сдвиговая жесткость стыка при 3-х упорах в поперечном ряду ($\text{кН}/\text{м}^2$)

Диаметр упора d , см	Класс бетона					
	В25			В30		
	Шаг установки упоров вдоль направления сдвига, мм			Шаг установки упоров вдоль направления сдвига, мм		
	200	300	400	200	300	400
1,4	931888,2	745510,5	559132,9	1017555	814044,2	610533,1
1,6	1217160	973728,1	730296	1329052	1063241	797431
1,9	1716386	1373109	1029832	1874171	1499336	1124502
2,2	2301193	1840955	1380716	2512738	2010191	1507643
2,5	2971582	2377266	1782949	3244755	2595804	1946853

Диаметр упора d , см	Класс бетона					
	В35			В40		
	Шаг установки упоров вдоль направления сдвига, мм			Шаг установки упоров вдоль направления сдвига, мм		
	200	300	400	200	300	400
1,4	1081213	864970,2	648727,6	1155865	924692	693519
1,6	1412196	1129757	847317,7	1509701	1207761	905820,8
1,9	1991417	1593134	1194850	2128915	1703132	1277349
2,2	2669933	2135947	1601960	2854279	2283423	1712567
2,5	3447745	2758196	2068647	3685794	2948635	2211476

Выводы

Таким образом, для наиболее распространенных конструкций объединения интервал линейных сдвиговых жесткостей ζ можно определить между 560 и 3700 $МН/м^2$. Коэффициент жесткости стыка с жестким упором согласно экспериментальным данным [1] имеет значение порядка 1300 $МН/м$, и при среднем шаге упоров 1 м линейная сдвиговая жесткость стыка равна 1300 $МН/м^2$, что примерно соответствует стыкам с гибкими стержневыми упорами:

$$\zeta_{\text{жесткий упор}} = \frac{65 \text{ (т/упор)} \cdot 1 \text{ (упор/метр)}}{0,5 \text{ (мм)}} \approx 1300 \left(\frac{МН}{м^2} \right).$$

Погонная сдвиговая жесткость непрерывных гребенчатых упоров согласно данным натуральных экспериментов, проведенных разработчиками конструкции [7], имеет значение около 19000 $МН/м^2$, что на порядок превышает значения для гибких стержневых и обычных жестких упоров:

$$\zeta_{\text{гребенчатый упор}} = \frac{400 \text{ (кН/метр)}}{0,021 \text{ (мм)}} \approx 19000 \left(\frac{МН}{м^2} \right).$$

Вследствие этого, сталежелезобетонные конструкции с непрерывными гребенчатыми упорами, выполненными по [7], следует рассчитывать по гипотезе плоских сечений, а данный тип соединения считать неподатливым.

Библиографический список

1. Стрелецкий, Н. Н. Сталежелезобетонные пролетные строения мостов/ Н. Н. Стрелецкий. – М.: Транспорт, 1981. – 360 с.
2. Fatigue of Stud Shear Connectors in the Negative Moment Region of Steel Girder Bridges: a Synopsis of Experimental Results and Design Recommendations. – CTS 00-03, University of Minnesota, 2000.
3. Ростовых, Г. Н. Совершенствование методики расчетов гибких упоров в конструкциях сталежелезобетонных мостов/ Г. Н. Ростовых// Известия Петербургского Университета Путей Сообщения. - 2007/3. - С. 81-88.
4. Решетников, В. Г. Новые эффективные конструкции сталежелезобетонных пролетных строений мостов: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.11 / В. Г. Решетников. - М., 2002.
5. СП 35.13330.2011 Мосты и трубы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.03.84.
6. ТКП EN 1994-2-2009 Технический кодекс установившейся практики. Еврокод 4. Проектирование сталежелезобетонных конструкций. Часть 2. Основные принципы и правила для мостов.

7. ОДМ 218.4.003-2009 Рекомендации по объединению металлических балок с монолитной железобетонной плитой посредством непрерывных гребенчатых упоров в сталежелезобетонных пролетных строениях мостов.
8. Корнеев, М. М. Сталежелезобетонные мосты: теоретическое и практическое пособие по проектированию / М. М. Корнеев. – СПб.: ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2015 – 400 с.
9. Хенди Крис Р., Джонсон Роджер П. Руководство для проектировщиков к EN 1994-2. Еврокод 4: проектирование сталежелезобетонных конструкций. Часть 2: общие правила и правила для мостов. – М.: Изд-во МИСИ-МГСУ, 2014 – 351 с.

References

1. Streletskaya, N.N. Steel-reinforced concrete span structures of bridges. M.: Transport, 1981. 360 p.
2. Fatigue of Stud Shear Connectors in the Negative Moment Region of Steel Girder Bridges: a Synopsis of Experimental Results and Design Recommendations. CTS 00-03, University of Minnesota, 2000.
3. Rostov G.N. Improvement of methods of calculation of flexible stops in the structures of steel-concrete bridges. News of St. Petersburg University of Railway Engineering, 2007/3, Pp. 81-88.
4. Reshetnikov V.G. New effective constructions of steel-reinforced concrete span structures of bridges. Thesis of candidate of technical Sciences. M., 2002.
5. SP 35.13330.2011 Bridges and pipes. The updated edition of SNiP 2.05.03.84.
6. ТКР EN 1994-2-2009 Technical code of practice. Eurocode 4. Design of steel-concrete structures. Part 2. Basic principles and rules for bridges.
7. ODM 218.4.003-2009 Recommendations for the integration of metal beams with monolithic reinforced concrete slab by means of continuous comb stops in steel-reinforced concrete bridge span structures.
8. Korneev, M. M. steel Concrete bridges: theoretical and practical guide to design / M. Korneev. SPb.: VPO RGUPS, 2015. 400 p.
9. Hendy Chris R., Johnson Roger P. Guidelines for designers to EN 1994-2. Eurocode 4: design of steel-concrete structures. Part 2: General rules and regulations for bridges. M.: Publishing MISI-MGSU, 2014. 351 p.

CLASSIFICATION OF STRUCTURES COMBINING REINFORCED CONCRETE SLAB WITH STEEL BEAMS

A. V. Kozlov

Voronezh State Technical University
Russia, Voronezh

Sc. associate professor of the Department of Roads and Bridges Designing
Tel.: +7(473)271-52-02 e-mail: kozlov.a.v@inbox.ru

One of the important issues on the work of steel-reinforced concrete bridges – taking into account the impact of the shift between concrete and steel structural elements. The reliability and durability of the structure depend on improving the accuracy of the calculation by modeling the actual operation of the structure of any complexity. However, it is necessary to develop a science-based methodology for the calculation of models of steel-concrete superstructures and structures combining concrete and steel.

In the analysis of experimental and theoretical studies of the calculation of steel-reinforced concrete bridges, there are significant differences in the stiffness values obtained by different authors for the binding elements of steel and reinforced concrete parts of the cross section of the structure. The requirements for the technology of calculation of steel-concrete span structures of bridges, including taking into account the ultimate shear stiffness of the joints of the steel beam with reinforced concrete slab, are not regulated in the developed interstate standards, and their early development as part of national standards is certainly one of the most important tasks in the implementation of TR CU 014/2011.

The proposed algorithm of calculation with the ability to take into account the flexibility of the shear connection allows you to Refine the calculation of steel-concrete span structures of bridges in accordance with modern computing power, allows you to increase the level of reliability of bridge structures, laid at the design stage.

Keywords: connecting elements of reinforced concrete and steel part of the superstructure; rigid, flexible, continuous support; anchor

УДК 624.014

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХГРАННОГО БЛОКА ПОКРЫТИЯ ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С. Ю. Беляева¹, В. М. Флавианов², Р. К. Шрамов³

Воронежский государственный технический университет^{1,2,3}
Россия, г. Воронеж

¹ Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических и деревянных конструкций

Тел.: +7(909)217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

² Ст. преподаватель кафедры строительной механики

Тел.: +7(910)341-40-14, e-mail: flav@inbox.ru

³ Студент

Тел.: +7(920)441-20-76, e-mail: shramovr@yandex.ru

Рассмотрено конструктивное решение покрытия в виде трехгранных пространственных блоков. Предложено уменьшение металлоемкости покрытия за счет использования предварительного напряжения опорных стоек блока и применения гибких преднапряженных связей. Описаны основные этапы реализации расчета. Выполнен сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния элементов покрытия до и после предварительного напряжения его элементов. Показана эффективность предложенного решения.

Ключевые слова: конструкция покрытия, пространственный блок, арка, опорные стойки, несущие балки, связи, оптимальное проектирование, предварительное напряжение, напряженно-деформированное состояние.

Введение

Быстрое развитие авиационного сообщения стимулирует периодическую модернизацию застройки и изменение архитектурных обликов аэропортов. Современная архитектура требует от конструкторов поиска концептуально новых конструктивных схем, расчет которых, базируясь на основных принципах строительной механики, невозможен без применения современных вычислительных комплексов. Немаловажную роль при этом играет применение рациональных конструктивных решений со сниженной металлоемкостью.

Предлагаемое здание аэровокзала имеет переменную ширину 80-91,8 м, длину 285 м, и разделено деформационными швами на три части (рис. 1).

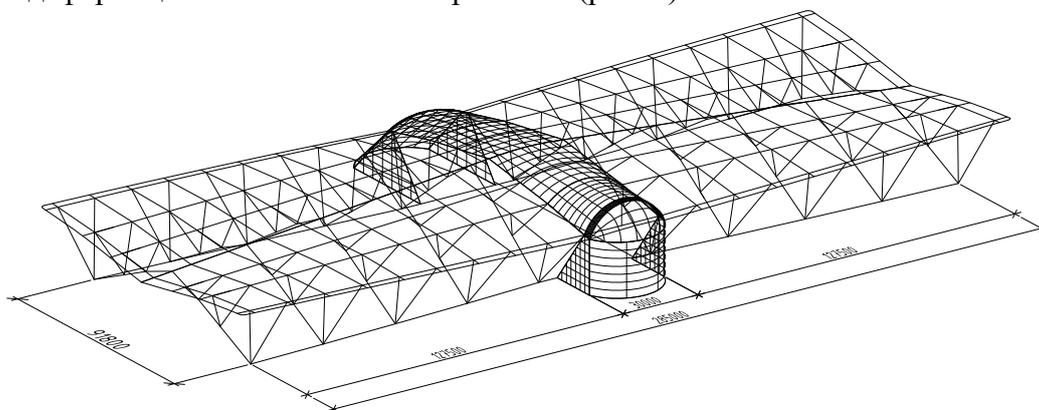


Рис. 1. Общий вид конструкций покрытия аэровокзала

Несущие элементы покрытия левого и правого крыла здания приняты в виде трехгранных пространственных блоков пролетами 80 - 91,8 м с высотными отметками в коньке 24-29 м (рис. 2).

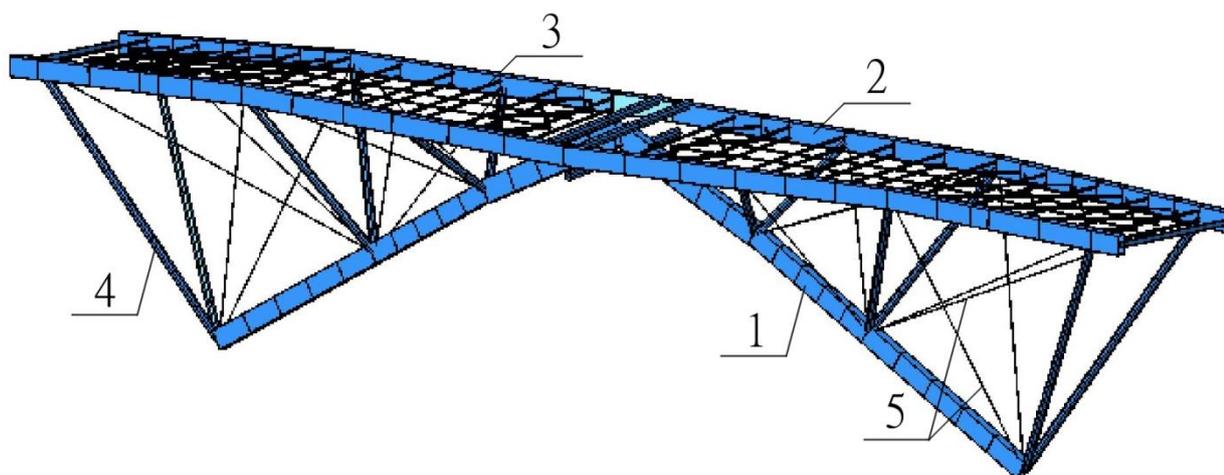


Рис. 2. Пространственный блок покрытия:
1) V-образная арка; 2) балка переменной жесткости; 3) вертикальные связевые фермы;
4) опорные стойки; 5) диагональные связи

Шаг блоков составил 30м. Каждый блок покрытия состоит из плоской двухшарнирной V-образной арки и двух криволинейных балок переменной жесткости, между которыми размещены вертикальные связевые фермы. Балки соединены с аркой шестью рядами шарнирно закрепленных раздваивающихся стоек и диагональными связями, раскрепляющими арки в боковом направлении и обеспечивающими геометрическую неизменяемость блока. Максимальная ширина блока, т.е. расстояние между несущими балками, - 15м. Для повышения пространственной жесткости блоки объединены в единый геометрически неизменяемый комплекс коньковой неразрезной балкой и системой горизонтальных связей (рис. 3).

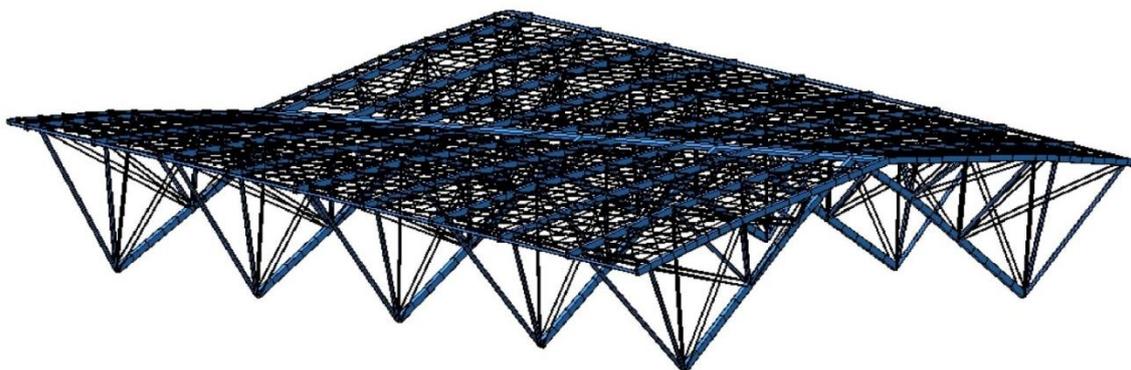


Рис. 3. Модель деформационного блока

1. Предварительный расчет конструктивного комплекса

Покрытие рассчитывалось на действие постоянной нагрузки от веса кровли и несущих конструкций, ветровой и снеговой нагрузок по СП 20.13330.2016. Необходимо отметить, что для принятой конфигурации покрытия отсутствуют нормативные методики определения коэффициента перехода от веса снегового покрова на земле к снеговой нагрузке на покрытие μ и аэродинамического коэффициента c_e . Поэтому на разных участках покрытия данные коэф-

фициенты вычислялись по наиболее близким схемам СП 20.13330.2016. С целью отыскания наиболее невыгодного напряженно-деформированного состояния элементов конструктивной системы было рассмотрено несколько схем загрузки снеговой нагрузкой в шахматном порядке и на половине пролета, ветровой нагрузкой в разных направлениях.

Статический расчет покрытия выполнялся в программном комплексе Лира САПР. В исходной расчетной схеме (рис. 4) использовались универсальные стержневые конечные элементы типа КЭ10 с присвоением элементам несущего блока следующих типов жесткостных характеристик: арки и балки – коробчатого сечения, коньковая балка – трехгранного сечения из труб, связи и стойки – из электросварных прямошовных труб. При назначении типов сечений помимо соответствия напряженно-деформированному состоянию элемента учитывались требования более простой реализации узловых сопряжений.

После расчета отдельных элементов блока по требованиям СП 16.13330.2016 на наиболее неблагоприятные расчетные сочетания усилий были выявлены элементы с нерационально подобранными поперечными сечениями. Такими элементами пространственного блока, работающими на сжатие и имеющими при этом значительную свободную длину, являются диагональные связи (рис.2, поз.5) и стойки (рис. 2, поз. 4), поддерживающие балки покрытия. Так, для элементов связей при продольной сжимающей силе $N=-1500$ кН и расчетной длине 34 м было подобрано трубчатое сечение $\varnothing 820 \times 12$ мм, для стоек с расчетной длиной 28 м при усилии $N=-1600$ кН принимался профиль $\varnothing 720 \times 12$ мм. Помимо значительного расхода стали необходимость реализации шарнирного сопряжения таких массивных профилей усложняет узлы и, как следствие, может привести к появлению дополнительных усилий в примыкающих к узлу элементах, что в свою очередь должно быть учтено в расчете.

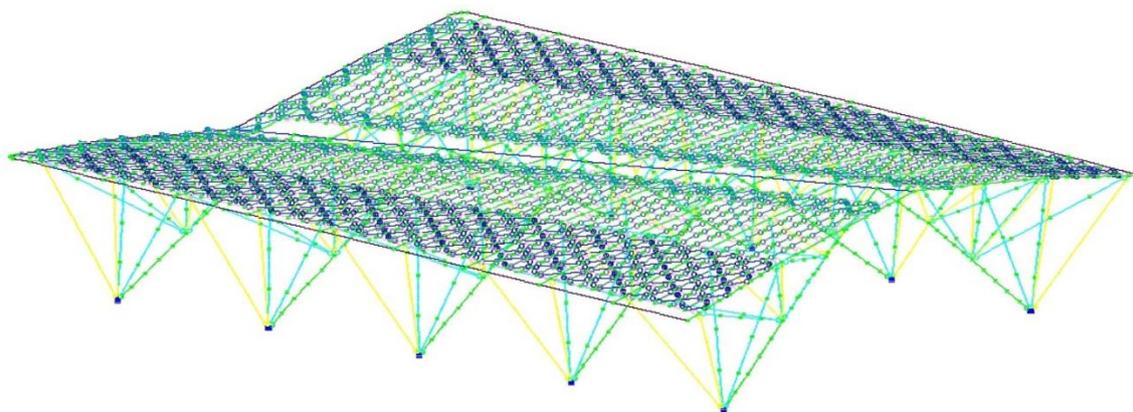


Рис. 4. Расчетная схема деформационного блока

2. Оптимизация конструктивного решения

Под оптимальным проектированием в первую очередь понимают снижение металлоемкости стальных конструкций при сохранении достаточной простоты конструктивных решений. В этой связи наиболее распространенными способами [1-6] являются: изменение поперечного сечения элемента по длине, регулирование напряженно-деформированного состояния, в том числе за счет применения предварительного напряжения, применение облегченных конструкций и др. Для повышения эффективности рассматриваемого покрытия используется предварительное напряжение гибкими элементами из высокопрочных металлов, работающих только на растяжение. Критериями эффективности применения преднапряжения являются не только экономические требования по снижению массы и стоимости объекта, но и технологические, связанные с повышением жесткости и сохранением устойчивости формы элементов несущих конструкций [5, 6].

Уменьшение металлоемкости несущего пространственного блока покрытия может быть достигнуто предварительным напряжением опорных стоек и заменой диагональных связей из труб гибкими элементами из преднапряженных канатов.

Для создания более легкой и ажурной трубчатой стойки была применена система из трех предварительно напряженных нитей и дополнительных элементов их крепления – «звезд» (рис. 5).

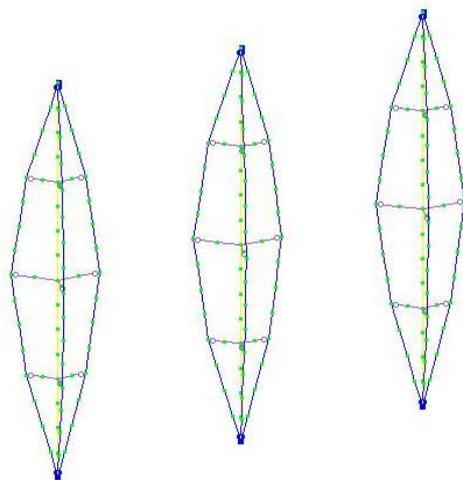


Рис. 5. Схема предварительно напряженной стойки-мачты

Принцип работы такой стойки аналогичен работе мачты на оттяжках. Являясь упругоподатливыми опорами ствола стойки, тросы обеспечивают ее устойчивое равновесие, сокращая расчетную длину трубы. Чтобы проанализировать работу стоек-мачт и подобрать необходимое усилие преднапряжения, их моделирование было выполнено отдельно от конструкций пространственного блока с применением для канатов геометрически нелинейного специального двухузлового элемента КЭ308. Нагрузки на стойки принимались из наиболее неблагоприятного РСУ, полученного в них в первоначальной расчетной схеме: $N=1600\text{кН}$, $M_x=57,9\text{кН}\cdot\text{м}$, $M_y=102,4\text{кН}\cdot\text{м}$ (рис. 6).

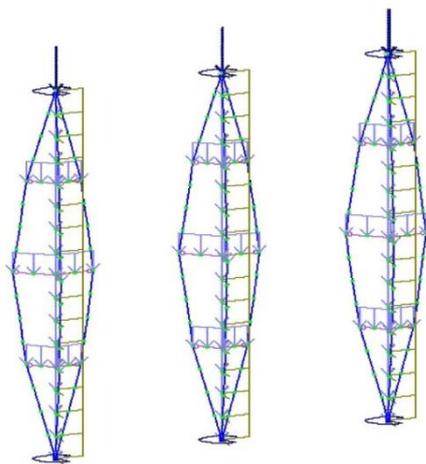


Рис. 6. Схема загрузки стоек-мачт

Величина предварительного напряжения вычислялась итерационным путем на основании анализа результатов, полученных в ходе последовательного увеличения натяжения тросов растягивающими усилиями от 90 до 180 кН (рис. 7). При этом в оттяжках стойки не допускалось возникновение сжимающих напряжений, что повлекло бы их выключение из работы, а также контролировалась деформативность системы.

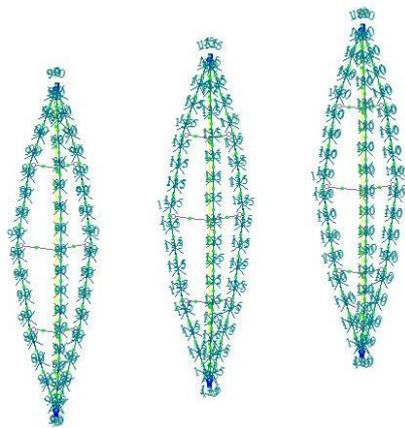


Рис. 7. Задание предварительного напряжения в оттяжках 90 кН, 135 кН, 180 кН соответственно.

Расчет тросов выполнялся согласно рекомендациям [7]. Для оттяжек был подобран канат – Teufelberger QS8168XK Ø14 , усилие его предварительного натяжения составило 192 кН, за счет введения преднапряженных элементов сечение трубы-стойки уменьшилось до 377х10. После получения положительных результатов расчета по требованиям СП 16.13330.2016 (рис. 8) предварительно напряженные стойки-мачты вводились в общую расчетную схему деформационного блока покрытия (рис. 9). Усилия в створе стойки-мачты после введения ее в общую схему практически не изменились, что говорит о правильности подбора величины натяжения оттяжек.

