

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И КОНСТРУКЦИИ**

Научно-технический журнал

Выпуск № 4 (19), 2018

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

Воронеж

**STRUCTURAL MECHANICS
AND STRUCTURES**

Scientific and Technical Journal

Issue № 4 (19), 2018

- Structural mechanics and strength of materials
- Applied problems of solid body under deformation
- Soil Mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design of structures from polymeric materials
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic affect on elastic system
- Pilot and field observations of structures and materials

Voronezh

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Учредитель – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

Издатель – Строительный факультет Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77 - 72895

Редакционная коллегия журнала:

Главный редактор: Сафронов В.С., д-р техн. наук, проф.,
Воронежский государственный технический университет

Зам. главного редактора – Ефреушин С.В., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Ответственный секретарь: Габриелян Г.Е., канд. техн. наук, доцент,
Воронежский государственный технический университет

Члены редколлегии:

Гриднев С.Ю., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Зверев В.В., д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

Кирсанов М.Н., д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва

Козлов В.А., д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Колчунов В.И., д-р техн. наук, проф., Юго-Западный государственный университет, г. Курск

Леденев В.В., д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет

Нгуен Динь Хоа, канд. техн. наук, Национальный Строительный университет, Ханой, Вьетнам

Нугужинов Ж.С., д-р техн. наук, проф., научно-исследовательский, экспертный и изыскательский «Казахстанский многопрофильный институт Реконструкции и Развития», Карагандинский государственный технический университет, Казахстан

Овчинников И.Г., д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет

Пшеничкина В.А., д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет

Трещев А.А., д-р техн. наук, проф., Тульский государственный университет

Турищев Л.С., канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Белоруссия

Шапиро Д.М., д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Шимановский А.О., д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Белоруссия

Шитикова М.В., д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84 комната 2000
Тел./факс; +7(473) 2715230. , E-mail: vss22@mail.ru

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific and Technical Journal

Founder - State Educational Institute of Higher Education “Voronezh State Technical University”
Editor – Construction department of Federal State Government-financed Educational Institute of Higher Education “Voronezh State Technical University”

The journal is registered in federal service for supervision in sphere of telecom,
Information and mass communications
Registration certificate PI № FS 77-72895

Editorial board:

Chief editor: Safronov V.S., Dr of Tech.Sc., professor,
“Voronezh State Technical University”
Deputy of chief editor – Efrushin S.V., PhD of Tech. Sc., associate professor,
“Voronezh State Technical University”
Senior Secretary - Gabrielyan G.E., PhD of Tech. Sc., associate professor
“Voronezh State Technical University”

Members of editorial board:

Gridnev S.Yu., Dr of Tech., prof., Voronezh State Technical University
Zverev V.V., Dr of Tech., prof., Lipetsk State Technical University
Kirsanov M.N., Dr of Physical –Mathematical Sc., prof., National research university "MEI", Moscow
Kozlov V.A., Dr of Physical and Mathematical Sc., prof., Voronezh State Technical University
Kolchunov V.I., Dr of Tech., prof., South-East State University, Kursk
Ledenyov V.V., Dr of Tech., prof., Tambov State Technical University
Nguyen Dinh Hoa, PhD of Tech. Sc., National Construction University, Hanoi, Vietnam
Nuguzhinov Zh. S., Dr of Tech., prof. Scientific –research, expert and exploration “Kazakhstan multi-sectoral institute of reconstruction and development”, Karaganda State Technical University , Kazakhstan
Ovchinnikov I.G., Dr of Tech., prof., Saratov State Technical University
Pshenichkina V.A., Dr of Tech., prof., Volgograd State Technical University
Treshchyov A.A., Dr of Tech., prof., Tula State University
Turishchev L.S., PhD of Tech.Sc., associate professor, Polotsk State University, Byelorussia
Shapiro D.M., Dr of Tech., prof., Voronezh State Technical University”
Shimanovsky A.O., Dr of Tech., prof., Byelorussian State University of Traffic, Byelorussia
Shitikova M.V., Dr of Physical and Mathematical Sc., prof., Voronezh State Technical University

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

<i>Пузаков А. Ю., Шустова М. П.</i> Решение задач теории упругости с использованием процедуры уточнения решения на треугольных конечно-элементных сетках.....	7
<i>Арутюнян В. Б.</i> Формулы для расчета прогиба плоской раскосной фермы с параллельными поясами....	29
<i>Синозерский А. Н., Мухтаров Р. А.</i> Предельные состояния внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бетона при эксцентриситетах за пределами ядра сечения.....	38
<i>Кирсанов М. Н.</i> Анализ зависимости прогиба фермы прямоугольного покрытия от числа панелей	52

