

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научный журнал**

**Выпуск № 1 (20), 2019**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

**Воронеж**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Издается с 2010 г.

Выходит 4 раза в год

---

Учредитель и издатель – федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет».

Территория распространения — Российская Федерация.

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА:

**Главный редактор: Сафронов В.С.**, д-р техн. наук, проф.,

Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора: Ефрюшин С.В.**, канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь: Габриелян Г.Е.**, канд. техн. наук, доцент,

Воронежский государственный технический университет

## ЧЛЕНЫ РЕДКОЛЛЕГИИ:

**Гриднев С.Ю.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Зверев В.В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

**Кирсанов М.Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет «МЭИ»

**Козлов В.А.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Колчунов В.И.**, д-р техн. наук, проф., Юго-Западный государственный университет

**Леденев В.В.**, д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет

**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный строительный университет, Вьетнам

**Нугужинов Ж.С.**, д-р техн. наук, проф., Казахстанский многопрофильный институт реконструкции и развития Карагандинского государственного технического университета, Казахстан

**Овчинников И.Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет

**Пшеничкина В.А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет

**Трещев А.А.**, д-р техн. наук, проф., Тульский государственный университет

**Турищев Л.С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Беларусь

**Шапиро Д.М.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Шимановский А.О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Беларусь

**Шитикова М.В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Редактор: Аграновская Н.Н.

Дата выхода в свет 29.03.2019. Усл. печ. л. 11,5. Формат 60×84/8. Тираж 500 экз. Заказ № 42.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 - 72895

Цена свободная

---

АДРЕС РЕДАКЦИИ И ИЗДАТЕЛЯ: 394006, Воронежская обл., г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84  
(строительный факультет, кафедра строительной механики)  
тел.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

ОТПЕЧАТАНО: отдел оперативной полиграфии издательства ФГБОУ ВО «ВГТУ»  
394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2019

**STRUCTURAL MECHANICS  
AND STRUCTURES**

**Scientific and Technical Journal**  
**ISSUE № 1 (20), 2019**

- Structural Mechanics and Strength of materials
- Applied problems of solid body under deformation
- Soil Mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of buildings and structures bases and foundations of
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic affect on elastic system
- Pilot and field observations of structures and materials

**Voronezh**

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

SCIENTIFIC JOURNAL

Published since 2010

Issued 4 times a year

---

Founder and publisher – Voronezh State Technical University.  
Territory of distribution — Russian Federation.

## EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL:

**Chief editor: Safronov V. S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof.,  
Voronezh State Technical University

**The deputy chief editor: Efrushin S.V.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,  
Voronezh State Technical University

**Executive secretary: Gabrielyan G.E.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof.,  
Voronezh State Technical University

## EDITORIAL BOARD MEMBERS:

**Gridnev S.Yu.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Zverev V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Lipetsk State Technical University

**Kirsanov M.N.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

**Kozlov V.A.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Kolchunov V.I.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., South-West State University

**Ledenyov V.V.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Tambov State Technical University

**Nguyen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National University of Civil Engineering, Socialist Republic of Vietnam

**Nuguxhinov Zh.S.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Kazakh Multidisciplinary Reconstruction and Development Institute of Karaganda State Technical University, Republic of Kazakhstan

**Ovchinnikov I.G.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Saratov State Technical University

**Pshenichkina V.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Volgograd State Technical University

**Trechshev A.A.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Tula State University

**Turichshev L.S.**, PhD of Tech. Sc., Associate Prof., Polotsk State University, Republic of Belarus

**Shapiro D.M.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Voronezh State Technical University

**Shimanovsky A.O.**, Dr. of Tech. Sc., Prof., Belarusian State University of Transport, Republic of Belarus

**Shitikova M.V.**, Dr. of Physical and Mathematical Sc., Prof., Voronezh State Technical University

Editor: Agranovskaja N. N.

Subscription index in agency catalogue «Rospechat» — **66004**.

Publication date 29.03.2019. Conventional printed sheets 11,5. Format 60×84/8. Numbers of copies 500. Order № 42.

Journal is registered by Federal Service for Supervision of Communications,

Information Technology and Mass Media (Roskomnadzor)

Registration certificate III № ФС 77 - 72895

Price is subject to change

---

ADDRESS OF EDITORIAL AND PUBLISHER OFFICE: 84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006, Russian Federation  
(Faculty of construction, Department of Structural Mechanics)

Tel.: (473)271-52-30; e-mail: vss22@mail.ru

PRINTED: publishing department of operational printing of Voronezh State Technical University

84 20-letiya Oktyabrya str., Voronezh, 394006

© Voronezh State Technical University, 2019

## СОДЕРЖАНИЕ

### СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Трещев А. А., Монастырев Ю. А., Чибрикина В. Д.,  
Завьялова, Ю. А. Лапина, М. А*

Описание деформирования ортотропных разносопротивляющихся материалов .. 7

*Курсанов М. Н., Тиньков Д. В.*

Аналитические выражения частот малых колебаний балочной фермы  
с произвольным числом панелей ..... 14

*Белянкин Н. А., Бойко А. Ю.*

Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей  
при равномерном нагружении ..... 21

### ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

*Сафронов В. С., Антипов А. В.*

Современные алгоритмы динамического расчета стержневых систем на подвижную  
подрессоренную нагрузку ..... 30

*Аверин А. Н.*

Экспериментально-теоретические исследования колебаний неразрезного  
пролетного строения моста под действием подвижной нагрузки..... 41

### РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

*Зверев В. В., Тезиков Н. Ю., Жидков К. Е.*

Устойчивость конического днища рубашки двустенного стального  
горизонтального резервуара подземного исполнения с учетом начальных  
несовершенств ..... 52

*Свентиков А. А., Кузнецов Д. Н.*

Адаптация результатов численного метода расчета к нормативной методике  
проверки местной устойчивости стенки стальной балки двутаврового сечения .... 60

*Емельянов Д. И., Кузнецов Д. Н. Федосова Л. А., Глушков А. А.*

Применение BIM-технологий для проектирования криволинейных покрытий  
на основе пространственных решетчатых конструкций..... 71

### РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

*Ефрюшин С. В., Малащенко А. А.*

Исследование напряженно-деформированного состояния плиты на упругом осно-  
вании с учетом стадийности возведения..... 82

Правила оформления статей ..... 92

# CONTENT

## STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

|  |    |
|--|----|
| A. A. Treschev, Yu. A. Monastyrev, v. D. Chibrikina, yu. A. Zavyalova, m. A. Lapshina<br>Description of orthotropic differently resistant materials deformation..... | 7  |
| M. N. Kirsanov, D. V. Tinkov<br>Analytical expressions of the frequencies of small oscillations of a girder with an arbitrary<br>number of panels .....              | 14 |
| N. A. Belyankin, A. Y. Boyko<br>Formula for deflection of a girder with an arbitrary number of panels under the uniform load   | 21 |

## MOBILE LOAD DYNAMIC AFFECT ON ELASTIC SYSTEM

|   |    |
|---|----|
| V.S. Safronov, A. V. Antipov<br>Modern algorithms of bar systems dynamic analysis of movable spring load..... | 30 |
| A.N. Averin<br>Experimental and theoretical study of continuous bridge span vibrations under mobile load ..   | 41 |

## CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

|  |    |
|--|----|
| V.V. Zverev, N.Yu. Tezikov, K.E. Zhidkov<br>Case conical bottom stability of two-walled steel underground reservoir with account of initial<br>imperfections.....              | 52 |
| A.A. Sventikov, D.N. Kuznetsov<br>Results of numerical method of calculation adaptation to standard method of testing local<br>stability of steel i-beam section wall.....     | 60 |
| D.I. Emelynov, D.N.Kuznetsov, L.A. Fedosova, A.A. Glushkov<br>Application of building information modeling technologies for curvilinear roofs based on<br>grid structure ..... | 71 |

## CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

|  |    |
|--|----|
| S.V. Efyushin, A. A. Malashchenko<br>Research of deflected mode of slab on elastic foundation with account of construction phase | 82 |
| Requirements for articles to be published .....  | 92 |

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3: 519.6.502

## ОПИСАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОРТОТРОПНЫХ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

А. А.Трещев<sup>1</sup>, Ю. А. Монастырев<sup>2</sup>, В. Д. Чибрикина<sup>3</sup>, Ю. А.Завьялова<sup>4</sup>, М. А. Лапшина<sup>5</sup>

Тульский государственный университет<sup>1,2,3,4,5</sup>  
Россия, г. Тула

---

<sup>1</sup> Член-корр. РААСН, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции»

<sup>2</sup> Магистрант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции»

<sup>3</sup> Магистрант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции»

<sup>4</sup> Магистрант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции»

<sup>5</sup> Магистрант кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции»

тел. +7(4872)25-71-08; e-mail: taa58@yandex.ru

---

Представлены потенциальные уравнения связи тензоров деформаций и напряжений для ортотропных композитных материалов, обладающих несовершенной упругостью, допускающей квазилинейное представление диаграмм деформирования. Рассмотрена система экспериментов, необходимых для определения деформационных характеристик. Для отдельных ортотропных материалов приведены численные значения этих характеристик. Проведена проверка положительной определенности квадратичных форм, соответствующих постулату Друккера.

**Ключевые слова:** потенциал деформаций, разносопротивляемость, квазилинейные уравнения, ортотропный материал, главные оси анизотропии.

### Введение

В строительстве и аппаратостроении на современном этапе развития техники все чаще стали применяться легкие анизотропные материалы, обладающие повышенной прочностью. Наиболее распространенный класс анизотропии этих материалов относится к ортотропным. Даже такой «древний» материал, как древесина, является ортотропным телом с цилиндрической анизотропией. Что уж говорить о современных стекло-, боро-, графитопластиках и поликарбонате. При одновременном повышении прочности усложняется и структура этих материалов, что приводит к зависимости деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния, а это никоим образом не вписывается в рамки классической теории прочности и материаловедения. К сожалению, до настоящего времени не существует единой и общепризнанной деформационной и прочностной теории, применимой к этим материалам и свободной от грубых недостатков. Здесь рассматривается вариант теории, который может послужить долгие годы проектировщикам и материалововедам.

### Построение определяющих соотношений

В данном случае ключевым методом исследования является распространение классических теорий деформирования, математических представлений векторных пространств применительно к конструкционным материалам. Основными материалами для исследований являются графитоконпозиты, стеклопластики и полимерные композиты, применяемые в строительстве и в других областях техники.

---

© Трещев А. А., Монастырев Ю. А., Чибрикина В. Д., Завьялова Ю. А., Лапшина М. А., 2019

В работах [1 – 3] на основе анализа многочисленных экспериментальных данных по деформированию анизотропных разносопротивляющихся сред [4 – 8] были предложены нелинейные потенциальные соотношения между деформациями и напряжениями для ортотропных материалов в виде

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + \dots, \quad (1)$$

где  $W = W(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{12}\tau_{21}, \tau_{23}\tau_{32}, \tau_{31}\tau_{13}, \tau_{12}\tau_{23}\tau_{31})$ ,  $W_n$  – однородный многочлен степени  $n+1$  по напряжениям.

Коэффициенты, входящие в разложение (1), являются параметрами материала, которые зависят от вида напряженного состояния и подлежат экспериментальному определению. Так, для физически квазилинейных материалов имеем

$$W_1 = A_1\sigma_{11}^2 + A_2\sigma_{22}^2 + A_3\sigma_{33}^2 + A_4\sigma_{11}\sigma_{22} + A_5\sigma_{22}\sigma_{33} + \\ + A_6\sigma_{33}\sigma_{11} + A_7\tau_{12}\tau_{21} + A_8\tau_{23}\tau_{32} + A_9\tau_{31}\tau_{13}. \quad (2)$$

Число слагаемых в разложении (1) с ростом  $n$  быстро увеличивается. Так, для  $n=2$  имеем

$$W_2 = B_1\sigma_{11}^3 + B_2\sigma_{22}^3 + B_3\sigma_{33}^3 + B_4\sigma_{11}^2\sigma_{22} + B_5\sigma_{11}\sigma_{22}^2 + B_6\sigma_{22}^2\sigma_{33} + B_7\sigma_{22}\sigma_{33}^2 + \\ + B_8\sigma_{33}^2\sigma_{11} + B_9\sigma_{33}\sigma_{11}^2 + B_{10}\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + B_{11}\sigma_{11}\tau_{12}^2 + B_{12}\sigma_{11}\tau_{23}^2 + B_{13}\sigma_{11}\tau_{31}^2 + \\ + B_{14}\sigma_{22}\tau_{12}^2 + B_{15}\sigma_{22}\tau_{23}^2 + B_{16}\sigma_{22}\tau_{31}^2 + B_{17}\sigma_{33}\tau_{12}^2 + B_{18}\sigma_{33}\tau_{23}^2 + B_{19}\sigma_{33}\tau_{31}^2 + B_{20}\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23}. \quad (3)$$

При  $n=3$  количество слагаемых достигает уже 42.

В работах [1 – 3] разложение (1) ограничено параметром  $n=2$ . При этом в разложениях (2) и (3) для разносопротивляющихся материалов параметры  $A_k$  и  $B_k$  являются функциями, которые определяют вид напряженного состояния и зависят от комбинаций нормированных напряжений [9 – 11]:

$$\alpha_{ij} = \sigma_{ij} / S; \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

где  $S = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\tau_{12}^2 + 2\tau_{23}^2 + 2\tau_{13}^2}$ .

При этом справедливо условие нормировки [1 – 3, 9 – 11]:

$$\alpha_{ij}\alpha_{ij} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{23}^2 + 2\alpha_{13}^2 = 1. \quad (5)$$

Параметры  $A_k$  и  $B_k$  зависят от нормированных напряжений:  $A_k(\alpha_{ij})$ ;  $B_k(\alpha_{ij})$ .

Уравнения связи компонентов тензоров деформаций и напряжений для нелинейно ортотропных материалов определяются в главных осях анизотропии на основе потенциала деформаций (1) – (3) в соответствии с формулами Кастильяно:

$$e_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \sigma_{ij}}; \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (6)$$

Из анализа предложенного нелинейного потенциала  $W = W_1 + W_2$  видно, что для определения всех констант необходимо провести достаточно большой объем экспериментальных исследований, включая опыты, реализующие комплексы сложных напряженных состояний, например, различных двухосных, трехосных растяжений-сжатий и даже опыты по одновременному сдвигу в трех главных взаимно ортогональных плоскостях, а это в настоящее время весьма проблематично. Однако в современном строительстве и других отраслях промышленности в настоящее время получили широкое применение конструкционные ортотропные материалы, механические свойства, которых не соответствуют классическим представлениям об упругопластическом деформировании

твердых тел [4 – 8]. Поэтому для сооружений, деталей машин и аппаратов, выполненных из подобных материалов, необходимо выполнять деформационные и прочностные расчеты с максимально возможной точностью. Данная ситуация позволяет на современном этапе ограничить разложение (1) квазиквадратичным представлением (2), заменив при этом функции  $A_7$ ,  $A_8$ ,  $A_9$  константами [9, 10], что поясним ниже. В этом случае потенциал деформаций принимает вид

$$W_1 = 0,5(A_{1111} + \tilde{A}_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11}^2 + 0,5(A_{2222} + \tilde{A}_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22}^2 + 0,5(A_{3333} + \tilde{A}_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33}^2 + \\ + [A_{1122} + \tilde{A}_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11}\sigma_{22} + [A_{2233} + \tilde{A}_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22}\sigma_{33} + \\ + [A_{3311} + \tilde{A}_{3311}(\alpha_{33} + \alpha_{11})]\sigma_{33}\sigma_{11} + A_{1212}\tau_{12}^2 + A_{2323}\tau_{23}^2 + A_{3131}\tau_{31}^2. \quad (7)$$

Продифференцировав потенциал (7) по формулам Кастильяно (6), получим следующие квазилинейные уравнения состояния для ортотропных разносопротивляющихся материалов:

$$e_{11} = \{(A_{1111} + \tilde{A}_{1111}\alpha_{11}) + 0,5\tilde{A}_{1111}\alpha_{11}[\alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2(\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2)] - \\ - 0,5(\tilde{A}_{2222}\alpha_{22}^3 + \tilde{A}_{3333}\alpha_{33}^3) + (1 - \alpha_{11})[\tilde{A}_{1122}\alpha_{22}(\alpha_{22}^2 + \alpha_{33}^2 + 2(\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2)) + \\ + \tilde{A}_{1133}\alpha_{33}] - \tilde{A}_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})\}\sigma_{11} + [A_{1122} + \tilde{A}_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} + \\ + [A_{1133} + \tilde{A}_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\ e_{22} = [A_{1122} + \tilde{A}_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + \{(A_{2222} + \tilde{A}_{2222}\alpha_{22}) + \\ + 0,5\tilde{A}_{2222}\alpha_{22}[\alpha_{11}^2 + \alpha_{33}^2 + 2(\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2)] - 0,5(\tilde{A}_{1111}\alpha_{11}^3 + \tilde{A}_{3333}\alpha_{33}^3) + \\ (1 - \alpha_{22})[\tilde{A}_{2233}\alpha_{33}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{33}^2 + 2(\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2)) + \tilde{A}_{1133}\alpha_{33}] - \\ - \tilde{A}_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})\}\sigma_{22} + [A_{2233} + \tilde{A}_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33}; \\ e_{33} = [A_{1133} + \tilde{A}_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + [A_{2233} + \tilde{A}_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{22} + \{(A_{3333} + \tilde{A}_{3333}\alpha_{33}) + \\ + 0,5\tilde{A}_{3333}\alpha_{33}[\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + 2(\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2)] - 0,5(\tilde{A}_{1111}\alpha_{11}^3 + \tilde{A}_{2222}\alpha_{22}^3) + \\ + (1 - \alpha_{33})[\tilde{A}_{1133}\alpha_{11}(\alpha_{11}^2 + \alpha_{22}^2 + 2(\alpha_{12}^2 + \alpha_{23}^2 + \alpha_{31}^2)) + \tilde{A}_{2233}\alpha_{22}] - \tilde{A}_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22})\}\sigma_{33}; \\ \gamma_{12} = [A_{1212} - (\tilde{A}_{1111}\alpha_{11}^3 + \tilde{A}_{2222}\alpha_{22}^3 + \tilde{A}_{3333}\alpha_{33}^3) - 2\tilde{A}_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) - \\ - 2\tilde{A}_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) - 2\tilde{A}_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\tau_{12}; \\ \gamma_{23} = [A_{2323} - (\tilde{A}_{1111}\alpha_{11}^3 + \tilde{A}_{2222}\alpha_{22}^3 + \tilde{A}_{3333}\alpha_{33}^3) - 2\tilde{A}_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33}) - \\ - 2\tilde{A}_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) - 2\tilde{A}_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\tau_{23}; \\ \gamma_{31} = [A_{3131} - (\tilde{A}_{1111}\alpha_{11}^3 + \tilde{A}_{2222}\alpha_{22}^3 + \tilde{A}_{3333}\alpha_{33}^3) - 2\tilde{A}_{1133}\alpha_{11}\alpha_{33}(\alpha_{11} + \alpha_{33}) - \\ - 2\tilde{A}_{1122}\alpha_{11}\alpha_{22}(\alpha_{11} + \alpha_{22}) - 2\tilde{A}_{2233}\alpha_{22}\alpha_{33}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\tau_{31}.$$

Очевидно, что константы потенциала деформаций (2) можно определить по результатам обработки данных испытания образцов ортотропного материала на одноосное растяжение и одноосное сжатие поочередно вдоль главных осей анизотропии, откуда можно получить модули деформации (секущие модули упругости)  $E_k^\pm$  и коэффициенты поперечной деформации  $\nu_{ij}^\pm$ , а также из экспериментов по сдвигу в главных плоскостях

анизотропии, в которых устанавливаются модули сдвига во взаимно ортогональных главных плоскостях анизотропии  $G_{ij}$ .

Из экспериментов на одноосное растяжение и одноосное сжатие вдоль главной оси анизотропии  $x_1$  получим:

$$\begin{aligned} 1/E_1^+ &= A_{1111} + \tilde{A}_{1111}; & -\nu_{21}^+ &= (A_{1122} + \tilde{A}_{1122}) / (A_{1111} + \tilde{A}_{1111}); \\ -\nu_{31}^+ &= (A_{1133} + \tilde{A}_{1133}) / (A_{1111} + \tilde{A}_{1111}); & 1/E_1^- &= A_{1111} - \tilde{A}_{1111}; \\ -\nu_{21}^- &= (A_{1122} - \tilde{A}_{1122}) / (A_{1111} - \tilde{A}_{1111}); & -\nu_{31}^- &= (A_{1133} - \tilde{A}_{1133}) / (A_{1111} - \tilde{A}_{1111}), \end{aligned} \quad (9)$$

вдоль главной оси анизотропии  $x_2$ :

$$\begin{aligned} 1/E_2^+ &= A_{2222} + \tilde{A}_{2222}; & -\nu_{12}^+ &= (A_{1122} + \tilde{A}_{1122}) / (A_{2222} + \tilde{A}_{2222}); \\ -\nu_{32}^+ &= (A_{2233} + \tilde{A}_{2233}) / (A_{2222} + \tilde{A}_{2222}); & 1/E_2^- &= A_{2222} - \tilde{A}_{2222}; \\ -\nu_{12}^- &= (A_{1122} - \tilde{A}_{1122}) / (A_{2222} - \tilde{A}_{2222}); & -\nu_{32}^- &= (A_{2233} - \tilde{A}_{2233}) / (A_{2222} - \tilde{A}_{2222}), \end{aligned} \quad (10)$$

вдоль главной оси анизотропии  $x_3$ :

$$\begin{aligned} 1/E_3^+ &= A_{3333} + \tilde{A}_{3333}; & -\nu_{13}^+ &= (A_{1133} + \tilde{A}_{1133}) / (A_{3333} + \tilde{A}_{3333}); \\ -\nu_{23}^+ &= (A_{2233} + \tilde{A}_{2233}) / (A_{3333} + \tilde{A}_{3333}); & 1/E_3^- &= A_{3333} - \tilde{A}_{3333}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$-\nu_{13}^- = (A_{1133} - \tilde{A}_{1133}) / (A_{3333} - \tilde{A}_{3333}); \quad -\nu_{23}^- = (A_{2233} - \tilde{A}_{2233}) / (A_{3333} - \tilde{A}_{3333}).$$

Из экспериментов на чистый сдвиг в соответствующих главных плоскостях получим:

$$1/G_{12} = A_{1212}; \quad 1/G_{23} = A_{2323}; \quad 1/G_{13} = A_{1313}. \quad (12)$$

Принимая во внимание зависимости (9) – (12) определим константы потенциала через технические постоянные следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-) / 2; & \tilde{A}_{kkkk} &= (1/E_k^+ - 1/E_k^-) / 2; & A_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+ / E_j^+ + \nu_{ij}^- / E_j^-) / 2; \\ \tilde{A}_{ijij} &= -(\nu_{ij}^+ / E_j^+ - \nu_{ij}^- / E_j^-) / 2; & A_{ijij} &= 1/G_{ij}; & \nu_{ij}^+ / E_j^+ &= \nu_{ji}^+ / E_i^+; & \nu_{ij}^- / E_j^- &= \nu_{ji}^- / E_i^-, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $i, j, k = 1, 2, 3$ .

При определении констант потенциала необходимо проводить проверку энергетической непротиворечивости в соответствии с требованиями постулата Дуккера [9]:

$$\delta e_{ij} \delta \sigma_{ij} = \frac{\partial^2 W_1}{\partial \sigma_{km} \partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{km} \delta \sigma_{ij} \geq 0. \quad (14)$$

Приведем механические характеристики материалов, имеющиеся в литературе. Эти данные представим в таблице, где имеются константы материалов  $E_k^\pm$ ,  $\nu_{ij}^\pm$  и  $G_{ij}$

Таблица

Технические константы ортотропных композитных материалов

| Константы | Материалы [литературные источники] |             |             |                   |                    |                    |
|-----------|------------------------------------|-------------|-------------|-------------------|--------------------|--------------------|
|           | П32-57 [12]                        | П36-50 [12] | П41-42 [12] | Графит АТJ-S [13] | Стеклопластик [14] | Стеклопластик [14] |
| $E_1^+$   | 12,75<br>ГПа                       | 10,3<br>ГПа | 8,09<br>ГПа | 11,85<br>ГПа      | 140<br>ГПа         | 60<br>ГПа          |

| Константы    | Материалы [литературные источники] |                |                |                      |                       |                       |
|--------------|------------------------------------|----------------|----------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
|              | П32-57<br>[12]                     | П36-50<br>[12] | П41-42<br>[12] | Графит АТJ-S<br>[13] | Стеклопластик<br>[14] | Стеклопластик<br>[14] |
| $E_1^-$      | 14,03<br>ГПа                       | 11,77<br>ГПа   | 10,79<br>ГПа   | 10,48<br>ГПа         | 70<br>ГПа             | 20<br>ГПа             |
| $E_2^+$      | 16,425<br>ГПа                      | 17,6<br>ГПа    | 16,09<br>ГПа   | 11,85<br>ГПа         | 280<br>ГПа            | 30<br>ГПа             |
| $E_2^-$      | 20,60<br>ГПа                       | 18,54<br>ГПа   | 16,97<br>ГПа   | 10,48<br>ГПа         | 140<br>ГПа            | 15<br>ГПа             |
| $E_3^+$      | –                                  | –              | –              | 9,45 ГПа             | –                     | –                     |
| $E_3^-$      | –                                  | 8,34<br>ГПа    | –              | 7,95 ГПа             | –                     | –                     |
| $\nu_{12}^+$ | 0,176                              | 0,188          | 0,28           | 0,1                  | 0,2                   | –                     |
| $\nu_{12}^-$ | –                                  | –              | –              | 0,09                 | 0,3                   | –                     |
| $\nu_{13}^+$ | 0,126                              | 0,115          | 0,1            | –                    | –                     | –                     |
| $\nu_{13}^-$ | –                                  | –              | –              | –                    | –                     | –                     |
| $\nu_{32}^+$ | –                                  | –              | –              | –                    | –                     | –                     |
| $\nu_{32}^-$ | –                                  | –              | –              | –                    | –                     | –                     |
| $E_{12}^+$   | –                                  | –              | –              | –                    | 170 ГПа               | –                     |
| $E_{12}^-$   | –                                  | –              | –              | –                    | 875 ГПа               | –                     |
| $G_{12}$     | 3,98<br>ГПа                        | 3,14<br>ГПа    | –              | –                    | –                     | –                     |
| $G_{13}$     | 3,28<br>ГПа                        | 3,49<br>ГПа    | 4,02<br>ГПа    | –                    | –                     | –                     |
| $G_{23}$     | 2,63<br>ГПа                        | 2,55<br>ГПа    | 2,45<br>ГПа    | –                    | –                     | –                     |

### Выводы

Предложенные уравнения связи деформаций и напряжений с учетом получаемых из экспериментов констант для ортотропных композитов [4 – 8, 12 – 15] удовлетворяют ограничениям (14) и обобщают большинство известных моделей деформирования ортотропных материалов.

### Библиографический список

1. Трещев А.А. Потенциальная зависимость между деформациями и напряжениями для ортотропных физически нелинейных материалов / А.А.Трещев // Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии. – Орел: ОГУ. – 2017. – № 4-1 (324). – С. 71 – 74.
2. Трещев А.А. Удельная дополнительная работа деформирования ортотропных физически нелинейных материалов / А.А.Трещев, Ю.А. Монастырев, В.Д. Чибрикина // Социально-экономические и экологические проблемы горной промышленности, строительства и энергетики: 13-я Международная конференция по проблемам горной промышленности,

- строительства и энергетики. – Тула: ТулГУ, 2017. – Т. 2. - С. 208 – 212.
3. Трещев А.А. Нелинейные определяющие соотношения для ортотропных разносопротивляющихся материалов / А.А.Трещев // Сборник материалов XVIII Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности». – Тула: ТулГУ. – 2017. – С. 180 – 184.
  4. Schmuesser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells / D.W.Schmuesser // AIAA Journal. – 1983. – Vol. 21. – №12. – P. 1742 – 1747.
  5. Reddy L.N. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials / L.N.Reddy, C.W.Bert // ZAMM. – 1982. – Vol. 62. – № 6. – P. 213 – 219.
  6. Jones R.M. A Nonsymmetric Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – № 10. – P. 1436 – 1443.
  7. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. - № 8. – P. 995 – 1001.
  8. Jones R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Ortotropic Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol. 9. – № 5. – P. 917 – 923.
  9. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А.А. Трещев // Москва – Тула: РААСН – ТулГУ, 2016. – 328 с.
  10. Трещев А.А. Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов / А.А. Трещев // Москва – Тула: РААСН – ТулГУ, 2007. – 160 с.
  11. Трещев А.А. Определяющие соотношения для нелинейных анизотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния / А.А.Трещев, Д.А. Ромашин // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. – №4. Часть 4. – С. 1740-1742.
  12. Розе А.В. Трехармированные тканые материалы / А.В. Розе, И.Г. Жигун, М.Н. Душин // Механика полимеров. – 1970. – №3. – с. 471–476.
  13. Jones R.M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14 – №10. – P. 1427–1435.
  14. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – P. 16–25.

#### References

1. Treschev A.A. Potential dependence between deformations and stresses for an orthotropic physically nonlinear materials. Fundamental and applied problems of technics and technology. Oryol: OSU. - 2017. - No 4-1 (324). – P. 71 – 74.
2. Treschev A.A., Monastirev., J.A., Chibrikina V.D. Specific additional work of deformation of physically nonlinear orthotropic materials. Socio-economic and environmental problems of mining, construction and power engineering: 13th international conference on problems of mining industry, construction and energy. - Tula: TulGU, 2017. Vol. 2. P. 208 – 212.
3. Treschev A.A. Nonlinear constitutive relationships for orthotropic differently resistant materials. Collection of papers of XVIII International scientific and technical conference "Actual problems of building, construction and industry". Tula: TulGU. 2017. P. 180 – 184.
4. Schmuesser D.W. Nonlinear Stress-Strain and Strength Response of Axisymmetric Bimodulus Composite Material Shells. Journal. 1983.Vol. 21. No12. P. 1742 – 1747.

5. Reddy L.N., Bert C.W. On the Behavior of Plates Laminated of Bimodulus Composite Materials. ZAMM. 1982. Vol. 62. No 6. P. 213 – 219.
6. Jones R.M. Nonsymmetrical Compliance Matrix Approach to Nonlinear Multimodulus Orthotropic Materials. AIAA Journal. 1977. Vol. 15. No10. P. 1436 – 1443.
7. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Material. AIAA Journal. 1980. Vol. 18. No 8. P. 995 – 1001.
8. Jones R.M. Bucling of Stiffened Multilayered Circular Shells with Different Orthotropic Moduli in Tension and Compression. AIAA Journal. 1971. Vol. 9. – No 5. P. 917 – 923.
9. Treschev A.A. Theory of deformation and strength of materials with initial or induced sensitivity to the form of the stress state. Constitutive relations. Moscow – Tula: RAABN TulGU, 2016. - 328 p.
10. Treschev A.A. Anisotropic plates and shells from differently resistant materials. Moscow – Tula: RAABN. TulGU, 2007. -160 p.
11. Treshchev A.A., Romashin D.A. Constitutive equations for nonlinear anisotropic materials sensitive to stress state type . Bulletin of Nizhegorod university by N. Lobachevsky. N. Novgorod: Publishing house NNGU by N.A.Lobachevsky, 2011. No 4. Part 4. P. 1740-1742.
12. Rose A.V., Zhigun I. G., Dushin M.N. Three-reinforced woven materials. Mechanics of polymers. - 1970. No3. - p. 471-476.
13. R.M. Jones, D.A.R Nelson. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite. AIAA Journal. 1976. Vol. 14 No10. P. 1427–1435.
14. R.M. Jones Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression. AIAA Journal. 1977. Vol. 15. No1. P. 16–25.

## DESCRIPTION OF ORTHOTROPIC DIFFERENTLY RESISTANT MATERIALS DEFORMATION

A. A. Treschev, Yu. A. Monastirev, V. D. Chibrikina, Yu. A. Zavyalova, M. A. Lapshina

Tula State University<sup>1, 2, 3, 4, 5</sup>  
Russia, Tula

---

<sup>1</sup> Corresponding member of RAASN, Dr of Tech.Sc. Head of department “ Construction, building materials and structures”

<sup>2</sup> Master of department “Construction, building materials and structures”

<sup>3</sup> Master of department “Construction, building materials and structures”

<sup>4</sup> Master of department “Construction, building materials and structures”

<sup>5</sup> Master of department “Construction, building materials and structures”

tel. +7(4872)257108; e-mail: [taa58@yandex.ru](mailto:taa58@yandex.ru)

---

There is presented potential equations of coupling of strain and stress tensors for orthotropic composite materials with imperfect elasticity allowing quasilinear representation of deformation curves. System of experiments necessary for strain characteristics determining is observed. There are given numerical values of these characteristics for some orthotropic materials. Positive definition of quadratic forms corresponding to Drucker’s postulate are shown.

**Keywords:** strain potential, different resistance, quasilinear equations, orthotropic materials, main axes of anisotropy

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ЧАСТОТ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>, Д. В. Тиньков<sup>2</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Москва

<sup>1</sup>Д-р физ.-мат. наук, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail:c216@ya.ru

<sup>2</sup>Аспирант, тел. +7(495)362-73-14; e-mail:dvtinkov@yandex.ru

Рассмотрена упрощенная модель фермы с массами, сосредоточенными в узлах нижнего пояса фермы. Учтены только вертикальные смещения грузов. Уравнения движения записываются в матричном виде. Жесткость в узлах рассчитывается с помощью формулы Максвелла – Мора. Усилия в стержнях определяются в символической форме в системе компьютерной математики Maple. Показано, что для симметричной фермы матрицы решения имеют бисимметричный вид, что позволяет получить характеристическое уравнение, допускающее точные решения для всех частот, независимо от числа степеней свободы. Обобщение частных решений на произвольное число панелей производится методом индукции. Найдено, что одна из частот колебаний не зависит от числа панелей и является средней в спектре частот.

**Ключевые слова:** ферма, частота колебаний, бисимметричная матрица, индукция, аналитическое решение, Maple

Задача о частотах собственных колебаний ферм, как правило, решается численно [1-6]. Наиболее распространенной, работоспособной и достаточно точной моделью задачи является задача о колебании сосредоточенных масс в узлах фермы [7,8]. В такой постановке возможно получить и аналитическое решение. Однако в большинстве случаев оно ограничено лишь аналитическим представлением коэффициентов частотного уравнения, что, конечно, заметно повышает точность результатов, особенно при анализе ферм с большим числом панелей, но сами же частоты получаются уже из численного решения алгебраического уравнения высокого порядка. Желание получить формулы для частот колебаний фермы ограничено невозможностью получить точное решение частотного уравнения. Но здесь есть исключения. Одно такое исключение, дающее точные формулы для частот собственных колебаний, представлено в настоящей работе.

Рассмотрим статически определимую плоскую ферму с нисходящими раскосами и параллельными поясами (рис. 1).

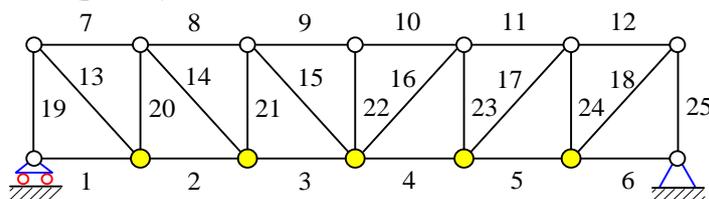


Рис. 1. Ферма с тремя панелями в половине пролета

Аналитический расчет прогиба и смещения опоры такой фермы под действием различных нагрузок в системе компьютерной математики Maple произведен в работах [9-11]. За основу в этих работах взята формула Максвелла-Мора и метод вырезания узлов для нахождения усилий в стержнях. Обобщение отдельных частных решений, полученных для

ферм с различным числом панелей на произвольный случай выполнялось методом индукции с привлечением специальных операторов системы Maple для составления и решения рекуррентных уравнений. Эти же, хорошо апробированные подходы можно применить и в настоящей задаче при анализе колебаний грузов.

Примем, что грузы имеют только вертикальные смещения. Учитывая, что горизонтальная жесткость фермы значительно больше вертикальной, можно предположить, что горизонтальные смещения добавят лишь высшие частоты, наименее интересные для практики. Выбрав вертикальные смещения за обобщенные координаты, составим уравнение движения. Исследуемая система имеет  $N=2n-1$  степеней свободы (рис. 2),

$$[M_N]\ddot{Y} + [D_N]Y = 0,$$

где  $Y$  – вектор вертикальных перемещений масс,  $[D_N]$  – матрица жесткости,  $[M_N]$  – матрица инерции. Принимая массы грузов одинаковыми, матрицу инерции получаем диагонального вида

$$M_N = \begin{bmatrix} m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы податливости  $[B_N]$ , являющейся обратной к матрице жесткости  $[D_N]$ , определяются по формуле Максвелла-Мора:

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^{\mu-3} S_k^{(i)} S_k^{(j)} l_k / (EF),$$

где  $EF$  — жесткость стержней,  $S_k^{(i)}$  — усилие в стержне  $k$  от действия единичной вертикальной силы в узле  $i$ ,  $l_k$  — длина стержня  $k$ ,  $\mu = 8n + 4$  — число стержней фермы вместе с тремя опорными. Три опорные стержня предполагаются жесткими.