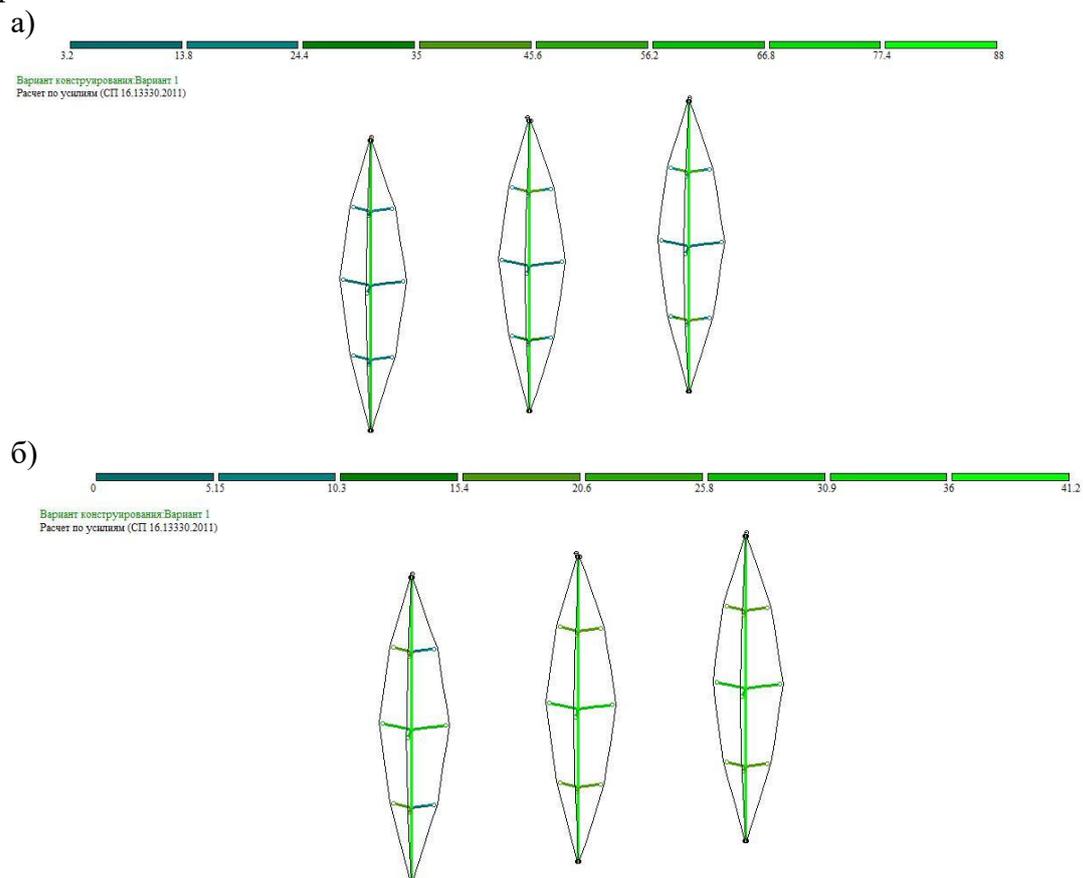


Рис. 8. Результаты расчета стоек-мачт:
а) по 1 ГПС; б) по 2 ГПС

Диагональные связи из труб, обеспечивающие пространственную жесткость трехгранных блоков, в новой расчетной схеме (рис. 9) заменялись гибкими элементами - канатами. Величина предварительного напряжения в связях назначалась таким образом, чтобы в них не возникало сжимающих усилий от внешних нагрузок, подобно тому, как это выполнялось для опорных стоек. При этом величина растягивающего усилия учитывалась с повышающим коэффициентом 1,2 к максимальному сжимающему. В результате связи назначены из Teufelberger QS8168XK Ø40 при усилении предварительного напряжения в них 1486 кН.

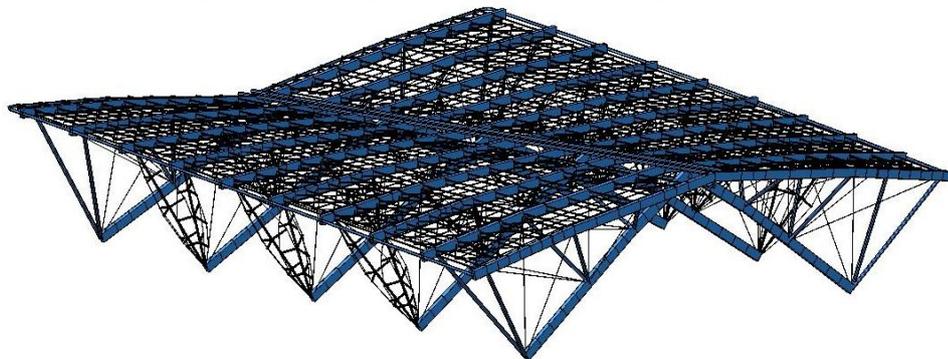
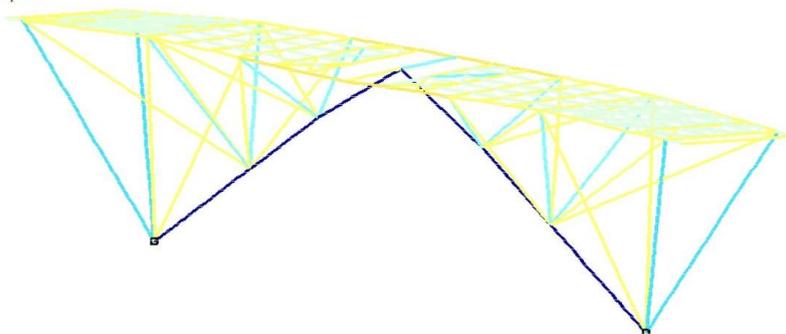
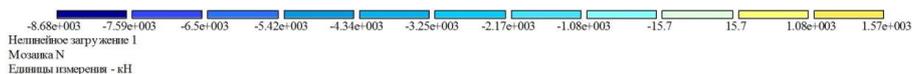


Рис. 9. Пространственная схема с введенными стойками-мачтами и гибкими связями

На рис. 10-11 показаны мозаики продольных сил и изгибающих моментов в элементах несущего блока покрытия до и после введения преднапряженных элементов.

а)



б)

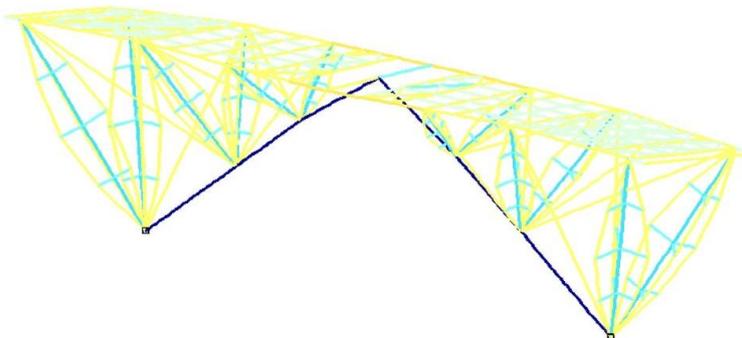
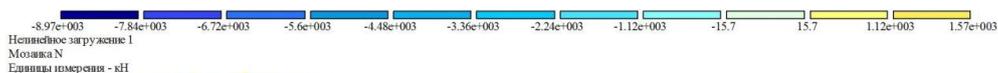


Рис. 10. Значения N (кН) в элементах несущего блока:
 а) до введения предварительно напряженных элементов;
 б) после введения предварительно напряженных элементов

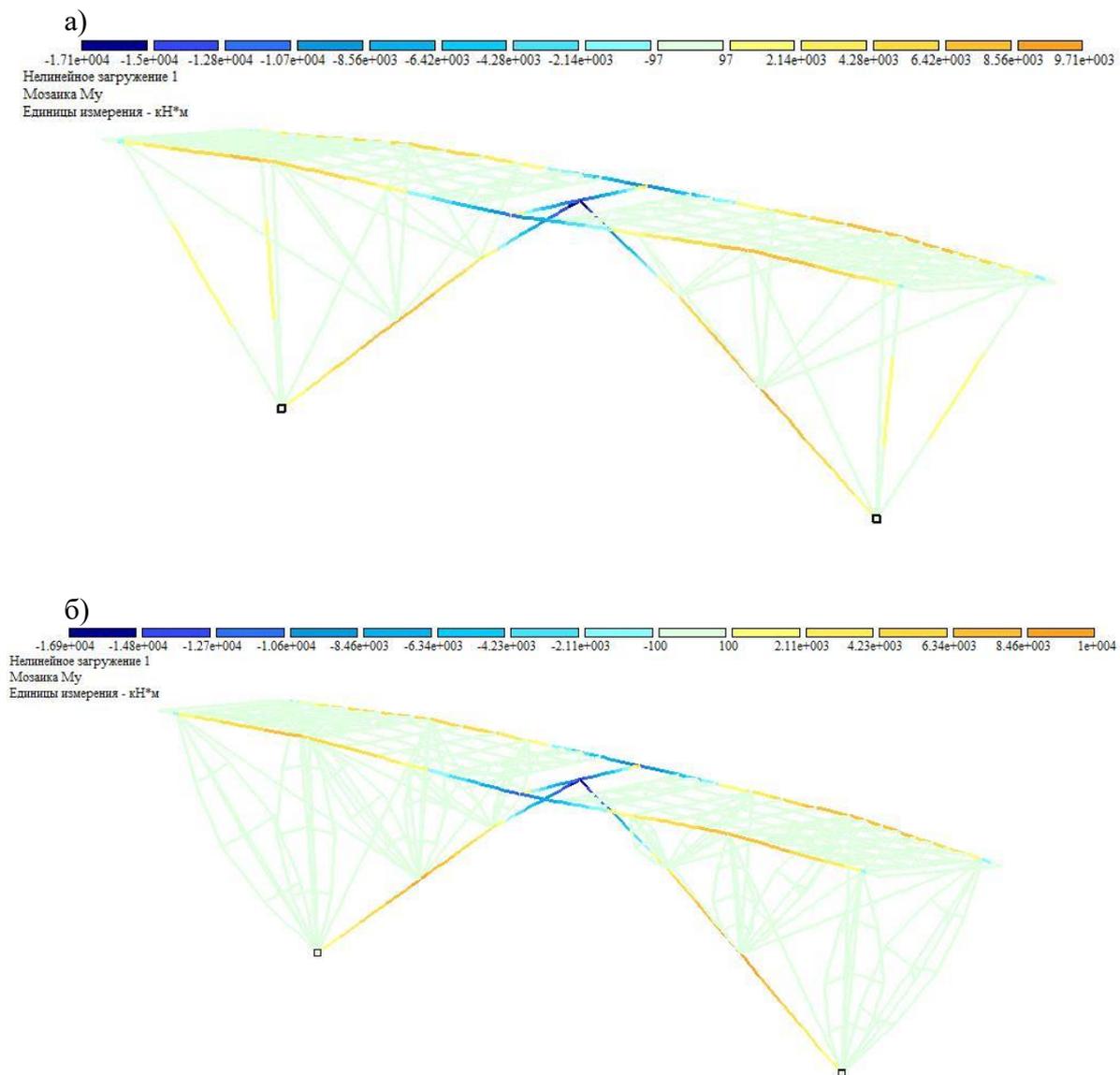


Рис. 11. Значения изгибающих моментов M_u (кН*м) в элементах несущего блока:
 а) до введения предварительно напряженных элементов;
 б) после введения предварительно напряженных элементов

На рис. 12-14 показаны мозаики линейных перемещений от расчетных нагрузок в деформационном блоке покрытия до и после введения преднапряженных элементов.

В целом, введение предварительно напряженных элементов положительно незначительно изменило напряженно-деформированное состояние элементов покрытия. Сравнительный анализ НДС исходной схемы с результатами расчета после ее оптимизации (рис.10-14) показал:

- 1) увеличение продольных сил в V – образной арке N_{max}^- на 0.5 %, N_{max}^+ на 4 % ;
- 2) уменьшение изгибающих моментов M_u в сечениях V – образной арки:
 M_{max}^- на 2 %, M_{max}^+ на -0.2 % ;
- 3) увеличение перемещений системы в направлении оси X на 1%, оси Y на 1 %, оси Z на 2 %.

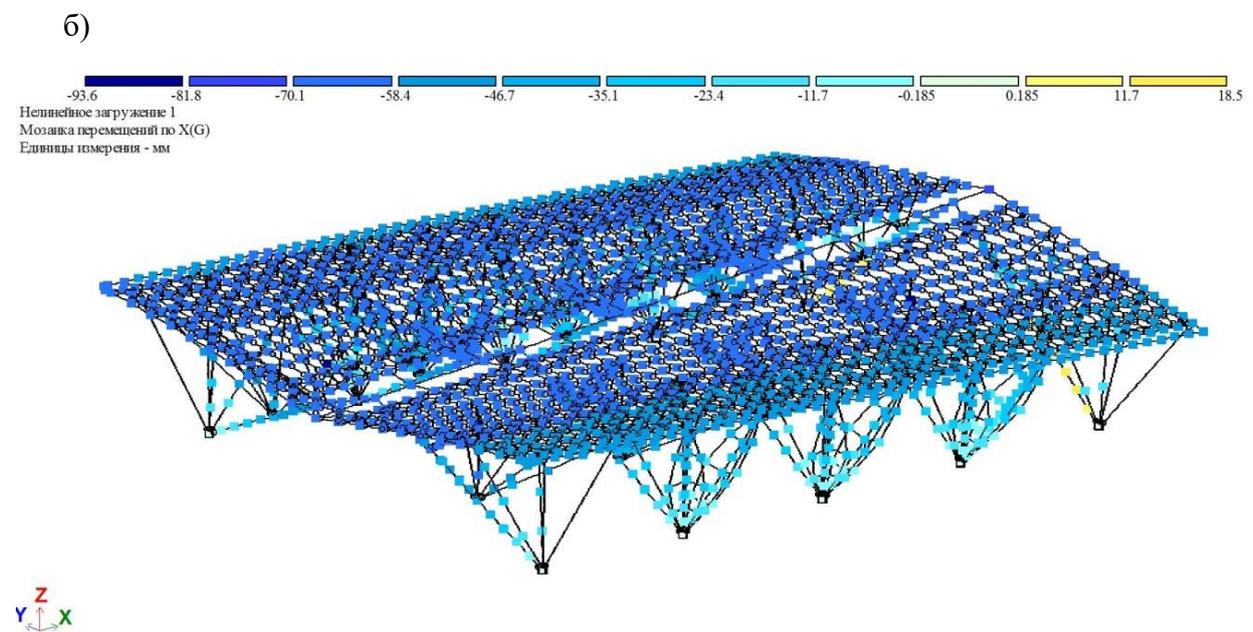
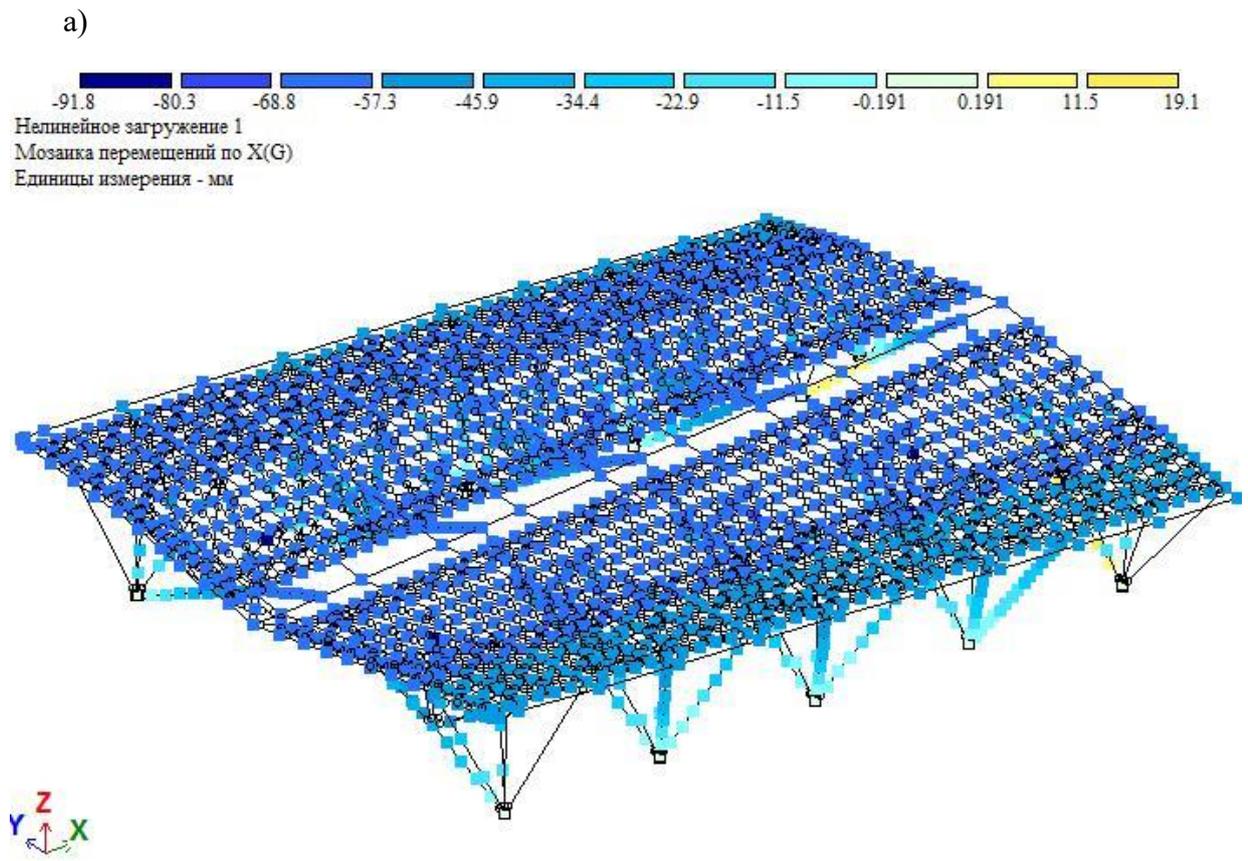
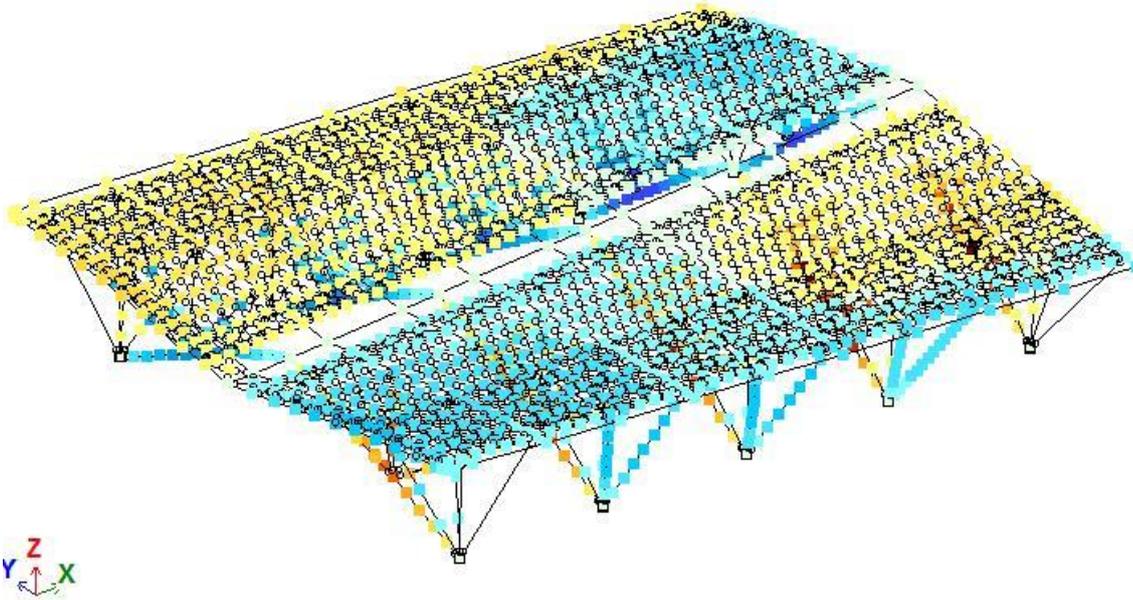
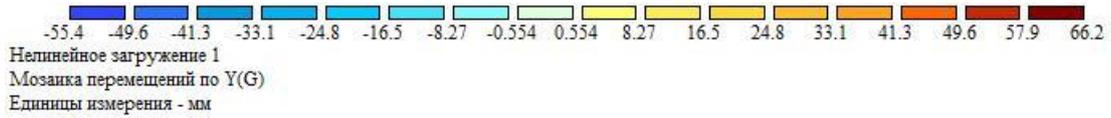


Рис. 12. Мозаика перемещений по оси X:
 а) до введения предварительно напряженных элементов;
 б) после введения предварительно напряженных элементов

a)



б)

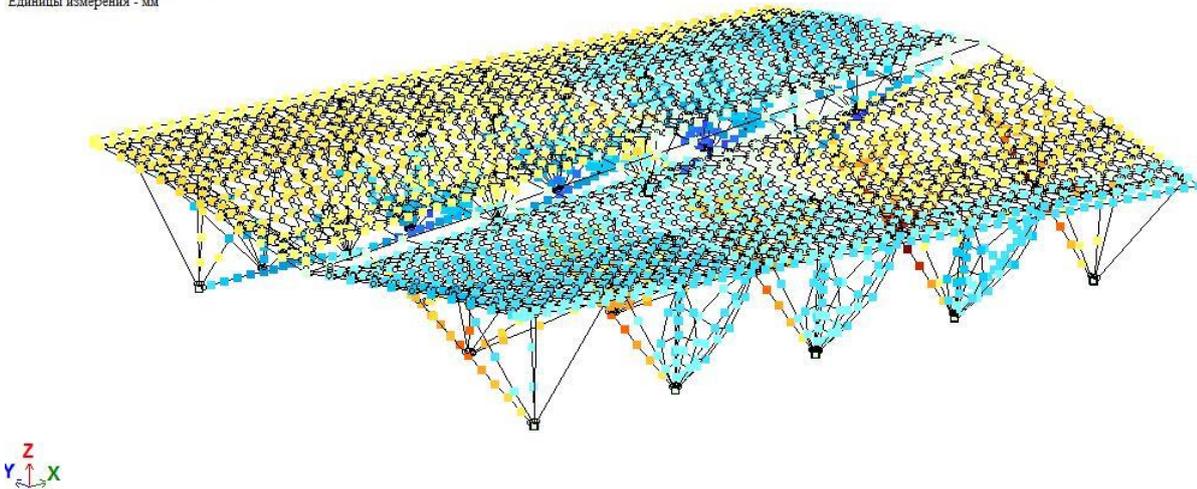
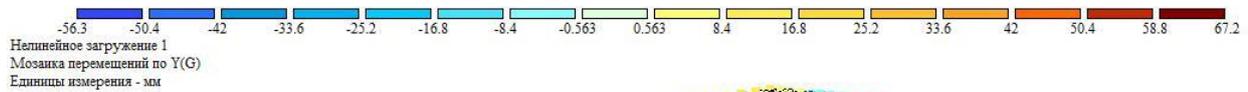
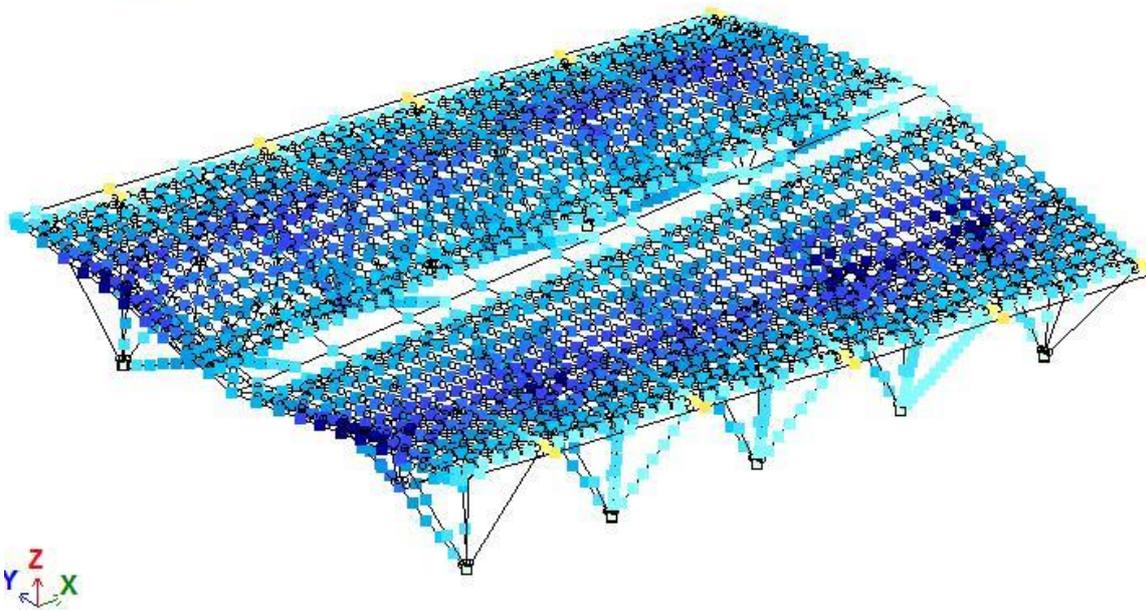
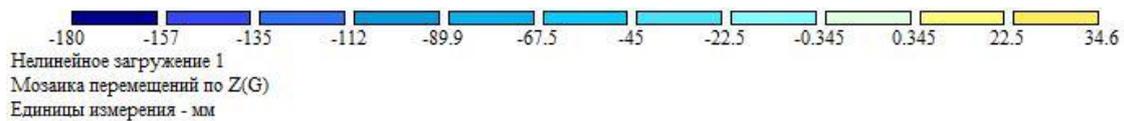


Рис. 13. Мозаика перемещений по оси Y:
а) до введения предварительно напряженных элементов;
б) после введения предварительно напряженных элементов

а)



б)

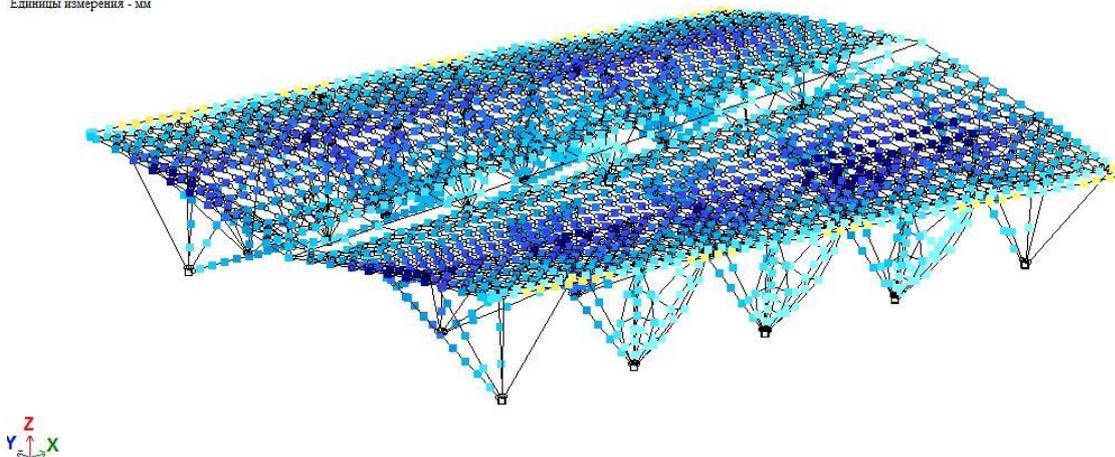
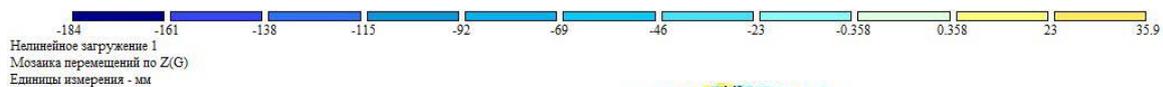


Рис. 14. Мозаика перемещений по оси Y:
а) до введения предварительно напряженных элементов;
б) после введения предварительно напряженных элементов

Выводы

1. Предложенный способ снижения металлоемкости рассматриваемой конструкции покрытия за счет введения преднапряженных стоек-мачт и гибких связей позволили снизить расход стали на опорные стойки в 1,8 раз, на диагональные связи в 25 раз, на трехгранный блок покрытия в целом в 3 раза.