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

<i>Козлов В. А.</i> Экспериментальное исследование конических некруговых жестко заземленных стержней.....	58
--	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

<i>Козлов А. В.</i> Расчет сталежелезобетонных мостов с учетом сдвига плиты по верхнему поясу балки...	64
---	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

<i>Сафронов В. С., Нтахизание Мельхиор</i> Надежность длительно эксплуатируемого металлического покрытия здания с кровельными сэндвич-панелями.....	72
--	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Саражинский А. С., Ефрюшин С. В.</i> Расчетный анализ конструктивных мероприятий по защите каркасных зданий от прогрессирующего обрушения	83
---	----

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

<i>Ефрюшин С. В., Юрьев В. В.</i> Расчетный анализ огнестойкости конструкций с учетом перераспределения усилий при локальных температурных воздействиях	97
--	----

CONTENT

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

Puzackov A. Yu., Shustova M.R. Solution of the problem of theory of elasticity with application of the solution clarification procedure on triangular finite – element grids	7
<i>Arutyunyan V. B.</i> Formulas for calculation of the deflection of flat diagonal trusses with parallel belts	29
Sinozersky A. N., Mukhtarov R. A. Limiting stated of eccentrically compressed with stand- ard velocity prisms from fine-grained concrete at eccentricities outside the core of section	38
<i>Kirsanov M.N.</i> Analysis of dependence of the deflection of the rectangle covering truss on the number of panels	52

PILOT AND FIELD OBSERVATIONS OF STRUCTURES AND MATERIALS

Kozlov V. A. Experimental investigation of conical non-circular rigidly clamped rods	58
---	----

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRANSPORT STRUCTURES

Kozlov A. V. Structural analysis of steel- concrete composite bridges with account of slab shift on the upper beam chord	64
--	----

CALCULATION AND DESIGN OF STRUCTURES FROM POLYMERIC MATERI- ALS

Safronov V.S., Ntachizaniie Melchior Reability of long-term operated metallic roofing by sandwich panels	72
---	----

CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

Sarazhinskij A. S., Efryushin S. V Design analysis of structural measures for protection of frame buildings against progressing collapse	83
--	----

CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

Efryushin S.V., Yurev V.V. Design analysis of structures fire resistance with account of forces redistribution under local temperature affect	97
---	----

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЦЕДУРЫ УТОЧНЕНИЯ РЕШЕНИЙ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫХ СЕТКАХ

А. Ю. Пузаков¹, М. П. Шустова²

Воронежский государственный технический университет

Россия, г. Воронеж

¹Магистр кафедры строительной механики, тел.: +7(432) 271-52-30; e-mail:puzakow@list.ru

²Магистр кафедры строительной механики, тел.: +7(432) 271-52-30

Приводятся решения задач теории упругости на треугольных конечно-элементных сетках. Анализируется характер практической сходимости решений на последовательности вложенных сеток. При наличии монотонной сходимости к сеточным решениям применяется экстраполяция Ричардсона. Оценка скорости сходимости и точности сеточных решений производится в результате сравнения с аналитическим решением задачи. При отсутствии аналитического решения, за точное принимается решение, полученное на основе экстраполяции на трех вложенных сетках. Используются различные способы триангуляции анализируемых областей: на основе полярной системы координат; с помощью равнобедренных треугольников; с использованием генератора сеток вычислительного комплекса Лира. В решаемых задачах отмечается второй порядок сходимости по перемещениям и удовлетворительная сходимость по изгибающим моментам (напряжениям).

Ключевые слова: аналитические решения задач теории упругости, метод конечных элементов, треугольные конечно-элементные сетки, экстраполяция Ричардсона, напряженно-деформируемое состояние плит, пологих оболочек.

SOLUTION OF THE PROBLEM OF ELASTICITY PROBLEM WITH APPLICATION OF THE SOLUTION CLARIFICATION PROCEDURE ON TRIANGULAR FINITE – ELEMENT GRIDS

A. Yu. Puzackov¹, M. P. Shustova²

Voronezh state technical university

Voronezh, Russia

¹Master of the department of Structural mechanics, Tel.: +7(432) 2715230; e-mail:puzarjw@list.ru

Master of the department of Structural mechanics, тел.: +7(432) 271-52-30

There are given the solutions of the elasticity theory problems on triangular finite – element grids. The nature of the practical convergence of solutions on a sequence of nested grids is analyzed. At the presence of monotonic convergence to grid solution there is used Richardson extrapolation. The assessment of convergence velocity and accuracy of the grid solutions is made according to the result of comparison with analytical solution of the problem. If analytical solution is absent the solution received on the base of extrapolation on three nested grids is taken as accurate. There are applied different methods of triangulation of under analysis fields: based on polar system of coordinates; with the help of equilateral triangles; with application of grids generator of soft ware Lira. In solved problems the second order of displacement convergence to bending moments (tensions).