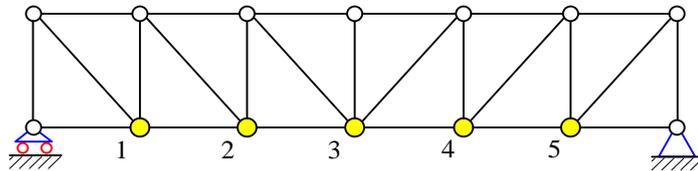


Рис. 2. Схема нумерации узлов с массами,  $n=3$

Полученная матрица имеет вид:

$$[B_N] = \frac{[A_N]a^3 + [C_N](h^3 + d^3)}{6nEFh^2},$$

где  $d = \sqrt{a^2 + h^2}$  — длина раскоса. Для  $n=2,3,4$  матрицы, входящие в решение, имеют вид

$$[A_3] = \begin{bmatrix} 21 & 24 & 15 \\ 24 & 36 & 24 \\ 15 & 24 & 21 \end{bmatrix}, [C_3] = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix},$$

$$[A_5] = \begin{bmatrix} 55 & 80 & 81 & 64 & 35 \\ 80 & 136 & 144 & 116 & 64 \\ 81 & 144 & 171 & 144 & 81 \\ 64 & 116 & 144 & 136 & 80 \\ 35 & 64 & 81 & 80 & 55 \end{bmatrix}, [C_5] = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 12 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 9 & 18 & 27 & 18 & 9 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 12 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \end{bmatrix},$$

$$[A_7] = \begin{bmatrix} 105 & 168 & 195 & 192 & 165 & 120 & 63 \\ 168 & 300 & 360 & 360 & 312 & 228 & 120 \\ 195 & 360 & 465 & 480 & 423 & 312 & 165 \\ 192 & 360 & 480 & 528 & 480 & 360 & 192 \\ 165 & 312 & 423 & 480 & 465 & 360 & 195 \\ 120 & 228 & 312 & 360 & 360 & 300 & 168 \\ 63 & 120 & 165 & 192 & 195 & 168 & 105 \end{bmatrix},$$

$$[C_7] = \begin{bmatrix} 21 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 \\ 18 & 36 & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 \\ 15 & 30 & 45 & 36 & 27 & 18 & 9 \\ 12 & 24 & 36 & 48 & 36 & 24 & 12 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 30 & 15 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 18 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}.$$

Обобщая эти матрицы методом индукции, получаем выражения для их элементов. Учитывая бисимметрию матриц, сначала получаем выражения для *базисного треугольника* матрицы  $[A_N]$ :

$$\begin{aligned} A_{j,i+j-1} &= j(i^3 - \alpha_2 i^2 + \alpha_1 i + \alpha_0), \quad j=1, \dots, 2n-1, \quad i=1, \dots, 2(n-j)+1, \\ \alpha_2 &= 3+6n-3j, \\ \alpha_1 &= 4j^2 - 6(1+2n)j + 8n^2 + 12n + 2, \\ \alpha_0 &= 2j^3 - 4(1+2n)j^2 + 2(4n^2 + 6n + 1)j - 8n^2 - 4n. \end{aligned} \quad (1)$$

При  $n=3$ , *базисный треугольник* матрицы  $[A_5]$  имеет вид

$$\begin{bmatrix} 55 & 80 & 81 & 64 & 35 \\ 0 & 136 & 144 & 116 & 0 \\ 0 & 0 & 171 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Остальные элементы (вместо условно проставленных нулей) получаются из свойства симметрии (отражение относительно главной диагонали)

$$A_{i,j} = A_{j,i}, \quad j=1, \dots, n, \quad i = j+1, \dots, 2n-1,$$

и бисимметрии (отражение относительно побочной диагонали):

$$A_{i,2n-j} = A_{2n-i,j}, \quad j=1, \dots, 2n-1, \quad i = j+1, \dots, 2n-1.$$

Элементы *базисного треугольника* матрицы  $[C_N]$ :

$$C_{j,i} = 3j(2n-i), \quad j=1, \dots, n, \quad i = j, \dots, 2n-j. \quad (2)$$

Остальные элементы также получаются отражением относительно диагоналей матрицы:

$$C_{i,j} = C_{j,i}, \quad j=1, \dots, n, \quad i = j+1, \dots, 2n-1,$$

$$C_{i,2n-j} = C_{2n-i,j}, \quad j = 1, \dots, 2n-1, \quad i = j+1, \dots, 2n-1$$

Частоты колебаний узлов выражаются через собственные числа  $\lambda_k$  матрицы  $[B_N]$

$$\omega_k = 1 / \sqrt{m\lambda_k}, \quad k = 1, \dots, N.$$

При  $n=2$  собственные частоты имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda^* = (a^3 + h^3 + d^3) / (2h^2 EF),$$

$$\lambda_{2,3} = (6a^3 + 2h^3 + 2d^3 \pm \sqrt{2}(4a^3 + h^3 + d^3)) / (2h^2 EF).$$

При  $n=3$  собственные частоты системы с пятью степенями свободы имеют вид

$$\lambda_1 = \lambda^* = (a^3 + h^3 + d^3) / (2h^2 EF),$$

$$\lambda_2 = (2a^3 + 3h^3 + 3d^3) / (9h^2 EF),$$

$$\lambda_3 = (2a^3 + h^3 + d^3) / (h^2 EF),$$

$$\lambda_{4,5} = (14a^3 + 2h^3 + 2d^3 \pm \sqrt{3}(8a^3 + h^3 + d^3)) / (h^2 EF).$$

Аналогичные, хотя и более громоздкие аналитические выражения имеют собственные числа и при  $n = 4, 5, \dots$ . Характерно то, что во всех наборах собственных чисел имеется число  $\lambda^* = (a^3 + h^3 + d^3) / (2h^2 EF)$ . Более того, соответствующая собственная частота колебаний является средней в спектре. Это наиболее наглядно проявляется в графиках зависимости частоты от высоты фермы (рис. 3-5). Графики частот (рад/с) построены при  $EF = 0,2 \cdot 10^8 \text{ Н}$ ,  $a = 4 \text{ м}$ . Максимальное значение частоты  $\omega^* = (2/3)\sqrt{EF/(ma)}$  соответствует соотношению размеров  $h = 4a/3$ .

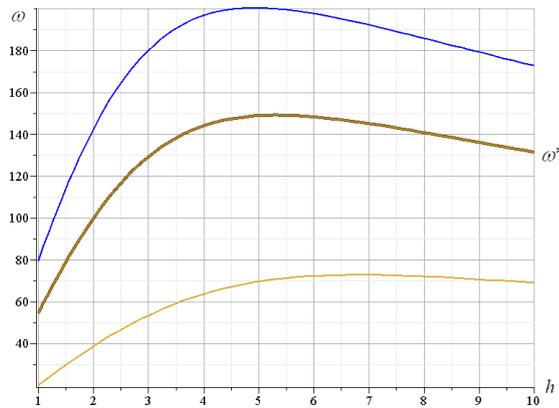


Рис. 3. Частоты колебаний при  $n = 2$

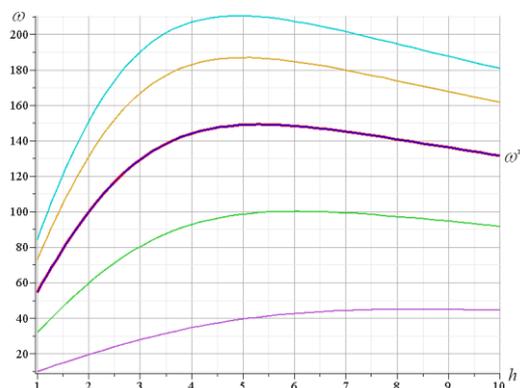


Рис. 4. Частоты колебаний при  $n = 3$

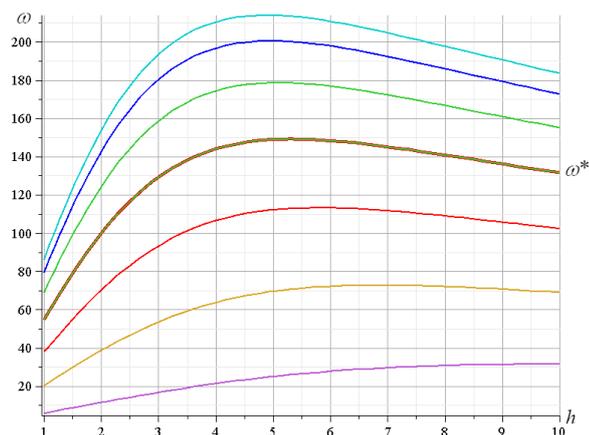


Рис. 5. Частоты колебаний при  $n = 4$

Таким образом, получены точные аналитические выражения для частот колебаний грузов в узлах балочной фермы в зависимости от числа панелей. Несмотря на то, что здесь приведены формульные решения только для  $n=2$  и  $n=3$ , для других чисел панелей решения, хотя и более громоздкие, содержащие корни квадратных уравнений, также могут быть выписаны или по приведенному алгоритму использованы в расчетных программах. При этом, вероятно основными результатами настоящего исследования можно считать обнаружения в спектре частот одной частоты, не зависящей от числа панелей, а также определение простого явного выражения ее экстремума по высоте фермы. Безусловно, эти результаты во многом базируются на нахождении формул (1) и (2). Это составило основную трудность работы. Преодолеть проблемы индуктивного обобщения вида матриц по трем параметрам ( $i, j, n$ ) помог опыт авторов по нахождению общих решений для прогиба регулярных ферм [12,13] и упрощения преобразований, доступные для бисимметричных матриц [14].

#### Библиографический список

1. Bachmann H. *Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. 234 p.
2. Алдушкин Р. В., Савин С. Ю. Исследование работы треугольных ферм при статических и динамических воздействиях // *Строительство и реконструкция*. 2010. №. 3-29. С. 3-6.
3. Рыбаков Л. С., Мишустин И. В. Собственные колебания плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. №. 2. С. 3-16.
4. Рыбаков Л. С., Мишустин И. В. Применение метода сосредоточенных масс к анализу собственных упругих колебаний одной регулярной ферменной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. №. 4. С. 51-64.
5. Мишустин И.В., Рыбаков Л. С. Колебания плоских упругих ферм ортогональной структуры // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2003. №. 2. С. 168-184.
6. Коробко В. И., Алдушкин Р. В., Бояркина О. В. Экспериментальные исследования стальных ферм с параллельными поясами на статические и динамические воздействия // *Известия Орел ГТУ. Серия «Фундаментальные и прикладные проблемы техники и технологии»*. Орел: Орел ГТУ. 2009. №. 2/274. С. 9-12.
7. Ахмедова Е.Р., Канатова М.И. Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 октября*

- 2014 г. в 17 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания Юком», 31 октября 2014. С. 17-18.
8. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
  9. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35–44. doi: 10.22227/1997-0935.2016.10.35-44
  10. Заборская Н. В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования: сб. науч. тр. по мат-лам Междунар. науч.-практ. конф. 28 февраля 2015 г.: Часть 9. Тамбов, 2015. С. 58 - 60.
  11. Ванин М.В., Каганович А.Ф. О жесткости простой балочной фермы с произвольным числом панелей // Вестник научных конференций. 2016. № 3-6(7). Наука и образование в жизни современного общества: по материалам международной научно-практической конференции 31 марта 2016 г. Часть 6. С. 18-19.
  12. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С. 12–33.
  13. Кирсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы: справочник. М.: ИНФРА-М, 2019. 238 с.
  14. Vorobiev O., Kirsanov M., Cherepanov S. About some bissyymmetric matrix of regular type Наука и образование в XXI веке. Сборник трудов по материалам Международной научно-практической конференции. 30 сентября 2013 г. Часть 23. Тамбов, 2013. Изд-во ТРОО "Бизнес-Наука-Общество", С.8-9.

#### References

1. Bachmann H. Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995. 234pp.
2. Aldushkin R.V., Savin S.Yu. Study of the work of triangular trusses under static and dynamic effects./ Construction and Reconstruction. 2010. No. 3-29. Pp. 3-6.
3. Rybakov L.S., Mishustin I.V. Own oscillations of plane regular elastic trusses of orthogonal structure. Mechanics of composite materials and structures. 1999. Vol. 5. No. 2. p. 3-16.
4. Rybakov L.S., Mishustin I.V. Application of the method of concentrated masses to the analysis of natural elastic oscillations of one regular truss structure. Mechanics of Composite Materials and Designs. 1999. Vol. 5. No. 4. Pp. 51-64.
5. Mishustin IV, Rybakov L. S. Oscillations of flat elastic trusses of orthogonal structure. News of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics. 2003. No. 2. Pp. 168-184.
6. Korobko V.I., Aldushkin R.V., Boyarkina OV. Experimental studies of steel trusses with parallel belts on static and dynamic effects. Izvestia Orel GTU. Series "Fundamental and applied problems of engineering and technology." Orel: Orel GTU. 2009. No. 2/274. Pp. 9-12.
7. Akhmedova E.R., Kanatova M.I. Own vibration frequencies of a flat beam truss of a regular structure/ Science and education in the 21st century: a collection of scientific papers based on the materials of the International Scientific and Practical Conference on October 31, 2014 in 17 parts. Part 11. Tambov: Consulting Company Ucom LLC, October 31, 2014. Pp. 17-18.
8. Kanatova M.I. Frequency equation and vibration analysis of a flat beam truss. Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Infra-М. 2015. V. 1. S. 31-34.
9. Kirsanov M. N. On the influence of the inclination of the movable support on the rigidity of a beam truss. Vestnik MGSU. 2016. No. 10. Pp. 35–44. Doi: 10.22227 / 1997-0935.2016.10.35-44
10. Zaborskaya N. V. On the horizontal displacement of a support of a flat beam truss. Pro-

- spects for the development of science and education: collection of papers. Scientific Tr. according to the Lam Intern. Scientific-practical conf. February 28, 2015: Part 9. Tambov, 2015. Pp. 58 - 60.
11. Vanin M.V., Kaganovich A.F. On the rigidity of a simple girder truss with an arbitrary number of panels. Bulletin of Scientific Conferences. 2016. № 3-6 (7). Science and education in the life of modern society: according to the materials of the international scientific-practical conference March 31, 2016 Part 6. Pp. 18-19.
  12. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems of deflection of flat trusses of arch type. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktzii*. 2018. T.1. №16. Pp. 12–33.
  13. Kirsanov M. N. Flat trusses. Schemes and calculation formulas: reference book. M.: INFRA-M, 2019. 238 p.
  14. Vorobiev O., Kirsanov M., Cherepanov S. About some bisymmetric matrix of regular type Science and education in the XXI century. Collection of papers on the materials of the International Scientific and Practical Conference. September 30, 2013. Part 23. Tambov, 2013. Publishing house of the Business-Science-Society TRU, Pp. 8-9.

## ANALYTICAL EXPRESSIONS OF THE FREQUENCIES OF SMALL OSCILLATIONS OF A GIRDER WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov<sup>1</sup>, D. V. Tinkov<sup>2</sup>

National Research University “MPEI”<sup>1,2</sup>  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>Dr.Sci., Professor tel: +7(916)592-49-52; e-mail:c216@ya.ru

<sup>2</sup>Graduate student Tinkov D. V. tel:+7(495)362-73-14; e-mail:dvtinkov@yandex.ru

---

A simplified model of a truss with masses concentrated in the nodes of the lower zone of the truss is considered. Only vertical displacements of loads are taken into account. The equations of motion are written in matrix form. The stiffness at the nodes is calculated using the Maxwell – Mohr formula. The forces in the rods are defined in symbolic form in the Maple computer mathematics system. It is shown that for the symmetric form of the matrix, the solutions have a symmetric form, which allows us to obtain a characteristic equation that allows accurate solutions for all frequencies, regardless of the number of degrees of freedom. A generalization of the particular solutions by an arbitrary number of panels produced by the method of induction. It is found that one of the oscillation frequencies does not depend on the number of panels and is the average in the frequency spectrum.

**Keywords:** truss, oscillation frequency, bisymmetric matrix, induction, analytical solution, Maple.

## ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ ПРИ РАВНОМЕРНОМ ЗАГРУЖЕНИИ

Н. А.Белянкин<sup>1</sup>, А. Ю.Бойко<sup>2</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Студент; e-mail: [belankin2@gmail.com](mailto:belankin2@gmail.com)

<sup>2</sup>Студент; e-mail: [boykoanyu@mail.ru](mailto:boykoanyu@mail.ru)

---

Симметричная статически определимая ферма с треугольной решеткой, прямолинейным верхним поясом и приподнятым в середине пролета нижним поясом равномерно загружается по узлам. Методом индукции выводятся аналитические зависимости прогиба середины пролета от числа панелей. Уравнения равновесия узлов для определения усилий в стержнях решаются в символьной форме в системе компьютерной математики Maple. Используется формула Максвелла - Мора и аппарат составления и решения рекуррентных уравнений для получения общего решения.

**Ключевые слова:** ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, Maple

### Введение

Альтернативой общепринятому численному методу расчета ферм является метод аналитический. Актуальность аналитических формул для расчета строительных конструкций определяется с одной стороны их простотой, а с другой — числом независимых параметров конкретной задачи. Формулы для расчета конструкции с фиксированным числом узлов, в которые входят только размеры, величина нагрузки определенного вида и характеристики свойств материала, получаются в известных системах компьютерной математики (Maple, Maxima, Mathematica, Derive, Reduce) достаточно просто, но особой ценности они не имеют.

Существенно расширяет область применения расчетных формул для регулярных ферм, обладающих некоторой периодичностью структуры, такой параметр (или параметры) как число ячеек периодичности, или в частности, число панелей.

В работах [1-12] в системе Maple с использованием метода индукции найдены аналитические решения для арочных ферм. Решения задач о прогибе решетчатых ферм получены в работах [13-21]. Метод индукции применен при анализе пространственных конструкций [22-29] и для внешне неопределимых ферм [30,31]. Известны также формулы для частот и коэффициентов частотных уравнений задачи о колебании груза на ферме с произвольным числом панелей [32-34], полученные методом индукции в системе Maple.

### Расчет

Рассмотрим ферму, высота которой в средней части пролета  $h$ , а по краям  $2h$  (рис. 1). Ферма с  $2n$  панелями (считаются по верхнему поясу) содержит  $m = 8n+6$  стержней.

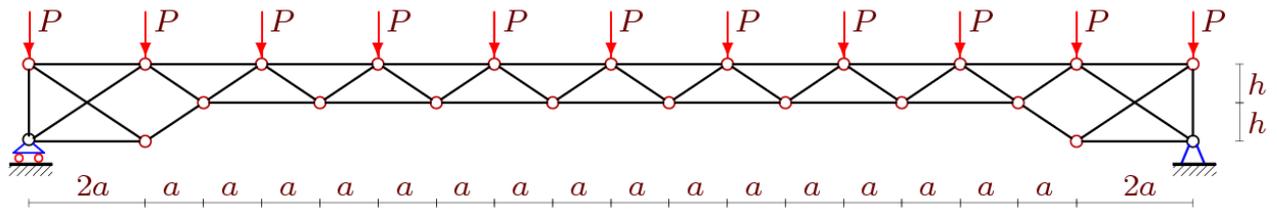


Рис. 1. Ферма при  $n = 5$

Решение задачи о выводе аналитической зависимости прогиба от числа панелей начинается с определения усилий в стержнях. В [35] разработана Maple-программа, основанная на методе вырезания узлов и составления матрицы уравнений равновесия всех узлов, дающая решение задачи об усилиях в символьной форме. В программу вводятся координаты узлов, порядок соединения стержней и узлов (рис. 2).

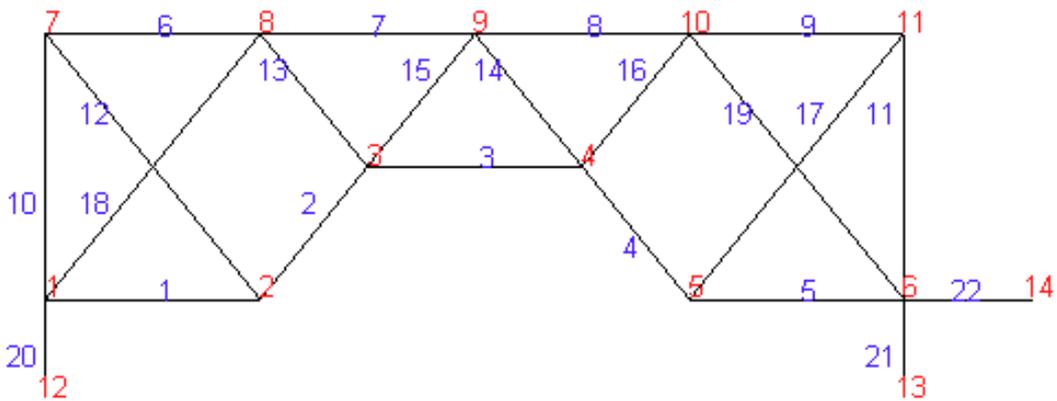


Рис. 2. Нумерация узлов и стержней фермы,  $n=2$

Смещение вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

где  $s_i$  — усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки, приложенной к узлу с номером  $3n-3$  в середине верхнего пояса,  $S_i$  — усилия от внешней нагрузки, распределенной по узлам верхнего (рис. 1) или нижнего (рис. 3) пояса,  $l_i$  — длины стержней,  $EF$  — жесткость стержней, принятая одинаковой для всех стержней конструкции. Три опорные стержня, усилия которых также входят в систему уравнений равновесия узлов, приняты недеформируемыми, поэтому суммирование ведется до  $m-3$ .

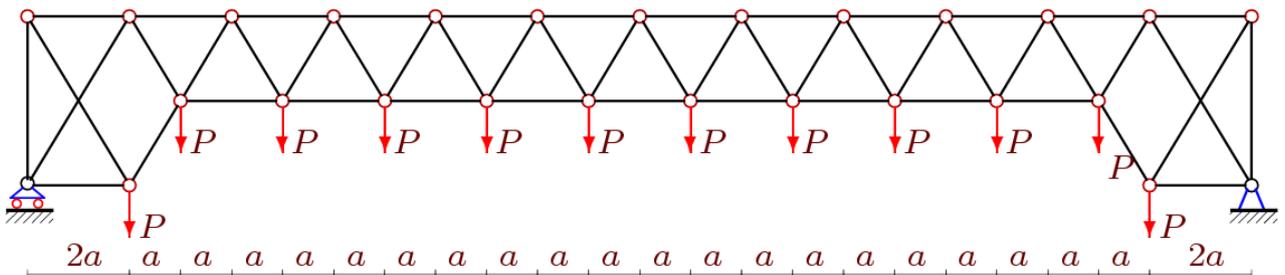


Рис. 3. Ферма при  $n = 6$ . Нагружен нижний пояс

На основе анализ решения задачи о прогибе ферм с различным числом панелей получено следующее выражение для прогиба

$$EF\Delta = P(A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3) / h^2, \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{h^2 + a^2}$ .

Рассчитаем коэффициенты в (1) от нагрузки по нижнему поясу при нагрузке от 2-го узла, до узла с номером  $2n + 1$  (рис.2, рис. 3). Методом индукции получено

$$\begin{aligned} A_n &= (10n^4 + 14n^2 - 24) / 3, \\ C_n &= n^2 + 12n - 6, \\ H_n &= 2n - 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Для получения этих зависимостей из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$ ,  $c$  и  $h$ :

- Для размера  $a$ : 564, 304, 920, 2192, 4480, 8224, 13944, 22240, 33792, 49360, 69784, 95984, 128960, 169792;
- Для размера  $c$ : 22, 39, 58, 79, 102, 127, 154, 183, 214, 247, 282, 319, 358, 399;
- Для размера  $h$ : 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28.

Для последовательностей меньшей длины закономерность найти не удастся. Оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал однородное линейное рекуррентное уравнение пятого порядка, которому удовлетворяют члены последовательностей:

$$A_n = 5A_{n-1} - 10A_{n-2} + 10A_{n-3} - 5A_{n-4} + A_{n-5}. \quad (3)$$

Аналогично, получены уравнения меньшего порядка и для коэффициентов  $C_n$  и  $H_n$ :

$$\begin{aligned} C_n &= 3C_{n-1} - 3C_{n-2} + C_{n-3}, \\ H_n &= 2H_{n-1} - H_{n-2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения (2) этих уравнений получены при помощи оператора **rsolve** с соответствующими начальными данными. Приведем соответствующий фрагмент программы на языке Maple

```
> Nmax:=15;
  n:='n':with(genfunc);
> S:=seq(C3[i],i=2.. Nmax);
  NN:=nops([S])/2;
  Z:=rgf_findrecur(NN, [S], t,n);
      2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28
      7
      t(n) = 2 t(n - 1) - t(n - 2)
> ZZ:=simplify(rsolve({Z,seq(t(i+1)=S[i],i=1..NN)},t));
collect(ZZ,n);
      2 n - 2
```

2. Рассчитаем коэффициенты в решении (1) от нагрузки по *верхнему* поясу (рис.1).

Методом индукции при нагрузке в узлах фермы с порядковыми номерами от  $2n+3$  до  $4n+3$  получены следующие формулы:

$$A_n = (10n^4 - n^2)/3,$$

$$C_n = n^2 + 12n - 7,$$

$$H_n = 2n - 3.$$

Для этого из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$ ,  $c$  и  $h$ :

- Для размера  $a$ : 52, 267, 848, 2075, 4308, 7987, 13632, 21843, 33300, 48763, 69072, 95147, 127988, 168675;
- Для размера  $c$ : 21, 38, 57, 78, 101, 126, 153, 182, 213, 246, 281, 318, 357, 398;
- Для размера  $h$ : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.

Оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал те же рекуррентные уравнения (3), (4), которым удовлетворяют члены последовательностей.

Отметим, что в данном случае общая формула (1) расчета прогиба также не изменилась.

График зависимости прогиба фермы от числа панелей в данном случае при  $a = L/(4n)$ ,  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ ,  $P_0 = P(2n+1)$  представлен на рис. 4.

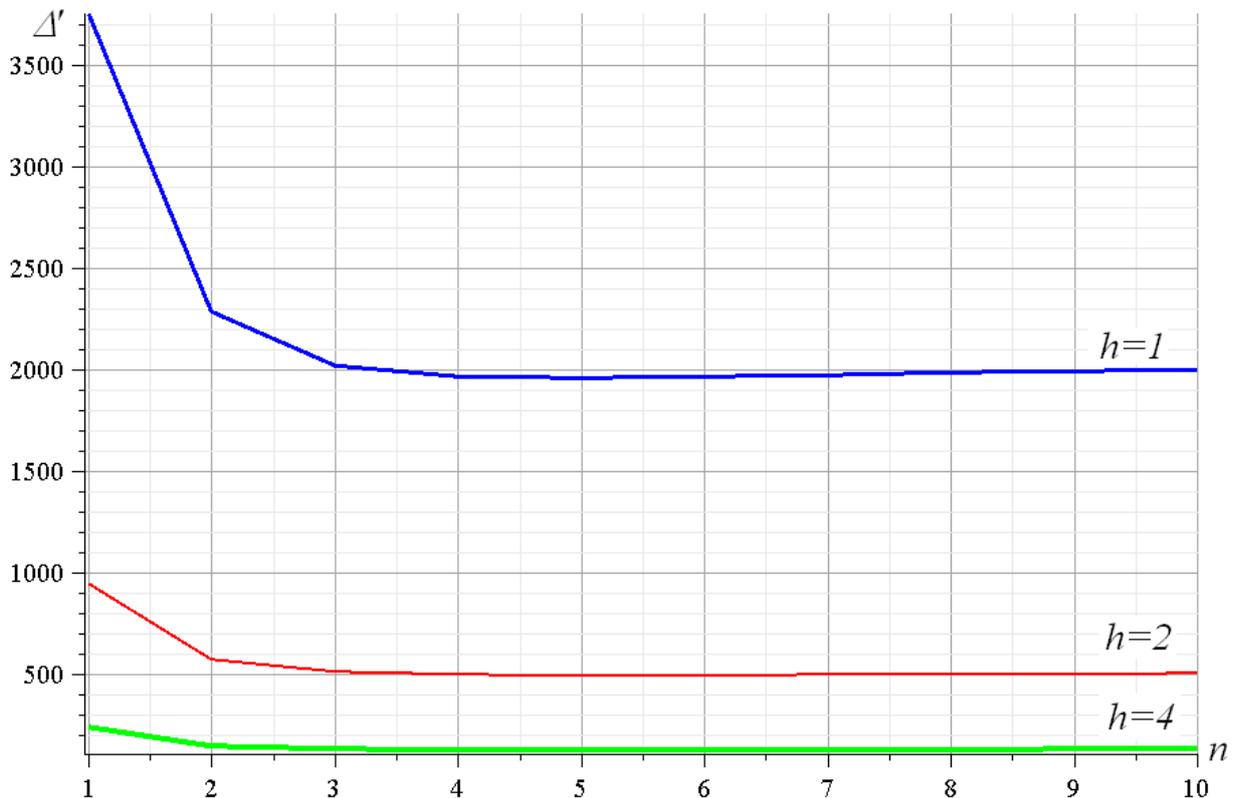


Рис. 4. Нагрузка по верхнему поясу. Зависимость прогиба от числа панелей,  $L=100$  м

Ход кривых подсказывает наличие наклонной асимптоты. Действительно, в принятой постановке (фиксирован пролет и общая нагрузка), имеем следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\Delta / n) = h / (2L).$$

Отсюда можно сделать вывод, что кривые при некотором значении числа  $n$  имеют минимум. Заметно, что в данном примере эта точка приходится на  $n=4$ . Это соответствует длине панели  $a = 100/16 = 6,25$  м.

Решение, полученное для стержней одинаковой жесткости, легко обобщить на случай, когда стержни разных длин имеют разные жесткости. Например, если горизонтальные стержни поясов длиной  $2a$  имеют жесткость  $\gamma_a EF$ , боковые стойки высотой  $2h$  жесткость  $\gamma_h EF$ , а раскосы длиной  $c$  и  $2c$  жесткость  $\gamma_c EF$ , где  $\gamma_a, \gamma_h, \gamma_c$  — безразмерные коэффициенты, то решение (1) будет иметь вид

$$EF\Delta = P(A_n a^3 / \gamma_a + C_n c^3 / \gamma_c + H_n h^3 / \gamma_h) / h^2.$$

### Выводы

Получены достаточно простые формулы, позволяющие оценивать деформативность предложенной схемы фермы. Сам алгоритм может быть перенастроен и на другие нагрузки. Пользуясь линейностью задачи по нагрузкам можно получить аналитические решения для достаточно широкого класса задач. Особенно эффективно полученное решение при большом числе панелей в ферме, т.е. в тех случаях, когда при численном решении системы уравнений большой размерности возникают трудности преодоления «проклятия размерности», связанного с неизбежным накоплением погрешностей счета.

Обзор работ, использующих метод индукции для вывода аналитических зависимостей для плоских ферм, дан в [12, 36, 37].

### Библиографический список

1. Бирбасов А. А. Аналитический расчет прогиба плоской арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 198-201.
2. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
3. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
5. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
6. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
7. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
8. Компанеец К. А Расчет смещения подвижной опоры плоской арочной раскосной фермы при нагрузке в середине пролета // Молодежь и наука. 2017. №4. С.108.
9. Савиных А. С. Анализ прогиба арочной раскосной фермы, нагруженной по верхнему поясу // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 3 (6). С. 12-17.

10. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
11. Voropay R.A., Domanov E.V. The derivation of the general formula for the shift of the movable support of arch type truss using the method of induction on two parameters in the system Maple // Постулат. 2019. №2. С. 11.
12. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
13. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
14. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
16. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами // Транспортное строительство. 2017. № 7. С. 15-18.
17. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
18. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "Butterfly" // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
20. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
21. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
22. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. № 5 (116). С. 579-586.
23. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49а-53.
24. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. 2016. № 1 (41). С. 93-100.
25. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
26. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
27. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
28. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость // Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
29. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе Maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИНФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
30. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.

31. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 3. С. 26-29.
32. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 31-34.
33. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Формулы для частоты колебания груза в произвольном узле балочной фермы // Транспортное строительство. 2018. №12. С. 21-23.
34. Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3
35. Кирсанов М.Н. Решебник. Теоретическая механика. Москва, 2008.
36. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12. С. 28.
37. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. №5(57). С. 66-73.

### References

1. Birbasov A. A. Analytical calculation of the deflection of a flat arched truss, loaded on the upper belt. Scientific Almanac. 2016. № 6-2 (19). Pp. 198-201.
2. Kirsanov M.N. Analytical study of deformations of a flat arch type truss. Bulletin of the State University of Marine and River Fleet. Admiral S.O. Makarova. 2015. № 3 (31). Pp. 42-48.
3. Kirsanov M.N. Analytical assessment of the deflection and effort in the critical rods of the arched truss. Transport Construction. 2017. No. 9. P. 8-10.
4. Kirsanov M.N. Formulas for calculating the deflection of an arched truss. Construction mechanics and structures. 2018. Т. 1. No. 16. S. 7-11.
5. Kirsanov M.N. Comparative analysis of the rigidity of two arched truss schemes. Construction of unique buildings and structures. 2015. № 9 (36). Pp. 44-55.
6. Kirsanov M.N. Inductive analysis of deformation of an arched truss. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Vol. 14. No. 1. P. 64-70.
7. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. On the dependence of the deformations of a flat arched truss on the number of panels. Construction mechanics and the calculation of structures. 2017. No. 5 (274). Pp. 9-14.
8. Kompaneets K. A. Calculation of the displacement of the movable support of a flat arched diagonal truss with a load in the middle of the span. Youth and Science. 2017. №4. P.108.
9. A. Savinykh. C. Analysis of the trough of an arched braced truss loaded on the upper belt.. Construction and architecture. 2017. Volume 5. Issue 3 (6). Pp. 12-17.
10. Tinkov D.V. Calculation of the deflection of a flat arched truss with a cruciform grille. Postulate. 2017. No. 12 (26). P. 74.
11. Voropay R.A., Domanov E.V. This is an example of a truss using a modular map.. Postulate. 2019. №2. P. 11.
12. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems on the deflection of planar trusses of arch type. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018, vol. 1. no.16. pp. 12–33.
13. Kirsanov M.N. Static calculation of a flat truss with a double triangular lattice. Reference book. Engineering journal with the application. 2017. № 11 (248). Pp. 32-36.
14. Kirsanov M.N. The dependence of the deflection of a flat lattice truss on the number of panels. Mechanization of construction. 2017. Т. 78. № 10. P. 24-27.
15. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a girder truss with a complex lattice. Construction mechanics and structure calculation. 2015. № 3 (260). Pp. 7-12.

16. Kirsanov M.N. Calculation of the deflection of a flat lattice truss with four supports. *Transport Construction*. 2017. No. 7. P. 15-18.
17. Kirsanov M.N. To the choice of the lattice girder truss. *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2017. No. 3. P. 23-27.
18. Kirsanov M.N. Analytical calculation of multi-lattice trusses. *Construction mechanics and calculation of structures*. 2014. No. 6 (257). Pp. 2-6.
19. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a girder truss with a lattice of the "Butterfly" type. *Construction mechanics and structure calculation*. 2016. No. 4 (267). Pp. 2-5.
20. Kirsanov M.N. Analytical method for calculating the deflection of a flat truss with a complex truss-type grid // *Transport Construction*. 2017. No. 5. P. 11-13.
21. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // *Structural mechanics and structures*. 2018. No. 2 (17). Pp. 72-79.
22. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a spatial rectangular coating // *Vestnik MGSU*. 2018. T. 13. No. 5 (116). Pp. 579-586.
23. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the spatial core system // *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2012. № 1. S. 49a-53.
24. Kirsanov M.N. Stress state and deformations of a rectangular spatial core coating // *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and architecture*. 2016. № 1 (41). P. 93-100.
25. Kirsanov M.N. Assessment of the deflection and stability of the spatial beam truss. *Construction mechanics and the calculation of structures*. 2016. No. 5 (268). Pp. 19-22.
26. Kirsanov M.N. Analytical calculation and optimization of the spatial beam truss. *Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute*. 2012. № 5. S. 5-8.
27. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of the spatial core system. *Engineering and Construction Journal*. 2011. No. 6 (24). Pp. 28-34.
28. Kirsanov M.N. Calculation of a spatial core system that allows instant variability. *Construction mechanics and structure calculation*. 2012. № 3 (242). Pp. 48-51.
29. Leonov P.G., Kirsanov M.N. Analytical calculation and analysis of the spatial core structure in the Maple system. In the collection: *Informatization of engineering education INFORINO-2014 Proceedings of the international scientific-methodical conference*. 2014. p. 239-242.
30. Kirsanov M.N. Derivation of a formula for deflection of a lattice truss with cases of kinematic variability. *Construction mechanics and structures*. 2017. V. 1. No. 14. P. 27-30.
31. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of the expansion truss with an arbitrary number of panels. *Mechanization of construction*. 2017. T. 78. № 3. S. 26-29.
32. Kanatov M.I. Frequency equation and vibration analysis of a flat beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M. 2015. V. 1. S. 31-34.
33. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Formulas for the frequency of oscillation of cargo in an arbitrary node of a girder truss. *Transport Construction*. 2018. №12. Pp. 21-23.
34. Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical solution of the problem of the frequency of oscillation of the load in an arbitrary node of a beam truss in the Maple system. *Construction: science and education*. 2018. T. 8. Vol. 4. Art. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227 / 2305-5502.2018.4.3
35. Kirsanov M.N. *Reshebnik. Theoretical mechanics*. Moscow, 2008.
36. N. Osadchenko. Calculation of the deflection of a flat continuous statically definable truss with two spans. *Postulate*. 2017. No. 12. P. 28.
37. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures. *Engineering and Construction Journal*. 2015. №5 (57). Pp. 66-73.

# FORMULA FOR DEFLECTION OF A GIRDER WITH AN ARBITRARY NUMBER OF PANELS UNDER THE UNIFORM LOAD

N. A. Belyankin<sup>1</sup>, A. Y. Boyko<sup>2</sup>

National Research University "MPEI",  
Russia, Moscow

---

<sup>1</sup>Student; e-mail: [belankin2@gmail.com](mailto:belankin2@gmail.com)

<sup>2</sup> Student; e-mail: [boykoanyu@mail.ru](mailto:boykoanyu@mail.ru)

---

Symmetric statically definable truss with a triangular lattice with a rectilinear upper belt and a lower belt raised in the middle of the span is evenly loaded over the nodes. The induction method is used to derive analytical dependencies of the mid-span deflection on the number of panels. Equilibrium equations of nodes for determining the forces in the rods are solved in symbolic form in the Maple computer math system. The Maxwell-Mohr formula and the apparatus for compiling and solving recurrent equations are used to obtain a general solution.

**Keywords:** Truss, deflection, Maxwell-Mohr formula, Maple

# ДИНАМИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ

УДК 624.04

## СОВРЕМЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ ПОДРЕССОРЕННУЮ НАГРУЗКУ

В. С. Сафронов<sup>1</sup>, А. В. Антипов<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1</sup>

ООО «Дортранспроект»<sup>2</sup>

Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 2715230, e-mail: [yss22@mail.ru](mailto:yss22@mail.ru)

<sup>2</sup>Ведущий инженер

Сопоставляются варианты динамических моделей для описания совместных колебаний автотранспортных средств и пролетных строений автодорожных мостов, которые могут применяться при использовании современных конечно-элементных комплексов для оценки динамического воздействия транспортных средств, движущихся с постоянной скоростью по проезжей части, в зависимости от учета инертности несущих конструкций и временной подвижной нагрузки. Из анализа сертифицированных в РФ программных комплексов (ПК) делается вывод, что они в своем большинстве не дают возможности выполнять динамические расчеты мостовых конструкций на действие инертных экипажей с учетом обратной связи и кинематических возмущений от случайно расположенных неровностей на дорожном покрытии. Лишь отдельные ПК позволяют смоделировать колебания мостов при движении произвольной системы сосредоточенных сил.

В статье предлагается алгоритм построения дополнительных программных средств (плагинов), расширяющих возможности существующих программных комплексов для учета инертности движущихся транспортных средств и связанных с ней других факторов.

Для пояснения особенностей предлагаемого алгоритма приводятся результаты численных исследований колебаний балочной стержневой системы при движении подрессоренного груза на основе совместного использования американского конечно-элементного комплекса SAP2000 и вычислительной программы Mathcad.

**Ключевые слова:** стержневая система, подвижная инертная нагрузка, алгоритм динамического расчета, построение плагинов, расширяющих возможности современных программных комплексов, модельный пример расчета.