2. Предложенная последовательность назначения предварительного напряжения элементов с целью получения более эффективных конструктивных решений может быть реализована для аналогичных расчетов.

3. Дальнейшие исследования связаны с созданием узловых сопряжений элементов, максимально отвечающих принятым в расчетной схеме.

Библиографический список

1. Металлические конструкции. В 3 томах. Т. 2. Конструкции зданий: учеб. для строит. ВУЗов / В.В. Горев, Б.Ю. Уваров, Б.И. Белый и др.; под ред. В.В. Горева. – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 2004. – 551 с.
2. Металлические конструкции: учебник / В.О. Пермяков, О.О. Нилов, О.В. Шимановский, И.Д. Белов [и др.]; под общ. ред. В.О. Пермякова и О.В. Шимановского. – К.: Изд-во «Сталь», 2008. – 812с.
3. Металлические конструкции: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю.И. Кудишин, Е.И. Беленя, В.С. Игнатьева [и др.]; под ред. Ю.И. Кудишина – Изд. 10-е, стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 687 с.
4. Муханов, К.К. Металлические конструкции: учебник для вузов. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М.: Стройиздат, 1978. – 572 с.
5. Проектирование металлических конструкций. Спец. курс: учеб. пособие для вузов/ В.В. Бирюлев, И.И. Кошин, И.И. Крылов, А.В. Сильвестров. – Л.: Стройиздат, 1990. – 432 с.
6. Металлические конструкции. Спец. курс: учеб. пособие для вузов / Е.И. Беленя, Н.Н. Стрелецкий, Г.С. Веденников [и др.]; под ред. Е.И. Беленя. – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: Стройиздат, 1991. – 687 с.
7. Рекомендации по выбору типов и расчету прочности стальных канатов, применяемых в строительных металлических конструкциях. – М.: ЦНИИПРОЕКТСТАЛЬКОНСТРУКЦИЯ им. Мельникова, 1991. – 31 с.

References

1. Gorev V.V., Uvarov B.Yu., Belyi V.I. Metal structures. In 3 volumes. Vol. 2. Constructions of buildings. Textbook. for builds. Moscow: Higher School, 2004. 551 p.
2. Permyakov V.O., Nilov O.O., Shimanovsky O.V., Belov I.D. Metal constructions: textbook. K.: Publishing house "Steel", 2008. 812 p.
3. Kudishin Yu.I., Belenya E.I., Ignatieff V.S. Metal constructions: a textbook for students M.: Publishing Center "Academy", 2007. 687 p.
4. Muhanov K.K. Metal constructions. Textbook for Universities. 3rd ed., Moscow: "Stroiizdat", 1978. 572 p.
5. Birulev V.V., Koshin I.I., Krylov I.I., Silvestrov A.V. Design of metal structures. Spec. course. Textbook for Universities. Leningrad-Stroiizdat, 1990. 432 p.
6. Belenya E.I., Streleckyi N.N., Vedennikov G.S. Metal constructions: Spec. course: Textbook for Universities. 3rd ed., Moscow: Stroiizdat, 1991. 687 p.

7. Recommendations on the choice of types and calculation of the strength of steel ropes used in building metal structures. M.: TSNIIPROEKTSTALKONSTRUKTSIYA named after Melnikov, 1991. 31p.

OPTIMIZATION OF A CONSTRUCTIVE THREE-GRIDED BLOCKS COVERING SOLUTION BY INTRODUCTION PRELIMI- NARY-STRESSED ELEMENTS

S. Yu. Belyaeva¹, V. M. Flavianov², R. K. Shramov³

Voronezh State Technical University^{1, 2, 3}
Russia, Voronezh

¹ PhD in Tech. Sc., Associate Professor of the Department of Metal and Wooden Structures
ph.: +7(909)217-31-10, e-mail: svetboy@yandex.ru

² Senior Lecturer of the Department of Structural Mechanics
ph.: +7(910)341-40-14, e-mail: flav@inbox.ru

³ Student
ph.: +7(920)441-20-76, e-mail: shramovr@yandex.ru

The constructive solution of the coating in the form of trihedral spatial blocks is considered. A reduction in the metal content of the coating due to the use of stress of the supporting columns of the blocks and the use of flexible stressed bonds is proposed. The main stages of the implementation of the calculation are described. A comparative analysis of the stress-strain state of the coating elements before and after the stress of its elements is performed. The effectiveness of the proposed solution is shown.

Keywords: coating design, spatial block, arch, support posts, bearing beams, connections, optimal design, stress, stress-strain state.

УДК 624.26

НАДЕЖНОСТЬ И ДОЛГОВЕЧНОСТЬ СБОРНО-МОНОЛИТНОГО ПЛИТНОГО ПРОЛЁТНОГО СТРОЕНИЯ АВТОДОРОЖНОГО МОСТА

В. С. Сафронов¹, А. В. Антипов², А. В. Черников³

Воронежский государственный технический университет^{1,3}
ООО «Дортранспроект»²
Россия, г. Воронеж

¹ Д-р техн. наук, проф., профессор кафедры строительной механики., тел.: +7 (473) 2715230
e-mail: vss22@mail.ru

² Ведущий инженер

³ Магистрант кафедры строительной механики

Описывается методика и результаты расчета надёжности и долговечности пролетного строения железобетонного плитного автомобильного моста с учётом влияния совместности сопротивления нагрузкам сборной и монолитной частей составного сечения, а также параметров разброса прочностных характеристик бетона и арматуры. Вероятностная методика базируется на представлениях нагружения временной нагрузкой в виде случайного эргодического процесса с заданными статистическими характеристиками: математическим ожиданием, дисперсией и корреляционной функцией. Вычислительные процедуры основаны на положениях теории выбросов стационарной нормальной случайной функции за постоянный нормальный случайный уровень с заданным средним и стандартом, отвечающей предельному состоянию несущей конструкции.

Приводятся результаты численных исследований надёжности и долговечности сборно-монолитной конструкции плитного пролетного строения, реконструированного под современные временные нагрузки автомобильного моста. Изучаются зависимости показателей надёжности и долговечности в зависимости от эффективного периода нагружения транспортного сооружения.

Ключевые слова: плитный железобетонный мост, сборно-монолитная конструкция, вероятностная оценка надёжности, теория выбросов нормальных стационарных процессов, эффективный период нагружения, логарифмический показатель надёжности, разброс прочности материалов и нагрузок ,

Введение

Сборно-монолитные железобетонные несущие строительные конструкции часто находят применение при осуществлении капитальных ремонтов или реконструкции изношенных при длительной эксплуатации зданий и сооружений, включая мосты [1]. При проектировании сборно-монолитных несущих элементов необходимо использовать такие проектные решения, для которых обеспечено совместное сопротивление новых и сохраняемых от старых эксплуатируемых длительное время элементов. Наиболее эффективно эта задача решается путем использования сборно-монолитных несущих конструкций, однако для таких составных конструкций в связи с необходимостью учета изменения расчетной схемы, этапности нагружения и возможной несовместности сопротивления нагрузкам требуется применение физически нелинейных расчетных схем [2].

Современные подходы для прочностных расчетов составных железобетонных конструкций основаны на применении конечно-элементных вычислительных комплексов и вероятностных методик, которые позволяют получать более обоснованные проектные решения, которые являются оптимальными,

Применяемые в настоящее время вычислительные алгоритмы вероятностных расчетов используют модели действующих нагрузок и применяемых материалов в виде случайных величин, однако такой подход является приближенным, так как не учитывает флуктуации учитываемых параметров во времени [2]. Более совершенным считается построение вычислительных алгоритмов расчета надежности на основе представления действующих на сооружения нагрузок в виде стационарных случайных функций [3-4]. При использовании описаний действующих нагрузок в виде случайных функций для расчетного анализа проектных решений при капитальном ремонте или реконструкции строительного объекта необходим учета изменения деформативности самих конструкций и связующих элементов. Это требует построения более совершенных вычислительных алгоритмов [9-13].

В настоящем исследовании на примере реконструируемого автодорожного железобетонного моста предлагается и апробируется методика расчета надежности и долговечности сборно-монолитного плитного пролетного строения на основе моделей в виде стационарных случайных функций для действующих нагрузок и случайных величин - для предельных усилий. Исследования надежности отдельных конструктивных элементов рассматриваемого с позиций теории надежности и приближенного описания нагрузок в виде случайных величин выполнены нами в работе [4].

1. Основные положения расчета надежности и долговечности составной сборно-монолитной железобетонной плиты пролетного строения транспортного сооружения

Вероятность отказа и продолжительность наработки на отказ сборно-монолитной железобетонной конструкции транспортного сооружения будем определять на основе методики, разработанной в соответствии с теорией выбросов случайных процессов [2-4]. Для её применения к подвергающимся совместному действию постоянных и временных подвижных нагрузок введем следующие упрощения:

- действующие в несущих элементах пролетного строения транспортного сооружения усилия от суммарного действия постоянных и временных нагрузок считаются нормальным стационарным эргодическим случайным процессом с заданным математическим ожиданием m_R , стандартом σ_F и корреляционной функцией $K_R(\tau)$;
- предельные усилия R в несущих элементах сооружения моделируются не зависящими от времени случайными величинами с заданными математическими ожиданиями m_R и стандартом σ_R , которые определяются в зависимости от степени совместного сопротивления действующим нагрузкам сборной и монолитной частей составной конструкции. Они определяются с учетом разброса прочностных характеристик материалов составляющих элементов и соединительных участков;
- степень совместности сопротивления действующим нагрузкам оценим коэффициентом K_c , равным отношению средних значений предельных усилий для составной конструкции к разности предельных усилий для полностью объединенной и сопротивляющейся раздельно элементов конструкции;
- динамический эффект воздействия подвижной нагрузки учитывается в расчетах с помощью рекомендуемых нормами или измеренных при натурных испытаниях составной конструкции мостового сооружения динамических коэффициентов $1+\mu$.

Графически рассматриваемая модель нагружения несущих элементов пролетного строения мостового сооружения по аналогии с используемой в работе [4] представлена на рис. 1, где наряду со случайной функцией нагрузки $F(t)$ показан случайный постоянный уровень предельного усилия R конструкции.

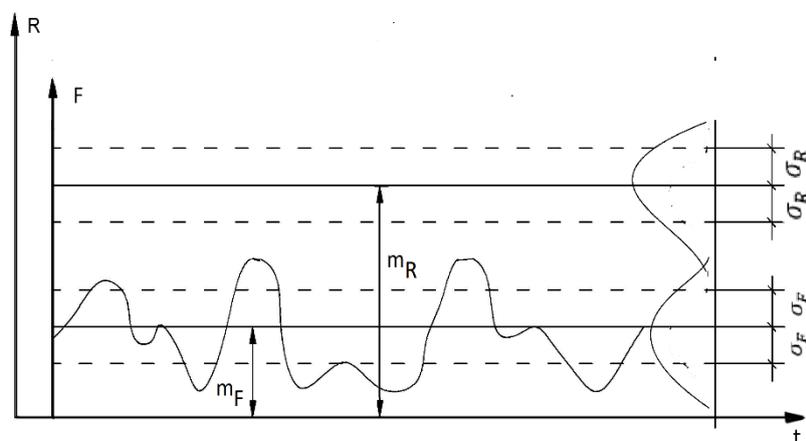


Рис. 1 Расчетные модели эксплуатационных усилий и их предельных значений

Интенсивность возникновения предельных состояний расположенной под полосой проезда автотранспортных средств наиболее нагруженной плиты пролетного строения в единицу времени на основе теории выбросов нормальной случайной функции за заданный уровень вычислим по формуле [3]

$$U = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{-(m_F - m_R)^2}{2(\sigma_F^2 + \sigma_R^2)}\right), \quad (1)$$

где $m_F, \sigma_F, m_R, \sigma_R$ – математические ожидания и стандарты нагрузок и предельных усилий;

T – эффективный период нагружения транспортного сооружения, при котором возникает не более одного превышения действующим в строительной конструкции усилием его предельного значения.

В связи с тем, что интенсивность U отказов мостовых сооружений является весьма малой, вероятность возникновения предельного состояния в рассматриваемом элементе моста за срок службы t определяется по схеме «редких событий» [3]:

$$Q(t) = 1 - \exp(-U \times t). \quad (2)$$

По найденным величинам вероятности отказов в сборно-монолитных несущих элементах пролетного строения автодорожного моста вычисляются надежности безотказного функционирования этих элементов для тех же моментов времени t из известного соотношения:

$$H(t) = 1 - Q(t). \quad (3)$$

Надежность пролетного строения транспортного сооружения в целом для произвольного момента времени $H_c(t)$ определим в соответствии с теоремой произведения двух независимых случайных событий [4] через надежности двух плитных элементов на полосах проезда H_{Π} прямого и H_0 и обратного направлений движений:

$$H_c(t) = H_{\Pi} \times H_0. \quad (4)$$

Далее по вычисленной надежности транспортного сооружения в целом можно определить логарифмический показатель надежности и коэффициент запаса прочности:

$$\rho_c = \log\left(\frac{1}{1 - H_c}\right); \quad k = \frac{m_R}{m_F}. \quad (5)$$

Технический ресурс сборно-монолитного железобетонного пролетного строения T_o или его отдельных несущих элементов определим из выражения (2), задаваясь минимальной величиной вероятности отказа Q_{min} при установившейся длительное время их интенсивности U :

$$T_o = \frac{-\ln(1 - Q_{min})}{U}. \quad (6)$$

Описанная выше методика легко реализуется в математических программных комплексах, имеющих набор стандартных статистических операторов. Ниже приводятся результаты ее применения в вычислительном комплексе Mathcad для реконструированного транспортного сооружения со сборно-монолитным пролетным строением.

2. Аprobация предлагаемой методики вероятностного расчета

2.1. Описание объекта и методики исследования

Для апробации описанной выше методики вероятностного расчета надежности и долговечности принят участок реконструируемого сборно-монолитного железобетонного плитного пролетного строения моста на монтажной площадке плотины Нижегородской ГЭС [5] под современные временные нагрузки А14 и Н14. Поперечное сечение одного из одинаковых плитных пролетов моста с балочной разрезной статической схемой полной длиной $l_{п}=8,20$ м представлены на рис. 2.

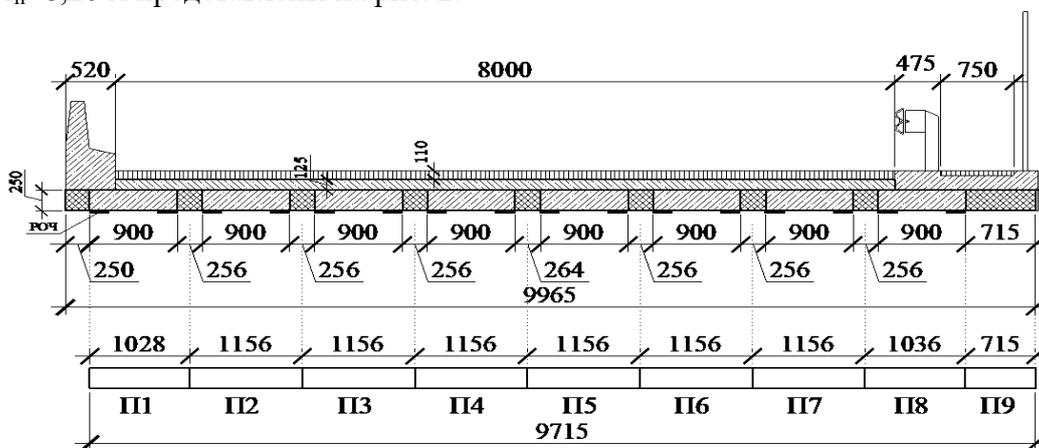


Рис. 2. Поперечный разрез сборно-монолитной железобетонной плиты моста

Несущие конструкции пролетного строения выполнены из восьми сборных железобетонных плит полной длиной 8,2 м и сечением 0,9x0,25 м [5]. Над промежуточными опорами сборные плиты смонтированы по разрезной схеме. Между собой сборные плиты объединены монолитными железобетонными участками между плитами. Кроме того, поверх сборных плит предусмотрено устройство неразрезной над промежуточными опорами накладной железобетонной монолитной плиты толщиной 0,125 м. Армирование сборных плит, промежуточных участков между сборными плитами, а также консольной плиты с правой стороны приведены в нашей публикации [5], посвященной детерминированной оценке прочности и приближенной оценке риска разрушения пролетного строения реконструируемого моста без учета влияния длительности эксплуатации сооружения.

2.2. Результаты численных исследований надежности наиболее нагруженных плит без учета интенсивности загрузки во времени

При реализации предлагаемой в разделе 1 настоящей статьи вероятностной методики выполним сопоставление параметров надежности отдельных всех входящих в конструкцию пролетного строения плит без учета фактора времени по формулам, приведенным в публикации [5]. Однако при вычислениях в отличие от приведенных в этой статье значений предельных усилий используем уточненные величины по разработанной и описанной нами в статье [8] программе нелинейного деформационного расчета составной сборно-монолитной железобетонной плиты с учётом различной степени совместного сопротивления сборной и монолитной частей. Ниже приведены подробные результаты расчетов для плит П1 и П6, расположенных непосредственно под полосами проезда транспортных средств соответственно на левой (рис. 3) и правой (рис. 6) сторонах проезжей части пролетного строения. В качестве расчетных параметров в рассматриваемых элементах пролетного строения приняты изгибающие моменты в средних сечениях. Их численные значения для плиты П1 приведены в табл. 1, а для П6 – в табл. 2.

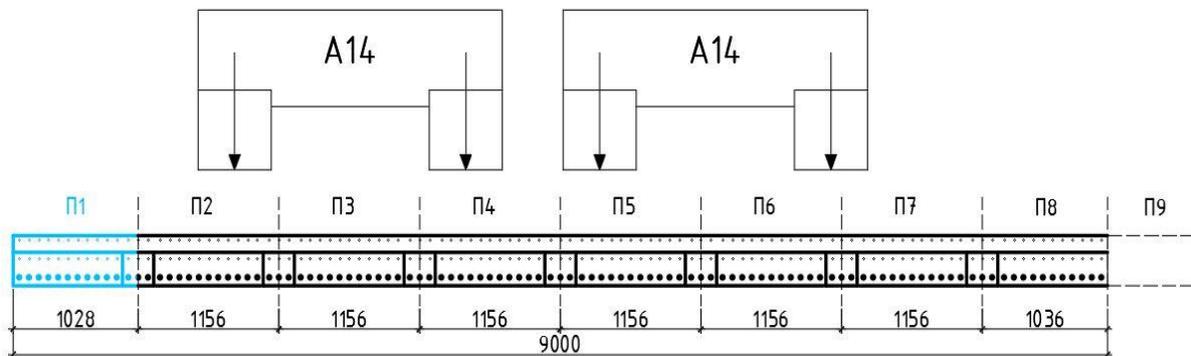


Рис. 3. Расположение плиты П1 в поперечном сечении пролетного строения

Таблица 1

$K_c, \%$	Параметры нагрузки		Статистические параметры предельного изгиб. момента				Расчётные параметры надёжности плиты				
	σ_q	m_{Mq}	m_M	D	σ	ν	β	Q	H	ρ	k
	кН*М	кН*М	кН*М	(кН*М) ²	кН*М	-	-	-	-	бела	-
0	35,6	264,7	326,5	691,2	26,3	0,081	1,397	8,12E-02	0,911	1,09	1,23
10	35,6	264,7	336,5	420,8	20,5	0,061	1,746	4,04E-02	0,959	1,39	1,27
20	35,6	264,7	368,5	528,3	23,0	0,062	2,450	7,14E-03	0,993	2,15	1,39
30	35,6	264,7	401,1	670,7	25,9	0,065	3,098	9,76E-04	0,999	3,01	1,52
40	35,6	264,7	446,3	798,5	28,3	0,063	3,995	3,23E-05	1,000	4,49	1,69
50	35,6	264,7	496,1	869,7	29,5	0,059	5,005	2,80E-07	1,000	6,55	1,87
60	35,6	264,7	536,1	917,4	30,3	0,056	5,806	3,19E-09	1,000	8,50	2,03
70	35,6	264,7	578,0	1524,0	39,0	0,068	5,929	1,52E-09	1,000	8,82	2,18

K _c , %	Параметры нагрузки		Статистические параметры предельного изгиб, момента				Расчётные параметры надёжности плиты				
	σ _q	m _M	m _M	D	σ	v	β	Q	H	ρ	k
	кН*М	кН*М	кН*М	(кН*М) ²	кН*М	-	-	-	-	бела	-
80	35,6	264,7	601,1	1516,3	38,9	0,065	6,375	9,12E-11	1,000	10,04	2,27
90	35,6	264,7	635,7	1426,7	37,8	0,059	7,149	4,38E-13	1,000	12,36	2,40
100	35,6	264,7	651,0	1506,5	38,8	0,060	7,334	1,12E-13	1,000	12,95	2,46

Графическое представление зависимостей характеристики безопасности и коэффициента запаса прочности от степени совместности деформаций сборной и монолитной частей составной плиты показаны соответственно на рис 4 и 5. На этих графиках хорошо просматривается нелинейный характер зависимостей показателей надёжности от степени совместности деформаций частей составной сборно-монолитной конструкции плиты.