Keywords: analytical solutions of elastic theory, method of finite elements, triangular finite – element grids, Richardson extrapolation, deflected mode of slabs, depressed shells.

© Пузаков А. Ю., Шустова М. П., 2018

1. Моделирование конечно-элементной сеткой

Для решения задачи методом конечных элементов необходимо задать расчётную схему. Пластинчатый элемент заданных размеров и толщины разбивают на мелкие элементы (треугольные, четырехугольные), называемые конечными элементами.

Определившись с выбором типа конечного элемента, расчётчик сталкивается с важной задачей выбора размера КЭ. Чтобы ответить на вопрос о разумном выборе шага триангуляции, нужно четко представлять, какие параметры прежде всего интересуют в данном расчёте. Один из вариантов выбора рационального размера конечного элемента может быть получен на основании ряда расчётов с разными вариантами шага триангуляции расчетной схемы и дальнейшего сравнения с аналитическим решением. Назначение шага триангуляции может исходить из профессионального опыта расчётчика. При изучении конкретного места, например отверстие в плите, измельчение разбиения на конечные элементы возможно на локальном участке.

Справедливо предположить, что при «грубом» разбиении сетки конечных элементов погрешность будет больше, чем на сетках, с более мелкими размерами элементов. С уменьшением шага триангуляции растёт число конечных элементов задачи, увеличивается число неизвестных и вместе с тем время расчета той или иной задачи.

Выбор степени свободы в узле и аппроксимирующих полей перемещения влияет на скорость сходимости результатов и величину погрешности. В методе конечных элементов аппроксимирующие функции являются полиномиальными или кусочно-полиномиальными.

При решении задачи по методу конечных элементов большой интерес представляет сходимость решения при сгущении сетки. Однако уточнение решения с уменьшением шага конечных элементов не бесконечно. Такая зависимость справедлива на определенных границах размеров конечных элементов, переступая которые погрешность меняет курс на свое численное увеличение.

При достижении устоявшихся результатов на соседних сетках конечных элементов справедливо принять тот шаг триангуляции, при котором значения стабилизировались.

Характер сходимости перемещений, усилий и напряжений различен. В перемещениях наблюдается удовлетворительная сходимость даже на грубых сетках. С усилиями и напряжениями дела обстоят несколько иначе. Сходимость данных параметров хуже и ниже, нежели сходимость по прогибам. Усилия в методе конечных элементов определяются как производная по перемещениям. Для изгибающих моментов – дифференцирование два раза. Для поперечных сил – три раза. Сама процедура дифференцирования увеличивает погрешность, поскольку малому изменению функции может соответствовать весомое изменение производной.

2. Экстраполяция Ричардсона

Экстраполяция Ричардсона является численным методом уточнения конечно-элементного решения на вложенных сетках. Суть процедуры уточнения состоит в получении решения на основе сеток конечных элементов с разным шагом триангуляции. Решение по экстраполяции Ричардсона является на порядок точнее, чем практическое решение на вложенных сетках.

Применение экстраполяции Ричардсона ограничено определенными границами. Сетки мелкого разбиения должны содержать в себе узлы грубых сеток. Необходимо исключить в расчетных схемах появление «игольчатых» элементов, т.е. элементов с острыми углами. В идеальных условиях углы треугольных конечных элементов должны быть по 60 градусов. При измельчении конечного элемента форма их не должна меняться, т.е. конечные элементы

на вложенных сетках отличаются лишь масштабом. К тому же экстраполяция Ричардсона уточняет решения при условии монотонной сходимости практического решения на сетках с разным шагом триангуляции.

Формула экстраполяции на двух вложенных сетках. Расчёт экстраполяции на основе двух сеток представляет собой линейную комбинацию. Исходными данными являются сетки конечных элементов, представленные с разным шагом триангуляции. Формула решения экстраполяции на 2-х сетках имеет вид [1]:

$$y_{2h} = \frac{4}{3} \cdot y_h - \frac{1}{3} \cdot y_{2h}. \quad (2.1)$$

Формула экстраполяции на трех вложенных сетках. Пусть получены решения: x_1 - решение на сетке с шагом $2h$; x_2 - решение на сетке с шагом h ; x_3 - решение на сетке с шагом $h/2$. Тогда уточненное решение X_{2h} на сетке с шагом $2h$ определяется по формулам [2]:

$$K = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}, \quad X_{2h} = \frac{2 \cdot K^2 \cdot x_3 - 3 \cdot K \cdot x_2 + x_1}{(K - 1)(2K - 1)}, \quad (2.2)$$

где K - параметр экстраполяции.

В современных программных комплексах нет функции «Экстраполяция Ричардсона», поскольку необходим дополнительный блок, определяющий значения перемещений, усилий, напряжений в промежуточных точках конечного элемента.