### Введение

При проектировании в настоящее время мостовых сооружений наряду с выполнением пространственных статических расчетов для оценки динамических качеств транспортных сооружений все чаще требуется выполнять оценку реакции сооружения на проезд тяжелых автомобилей одиночным порядком или в колонне. Необходимость таких расчетов постоянно растет, что вызвано появлением на магистральных и региональных автомобильных дорогах движущихся с большими скоростями тяжелых автопоездов. Другая причина проведения специальных динамических расчетов связана с использованием для строительства облегченных тонкостенных пространственных конструкций из высокопрочных материалов, которые обладают повышенной деформативностью. В таких конструкциях могут возникать резонансные параметрические колебания, вызванные неблагоприятными соотношениями между собственными частотами в нижней части спектра.

Формирование теории динамического действия подвижной нагрузки на деформируемые системы, которой к настоящему времени посвящены многочисленные публикации как в нашей стране, так и за рубежом началось с известной статьи академика А.Н. Крылова [1], посвященной

решению задачи о движении сосредоточенной силы по шарнирной неинертной балке. К настоящему времени можно все применяемые в исследованиях динамические модели для описания колебаний многообразных конструкций при действии подвижной нагрузки применительно к мостовым сооружениям на автомобильных дорогах объединить в следующие четыре группы:

1. Постановка **Крылова-Киселёва**. Нагрузка представляется системой сосредоточенных сил, а несущая система моделируется инертной механической системой, отражающей динамические особенности несущей мостовой конструкции.

2. Постановка **Виллиса-Стокса**. Нагрузка моделируется сосредоточенной в точке массой, а несущая система представляется неинертной несущей системой, деформации которой зависят от давления перемещающейся без отрыва от поддерживающей конструкции инертной нагрузки.

3. Постановка **Инглиса-Болотина**. Нагрузка и несущая система считаются инертными телами, взаимодействие между которыми зависит от возникающих при криволинейном движении сил инерции, включая силы Кориолиса, и отсутствии сил трения.

4. Постановка **Моргаевского-Фрыбы-Барчёнкова**. Инертная динамическая модель движущегося экипажа связана с инертной мостовой конструкцией односторонними в общем случае нелинейными упругими связями

Простейшие модели рассматриваемой задачи в постановке **Крылова-Киселева** нашли наиболее широкое применение в инженерной практике [2], так как они позволили обосновать принятую в нормативных документах РФ и других стран методику учета динамического эффекта от действия подвижной нагрузки в виде динамических коэффициентов, которые могут быть различными для перемещений и усилий [2]. Отметим, что полученные на основе такой постановки критические скорости движения нагрузки, при которых динамический эффект может быть бесконечно большим, не нашел подтверждения при эксплуатации автодорожных мостов. Оправданием этому является недостижимость критических скоростей автомобилями на автодорожных мостах. На натуральных объектах они также не выявлены для железнодорожных мостов, где скорости превысили критические значения.

Две следующие из перечисленных выше постановок (**Виллиса – Стокса** и **Инглиса-Болотина**) для подвижной нагрузки рассматривались некоторыми исследователями [3-4], однако в инженерной практике не получили применения из-за математической сложности реализации и незначительности получаемых эффектов.

Наибольшее практическое значение и распространение получила четвертая модель для автодорожных мостов, так как введение упругих связей между моделирующей автотранспортное средство и проезжей частью мостового сооружения дало возможность приблизить математическое описание рассматриваемых задач к действительной ситуации проезда экипажей на пневматических шинах по неровной поверхности проезжей части. Первые публикации по использованию упруго опёртой инертной модели подвижной нагрузки появились в 60-х годах прошлого века в СССР [6, 8] и Чехословакии [7].

Интенсивное развитие модели подвижной нагрузки с упругим опиранием получила на кафедре строительной механики Воронежского инженерно-строительного института (ВИСИ, затем ВГА-СА, ВГАСУ), где была создана научная школа под руководством д-ра техн. наук, проф. Барченкова А.Г.). Подробное изложение созданной группой воронежских исследователей теории динамического действия подвижной нагрузки на типовые, широко распространенные мостовые сооружения приведено в известной монографии [9] и опубликованном в Стройиздате под редакцией проф. Б.Г. Коренева и проф. А.Ф. Смирнова справочнике по динамическому расчету специальных инженерных сооружений и конструкций [10]. Применительно к мостовым сооружениям с нелинейно деформируемыми висячими и вантовыми несущими системами особенности теории динамического действия подвижной нагрузки изложены в монографии [11].

Отметим, что наряду с детерминированным учетом взаимодействия подвижной нагрузки подрессоренные модели оказались эффективными при построении вероятностных алгоритмов динамического расчета с использованием корреляционной теории случайных процессов [8-11].

Разработанная к настоящему времени теория динамического воздействия подвижной подрессоренной нагрузки на автодорожные мосты предполагает расчленение системы дифференциальных уравнений на две части. Первая описывает колебания движущегося транспортного средства, а вторая – колебания несущей мостовой конструкции. В зависимости от степени влияния обратной связи, учитывающей зависимость колебаний движущегося транспортного средства от перемещений точек опирания колес на проезжую часть, используются различные алгоритмы расчета. При малой обратной связи, имеющей место для несущих систем пролетами до 20 м, указанные выше две системы дифференциальных уравнений являются изолированными. Поэтому уравнения для инертной подвижной нагрузки интегрируются независимо для получения функций давления подвижной нагрузки на мост. Эти функции затем используются для описания колебаний несущей конструкции.

В случае значительной обратной связи динамический расчет должен выполняться путем интегрирования полной системы дифференциальных уравнений. В разработанных и реализованных на различных частных примерах методиках предлагалось приближенное решение на основе преобразования дифференциальной системы уравнений для несущей мостовой конструкции в ограниченный набор типовых уравнений для каждой из удерживаемых собственных форм. Недостатком такого подхода являлась невысокая сходимость при определении динамических усилий по величинам производных собственных форм.

Автоматизация динамического расчета мостовых сооружений с использованием подрессоренных моделей может быть осуществлена на основе применения современных конечно-элементных комплексов. Из анализа сертифицированных в РФ программных комплексов SCAD, LIRA, MicroFe, MIDAS, SAP2000 можно сделать вывод, что они в своем большинстве не дают возможности выполнять динамические расчеты мостовых конструкций на действие инертных экипажей с учетом обратной связи и кинематических возмущений от случайно расположенных неровностей на дорожном покрытии. Исключением является американский вычислительный комплекс SAP2000, который предоставляет возможность моделировать колебания автодорожных мостов с произвольными несущими системами в постановке **Крылова-Киселёва** при движении произвольной системы сосредоточенных сил [13]. Для проведения полноценного динамического расчета с учетом инертности, обратной связи и наличия неровностей на проезжей части необходима разработка специализированных программ (плагинов), расширяющих возможности существующих комплексов. Особенно значительные колебания возникают в мостовых сооружениях со сталежелезобетонными пролетными строениями [12]. В настоящей статье предлагается и апробируется алгоритм и методика уточненного динамического расчета с применением современных вычислительных комплексов, возможности которых расширены специальными дополнительными плагинами.

Для пояснения особенностей предлагаемой методики ниже приводятся результаты численных исследований колебаний балочной стержневой системы при движении подрессоренного груза на основе совместного использования американского конечно-элементного комплекса SAP2000 [13] и вычислительной программы Mathcad.

### **1. Методика уточненного детерминированного динамического расчета мостовых сооружений на действие одиночных автотранспортных средств**

Рассматриваются совместные колебания движущегося с постоянной скоростью по неровной проезжей части в общем случае многоосного автотранспортного средства и поддерживающей дорожное покрытие несущей мостовой конструкции (рис. 1). Предлагаемая методика рассчитана на совместное использование вычислительной математической программы Mathcad и оснащённого блоком динамического расчета на движущуюся с постоянной скоростью систему сосредоточенных вертикальных сил мостовой конструкции, заданной в виде динамической конечно-элементной стержневой, пластинчатой или смешанной расчетной схемы.

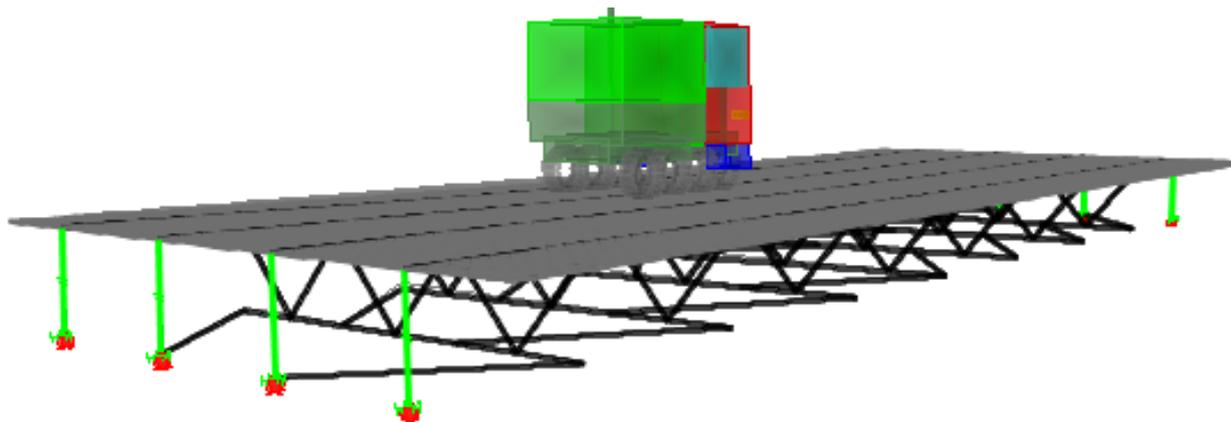


Рис. 1. Динамическая расчетная схема проезда автотранспортного средства по мосту

Дифференциальные уравнения совместных колебаний моста и нагрузки в рассматриваемой постановке можно представить в следующем матрично-операторном виде:

1) для подрессоренной нагрузки:

2)

$$M_a \ddot{Z}(t) + B_a \dot{Z}(t) + C_a Z(t) = \sum R_k(Z, y(vt, \eta), h(vt, \eta)); \quad (1)$$

3) для несущей мостовой конструкции

4)

$$M_m \ddot{X}(t) + B_m \dot{X}(t) + C_m X(t) = \sum R_k(Z, y(vt, \eta), h(vt, \eta)). \quad (2)$$

В уравнениях (1) и (2) введены следующие обозначения:

$Z(t)$  и  $X(t)$  - вектора обобщенных координат динамических расчетных моделей автотранспортного средства и несущей мостовой конструкции;

$M_a, B_a, C_a$  - матрицы инертности, демпфирования и жесткости механической инертной модели транспортного средства;

$M_m, B_m, C_m$  - матрицы инертности, демпфирования и жесткости несущей мостовой конструкции;

$y(vt, \eta), h(vt, \eta)$  - перемещение несущей конструкции и ордината микропрофиля дорожного покрытия под местом опирания  $k$ -й упругой связи транспортного средства;

Приведем систему уравнений (2) к удобному для выполнения численных расчетов виду, выполняя разложение по собственным формам несущей мостовой конструкции, отвечающих описываемым свободным недемпфированным колебаниям:

$$M_m \ddot{X}(t) + C_m X(t) = 0. \quad (3)$$

Учитывая в разложении для любой обобщенной координаты мостовой конструкции:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n T_i(t) \cdot \phi_i(x) \quad (4)$$

ограниченное число ( $i=1, 2 \dots n$ ) собственных форм и их ортогональность

$$(\phi_i(x) M_m, \phi_v(x)) = 0, \text{ при } i \neq v \quad (5)$$

преобразуем полную систему дифференциальных уравнений (2) к набору типовых уравнений для временных функций

$$T_v(t) + K_0 \cdot \omega_v^2 \cdot T_v + \omega_v^2 \cdot T_v = \sum_k R_k(\phi_v(vt, \eta)) / (\phi_v M_m, \phi_v) \quad (6)$$

$$(v = 1, 2, \dots, n),$$

где  $K_0, \omega_v$  - коэффициент неупругого сопротивления и частота собственной формы свободных колебаний несущей мостовой конструкции.

Последовательность вычислений для динамического расчета несущей мостовой конструкции на детерминированное действие подвижной подрессоренной инертной нагрузки состоит из следующих этапов:

1. Построение конечно-элементной расчетной схемы несущей мостовой конструкции с помощью библиотеки конечных элементов вычислительного комплекса с определением ограниченного числа низших собственных частот и соответствующих им собственных форм.
2. Численное решение системы уравнений (2) с использованием блока квазистатического расчета конечно-элементного комплекса на действие системы вертикальных сосредоточенных сил с архивацией массивов ординат  $y_{стат}(t)$  наиболее важных параметров напряженно-деформированного состояния в характерных сечениях мостовой конструкции. При этом для получения квазистатической составляющей используется прямое интегрирование уравнений движения с помощью численной пошаговой процедуры методом Ньюмарка.
3. Совместное решение дифференциальных уравнений (1) для автотранспортного средства и (6) - для несущей мостовой конструкции методом Рунге–Кутты четвертого порядка с архивацией набора ординат  $y_1(t)$ , описывающих колебания моста с учетом инертности, неровностей дорожного покрытия и обратной связи при проезде автомобиля. При этом решении используется разложение по собственным формам.
4. Численное интегрирование системы типовых уравнений (6) на действие статического веса автомобиля с архивацией набора ординат  $y_2(t)$ , описывающих квазистатическое изменение прогибов и усилий моста при движении неинертной модели автомобиля. При этом решении также используется разложение по собственным формам.
5. Определение динамической составляющей реакции моста на проезд автомобиля по неровной поверхности проезжей части по полученным ранее расчетным данным из формулы

$$y_{дин}(t_i) = y_1(t_i) - y_2(t_i). \quad (7)$$

6. Определение уточненной полной реакции моста на проезд инертного автомобиля по неровной поверхности проезжей части сложением статической и динамической составляющих:

$$y_{полн}(t_i) = y_{стат}(t_i) + y_{дин}(t_i). \quad (8)$$

Отметим, что совершенствование расчета полной динамической реакции мостовой конструкции выполняется за счет уточнения расчета квазистатической составляющей  $y_{стат}(t_i)$  на первом этапе расчета, где используется прямое интегрирование уравнений движения.

## **2. Апробация предлагаемой расчетной методики на примере балочной конструкции**

Для пояснения особенностей предлагаемого алгоритма приведем результаты численных исследований колебаний балочной стержневой системы при движении подрессоренного груза на основе совместного использования американского конечно-элементного комплекса SAP2000 и вычислительной программы Mathcad. На рис. 2 представлены расчетная схема подвижной нагрузки и поддерживающей несущей конструкции.

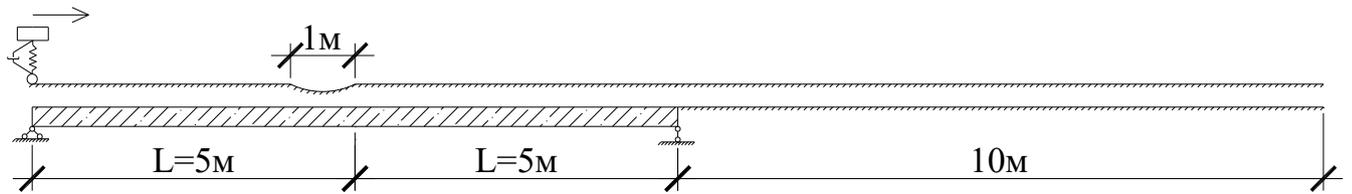


Рис. 2. Динамическая расчетная схема для модельного примера

При конечно-элементном представлении стержневой несущей системы использовались 20 классических стержневых конечных элемента без учёта сдвиговых деформаций в соответствии с балочной моделью Бернулли-Эйлера. Начальные условия для находящегося в начале балки подрессоренного груза принимаются статическими, для балки – нулевыми. Скорость движения груза по балке принимается постоянной. Изучение колебаний мостовой конструкции продолжают и после съезда подрессоренного груза на пути, равном длине балки. В расчетах удерживалось 5 собственных форм. Демпфирование для балки задавалось по Релею.

Подвижная нагрузка в расчетах принималась в виде опирающегося на балку инертного груза с одной степенью свободы. Уравнения (1) для такой модели имеют следующий вид:

$$M \times \ddot{Z}(t) + (C + k \times d/dt) \times [Z(t) - h(t) - y(t)] = M \times g, \quad (9)$$

где  $Z$ ,  $M$  – вертикальное перемещение и масса движущегося груза;  $c$ ,  $k$  – жесткость и коэффициент неупругого сопротивления упругой связи.

Дифференциальные уравнения (6) для описания колебаний мостовой конструкции для рассматриваемого модельного примера имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{T}_\vartheta(t) + K_0(\omega_\vartheta) \times \omega_\vartheta^2 \times \dot{T}_\vartheta(t) + \omega_\vartheta^2 \times T_\vartheta(t) = \\ = (C + k \times d/dt) \times [Z(t) - h(t) - \sum_\vartheta T_\vartheta(t) \times Y_\vartheta(vt)], (\vartheta = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

где  $Y_\vartheta(vt)$  – ординаты нормированных собственных форм балки под местом опирания на нее груза,  $v$  – скорость движения подрессоренного груза.

В динамических расчетах были приняты следующие количественные значения параметров:

**а) для подвижной нагрузки:**

масса подрессоренного груза  $M = 200$  кг;  
 жесткость упругой связи  $c = 150$  кН/м;  
 коэффициент неупругого сопротивления упругой связи  $k = 1$  кН/(м/с);  
 скорость равномерного движения подрессоренного груза  $v = 5$  м/с;  
 продолжительность движения груза по неровному пути – 4с;

**б) для мостовой конструкции:**

длина пролёта  $l = 10$ м;  
 модуль упругости железобетонной балки  $E = 30000$  МПа;  
 объёмный вес  $\gamma = 24$  кН/м<sup>3</sup>;  
 поперечное сечение балки (15×15) см;  
 логарифмический декремент для железобетонной балки –  $\delta = 0,3$ ;  
 параметр затухания колебаний балки –  $\xi = \delta / (2\pi) = 0,048$ .

Коэффициент затухания колебаний балки по Релею –  $K_0(\omega_v) = 2\xi(\omega_v) = 2\left(\frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_v} + \frac{a_1}{2} \omega_v\right)$ ,

где  $a_0 = 0.5914$ ,  $a_1 = 2.996 \cdot 10^{-4}$ .

Неровный путь задавался в виде изолированной впадины у середины пролёта:

$$h(t) = \begin{cases} 0, & v \cdot t < (l/2 - a), \\ \frac{h_0}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi vt}{a}\right), & (l/2 - a) \leq v \cdot t \leq l/2, \\ 0, & v \cdot t > l/2. \end{cases} \quad (11)$$

Длина изолированной неровности на балке  $a = 1,0$  м, глубина  $h_0 = 0,01$  м.

Численные исследования для приведенных параметров модельного примера выполнялись в соответствии с описанной выше последовательностью.

При вычислении квазистатической составляющей параметров напряженно-деформированного состояния использовалось прямое интегрирование уравнений движения с помощью численной пошаговой процедуры методом Ньюмарка. При этом решении подрессоренный груз рассматривался только как силовое вертикальное воздействие  $M \cdot g = 1.961$  кН.

Для получения динамической составляющей параметров напряженно-деформированного состояния от совместного взаимодействия подрессоренного груза с балкой интегрировалась система дифференциальных уравнений (10) методом Рунге–Кутты четвёртого порядка с постоянным шагом  $\Delta t = 0,005$ с. Количественные параметры пяти удерживаемых собственных форм: частоты, периоды и параметры затухания балки представлены в таблице, а вид этих форм, которые получены при обращении к программному комплексу SAP2000 - на рис. 3.

Таблица

Параметры удерживаемых собственных форм рассматриваемой балки

| Номер формы | Период | Техническая частота | Круговая частота | Коэффициент затухания колебаний |
|-------------|--------|---------------------|------------------|---------------------------------|
|             | с      | Гц                  | рад/с            |                                 |
| 1           | 0,420  | 2,3814              | 14,963           | 0,044                           |
| 2           | 0,105  | 9,5256              | 59,851           | 0,028                           |
| 3           | 0,047  | 21,432              | 134,66           | 0,045                           |
| 4           | 0,026  | 38,098              | 239,38           | 0,074                           |
| 5           | 0,017  | 59,517              | 373,96           | 0,114                           |

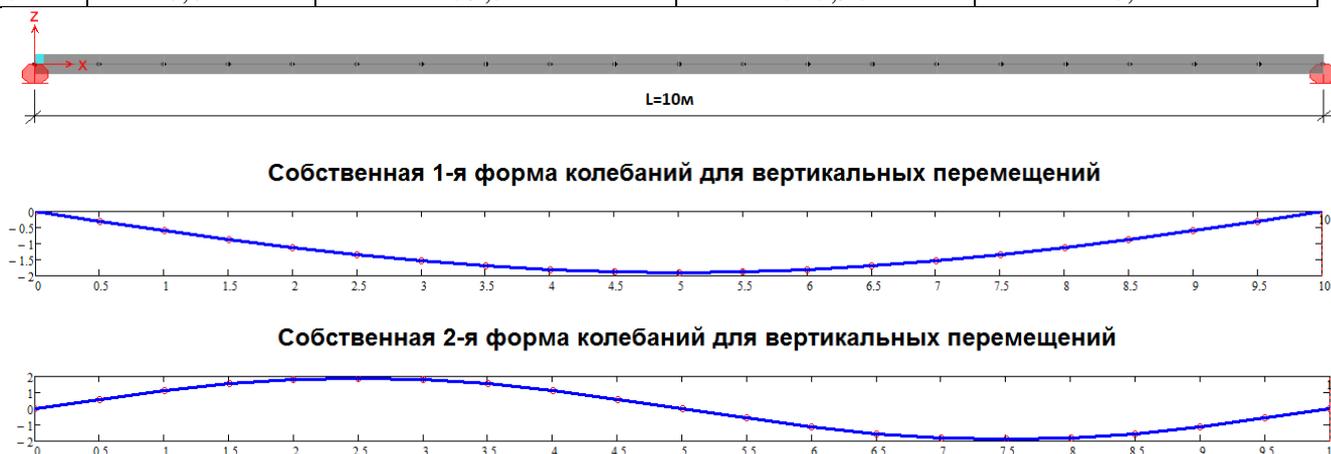
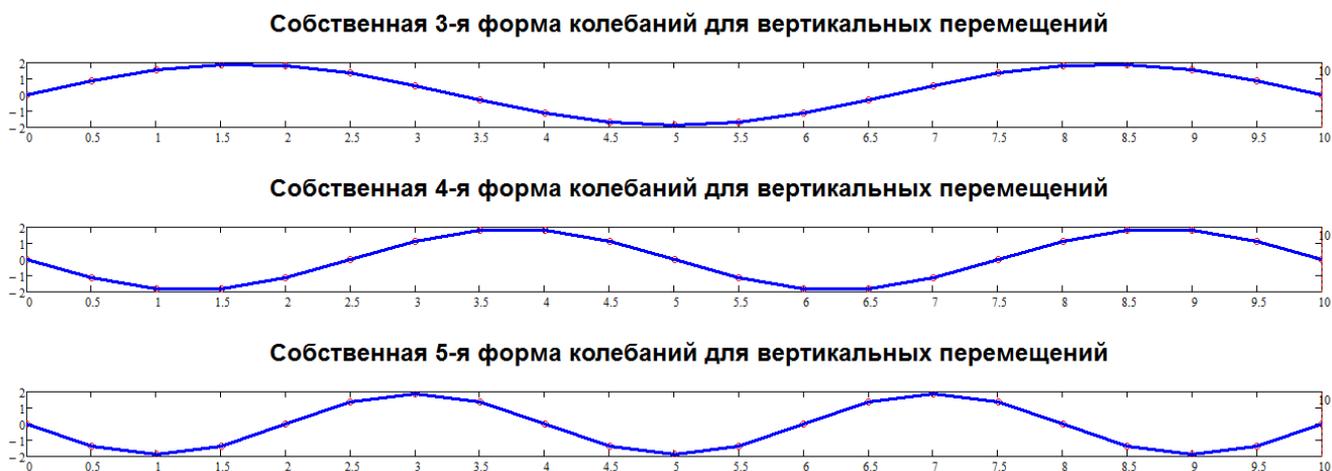
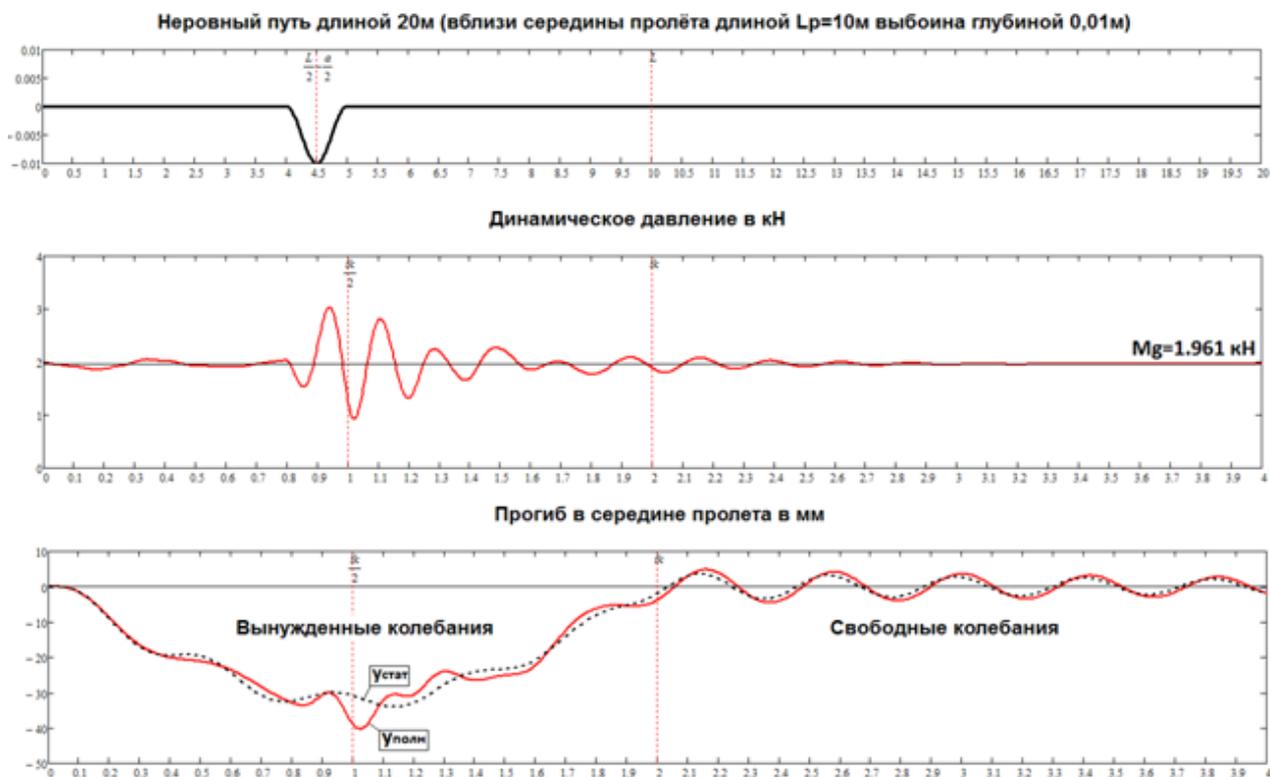


Рис. 3 (начало). Удерживаемые в расчёте нормированные собственные формы балки  $Y_v(x)$

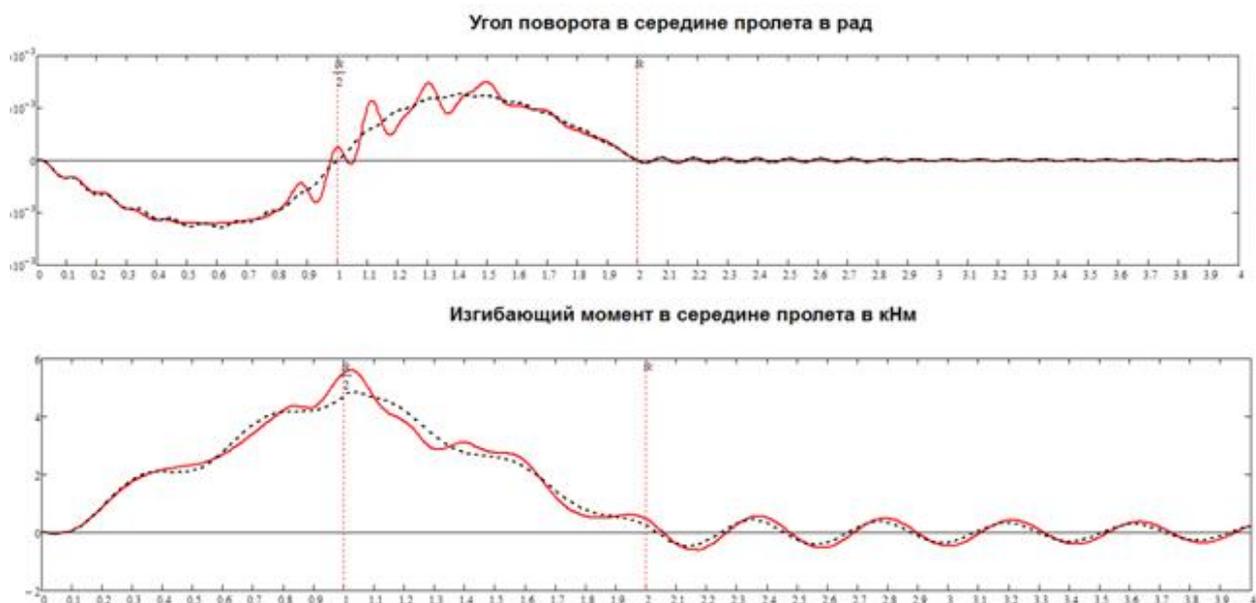


**Рис. 3 (окончание).** Удерживаемые в расчёте нормированные собственные формы балки  $Y_v(x)$

Результаты численных расчетов совместных колебаний балки и движущегося через расположенную вблизи середины пролёты одиночную неровность представлены на рис. 4. На графиках сплошными красными линиями показаны изменения различных параметров, полученные из полного решения, а штриховыми – изменения тех же параметров без учета обратной связи и кинематического возмущения от неровности на проезжей части. Отметим, что изменение давления на балку груза до момента переезда через неровность на втором графике представленного рисунка объясняется влиянием обратной связи



**Рис. 4 (начало).** Численные результаты динамического расчета балочной несущей системы на проезд через одиночную неровность поддресоренного груза



**Рис. 4 (окончание).** Численные результаты динамического расчета балочной несущей системы на проезд через одиночную неровность подрессоренного груза

## Выводы

1. Выполненная апробация предложенного алгоритма динамического расчета на примере балочной несущей системы и простейшей модели подвижной нагрузки показала возможность его применения для любых несущих систем мостовой конструкции, моделируемых линейно-деформируемыми расчетными схемами, и произвольных автотранспортных средств, включая многоосные автопоезда.

2. Для расширения применения в инженерной практике предлагаемой методики следует рекомендовать разработчикам вычислительных комплексов ПК: SKAD, MIDAS и др, пополнить возможности ПК блоками динамического расчета мостовых конструкций на действие движущихся сосредоточенных сил.

3. Применение уточненных динамических расчетов мостовых конструкций для проектируемых транспортных сооружений позволит оценивать динамическую реакцию моста на проезд современных тяжелых автомобилей и принимать более обоснованные проектные решения.

## Библиографический список

- 1 Крылов А.Н. Вибрации судов/ А.Н. Крылов. – М.: ОНТИ, 1936, 310с.
- 2 Киселев В.А. Динамические линии влияния перемещений и внутренних сил в балках рамах и плитах простых и на упругом основании от груза, движущегося с равномерной скоростью/ В.А. Киселев. - М.: Автотрансиздат,1956, с. 139-171 (Труды МАДИ, вып. 18).
- 3 Болотин В.В. О воздействии подвижной нагрузки на мосты/ В.В. Болотин. – М.: Трансжелдориздат, 1950 (Труды МИИТ, вып. 74), с. 40-58.
- 4 Ананьин А.И. О движении инертного груза по балке/ А.И. Ананьин, В.С. Гриненко// Исследования по статике и динамике стержневых и тонкостенных систем –Воронеж: Изд-во ВГУ, 1983. Вып. 1. С. 30--36

- 5 Ананьин А.И. К решению задачи Виллиса - Стокса/ А.И. Ананьин, А..Ф Хмыров// Исследования по строительной механике конструкций – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1984. – С. 60-65
- 6 Моргаевский А.Б. О влиянии рессор на динамического величину динамического эффекта от подвижной нагрузки/ А.Б. Моргаевский // Исследования по теории сооружений. Вып. XIV. – М.: Стройиздат, 1965, с. 65-71
- 7 Фрыба Л. Динамический расчет пролетных строений мостов //Строительная механика и расчет сооружений/ Л. Фрыба.– М., 1964, №2, с. 24-29
- 8 Сафронов В.С.К динамическому расчету на АВМ рам и балок при движении подрессоренных грузов / В.С. Сафронов, А.Г. Барченков, А.Н. Котуков, Р.И. Мальцев//Строительная механика и расчет сооружений .– М., 1968, №5, с. 34-36.
- 9 Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов/ А.Г. Барченков. – М.: Транспорт, 1976. – 198 с.
- 10 Сафронов. В.С. Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций. Динамика автодорожных мостов/ А.И. Ананьин, А.Г. Барченков, В.С. Сафронов// Справочник проектировщика. М., 1986, с. 327.
- 11 Сафронов В.С. Расчет вантовых и висячих мостов на подвижную нагрузку/ В.С. Сафронов. - Воронеж, Изд-во ВГУ, 1983, 196 с.
- 12 Сафронов. В.С. Экспериментально-расчетный анализ резонансных колебаний сталежелезобетонного пролетного строения автодорожного моста/ В.С. Сафронов, А.В. Антипов // Строительная механика и конструкции. - 2012. - Вып. 2(5). - С. 52-59.
- 13 Справочное руководство SAP2000. – Калифорния, Беркли, США, 2009. – 470 с.

## References

- 1 Krylov A.N. Ships vibration – М.: ONTI, 1936, 310p.
- 2 Kiselyov V.A. Dynamic lines of influence of replacement and inner forces in beams, frames and slabs and on elastic foundation on load moving with steady speed. М. Avtotransizdat,1956, P. 139-171 (Scientific works by MADI, issue 18)
3. Bolotin V.V. About movable load influence on bridges. М.: Transzheldoizdat, 1950 (Scientific works, issue 74), P. 40-58
4. Anan'in A.I., Grinenko V.S. About inert load movement along beam. Rod and thin-walled system dynamic investigation. Voronezh: Pub.house of VGU. 1983. Issue. 1. P. 30--36
5. Anan'in A.I., Khmyrov A.F. To Willis-Stokes problem solution. Investigation of structures on Structural Mechanics. Voronezh: Pub.house of VGU, 1984.- P. 60-65
6. Morgaevsky A.B. About springs influence on dynamic effect volume under movable load. Investigations on construction theory. Issue XIV. М.: Stroiizdat, 1965, p. 65-71
7. Fryba L. Dynamic design of bridge spans. Structural Mechanics and construction design. М., 1964, No2, p. 24-29
8. Safronov V.S., Barchenkov A.G., Kotukov A.N., Maltsev R.I. To dynamic design of frames and beams at spring load movement. Structural Mechanics and construction design. М. 1968, No5, p. 34-36.
9. Barchenkov A.G., Road bridges dynamic design. М.: Transport, 1976. – 198 p.
10. Safronov V.S., Anan'in A.I., Barchenkov A.G. Dynamic design of special engineering constructions and structures. Dynamic of bridges. Bulletin of designers road bridges. М., 1986, с. 327 – 348.
11. Safronov V.S., Movable load design of cable truss and suspension bridges. Voronezh. Pub. House of VGU, 1983, 196 p.

12. Safronov V.S., Antipov A.V. Experimental –design analysis of resonant vibrations of reinforced concrete road bridge span. Structural mechanics and constructsures. - 2012. - Issue. 2(5). - P. 52-59.
13. Reference manual SAP2000. Kalifornia , Berkley USA. 2009. – 470p.

## **MODERN ALGORITHMS OF BAR SYSTEMS DYNAMIC ANALYSIS OF MOVABLE SPRING LOAD**

V. S. Safronov<sup>1</sup>, A. V. Antipov<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1</sup>  
Ltd “Dortransproekt”<sup>2</sup>  
Russian, Voronezh

---

<sup>1</sup>Dr of Tech. Sc. of department of Structural Mechanics, tel.: +7 (473) 2715230, e-mail: [yss22@mail.ru](mailto:yss22@mail.ru)

<sup>2</sup>Leading engineer

---

Dynamic models variants for description of mutual vibrations of vehicles and bridge spans are compared. They can be applied while using modern finite element complexes for assessment of dynamic affect of moving with constant speed along carriage way vehicles in dependence with accounting of inertia of bearing structures and temporary movable load. According to the analysis of certificated software systems there is concluded they do not give the opportunity for dynamic design of bridge structures under affect of vehicles with account of back coupling and kinematic disturbance from randomly located roughness on road surface. Only some software systems allow simulating bridge vibrations during movement of concentrated forces arbitrary system.

Algorithm of additional software plagin expanding opportunities of existing software complexes for account of inertness of moving vehicles and other factors connecting with it is given in the paper.

For explanation of suggested algorithm peculiarities there are presented the results of numerical investigations of beam rod system at spring load movement based on mutual application of American finite element complex SAP2000 and computer program Mathcad.

**Keywords:** rod system, movable inertia load, Algorithm o dynamic design, plagin construction, expending opportunities of modern software, Model example of design.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ НЕРАЗРЕЗНОГО ПРОЛЕТНОГО СТРОЕНИЯ МОСТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

А. Н. Аверин<sup>1</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 271-52-30, e-mail: AN\_Averin@mail.ru

---

Рассматривается задача расчета колебаний неразрезного пролетного строения моста под действием подвижной нагрузки. Нагрузка прикладывается с эксцентриситетом по отношению к продольной оси моста. Расчетная схема пролетного строения моста представляется тонкостенным стержнем открытого профиля, а подвижная нагрузка - подрессоренным грузом, движущимся по неровному пути. Профиль неровного пути измерен в натуре нивелированием по намеченной на проезжей части прямой линии и интерполировался кубическими сплайнами. Приведена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая колебания системы «тонкостенный стержень + подрессоренный груз». С помощью метода конечных разностей выполнен переход от континуальной модели тонкостенного стержня к дискретной. На основе методики оценки связанности колебаний системы «неразрезная балка + подрессоренный груз» предложены различные алгоритмы интегрирования системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающей совместные колебания дискретной модели и подрессоренного груза. При сильной обратной связи применяются неявные схемы прямого интегрирования, а при слабой - метод разложения решения по собственным формам колебаний. Исследованы особенности спектра частот свободных изгибно-крутильных колебаний неразрезных тонкостенных стержней. Для проверки изложенной теории расчета были произведены измерения колебаний пролетного строения неразрезного моста со схемой пролетов 36,75 м+5\*63,0 м+36,75 м. В качестве подвижной нагрузки использовался загруженный автомобиль БелАЗ-540 массой 50,0 т. Нагрузка пропусклась с эксцентриситетом 2,0 м по отношению к продольной оси моста. Приведены экспериментальные и расчетные виброграммы. Отмечено удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных диаграмм, что указывает на адекватность выбранной нами расчетной схемы «мост + автомобиль» и натурального объекта.