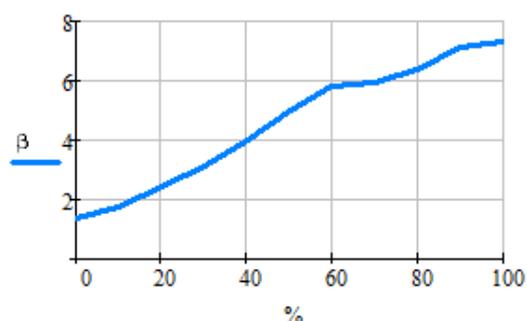


Рис. 4. Зависимость характеристики безопасности от степени совместности деформаций частей плиты

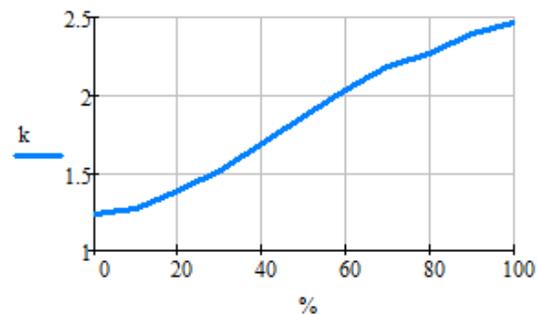


Рис. 5. Зависимость коэффициента запаса прочности от степени совместности деформаций частей плиты

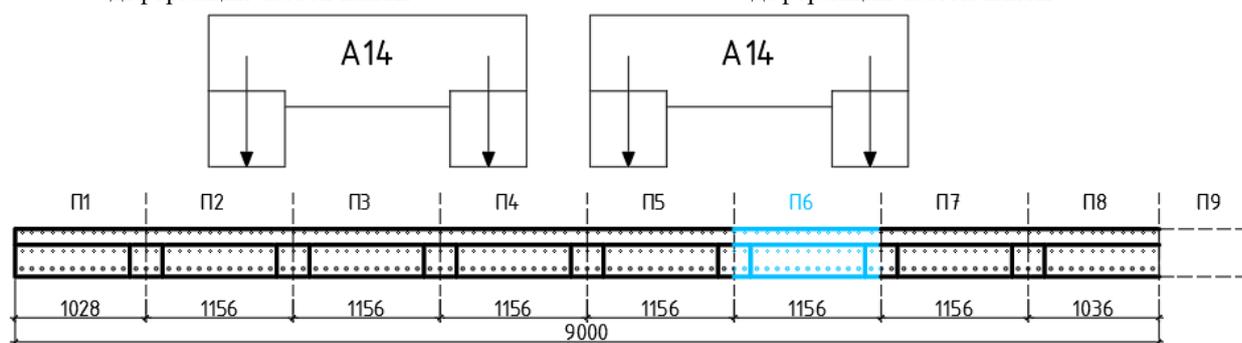


Рис. 6. Расположение плиты П6 в поперечном сечении пролетного строения

Таблица 2

K _c , %	Параметры нагрузки		Статистические параметры предельного изгиб, момента				Расчётные параметры надёжности плиты				
	σ _q	m _{Mq}	m _M	D	σ	v	β	Q	H	ρ	k
	кН*М	кН*М	кН*М	(кН*М) ²	кН*М	-	-	-	-	бела	-
0	32,1	252,1	369,9	769,9	27,7	0,075	2,776	2,75E-03	0,997	2,56	1,47
10	32,1	252,1	392,8	602,9	24,6	0,063	3,481	2,50E-04	0,998	3,60	1,56
20	32,1	252,1	423,0	621,1	24,9	0,059	4,206	1,30E-05	1,000	4,89	1,68

K _c , %	Параметры нагрузки		Статистические параметры предельного изгиб, момента				Расчётные параметры надёжности плиты				
	σ_q	m_{Mq}	m_M	D	σ	ν	β	Q	H	ρ	k
	кН*М	кН*М	кН*М	(кН*М) ²	кН*М	-	-	-	-	бела	-
30	32,1	252,1	473,4	1115,4	33,4	0,071	4,777	8,91E-07	1,000	6,05	1,88
40	32,1	252,1	517,0	1069,8	32,7	0,063	5,781	3,71E-09	1,000	8,43	2,05
50	32,1	252,1	572,2	1031,3	32,1	0,056	7,049	9,02E-13	1,000	12,05	2,27
60	32,1	252,1	622,6	1408,5	37,5	0,060	7,502	3,14E-14	1,000	13,50	2,47
70	32,1	252,1	668,9	2069,3	45,5	0,068	7,487	3,52E-14	1,000	13,45	2,65
80	32,1	252,1	695,2	2045,6	45,2	0,065	7,989	0,000	1,000	>13	2,76
90	32,1	252,1	734,5	1925,0	43,9	0,060	8,874	0,000	1,000	>13	2,91
100	32,1	252,1	751,5	2009,6	44,8	0,060	9,058	0,000	1,000	>13	2,98

Отметим, что при определении предельных изгибающих моментов учитывается этапность загрузки сначала собственным весом сборной нижней части и весом незатвердевшей монолитной верхней части пролетного строения, а на втором этапе – загрузка составной конструкции – нагрузкой от дорожного покрытия и временной нагрузкой, установленной в наиболее опасное положение.

Графическое представление зависимостей характеристики безопасности и коэффициента запаса прочности от степени совместности деформаций сборной и монолитной частей составной плиты Пб на правой стороне пролетного строения показаны соответственно на рис 7 и 8. На этих графиках так же, как и для плиты П1, виден нелинейный характер зависимостей показателей надёжности от степени совместности деформаций частей составной сборно-монолитной конструкции плиты.

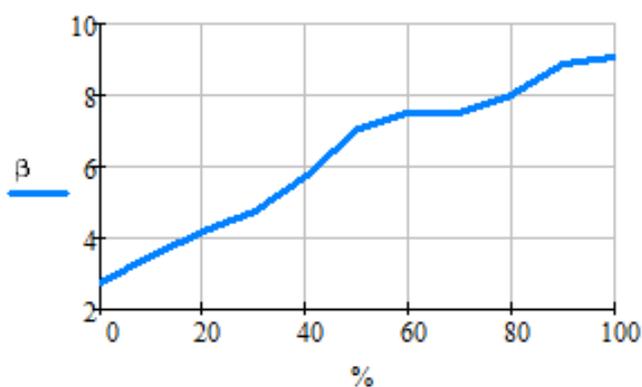


Рис. 7. Зависимость характеристики безопасности от степени совместности деформаций частей плиты

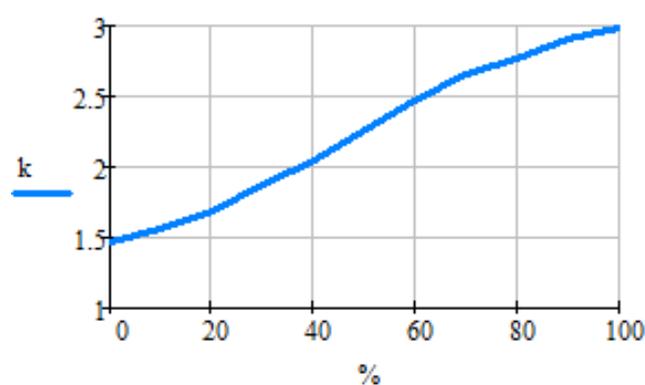


Рис. 8. Зависимость коэффициента запаса прочности от степени совместности деформаций частей плиты

Для выбора наиболее нагруженных плит пролетного строения на рис 9 приведены сравнительные данные по характеристикам безопасности всех элементов пролетного строения на левой и правой сторонах пролетного строения.

Эти данные получены для совместного действия постоянных и временных нагрузок в виде колонн автомобильной нагрузки А14 для варианта значения коэффициента совместности деформаций $K_c = 30\%$.

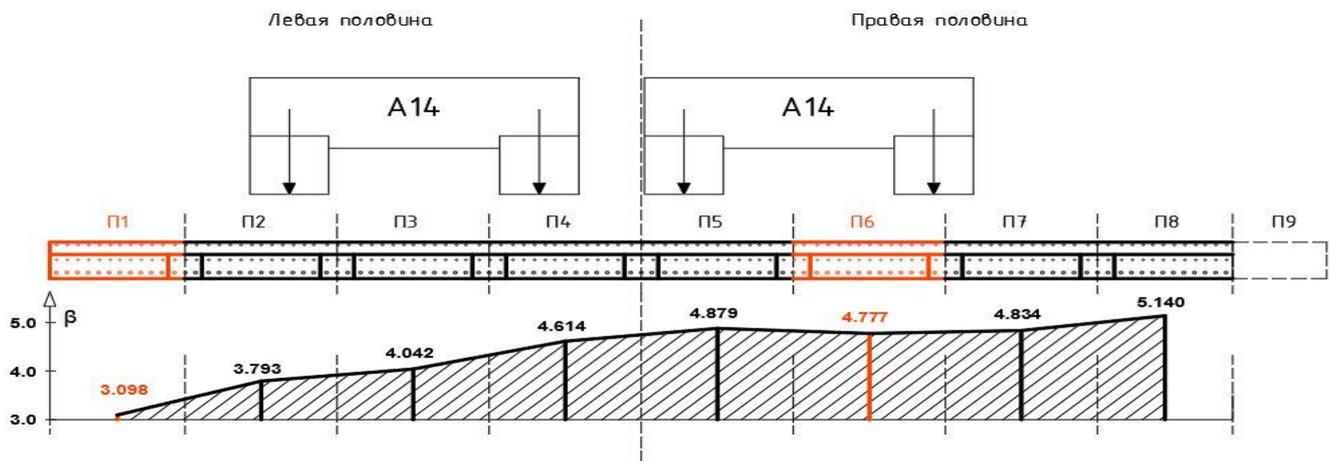


Рис. 9. Сопоставление характеристик безопасности отдельных элементов сборно-монолитной плиты для значения коэффициента совместности деформаций $K_c = 30\%$

Приведенный график иллюстрирует различие в показателях надежности всех сборно-монолитных элементов пролетного строения с учетом расположения колонн временной нагрузки в соответствии с действующими правилами проезда встречных колонн автомобилей по автодорожным мостам. Из него видно, что наименее надежной в поперечном сечении на левой стороне является крайняя плита П1, а на правой стороне - плита П6.

2.2. Результаты численных исследований надежности элементов сборно-монолитной конструкции пролетного строения с учетом интенсивности загрузки во времени

В качестве эффективного периода эксплуатации рассматриваемого мостового сооружения принят один год, в течение которого случайная функция, описывающая изменчивость действующих на элементы пролетного строения изгибающих моментов один раз приближается к случайному уровню, отвечающему значению предельного усилия в рассматриваемой конструкции. При такой загруженности транспортного сооружения не требуется проверка оценки выносливости и учета усталостных явлений в материале несущих элементов из железобетона.

Таблица 3

Расчетные значения интенсивности отказа двух расположенных на разных сторонах пролетного строения железобетонных сборно-монолитных составных плит

Степень совместности, %	Эффективный период эксплуатации Т, лет	Интенсивность отказов U , 1/год в плите пролетного строения	
		П1	П6
0	1,000	3.77E-01	2.10E-02
10	1,000	2.18E-01	2.34E-03
20	1,000	5.00E-02	1.44E-04

Степень совместности, %	Эффективный период эксплуатации	Интенсивность отказов U , 1/год в плите пролетного строения	
	T , лет	П1	П6
30	1,000	8.25E-03	1.11E-05
40	1,000	3.42E-04	5.52E-08
50	1,000	3.64E-06	1.62E-11
60	1,000	4.78E-08	6.01E-13
70	1,000	2.32E-08	6.73E-13
80	1,000	1.49E-09	0.00
90	1,000	8.00E-12	0.00
100	1,000	2.09E-12	0.00

Из данных, приведенных в табл. 3, видно, что при малых значениях коэффициента совместности сопротивления частей сборно-монолитной конструкции выбросы возникающих в плитах изгибающих моментов будут частыми, что приведет к преждевременному отказу транспортного сооружения. Этот факт подтверждается данными расчетов изменения логарифмического показателя надёжности моста для различных периодов эксплуатации, приведенными в табл. 4 для того же эффективного периода эксплуатации транспортного сооружения, составляющего $T_{эфф} = 1$ год (365 дней).

Графическое представление указанных в табл. 4 логарифмических показателей надёжности в зависимости от срока эксплуатации автодорожного моста, интенсивность загрузки которого находится в рамках требований к эргодическим стационарным случайным функциям, приведена на рис. 10. При росте длительности эксплуатации надёжность транспортного сооружения снижается. Графики снижения расчетных показателей приведены на рисунке разными цветами.

Таблица 4

Расчетные величины логарифмических показателей надёжности плитного пролетного строения моста для разных сроков эксплуатации

Степень совместности, %	Логарифмический показатель надёжности моста для лет эксплуатации, бел				
	1	2	5	10	20
0	0,484	0,261	0,064	0,00819	0,00015
10	0,705	0,449	0,176	0,051	0,00537
20	1,313	1,023	0,656	0,406	0,2
30	2,085	1,785	1,393	1,101	0,817
40	3,466	3,165	2,768	2,467	2,167
50	5,439	5,138	4,74	4,439	4,138
60	7,321	7,02	6,622	6,321	6,02
70	7,634	7,333	6,935	6,634	6,333
80	8,826	8,525	8,127	7,826	7,525
90	11,097	10,796	10,398	10,097	9,796
100	11,68	11,379	10,981	10,68	10,379

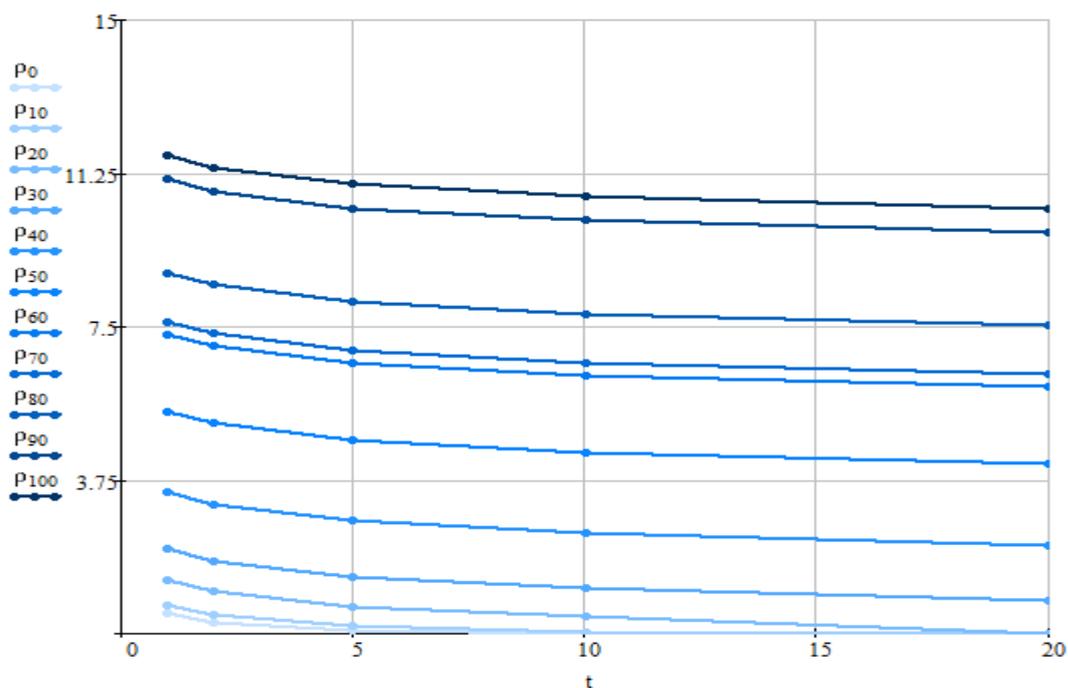


Рис. 10. Зависимость логарифмического показателя надёжности от периода эксплуатации моста для различной степени объединения сборной и монолитной частей сечения

Вводя ограничения на уровни надёжности несущих элементов транспортного сооружения, можно по этим графикам определять долговечность сооружения для выполненной при строительстве степени совместности и заданной минимальной надёжности. Например, долговечность на уровне 20 лет можно получить для логарифмического показателя надёжности $\rho=4$ бела, обеспечивая степень совместности сопротивления сборной и монолитной частей на уровне 50 %.

В заключительной части численных исследований по апробации предлагаемой методики вероятностного расчета надёжности сборно-монолитных составных конструкций выполнены расчеты изменения надёжности мостового сооружения в целом по формуле (4) из найденных логарифмических показателей наименее надёжных плит на левой (П1) и правой (П6) сторонах проезжей части. При этом варьировались интенсивности загруженности путем изменения эффективного периода эксплуатации. Результаты расчетов приведены в табл. 5 и на рис. 11.

Таблица 5

Расчетные величины логарифмических показателей надёжности плитного пролетного строения моста для разных сроков эксплуатации

Эффективный период нагружения, лет	Логарифмический показатель надёжности моста в целом (бел) для лет эксплуатации				
	1	2	5	10	20
1 (365 дней)	5.439	5.138	4.74	4.439	4.138
0,5 (87 дней)	5.138	4.837	4.439	4.138	3.837
1/12 (31 день)	4.36	4.059	3.661	3.36	3.059

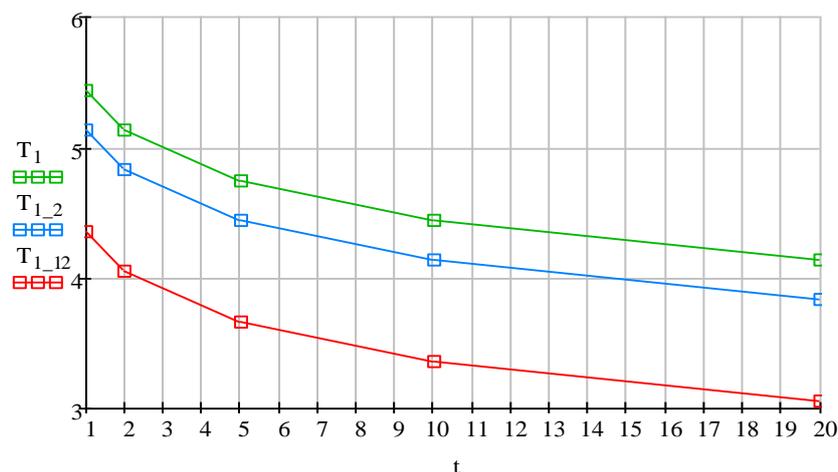


Рис. 11. Зависимость логарифмического показателя надёжности моста в целом при различных эффективных периодах нагружения

Сопоставляя приведенные графики изменения надёжности при разных эффективных периодах эксплуатации, описывающих интенсивности загрузки транспортного сооружения, можно заметить нелинейную зависимость срока безопасной эксплуатации от интенсивности загрузки временными нагрузками. Это объясняется применяемой методикой расчета по «схеме редких событий», не учитывающей усталостные явления в материале.

Выводы

- Предлагаемая в настоящей статье методика расчета надёжности несущей системы которая разработана с использованием модели действующих нагрузок в виде стационарных эргодических случайных функций, опробирована при проектировании реконструкции существующего длительно эксплуатируемого сборно-монолитного железобетонного пролетного строения автодорожного моста

- По результатам численных расчетов с учетом регламентируемых действующими нормативными документами параметров разброса прочностных характеристик материалов и действующих нагрузок выявлены особенности нелинейного деформирования сборно-монолитной железобетонной конструкции при длительной эксплуатации с различными уровнями загрузки отдельных элементов и моста в целом.

- Долговечность сборно-монолитных составных конструкций существенно зависит от количественных показателей надёжности наиболее нагруженных несущих элементов транспортного сооружения.

Библиографический список

1. Перельмутер, А.В. Избранные проблемы надёжности и безопасности строительных конструкций// А.В. Перельмутер. – Киев: УкрНИИпроектстальконструкция, 2000. – 216 с.
2. Райзер, В.Д. Теория надёжности сооружений/ В.Д. Райзер. – М.: АСВ, 2010. -252 с.
3. Свешников, А.А. Прикладные методы теории случайных функций / А.А. Свешников. - М.: Наука. 1968. 464 с.
4. Екимов, В.В. Вероятностные методы в строительной механике корабля/ В.В Екимов. - Ленинград: Судостроение, 1966. - 328 с.

5. Сафронов, В. С. Надежность усиленного накладной плитой плитного пролетного строения автодорожного моста/ В.С. Сафронов, А.В. Черников, А.В. Антипов, Н.В. Сафронов, А.С. Суханов // Строительная механика и конструкции. - 2017. - Т. 2. - № 15. - С. 85-94.
6. Сафронов, В.С. Современные конечно-элементные модели балочных без диафрагменных пролетных строений автодорожных мостов/ В.С. Сафронов, А.В. Антипов// Строительная механика и конструкции. - 2013. - № 1. - С. 92-101.
7. Сафронов, В.С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных мостов, имеющих дефекты и повреждения / В.С. Сафронов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. - 1996. - № 6. - С. 103-109.
8. Сафронов, В.С. Деформационный расчет составных изгибаемых железобетонных стержневых элементов //В.С. Сафронов, А.В. Черников// Строительная механика и конструкции. - 2018. - Т. 3. - № 18. - С. 81-92.
9. Сафронов, В.С. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой/ В.С. Сафронов, С.Д. Степанов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. - 1998. - № 11-12.- С. 31-35.
10. Сафронов, В.С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок/ В.С. Сафронов, Нгуен Динь Хоа// Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2010. - №1(17). – С. 152-166
11. Сафронов, В. С. Прочностной анализ несущих конструкций висячего трубопровода через реку ока в г. Орле/ В .С. Сафронов, Ю. А Суханова// Строительная механика и конструкции. - 2010. - Т. 1. - № 1. - С. 61-66.
12. Сафронов. В.С. Оценка риска разрушения нормальных сечений железобетонных балок произвольной формы/ В.С. Сафронов, Д.И. Доманов// Механика разрушения бетонов, железобетонов и других строительных материалов: сб. ст. по материалам 7-й международн. научн. конф.: в двух томах. – 2013. - С. 31-38.
13. Сафронов, В.С. Применение теории риска для оценки вероятности трещинообразования при стесненном кручении железобетонных мостовых балок/ В.С. Сафронов, Д.А. Доманов // Строительная механика и конструкции. – 2013. - Вып. 2(7). – С. 47-52.

References

1. Perelmuter A.V. Selected problems of reliability and safety of building structures. Kiev: UkrNIIProektstalkonstruktziya, 2000. 216 p.
2. Raiser V.D. The theory of reliability of structures. M.: DIA, 2010. 252 p.
3. Sveshnikov A.A. Applied methods of the theory of random functions. M.: Science, 1968. 464 p.
4. Ekimov V.V. Probabilistic methods in ship building mechanics. Leningrad: Shipbuilding, 1966. 328 p.
5. Safronov V.S., Chernikov A.V., Antipov A.V., Safronov N.V., Sukhanov A.S. Reliability of a road bridge reinforced with an overlay plate of a slab span structure of a highway bridge. Construction mechanics and structures. 2017. V. 2. No. 15. Pp. 85-94.
6. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern finite element models of beam bridges without road diaphragm structures of road bridges. Building mechanics and structures. 2013. No. 1. Pp. 92-101.
7. Safronov V.S., Petranin A.A., Petrenya E.N. Super element calculation in mixed formulation of reinforced concrete bridges with defects and damage. Proceedings of higher educational institutions. Building. 1996. No. 6. Pp. 103-109.

8. Safronov V.S., Chernikov A.V. Deformation calculation of composite bending reinforced concrete core elements. *Construction mechanics and constructions*. 2018. Vol. 3. No. 18. Pp. 81-92.
9. Safronov V.S., Stepanov S.D., Petranin A.A., Petrenya E.N. Algorithm for calculating reconstructed slab-beam structures reinforced with a slab. *Proceedings of higher educational institutions. Building*. 1998. No. 11-12. Pp. 31-35.
10. Safronov V.S., Nguyen Dinh Hoa. Probabilistic assessment of the risk of limiting states in sections of flexible concrete beams. *Scientific Bulletin of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture*. 2010. No. 1 (17). Pp. 152-166.
11. Safronov V.S., Sukhanova Yu.A. Strength Analysis of Supporting Structures of the Hanging Pipeline across the Oka River in the town of Orel. *Building mechanics and structures*. 2010. Vol. 1. No. 1. Pp. 61-66.
12. Safronov V.S., Domanov D.I. Assessment of the risk of destruction of normal sections of reinforced concrete beams of arbitrary shape. *Mechanics of destruction of concrete, reinforced concrete and other building materials: Sat. Art. Based on materials of the 7th international scientific Conf. : in two volumes*. 2013. Pp. 31-38.
13. Safronov V.S., Domanov D.I. The use of risk theory to estimate the probability of crack formation under constrained torsion of reinforced concrete beams. *Construction mechanics and structures*. 2013. Vol. 2 (7). Pp. 47-52.

RELIABILITY AND DURABILITY OF TEAM-MONOLITHIC TIRE FLIGHT OF THE ROAD BRIDGE

V. S. Safronov¹, A. V. Antipov², A. V. Chernikov³

Voronezh State Technical University^{1,3}
Dortransproekt LLC²
Russia, Voronezh

¹ Dr. of Techn. Sciences, Professor of the Department of Structural Mechanics, tel.: +7 (473) 2715230
e-mail: vss22@mail.ru

² Senior Engineer

³ MA Student of the Department of Structural Mechanics

The methodology and results of calculating the reliability and durability of the span of a reinforced concrete slab road bridge are described, taking into account the influence of resistance of loads to the combined and monolithic parts of the composite section, as well as the parameters of variation of the strength characteristics of concrete and reinforcement. The probabilistic method is based on the ideas of loading by a temporary load in the form of a random ergodic process with given statistical characteristics: expectation, variance, and correlation function. Computational procedures are based on the provisions of the theory of emissions of a stationary normal random function for a constant normal random level with a given average and standard that meets the limit state of the supporting structure.

The results of numerical studies of the reliability and durability of the precast-monolithic structure of a slab span structure reconstructed for modern temporary loads of a road bridge are presented. The dependences of reliability and durability are studied depending on the effective loading period of the transport structure.

Keywords: slab reinforced concrete bridge, prefabricated-monolithic construction, probabilistic assessment of reliability, theory of emissions of normal stationary processes, effective loading period, logarithmic reliability indicator, strength variation of materials and loads

НОВОЕ О РАСЧЕТЕ МОНОЛИТНОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО Остова МНОГОЭТАЖНОГО ЗДАНИЯ

А. А. Трещев¹, В. Г. Теличко², Н. В. Золотов³

Тульский государственный университет^{1, 2, 3}
Россия, г. Тула

¹ Чл.-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции»

² Канд. техн. наук, доц. кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции»

³ Аспирант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции»

Тел.: +7(4872)25-71-08; e-mail: taa58@yandex.ru

Разработана конечно-элементная модель деформационно-прочностного расчета пространственной несущей системы многоэтажного здания из железобетона в монолитном исполнении. В основу этой модели положены гибридные элементы, в которых учтена зависимость механических свойств бетона от вида напряженного состояния, наличие трещин в нем и возникновение пластических деформации арматуры. Проанализированы некоторые решения на основе принятой модели в сравнении с расчетами в промышленных пакетах САПР.

Ключевые слова: монолитный железобетон, гибридные конечные элементы, пространственная несущая система, чувствительность к виду напряженного состояния, нормированные напряжения, образование трещин.