3. Свободное кручение призматических стержней

Рассмотрим задачу о кручении призматического стержня произвольного поперечного сечения под действием двух внешних моментов M , лежащих в плоскости его крайних поперечных сечений (рис. 3.1).

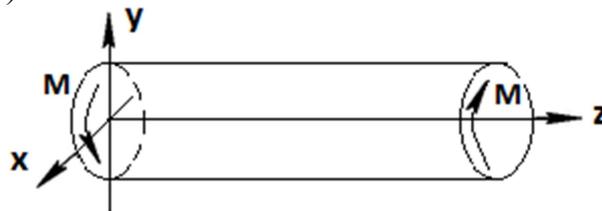


Рис. 3.1

Функция напряжений $\varphi(x, y)$ в области поперечного сечения скручиваемого стержня должна удовлетворять уравнению [3]:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = -2\alpha G, \quad (3.1)$$

где G - модуль сдвига, $\alpha = \frac{\Theta}{l}$ - относительный угол закручивания, постоянный для всех волокон скручиваемого стержня, параллельных оси стержня z , l - длина стержня.

На контуре поперечного сечения сплошного стержня L_0 функция напряжений равна нулю:

$$\varphi|_{L_0} = 0. \quad (3.2)$$

Составляющие касательного напряжения τ определяются через функцию напряжений по формулам:

$$\tau_{yz} = -G \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad \tau_{xz} = G \cdot \alpha \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \quad \tau = \sqrt{\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2}. \quad (3.3)$$

Решение задачи (3.1) - (3.2) выполним методом конечных элементов. Будем использовать простейшие треугольные конечные элементы, аппроксимируя функцию напряжений в пределах конечного элемента линейной функцией $\varphi(x, y) = A + Bx + Cy$. При такой аппроксимации, касательные напряжения τ в пределах каждого элемента постоянны, а при переходе от элемента к элементу поле касательных напряжений разрывное (кусочно-постоянное). В этом случае за значение касательного напряжения в узле сетки принимается среднее значение касательных напряжений на треугольных элементах, примыкающих к узлу. Первый порядок аппроксимирующего полинома для функции напряжений φ позволяет с малыми вычислительными затратами сформировать систему разрешающих уравнений относительно неизвестных значений функции напряжений в узлах сетки. Теоретическая оценка погрешности в определении функции напряжений и ее частных производных (касательных напряжений) имеет порядок $c_1 h^2 / L$, $c_2 h / L$. Здесь константы c_1, c_2 зависят от формы области, h - шага сетки, L - характерного размера области. В теории метода конечных элементов большое внимание уделяется проблеме сходимости. Под сходимостью понимается асимптотическое поведение оценок точности получаемого приближенного решения при неограниченном сгущении сетки конечных элементов.

На практике часто используется анализ последовательности решений на сгущающихся конечно-элементных сетках. Под «практической сходимостью» понимается возможность получения приемлемой точности решения при сравнительно грубом разбиении, при этом сходимость должна быть монотонной.

Кручение стержня эллиптического сечения. Контур поперечного сечения задается уравнением $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Аналитическое решение задачи известно [4]. Функция напряжений (начало координат в центре тяжести сечения) имеет вид

$$\varphi(x, y) = G\alpha \frac{a^2 b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}{a^2 + b^2}. \quad (3.4)$$

Касательные напряжения определяются по формулам:

$$\tau_{yz} = G\alpha \frac{2a^2 y}{a^2 + b^2}, \quad \tau_{xz} = -G\alpha \frac{2b^2 x}{a^2 + b^2}, \quad \tau = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (3.5)$$

Построения аналитических решений и их графические иллюстрации представлены в работах [5, 6]. На рис. 3.2 и 3.3 показаны поверхности функций $\varphi(x, y)/(G\alpha)$, $\tau(x, y)/(G\alpha)$.

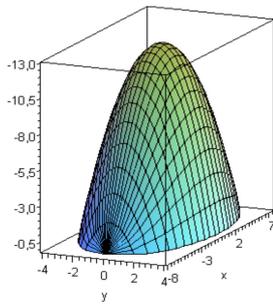


Рис. 3.2. $\varphi(x, y)/(G\alpha)$

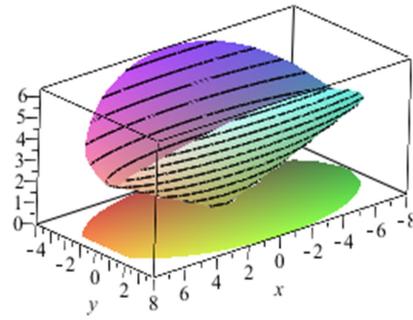


Рис. 3.3. $\tau(x, y)/(G\alpha)$

Наибольшее значение функции напряжения в центре тяжести поперечного сечения, а наибольшие касательные напряжения в точке $(0, b)$.