**Ключевые слова:** колебания неразрезного пролетного строения моста под действием подвижной нагрузки, метод конечных разностей, свободные изгибно-крутильные колебания дискретных моделей неразрезных тонкостенных стержней, неявные методы прямого интегрирования дифференциальных уравнений, метод разложения решения по формам свободных колебаний.

### 1. Дифференциальные уравнения движения системы «тонкостенный стержень + подрессоренный груз»

В практике мостостроения имеют применение экономичные неразрезные сталежелезобетонные пролетные строения мостов прямолинейного и криволинейного очертания. Такие мосты считаются «узкими», так как их ширина значительно меньше длины наименьшего пролета. При движении нагрузки по мосту наряду с изгибом пролетного строения происходит его закручивание. Поэтому расчетную схему пролетных строений можно представлять тонкостенным стержнем открытого профиля прямолинейного или криволинейного очертания [1, 2].

Рассмотрим задачу вынужденных изгибно-крутильных колебаний неразрезного тонкостенного стержня под действием подрессоренного груза, движущегося по неровному пути (рис. 1).

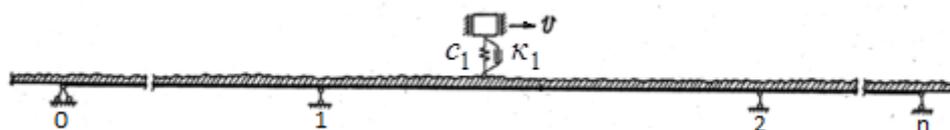


Рис. 1

Дифференциальные уравнения движения системы «тонкостенный стержень + подвесенный груз» имеют вид [3]

$$\begin{aligned}
(1 + \kappa_0 \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}) + \rho \cdot F (\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a_y \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}) &= 0, \\
(1 + \kappa_0 \frac{\partial}{\partial t}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) + \rho \cdot F (\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a_x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}) &= R(x, t) \cdot \delta(x - \chi), \\
(1 + \kappa_0 \frac{\partial}{\partial t}) [\frac{\partial^2}{\partial x^2} (EJ_\omega \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}) - \frac{\partial}{\partial x} (GJ_d \frac{\partial \Theta}{\partial x})] + \rho \cdot F (a_y \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \\
- a_x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + r^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}) &= e \cdot R(x, t) \cdot \delta(x - \chi) \\
m \frac{d^2 u}{dt^2} + R(\chi, t) &= mg,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $v(x, t), w(x, t)$  - компоненты перемещения центра изгиба по главным осям  $Ox$  и  $Oy$ ;  $\Theta(x, t)$  - угол закручивания сечения;  $EJ_x, EJ_y, EJ_\omega, GJ_d$  - изгибные, секториальная и крутильная жесткости;  $\rho$  - плотность материала стержня;  $F$  - площадь поперечного сечения;  $r^2 = (J_x + J_y)/F + a_x^2 + a_y^2$  - полярный радиус инерции относительно центра изгиба;  $a_x, a_y$  - координаты центра изгиба относительно осей  $xOy$ ;  $\delta(x - \chi)$  - дельта функция, фиксирующая положение груза;  $\chi(t) = V_0 \cdot t$  - текущая координата груза, движущегося со скоростью  $V_0$ ;  $e$  - эксцентриситет приложения силы динамического давления;  $\kappa_0$  - коэффициент неупругого сопротивления;  $u(t)$  - перемещение груза;  $m$  - масса груза;  $g$  - ускорение свободного падения.

Силовое возмущение  $R(\chi, t)$  в уравнениях (1) является функцией динамического давления на путь. С учетом обратной связи эту функцию представим в виде [1]

$$\begin{aligned}
R(\chi, t) &= c_1 [u(t) - w(\chi, t) - e \cdot \Theta(\chi, t) + H(\chi)] + \\
+ k_1 [\frac{d}{dt} u(t) - \frac{\partial}{\partial t} w(\chi, t) - e \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Theta(\chi, t) + \frac{\partial H}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial t}] &,
\end{aligned} \tag{2}$$

где  $c_1, k_1$  - коэффициенты жесткости и демпфирования рессор;  $H(\chi)$  - ордината профиля под грузом.

Краевые условия для системы (1) имеют вид:

$$\begin{aligned}
v(0, t) = 0, v(l, t) = 0; w(0, t) = 0, w(l, t) = 0; \Theta(0, t) = 0, \Theta(l, t) = 0; \\
[EJ_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}]_{(0, t)} = [EJ_y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}]_{(l, t)} = 0; [EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]_{(0, t)} = [EJ_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}]_{(l, t)} = 0; \\
[EJ_\omega \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}]_{(0, t)} = [EJ_\omega \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}]_{(l, t)} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Используя метод конечных разностей, перейдем от дифференциальной задачи (1) - (3) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих совместные колебания дискретной модели неразрезного тонкостенного стержня и подрессоренного груза:

$$M \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + K \frac{dY(t)}{dt} + CY(t) = R,$$

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + k_1 \frac{du(t)}{dt} + c_1 u(t) - c_1 \left[ \frac{x_i - \chi}{h_i} w(x_{i-1}, t) + \frac{\chi - x_{i-1}}{h_i} w(x_i, t) \right] - \quad (4)$$

$$- k_1 \left[ \frac{x_i - \chi}{h_i} \frac{dw(x_{i-1}, t)}{dt} + \frac{\chi - x_{i-1}}{h_i} \frac{dw(x_i, t)}{dt} \right] = mg - c_1 H(\chi) - k_1 \frac{dH}{d\chi} \frac{d\chi}{dt},$$

$$x_{i-1} \leq \chi(t) \leq x_i.$$

В уравнениях (4)  $Y(t)$  - вектор, компонентами которого являются перемещения центра изгиба в направлении главных осей, и углы закручивания в узлах сетки. Считается, что подрессоренный груз расположен на  $i$ -м дискретном элементе стержня с координатами узлов  $[x_{i-1}, x_i]$ .

Обозначим через

$$M_s = \begin{bmatrix} M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & m \end{bmatrix}, K_s = \begin{bmatrix} K & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, C_s = \begin{bmatrix} C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} Y \\ u \end{bmatrix} \quad (5)$$

расширенные матрицы и вектор и представим систему (4) в виде

$$M_s \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + [K_s + \kappa_1 S(\chi)] \frac{dU(t)}{dt} + [C_s + c_1 S(\chi)] U(t) = P(\chi). \quad (6)$$

В уравнениях (6)  $S(\chi(t))$  - эволюционная матрица, характеризующая взаимодействие подрессоренного груза и тонкостенного стержня;

$P(\chi) = [0, 0, \dots, 0, mg + c_1 H(\chi(t)) + k_1 \frac{dH}{d\chi} \frac{d\chi}{dt}, 0, \dots, 0]^T$  - составляющая вектора динамического давления, зависящая от положения груза на балке и возбуждаемых колебаний;  $H(\chi)$  - ордината профиля под грузом.

Таким образом, матрицы жесткости и демпфирования системы дифференциальных уравнений (6) имеют структуру, которая изменяется во времени при переходе груза с одного на другой дискретный элемент балки.

## 2. Методы и алгоритмы численного решения задачи колебаний тонкостенных балочных систем под действием подвижной нагрузки

Для численного решения системы дифференциальных уравнений (6) можно использовать различные методы интегрирования.

Расчет колебаний неразрезных балочных тонкостенных систем под действием подвижной нагрузки с использованием неявных методов прямого интегрирования рассматривался в работах [4, 5, 6, 7]. При таком походе на каждом временном шаге необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений с симметричной положительно определенной матрицей. Эта схема интегрирования наиболее эффективна, когда матрицы жесткости и масс системы «неразрезная балка + подрессоренный груз» изменяются во времени (матрица

демпфирования пропорциональна матрицам жесткости и масс). Такая ситуация возникает при сильной связанности колебаний неразрезной балки и подрессоренного груза (сильная обратная связь [1, 2]).

Методика оценки связанности колебаний системы «неразрезная балка + подрессоренный груз» приведена в [8]. Известно, что спектр собственных частот неразрезной балки с  $n$  пролетами состоит из зон сгущения с числом частот в каждой зоне, равным числу пролетов. При различном расположении подрессоренного груза на неразрезной балке определяются частоты, входящие в первую зону сгущения. Далее для каждой собственной частоты строится график ее изменения в зависимости от положения груза на балке. Если частота системы «балка + подрессоренный груз» отличается от соответствующей собственной частоты балки на 3 % и более, то связанность сильная, и надо проводить интегрирование связанной системы. Для оценки связанности колебаний обычно достаточно вычислить собственные частоты системы «балка + подрессоренный груз», располагая груз в середине наибольшего пролета. Оценку сверху связанности колебаний можно получить, рассматривая «квазирезонансный режим» колебаний, при этом жесткость рессоры задается так, чтобы собственная частота колебаний груза совпала с первой собственной частотой колебаний балки. Далее определяются частоты системы «балка + подрессоренный груз», при расположении груза в середине наибольшего пролета.

При слабой связанности колебаний балки и подрессоренного груза можно выполнять параллельное интегрирование уравнений балки и груза. В этом случае прогиб балки под грузом  $w(\chi(t_j))$  вычисляется через прогибы балки в узлах сетки с предыдущего момента времени  $t_j - \Delta t$  (аналогично и скорости перемещений  $\dot{w}(\chi(t_j))$ ). Тогда элементы матриц жесткости, демпфирования и масс в дифференциальных уравнениях колебаний дискретной модели балки во времени не изменяются. Следовательно, эффективная матрица перехода с одного временного слоя на другой, может быть заранее разложена в произведение нижней и верхней треугольных матриц и в результате время решения системы алгебраических уравнений на шаге интегрирования сокращается в два раза.

Наиболее эффективным методом расчета колебаний системы «тонкостенный стержень + подрессоренный груз» при слабой связанности является метод разложения колебаний стержня в ряд по собственным формам. Последующее преобразование уравнений вынужденных колебаний тонкостенного стержня методом Бубнова - Галеркина позволяет свести задачу к интегрированию разделенных дифференциальных уравнений.

Схемы прямого интегрирования достаточно эффективно можно применять и при расчете на подвижную нагрузку конструктивно-нелинейных систем. К таковым можно отнести неразрезную балку на односторонних опорах (упорах), работающих только на сжатие [9]. При различном положении нагрузки на балке отдельные опоры могут выключаться из работы, вследствие чего меняется расчетная схема системы «балка + подрессоренный груз». Действие подвижной нагрузки на балку, лежащую на одностороннем упругом основании, рассматривалось в работе [10]. Неявные схемы прямого интегрирования использовались при расчете колебаний сталежелезобетонной неразрезной балки под действием подвижной нагрузки с учетом раскрытия трещин в приопорной зоне [11].

### **3. Дискретные модели свободных колебаний неразрезных тонкостенных стержней**

Методика и алгоритмы построения разрешающих уравнений свободных колебаний дискретных моделей неразрезных прямолинейных и криволинейных тонкостенных стержней на основе метода конечных разностей изложены в работах [12, 13, 14, 15, 16]. Там же проанализированы вопросы сходимости и точности собственных частот и форм свободных ко-

лебаний в зависимости от числа дискретных элементов. Установлено, что погрешность при определении собственных частот и форм зависит от номера частоты и с увеличением числа узловых точек в формах колебаний возрастает. При увеличении числа дискретных элементов стержня в два раза погрешность убывает в четыре раза, т.е. разностные схемы имеют второй порядок точности по отношению к шагу дискретизации. Повышение точности конечноразностных решений (собственных частот и собственных форм колебаний) осуществлялось на основе экстраполяции Ричардсона на последовательности двух вложенных сеток [17]. В вышеперечисленных работах также изучены особенности спектров частот изгибно-крутильных колебаний неразрезных тонкостенных стержней.

Особенности спектра частот свободных изгибно-крутильных колебаний покажем на примере трехпролетного стержня. На рис. 2 приведены первая, вторая, третья и десятая формы свободных колебаний неразрезного трехпролетного стержня. На рис. 3, а показан спектр частот вертикальных изгибных колебаний неразрезного стержня в плоскости симметрии. Из рисунка видно, что спектр частот имеет зоны сгущения с числом частот в каждой зоне, равным числу пролетов неразрезного стержня. На рис. 3, б показан спектр изгибно-крутильных колебаний стержня. Частоты изгибно-крутильных колебаний также имеют зоны сгущения, число частот в которых, начиная с третьей зоны, *превышает число пролетов стержня* (дополнительные частоты на рис. 3, б обозначены крестиками).

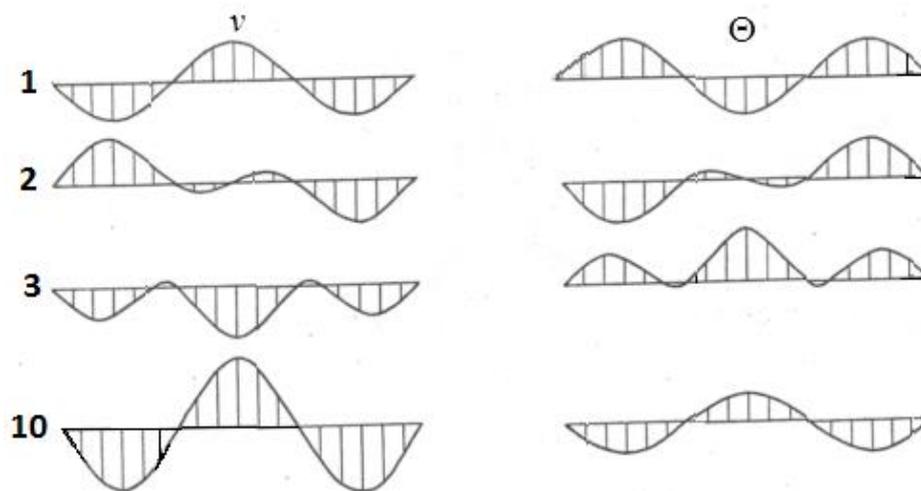


Рис. 2. Формы свободных колебаний  $\Omega_{u-k}$

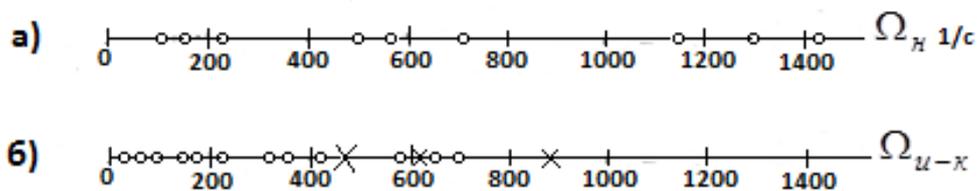


Рис. 3. Спектры частот изгибных и изгибно-крутильных колебаний

Это объясняется тем, что частотам  $\Omega_1$  и  $\Omega_{10}$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_{12}$ ,  $\Omega_3$  и  $\Omega_{15}$  отвечают формы с одинаковым числом узловых точек, которые отличаются друг от друга лишь числовым коэффициентом, характеризующим отношение между максимальными ординатами форм изгиба и угла закручивания поперечного сечения при колебаниях (см. рис. 2).

#### 4. Экспериментальные исследования вынужденных колебаний неразрезного пролетного строения моста

Для проверки изложенной теории расчета были произведены измерения колебаний пролетного строения неразрезного моста со схемой пролетов 36,75 м+5\*63,0 м+36,75 м. Пролетное строение состоит из двух стальных балок, объединенных сверху железобетонной плитой, а снизу горизонтальными связями. Конструкция, геометрические характеристики поперечного сечения и механические характеристики материала пролетного строения приведены на рис. 4. Ширина проезжей части моста 9,0 м.

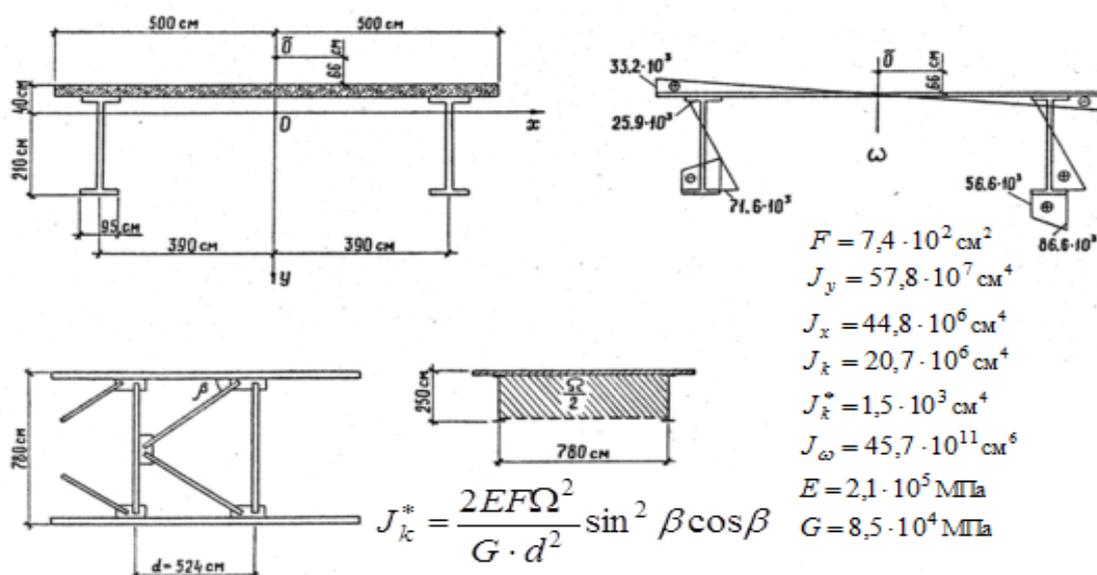


Рис. 4

В качестве подвижной нагрузки использовался загруженный автомобиль БелАЗ-540 массой 50,0 т. Нагрузка пропускалась с эксцентриситетом 2,0 м по отношению к продольной оси моста. Реализация неровного пути измерялась нивелированием с шагом 1 м по намеченной на проезжей части прямой линии и аппроксимировалась кубическими сплайнами. Для асфальтобетонных ровных без выбоин покрытий, находящихся в хорошем состоянии, шаг нивелирования 1 м считается оптимальным.

В процессе испытаний одновременно записывались вертикальные перемещения трех точек середины второго пролета:  $w_1, w_3$  - перемещения нижних полок главных балок,  $w_2$  - перемещение середины поперечной связи.

На рис. 5 показана принципиальная схема измерения динамических перемещений. Для записи осциллограммы динамических прогибов использовался комплекс приборов: тензопреобразователи (Т-1, Т-2, Т-3) в виде стальных гибких линеек, на верхней и нижней плоскости которых наклеены по два проволочных тензорезистора сопротивлением 200 Ом (рис. 5, а),

светолучевой двенадцати канальный осциллограф Н-117, блок питания П-133, восьмиканальный усилитель УПТ-8.

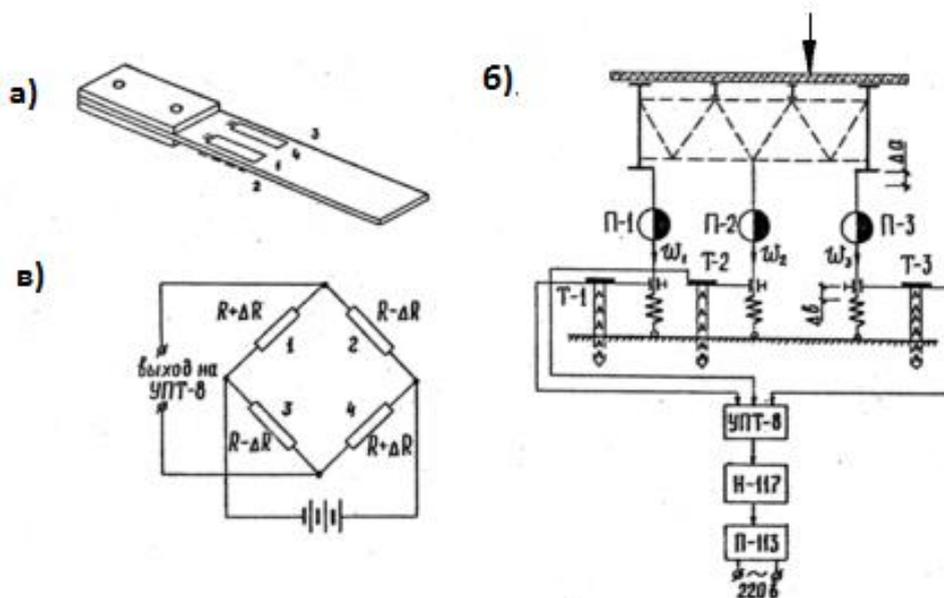


Рис. 5

Тензопреобразователи одним концом закреплялись неподвижно, а вторым фиксировались с помощью шарнирного устройства к проволоке, соединяющей пролетное строение моста с землей. Между точкой фиксации металлической линейки и неподвижной точкой закреплялась пружина, жесткость которой  $c$  подбиралась значительно меньше жесткости проволоки  $c \leq 50 \cdot c_{np}$ , где  $c_{np} = E \cdot F / l$  - приведенная жесткость проволоки.

Перемещения  $\Delta a$  пролетного строения определялись через перемещение фиксатора  $\Delta b$  по формуле  $\Delta a = \Delta b(1 - c / c_{np})$ .

Для повышения чувствительности и осуществления температурной стабилизации, без включения сопротивления, тензорезисторы на металлической линейке собраны по схеме тензометрического моста (рис. 5, в). При изгибе линейки вследствие продольной деформации тензорезистора изменяется его сопротивление на величину  $\Delta R$ , что приводит к пропорциональному изменению силы тока  $I$  в измерительной диагонали моста, где  $U$  - напряжение источника питания,  $R_G$  - внутреннее сопротивление гальванометра.

Сигналы, поступающие от датчиков, усиливались усилителем УПТ-8, подавались на гальванометры осциллографа и записывались на фотобумагу.

С целью определения масштаба записываемых осциллограмм с помощью прогибомеров Максимова П-1, П-2, П-3 (с ценой деления 0,01 см) выполнялась тарировка измерительных каналов. Загружение пролетного строения при этом производилось статической автомобильной нагрузкой. Перемещения, записанные на ленте осциллографа, представляют собой результат наложения колебаний пролетного строения на кривые их квазистатических составляющих.

При проведении динамического испытания моста по намеченной на проезжей части линии пропускался нагруженный автомобиль БелАЗ-540 со скоростью 20 км/час. Экспериментальные осциллограммы перемещений показаны на рис. 6. Цифрами 1 и 3 обозначены

перемещения нижних полок главных балок  $w_1, w_3$ , а цифрой 2 – перемещение  $w_2$  середины поперечной связи.

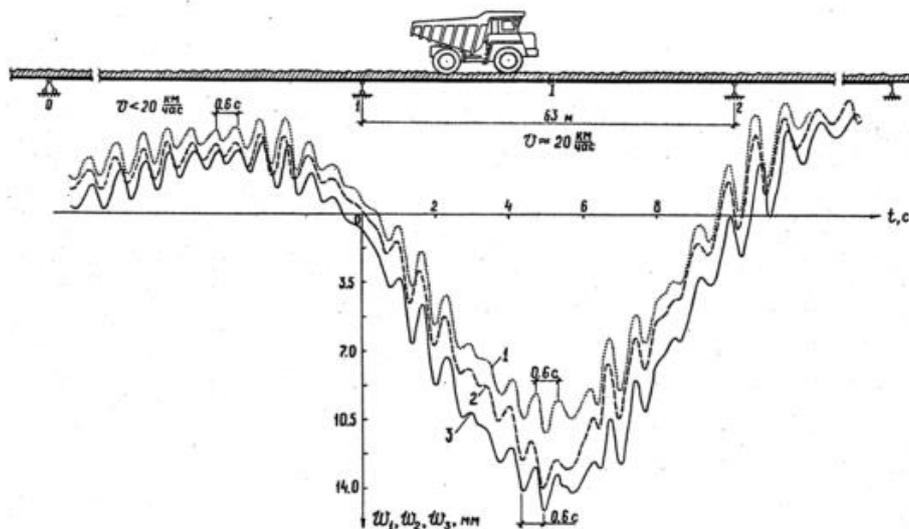
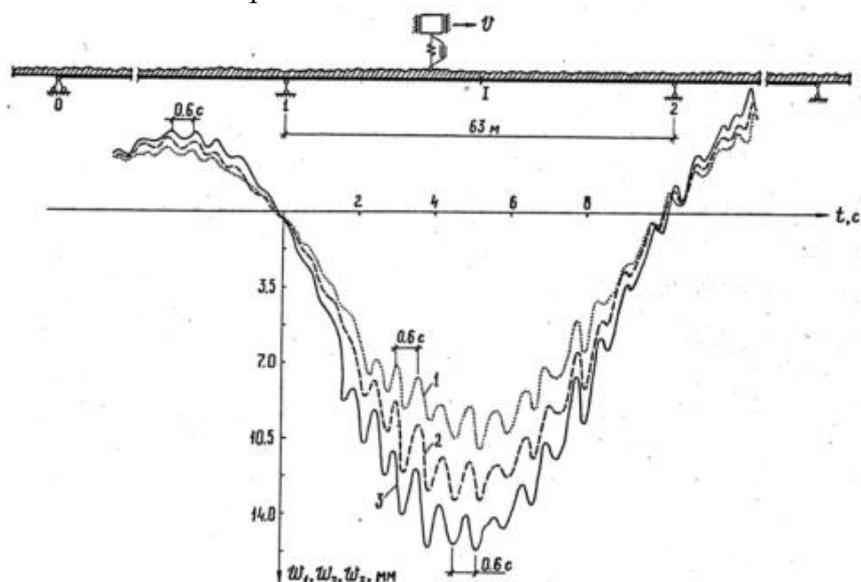


Рис. 6. Экспериментальные осциллограммы перемещений

До момента входа автомобиля на второй пролет, он двигался равноускоренно, поэтому длина первого пролета на рис. 6 показана условно.

Движение по второму пролету происходило практически с постоянной скоростью 20 км/час. Из графиков (рис. 6) видно, что преобладающими являются свободные сопровождающие колебания с первым собственным периодом  $T_1 = 0,6$  с. Колебания всех трех точек происходит в одной фазе, примерно с одинаковой амплитудой  $A = 1,0$  мм. Вследствие эксцентрисности воздействия подвижной нагрузки квазистатические составляющие перемещений  $w_1, w_2, w_3$  различны. Динамический коэффициент составил  $1 + \mu = 1,13$ .

Расчетные диаграммы перемещений, полученные в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений (1-3), показаны на рис. 7. При расчете удерживалось семь первых форм колебаний пролетного строения, отвечающих первой зоне «сгущения» спектра собственных частот. Скорость движения подрессоренного груза, моделирующего автомобиль, принималась постоянной и равной 6 м/с.



### Рис. 7

Сравнение расчетных и экспериментальных графиков показывает, что при движении нагрузки в пределах второго пролета экспериментальные кривые перемещений являются более пологими. Это объясняется тем, что трехосный автомобиль при расчете представлен простейшей моделью в виде системы с одной степенью свободы.

Расчетные и экспериментальные значения амплитуд колебаний различаются незначительно, не более 10 %. Имеет место хорошее совпадение периодов колебаний. Несоответствие фазы колебаний экспериментальной и расчетной диаграмм (рис.6, рис.7) объясняется различием начальных условий в момент входа нагрузки на исследуемый пролет, а также менее схожим характером демпфирования колебаний в реальной конструкции пролетного строения. На расчетной и экспериментальных виброграммах отмечается закручивание середины второго пролета вследствие эксцентricности приложения нагрузки в процессе движения. В целом отметим удовлетворительное соответствие расчетных и экспериментальных диаграмм. Это указывает на адекватность выбранной нами расчетной схемы «мост + автомобиль» и натурального объекта.

### Библиографический список

1. Барченков А.Г. Динамический расчет автодорожных мостов / А.Г. Барченков. – М.: Транспорт, 1976. – 199 с.
2. Сафронов В.С. Расчет висячих и вантовых мостов на подвижную нагрузку / В.С. Сафронов. – Воронеж: ВГУ, 1983. – 194 с.
3. Аверин А.Н. Колебания неразрезных балочных и тонкостенных систем под действием подвижной нагрузки / А.Н. Аверин: дис. ... канд. техн. наук. 01.02.03. Воронеж, 1983.
4. Хмыров А.Ф. Применение неявной разностной схемы для расчета колебаний неразрезных балок под действием подвижной нагрузки / А.Ф. Хмыров, Р.Х. Биджиев, А.Н. Аверин // Исследования по статике и динамике стержневых и тонкостенных систем: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1983. - С. 148-156.
5. Аверин А.Н. Расчет колебаний неразрезного криволинейного тонкостенного стержня с учетом сдвигов и инерции вращения под действием подвижной нагрузки / А.Н. Аверин, В.А. Журавлев, Хмыров А.Ф. // Инженерные задачи статики, динамики и устойчивости сооружений: межвуз. сб. науч. трудов. - Воронеж, 1985. - С.171-178.
6. Барченков А.Г. Динамический расчет неразрезных сталежелезобетонных пролетных строений мостов на действие колонны тяжелых автомобилей / А.Г. Барченков, А.Н. Аверин, Р.Х. Биджиев, М.М. Кравцов // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. – 1986. - № 8. - С. 99-102.
7. Аверин А.Н. Нелинейные пространственные колебания висячего моста под действием подвижной нагрузки / А.Н. Аверин, С.В. Ефрюшин // Оценка риска и безопасность строительных конструкций: тезисы докладов. 2006. С. 58-60.
8. Аверин А.Н. Колебания неразрезных балочных и тонкостенных систем под действием подвижной нагрузки: автореф. дис. ... канд. техн. наук. 01.02.03. Днепропетровск, 1983.
9. Аверин А.Н. Расчет систем с односторонними связями / А.Н. Аверин, А.Ю. Пузаков // Строительная механика и конструкции. - 2015. - Т. 1.- №10. - С. 15-32.
10. Муравский Г.Б. Действие подвижной нагрузки на балку, лежащую на одностороннем упругом основании // Строительная механика и расчет сооружений. - 1975. - №1. - С. 42-49.

11. Биджиев Р.Х. Динамический расчет неразрезных сталежелезобетонных балок с учетом конструктивной нелинейности // Исследования по строительной механике конструкций: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1984. – С. 70-76.
12. Аверин А.Н. Расчет свободных изгибных колебаний стержня переменного сечения с сосредоточенными включениями // Исследования по статике и динамике стержневых и тонкостенных систем: межвуз. сб. науч. трудов. - Воронеж, 1983. - С. 3-11.
13. Аверин А.Н. Применение разностной схемы для расчета свободных изгибно-крутильных колебаний неразрезного тонкостенного стержня открытого профиля // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. - 1982 - № 8. - С. 51-55.
14. Хмыров А.Ф. Разностная схема расчета свободных колебаний неразрезных тонкостенных стержней с плоской криволинейной осью / А.Ф. Хмыров, А.Н. Аверин, В.А. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура. – 1984. - № 4. - С. 34-38.
15. Аверин А.Н. Расчет свободных изгибно-крутильных колебаний тонкостенных стержней с учетом сдвига и инерции вращения / А.Н. Аверин, М.В. Шитикова // Инженерные задачи статике, динамики и устойчивости сооружений: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1985. - С.120-131.
16. Хмыров А.Ф. Расчет свободных колебаний неразрезных криволинейных пролетных строений мостов с учетом деформаций сдвига и инерции вращения / А.Ф. Хмыров, А.Н. Аверин, В.А. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Строительство и архитектура, 1987. - № 2. - С. 100-104.
17. Марчук Г.И. Повышение точности решений разностных схем / Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров - М.: Наука, 1979. – 318 с.

#### References

1. Barchenkov A.G Dynamic calculation of bridges. – M. Transport, 1976. – 199 p.
2. Safronov V.G. Movable load calculation of suspension and truss bridges. Voronezh VGU, 1983. – 194 p.
3. Averin A.N. Oscillation of continuous beam and thin-walled systems under mobile load. PhD thesis., 05.2317. Voronezh, 1983.
4. Khmyrov A.F., Bidzhiev R.Kh., Averin A.N. Application of implicit difference scheme for calculation of oscillations of continuous beams under movable load. Investigations on statics and dynamics of bar and thin-walled systems. Universities collection of scientific papers. Voronezh, 1983. P. 148-156.
5. Averin A.N., Zhuravlyov V.A., Khmyrov A.F. Calculation of continuous curvilinear thin-walled bar with account of rotation shear and inertia under movable load. Engineering problems of statics, dynamics and duration of structures: universities collection of scientific papers. Voronezh, 1985. P.171-178.
6. Barchenkov A.G., Averin A.N., Bidzhiev R.Kh., Kravtsov M.M. Heavy vehicles dynamic calculation of continuous reinforced concrete bridge spans under. University news. Construction and Architecture. 1986, No 8.P. 99-102.
7. Averin A.N., Efryushin S.V. Nonlinear spatial oscillations of suspension bridge. Assessment of risk and safety of construction structures: thesis of reports. 2006. P. 58-60.
8. Averin A.N. Vibrations of continuous beam and thin-walled systems under movable load. Author's abstract of PhD of Tech.sc. 01.02.03. Dnepropetrovsk, 1983.
9. Averin A.N., Puzakov A.Yu. Calculation of schemes with one-sided connections. Structural Mechanics. 2015. V. 1. No10. P. 15-32.
10. Muravsky G.B. Affect of movable load on beam which is on one-sided elastic foundation. Structural mechanics. 1975, No1. P. 42-49.

11. Bidzhiev R.Kh. Dynamic calculation of continuous reinforced concrete beams with account of constructive nonlinearity. Researches on Structural Mechanics. Collection of scientific papers. Voronezh, 1984. P 70-76.
12. Averin A.N Calculation of free bending vibrations of variable cross section bar with lumped inclusions. Investigations on statics and dynamics of bar and thin-walled schemes. Collection of scientific papers. Voronezh, 1983. P. 3-11.
13. Averin A.N. Application of different scheme for calculation of free flexural –and – torsional vibrations of continuous thin-walled bar of open profile. Universities news. Construction and Architecture 1982, No 8.P. 51-55.
14. Khmyrov A.F., Averin A.N., Zhuravlyov V.A. Different scheme of calculation of continuous thin-walled bars with plane curvilinear axe free vibrations. Universities news. Construction and Architecture. 1984, No 4.P. 34-38.
15. Averin A.N., Shitikova M.V. Calculation of free flexural-and-torsional vibrations of thin-walled bars with account of rotary shear and inertia. Engineering problems of statics, dynamic and durability of structures. Collection of scientific papers. Voronezh. 1985. P.120-131.
16. Khmyrov A.F., Averin A.N., Zhuravlyov V.A. Calculation of free oscillations of continuous curvilinear bridge spans with account of shear deformations and rotary inertia. Universities news. Construction and Architecture. 1987. No 2. P. 100-104.
17. Marchuck G.I., Shaidurov V.V. Increase of accuracy of different scheme solution. M.: Nauka, 1979. – 318 p.

## EXPERIMENTAL AND THEORETICAL STUDY OF CONTINUOUS BRIDGE SPAN VIBRATIONS UNDER MOBILE LOAD

A. N. Averin<sup>1</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sc., associate professor of department of Structural Mechanics, tel.: +7 (473) 2715230, e-mail: AN\_Averin@mail.ru

---

Problem of calculation of continuous bridge span vibration under mobile load is analyzed. Load is applied with eccentricity in relation to bridge longitudinal axis. Bridge span design model is thin-walled bar of open profile but mobile load is sprung load moving along rough road. Uneven road profile in nature was measured by leveling along mentioned on carriage way direct line and approximated by cubic splines. There is given the system of differential equations in partial derivatives describing vibration of system “ thin-walled stake +sprung load”. Continuous model of thin-walled bar processing to discrete one is implemented by finite –difference method. There are suggested different algorithms of differential equations system integration with variable coefficient based on method of assessment of connection of continuous beam + sprung load system vibration. It describes mutual vibrations of discrete model and sprung load. At strong back action implicit schemes of direct integration are applied but at weak back action there is used solution decomposition method according to natural modes. Peculiarities of frequency spectrum of free flexural-and-torsional vibrations of continuous thin-walled bars are analyzed. Continuous bridge span vibrations with spans scheme of 36,75 m+5\*63,0 m +36,75 m were measured for proving the very theory. Loaded vehicle BelAZ -540 of 50 tonne mass was used as mobile load. Load was passed with eccentricity of 2,0 m in relation to bridge longitudinal axis. Experimental and calculation vibrorecords are presented. It is mentioned satisfactory correspondence of calculation and experimental diagrams which shows adequacy of design model “bridge+vehicle” and natural object chosen by us.

**Keywords:** vibrations of continuous bridge span under movable **load**, finite-difference method, free flexural-and-torsional vibrations of discrete models of continuous thin-walled bars, implicit method of direct integration of differential equations, solution decomposition method according to natural modes.



# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.04

## УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКОГО ДНИЩА РУБАШКИ ДВУСТЕННОГО СТАЛЬНОГО ГОРИЗОНТАЛЬНОГО РЕЗЕРВУАРА ПОДЗЕМНОГО ИСПОЛНЕНИЯ С УЧЁТОМ НАЧАЛЬНЫХ НЕСОВЕРШЕНСТВ

В. В. Зверев<sup>1</sup>, Н. Ю. Тезиков<sup>2</sup>, К. Е. Жидков<sup>3</sup>

Липецкий государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>  
Россия, г. Липецк

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, проф. кафедры металлических конструкций, тел.: +7 (4742) 398714, e-mail: [334055@bk.ru](mailto:334055@bk.ru)

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры металлических конструкций, тел.: +7 (4742) 398714, e-mail: [334055@bk.ru](mailto:334055@bk.ru)

<sup>3</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры металлических конструкций, тел.: +7 (4742) 398714, e-mail: [334055@bk.ru](mailto:334055@bk.ru)

Проведен анализ результатов расчета двустенного стального горизонтального подземного резервуар по действующей нормативной документации РФ. Показано, что при этом появляются неоправданные запасы по несущей способности. Изучение напряженно-деформированного состояния резервуаров возможно путем применения сертифицированных в РФ программных комплексов

На основании имитационного моделирования с использованием программных средств SCAD и ANSYS выполнен расчет устойчивости пологого конического днища с тороидальным переходом применительно к рубашке сосуда РД-50-Г.

Проанализировано влияние начальных несовершенств (вмятин) на напряженно-деформированное состояние конструкций. Приведена зависимость критического давления от параметров вмятины. Расчёты выполняются в упругой линейной постановке.

Выявлено, что наличие дефектов в виде вмятин в ряде случаев оказывает положительное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкций. Результаты численного эксперимента иллюстрируют тот факт, что величина коэффициента запаса по устойчивости, рекомендованная нормами расчёта, может быть уменьшена.

**Ключевые слова:** двустенный стальной горизонтальный подземный резервуар, коническое днище, численное моделирование, вмятины.

### Введение

К настоящему времени накоплен опыт успешной эксплуатации двустенных стальных горизонтальных резервуаров подземного исполнения в различных грунтовых условиях.