Введение

Интенсивное развитие техники серьезно повышает требования к надёжности и экономичности несущих систем зданий и сооружений, особенно высотных. Общеизвестно, что характеристики жесткости и прочности различных бетонов меняются при изменении вида реализуемого в точке напряжённого состояния. Связи напряжений с деформациями для них обладают неклассической нелинейностью. Несмотря на высокий уровень развития строительной науки, в нормативных документах до сих пор в инженерных расчетах практически не учитывается зависимость деформационных характеристик бетонов от вида напряженного состояния, а принимается во внимание, в основном, различие диаграмм на осевое сжатие и растяжение, а также зависимость пределов прочности от вида нагружения. Такое состояние норм не может удовлетворять высокому уровню принимаемых проектных решений. В последнее время при разработке новых теорий расчета пространственных железобетонных конструкций широко используются нелинейные аппроксимации диаграмм деформирования бетона на осевое сжатие с ниспадающей ветвью. Ниспадающая ветвь формально обосновывается данными экспериментов. Однако эти данные представляются с учетом двух грубых допущений, нарушающихся в стадиях предразрушения и разрушения бетона. Прежде всего, обработка экспериментальных данных осуществляется в координатах условных, а не истинных напряжений и, кроме того, представление результатов не выходит за рамки гипотезы сплошной деформируемой среды. При этом эффективное сечение бетонных образцов, воспринимающее усилие, кардинально уменьшается. В частности,

при испытании бетонных кубов падение приложенного усилия наблюдается после оформления конфигураций сомкнутых пирамид разрушения, что свидетельствует о нарушении гипотезы сплошности среды. Ниспадающие ветви обнаруживаются и при испытании на растяжение арматурных стержней при обработке результатов в координатах условных напряжений, когда образуется в образце так

называемая «шейка» с уменьшенными размерами сечения по сравнению с исходным состоянием. Так, что при пересчете диаграмм в координатах истинных напряжений ниспадающая ветвь исчезает. В представленном исследовании приняты определяющие уравнения бетонов в рамках нормированных пространств напряжений [1]. Данный вариант теории может послужить долгие годы как проектировщикам, так и материалововедам.

Построение математической модели

Очевидно, что при нагружении железобетонных конструкций развиваются упругопластические деформации в их компонентах, возникают и раскрываются трещины в бетоне. Для учета подобного сложного процесса эксплуатации конструкций требуется совершенствование расчетной базы, ввиду того что известные компьютерные комплексы со встроенными математическими моделями не учитывают специфические особенности работы отдельных конструкций [1, 2]. В представленной работе используется слоистый гибридный конечный элемент (КЭ), основанный на учете нелинейной зависимости механических характеристик бетона от вида его напряженного состояния (во всем диапазоне его изменения), образования трещин в нем и процесса упругопластического деформирования арматуры, который апробирован в публикациях авторов [2, 3] и многолетним использованием в реальном проектировании. Разработка математических моделей расчета пространственных ЖБК, в которые максимально вложены их специфические свойства, без сомнения, актуальная задача строительной механики [4].

Для расчета пространственных несущих систем из железобетона специально разработана модель гибридных КЭ с пятью степенями свободы в узле, матрица жесткости которых, получена для треугольного элемента, которая позволяет надежно определять НДС конструкций с произвольной геометрией. Все этапы построения и сами матрицы гибридного КЭ подробно рассмотрены и представлены в работах [2, 3]. В рамках этого КЭ использовался формализм Тимошенко, учитывающий поперечные сдвиги при пренебрежении нормальными напряжениями на площадках ортогональных направлению изгиба элемента σ_{33} .

Основой модели являются связи тензоров деформациями и напряжениями $\{e\} = [A]\{\sigma\}$, являющихся следствием потенциала W_1 [1], где $\{e\} = \{e_{11} \ e_{22} \ \gamma_{12} \ \gamma_{13} \ \gamma_{23}\}^T$; $\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \tau_{12} \ \tau_{13} \ \tau_{23}\}$; $[A] = [A(\xi, \eta, \varphi, \sigma, \tau)]$ – матрица податливостей размером 5×5 (с учетом обсужденных допущений), в которой элементы нелинейно зависят от нормированных напряжений $\xi = \sigma/S_0$, $\eta = \tau/S_0$, фазы напряжений Φ и уровня достигнутых напряжений σ_{ij} , $\sigma = \sigma_{ij}\delta_{ij} / 3$; $\tau = (S_{ij}S_{ij} / 3)^{0,5}$; $S_0 = (\sigma^2 + \tau^2)^{0,5}$; $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$.

При этом связь между напряжениями и деформациями представим в виде [2, 3]

$$\{\sigma\} = [B]\{e\}; \quad [B] = [A]^{-1}. \quad (1)$$

Усилия в сечении элемента определяются известным способом [2, 3]:

$$(2) \quad N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dx_3; \quad M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3; \quad Q_i = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{i3} dx_3, \quad (i, j = 1, 2).$$

Обобщенный силы и деформации срединной поверхности приобретают вид

$$(3) \quad M = \begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ Q_1 \\ Q_2 \\ N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{Bmatrix}; \quad [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} & K_{14} & K_{15} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ & D_{22} & D_{26} & K_{24} & K_{25} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ & & D_{66} & K_{64} & K_{65} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{14} & C_{24} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{15} & C_{25} & C_{65} \\ & Sim & & & & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ & & & & & & C_{22} & C_{26} \\ & & & & & & & C_{66} \end{bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \psi_{2,1} \\ -\psi_{1,2} \\ \psi_{2,2} - \psi_{1,1} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \\ u_{1,1} \\ u_{2,2} \\ u_{1,2} + u_{2,1} \end{Bmatrix};$$

где $C_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} dx_3$; $K_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3 dx_3$; $D_{km} = \int_{-h/2}^{h/2} B_{km} x_3^2 dx_3$ – интегралы от жесткостей, связанных с изменением вида напряженного состояния.

Ясно, что математическая модель железобетонных плит и диафрагм жесткости, формирующих несущий остов здания, должна учитывать особенности взаимодействия компонентов композитного материала «бетон-арматура» в процессе нагружения. Эта модель должна быть достаточно приемлемой и, безусловно, реализуемой. Эта модель сохраняет отдельные технические гипотезы, среди которых невозможно освободиться от следующих [3, 4]:

- 1) активно производится пропорциональное нагружение;
- 2) габариты плит и диафрагм здания заметно больше, чем расстояние между стержнями арматуры, и она поэтому представляется отдельным слоем с учетом коэффициентов его армирования;
- 3) из-за неоднородности сооружения по толщине, элементы представляются пакетом фиктивных слоев:
 - а) слои бетона, не имеющие трещин;
 - б) слои железобетона, не имеющие трещин; в) слои бетона, имеющие трещины;
 - г) слои железобетона, имеющие трещины;
 - д) слои железобетона, имеющие пересекающиеся трещины;
- 4) напряжения в армированном слое КЭ равны сумме напряжений бетона и арматуры, при этом считается справедливым равенство их деформаций;
- 5) срединная поверхность элементов делится на сеть гибридных конечных элементов с разбиения на слои;
- 6) жесткость фиктивного слоя данного конечного элемента, размазывается на весь слой;
- 7) прочности бетона в фиктивном слое определяется по условию прочности П. П. Баландина [1, 3];

- 8) треснувший фиктивный слой в конечном элементе обладает трещинами сквозными и параллельными друг другу. Растянутый бетон при деформировании оценивается коэффициентом В.И. Мурашева с параметром поврежденности бетона [3, 5];
- 9) трещины в бетоне фиктивного слоя определяется трансверсально-изотропным телом с изотропной плоскостью, вдоль трещин. При этом необходимо конкретизировать каждый слой.

Слой бетона без повреждений. Тензоры деформаций и напряжений связаны следующим образом (1).

Слой железобетона без повреждений. Благодаря принятым гипотезам матрица «упруго-пластичности» для железобетонных слоев без трещин определится следующим образом:

$$[B] = [A]^{-1} + [B_S], \quad (4)$$

где $B_{S11} = E_S \mu_{11} / (1 - \nu_S^2)$; $B_{S22} = E_S \mu_{22} / (1 - \nu_S^2)$; $B_{S33} = E_S [1 / (1 + \mu_{11} \nu_S) + 1 / (1 + \mu_{22} \nu_S)]$;
 $B_{S44} = E_S / (1 + \mu_{11} \nu_S)$; $B_{S55} = E_S / (1 + \mu_{22} \nu_S)$; $B_{Sij} = 0$ – для остальных компонентов матрицы $[B_S]$; E_S – модуль упругости арматуры, ν_S – коэффициент поперечной деформации арматуры; $\mu_{11} = A_{S1} / S_{i11} h_S$, $\mu_{22} = A_{S2} / S_{i22} h_S$ – коэффициенты армирования вдоль осей X_1 и X_2 исходной системы координат; A_{Si} – площадь сечения арматурного стержня; S_{i11} , S_{i22} – шаг стержней параллельных осям X_1 и X_2 ; h_S – суммарная толщина армированных слоев.

Члены матрицы $[A]^{-1}$ в зависимостях (4) вычисляются по тем же формулам, но в них вместо суммарных напряжений σ_{ij} должны быть напряжения в бетоне – σ_{Bij} .

Слой железобетона с повреждениями. Из-за принятого условия образования трещин они образуются при

$$\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + 3 \cdot (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{13}^2) - (\sigma_{11} \sigma_{22}) - (R_{bt} - R_b)(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - R_{bt} R_b > 0, \quad (5)$$

где σ_{11} , σ_{22} , τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} – напряжения бетона в момент образования трещин; R_{bt} , R_b – предел прочности бетона на осевое растяжение и сжатие.

При выполнении условия (8) в бетоне образуется трещина в плоскости, ортогональной к максимальному главному растягивающему напряжению, определяемому, из-за малой величины фиктивного слоя, как для плоского напряженного состояния. Направление трещин определяется углом χ_1 к нормали трещины от оси X_1 .

Из-за наличия трещин в монослое элемента бетона превращается ортотропную среду, а применимость в «чистом виде» потенциала W_1 [1], справедливого для нелинейного дилатирующего разносопротивляющегося изотропного материала, становится ограниченной. Потенциальность этих соотношений не нарушается в направлениях между трещинами из-за сохранности сплошности бетона. В этой ориентации механические свойства бетона определяем секущим модулем бетона E_B и коэффициентом «Пуассона» ν_B из уравнений:

$$e_{22}^* = A_{12}^* \sigma_{11}^* + A_{22}^* \sigma_{22}^* = (\sigma_{22}^* - \nu_B \sigma_{11}^*) / E_B; \quad E_B = 1 / A_{22}^*; \quad \nu_B = -A_{12}^* / A_{22}^*,$$

где A_{12}^* , A_{22}^* – компоненты матрицы податливостей, вытекающие из уравнений сплошных бетонных слоев; σ_{ij}^* – напряжения бетона в повернутой координатной системе $x_1^* O x_2^*$, ориентируемой под углом χ_1 к системе $x_1 O x_2$.

При повороте координатной системы, ориентируемой к направлению трещины, имеем $\{e^*\} = [A^*] \{\sigma_B^*\}$. При этом имеем $[B^*] = [A^*]^{-1}$. Пересчитав координаты в пространстве $x_1^* O x_2^*$ к изначальной, можно оформить матрицу жесткости для бетона при наличии повреждений $[B^c] = [A^c]^{-1}$.

Слой железобетона с повреждениями. Появление трещин регистрируется срабатыванием критерия Баландина в рассматриваемом слое КЭ, а в неравенство (5) вводятся напряжения в бетонной составляющей σ_{Bij} железобетонного слоя.

Пространственное положение трещин в бетоне определяются углом χ_1 , когда принимаются во внимание напряжения в бетонной составляющей. Связь тензоров деформаций и напряжений бетона при наличии трещин в повернутой координатной системе устанавливается подобно связям в бетоне с трещинами – $\{e^*\} = [A^*] \{\sigma_B^*\}$, где основные элементы этой матрицы вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} A_{11}^* &= 1 / (E_B \omega); & A_{12}^* &= -\nu_B / E_B; & A_{22}^* &= 1 / E_B; \\ A_{44}^* &= A_{66}^* = 2(1 + \nu_B) / (E_B \omega); & A_{55}^* &= 2(1 + \nu_B) / E_B, \end{aligned} \quad (6)$$

где параллельно оси x_1^* секущий модуль бетона определяется величиной $E_B \omega$ (ω – функция нарушения сплошности бетона $0 < \omega \leq 1$).

В первоначальной системе координат матрица «упруго-пластичности» бетона с растрескиванием слоя железобетона имеет аналогичный вид, что и для бетона $[B_B^c] = [A^c]^{-1}$, но при учете уравнений (6).

Матрица «упругопластичности» для арматуры слоя железобетона при наличии трещин в начальной координатной системе $x_1 O x_2$ не изменяет свой вид, но модули упругости E_s меняются на E_{skk} – секущие модули арматуры по направлениям осей x_1 и x_2 , а ν_{skk} – ее переменные коэффициенты поперечной деформации ($k=1, 2$):

$$\begin{aligned} B_{S11}^c &= E_{S11} \mu_{11} / (1 - \nu_{S11}^2); & B_{S22}^c &= E_{S22} \mu_{22} / (1 - \nu_{S22}^2); & B_{S44}^c &= E_{S11} / (1 + \mu_{11} \nu_{S11}); \\ B_{S33}^c &= E_{S11} / (1 + \mu_{11} \nu_{S11}) + E_{S22} / (1 + \mu_{22} \nu_{S22}); & B_{S55}^c &= E_{S22} / (1 + \mu_{22} \nu_{S22}), \end{aligned} \quad (7)$$

где с учетом возникновения и роста пластических деформаций арматуры, ее параметры вычисляются по формулам:

$$E_{skk} = \begin{cases} E_s; v_s \text{ при } \sigma_{skk} < R_s \mu_{kk}; \\ R_s / e_{kk}; 0,5 \text{ при } \sigma_{skk} \geq R_s \mu_{kk}, \end{cases}$$

где R_s – расчетное сопротивление без коэффициента надежности по материалу (предел текучести) арматурной стали.

Для однозначного определения параметра поврежденности ω он должен быть связан функцией В. И. Мурашева:

$$\psi_s = E_{sn} / (E_B \omega + E_{sn}), \quad (17)$$

где E_{sn} – модуль упругости арматуры по нормали к трещине.

Параметр ψ_s обычно можно определить, используя эмпирическую формулу Гениева Г. А., Киссюка В. Н. и Тюпина Г. А. [5]. Тогда получим нелинейное уравнение относительно ω , которое можно решить итерационным методом.

Слой железобетона при наличии пересекающихся трещин. После появления начальных трещин с ростом нагрузки в последующем могут возникнуть трещины других направлений. Тогда матрица «упругопластичности» в исследуемом слое определяются следующим образом: $[B] = [B_s^c]$.

Результаты расчета

Использование разработанной модели проиллюстрируем на задаче по определению НДС 7-этажного здания из монолитного железобетона (рис. 1, 2.1, 2.2). Для элементов здания были приняты следующие размеры: а) толщина перекрытий 250 мм; б) толщина пилонов 350 мм. На данном этапе расчета влияние основания не учитывалось, а ограничивалось жестким защемлением пилонов в фундаменте и основании. К зданию прикладывались вертикальные нагрузки на перекрытиях и горизонтальные – по двум взаимно ортогональным фасадам.

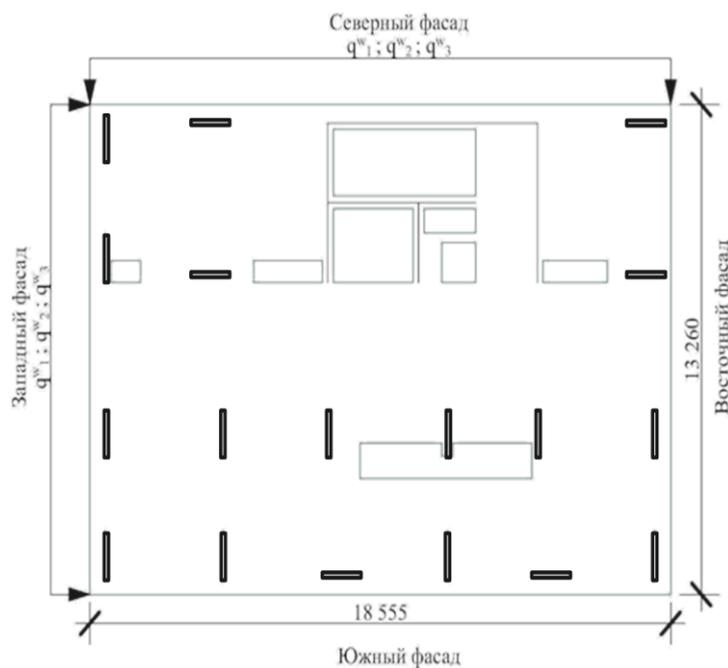


Рис. 1. План расчетной схемы здания

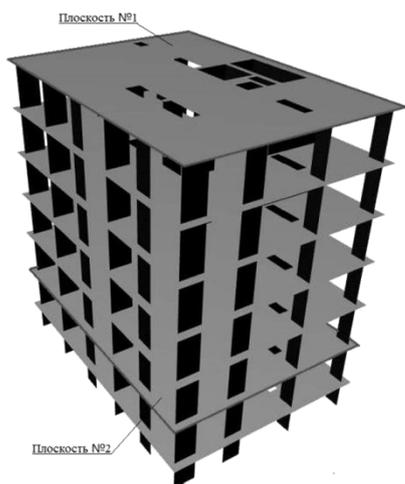


Рис. 2.1. Аксонометрия здания

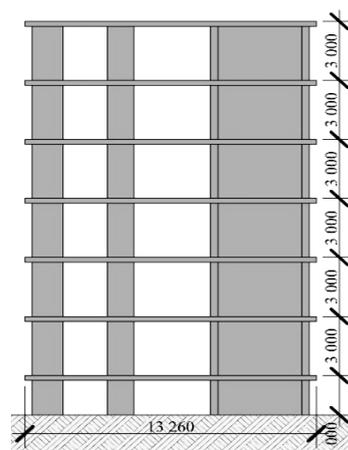


Рис 2.2. Южный фасад здания

ния

Монолитный бетон несущих конструкций здания принят с пределом прочности на сжатие $R^- = 28,4 \text{ МПа}$ [1, 3]. Плиты перекрытия армированы сетками из стержней $\text{Ø}14 \text{ мм}$ А400 (защитный слой 35 мм, предел текучести $\sigma_p = 400 \text{ МПа}$), арматура пилонов принята симметричная двумя сетками из стержней $\text{Ø}12 \text{ мм}$ А400 (защитный слой 30 мм). Характер приложения нагрузок представлен на рис. 3.

Нагрузка	Шаг нагрузки		Максимальная величина нагрузки	
	кПа	кН/м	кПа	кН/м
Единицы измерения:	кПа	кН/м	кПа	кН/м
На покрытие - q_{if}	7	-	70	-
На этаж - q_{fl}	6,8	-	68	-
Ветровая - q^{w_1}	1,4	0,35	14	3,5
Ветровая 2 - q^{w_2}	1,8	0,45	18	4,5
Ветровая 3 - q^{w_3}	0,9	0,225	9	2,25

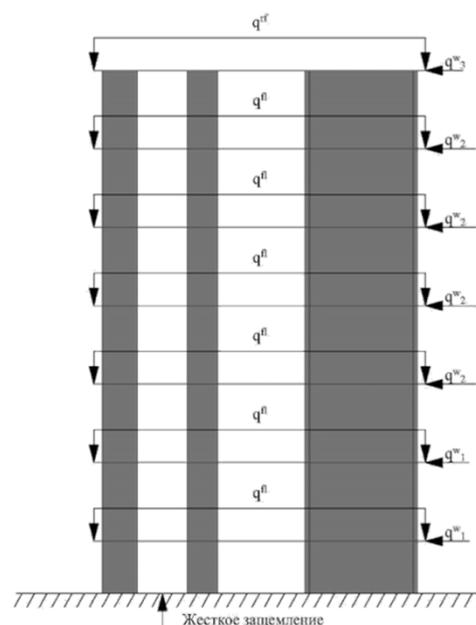


Рис. 3. Нагрузки и восточный фасад здания

Рис. 4 и 5 характеризуют прогибы W (м) перекрытий в обозначенных точках (рис. 2.1). Расчеты выполнены с учетом сравнения с аналогичными результатами из пакетов STARK ES, ANSYS и LIRA-SAPR.

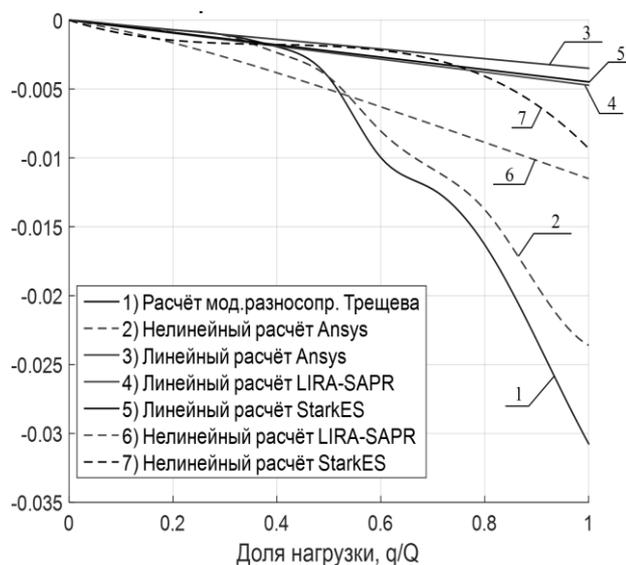


Рис. 4. Вертикальные перемещения точки 1 в плите 1, м

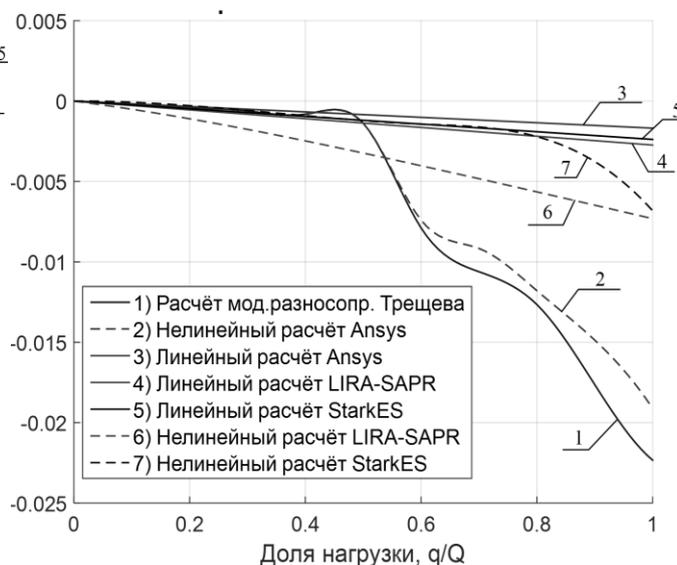


Рис. 5. Вертикальные перемещения в точке 1 плоскости 2, м

По данным расчета ясно, что представленная модель демонстрирует хорошие результаты. Вычисленные перемещения отклоняются от результатов расчета в ANSYS с учетом классической нелинейности, которые не учитывают зависимость деформационных характеристик бетона, в точках экстремума на 19%. Отклонения по экстремальным напряжениям колеблются в интервале от -25% до $+45\%$. Анализ полученных результатов расчета здания доказывает, что рассмотренная модель имеет ряд преимуществ перед широко эксплуатируемыми САПР. Разработанная модель учитывает не только зависимость прочностных характеристик бетона от вида напряженного состояния, но и деформационных, а также сохраняется учет появления и роста трещин, упругие и пластические деформации арматуры на разных стадиях нагружения. При этом конечный элемент сформулирован в удобной форме для цифровой реализации в составе Vim-технологий.

Выводы

Подтверждено, что неучет зависимости деформационных характеристик бетона от вида напряженного состояния при возможных его изменениях, появления повреждений типа трещин в пространственной железобетонной несущей системе, приводит к существенным погрешностям при определении основных характеристик НДС конструкций. Поэтому обеспечение достоверности результатов расчетов и предотвращения аварийных ситуаций современных высотных зданий требует учета влияния усложненных свойств материалов и конструкций в более полном объеме.

Библиографический список

1. Трещев, А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной и наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А.А.Трещев. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. – 328 с.

2. Теличко, В.Г. Гибридный конечный элемент для расчета плит и оболочек с усложненными свойствами / В.Г.Теличко, А.А.Трещев // Известия вузов. Строительство. – 2003. – № 5 – С. 17-23.
3. Артемов, А.Н. Поперечный изгиб железобетонных плит с учетом трещин / А.Н.Артемов, А.А.Трещев // Изв. вузов. Строительство. – 1994. – №9 – 10. – С. 7–12.
4. Jendele, L. On the solution of multi-point constraints – application to FE analysis of reinforced concrete structures / L.Jendele, J.Červenka // Computers & Structures. 2009. Vol. 87. Pp. 970–980.
5. Гениев, Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А.Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А. Тюпин. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.

References

1. Treschev, A.A. The theory of deformation and strength of materials with an initial or induced sensitivity to the form of the stress state. The governing relations, Moscow – Tula: RAACS – Tulgu, 2016. 328 p.
2. Telichko, V.G. Hybrid finite element for the calculation of plates and shells with complicated properties. News of higher education. Construction. 2003. No. 5. Pp. 17-23.
3. Artemov, A.N., Treschev A.A. Transverse bending of reinforced concrete slabs with cracks. News of higher education. Construction. 1994. No. 9 – 10. Pp. 7-12.
4. Jendele L., Červenka J. On the solution of multi-point constraints – application to FE analysis of reinforced concrete structures. Computers & Structures. 2009. Vol. 87. Pp. 970–980.
5. Geniev G.A., Kissock V.N., Tyupin G.A. Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete. M.: Stroizdat, 1974. 316 p.