Использовались три вложенных сетки, построенных на основе полярной системы координат: 4×8 , 8×16 , 32×16 . Каждая последующая сетка получалась из предыдущей дроблением стороны элемента вдоль радиуса и по дуге. На рис. 3.4 показана, конечно-элементная сетка 8×16 . Конечные элементы сетки 32×16 , с узлом в центре эллипса, имеют форму равнобедренного треугольника с острым углом при вершине $11,25^\circ$ (два других угла $84,375^\circ$, $84,375^\circ$).

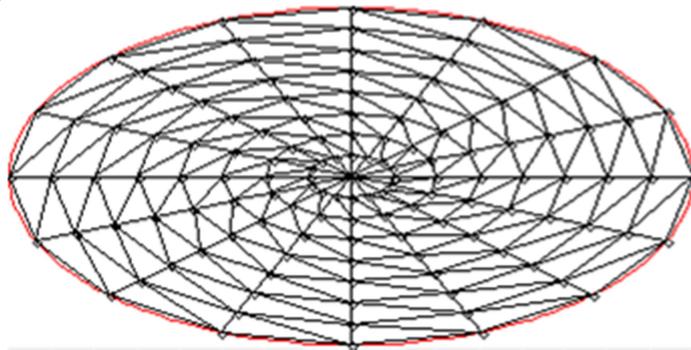


Рис. 3. 4. Конечно-элементная сетка 8×16

В табл. 3.1 приведены значения функции напряжений $\varphi_{\max} / G\alpha$ и относительная погрешность ε_φ на 3-х сетках.

Таблица 3.1

Сетка КЭ	4*8	8*16	16*32	Экстраполяция	Аналитич. решение
$\varphi_{\max} / G\alpha$	11,52	12,52	12,74	12,802	12,80
ε_φ (%)	10,0	2,19	0,469	0,001	0

Анализ результатов показывает, что сходимость является монотонной (приближение снизу), а скорость практической сходимости близка к двум, т.е. при измельчении сетки в 2 раза погрешность уменьшается в четыре раза. На сетке 8×16 погрешность для максимального значения функции напряжений больше 2 %. Точность экстраполированного значения существенно выше точности значения, вычисленного на сетке 16×32 .

В табл. 3.2 приведены значения касательных напряжений $\tau_{\max} / G\alpha$ и относительная погрешность ε_{τ} на 3-х сетках.

Таблица 3.2

Сетка КЭ	4*8	8*16	16*32	Экстраполяция	Аналитическое решение
τ_{\max}	4.933	5.834	6.161	6.347	6.400
ε_{τ} (%)	22.92	8.844	3.734	0.83	0

Из приведенных результатов видно, что сходимость является монотонной, а скорость практической сходимости близка к единице. При измельчении сетки в 2 раза погрешность уменьшается также примерно в два раза. Даже на достаточно мелкой сетке 16×32 погрешность для максимального касательного напряжения около 4%. Точность экстраполированного значения существенно выше точности значения, вычисленного на сетке 16×32 .

Отметим, что появление в расчетной схеме на сетке 32×16 «игольчатых» элементов еще не приводит к ухудшению сходимости и результат экстраполяции касательных напряжений можно считать хорошим.

4. Изгиб треугольной плиты с жестко закрепленным контуром

Плита в форме равностороннего треугольника, жестко закрепленная по контуру. Толщина плиты $\delta=200$ мм, длина стороны $L=6$ м, модуль упругости материала $E=3 \cdot 10^7$ кН/м². Плита нагружена равномерно распределённой нагрузкой интенсивностью $q=5$ кН/м².

Расчётную схему в программном комплексе Лира зададим с разным шагом разбиения объекта на конечные элементы. Форма конечного элемента – равносторонний треугольник. В библиотеке КЭ в Лире выбираем КЭ №12 с тремя степенями свободы в узле. Шаг триангуляции: грубая сетка $2h=1$ м; средняя сетка $h=0,5$ м; мелкая сетка $h/2=0,25$ м. На рис. 4.1 представлены результаты триангуляции на трех вложенных сетках.