Вместе с тем нормы расчёта резервуаров [1] содержат ряд условностей, приводящих к проектированию с неоправданными запасами несущей способности.

Рассмотрим сосуд типа РД-50-Г вместимостью 51,5 м<sup>3</sup>, предназначенный для хранения нефтепродуктов с температурой от -40°C до +90°C плотностью до 1 т/м<sup>3</sup>.

Сосуд относится к группам 5а, 5б по [1].

Габаритный внешний диаметр цилиндрической части – 2398 мм. Толщина корпуса (внутренней оболочки) – 5 мм, толщина рубашки (внешней оболочки) – 4 мм, толщины конических днищ (внутреннего и внешнего) – 5 мм. Внешняя высота конуса корпуса – 290 мм, рубашки – 295 мм.

Между цилиндрами корпуса и рубашки установлены кольцевые прокладки толщиной 5 мм, служащие для создания технологического зазора. Кольцевые прокладки фиксируются на корпусе только одним своим торцом с помощью сварного шва. Таким способом

достигается скольжение прокладок по корпусу и рубашке, что обеспечивает силовое взаимодействие между ними только посредством нормальных давлений по полосе. Пространство между корпусом и рубашкой заполняется азотом либо тосолом.

Корпус сосуда укреплен несколькими внутренними кольцами жёсткости.

Сосуд эксплуатируется при расчётном давлении внутри корпуса  $0,7 \text{ кг/см}^2$ , расчётном давлении между корпусом и рубашкой  $0,35 \text{ кг/см}^2$ . Возможны расчётные ситуации, когда независимо друг от друга указанные внутренние давления равны нулю. Отрицательные давления газовых сред (разрежение) не допускаются системой управления.

Условие несущей способности конического днища по [3] можно записать в виде

$$\left(\frac{p}{[p]_{II}}\right)^2 + \left(\frac{p}{[p]_E}\right)^2 \leq 1. \quad (1)$$

Здесь  $p$  – внешнее давление, перпендикулярное поверхности конуса,  $[p]_{II}$  и  $[p]_E$  – допускаемые давления из условий соответственно прочности и устойчивости в пределах упругой работы стали.

Отсюда следует, что допускаемое наружное давление равно

$$[p] = \frac{[p]_{II}[p]_E}{\sqrt{[p]_{II}^2 + [p]_E^2}}$$

Параметры сосуда РД-50-Г таковы, что согласно [3] величины  $[p]_{II}$  и  $[p]_E$  отличаются на порядок: для днища рубашки  $[p]_{II} = 2,65 \text{ кг/см}^2$ ,  $[p]_E = 0,304 \text{ кг/см}^2$ .

Из численных данных следует, что  $\sqrt{[p]_{II}^2 + [p]_E^2} \approx [p]_{II}$  и, как следствие,  $[p] \approx [p]_E$ , то есть величина допускаемого наружного давления на днище фактически определяется расчётом на устойчивость.

Формулы норм проектирования [3] для расчёта конических днищ на устойчивость основаны на безмоментной теории упругих конических оболочек (см., в частности, [4, 5]). Известно, что листовые конструкции чувствительны к начальным несовершенствам [6, 7, 8]. Разумеется, нормы расчёта [1] оперируют идеальными моделями, а возможные начальные несовершенства учитываются введением в формулу  $[p]_E$  коэффициента запаса по устойчивости  $n_y = 2,4$ . Тем самым критическое внешнее давление нормами уменьшается в 2,4 раза, а толщина конического днища увеличивается в  $\sqrt{2,4}$  (более чем в полтора) раза.

### Моделирование напряженно-деформированного состояния сосуда РД-50-Г

Проанализируем численно устойчивость пологого конического днища с тороидальным переходом применительно к рубашке сосуда РД-50-Г и определим, при каких начальных несовершенствах падение критического внешнего давления составит 2,4 раза. Расчёты проведём в упругой линейной постановке.

По нормам расчёта [3] допускаемое давление из условия устойчивости  $[p]_E$  без учёта  $n_y$  составляет  $0,730 \text{ кг/см}^2$ . Обозначим эту величину  $[p]^*_E$ .

Для моделирования резервуаров успешно используются современные программные комплексы, позволяющие с достаточной степенью точности оценить напряженно-деформированное состояние конструкций [9].

На первом этапе – верификации моделей – были рассмотрены две следующие расчётные схемы.

1. Расчётная схема, реализованная в программном комплексе ANSYS, состоит из днища и цилиндрического участка от закругления днища до внутреннего кольца жёсткости (рис. 1). Днище и цилиндрический участок соединены сваркой внахлёстку (узел А).

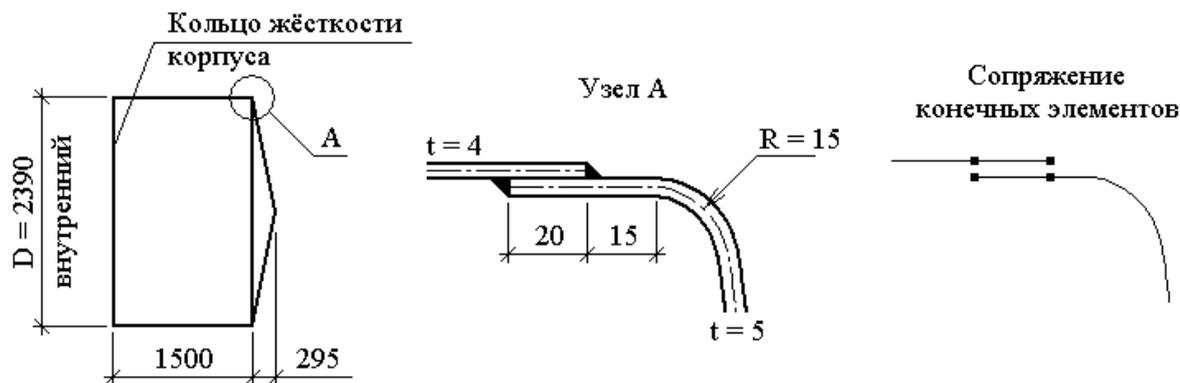


Рис. 1. Схема модели для ANSYS

Твёрдотельная модель ANSYS включает в себя конус с отбортованными краями и цилиндрическую часть. Расчёты выполнены при следующих параметрах модели: а) вариант расчётов – h-метод, б) тип конечных элементов – упругий четырёхузловой элемент оболочки SHELL63, в) материал – сталь с модулем упругости, соответствующим максимальной температуре нефтепродуктов. Конечно-элементная модель сгенерирована автоматически с длинами граней конечных элементов: для криволинейных участков отбортовки – 0,5 см, для конуса и цилиндра – 5 см. Сопряжение конечных элементов в местах сварных швов моделируется объединением линейных перемещений узлов, выделенных на рис. 1. В месте расположения внутреннего кольца жёсткости заданы внешние шарнирные связи. Модель рассчитана на равномерное давление, действующее перпендикулярно поверхностям конечных элементов.

*Статический расчёт на внутреннее давление.* Напряжения в узлах, находящихся в середине цилиндрической части, с хорошей точностью совпадают с напряжениями, вычисленными по безмоментной теории цилиндрических оболочек.

*Расчёт на внешнее давление.* Выполнен статический расчёт и анализ устойчивости системы. Критическое внешнее давление равно  $0,758 \text{ кг/см}^2$  или  $1,038 \times [p]^*_{\text{Е}}$ . Потеря устойчивости сопряжена с появлением шести волн в конической части модели без изменения формы цилиндрической части.

2. Расчётная схема, реализованная в программном комплексе SCAD Structure, состоит только из отбортованного днища (конуса, переходного участка и короткого цилиндра высотой 35 мм, см. рис. 1). Модель создана из треугольных конечных элементов оболочки типа 42. Конус разбит на 24 шага конечных элементов по длине образующей и на 148 шагов конечных элементов по углу вращения  $360^\circ$ . Материал – аналогично модели ANSYS. Модель имеет шарнирные внешние связи в узлах по окружности цилиндра.

Выполнены упругий линейный расчёт модели при внешнем давлении и проверка общей устойчивости. Критическое внешнее давление равно  $0,792 \text{ кг/см}^2$  или  $1,085 \times [p]^*_{\text{Е}}$ . Картина потери устойчивости полностью аналогична модели ANSYS.

Конструкция, рассчитанная в SCAD, из-за отсутствия цилиндрической части длиной 1,5 м является менее податливой, чем конструкция, рассчитанная в ANSYS. Это иллюстрируется результатами расчётов. Одновременно с этим обе модели показали хорошее совпаде-

ние величины критического внешнего давления с результатами расчётов по [1] в предположении  $n_y = 1$ .

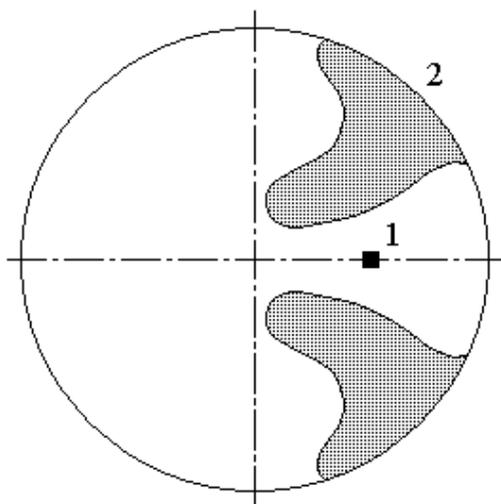
На **втором этапе** был проведён численный эксперимент с помощью модели, созданной в SCAD Structure, – анализ устойчивости днища, имеющего начальные несовершенства.

Найдём зависимость критической величины внешнего давления, действующего на коническое днище перпендикулярно его поверхности, от параметров вмятины, находящейся на днище. Вмятина может появиться на любом этапе технологической цепочки изготовления сосуда, причём способы образования вмятины сложно спрогнозировать. Примем логичные допущения, что вмятина появилась после сварки сосуда и что форма вмятины соответствует форме деформирования днища при локальном силовом воздействии.

Для поиска формы вмятины использована та же самая рассмотренная выше модель, созданная в SCAD Structure. Форма вмятины может быть определена очень просто, в виде перемещений узлов модели от локального воздействия. Если исходные координаты узлов идеальной модели откорректировать на величины их перемещений, то получим модель с вмятиной.

Вмятина создана внешним давлением, перпендикулярным поверхности и приложенным в середине образующей конуса. Внешнее давление охватывает конечные элементы суммарной площадью  $5 \times 10 \text{ см}^2$ . Величина внешнего давления для создания вмятин подбиралась так, чтобы получить вмятину с заданными параметрами.

Качественная картина вмятины показана на рис. 2.



**Рис. 2.** Характер вмятины:

- 1 – зона приложения внешнего давления;
- 2 – участки конуса с перемещениями узлов вверх

Очевидно, что вмятина имеет сложную форму. Наибольшие по модулю перемещения узлов внутрь конуса ( $f_{z,min}$ ) зафиксированы в середине зоны 1. Наибольшие перемещения узлов вверх –  $f_{z,max}$ , причём  $\frac{f_{z,max}}{f_{z,min}} = 0,265$ . Это отношение сохранялось для всех вмятин.

Если знаки узловых перемещений, представляющих вмятину, поменять на противоположные, то получим зеркальное отражение – «вмятину» наружу. Сравнительные расчёты пока-

зали, что такие «вмятины» в смысле устойчивости менее опасны, чем вмятины, полученные снаружи. Дальнейшие результаты приведены для наружных вмятин, проиллюстрированных на рис. 2.

Для идеальной SCAD-модели днища критическое внешнее давление равно  $P_{cr.e} = 0,792 \text{ кг/см}^2$  (см. выше). Этот результат принят за эталонный, с которым сравнивались результаты расчётов моделей с вмятинами.

В таблице приведены параметры вмятин и результаты расчётов. В заголовках столбцов использованы следующие обозначения:

- $f$  – величина вмятины по модулю в середине зоны 1;
- $f/L$  – относительная величина  $f$ , приведённая к длине образующей конуса  $L=1,21 \text{ м}$ ;
- $f/t$  – относительная величина  $f$ , приведённая к толщине днища  $t = 5 \text{ мм}$ ;
- $A/Ae$  – отношение работ внешних сил на перемещениях узлов при статических расчётах, где  $A$  относится к модели с вмятиной,  $Ae$  – к эталонной модели;

$P_{cr}$  – величина критического внешнего давления для модели с вмятиной.

Отношение  $P_{cr.e} / P_{cr}$  характеризует влияние вмятины на устойчивость днища и является фактически тем коэффициентом запаса по устойчивости  $n_y$ , который необходимо ввести в расчёт для игнорирования начальных несовершенств (в данном случае – вмятины).

Зависимость  $P_{cr}(f)$  приведена на рис. 3.

Таблица

Результаты расчётов

| №  | $f$<br>(мм) | $f/L$   | $f/t$   | $A/A_e$ | $P_{cr}$<br>(кг/см <sup>2</sup> ) | $P_{cr.e}/P_{cr}$ |
|----|-------------|---------|---------|---------|-----------------------------------|-------------------|
| 1  | 0           | 0       | 0       | 1       | 0,792                             | 1                 |
| 2  | 4,03        | 1 / 300 | 0,806 t | 1,017   | 0,736                             | 1,076             |
| 3  | 6,05        | 1 / 200 | 1,21 t  | 1,036   | 0,695                             | 1,140             |
| 4  | 8,07        | 1 / 150 | 1,61 t  | 1,063   | 0,678                             | 1,167             |
| 5  | 12,1        | 1 / 100 | 2,42 t  | 1,127   | 0,705                             | 1,123             |
| 6  | 16,1        | 1 / 75  | 3,22 t  | 1,192   | 0,748                             | 1,059             |
| 7  | 24,2        | 1 / 50  | 4,84 t  | 1,307   | 0,731                             | 1,083             |
| 8  | 48,4        | 1 / 25  | 9,68 t  | 1,481   | 0,616                             | 1,285             |
| 9  | 80,7        | 1 / 15  | 16,1 t  | 1,555   | 0,507                             | 1,561             |
| 10 | 101         | 1 / 12  | 20,2 t  | 1,611   | 0,481                             | 1,647             |
| 11 | 111         |         | 22,2 t  | 1,647   | 0,478                             | <b>1,657</b>      |
| 12 | 121         | 1 / 10  | 24,2 t  | 1,686   | 0,481                             | 1,647             |
| 13 | 147         |         | 29,4 t  | 1,799   | 0,509                             | 1,556             |
| 14 | 173         | 1 / 7   | 34,6 t  | 1,913   | 0,553                             | 1,432             |
| 15 | 242         | 1 / 5   | 48,4 t  | 2,156   | 0,667                             | 1,188             |

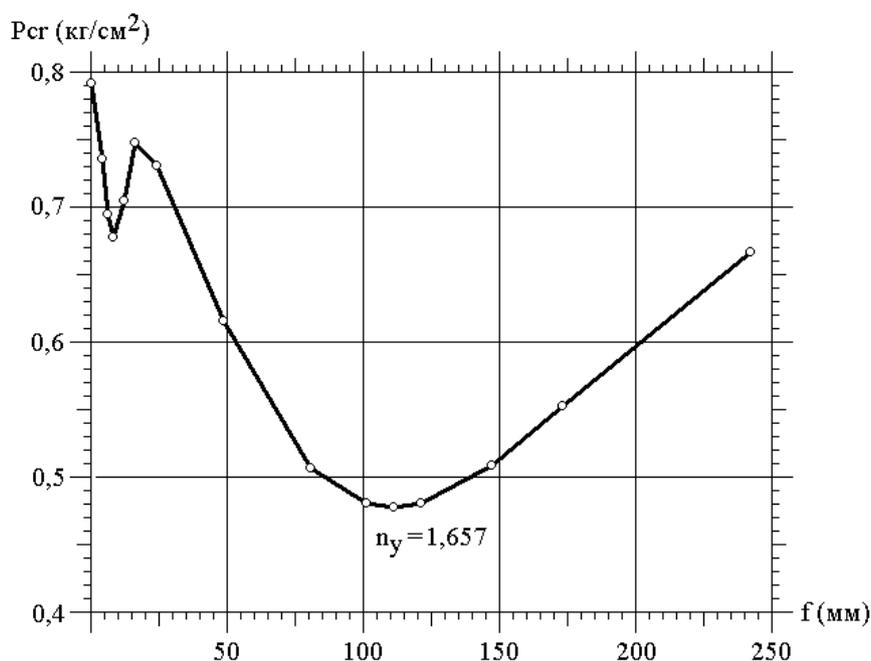


Рис. 3. Зависимость  $P_{cr}(f)$

Результаты расчетов, приведенные в таблице и на рис. 3, показывают следующее.

1. Так как под рубашкой сосуда на расстоянии 5 мм находится корпус, то очевидно, что вмятины, приведённые в строках 3...15 таблицы, невозможны без деформирования кор-

пуса, т. е. грубых нарушений технологии производства, которых, строго говоря, быть не должно.

2. На всём диапазоне  $f$  уменьшение  $Pcr$  не достигло 2,4 раза. Увеличение вмятины сопровождается уменьшением критического внешнего давления только до определённой величины.
3. Влияние вмятин на устойчивость пологого конуса не настолько серьёзно, как это подразумевается нормами [3]. Днище с заметными вмятинами – порядка  $5t$  – способно противостоять внешнему давлению с уменьшением  $Pcr$  до 17%. Очень большие вмятины (при которых сосуд РД-50-Г вообще теряет свой товарный вид) уменьшают внешнее критическое давление максимум в 1,7 раза.
4. Работа внешних сил с увеличением вмятины монотонно возрастает. В весьма малой степени это связано с увеличением площади поверхности, к которой приложена нагрузка, но в основном свидетельствует об увеличении податливости системы и косвенно указывает на отсутствие грубых ошибок в моделировании.
5. Кривая  $Pcr(f)$  в области исследованных величин  $f$  имеет локальные и глобальный экстремумы. Когда внешнее давление действует перпендикулярно поверхности конуса с вмятиной, то с увеличением вмятины растут силовые составляющие, стремящиеся выправить вмятину и сжать смежные участки. Большие вмятины (более  $24t$ ) приобретают новое качество – они играют роль элементов усиления тонкой оболочки, аналогично элементам жёсткости тонкостенных профилей.

## ВЫВОДЫ

1. Результаты численного эксперимента иллюстрируют тот факт, что величина коэффициента запаса по устойчивости, рекомендованная нормами расчёта, может быть уменьшена.
2. Наличие вмятин в ряде случаев можно рассматривать как усиление тонкостенной оболочки, что оказывает положительное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкций в целом.

## Библиографический список

1. ГОСТ Р 52630-2012. Сосуды и аппараты стальные сварные. Общие технические условия. Дата введения 29.11.2012. – М.: Стандартинформ, 2013. - 41 с.
2. ГОСТ Р 52857.1-2007. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчёта на прочность. Общие требования. Дата введения 27.12.2007. - М.: Стандартинформ, 2009. - 23 с.
3. ГОСТ Р 52857.2-2007. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчёта на прочность. Расчёт цилиндрических и конических обечаек, выпуклых и плоских днищ и крышек. Дата введения 27.12.2007. - М.: Стандартинформ, 2009. - 41 с.
4. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. - Изд. 2-е, перераб. и доп. -, М.: Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры изд-ва «Наука», 1967. – 984 с.
5. Устойчивость оболочек/ Э. И. Григолюк, В. В.Кабанов. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры изд-ва «Наука», 1978. – 360 с.
6. Журавлев Г. В. К разработке СО «Положения о проведении диагностики горизонтальных резервуаров и определении их остаточной несущей способности» / Г. В. Журавлев, Д. М.

Саттарова, Г. М. Гималетдинов // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. - 2006. - № 66. - С. 287-294.

7. Евдокимов В. В. К определению допустимых размеров внутренних дефектов в сварных соединениях стенки эксплуатируемых вертикальных цилиндрических резервуаров / В. В. Евдокимов, Е. М. Баско // Промышленное и гражданское строительство - 2007. - №4. - С. 22-24.
8. Венгерцев Ю. А. Повышение эксплуатационной надежности резервуаров/ Ю. А. Венгерцев// Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья: обзор. информ. - Вып. 6. - М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1990. - 52 с.
9. Лукьянова И. Э. Разработка модели вертикального стального резервуара для оценки его напряженно-деформированного состояния при помощи программного комплекса ANSYS / И.Э. Лукьянова // Вестник УГТУ-УПИ. Компьютерный инженерный анализ. – Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. – №11 (63). – С. 81-82.

#### References

1. State Standard P 52630-2012. Steel and welded vessels and apparatuses. General technical conditions. Date of introduction 29.11.2012. – М.: Standartinform
2. State Standard P 52857.1-2007. Vessels and apparatuses. Strength norms and design. General requirements. Date of introduction 27.12.2007. М. Standartinform, 2009. - 23 p.
3. State Standard P 52857.2-2007. Vessels and apparatuses. Strength norms and design methods. Calculation of cylindrical and conical shells, salient and plane bottoms and covers. Date of introduction 27.12.2007. М.: Standartinform, 2009. - 41 p.
4. Volmir A.S.. Deformed systems firmness. Pub. house. 2<sup>nd</sup>, upgraded and added., М.: Chief editor of physical and math literature of pub. house “Nauka”,1967. – 984 p.
5. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. Shells stability. М.: Chief editor of physical and math literature of pub. house “Nauka”, 1978. – 360 p.
6. Zhuravlyov G.V., Sattarova D.M., Gimaletdinov G.M. To the development of SO “Regulation of diagnosis of horizontal reservoirs and its residual bearing capacity definition”. Problems of oil and oil products collection, preparation and transport.2006. - No 66. - P. 287-294.
7. Evdokimov V.V., Basko E.M. To the definition of acceptable sizes of inner defects in wall welded joints of operated vertical cylindrical reservoirs. Industrial and civil building. 2007. - No4. - P. 22-24.
8. Vengertsev Yu.A. Improvement of operational reliability. Transport and storage of oilproducts and hydrocarbon raw material: information observation. Issue 6. - М.: TsNIIT Eneftekhimi, 1990. - 52 p.
9. Luk'yanova I.E.. Development of the model of vertical steel reservoir for assessment of its deformed mode with the help of software ANSYS. Bulletin of UGTU-UPI. Computer engineering analysis. Ekaterinburg:GOU VPO UGTU-UPI. 2005. – No11 (63). – P. 81-82.

# CASE CONICAL BOTTOM STABILITY OF TWO-WALLED STEEL UNDERGROUND RESERVOIR WITH ACCOUNT OF INITIAL IMPERFECTIONS

V.V. Zverev<sup>1</sup>, N.Yu. Tezikov<sup>2</sup>, K.E. Zhidkov<sup>3</sup>

Lipetsk State Technical University<sup>1,2,3</sup>

Russia, Lipetsk

---

<sup>1</sup>Dr of Tech. Sc. Professor of department of metal structures, tel.: +7 (4742) 398714, e-mail: [334055@bk.ru](mailto:334055@bk.ru)

<sup>2</sup> PhD of Tech. Sc., associate professor of department of metal structures: +7 (4742) 398714, e-mail: [334055@bk.ru](mailto:334055@bk.ru)

<sup>2</sup> PhD of Tech. Sc., associate professor of department of metal structures, tel.: +7 (4742) 398714, e-mail: [334055@bk.ru](mailto:334055@bk.ru)

---

Results of two-walled steel horizontal underground reservoir design was analyzed according to the standard documentation of RF. It is shown that unreasonable additional bearing capacity is appeared. Reservoir deflected mode can be studied by software certificated in Russian Federation.

Based on imitation modeling with application of software SCAD и ANSYS there is calculated stability of flat conical bottom with toroidal transition to vessel case RD-50-G.

Initial imperfections (dents) affecting on structures deflected mode is analyzed. There is given critical pressure dependence on dent parameters. The calculations are implemented by elastic linear method.

It was found that in some cases presence of defects as dents influences positively on structures deflected mode. The results of numerical experiment illustrates that stability factor value, recommended by design standards can be decreased.

**Keywords:** two-walled steel horizontal underground reservoir, conical bottom, numerical modeling, dents.

## АДАПТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА К НОРМАТИВНОЙ МЕТОДИКЕ ПРОВЕРКИ МЕСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕНКИ СТАЛЬНОЙ БАЛКИ ДВУТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ

А. А. Свентиков<sup>1</sup>, Д. Н. Кузнецов<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Д-р техн. наук, проф. кафедры металлических и деревянных конструкций,  
тел. +7(473)2715924, e-mail: svarka@vgasu.vrn.ru

<sup>2</sup> Ст. преподаватель кафедры металлических и деревянных конструкций,  
тел.: +7(910)3468912, e-mail: [kuznecov82@bk.ru](mailto:kuznecov82@bk.ru)

---

Выполнены численные исследования по оценке напряженно-деформированного состояния стенки стальной балки двутаврового симметричного поперечного сечения. Определены внутренние усилия и напряжения с использованием аналитического и численного методов расчета. Расчет численным методом выполнен в вычислительном комплексе SCAD Office, в основу которого положен метод конечных элементов. Расчетная модель балки создана с использованием пластинчатых конечных элементов, с общим числом 3572 конечных элемента. Аналитический метод нахождения напряженно-деформированного состояния балки применялся для стержневой расчетной схемы. Для оценки результатов численного расчета предложена новая методика поиска средних значений напряжений в стенке. Данные значения напряжений находились по рядам конечных элементов с учетом доли площади отдельного конечного элемента в составе ряда.

По результатам расчета методом конечных элементов построены мозаики напряжений и эпюры, показывающие распределение напряжений на контролируемых участках отсеков стенки балки. За отсеки приняты участки стенки, ограниченные полками и двухсторонними ребрами жесткости балки. Анализ результатов исследований показал хорошую степень верификации по обоим методам, что указывает на надежность предложенной оценке напряженно-деформированного состояния стенки. Установлено, что исследуемый способ нахождения значений средних напряжений в отсеке стенки сварной балки допускается применять для проверки местной устойчивости стенки в соответствии с нормативной методикой.

**Ключевые слова:** двутавровая стальная балка, местная устойчивость стенки, компьютерная модель стальной балки, напряженно-деформированное состояние стенки, стенка стальной балки.

### Введение

Для несущих элементов перекрытий в зданиях часто применяют стальные балки двутаврового поперечного сечения. Это объясняется простотой их изготовления, высокими показателями по металлоемкости, технологичностью при сборке узловых соединений и другими факторами. Для достижения наибольшей эффективности применения сварных двутавровых балок необходимо увеличивать площадь поперечного сечения полков и уменьшать площадь поперечного сечения стенки. Но с уменьшением толщины стенки мы сталкиваемся с возможными проблемами изменения ее геометрической формы. Такое явление называется местной потерей устойчивости состояния равновесия стенки [1]. Существует нормативная методика для проверки прочности и местной устойчивости стенки балок двутаврового сечения, положения данной методики указаны в СП 16.13330.2017 «СНиП II-23-81\* Стальные конструкции». Важно заметить, что нормативная методика проверки прочности и местной устойчивости стенки позволяет определять напряжения по внутренним силовым факторам, рассчитанным для стержневых расчетных схем. Но нормативная методика не адаптирована к работе с результатами расчета пространственных моделей. Разработка новой прогрессивной методики проверки местной устойчивости стенки - сложная задача. Однако менее сложная задача - привести результаты расчета моделей в соответствие с требованиями норм.

Последние десятилетия значительное развитие получили численные методы расчета строительных конструкций и особенно метод конечных элементов (МКЭ). С использованием данных подходов оценка напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций выполняется в трехмерных расчетных моделях [3, 4, 5, 6]. Для балок двутаврового поперечного сечения наиболее целесообразно использовать пластинчатую расчетную модель [2, 7]. Безусловно, применение современных расчетных программных комплексов позволяет более точно оценить НДС тонкостенных конструкций [9, 10], а также возможную потерю местной устойчивости стенки [1]. На основании вышесказанного представляется важным и актуальным адаптировать полученные или разработанные расчеты пространственных моделей к проверенным нормативным методикам. Однако предварительно необходимо выполнить сравнительные исследования НДС стенки двутавровой балки с использованием классического (аналитического) и численного подходов.

## 1. Объект исследования

В качестве объекта исследований рассматривается стальная сварная балка перекрытия двутаврового поперечного сечения, симметричного вида.

Для проведения сравнительного анализа использована балка, находящаяся в составе простой балочной системы перекрытия с монолитной железобетонной плитой. Основные компоновочные параметры: пролет балок  $L=12$  м; шаг балок - 6 м; материал балок – сталь С255, примыкание балок к оголовку колонн шарнирное, толщина железобетонной плиты - 200 мм. Постоянная нагрузка: расчетная -  $4,55$  кН/м<sup>2</sup>, нормативная -  $3,55$  кН/м<sup>2</sup>; временная: расчетная -  $2,4$  кН/м<sup>2</sup>, нормативная -  $2$  кН/м<sup>2</sup>.

На рис. 1 приведена стержневая расчетная схема балки с приложением полной расчетной нагрузки. Расчет представленной схемы выполнен аналитическим методом.

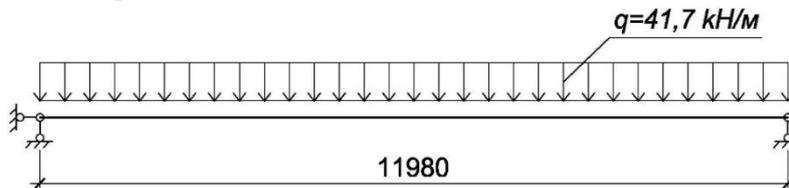


Рис. 1. Расчетная схема стальной балки

По полученным результатам расчетов были окончательно подобраны конструктивные параметры стальной балки. На рис. 2 приведено поперечное сечение балки, а на рис. 3 – опорный узел стальной балки. Назначены: опорное ребро толщиной 16 мм и двухсторонние ребра жесткости толщиной 8 мм с шагом 1700 мм. Ширина опорного ребра равна ширине поясов (полков), а ширина ребер жесткости равна величине свеса полков (156 мм).

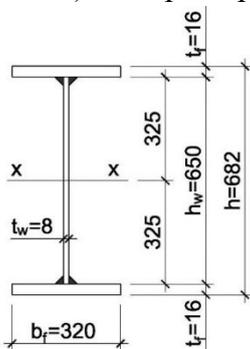


Рис. 2. Поперечное сечение стальной балки

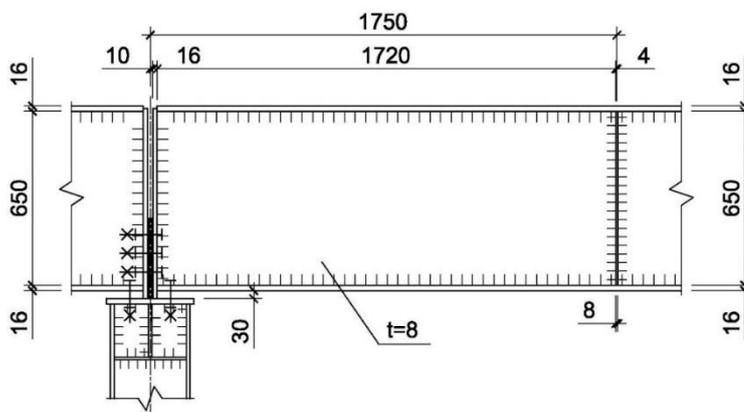


Рис. 3. Опорный узел стальной балки

Пластинчатая расчетная модель рассматриваемой стальной балки (рис. 4) создавалась в среде вычислительного комплекса SCAD Office, с использованием следующего конечного элемента (КЭ): тип 44-универсальный четырехугольный четырехузловой КЭ оболочки. Стенка по высоте разбивалась на десять рядов КЭ, полки и ребра (опорные, ребра жесткости) разбиты на шесть рядов КЭ по ширине. При этом, использовались следующие размеры четырехугольных КЭ: стенка-65x85(t8) и 65x86(t8) мм, полки-53x85(t16) мм, опорные ребра-65x53(t16) и 30x53(t16) мм, ребра жесткости-65x53(t8) мм. В целом расчетная модель состоит из 3572 указанных пластинчатых КЭ. Связи в виде ограничений на линейные перемещения установлены таким образом, чтобы это соответствовало конструктивному решению примыкания элементов: шарнирно-неподвижная левая опора и шарнирно-подвижная правая (рис. 4). Это достигалось путем наложения трех горизонтальных связей в двух рядах (в осях болтов) в нижней зоне левого опорного узла балки и вертикальных связей в двух опорных узлах балки. Кроме этого, по верхнему поясу балки предусмотрены линейные закрепления «из плоскости», что моделировало горизонтальные связи балочного перекрытия.

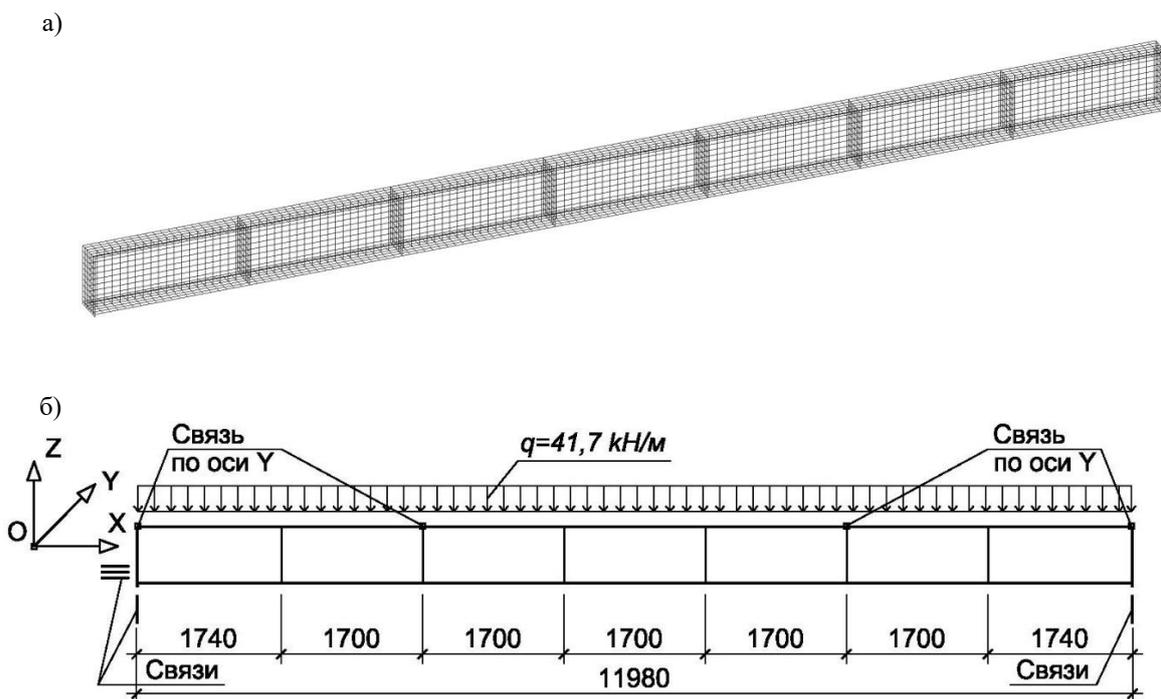


Рис. 4. Пластинчатая расчетная модель балки:  
а – общий вид; б – вид спереди, параметры модели

## 2. Методика проведения исследования

При проверке местной устойчивости стенки согласно указаниям в СП 16.13330.2017 «СНиП II-23-81\* Стальные конструкции» выделяются участки – отсеки, ограниченные поясами (полками), вертикальными и горизонтальными ребрами жесткости. В том случае, если длина отсека больше его расчетной высоты, то в качестве контролируемого принимается участок отсека с длиной, равной его расчетной высоте.

Согласно аналитическому подходу нормальные и касательные напряжения на проверяемом участке  $i$ -го отсека балки определяются по известным выражениям:

$$\tau = \frac{Q_z S_x}{I_x t_w}, \quad (1)$$

$$\sigma = M_y y / I_x, \quad (2)$$

где  $Q_z$ ,  $M_y$  – средние значения поперечной силы и изгибающего момента на контролируемом участке;  $S_x$  – статический момент отсеченной части сечения относительно оси  $x$ ;  $I_x$  – момент инерции полного сечения относительно оси  $x$ ;  $t_w$  – толщина стенки двутавра;  $y$  – координата отсчитываемая от нейтральной линии до рассматриваемого волокна поперечного сечения.

Для случая загрузки шарнирной балки равномерно распределенной нагрузкой  $q$  по всей ее длине значения внутренних усилий находятся согласно следующим зависимостям:

$$Q_{z,i} = q(l - 2x_i) / 2, \quad (3)$$

$$M_{y,i} = qx_i(l - x_i) / 2, \quad (4)$$

где  $Q_{z,i}$ ,  $M_{y,i}$  – средние значения поперечной силы и изгибающего момента на  $i$ -м контролируемом участке;  $x_i$  – координата геометрической середины контролируемого участка  $i$ -го отсека балки;  $l$  – пролет балки.

В случае использования численного подхода контролируемый участок стенки балки представляет собой некоторую совокупность прямоугольных пластинчатых КЭ. Оценку напряженного состояния участка стенки авторы предлагают выполнять по усредненным значениям для каждого горизонтального ряда КЭ. При вычислении данных значений будем учитывать фактор площади отдельных КЭ:

$$\tau_{mid} = \sum_{i=1}^n (\tau_i A_i) / A_{rank}, \quad (5)$$

$$\sigma_{mid} = \sum_{i=1}^n (\sigma_i A_i) / A_{rank}, \quad (6)$$

где  $\tau_{mid}$ ,  $\sigma_{mid}$  – средние значения касательных и нормальных напряжений в некотором горизонтальном ряду КЭ;  $\tau_i$ ,  $\sigma_i$  – касательное и нормальное напряжения в  $i$ -м КЭ;  $A_i$  – площадь  $i$ -го КЭ;  $A_{rank}$  – суммарная площадь  $i$ -х КЭ, расположенных в ряду контролируемого отсека или его участка;  $n$  – количество КЭ в одном ряду контролируемого отсека или его участка.

### 3. Анализ результатов исследования

При выполнении сравнительных исследований было рассмотрено три отсека стенки балки: два опорных и один, расположенный в середине пролета. Отметим, что во всех отсеках рассматривались участки длиной, равной расчетной высоте стенки  $h_w$ , что соответствует методике, указанной в СП 16.13330.2017 «СНиП II-23-81\* Стальные конструкции». Расположение исследованных участков стенки балки приведено на рис. 5.