NEW ON THE CALCULATION OF MONOLITHIC REINFORCED CONCRETE SKELETON MULTISTORY BUILDING

A. Treschev¹, V. G. Telichko², N. V. Zolotov³

Tula State University^{1, 2, 3}
Russia, Tula

¹ Corresponding member of RAACS, Dr. of Techn. Sciences, prof., head of the Department of Construction, Building Materials and Structures

² PhD in Techn. Sciences, Associate professor of the Department of Construction, Building Materials and Structures

³ Post-graduate Student of the Department of Construction, Building Materials and Structures

tel. +7(4872)25-71-08; e-mail: taa58@yandex.ru

The finite-element model of deformation-strength calculation of the spatial load-bearing system of a multi-storey building made of reinforced concrete in monolithic construction is developed. This model is based on hybrid elements, which take into account the dependence of the mechanical properties of concrete on the type of stress state, the presence of cracks in it and the occurrence of plastic deformation of the reinforcement. Some decisions on the basis of the accepted model in comparison with calculations in industrial CAD packages are analyzed.

Keywords: monolithic reinforced concrete, hybrid finite elements, spatial bearing system, sensitivity to the type of stress state, normalized stresses, formation of stresses.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ ЭДАНИЙ И СООРУЖЕНИЙ

УДК 624. 02. 86

ВЫСОКАЯ ИЗМЕНЧИВОСТЬ ДЕФОРМАТИВНЫХ СВОЙСТВ ГРУНТОВ КАК ОСНОВНАЯ ПРИЧИНА ПОВРЕЖДЕНИЙ КАМЕННЫХ ЗДАНИЙ В г. ТАМБОВЕ

А. Б. Даниш¹, В. В. Леденев², Я. В Савинов³, А. Я. Аль-Бухейти⁴
Тамбовский государственный технический университет^{1, 2, 3, 4}
Россия, г. Тамбов

¹Аспирант кафедры конструкций зданий и сооружений

²Д-р техн. наук, проф. кафедры конструкций зданий и сооружений

³Канд. техн. наук, доц. кафедры конструкций зданий и сооружений

Тел.: +7(953)726-36-84; e-mail: abdulbareidanish@gmail.com

⁴Аспирант кафедры конструкций зданий и сооружений

Исследуется влияние изменчивости деформативных свойств грунтов на повреждения каменных зданий гражданского назначения в г. Тамбове. Приводятся результаты инструментальных обследований зданий и анализ причин трещинообразования. Выполнен расчетный анализ влияния изменчивости модуля деформации и просадочных свойств грунтов на повреждения зданий с использованием вычислительных схем МКЭ.

Ключевые слова: здания, основания, осадки, трещины, расчеты, метод конечных элементов

Введение

Неравномерные осадки оснований фундаментов "недопустимые относительные разности осадок фундаментов" возникают вследствие:

- применения фундаментов разных конструкции с резко отличающимися потенциальными деформативными свойствами;
- высокой природной изменчивости модуля деформации грунтов оснований фундаментов в пределах площади фундамента $E_{max}/E_{min} > 1,5$.
- взаимных влияний фундаментов вследствие пристройки к существующему зданию нового;
- просадки - резкого увеличения осадки при локальном замачивании просадочного грунта;
- морозного пучения, набухания или замерзания с увеличением объёма водонасыщенного грунта, склонного к подобным деформациям;
- разрыхления основания при выполнении работ нулевого цикла или при выветривании (подтапливание и промерзание котлована в зимнее время);
- условий изменения эксплуатации (изменения расчетных схем, возникновение динамических нагрузок, снижения технических характеристика грунтов).

Обследование 332-х деформированных гражданских зданий в г. Тамбове в период 2006-2018 гг. [3 - 6, 9] (рис. 1, табл. 1) показало, что подавляющее большинство деформаций вызвано именно проблемами оснований фундаментов, которые не были учтены на стадии проектирования: просадочные свойства грунтов, замачивание оснований фундаментов сезонной верховодкой, высокая изменчивость модуля деформации грунтов, техногенные отложения, пристройки многоэтажных зданий в зоне взаимных влияний, заложение фундаментов

© Даниш А. Б., Леденев В. В., Савинов Я. В., Аль-Бухейти А. Я., 2019

в зоне промерзания. В общей сложности они составляют 64 % от вышеуказанной выборки зданий, что согласуется с общей статистикой по Российской Федерации.

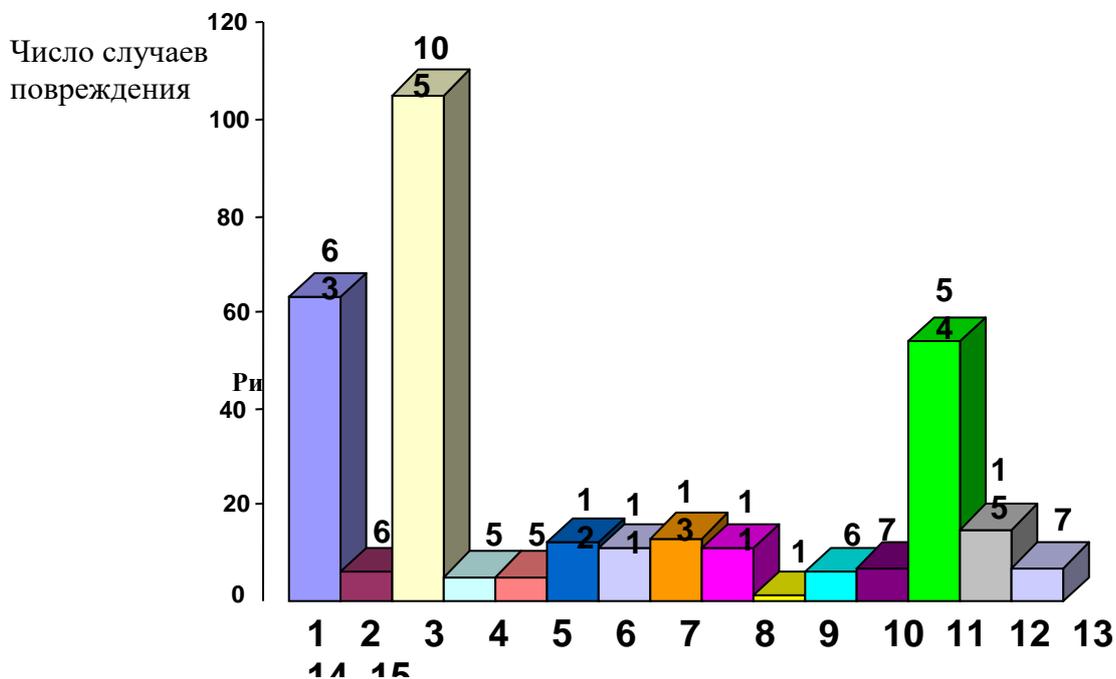


Таблица 1

Классификация причин возникновения повреждений в г. Тамбове

Пп.	Стадия существования здания	Причины возникновения повреждений	Число случаев	%	
1	Проектирование	Просадочные свойства грунтов	63	19,0	
2		Движение верховодки (подтопление территории)	6	1,8	
3		Изменчивость модуля деформации в плане	105	31,6	
4		Наличие техногенных отложений под подошвой фундамента	Частичное использование старых фундаментов	5	1,5
5			Насыпные грунты	11	3,3
6		Надстройка многоэтажных зданий без усиления фундамента	5	1,5	
7		Пристройка многоэтажных зданий без конструктивных мероприятий	12	3,6	
8		Заложение фундаментов в зоне промерзания	11	3,3	
9	Во вз е де ни е	Низкое качество материалов	11	3,3	
10		Низкое качество СМР	13	3,9	

Пп.	Стадия существования здания	Причины возникновения повреждений	Число случаев	%
11		Отступления от проекта	1	0,3
12		Замачивание и (или) промораживание дна котлована в осенне-зимнее время	6	1,8
13	Эксплуатация	Нарушение температурно-влажностного режима эксплуатации	7	2,1
14		Физический износ > 50 %	54	16,3
15		Аварии сетей водоснабжения и канализации	15	4,5
16		Динамические нагрузки	7	2,1
Общее число обследованных зданий в выборке:			332	100

Результаты обследований позволяют сделать вывод о наиболее часто встречающихся причинах повреждений несущих и ограждающих конструкций гражданских зданий, которыми являются неравномерные осадки (просадки) грунтов оснований фундаментов. Значительное влияние оказывают реологические процессы в грунтах [8].

Почти все кирпичные здания в Тамбове имеют высокую чувствительность к неравномерным осадкам. В результате этого на их фасадах имеется сеть трещин с максимальной шириной раскрытия до 10 мм. Эти трещины часто располагаются у оконных перемычек, разделяя наружные стены на вертикальные ряды простенков – «столбы».

Характер деформирования зданий – вертикальный сдвиг «столбов» (рис. 2) относительно друг друга. Интенсивность сдвига определяет плотность, наклон и ширину раскрытия трещин.

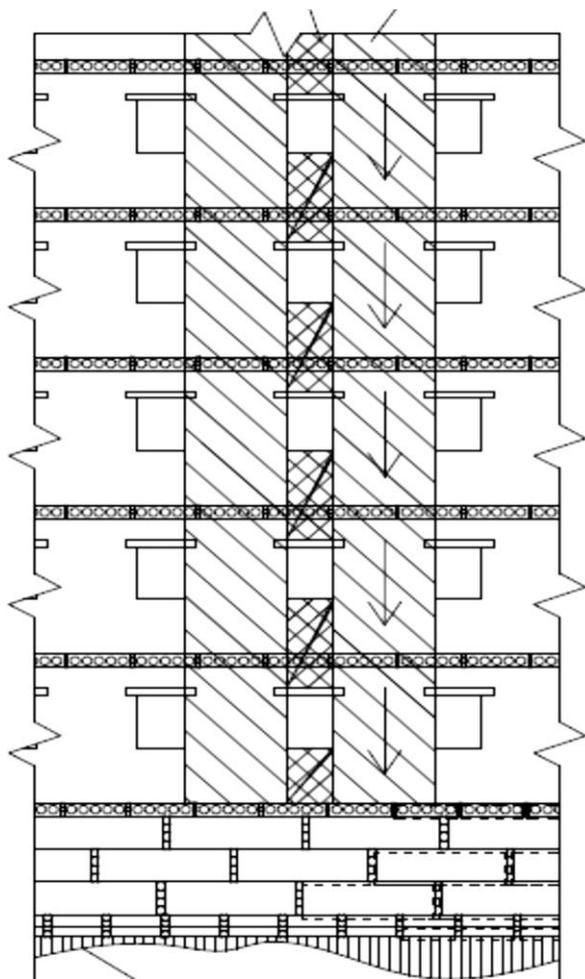


Рис. 2. Наиболее распространенная схема деформирования каменных зданий

Рассмотрим в качестве примера характерный участок – квартал, расположенный в центре города, ограниченный улицами: Советская, Чичканова, К. Маркса и 1-я Полковая. В нашем распоряжении имеются данные исследований московской картографической партии ПНИИС 1988 года [4] для этого участка (рис. 3 а, б), по которым можно анализировать изменчивость деформативных характеристик двух слоев делювиальных суглинков, расположенных на глубинах 1,5...4,5 м (верхний слой) и 4,5...9 м (подстилающий). Эти слои наиболее интересны, т.к. они находятся в пределах сжимаемой толщи 4-5-этажных зданий. На территории данного квартала расположены жилые и общественные здания с различными конструктивными схемами, типами фундаментов и материалом наружных стен. Об-

следования фасадов зданий данного квартала, проведенные в апреле 2019 г, показали, что наиболее деформаций имеют здания с кирпичными наружными стенами на ленточных кирпичных фундаментах.

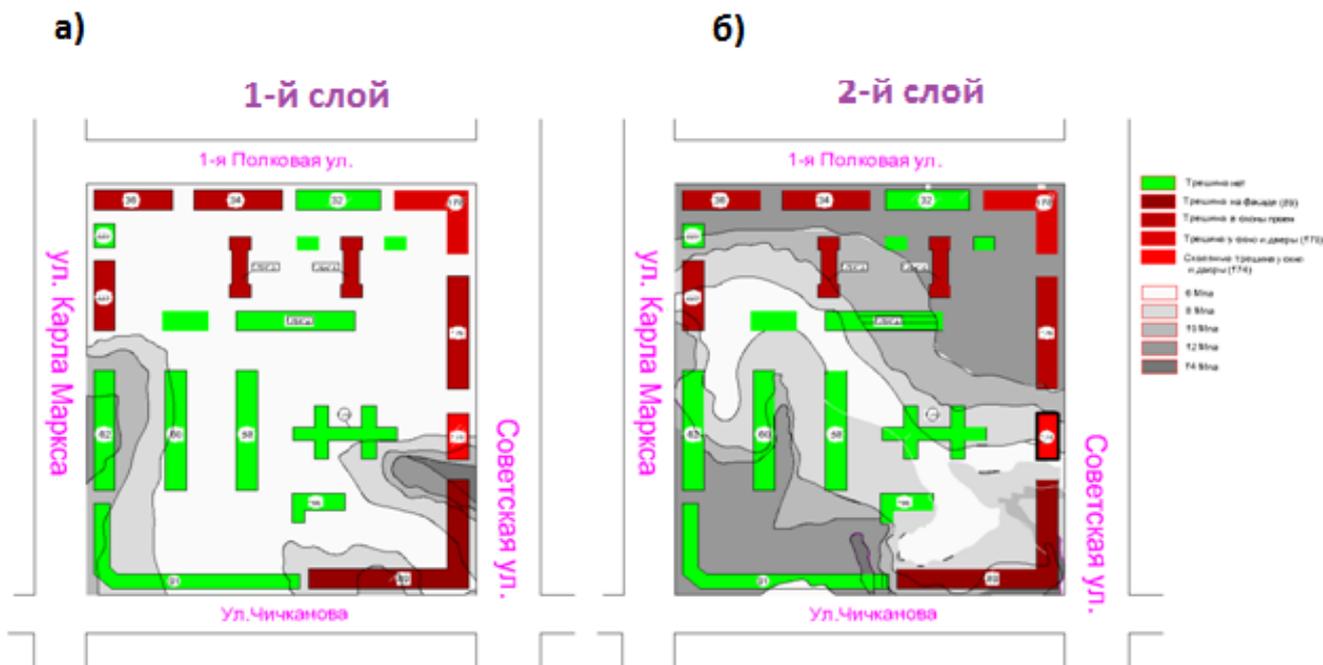


Рис. 3. Схема изменчивости модуля деформации двух слоев сулинков в пределах квартала:
а) первый слой мощностью 3-4 м; б) второй слой сулинков мощностью 2-3,5 м

На рис. 3 цветами выделены зоны по степени поврежденности зданий. Благодаря совмещенной с планом зданий схеме изменчивости модуля деформаций можно сопоставить степень поврежденности зданий с геологическими условиями. В сложных геологических условиях оказались четыре здания: № 174, 89, 91, 62, поскольку в пределах площади их фундаментов модуль деформации верхнего слоя изменяется в пределах 6-12 МПа. Кирпичное здание № 89 имеет свайный фундамент, поэтому повреждения в нем минимальны. Здания № 91 и 62 крупнопанельные, на их фасадах трещины не обнаружены. Здание № 174 кирпичное, оно имеет на фасадах множество трещин с шириной раскрытия более 5 мм (табл. 2). При его строительстве и эксплуатации отмечен ряд неблагоприятных факторов: высокая степень изменчивости модуля деформации и высокая чувствительность материала стен и их конструкций к неравномерным осадкам [2,3 - 6].

Таблица 2

Информация по зданиям исследуемого квартала

Номер дома	Материал стен	Тип фундамента	Конструктивная схема	Этажность/год строительства	Степень изменчивости модуля деформации первого слоя (второго слоя) $\sigma = E_{max}/E_{min}$	Ширина раскрытия трещин, мм
174	Кирпич	Ленточный	Несущие продольные стены (сталинка).	4/1958	1,67 (1,67)	Более 5
89	Кирпич	Свайный		9/1985	2,3 (1,67)	3-5 одна трещина
91	Крупные панели	Ленточный сборный ж/б на подушках	Несущие внутренние стены, наружные панели навесные.	5/1980-85	1,67 (1,4)	0
62				5/1980-85	1,16 (1,5)	0

Номер дома	Материал стен	Тип фундамента	Конструктивная схема	Этажность/год строительства	Степень изменчивости модуля деформации первого слоя (второго слоя) $\sigma = E_{max}/E_{min}$	Ширина раскрытия трещин, мм
176	Кирпич керамический	Ленточный из керамическо-го кирпича	Несущие продольные стены (сталинка)	4/1950-60	1 (1)	1-3
176 к1				4/1950-60	1 (1)	1-3
176 к2				4/1950-60	1 (2,3)	0
176 к3				4/1950-60	1 (1)	1-3
32		Ленточный из сборных бетонных блоков ФБС	Несущие продольные стены	4/1980-90	1 (1)	0
34				4/1980-90	1 (1)	1-3
36				4/1980-90	1 (1)	1-3
58	Крупные панели	Ленточный сборный ж/б на подушках	Несущие внутренние стены, наружные панели навесные.	5/1980-85	1 (1,33)	0
60				5/1980-85	1 (1,4)	0
223	Кирпич керамический		Несущие продольные стены	5/1990	1 (1,25)	0
225				5/1990	1 (1,33)	1-3

Рассмотрим подробнее жилое четырехэтажное здание по ул. Советской, 174 с деревянными перекрытиями, построенное в 1958 г. (рис. 4). По свидетельствам жильцов, здание начало деформироваться сразу после постройки. На фасадах обнаружены вертикальные и наклонные трещины, раскрывающиеся вверх. Они веерообразно распределены по фасадам. Наблюдения показали, что они продолжают расти со скоростью 0,3 мм/год. С точки зрения геологической стратиграфии, здание расположено на первой надпойменной террасе правого склона долины реки Цны. Здесь располагается центральная историческая часть Тамбова. Под культурным слоем и черноземом, достигающими в общей сложности глубины до двух метров, располагаются делювиальные (склоновые) суглинки, в которых иногда встречаются линзы мелких песков.

а)



Рис. 4 (начало). Схема трещин на главном фасаде дома по ул. Советской:
а) фото главного фасада с повреждениями; б) схема деформирования главного фасада

б)

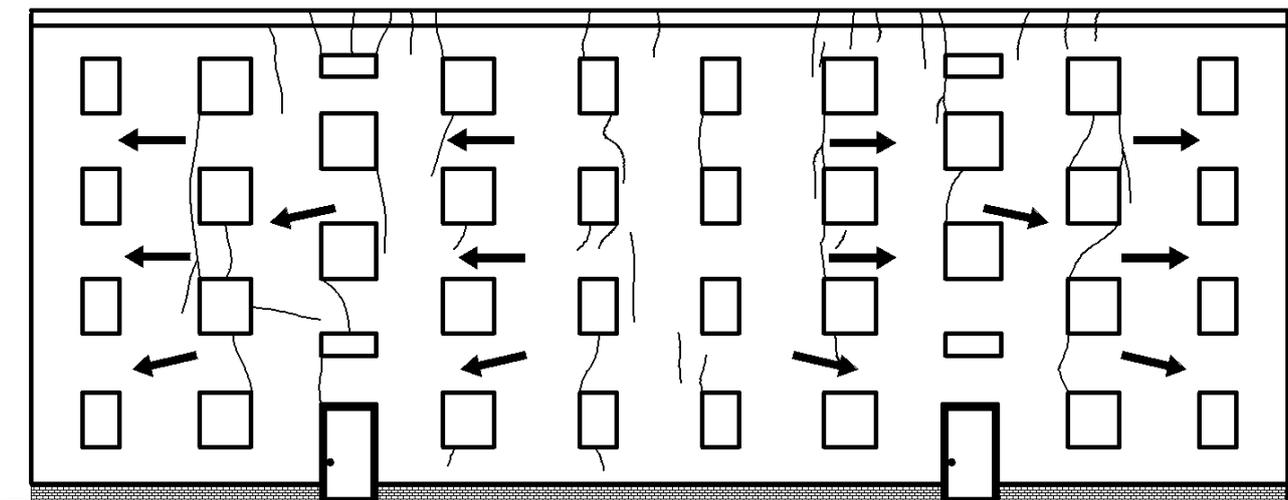


Рис. 4 (окончание). Схема трещин на главном фасаде дома по ул. Советской:
а) фото главного фасада с повреждениями; б) схема деформирования главного фасада

Фундаменты и наружные стены выполнены из керамического кирпича, имеют толщину 510 мм. В пределах плана здания модуль деформации первого слоя суглинков изменяется от 6 до 14 МПа, второго - 6 до 12 МПа. В исследованиях московской картографической партии ПНИИИС показано, что на отдельных участках города площадью 100 м² (в пределах одного здания) степень изменчивости колеблется в пределах $\sigma = E_{max}/E_{min} = 1,5 \dots 3$ (рис. 5).

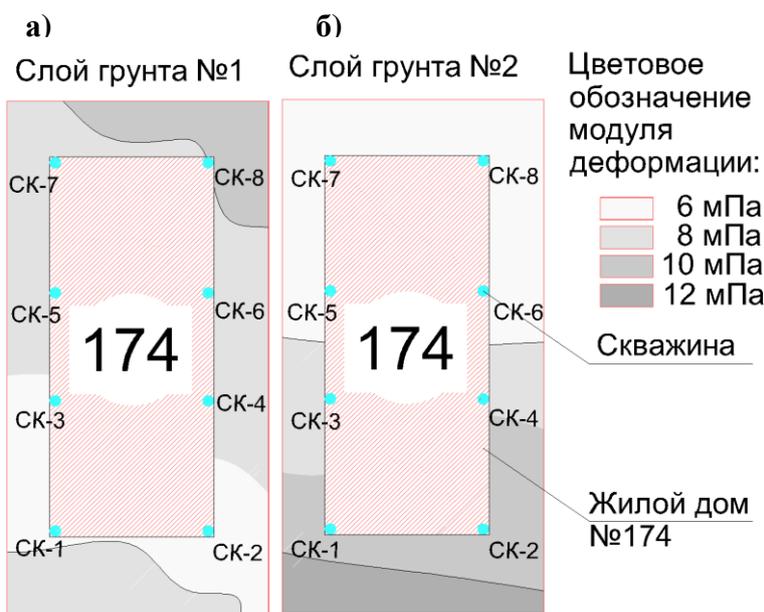


Рис. 5. Распределение модуля деформации для 1-го и 2-го слоя грунта по ул. Советская, 174:
а) план-схема распределения модуля деформации (МПа) 1-го от поверхности слоя суглинков с указанием положения поврежденного здания;
б) 2-го слоя;

Для данного здания проведены расчеты в программном комплексе «СКАД» методом конечных элементов, где несущие и ограждающие конструкции представлены в виде пластины с толщинами, жесткостями и весом соответствующими реальным конструкциям [2, 7]. Расчет строительных конструкций проводился с учетом строительных правил СП 63.13330.2012, расчет комбинаций нагрузок - по нормам СНиП-2.01.07-85*. Расчеты конструкций здания, проведенные для сочетаний собственного веса, постоянных и временных нагрузок, показали суммарную нагрузку под подошвой фундамента 572,8 кН/м². Коэффициенты постели С1 рассчитывали отдельно в программе «Cross», входящей в состав комплекса СКАД (рис. 6).

Коэффициенты постели С1 рассчитывали отдельно в программе «Cross», входящей в со-

став комплекса СКАД (рис. 6). Грунтовые условия вводили в программу в соответствии со схемой распределения модуля деформаций по слоям (рис. 5, а, б) через восемь скважин.

Результаты расчета (Cross)

Минимальное значение коэффициента постели $2444,23 \text{ кН/м}^3$ (рис. 6).

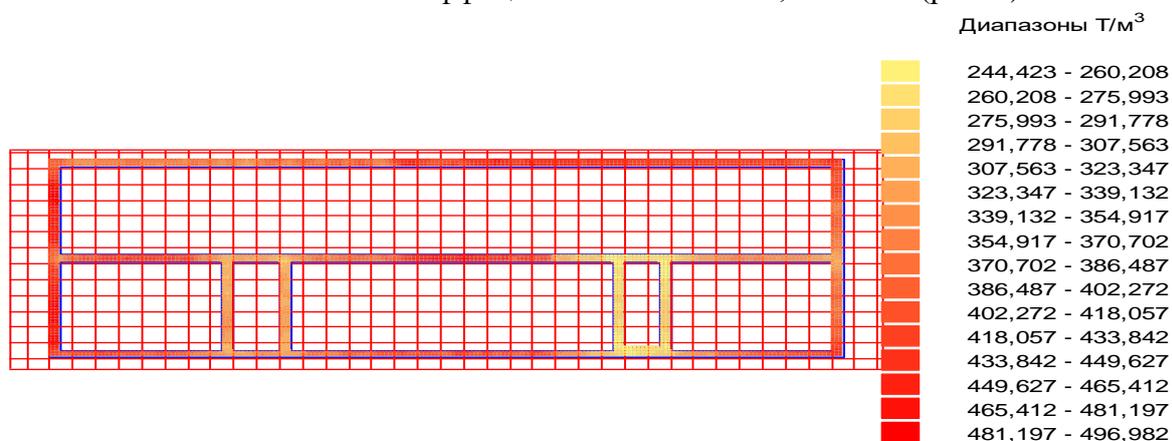


Рис. 6. Распределение коэффициентов постели C_1 под подошвой фундамента

Максимальное значение коэффициента постели - $4969,82 \text{ кН/м}^3$.