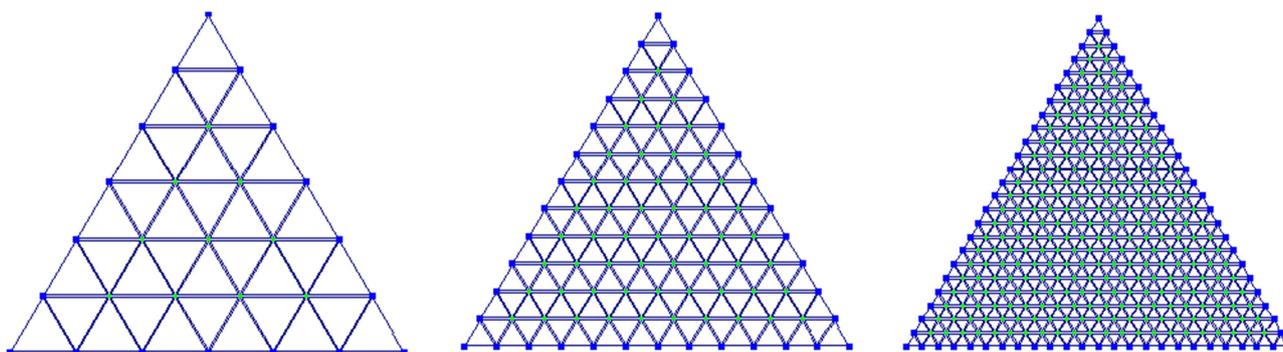


Рис. 4.1

При переходе от грубой сетки к более мелкой каждый треугольный элемент делится на четыре треугольника в результате соединения середин его сторон. Такую последовательность трех треугольных вложенных сеток можно считать наилучшей.

В табл. 4.1 приведены значения максимального прогиба, изгибающие и крутящий моменты (анализировались максимальное положительное и максимальное по модулю отрицательное значения изгибающих и крутящих моментов).

Таблица 4.1

Шаг	V(z), мм	M _x , кНм/м		M _y , кНм/м		M _{xy} , кНм/м	
2h=1м	-0.045904	1.0218	-0.74946	1.0218	-0.79605	0.30255	-0.27476
h=0.5м	-0.050691	1.2784	-1.6519	1.2784	-1.9155	0.74533	-0.74533
h/2=0.25м	-0.051809	1.4414	-2.2097	1.3712	-2.7179	0.97092	-0.97091
Экстр.Рич.	-0.05215	1.72526	-3.11250	1.42378	-4.74864	1.20523	-1.17862

При переходе от сетки с максимальным размером конечного элемента к сеткам более мелким перемещения и усилия изменяются однородно, т.е. либо увеличиваются, либо уменьшаются (абсолютные значения прогибов и усилий изменяются монотонно). На рис. 4.2 показана изогнутая срединная поверхность плиты, полученная на трех сетках.

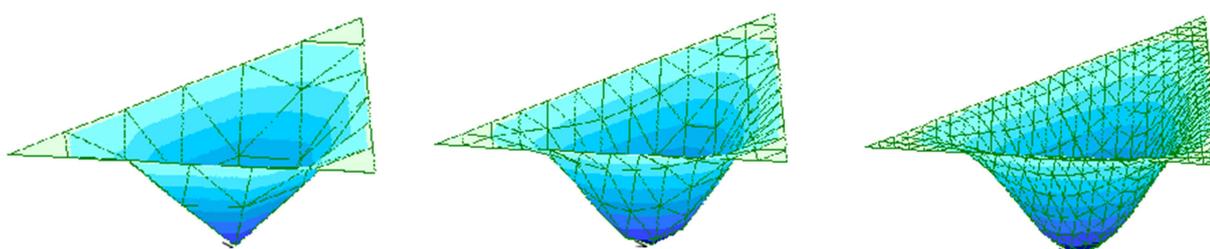


Рис. 4.2

Сравним величины перемещений и усилий, полученные на основе экстраполяции, с величинами, полученными при разном шаге разбиения исследуемой треугольной плиты.

Примем результаты экстраполяции за точное решение и относительно него определим относительную погрешность сеточных решений. В табл. 4.2 приведены результаты сравнения.

Таблица 4.2

Шаг	$\varepsilon V(z)$, мм	εM_x , кНм/м		εM_y , кНм/м		εM_{xy} , кНм/м	
2h=1м	11.98	40.77	75.92	28.23	83.24	74.90	76.69
h=0.5м	2.80	25.90	46.93	10.21	59.66	38.16	36.76
h/2=0.25м	0.65	16.45	29.01	3.69	42.76	19.44	17.62

На «грубой» сетке со стороной треугольного элемента 2h=1 м погрешность очень большая (особенно в усилиях). На рис.4.3, 4.4 показаны графики изменения погрешности по прогибам и изгибающим моментам.