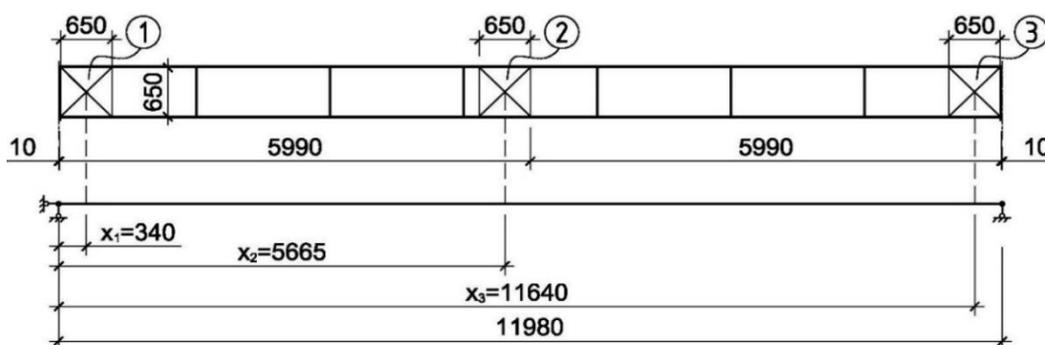


Рис. 5. Расположение расчетных участков стенки для исследования НДС

В результате проведения численных исследований были получены данные, которые представлены следующим образом: мозаики нормальных и касательных напряжений в стенке балки - рис. 6, 8, 10, эпюры нормальных и касательных напряжений по высоте стенки балки - рис. 7, 9, 11. При построении эпюр по результатам численного метода, в случае выявления смены знака значений напряжений в КЭ вдоль ряда рассматриваемого участка, мы построили две эпюры: первая - для отрицательных значений напряжений, а вторая – для положительных значений напряжений в рядах КЭ. Соответственно при суммировании произведений значений напряжений и площадей КЭ по рядам, отрицательные значения суммировались с отрицательными, положительные только с положительными значениями по выражению (6). Для касательных напряжений смены знака по рядам КЭ на рассмотренных участках не выявлено.

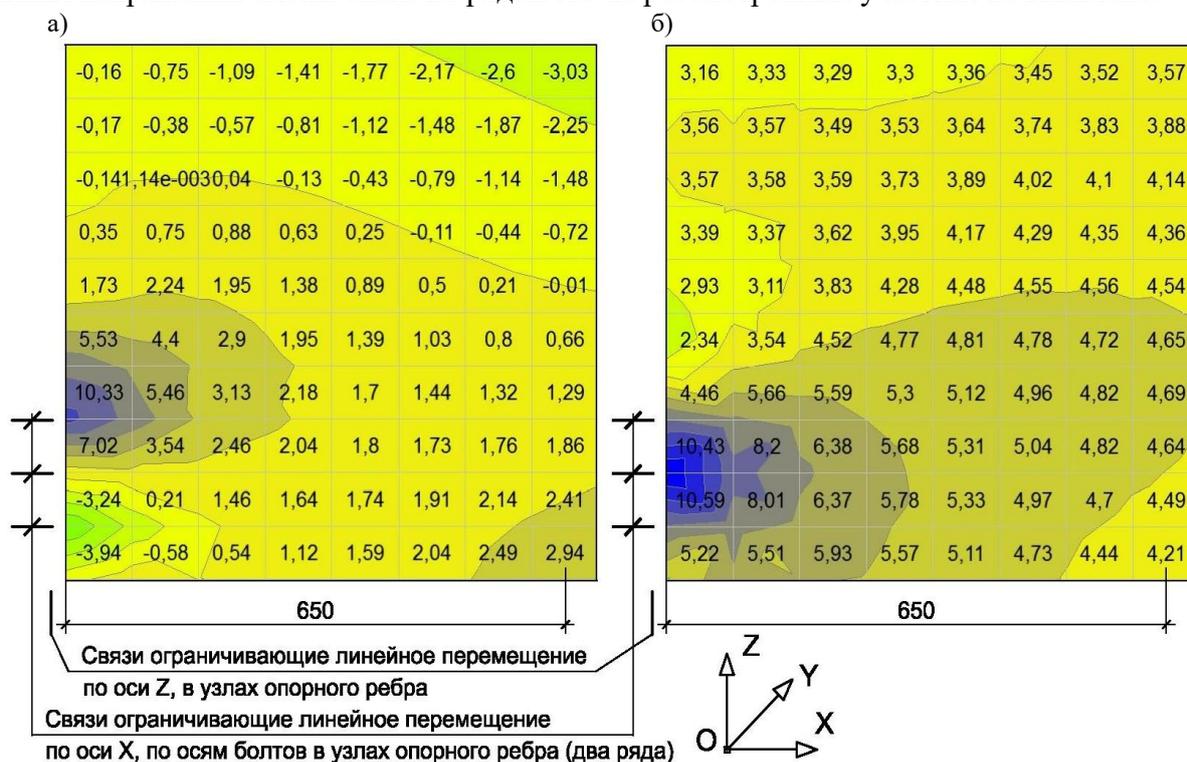
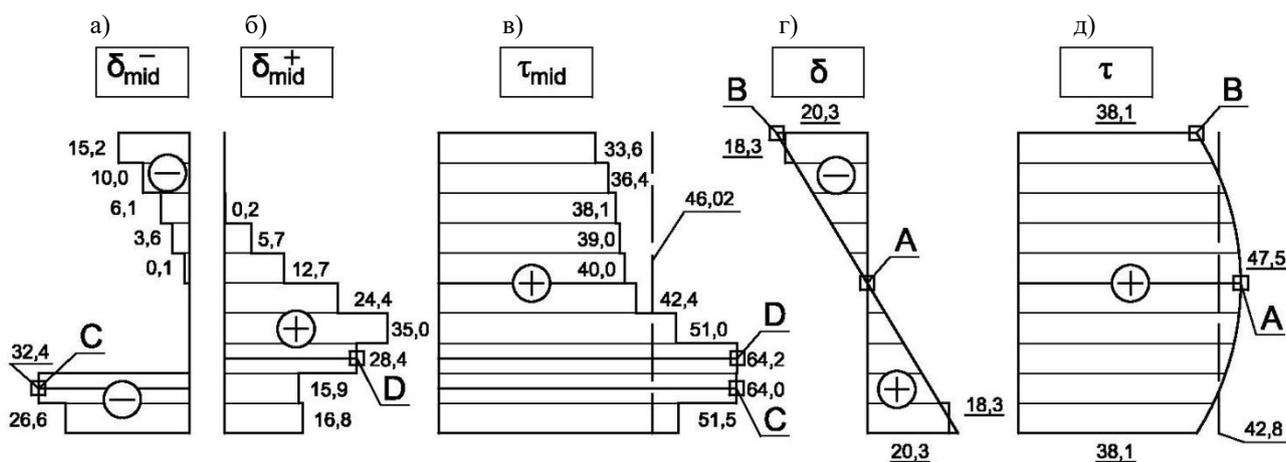


Рис. 6. Мозаика напряжений,  $\text{kN/cm}^2$ , на участке отсека №1: а - нормальные напряжения  $\sigma$ ; б - касательные напряжения  $\tau$

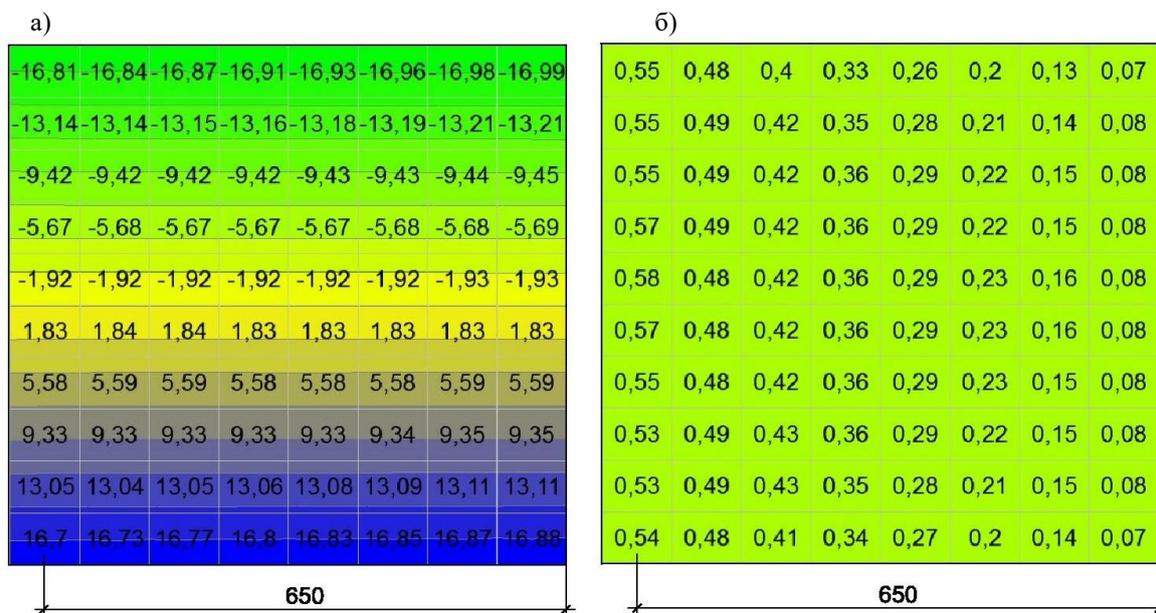
Рассмотрим результаты вычислений для участка №1, отсека №1. Анализ мозаики напряжений показывает достаточно существенный разброс значений напряжений по площади контролируемого участка. При этом выявлены две зоны максимальных по модулю значений напряжений. Первая - расположена в верхнем правом углу и представляет интерес только для значений нормальных напряжений. Вторая – около левой нижней зоны, у мест устройства горизонтальных опорных закреплений: во 2, 3 и 4-м горизонтальных рядах КЭ участка стенки (при нумерации рядов КЭ снизу вверх). Данные результаты имеют значительное расхождение со значениями напряжений на эпюрах, полученных аналитическим методом расчета. Выполняя расчеты аналитическим (классическим) способом, экстремальные значения напряжений получены в точках «А» и «В», однако численный расчет показал наибольшие значения напряжений в волокнах соответствующих точкам «С» и «D», согласно рис. 7. Расхождения эпюр объясняются тем, что горизонтальные связевые элементы, моделирующие шарнирно-неподвижную опору (по осям болтов), вызывают стеснение деформирования конструкции балки и не предоставляют полную свободу угла поворота опорного ребра, хотя и расположены в нижней трети по высоте сечения балки. Такая расчетная модель в большей степени соответствует реальной работе балки перекрытия как несущего элемента.

Конечно, можно задаться вопросом: «Почему мы строим эпюры по рядам, когда можно посмотреть значения экстремумов в конкретных КЭ?» Однако мы должны оценивать устойчивость стенки отсека в целом. И делать это необходимо именно на средние значения напряжений согласно нормативной методике!

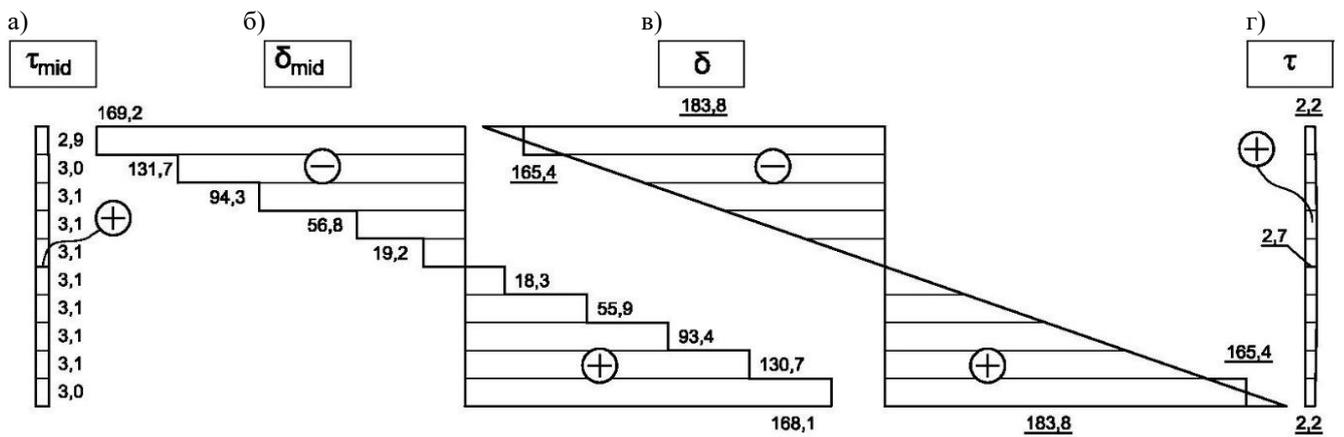
На рис. 8, 9 показаны результаты расчетов для участка отсека №2, расположенного в середине пролета. Для отсека №2 анализ мозаики нормальных напряжений показывает практически полное отсутствие неравномерности значений напряжений по горизонтальным рядам КЭ. Касательные напряжения имеют достаточно небольшие значения и практически не отличаются друг от друга по вертикальным рядам элементов. Полученные результаты численных расчетов имеют хорошую согласованность с результатами аналитического метода расчета стальных балок, что позволяет сделать вывод о достаточной надежности используемой пластинчатой расчетной модели.



**Рис. 7.** Эпюры нормальных и касательных напряжений (МПа) для участка отсека №1:  
 а, б, в – средние значения нормальных и касательных напряжений в стенке по рядам КЭ;  
 г, д – нормальные и касательные напряжения в стенке по аналитическому методу

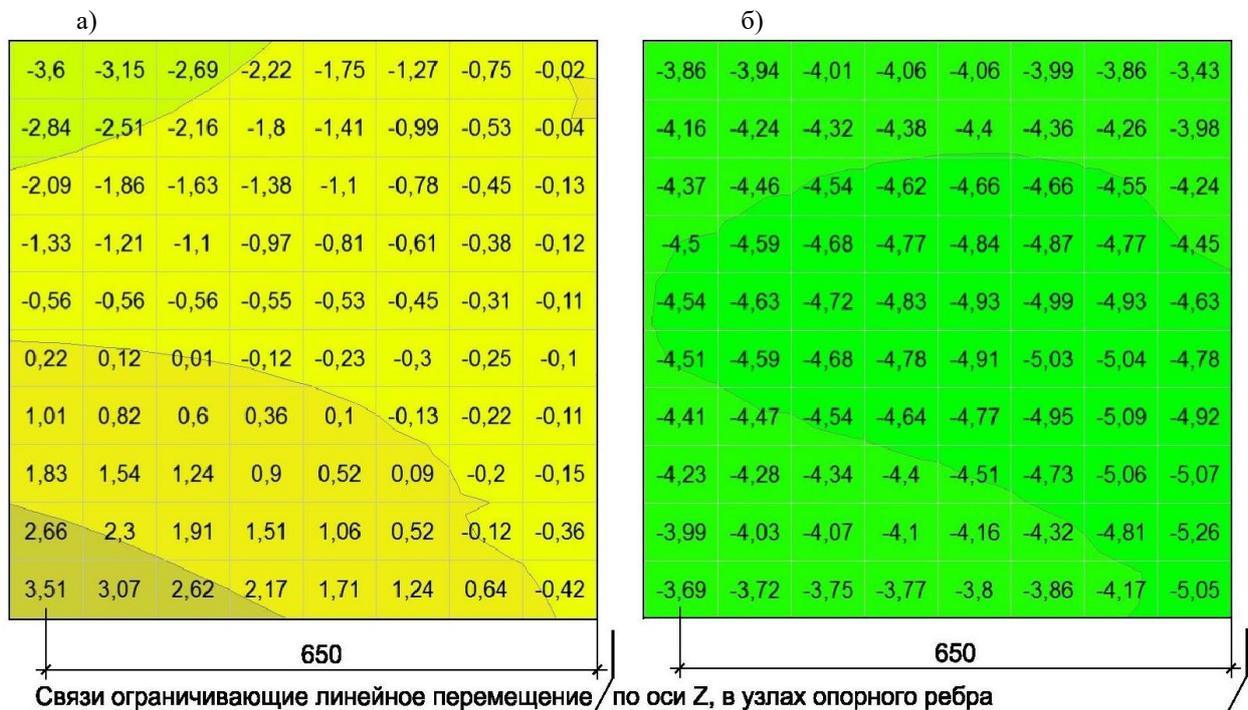


**Рис. 8.** Мозаика напряжений,  $\text{kN/cm}^2$ , на участке отсека №2:  
 а - нормальные напряжения  $\sigma$ ; б - касательные напряжения  $\tau$

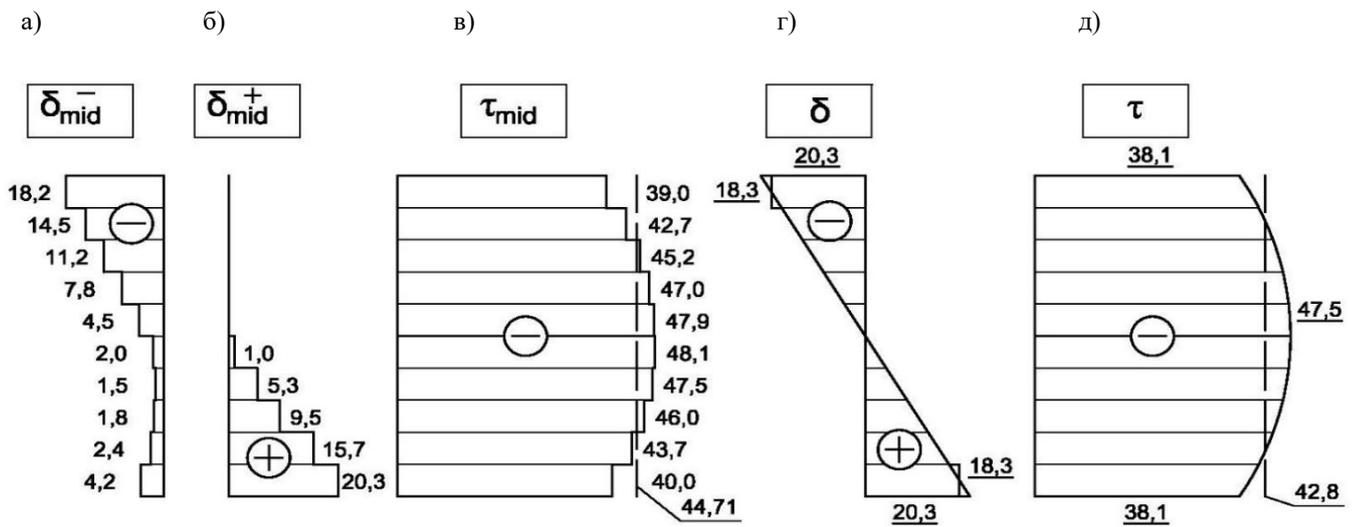


**Рис. 9.** Эпюры нормальных и касательных напряжений (МПа) для участка отсека №2:  
 а, б – средние значения касательных и нормальных напряжений в стенке по рядам КЭ;  
 г, д – нормальные и касательные напряжения в стенке по аналитическому методу

На рис. 10, 11 представлены результаты исследований для участка опорного отсека №3. Анализ мозаики нормальных напряжений показывает, что они имеют достаточно большую неравномерность по всей площади рассматриваемого участка с расположением максимальных значений по левой стороне. Касательные напряжения также характеризуются неравномерностью распределения значений по площади. Данные факты объясняются влиянием опорной реакции, но при этом отметим, что такое влияние проявляется в значительно меньшей степени, чем в левом опорном отсеке №1.



**Рис. 10.** Мозаика напряжений, кН/см<sup>2</sup>, на участке отсека №3:  
 а - нормальные напряжения  $\sigma$ ; б - касательные напряжения  $\tau$



**Рис. 11.** Эпюры нормальных и касательных напряжений (МПа) для участка отсека №3:  
а, б, в – средние значения нормальных и касательных напряжений в стенке по рядам КЭ;  
г, д – нормальные и касательные напряжения в стенке по аналитическому методу

Отметим, что в целом эпюры напряжений в отсеке №3, построенные по двум методам расчета, имеют близкое очертание, а полученные значения напряжений расходятся незначительно. Однако на эпюре нормальных напряжений, построенных по результатам расчета пластинчатой модели, в нижних рядах КЭ, локализованных около опорного ребра, выявлены зоны сжатия. На эпюрах, построенных по результатам аналитического метода расчета, нижнее волокно растянуто и соответственно нормальных напряжений с отрицательным знаком на данных эпюрах нет. Расхождение результатов объясняется опорной реакцией, передающейся через опорное ребро и оказывающей влияние на стенку. Как показано на рис. 10, такое влияние распространяется только на КЭ, расположенные близко к опорному ребру.

В таблице приведены средние значения нормальных напряжений на трех участках в первом и десятом рядах КЭ по высоте стенки и средние значения касательных напряжений по всему поперечному сечению согласно аналитическому и численному подходам. Указанные значения напряжений являются характерными значениями для двутавровых стальных балок и показывают различия и сходства в НДС для двух методов.

Таблица

**Таблица сравнения значений напряжений**

| Номер участка | Аналитический метод |              | Численный метод      |                    | $\Delta\sigma = (\sigma - \sigma_{mid})100\%/\sigma$ |        | $\Delta\tau = (\tau - \tau_{mid})100\%/\tau$ |        |
|---------------|---------------------|--------------|----------------------|--------------------|--|--------|--|--------|
|               | $\sigma$ , МПа      | $\tau$ , МПа | $\sigma_{mid}$ , МПа | $\tau_{mid}$ , МПа |  |        |  |        |
| 1             | $\pm 18,30$         | $+42,80$     | $+16,80$             | $-15,20$           | $+46,02$   | -8,2   | -17  | $+7,5$ |
| 2             | $\pm 165,40$        | $+2,45$      | $+168,10$            | $-169,20$          | $+3,06$  | $+1,6$ | $+2,3$                                       | $+24$  |
| 3             | $\pm 18,30$         | $-42,80$     | $+20,30$             | $-18,20$           | $-44,70$   | $+11$  | -0,5   | $+4,4$ |

*Примечание:* для сравнения значений касательных напряжений в таблице указаны средние величины по поперечному сечению (для всех 10-ти рядов КЭ участка стенки в численном методе), а для сравнения значений нормальных напряжений приводятся значения для 1-го и 10-го ряда (при нумерации рядов КЭ снизу вверх по сечению).

Исходя из анализа данных таблицы можно заметить высокую сходимость результатов численного и аналитического методов для нормальных напряжений, расположенных в середине пролета (участок №2). Это обусловлено хорошей равномерностью распределения напряжений в данной зоне стенки. Расхождение значений касательных напряжений в этой зоне балки объясняется малостью их величин.

На опорных участках стенки (№1, 3) расхождение в результатах расчетов имеет достаточно большое значение - до 17 %. Данный факт указывает на целесообразность использования численных методов оценки НДС стенки для учета таких факторов влияния, как опорная реакция.

### Выводы

1. Предложенный подход к определению средних значений напряжений на участке стенки с использованием численных расчетных моделей имеет высокое соответствие с аналитическим методом определения напряжений в зонах с равномерным распределением напряжений. Это подтверждает надежность предложенного подхода оценки НДС стенки двутавровой балки и возможность применения средних значений напряжений для проверки местной устойчивости по нормативной методике.

2. Методика определения средних значений напряжений позволяет учесть факторы влияния на характер распределения напряжений вдоль отсека. Такими факторами могут быть: опорная реакция, сосредоточенная нагрузка, конструктивные особенности опорных узлов.

### Библиографический список

1. Беляева С.Ю. Сравнительный анализ методик проверки местной устойчивости стенки стальной рамы двутаврового переменного по высоте сечения на частном примере/ С.Ю. Беляева, Д.Н. Кузнецов, И.А. Ковылина // Современное строительство и архитектура. – 2017. – №. 3 (07). – С. 30-34. DOI: <https://doi.org/10.18454/mca.2017.07.11>.
2. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни/ В.З. Власов. - М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 568 с.
3. Гордеева А.О. Расчетная конечно-элементная модель холодногнутого перфорированного тонкостенного стержня в программно-вычислительном комплексе SCAD Office / А.О. Гордеева, Н.И. Ватин // Инженерно-строительный журнал. - 2011. - № 3(21). - С. 36-46.
4. Карпиловский В.С. Вычислительный комплекс SCAD/ В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 592 с.
5. Ляхович Л.С. Роль парадоксов в оценке корректности расчетных моделей/ Л.С. Ляхович, А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер// Вестник ТГАСУ. Строительные конструкции, здания и сооружения. - 2013. - №2. - С. 121-131.
6. Перельмутер А.В. Сопоставление конкурирующих результатов расчета/А.В. Перельмутер //International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2017. - Т. 13. - №2. - С. 136-144.
7. Ржаницын А.Р. Составные стержни и пластинки/ А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1986. – 316 с.
8. Теплых А.В. Применение оболочечных и объемных элементов при расчетах строительных стальных конструкций в программах SCAD и Nastran с учетом геометриче-

- ской и физической нелинейности/ А.В. Теплых//Инженерно-строительный журнал. – 2011. – №. 3. – С. 4-20.
9. Туснин А.Р. Работа симметричных двутавровых сечений при развитии пластических деформаций и действии изгибающего момента и бимомента/ А.Р. Туснин, М. Прокич // Инженерно-строительный журнал. – 2014. - №5 – С. 44-53. doi 10.5862/MCE.53.3.
10. Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-5: Plated structural elements: BS EN 1993-1-5:2006. – 53 p.

### References

1. Belyeva S.Yu., Kuznetsov D.N., Kovilina I.A., Based on particular example comparative analysis of test methods of local stability of I-beam variable in height profile wall. Modern Construction and Architecture. 2017. No 3 (07). P. 30-34. DOI: <https://doi.org/10.18454/mca.2017.07.11>
2. Vlasov V.Z. Thin-walled elastic rods. M.: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1959. – 568 p.
3. Gordeeva A.O., Vatin N.I. Design finite element model of a cold-formed perforated thin-wall rod in SCAD Office software and computing complex. Engineering and Construction Journal - 2011. - № 3(21). - 36-46 p.
4. Karpilovskyy V.S. Karpilovskyy E.Z. Kryksunov, A.A. Maliarenko, A.V. Perelmuter, M.A. Perelmuter, Software complex SCAD – Moscow: Publishing House ASV, 2007. – 592 p.
5. Lyakhovich L.S., Perelmuter A.V., Slivker V.I Paradoxes role at correctness of computational models assessment. Bulletin of TGASU. Building structures, buildings and structures. - 2013. – No 2. - 121-131 p.
6. Perelmuter A.V. Comparison of competing calculation results. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. - 2017. T. 13. No2.136-144 p.
7. Rzhantsyn A.R. Composite rods and plates. – M.: Stroiizdat, 1986. – 316 p.
8. Teplykh A. V. Application of shell and volume elements while calculating building steel structures in SCAD and Nastran software programs with account of geometrical and physical nonlinearity. Engineering and Construction journal. 2011. – No. 3. – P. 4-20.
9. Туснин А.Р. Работа симметричных двутавровых сечений при развитии пластических деформаций и действии изгибающего момента и бимомента/ А.Р. Туснин, М. Прокич // Инженерно-строительный журнал. – 2014. - №5 – С. 44-53. doi 10.5862/MCE.53.3.
10. Tusnin A.R., Prokich M. Work of symmetrical I-beam sections during development of plastic deformations and the bending moment and bi-moment action. Engineering and Construction Journal. – 2014. - №5 – С. 44-53. doi 10.5862/MCE.53.3.
11. Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-5: Plated structural elements: BS EN 1993-1-5:2006. – 53 p.

# RESULTS OF NUMERICAL METHOD OF CALCULATION ADAPTATION TO STANDARD METHOD OF TESTING LOCAL STABILITY OF STEEL I-BEAM SECTION WALL

A.A. Sventikov<sup>1</sup>, D.N. Kuznetsov<sup>2</sup>

Voronezh State Technical University <sup>1,2</sup>

Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup>*Dr. of Tech. Sc. professor of department of Metal and Wooden constructions, tel.: +7(473)2715924,*

*e-mail: [svarka@vgasu.vrn.ru](mailto:svarka@vgasu.vrn.ru)*

<sup>2</sup>*Senior Lecturer of department of Metal and Wooden construction, tel.: +7(910)3468912,*

*e-mail: [kuznecov82@bk.ru](mailto:kuznecov82@bk.ru)*

---

There is completed numerical investigation on deflected mode assessment of steel I-beam symmetrical cross section. Internal forces and stresses are determined by analytical and numerical calculation methods. Calculation by numerical method is done in software SCAD Office based on method of finite elements. Beam design model was created with the help of plate finite elements with total number of 3572. Analytical method of finding beam deflected mode was applied for rod design scheme. For assessment of numerical method results new technique of finding average values in wall stress is suggested. These stress values were found according to some finite elements with account of square part of separate finite element in the raw content. Due to the calculation results received by finite elements method there were constructed mosaics of stresses and plots showing stresses distribution on beam wall sections under control.

Research results analysis demonstrated perfect level of verification while using both methods which proves reliability of suggested assessment of wall deflected mode. Parts of wall limited by shelves and double sided stiffness of beam are taken as sections. Research results analysis shows perfect level of verification while using both methods which proves suggested wall deflected mode assessment reliability. It was determined that the way of finding values of average stresses in wall section of welded beam is allowed to be used for testing wall local stability in accordance with standard methodology.

**Keywords:** steel I-beam,, wall local stability, steel beam design model, deflected mode, steel beam wall.

## ПРИМЕНЕНИЕ BIM-ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Д. И. Емельянов<sup>1</sup>, Д. Н. Кузнецов<sup>2</sup>, Л. А. Федосова<sup>3</sup>, А. А. Глушков<sup>4</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1, 2, 3</sup>

ООО «Ресурс»<sup>4</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических и деревянных конструкций

<sup>2</sup> Ст. преподаватель кафедры металлических и деревянных конструкций

Тел.: +7(910)3468912, e-mail: [kuznecov82@bk.ru](mailto:kuznecov82@bk.ru)

<sup>3</sup> Ассистент кафедры технологии, организации строительства, экспертизы и управления недвижимостью

<sup>4</sup> Инженер по экспертизе зданий и сооружений

---

Описывается последовательность реализации решетчатых криволинейных покрытий с применением BIM-технологий. Приводится обоснование целесообразности применения решетчатых конструкций для покрытий криволинейной формы. Рассмотрен процесс формирования криволинейных покрытий на основе пространственных решетчатых конструкций с применением BIM-технологий. Выбрано два наиболее рациональных варианта регулярной решетки для формообразования пространственных решетчатых конструкций криволинейных покрытий положительной гауссовой кривизны. Для обоих вариантов решетки смоделированы типовые элементы структуры. Описан алгоритм формирования криволинейных покрытий в программном комплексе Revit.

Приводятся результаты параметрического моделирования на двух примерах покрытий криволинейного очертания. Для каждого варианта покрытия получено по две модели с разными вариантами решетки. Всего создано четыре модели. Затрагивается методология проектирования криволинейных пространственных решетчатых конструкций. Описаны преимущества моделирования сложных архитектурных форм с использованием BIM-технологий.

**Ключевые слова:** BIM-технологии, программный комплекс Revit, моделирование криволинейных покрытий, информационное моделирование, решетчатые конструкции.

### Введение

В современном строительстве архитектурная выразительность зданий достигается использованием криволинейных геометрических форм, которые имеют как очертания стеновых ограждений, так и конструкций покрытия. Такие проектные решения обеспечивают целостность архитектурного стиля. Наиболее важными являются конструкции покрытия, которые должны отвечать следующим многочисленным условиям: перекрывать пролёт здания, воспринимать нагрузку от ограждающих конструкций и инженерных систем, воспринимать снеговую нагрузку, иметь низкое значение собственного веса и геометрию, позволяющую отводить осадки, технологично собираться при монтаже, иметь габариты, доступные для транспортировки с завода-изготовителя, и прочее. Совместить перечисленные требования к покрытию с криволинейным очертанием является сложной задачей. В отдельных случаях пространственную форму покрытия конструктивно можно реализовать плоскими ферменными конструкциями с криволинейным верхним поясом. При этом конструкции плоских ферм объединяются в пространственную несущую систему с помощью стержневых

прямолинейных элементов: прогонов, распорок, связевых и других элементов. Однако применение плоских ферм для создания покрытий с пространственным криволинейным очертанием имеет существенные ограничения, связанные с необходимостью пространственного моделирования сложной формы. Применение таких конструкций также позволяет обеспечить плавный переход от стоек к покрытию, без резкого изменения геометрии здания.

Пространственные решетчатые конструкции имеют легкий вес и регулярную структуру [1]. В СССР были разработаны и до настоящего времени широко используются в строительстве серийные проектные решения пространственных решетчатых покрытий. Например, типовая серия 1.466-2 «Пространственные решетчатые конструкции из труб типа Кисловодск», в которой предлагаются для применения плоские структурные покрытия [3, 4]. Однако использовать регулярную структуру решетчатой конструкции при проектировании покрытия с пространственным криволинейным очертанием проблематично, так как возникают непреодолимые геометрические и технические трудности. Решение такой задачи значительно упрощается при использовании инженерами современных программных комплексов для автоматизированного проектирования с применением Информационного Моделирования Здания - Building Information Modeling (BIM) [2]. В настоящее время имеется большое количество публикаций, посвященных преимуществам использования BIM-технологий [5, 6, 7, 9, 10]. Однако в опубликованных для инженеров статьях весьма мало разработок реальных способов трехмерного моделирования с помощью программных комплексов [8, 11]. Наиболее широкую практику применения среди программ с использованием BIM-технологий получил программный комплекс Revit 2018, который содержит широкую линейку инструментов для моделирования различных конструктивных решений, включая трехмерные информационные модели для покрытий с криволинейным очертанием поверхности и решетчатыми несущими системами.

## 1. Объект моделирования

Рассмотрим компьютерные модели покрытия криволинейного пространственного очертания для здания прямоугольной формы в плане с размерами 21x36 м. В первой модели покрытия выберем две опорные точки покрытия на одной отметке вдоль одной из координатных осей и еще две опорные точки - на 3 м выше и на 3 м ниже относительно первой опорной линии по второй координатной оси. В шаблоне для создания моделей используя вкладки «Семейства - Новые концептуальные формы», через указанные точки проведем два сплайна – две кривые линии с стрелой подъема в середине пролета  $f=1,8$  м (рис. 1). Выделяем данные линии и нажав кнопку на панели – «Создать форму» получаем поверхность №1 (рис. 2). Вторая модель покрытия будет иметь четыре опорные точки на одинаковой отметке, а сплайн, образующий поверхность, зададим по длине пролета 36 м со стрелой подъема, равной  $f=6$  м (рис. 3). Мы создали две поверхности двойкой положительной гауссовой кривизны. Полученные модели необходимы для создания решетчатой конструкции покрытия описывающей поверхности №1 и №2 (см. рис. 2, 3). Элементы нижних поясов решетчатых конструкций будут повторять геометрию криволинейной поверхности. Структурные конструкции покрытий будут описывать данные поверхности.

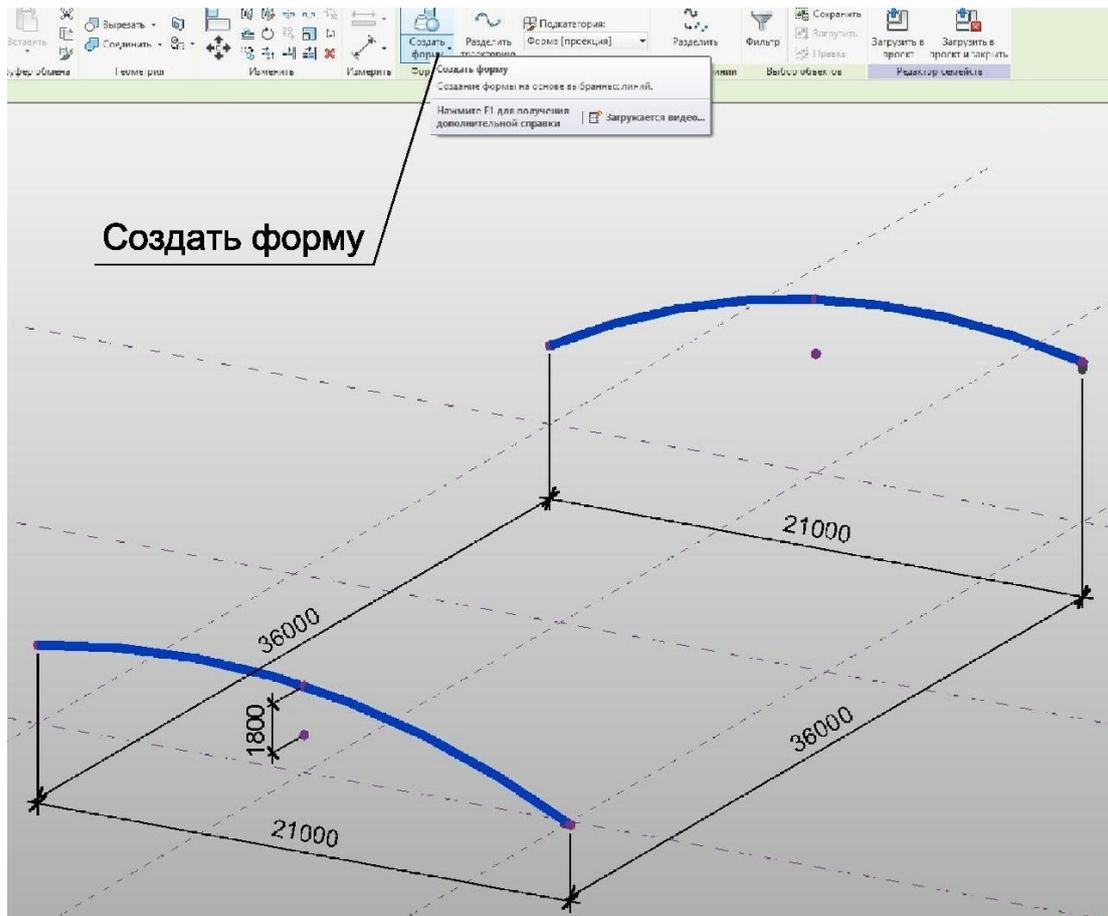


Рис. 1. Общий вид – поверхность №1

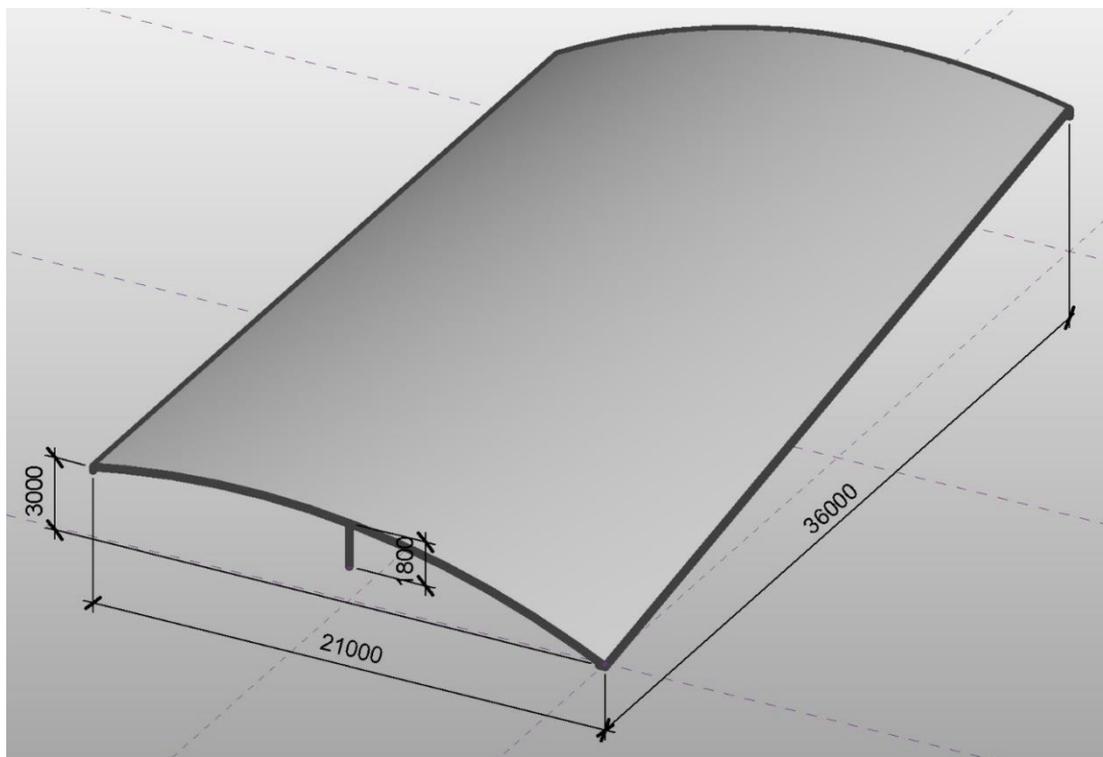


Рис. 2. Общий вид – поверхность №1

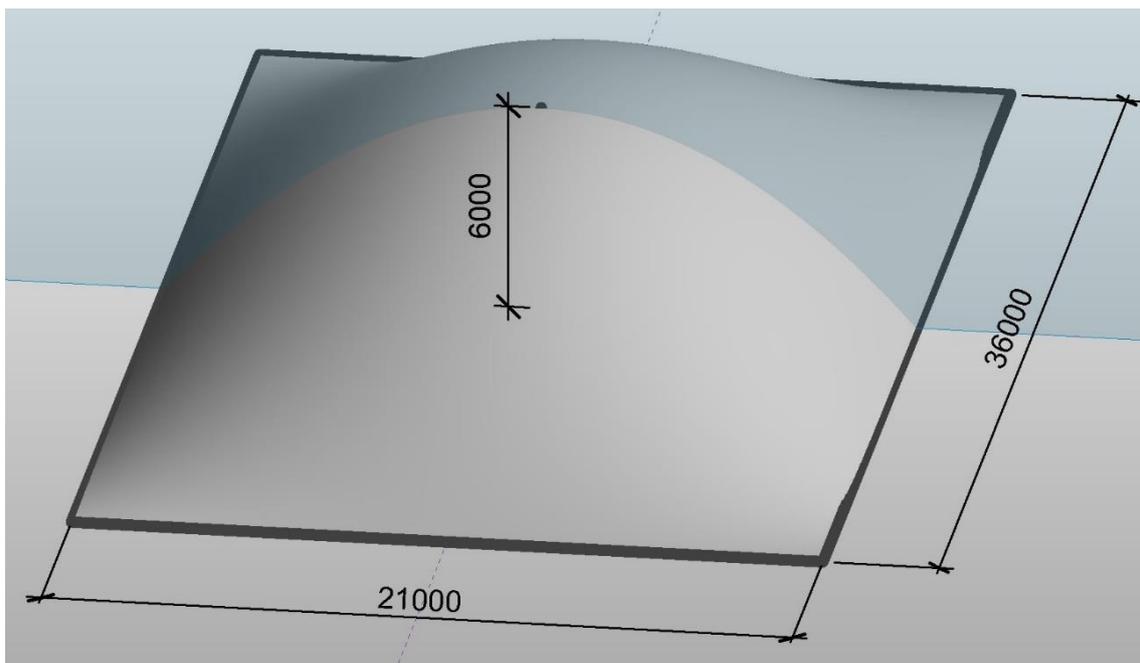


Рис. 3. Общий вид-поверхность №2

## 2. Методика моделирования решетчатой конструкции

Создадим два новых семейства – это два типа регулярной решетки пространственной конструкции, которые можно назначать криволинейным поверхностям для создания пространственных решетчатых моделей. Такие семейства создаются один раз. В дальнейшем можно менять геометрические параметры решетки модели (шаг, высоту и др.). Термин «Семейство» использует среда программы Revit и подразумевает модель конструкции или модель части строительной конструкции, которую возможно загружать в проекты. Для создания семейства выполним следующую последовательность действий: «Новое семейство-Выбор шаблона – Метрическая система, панель витража на основе образца». И в указанном шаблоне создаем два типа решетки «Семейство №1» (рис. 4, а) и «Семейство №2» (рис. 4, б) с размерами в плане 1,8x1,8 м, а высоту структуры семейств назначаем  $h=1,5$  м.