Среднее значение коэффициента постели - $3742,02 \text{ кН/м}^3$.

Нижняя отметка сжимаемой толщи в данной точке - 10,55 м.

Толщина сжимаемой слоя в данной точке - 8,75 м.

Средняя осадка - 15,742 см.

Крен фундаментной плиты - 0,094 град.

Суммарная нагрузка - 42458,8 кН.

Коэффициенты постели, вычисленные в программе «Cross», были импортированы в построенную нами расчетную схему в «СКАДе». Далее была проведена вторая итерация, в результате которой получены картины напряженно-деформированного состояния исследуемого здания (рис. 7, 8, 9).

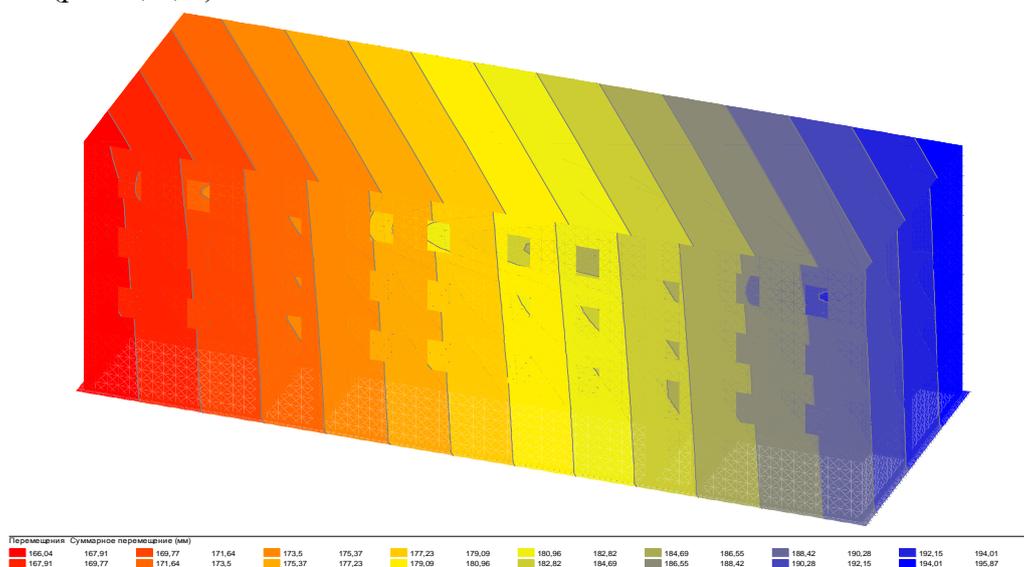


Рис. 7. Суммарные перемещения (мм)

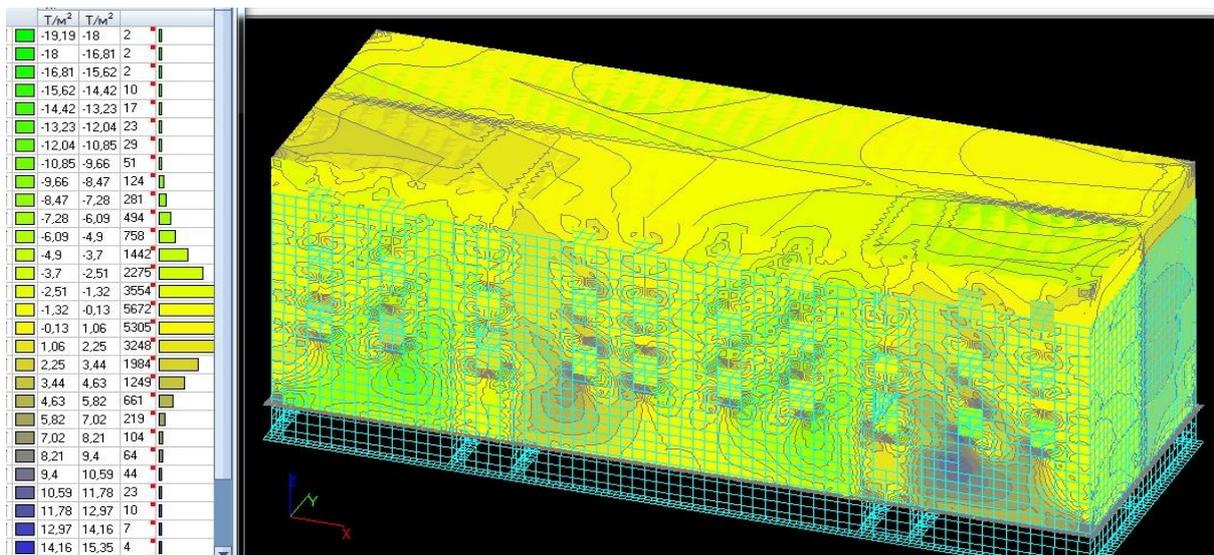


Рис. 8. Поля напряжений σ_{xy} (т/м²)

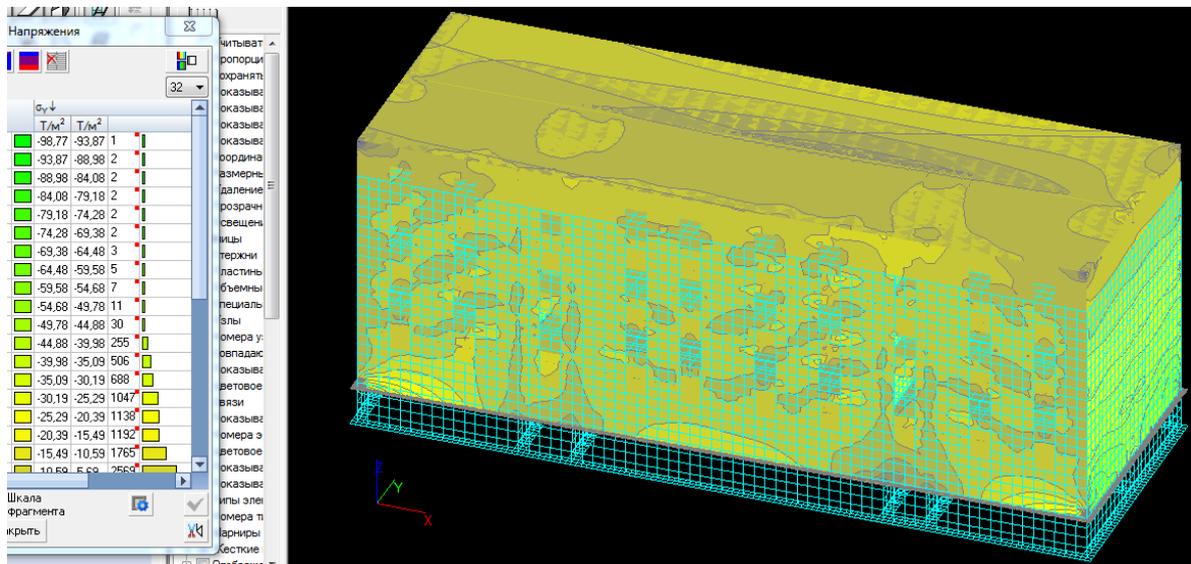


Рис. 9. Поля напряжений σ_y (т/м²)

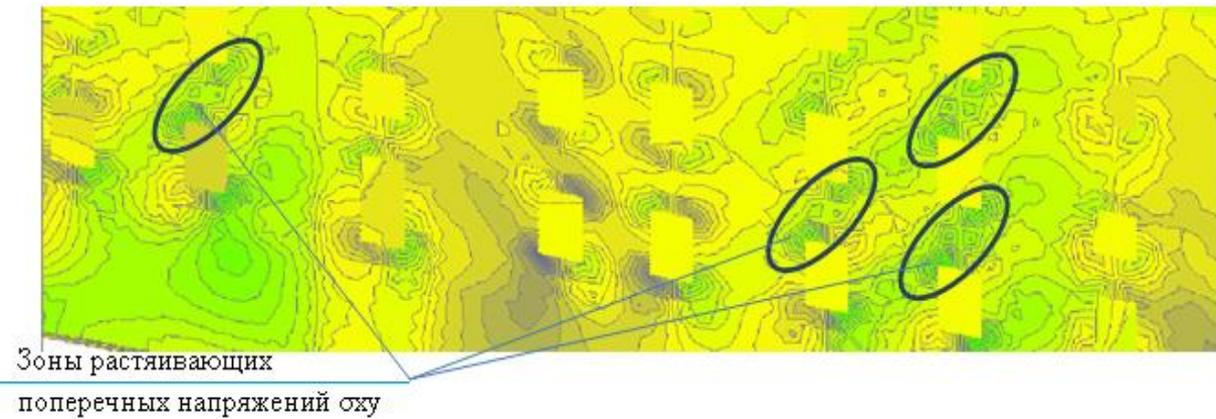


Рис. 10. Поля напряжений σ_{xy}

Анализ результатов расчета. На рис. 7 выявлен перекос здания. Наибольшая осадка наблюдается в правом дальнем углу фундамента, а наименьшая - в левом ближнем углу. Оконные и дверные проемы являются концентраторами напряжений в несущих и самонесущих стенах. Наибольших значений напряжения достигают в углах проемов (рис. 10).

Если по одной диагонали окна (рис. 10) наблюдаем концентрацию растягивающих напряжений σ_y , σ_{xy} – зона начала роста трещин (см. рис. 4 а, б), то по другой диагонали – наоборот, сжатие. Поскольку каменная кладка лучше работает на сжатие, чем на растяжение, в зоне сжатия разрушений не наблюдаем. Далее при росте неравномерных осадок происходит объединение зон концентраций растягивающих напряжений, соответственно соединяются диагональные трещины в простенках между окнами смежных этажей. Оконные и дверные проемы разгружают части несущих стен, находящиеся под ними от вертикальных сжимающих напряжений N_x (рис. 11). По этой причине вертикальные сжимающие напряжения смещаются в зону вертикальных межоконных простенков, междуоконные простенки образуют «столбы», слабо соединенные между собой горизонтальными не нагруженными подоконными простенками.

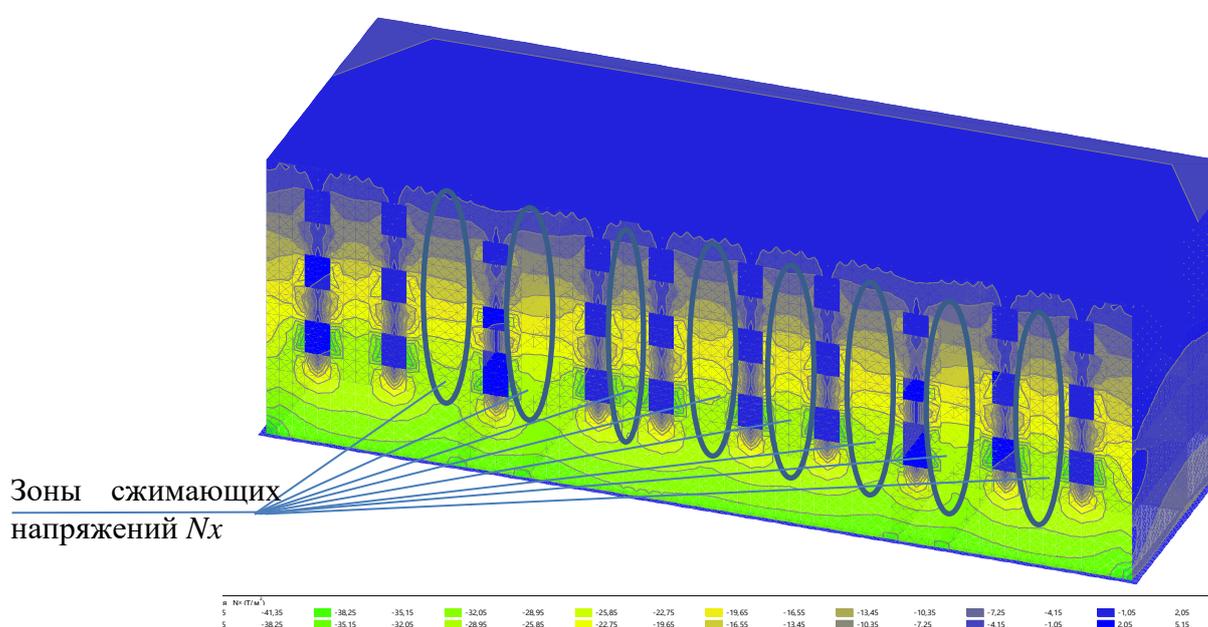


Рис. 11. Поля сжимающих напряжений N_x (т/м²)

Выводы

1. Обследования фасадов зданий квартала (см. рис. 3) показали, что повреждения наружных стен наблюдаются только в кирпичных зданиях.
2. Кирпичные здания на ленточных фундаментах наиболее чувствительны к изменчивости модуля деформаций.
3. Большинство трещин растут из углов оконных и дверных проемов, т. к. там сосредотачиваются концентрации растягивающих напряжений.
4. Результаты расчета в программном комплексе «СКАД» подтвердили гипотезу о разделении стен на ряд вертикальных «столбов», работающих независимо друг от друга.

Библиографический список

1. Гарагаш, Б.А. Аварии и повреждения системы «здание - основание» и регулирование надежности ее элементов: монография / Б.А. Гарагаш. – Волгоград : ВолГАСУ, 2000. – 378 с.
2. Кузнецов, И.Н. Влияние локального изменения характеристик грунтового основания на напряженно-деформированное состояние кирпичных жилых зданий / И.Н. Кузнецов // Строительная механика и конструкции. Воронеж, 2011. – №1 (2) – С. 52-56.
3. Леденев В.В. Предупреждение аварий; учеб. пособие/ В.В. Леденев, В.И. Скрылев. – М.: АСВ, 2002.- 240 с.
4. Леденёв В.В. Прочность и трещиностойкость стен: монография / В.В. Леденёв. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 224 с.
5. Отчет лаборатории ПНИИС Госстроя РСФСР НПО «Стройизыскания». Тамбов, – 1988. – 35 с.
6. Савинов, Я.В. Основные причины повреждения несущих стеновых конструкций и рекомендации по их предотвращению на примере г. Тамбова: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Я.В. Савинов. – Воронеж: ВГАСУ, 2003. – 235 с.
7. Влияние деформационных характеристик песчаной засыпки на напряженно-деформированное состояние грунтозасыпных мостов / В.С. Сафронов, В.В. Зазвонов // Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2010, – Вып.№1 – С. 16 –21.
8. Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения: издание ; под общ. ред. В.А. Цльгево, Р.А. Мангушева. – 2-е изд., доп. и перераб. - М.: АСВ, 2016. – 1040 с.
9. СП 13-102-2003 Правила обследования несущих строительных конструкций зданий и сооружений. – М.: Госстрой РФ ГУ ЦПП,0 2003.– 28 с.

References

1. Garagazh B.A. Failure and system damage "building foundation" and the regulation of the reliability of its elements: monograph. Volgograd: VolgSTU, 2000. 378 p.
2. Kuznetsov E.N. The impact of local changes in the characteristics of the soil base on the stress-strain state of brick residential buildings. Construction mechanics and construction. Voronezh, No. 1(2). Pp. 52-56.
3. Ledenev V.V., Screlev V.E. Failure prevention; tutorial. M.: ASV, 2002. 240 p.
4. Ledenev V.V. Strength and crack resistance of walls: monograph. Tambov: FGBOU VPO "TSTU", 2015. 224 p.
5. Laboratory report PNIIS Gosstroy RSFSR NPO" Stroyeziskanya". Tambov. 1988. 3 p.
6. Savinov Y.V. The main causes of damage bearing structures and recommendations for their prevention on the example of the city of Tambov, PhD Dissertation: 05.23.01 Voronezh: VGACU, 2003. 235 p.
7. Safronov V.S., Zazvonov V.V. The effect of the deformation characteristics of the sand backfill on the stress-strain state of soil-filling bridges. Structural mechanics and constructions. Voronezh, 2010. No. 1. Pp. 16 –21.
8. Tslgevo V.A., Mangusheva R.A. Book of reference of geotechnology. Grounds foundations and underground structures: second edition. M.: ASV, 2016. 1040 p.
9. Set of rules 13-102-2003 Inspection rules for bearing building structures buildings and structures. Gosstroy RF GU TsPP. 2003. 28 p.

HIGH VARIABILITY OF DEFORMATION PROPERTIES OF SOILS AS THE MAIN CAUSE OF DAMAGE OF STONE BUILDINGS IN CITY OF TAMBOV

A.B. Danish¹, V.V. Ledenev², Y.V. Savinov³, A.Y. Al-Bukhaiti⁴

Tambov State Technical University^{1,2,3,4}
Russia, Tambov

¹ Postgraduate Student of the Department of Constructions of Buildings and Structures

² Dr. of Techn. Sciences, Prof. of the Department of Constructions of Buildings and Structures

³ PhD in Techn. Sciences, Associate professor of Department of Constructions of Buildings and Structures
tel. :+7(953)726-36-84; e-mail: abdulbareidanish@gmail.com

⁴ Postgraduate Student of the Department of Constructions of Buildings and Structures

The influence of the variability of the deformation properties of soils on damage to civilian buildings in the city of Tambov is studied. The results of instrumental inspections of buildings and analysis of the causes of crack formation are given. The calculated analysis of the effect of variability of the strain modulus and subsidence properties of soils on damage to buildings using FEM computational schemes was performed.

Keywords: buildings, bases, sediments, cracks, calculations, finite element method

ПОВРЕЖДЕНИЯ СТЕН БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ ЗДАНИЙ ВСЛЕДСТВИЕ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ИХ ФУНДАМЕНТОВ

А. Б. Даниш¹, В. В. Леденев², Я. В. Савинов³, А. Я. Аль-Бухейти⁴

Тамбовский государственный технический университет^{1, 2, 3, 4}
Россия, Тамбов

¹ Аспирант кафедры конструкций зданий и сооружений

² Д-р техн. наук, проф. кафедры конструкций зданий и сооружений

³ Канд. техн. наук, доц. кафедры конструкций зданий и сооружений
тел.: 8(953)726-36-84; e-mail: abdulbareidanish@gmail.com

⁴ Аспирант кафедры конструкций зданий и сооружений

Приведены результаты технического обследования зданий с повреждениями, вызванными пристройкой новых зданий рядом с существующими в Кабуле (Афганистан), Тамбове, Курске и Воронеже. Методом конечных элементов (МКЭ) выполнены расчеты напряженно-деформированного состояния основания.

Ключевые слова: здание, сооружение, взаимное влияние, повреждения, метод конечных элементов, расчет, техническое обследование.

Введение

По действующим нормам [9] взаимное влияние соседних зданий, сооружений, фундаментов оценивают с использованием метода угловых точек (Д.Е. Польшина, 1993). Метод совершенствовали В. Г. Короткин, 1938; Н. А. Цытович, 1940 и др.

Относительная разность осадок близко расположенных объектов ограничивается предельно допустимыми величинами. Однако точность вычисления их недостаточна, поскольку, как правило, не удается вычислить жесткости зданий, сооружений, конструкций, узлов сооружения. В процессе эксплуатации объектов неравномерно по объёму и с разными скоростями изменяются механические, реологические и жесткостные характеристики материалов и грунтов оснований [9].

Отметим, что недопустимые неравномерные перемещения происходят и между отдельными частями здания или сооружения вследствие: разных конструктивных решений (например, фундаментов плитные и свайных); большой разности в нагрузках, жесткостях, размерах; несовпадения центров масс и жесткостей; неравномерного развития процессов (просадки, набухания, оползневых и др.) [3-5, 7, 9].

Особенности повреждения существующих зданий после пристройки новых рассмотрены в работах Б. И. Далматова (1975); С. Н. Сотникова (1984), Я. В. Савинова (2003), В. В. Леденева (1970...2008), В. Г. Силагина (2010) и др. Приведем примеры из практики.

1. Обследование технического состояния деформированного здания в г. Кабуле (Афганистан) по ул. Таймони, 5 [8]. По проекту А. Б. Даниша построено семиэтажное железобетонное здание. Фундамент изготовлен в виде монолитной железобетонной плиты толщиной 600 мм и глубина заложения 1,5 м (рис. 1). Рядом находится одноэтажное кирпичное здание, построенное в 90-х годах прошлого века. Фундаменты бутобетонные, стены кирпичные.

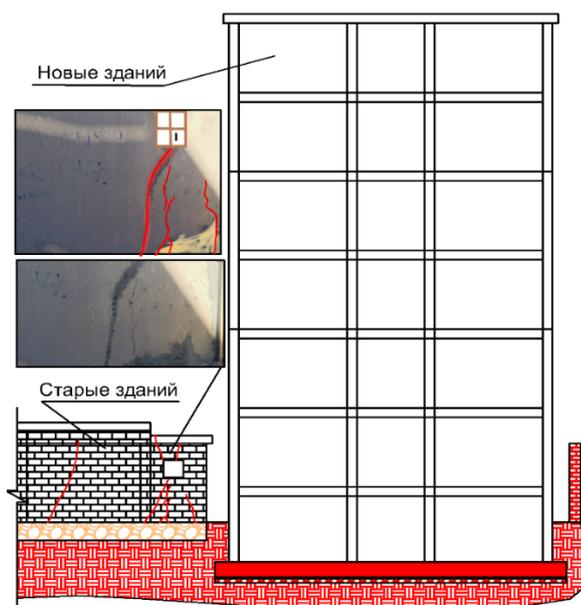


Рис. 1. Схема расположения здания

Вскоре после возведения семиэтажного здания, в наружной стене существующего со стороны фасада появились сквозные трещины по всей высоте с шириной раскрытия от 5 до 20мм (рис. 1). Ширина раскрытия наклонных, вертикальных и горизонтальных трещин возрастала с приближением к новому зданию.

Техническое обследование зданий показало:

- глубина заложения бутовых фундаментов существующего здания составляла 0,8 м, что соответствовало нормативной глубине промерзания. Расстояние между фундаментами существующий и нового здания составляло 0,8 м.
- трещины в новом здании не обнаружены;
- до обратной засыпки пазух траншей фундаментов нового здания прошло несколько дождей; вследствие этого влажность грунта под примыкающей торцевой стеной существующего здания резко возросла со снижением механических свойств грунтов основания и несущей способности основания;
- причиной появления сквозных трещины в стенах существующего здания явилось влияния вновь построенного: напряженная зона распространилась под фундаментами существующего здания, с увеличением напряжения от действующей нагрузки; увлажнение грунтов основания дождевыми водами усугубила ситуацию;
- стены старого здания необходимо усилить, например, напрягаемыми стальными поясами с установкой стальных уголков по углам здания.

Для изучения взаимного влияния зданий МКЭ выполнены расчеты по программе PLAXIS [10] при следующих характеристиках грунтов основания и фундаментов [1,2,4,6]:

- грунты основания – мелкозернистой песок ненарушенной структуры мощностью 15 м:
 удельный вес песка $\rho = 17 \text{ кН/м}^2$;
 удельное сцепление $c = 10 \text{ кПа}$;
 угол внутреннего трения $\varphi = 31^\circ$;
 степень влажности $Sr = 0,30$;
 модуль деформации грунта $E = 1700 \text{ кПа}$.

- Материалы фундаментов и стен приведены в табл. 1.