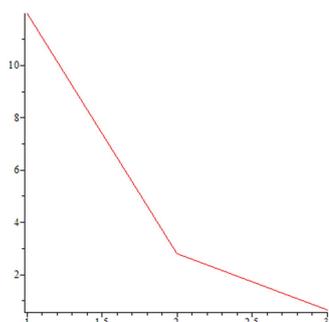
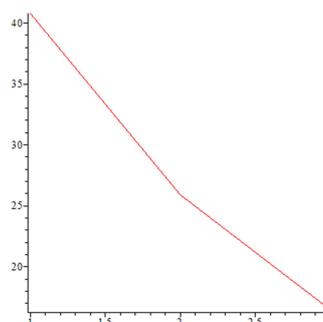


Рис. 4.3. Максимальный прогиб V

Рис. 4.4. Изгибающий момент M_x

Определим скорость практической сходимости перемещений и усилий. При уменьшении шага сетки в 2 раза погрешность сеточного решения по перемещениям уменьшается в 4 раза, а по усилиям в 2 раза, т.е. порядок точности решений по перемещениям второй, а по усилиям первый.

5. Изгиб плиты с жестко закрепленным эллиптическим контуром

На рис. 5.1 представлена плита с эллиптическим жестко закрепленным контуром, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой.

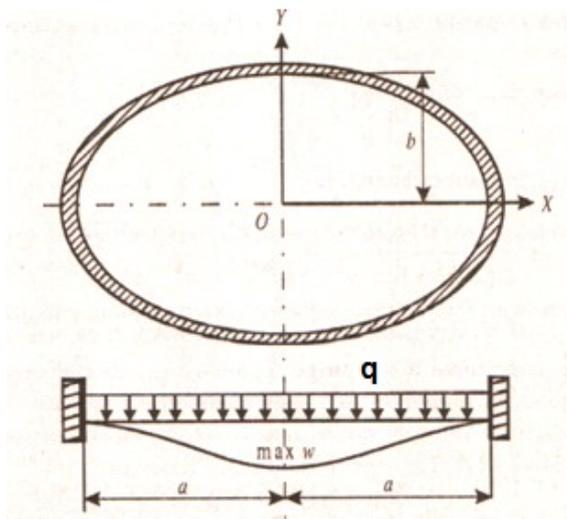


Рис. 5.1. Пластина с эллиптическим жестко закрепленным контуром

Аналитическое решение данной задачи приведено в [7]. Дадим графическую иллюстрацию напряженно-деформированного состояния плиты, используя систему компьютерной математики Maple [6].

Расчеты выполним при следующих исходных данных: размеры плиты в плане: $a = 6 \text{ м}$, $b = 3 \text{ м}$, толщина - $h = 0,2 \text{ м}$, коэффициент Пуассона - $\nu = 0,2$, модуль упругости - $E = 3,002 \cdot 10^7 \text{ кН} / \text{м}^2$, интенсивность распределенной нагрузки $q = 5 \text{ кН} / \text{м}^2$.

Перемещения. Функция прогиба плиты имеет вид

$$W(x, y) = \frac{3}{2} \frac{q(1-\nu^2)a^4b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2}{Eh^3(3b^4 + 2a^2b^2 + 3a^4)} \quad (5.1)$$

На рис. 5.2 показана изогнутая срединная поверхность плиты и отмечен максимальный прогиб $W(0,0)$.

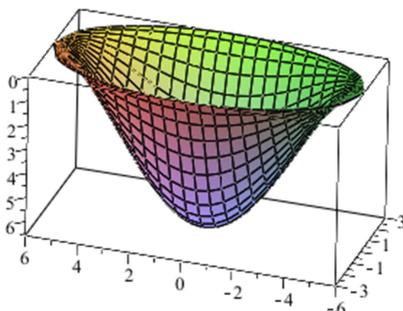


Рис. 5.2. $W_{\max} = 0,65857 \text{ мм}$

Усилия. Дважды дифференцируя функцию прогиба, получим выражение для изгибающего момента $M_x(x, y)$:

$$M_x(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, y) \right) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} W(x, y) \right) \right),$$

$$M_x(x, y) = \frac{1}{2} \frac{q (-3 b^4 x^2 + b^4 a^2 - b^2 y^2 a^2 - 3 \nu a^4 y^2 + \nu a^4 b^2 - \nu a^2 x^2 b^2)}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4} \quad (5.2)$$

На рис. 5.3 показана поверхность функции изгибающего момента $M_x(x, y)$, рассеянная плоскостью нуль. Указаны максимальные по модулю положительное и отрицательное значения.