а)

б)

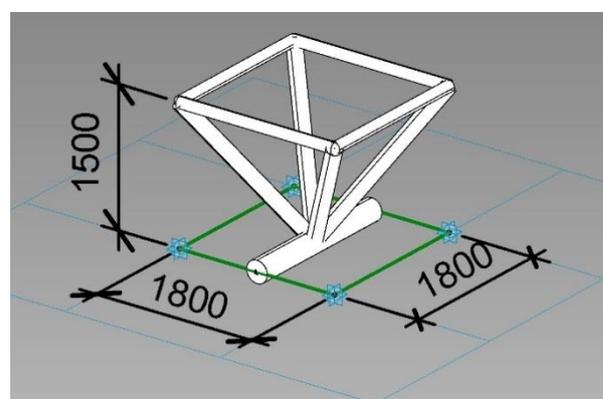
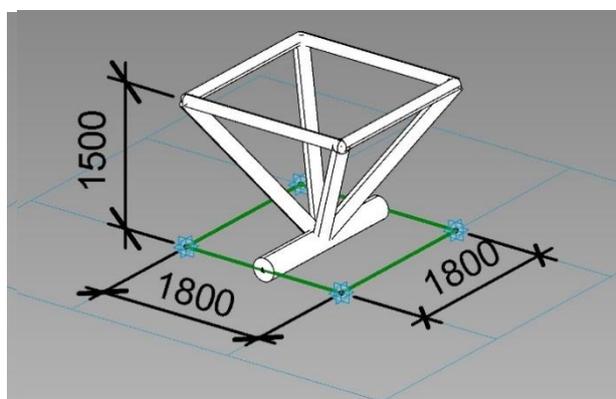
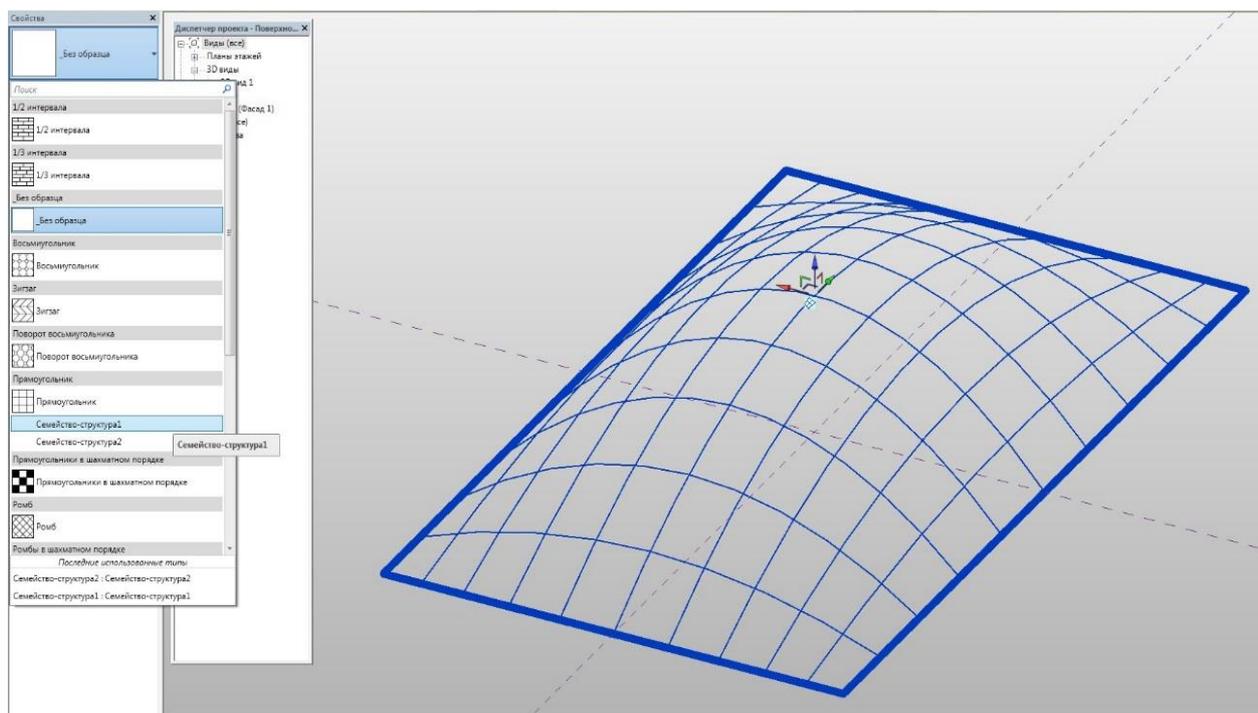
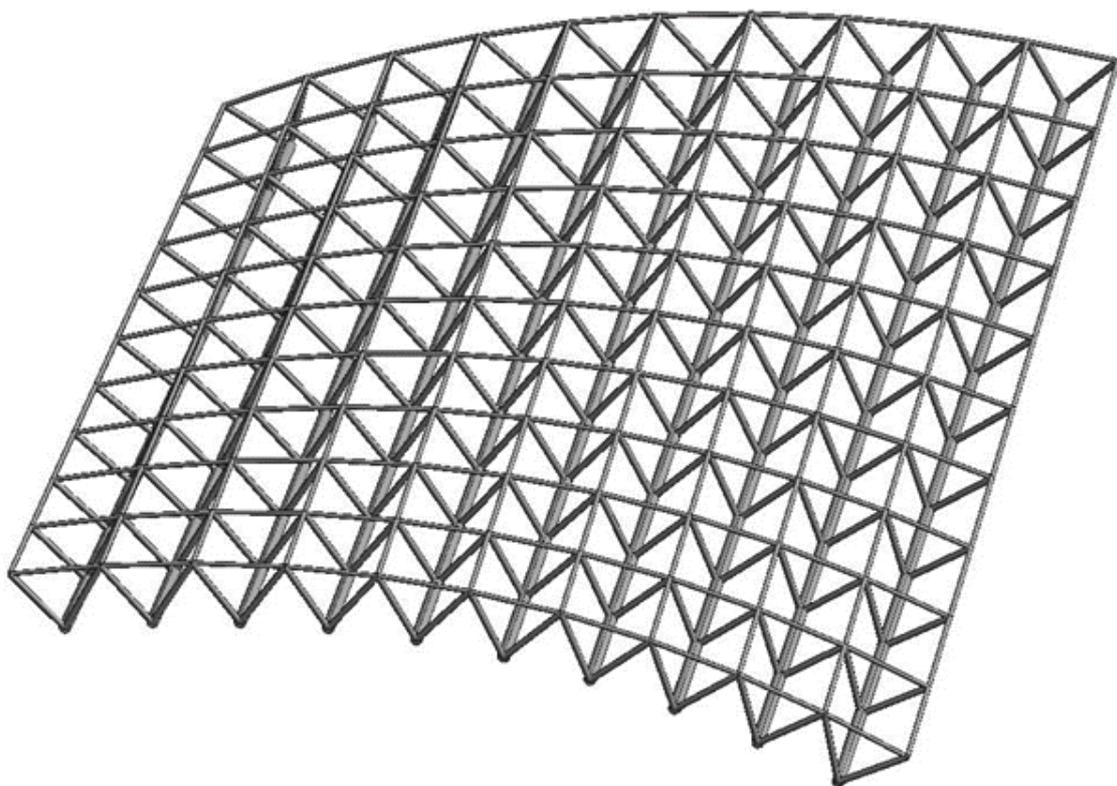


Рис. 4. Виды регулярной решетки пространственной конструкции:  
а) вид решетки №1 (Семейство №1); б) вид решетки №2 (Семейство №2)

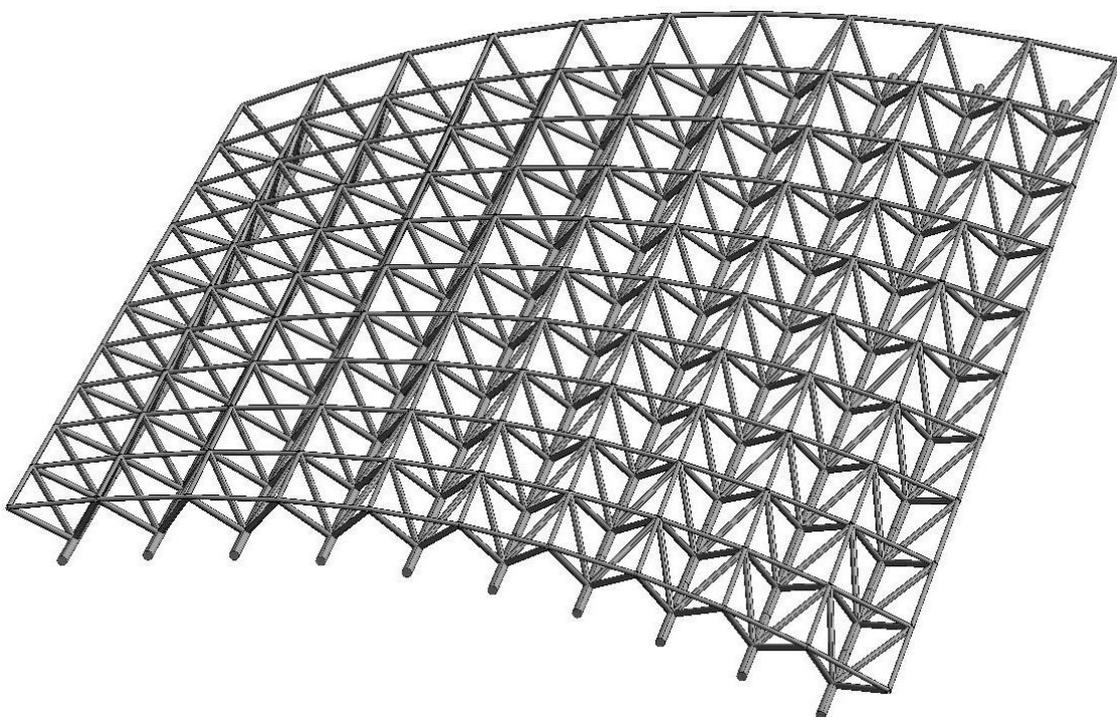
Поперечные сечения элементов несущей решетчатой системы назначены из круглых труб, диаметры и толщины которых затем корректируются по результатам подбора сечений. Открываем в Revit 2018 созданные ранее два вида поверхностей двойкой положительной гауссовой кривизны. Разделяем выбранные поверхности изопараметрическими линиями (рис. 5), предварительно загрузив в проект созданные семейства с двумя видами решетки. Термин «изопараметрические линии» применяется в пользовательском интерфейсе программы Revit, в классической теории оболочек они являются главными линиями кривизны. Полученная сеть, построенная по главным линиям кривизны, является ортогональной, так как линии кривизны разных видов направлены по двум взаимно ортогональным главным направлениям и пересекаются всегда под прямым углом. Но шаг и угол поворота сети таких линий может задаваться. Созданные семейства имеют размер решетки в плане 1,8x1,8 м. Эти значения не совпадают с шагом изопараметрических линий, которые разделяют поверхности на 10 частей в обоих направлениях. Тогда, новый размер решетки в плане будет назначен равным шагу изопараметрических линий, разбивающих поверхности на ячейки 2,1x3,6 м (рис. 5) Высота моделируемой структуры будет постоянной и равной назначенной при моделировании «Семейств»  $h=1,5$  м. При моделировании решетка будет описывать поверхность. Размеры решетки в плане вписаны в сетку линий кривизны, при этом сетка имеет регулярный шаг, но за счет кривизны поверхности решетка будет иметь одинаковые размеры элементов только для тех ячеек для которых это возможно. Для остальных ячеек геометрия элементов «Семейства» будет автоматически изменена так, что это позволит вписаться в шаг ячеек созданных пересечением линий кривизны. Для нанесения на поверхность 3D-структуры выберем из списка образцов созданные и загруженные семейства с двумя видами решетки (рис. 5). Выполним моделирование каждого покрытия для двух видов решетки (рис. 6-12).



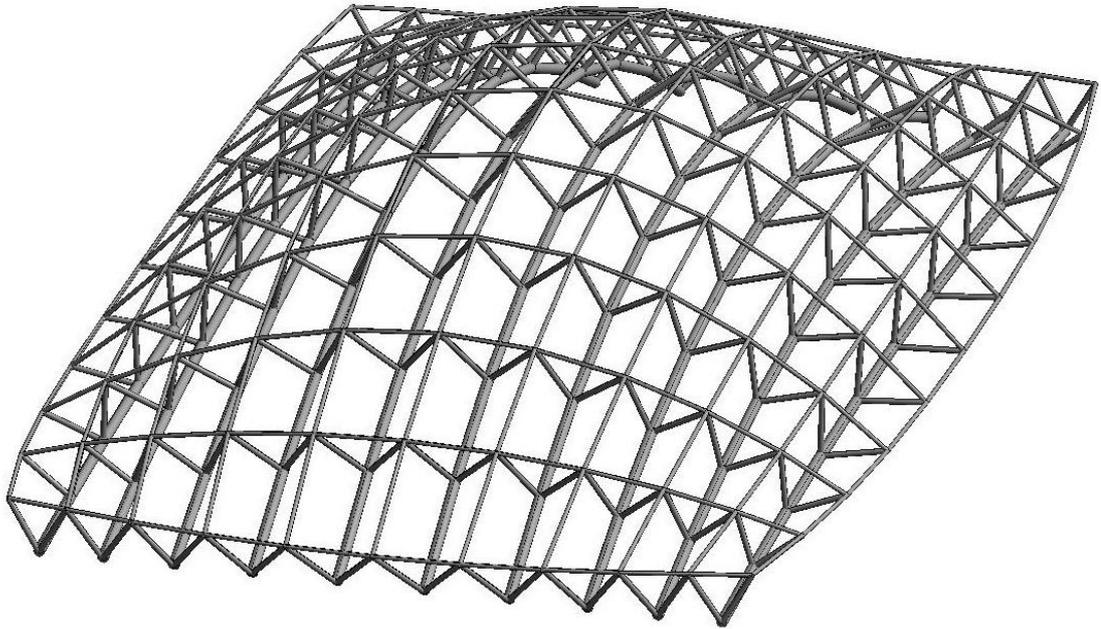
**Рис. 5.** Схема деления поверхности №1 на линии главной кривизны (изопараметрические линии)



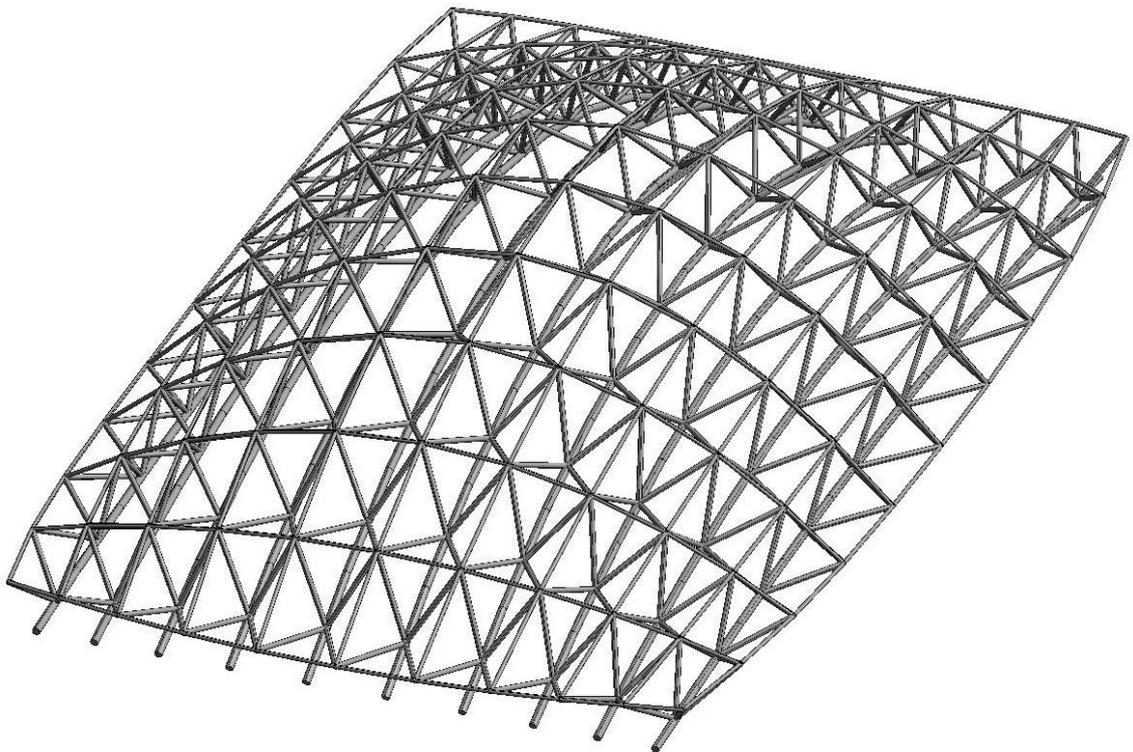
**Рис. 6.** Покрытие №1 (поверхность №1, вид решетки №1)



**Рис. 7.** Покрытие №2 (поверхность №1, вид решетки №2)



**Рис. 8.** Покрытие №3 (поверхность №2, вид решетки №1)



**Рис. 9.** Покрытие №4 (поверхность №2, вид решетки №2)

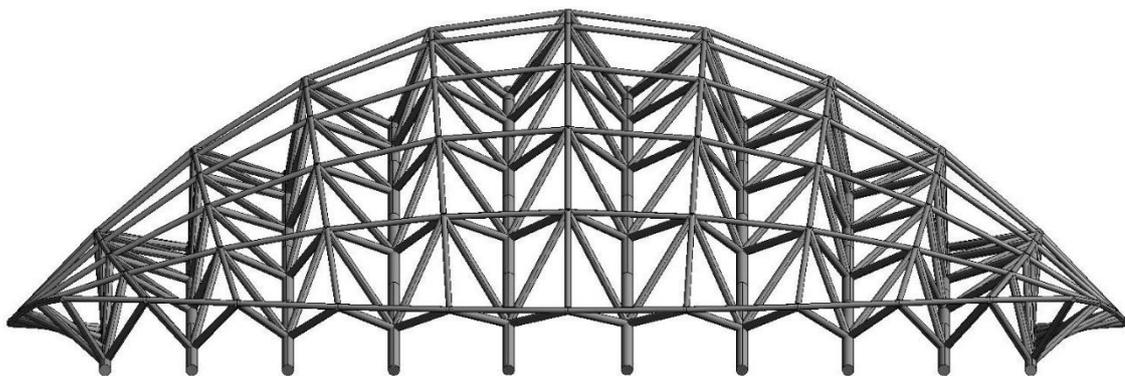


Рис. 10. Покрытие №4 (вид спереди), вид решетки №2

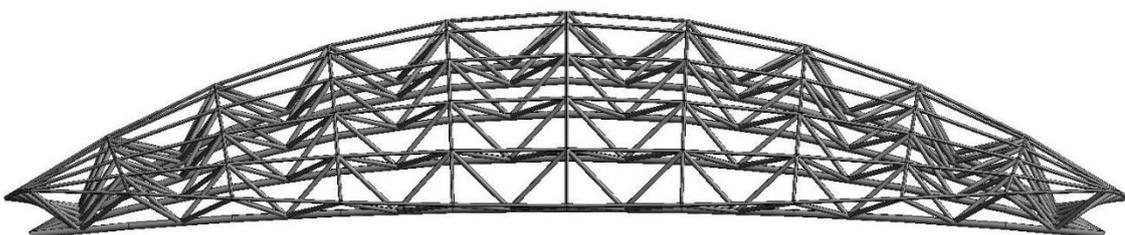


Рис. 11. Покрытие №4 (вид слева), вид решетки №2

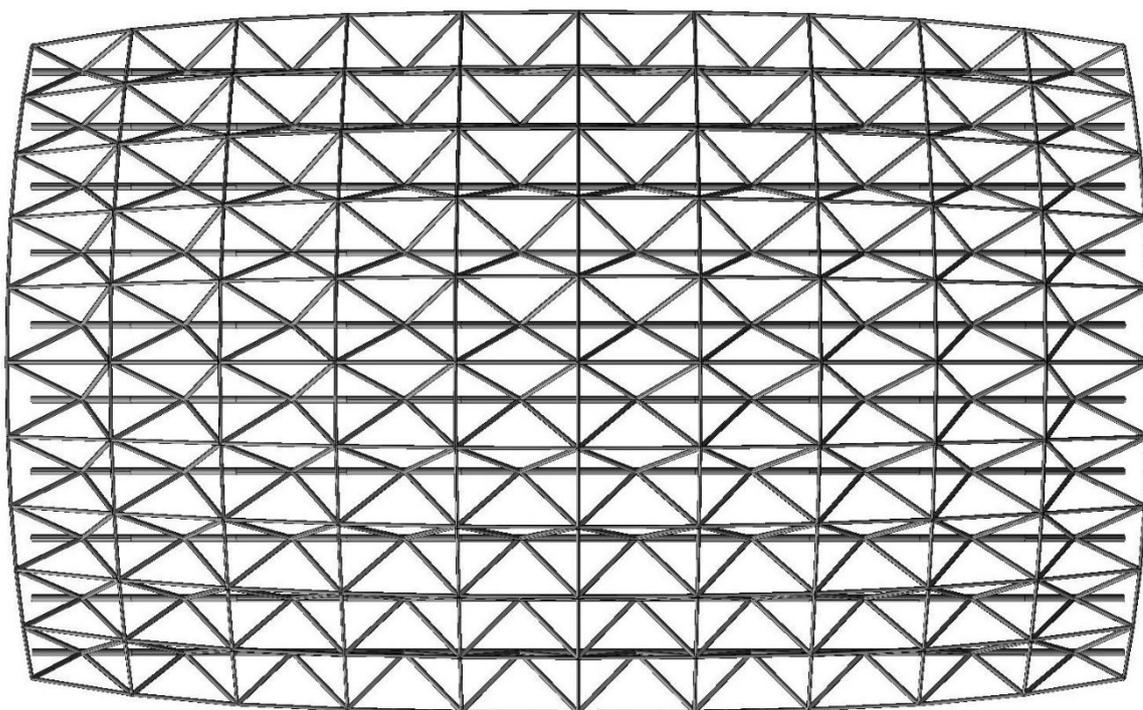


Рис. 12. Покрытие №4 (вид сверху), вид решетки №2

Для двух типов поверхностей пространственного покрытия здания прямоугольной формы в плане смоделированы несущие трубчатые системы с двумя видами регулярной ре-

шетки. При этом получено четыре модели (рис. 6-9) решетчатой структурной конструкции покрытий с решетчатыми несущими конструкциями из круглых труб. Разработанные компьютерные параметрические модели покрытий криволинейного очертания можно корректировать, варьируя отдельные параметры [2]. Модели имеют обратную связь с параметрами (пролет, шаг сетки, высота, диаметр сечений) и их можно переназначать. До появления BIM-технологий программные комплексы такой обратной связи с моделями или не имели, либо она была реализована частично. Современные программы предоставляют новые возможности в области формообразования и проработки конструктивных решений для покрытий, имеющих криволинейное очертание. Отметим, что для реализации сложной геометрии покрытия необходимо находить решения на последующих этапах проектирования, например: при сборе нагрузок, статическом расчете, разбиении на отправочные марки и других стадиях проектирования. Файл модели можно сохранять и импортировать как в программы автоматизированного проектирования такие как AutoCAD, так и в расчетные программные комплексы, такие как SCAD Office или ЛИРА-САПР. Но для криволинейных поверхностей не всегда можно собрать нагрузку применяя стандартные схемы СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия». Криволинейная поверхность может иметь геометрию, для которой таких схем в СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия» не предусмотрено. Такая особенность имеет место и для покрытий, рассмотренных в настоящей статье. Так например, покрытия №3 и №4 не соответствуют классической купольной схеме, а разбиение на арочные конструкции необходимо делать в двух плоскостях, причем градиент ветровой и интенсивность снеговой нагрузок в каждой плоскости будут различными.

### **Выводы**

1. Предложенная в статье методика моделирования покрытий криволинейного очертания на основе решетчатых конструкций с использованием BIM-технологий обладает следующими преимуществами: снижение продолжительности проектирования, автоматизация формирования решетчатой структуры поверхности, возможность корректировки параметров модели, повышенная точность проектирования многоэлементной конструкции покрытия, устранение нестыковок различных элементов в узлах, возможность применения созданных семейств различных видов решетки для других проектов.

2. Применение разработанных типовых решетчатых модулей является эффективным конструктивным решением для покрытий объектов со сложными криволинейными формами, которые обеспечивают архитектурную выразительность зданий различного функционального назначения.

### **Библиографический список**

1. Кузнецов Д.Н. Исследование расчетной схемы пространственной решетчатой конструкции на примере пожарной вышки высотой  $H=45\text{м}$  / Д.Н. Кузнецов, В.Г. Сазыкин, В.А. Шпакова // Современное строительство и архитектура. – 2017. – №3 (07). – С. 35-39. <https://doi.org/10.18454/mca.2017.07.10>.

2. Ланцов А.Л. Компьютерное проектирование зданий: Revit 2015 / А.Л. Ланцов. - М.: Consistent Software Distribution; РИОР, 2014. – 664 с.
3. Металлические конструкции: учебник / В.О. Пермяков, О.О. Нилов, О.В. Шимановский, И.Д. Белов и др.; под общ. ред. В.О. Пермякова и О.В. Шимановского. – Киев: Изд-во «Сталь», 2008. – 812 с.
4. Металлические конструкции: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю.И. Кудишин, Е.И. Беленя, В.С. Игнатьева и др.; под ред. Ю.И. Кудишина. – Изд. 10-е, стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 687 с.
5. Пахарева И.В. Технология BIM: теория и практика внедрения / И.В. Пахарева, О.В. Сеницына // Advanced Science. – 2017. – №3. – С. 377-384.
6. Полуэктов В.В. Технологии информационного моделирования (BIM) при архитектурном и градостроительном проектировании / В.В. Полуэктов // Архитектурные исследования. – 2016. – №1 (5). – С. 46-55.
7. Рылько М.А. Компьютерные технологии в архитектурно-строительном проектировании / М.А. Рылько // Промышленное и гражданское строительство. – 2016. – №4. – С. 67-71.
8. Червова Н.А. Коллизии инженерных систем при проектировании в BIM платформах / Н.А. Червова, Д.О. Лепешкина // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2018. – №3 (66). – С. 19-29.
9. Черных М.А. BIM-технология и программные продукты на его основе в России / М.А. Черных, Н.М. Якушев // Вестник ИЖГТУ им. М.Т. Калашникова. – 2014. – №1. – С. 119-121.
10. Шарманов В.В. Трудности поэтапного внедрения BIM / В.В. Шарманов, А.Е. Мамаев, А.С. Болейко, Ю.С. Золотова // Строительство уникальных зданий и сооружений. – 2015. – №10 (37). – С. 108-120.
11. NBS National BIM Report 2015. Available at: <https://www.thenbs.com/knowledge/nbs-national-bim-report-2015>.

## References

1. Kuznetsov D.N, Sazykin V.G. Shpakova V.A Research of grid structure design scheme on example of fire tower of 45m height. Modern construction and architecture. 2017. No 3(07). – P. 35-39. <https://doi.org/10.18454/mca.2017.07.10>.
2. Lantsov A.L. Computer-aided design of buildings: Revit . 2015 - М.: Consistent Software Distribution; RIOR, 2014. – 664 p.
3. Permyakov V.O, Nilov O.O, Shimanovsky O.V., Belov I. D. Metal structures: student book. – Kiev. Pub. house “Stal”, 2008. – 812 p.
4. Kudishin Yu.I, Belenya E.I., Ignatieva V.S. Metal structures: student book. Issue 10<sup>th</sup> , RP. – М.: Pub. center “Akademiya”, 2007. – 687 p.

5. Pakhareva I.V, Sinitsina O.V. Technology-BIM: theory and practice of Introduction. Advanced Science. – 2017. – No3. – P. 377-384.
6. Poluecktov V.V. Technology of information modeling at architectural and town planning design. Architectural investigation. – 2016. – No1 (5). – P. 46-55.
7. Rylko M.A. Information technology in architectural –building design. Industrial and civil construction. – 2016. – No4. – p. 67-71.
8. Chervova N.A., Lepyoshkina D.O. Collision of engineering system at designing in BIM platforms. Construction of unique buildings and structures. – 2018. – No 3 (66). – P. 19-29.
9. Chernykh M.A., Yakushev N.M., Kalashnikov M.T. BIM-technologies and programming products based on it in Russia. Bulletin IzhGTU. – 2014. – No1. – P. 119-121.
10. Sharmanov V.V., Mamaev A.E., Boleiko A.S., Zolotova Yu.S. Difficulties of step by step introduction. Construction of unique buildings and structures. – 2015. – No10 (37). – P. 108-120.
11. NBS National BIM Report 2015. Available at: <https://www.thenbs.com/knowledge/nbs-national-bim-report-2015>.

## APPLICATION OF BUILDING INFORMATION MODELING TECHNOLOGIES FOR CURVILINEAR ROOFS BASED ON GRID STRUCTURE (

D.I. Emelynov<sup>1</sup>, D.N.Kuznetsov<sup>2</sup>, L.A. Fedosova<sup>3</sup>, A.A. Glushkov<sup>4</sup>

Voronezh State Technical University<sup>1,2,3</sup>  
Ltd «Resurs»<sup>4</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Tech.Sc., associate professor of department of Metal and Wooden structures

<sup>2</sup> Senior Lecturer of department of Metal and Wooden structures

tel.; +7(910)3468912, e-mail: [kuznecov82@bk.ru](mailto:kuznecov82@bk.ru)

<sup>3</sup> lecturer of department of Technologies, Organization of Construction, Real Estate Survey and management

<sup>4</sup> Engineer of Buildings and structures survey Ltd “Resurs”

---

There is described sequence of grid structure roofs with application of building information modeling technologies (BIM). Substantiation of reasonability of grid structures use for curvilinear roofs is given. There is analyzed the process of curvilinear roofs based on grid structures with application of BIM -technologies. Two most reasonable variants of regular grid structures for shaping of curvilinear bridging grid structures of positive Gaussian curvature are chosen. For both variants of grids there are simulated typical members of structure. There is also described algorithm of curvilinear bridging shaping in software package “Revit”. Results of parametric simulation on two examples of roofs with curvilinear profile are presented. For each variant there were received two models with different variants of grid. Four models are created. Methodology of curvilinear grid structures design is taken into consideration. There are presented advantages of complicated architectural forms designing with application of BIM - technologies.

**Keywords:** building information technologies (BIT), software “Revit”, simulation of curvilinear roofs, information modeling, grid structures.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.044:624.156.32:624.15

## ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ С УЧЕТОМ СТАДИЙНОСТИ ВОЗВЕДЕНИЯ

С. В. Ефрюшин<sup>1</sup>, А. А. Малащенко<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики

<sup>2</sup> Магистрант кафедры строительной механики, тел.: +7(473)271-52-30; e-mail: [stroymech.vgasu@yandex.ru](mailto:stroymech.vgasu@yandex.ru)

Проводится сравнение результатов напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты на упругом основании для двух способов расчета - «традиционного» способа расчета при неизменной расчетной схеме и с учетом изменения расчетной схемы плиты на этапах её бетонирования. Модель основания принята в виде упругого полупространства. Анализ напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты производится при различных последовательностях бетонирования. Показано, что учет изменения расчетной схемы на этапах бетонирования кардинально изменяет напряженно-деформированное состояние плиты.

По результатам проведенных расчетов следуют выводы о необходимости в особых случаях учитывать последовательность строительства путем изменения расчетной схемы. Опыт приведенных расчетов может быть использован при проектировании подобных конструкций.

**Ключевые слова:** плита на упругом основании, упругое полупространство, напряженно-деформированное состояние.

Метод расчета строительных конструкций с использованием компьютерного моделирования процесса возведения здания является относительно новым методом расчета. Необходимость его применения для тех или иных классов задач требует доказательств путем проведения численных экспериментов, поэтому исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) плиты этим методом имеет определенную актуальность [1].

Исследование проводится путем сравнения результатов НДС железобетонной фундаментной плиты на упругом полупространстве для двух способов расчета - «традиционный» способ при неизменной расчетной схеме и с использованием моделирования процесса возведения конструкций. Под традиционным методом расчета следует понимать создание расчетной схемы и нагружение ее собственным весом одномоментно. При моделировании процесса возведения предполагается разбиение процесса бетонирования плиты на этапы, на каждом из которых производится изменение модуля упругости по мере набора прочности бетоном [2, 3].

В качестве основания использовалась модель упругого полупространства с модулем упругости  $20 \text{ МН/м}^2$  и коэффициентом Пуассона равным 0,2. Объемный вес грунта принят  $19 \text{ кН/м}^3$ .

© Ефрюшин С. В., Малащенко А. А., 2019

Создание расчётной модели плиты произведено методом конечных элементов в программе ЛИРА-САПР с использованием блока «Монтаж» [4]. Расчетная модель фундаментной плиты сформирована из прямоугольных конечных элементов (КЭ) оболочечного типа. Деформационные характеристики плиты приняты как для бетона класса В25. Размеры плиты 8,0x8,0 м, сетка дискретизации 32x32.

Для проведения расчетов с учетом изменения расчетной схемы в процессе изготовления фундаментной плиты учитывались технология и последовательность её бетонирования. Рассматривалось 3 варианта изготовления конструкции по захваткам: бетонирование от середины к краям, бетонирование слева направо, бетонирование по диагонали.

Вся конструкция разбивается на захватки для моделирования изготовления монолитной плиты на упругом основании. Под захваткой подразумевается одномоментный этап бетонирования участка плиты. На каждом этапе изменяется модуль упругости бетона, что моделирует увеличение жесткостных свойств при наборе прочности. Нагрузкой на всех этапах является собственный вес бетона плиты. В таблице приведены сведения об изменении коэффициентов модуля деформации в зависимости от этапа возведения конструкции для первой захватки.