Таблица 1

Жесткостные характеристика конструкций

Наименование объекта	Жесткости		Коэффициент Пуассона ν
	на сжатие EA, кН/м	изгибные EI, кН м ² /м	
Настенные молдинги	7,5*10 ⁷	1*10 ⁶	0.2
Существующие фундаменты	5*10 ¹⁰	8500	0.2

Результаты расчетов приведены на рис. 2-11

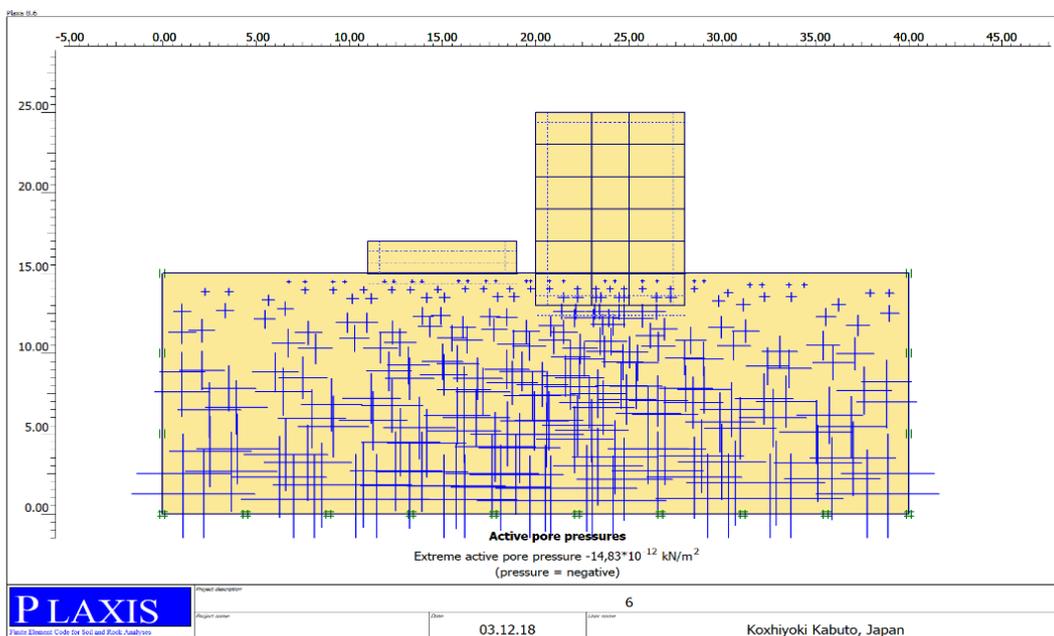


Рис. 2. Активное поровое напряжение (кН/м²)

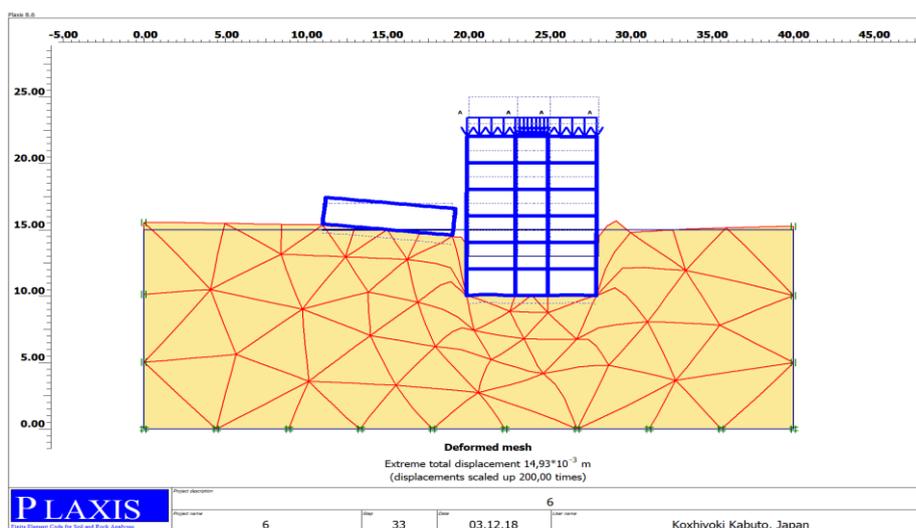


Рис. 3. Деформации сетки

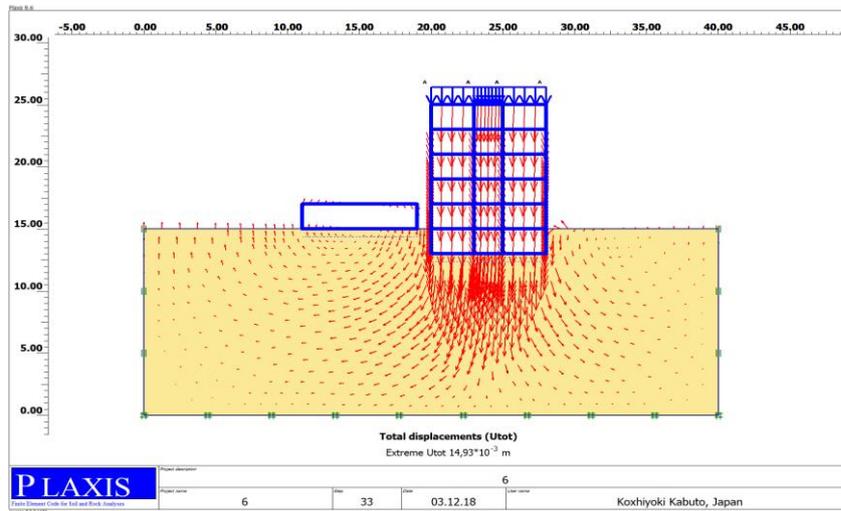


Рис. 4. Полные перемещения

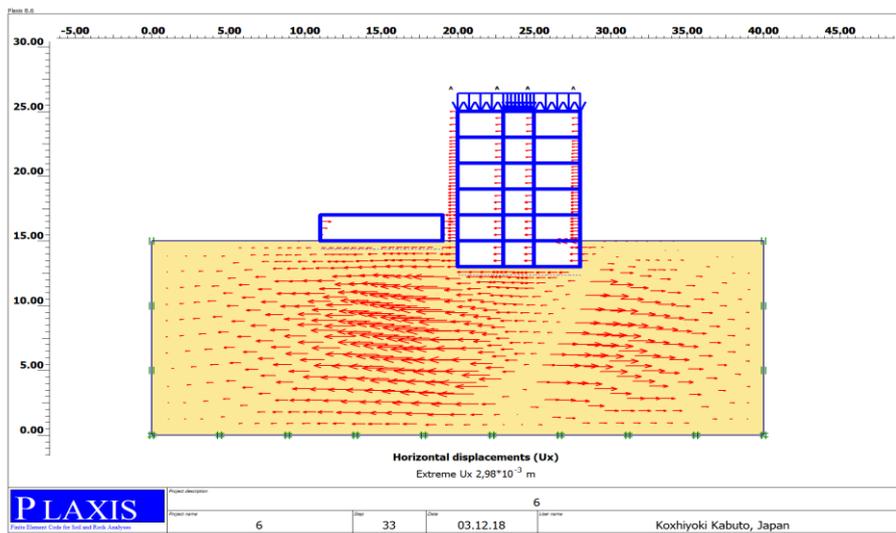


Рис. 5. Горизонтальные перемещения

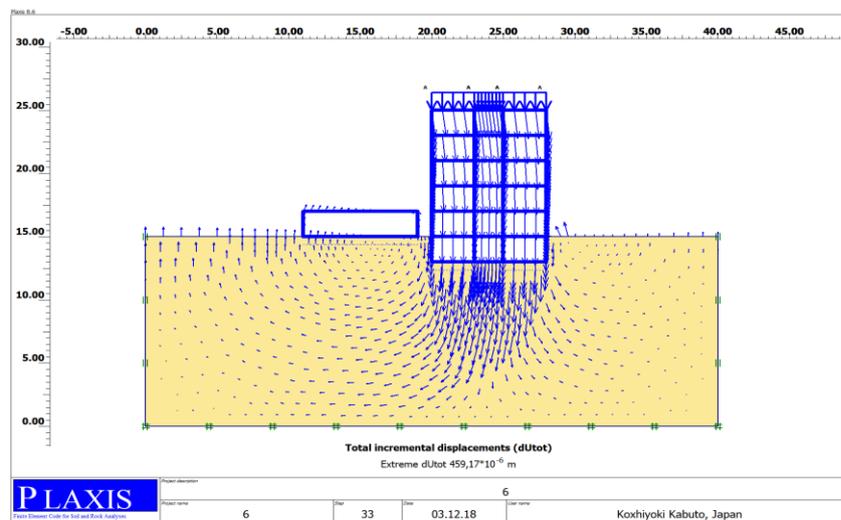


Рис. 6. Полные дополнительные перемещения

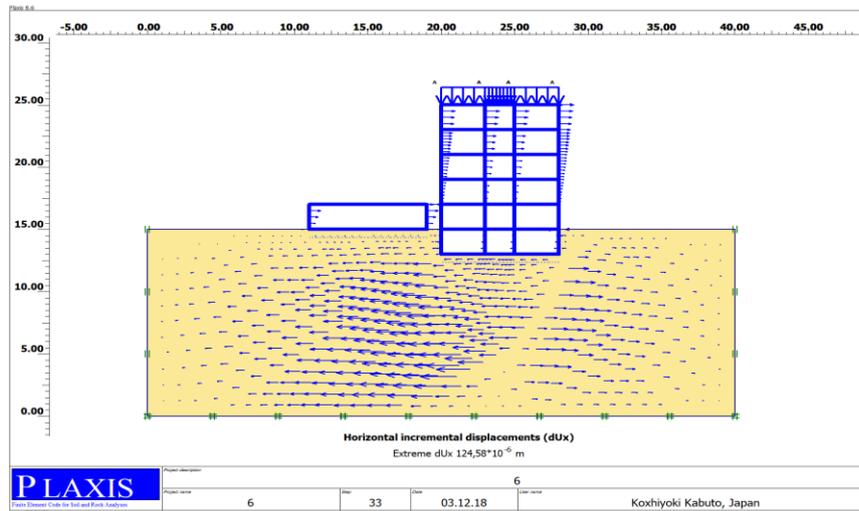


Рис. 7. Горизонтальные дополнительные перемещения

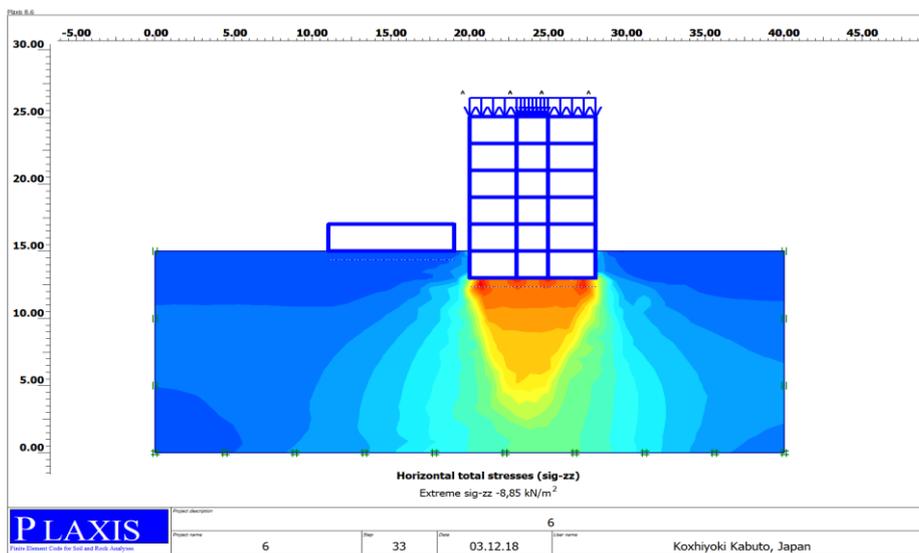


Рис. 8. Горизонтальные полные напряжения

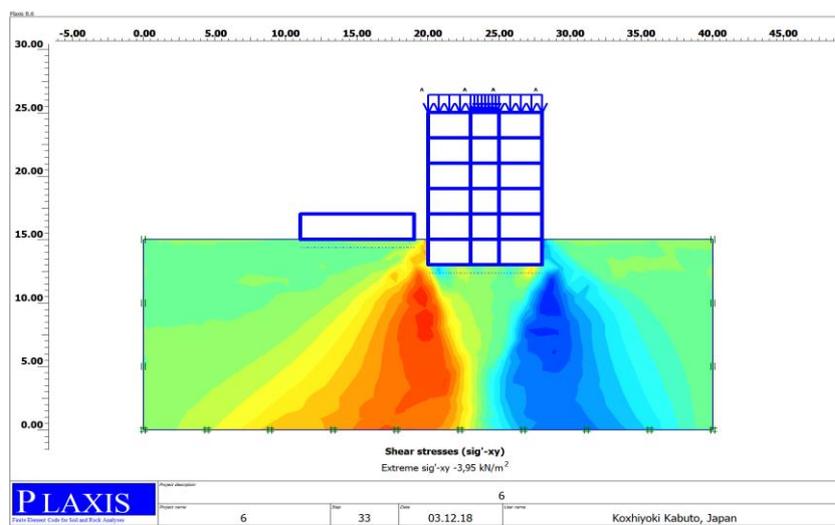


Рис. 9. Сдвиговые напряжения

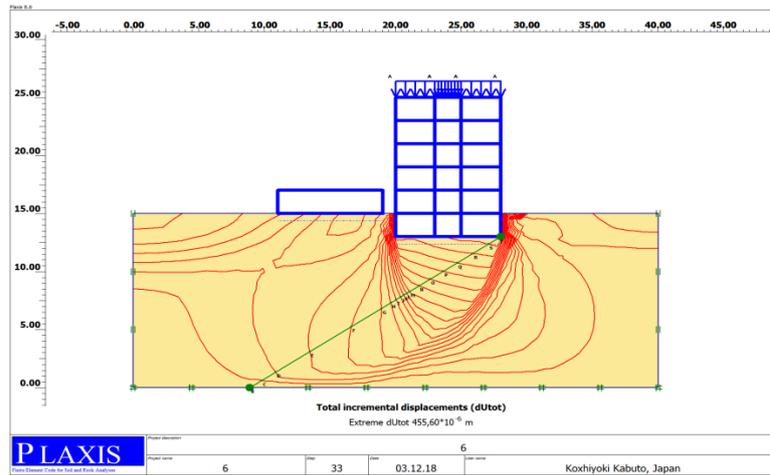


Рис. 10. Полные дополнительные перемещения

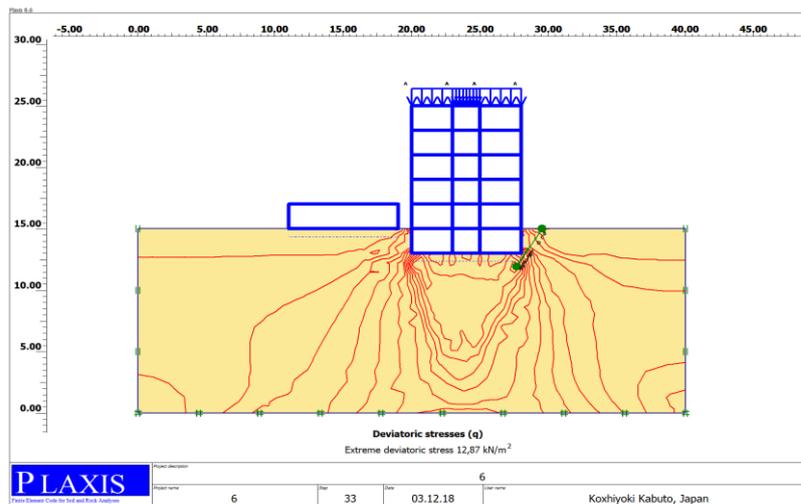


Рис. 11. Девиаторное напряжение

2. Элеватор Курского пивоваренного завода [4]. Он состоит из: рабочей башни на свайном фундаменте из забивных свай; двухэтажного административного кирпичного здания на ленточном фундаменте из сборных блоков; двух одноэтажных встроенных кирпичных зданий на ленточных фундаментах (переходные галереи); трех силосных корпусов размером в плане 36×24 м, построенных на плитах толщиной 1 м.

Осадочные швы между соседними зданиями выполнили с грубыми ошибками, что не допускало независимые перемещения примыкающих стен (рис. 12).

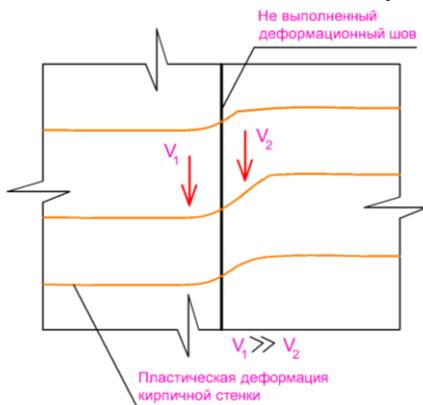


Рис. 12. Пластическая деформация кирпичных стен силосного корпуса и переходной галереи в районе осадного шва

По результатам наблюдений осадки силосных корпусов были примерно одинаковыми и в среднем равнялись 24 см. Осадки ленточных фундаментов по расчетам в среднем равнялись 2 см. Относительные раз-

ности осадок соседних зданий значительно превысили предельно допустимые. Полы в переходных галереях выпучились до 25 см.

Стены в галереях и административном здании разделились сквозными трещинами на отдельные куски, и укреплять их бессмысленно.

3. Здание бывшего приборостроительного техникума в г. Тамбове. Здание кирпичное четырехэтажное с подвалом. Через 5 лет рядом, с торца было построено здание общежития (кирпичное девятиэтажное с подвалом). Здание техникума оказалось в зоне влияния более тяжелого здания общежития. В нем возникли многочисленные косые сквозные трещины, проходящие через сечения с меньшей жесткостью - проемы. Произошел наклон части техникума в сторону общежития. Вверху стены техникума произошло смятие кладки (рис.13).

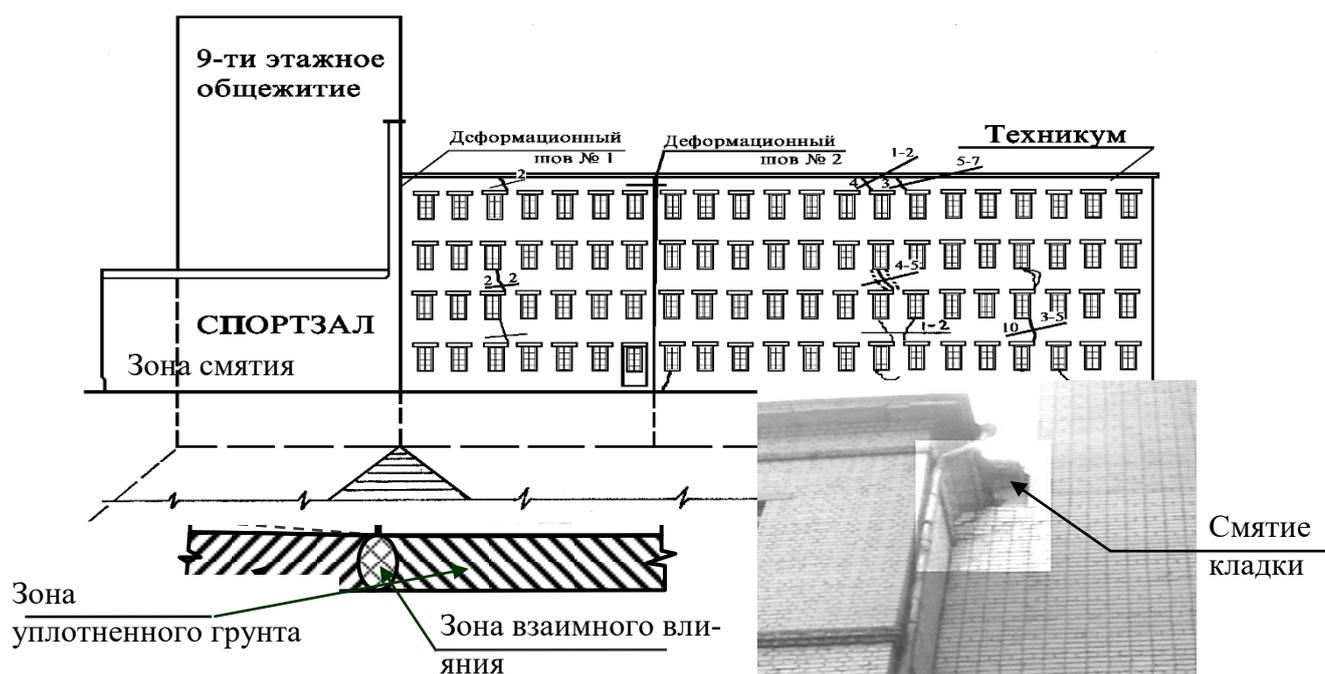


Рис. 13. Здание бывшего приборостроительного техникума в г. Тамбове

В практике выявлено много случаев повреждений рядом расположенных зданий. Б.И. Долматовым, С.Н. Сотниковым [7] и другими разработаны конструктивные рекомендации и методы расчета взаимного влияния. Основой их являлись решения Д.Е. Польшина (1933) об использовании метода угловых точек для учета влияния напряженных зон.

Однако эта проблема является чрезвычайно важной и актуальной. Прогнозирование последствий с достаточной достоверностью трудно осуществимо. Объясняется это сложностью взаимодействующих систем (грунта, здания, их сочетания), отсутствием надежных моделей, принятых в расчетах упрощенных характеристик, изменением во времени условий эксплуатации и др.

Приведенные расчетные диаграммы [рис. 2-12] подчеркивают сложные картины напряжений и деформаций в основаниях зданий. Дальнейшее изучение особенностей взаимного влияния близко расположенных зданий позволит снизить повреждения конструкций, повысить их эксплуатационные качества.

Библиографический список

1. Аверин, А.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния конечноэлементных моделей балки-стенки с прямоугольным вырезом / А.Н. Аверин, Е.А. Шевченко // Строительная механика и конструкции. – Воронеж. – N2(7). – 2011.– С.32–43.
2. Кузнецов, И.Н. Влияние локального изменения характеристик грунтового основания на напряженно-деформированное состояние кирпичных жилых зданий / И.Н. Кузнецов // Строительная механика и конструкции. – Воронеж.– N1(2). –2011.– С.52–56.
3. Леденев, В.В. Прочность и трещиностойкость стен: монография / В.В. Леденев. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2015. – 224 с.
4. Леденев, В.В. Предупреждение аварий: учебное пособие с грифом Министерства образования РФ / В.В. Леденев, В.И. Скрылев. – Тамбов: ТГТУ, 2002. – 240 с.
5. Савинов, Я.В. Основные причины повреждения несущих стеновых конструкций и рекомендации по их предотвращению на примере г. Тамбова.– диссертация, канд. техн. наук: 05.23.01 / Я.В. Савинов.– Воронеж: ВГАСУ, 2003.– 215 с.
6. Сафронов, В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку / В.С. Сафронов.– Воронеж: изд-во ВГУ, 1982.– 162 с.
7. Силагин, В.Г. Проектирование и устройство фундаментов вблизи существующих сооружений в условиях плотной застройки. – М.: Изд-во АСВ, 2010.– 128 с.
8. СП-102-2003. Правила обследования несущих строительных конструкций зданий и сооружений. Госстрой РФ ГУ ЦПП.–2003.–28 с.
9. Справочник геотехника. Основания, фундаменты и подземные сооружения / Под общей ред. В.А. Ильичева и Р.А. Мангушева.– М.: АСВ, 2016.– 1040с.
10. Конечно-элементное моделирование, численный метод в программном комплексе PLAXIS 2D (1993), основано на разработках Питера Вермеера, Разработчик PLAXIS BV, 2016.

References

1. Averin A.N., Shevchenko E.A. Analysis of the stress-strain state of finite element models of a beam-wall with a rectangular cutout. Structural mechanics and structure. Voronezh: No. 2(7). 2011. Pp. 32–43.
2. Kuznetsov E.N. The impact of local changes in the characteristics of the soil base on the stress-strain state of brick residential buildings. Construction mechanics and construction. Voronezh: No. 1(2). Pp. 52-56.
3. Ledenev V.V. Strength and crack resistance of walls: monograph. Tambov: FGBOU VPO “TSTU”, 2015. 224 p.
4. Ledenev V.V., Screlev V.E. Failure prevention; tutorial M.: ASV, 2002. 240 p.
5. Savinov Y.V. The main causes of damage bearing structures and recommendations for their prevention on the example of the city of Tambov, PhD Dissertaion: 05.23.01. Voronezh: VGACU, 2003. 235 p.
6. Safronov V.S. Calculation of suspension and cable-stayed bridges on the moving load. Voronezh: VSU, 1982. 162 p.
7. Silagin V.G. Design and installation of foundations near existing structures in dense building conditions. M.: ASV, 2010. 128 p.
8. Set of rules 102-2003 Inspection rules for bearing building structures buildings and structures. Gosstroy RF GU TsPP. 2003. 28 p.
9. Tslgevo V.A., Mangusheva R.A. Book of reference of geotechnology. Grounds foundations and underground structures: second edition. M.: ASV, 2016. 1040 p.

9. Finite element modeling, numerical method in the Plaxis 2D software package (1993).
Based on the development of Peter Vermeer, Developer PIAXIS BV, 2016.

DAMAGE OF WALL CLOSE LOCATED BUILDINGS BECAUSE OF THEIR MUTUAL IMPACT

A. B. Danish¹, V. V. Ledenev², Y. V. Savinov³, A. Y. Al-Bukhaiti⁴

Tambov State Technical University^{1, 2, 3, 4}
Russia, Tambov

¹ Post-graduate Student of the Department of Construction of Buildings and Structures

² PhD in Techn. Sciences, Prof. of the Department of Construction of Buildings and Structures

³ PhD in Techn. Sciences, Associate Professor of the Department of Construction of Buildings and Structures
tel.: 8(953)726-36-84; e-mail: abdulbareidanish@gmail.com

⁴ Post-graduate Student of the Department of Construction of Buildings and Structures

The results of a technical survey of buildings with damage caused by the construction of new buildings next to existing ones in Kabul (Afghanistan), Tambov, Kursk and Voronezh are presented. The finite element method (FEM) used for calculations of the stress - strain state of the base.

Keywords: building, structure, mutual influence, damage, finite element method, calculation, technical inspection.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.

2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.

Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.

3. Структура статьи:

3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);

3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);

3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);

3.4. Сведения об авторе(-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;

3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);

3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);

3.7. Текст статьи;

3.8. Библиографический список (на русском и английском языках);

3.9. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;

3.10. Сведения о финансировании (если есть).

4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).

5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.

6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]).

Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографический список. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.

7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.

8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.

9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.