Таблица

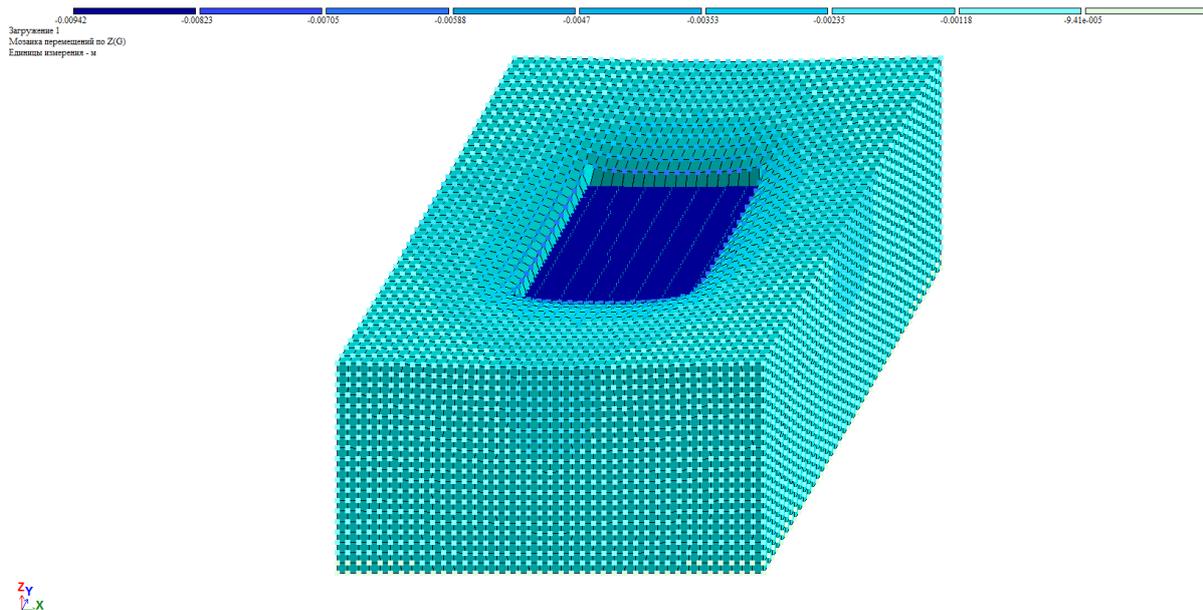
Изменение коэффициентов модуля упругости  
для первой захватки

| $E_i = k_i \cdot E$               |       |
|-----------------------------------|-------|
| $E = 3 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$ |       |
| i- номер этапа монтажа            |       |
| Для 1 захватки:                   |       |
| i                                 | $k_i$ |
| 1                                 | 0.01  |
| 2                                 | 0.3   |
| 3                                 | 1     |
| 4                                 | 1     |
| 5                                 | 1     |
| 6                                 | 1     |
| 7                                 | 1     |

Анализ НДС фундаментной плиты выполняется на основе расчетов, проведенных в программном комплексе ЛИРА-САПР.

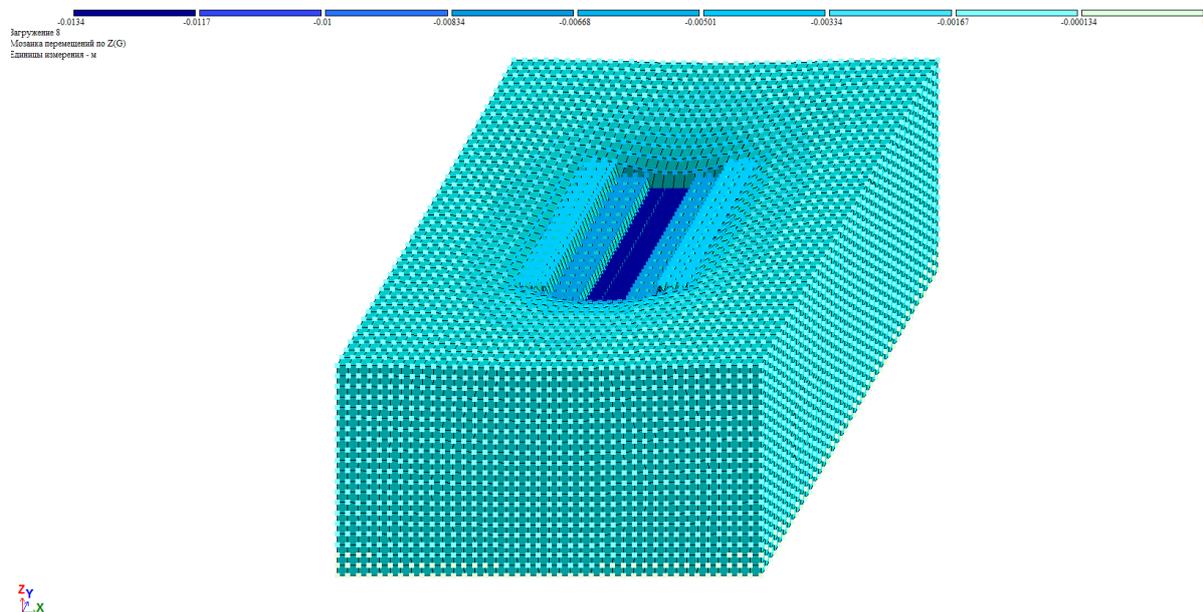
При сравнении результатов расчётов вертикальных перемещений выявлено перераспределение областей минимальных и максимальных значений. В результате расчета получены вертикальные перемещения, составляющие 9,42 мм. Перемещения распределены равно-

мерно по всей площади плиты. Деформированные виды плиты и основания приведены на рис. 1-4.



**Рис. 1.** Вертикальные перемещения при «традиционном» методе расчета

При бетонировании от середины к краям рассматривалось 8 стадий монтажа. В результате расчета получены максимальные перемещения 13,4 мм. Перемещения распределены неравномерно по площади плиты (рис. 2).



**Рис. 2.** Вертикальные перемещения с учетом этапов возведения плиты при бетонировании от середины к краям

При бетонировании слева направо рассматривалось 12 стадий монтажа. В результате расчета получены максимальные перемещения 13,1 мм. Перемещения распределены неравномерно по площади плиты (рис. 3).

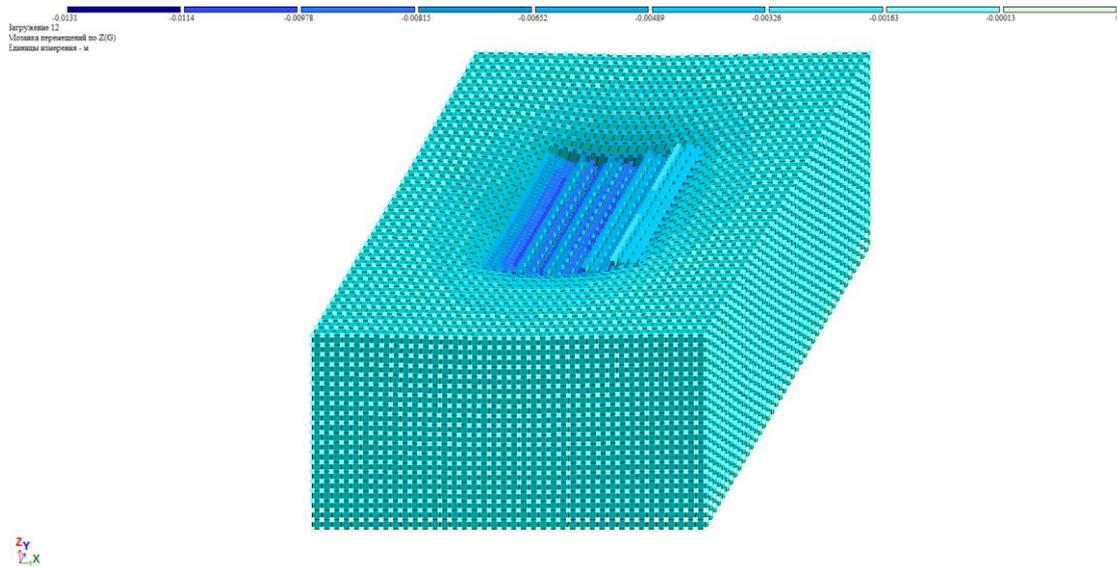


Рис. 3. Вертикальные перемещения с учетом этапов возведения плиты при бетонировании слева направо

При бетонировании по диагонали рассматривалось 12 стадий монтажа. В результате расчета получены максимальные перемещения 26,4 мм. Перемещения распределены неравномерно по площади плиты (рис. 4).

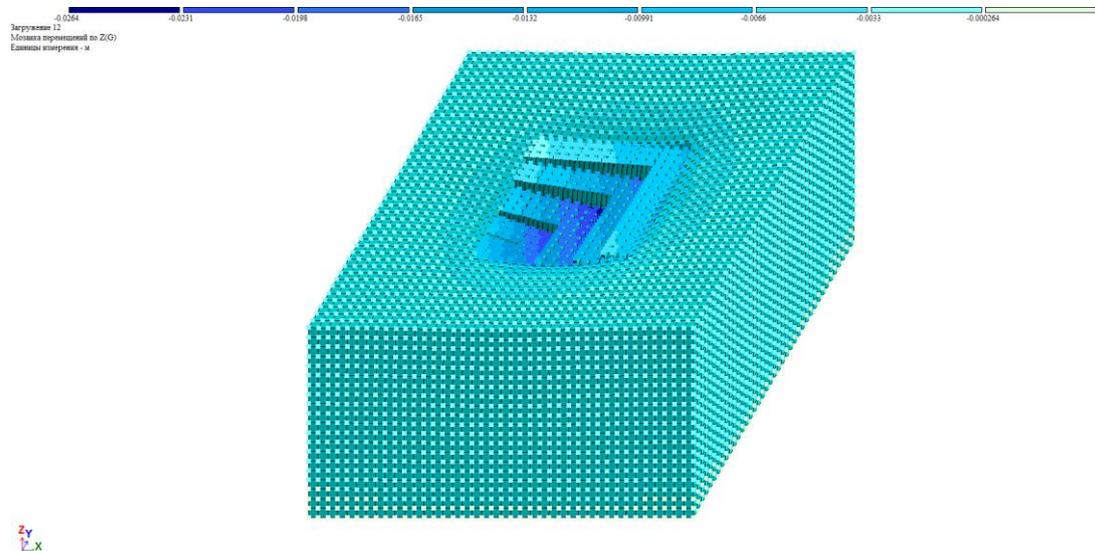
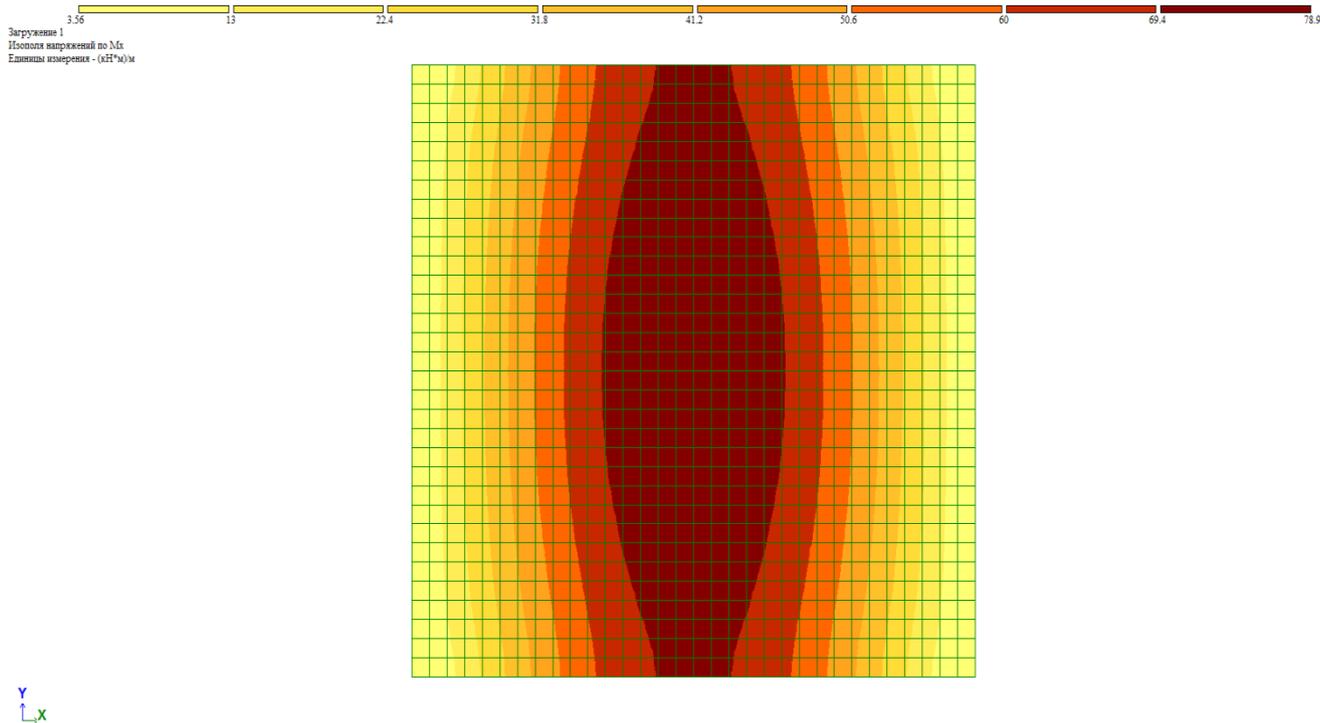


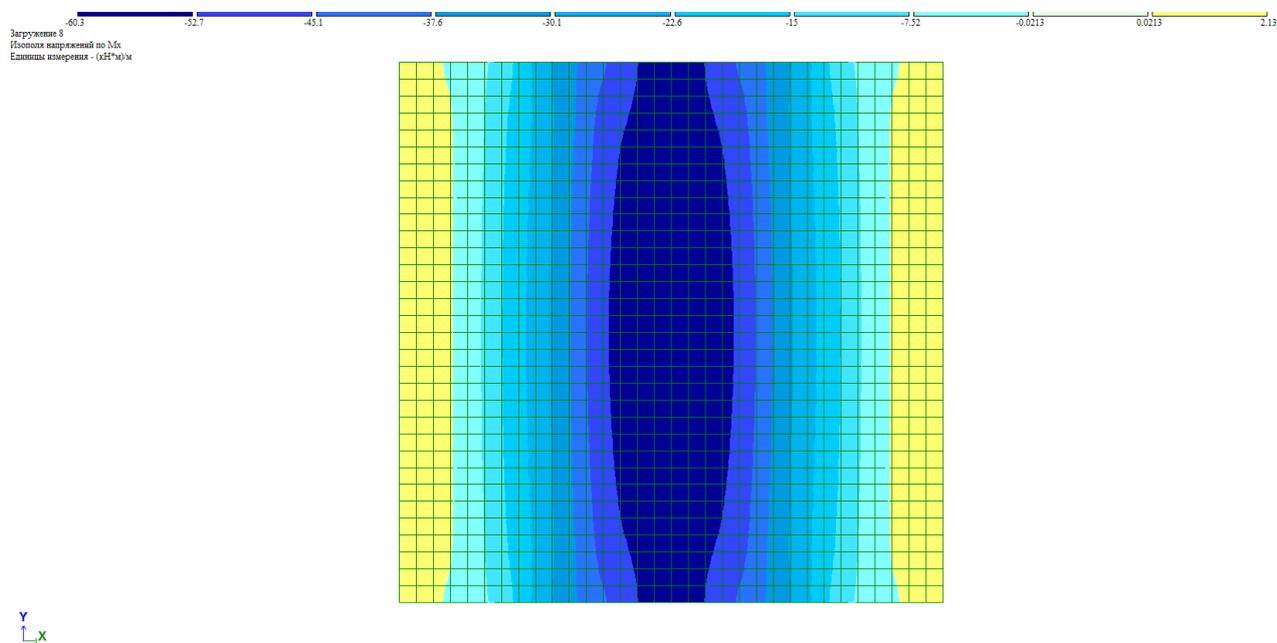
Рис. 4. Вертикальные перемещения с учетом этапов возведения плиты при бетонировании по диагонали

Изолинии распределения изгибающего момента  $M_x$  приведены на рис. 5-8.

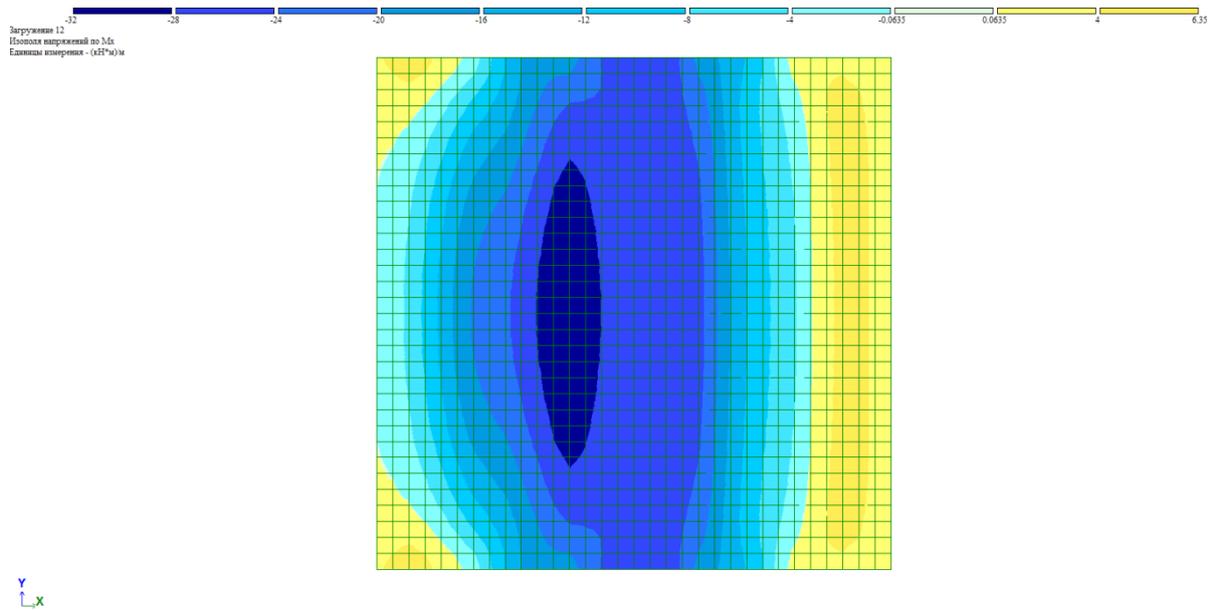
Получено перераспределение областей отрицательных и положительных значений. Наблюдается увеличение областей максимальных отрицательных значений изгибающего момента  $M_x$ .



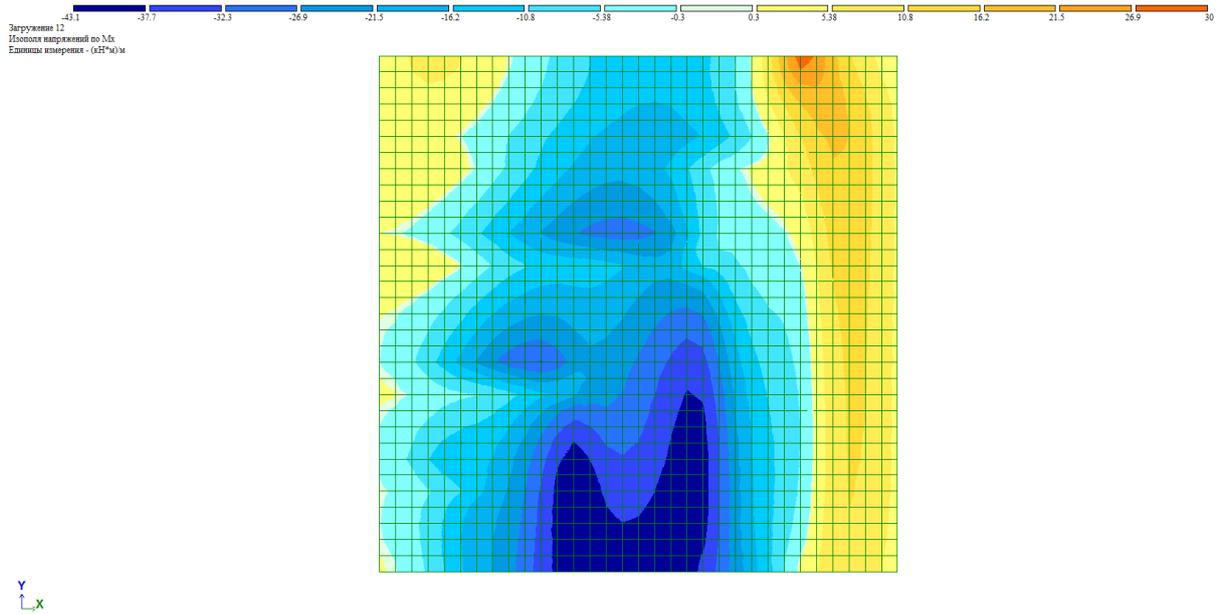
**Рис. 5.** Распределение изгибающих моментов  $M_x$  при «традиционном» методе расчета



**Рис. 6.** Распределение изгибающих моментов  $M_x$  с учетом этапов возведения плиты при бетонировании от середины к краям

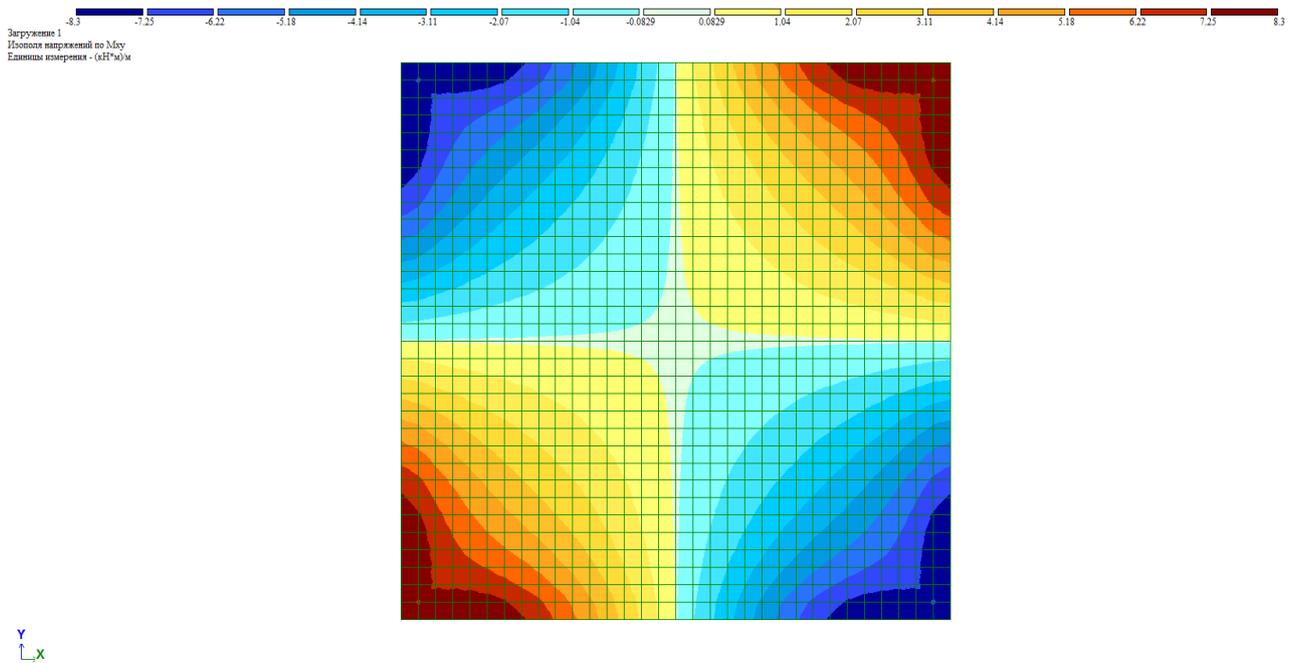


**Рис. 7.** Распределение изгибающих моментов  $M_x$  с учетом этапов возведения плиты при бетонировании слева направо

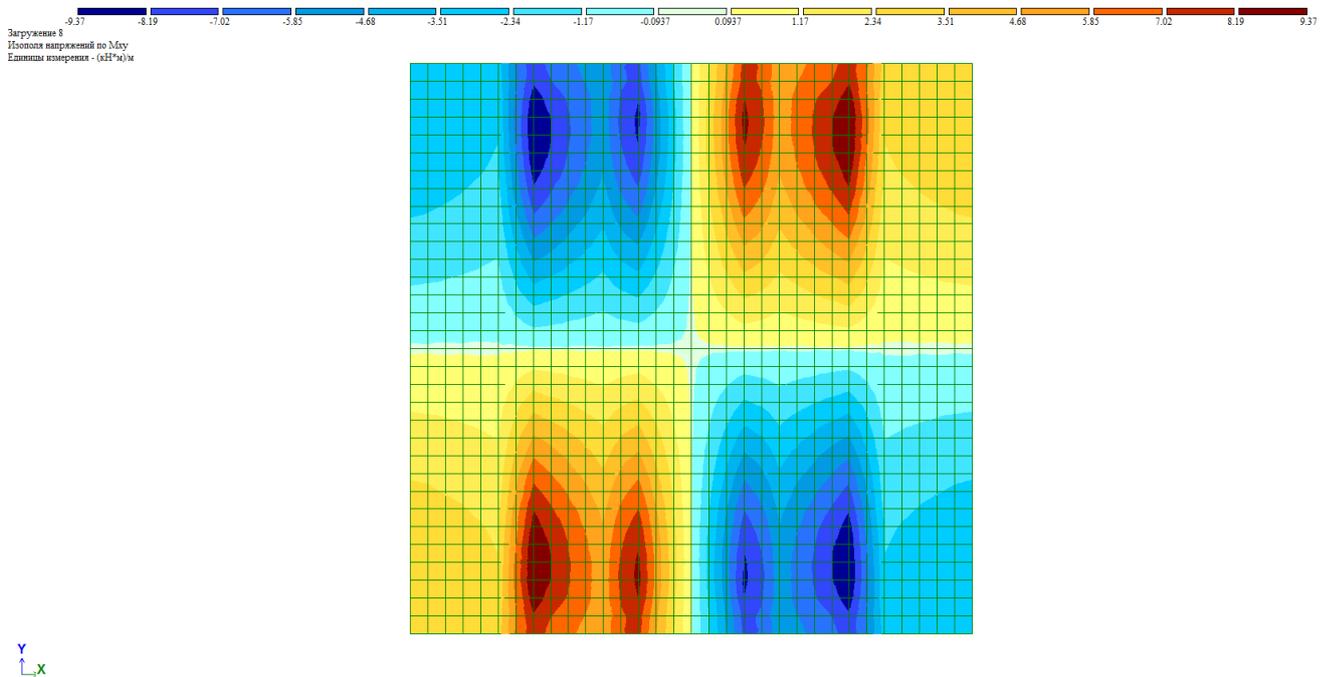


**Рис. 8.** Распределение изгибающих моментов  $M_x$  с учетом этапов возведения плиты при бетонировании по диагонали

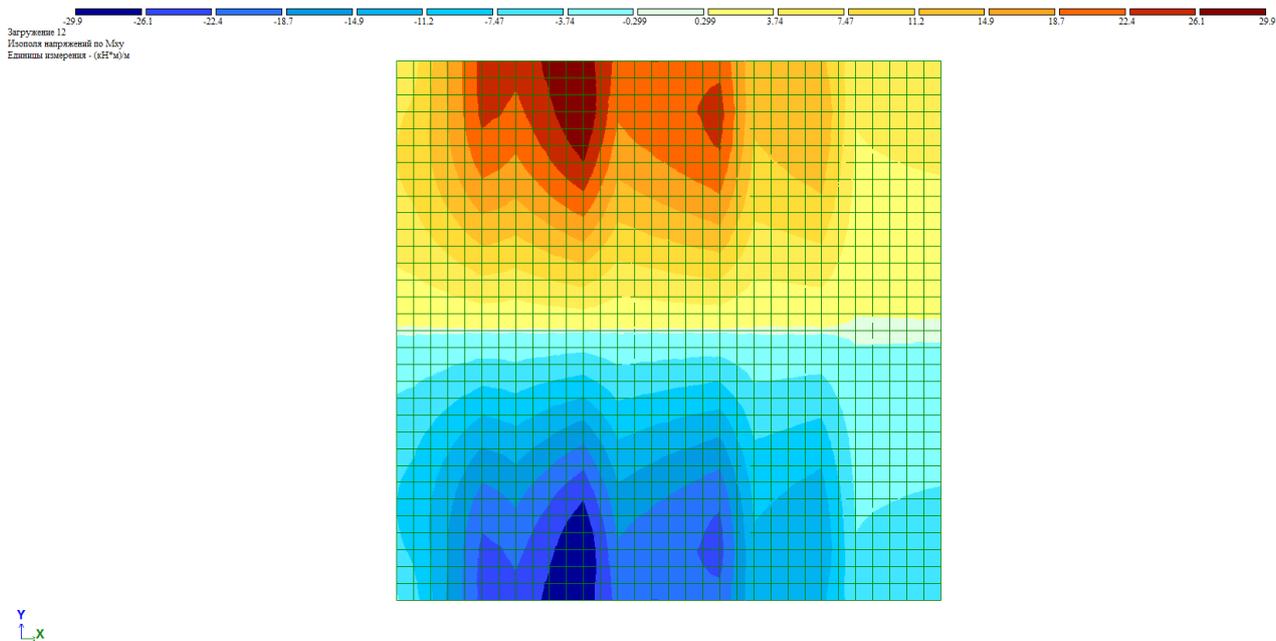
Изолинии распределения крутящих моментов  $M_{xy}$  приведены на рис. 9-12. Получено перераспределение областей отрицательных и положительных значений.



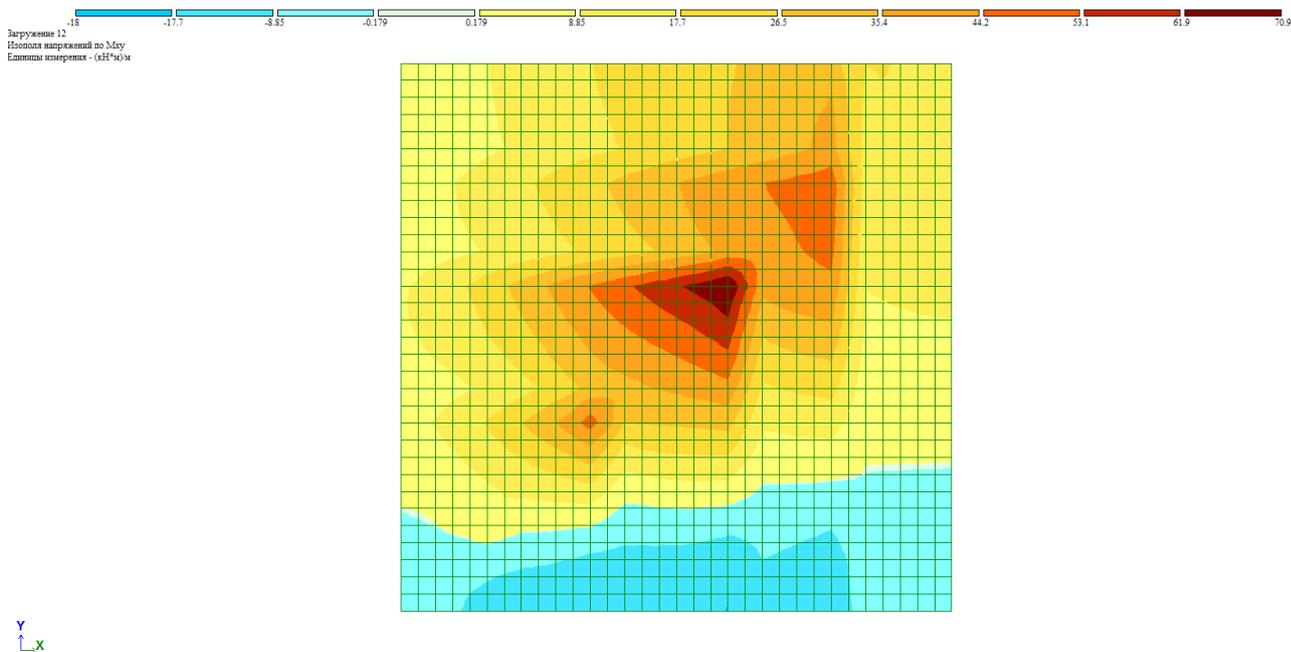
**Рис. 9.** Распределение крутящих моментов  $M_{xy}$  при «традиционном» методе расчета



**Рис. 10.** Распределение крутящих моментов  $M_{xy}$  с учетом этапов возведения плиты при бетонировании от середины к краям



**Рис. 11.** Распределение крутящих моментов  $M_{xy}$  с учетом этапов возведения плиты при бетонировании слева направо



**Рис. 12.** Распределение крутящих моментов  $M_{xy}$  с учетом этапов возведения плиты при бетонировании по диагонали

Отметим, что метод расчета с использованием компьютерного моделирования процесса возведения здания позволяет более адекватно построить распределение параметров НДС и арматуры в плите [5, 6].

Различия в результатах НДС фундаментной плиты для двух методов расчета не только количественные, но и качественные. При «традиционном» методе расчета возможен риск недоармирования одних участков плиты и заложения избыточной арматуры в других.

## Библиографический список

1. Анализ конструкций с изменяющейся расчетной схемой Нагрузки и воздействия на здания и сооружения / А. В. Перельмутер, О. В. Кабанцев; под общ. ред. А. В. Перельмутера. - М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2015. - 149 с.
2. Пилягин А. В. Проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений: учебное пособие/ А.В. Пилягин.. - М.: Изд-во АСВ, 2011. - 312 с.
3. Молодых С. А. Возведение зданий и сооружений из монолитного железобетона: учебное пособие/ С. А. Молодых, Е. А. Митина, Ерофеев В. Т. и др.- М.: Изд-во АСВ, 2005. - 192 с.
4. Городецкий Д. А. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2013: учебное пособие / Д. А. Городецкий, М. С. Барабаш, Р. Ю. Водопьянов, В. П. Титок, А. Е. Артамонова; под ред. акад. РААСН А. С. Городецкого. - Киев-М.: Электронное издание, 2013. - 376 с.
5. Ефрюшин С. В. Исследование напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / С. В.Ефрюшин, А. С. Саражинский // Строительная механика и конструкции. – 2016. - №2 (13). – С. 33-44.
6. Струков С. Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния элементов монолитного железобетонного каркаса многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / С. Ю. Струков, С. В. Ефрюшин, А. В. Глушков // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №2 (15). – С. 95-103.

## References

1. Perelmuter A.V., Kabantsev O.V.. Analysis of structures with changing design mode. M.: Pub. house SKAD SOFT, 2015. - 149 p.
2. Pilyagin A.V.. Design of buildings and structures foundation and bases. Student book. M. Pub. house ASV, 2011. - 312 p.
3. Molodykh S.A., Mitina E.A., Erofeev V.T.Construction of buildings and structures from monolithic reinforced concrete. M.: Pub. houseASV, 2005. - 192 p.
4. Gorodetsky D.A., Barabash M.S., Vodopianov R.Yu., Titock V.P., Artamonova A.E. Kiev-M.: Electronic issue, 2013. - 376 p.
5. Fryushin S.V., Sarazhinsky A.S. Research of deflected mode of multistoried building foundation slab with account of its construction phase. Structural Mechanics and structures. 2016.№2 (13). – P. 33-44.
6. Strukov S.Yu., Efryushin S.V., Glushkov A.V.Research deflected mode of monolithic reinforced concrete structure members of multistoried building with account of its construction phases. Structural Mechanics and structures . – 2017. -No2 (15). – P. 95-103.

# RESEARCH OF DEFLECTED MODE OF SLAB ON ELASTIC FOUNDATION WITH ACCOUNT OF CONSTRUCTION PHASE.

S.V. Efryushin<sup>1</sup>, A. A. Malashchenko<sup>2</sup>  
Voronezh state technical university<sup>1,2</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sc., associate professor of department of Structural Mechanics

<sup>2</sup> Master of department of Structural Mechanics, tel.: +7(473)2715230; e-mail: [stroytech.vgasu@yandex.ru](mailto:stroytech.vgasu@yandex.ru)

---

There is given the comparison of foundation slab deflected mode on elastic foundation for two methods of calculation –“traditional” at invariable design model and with account of slab design mode change on its concreting phase. Model of foundation is taken as elastic half-space. Foundation slab deflected mode is analyzed during different successions of concreting. It is shown that slab deflected mode strongly is changed while changing design model on the phases of concreting.

According to the results of completed calculations conclusions of necessity to account successions of concreting by changing design mode is done. Such calculations can be used while designing analogical structures.

**Keywords:** slab on elastic foundation, elastic half-space, deflected mode.

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

1. К рассмотрению принимаются научные статьи общим объемом от 8 до 16 страниц. Материал статьи следует представить в редакцию в электронном и печатном виде.
2. Формат страницы – А4. Поля: верхнее – 2, нижнее – 3, правое и левое – 2 см.  
Шрифт текста – Times New Roman с одинарным интервалом. Размер шрифта основного текста – 12 пт. Аннотация, ключевые слова, подрисуночные подписи, информация об авторах – 10 пт. Абзацный отступ – 1,25 см.
3. Структура статьи:
  - 3.1. УДК (приводится в левом верхнем углу);
  - 3.2. Название статьи (шрифт – 12 пт., жирный);
  - 3.3. Имя, отчество, фамилия автора (-ов);
  - 3.4. Сведения об авторе (-ах): ученая степень, ученое звание, занимаемая должность, место работы, город, контактная информация;
  - 3.5. Аннотация (основная информация о статье и полученных результатах исследования; требуемый объем аннотации – от 100 до 250 слов);
  - 3.6. Ключевые слова (основные понятия, рассматриваемые в статье);
  - 3.7. Пункты 3.2–3.6 на английском языке. Предлагаемый перевод должен полностью соответствовать тексту на русском языке;
  - 3.8. Сведения о финансировании (если есть);
  - 3.9. Текст статьи;
  - 3.10. Библиографический список.
4. Основной текст статьи должен быть структурирован (введение, постановка задачи, методы исследования, результаты, выводы или заключение и т.п.).
5. Рисунки и таблицы располагаются по мере их упоминания в тексте. Рисунки в виде ксерокопий из книг и журналов, а также плохо отсканированные не принимаются.
6. Ссылки на литературу в статье указываются в квадратных скобках (например, [1]). Библиографический список приводится в конце статьи (по порядку упоминания в тексте) и оформляется по ГОСТ Р 7.05-2008 «Библиографический список. Общие требования и правила составления». Самоцитирование не более 30 %.
7. Для публикации статьи необходимо выслать на почтовый адрес редакции внешнюю рецензию. Обращаем внимание авторов на то, что наличие внешней рецензии не отменяет внутреннего рецензирования и не является основанием для принятия решения о публикации.
8. Все представленные в редакцию материалы проверяются в программе «Антиплагиат». Автор несет ответственность за научное содержание статьи и гарантирует оригинальность представляемого материала.
9. Редакция имеет право производить сокращения и редакционные изменения текста рукописи.

---

ПО ВСЕМ ВОПРОСАМ,  
СВЯЗАННЫМ С ПУБЛИКАЦИЕЙ СТАТЕЙ, ОБРАЩАТЬСЯ:

главный редактор – Сафронов Владимир Сергеевич, д-р техн. наук, проф.,  
зам. главного редактора – Ефрюшин Сергей Владимирович, канд. техн. наук, доцент,  
ответственный секретарь – Габриелян Грайр Егишеевич, канд. техн. наук, доцент.

Почтовый адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84, ком. 2211.  
Тел./факс: +7(473)271-52-30, e-mail: vss22@mail.ru.