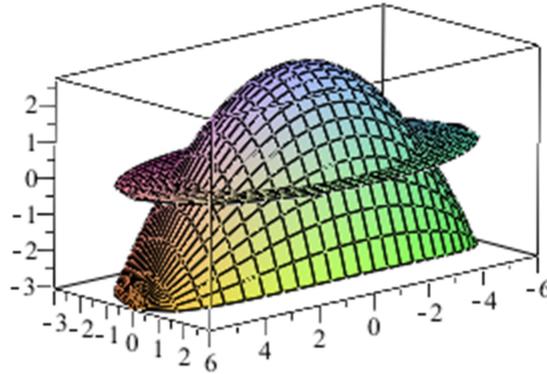


Рис. 5.3. $M_x(0,0) = 2,75 \text{ кНм / м}$, $M_x(a,0) = -3,05 \text{ кНм / м}$

Формулы для изгибающего момента $M_y(x, y)$ имеют вид

$$M_y(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} W(x, y) \right) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} W(x, y) \right) \right),$$

$$M_y(x, y) = \frac{1}{2} \frac{q (-3 a^4 y^2 + a^4 b^2 - a^2 x^2 b^2 - 3 \nu b^4 x^2 + \nu b^4 a^2 - \nu b^2 y^2 a^2)}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4} \quad (5.3)$$

На рис. 5.4 показана поверхность функции изгибающего момента $M_y(x, y)$. Указаны максимальные по модулю положительное и отрицательное значения.

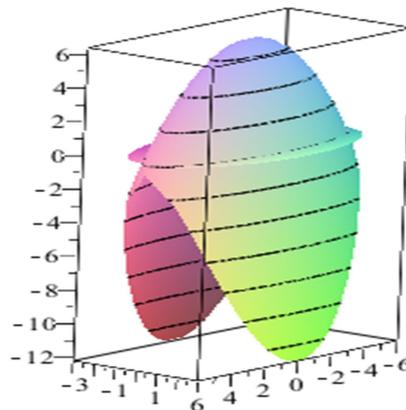


Рис. 5.4. $M_y(0,0) = 6,41 \text{ кНм / м}$, $M_y(0,b) = -12,20 \text{ кНм / м}$

Вторая смешанная производная от функции прогиба дает выражение для крутящего момента $H(x, y)$

$$H(x, y) = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad H(x, y) = \frac{q \cdot (\nu - 1) \cdot a^2 b^2 xy}{3b^4 + 2a^2 b^2 + 3a^4}. \quad (5.4)$$

На рис. 5.5 показана функция крутящего момента $H(x, y)$, абсолютный максимум в точках $(x_k = a \cos(\frac{\pi}{4}k), y_k = b \sin(\frac{\pi}{4}k))$.

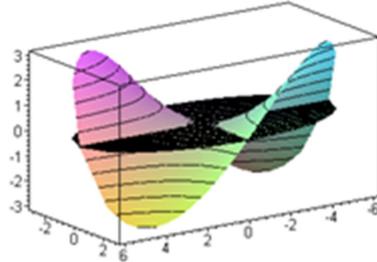


Рис. 5.5. $|H(x_k, y_k)| = 2,441 \text{ кНм} / \text{м}$

Трижды дифференцируя функцию прогиба, получим выражение для поперечной силы $Q_x(x, y)$.

$$Q_x(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} W(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} W(x, y) \right) \right), \quad (5.5)$$

$$Q_x(x, y) = \frac{q \cdot b^2 x (3b^2 + a^2)}{3b^4 + 2a^2 b^2 + 3a^4}.$$

Из формул (5.5) видно, что $Q_x(x, y)$ - линейная функция координаты x , соответствующая плоскость показана на рис. 5.6 (абсолютный максимум в конце большей полуоси эллипса).

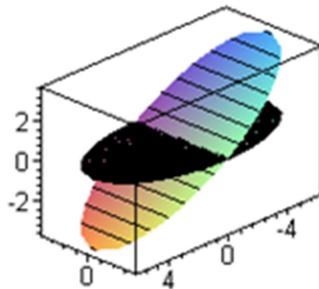


Рис. 5.6. $Q_x(a, 0) = -3.559 \text{ кН} / \text{м}$

Выражение для поперечной силы $Q_y(x, y)$ имеет вид

$$Q_y(x, y) = -D \left(\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} W(x, y) \right) + \left(\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} W(x, y) \right) \right), \quad (5.6)$$

$$Q_y(x, y) = -\frac{q a^2 y (3 a^2 + b^2)}{3 b^4 + 2 a^2 b^2 + 3 a^4}.$$

Из формул (5.6) видно, что $Q_y(x, y)$ - линейная функции координаты y , соответствующая плоскость показана на рис. 5.7 (абсолютный максимум в конце меньшей полуоси эллипса).

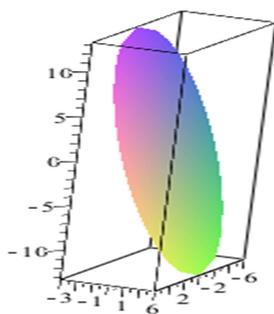


Рис. 5.7. $Q_y(0, b) = -13,22 \text{ кН} / \text{м}$

Напряжения. На рис. 5.8 показаны законы распределения нормальных и касательных напряжений по толщине плиты.

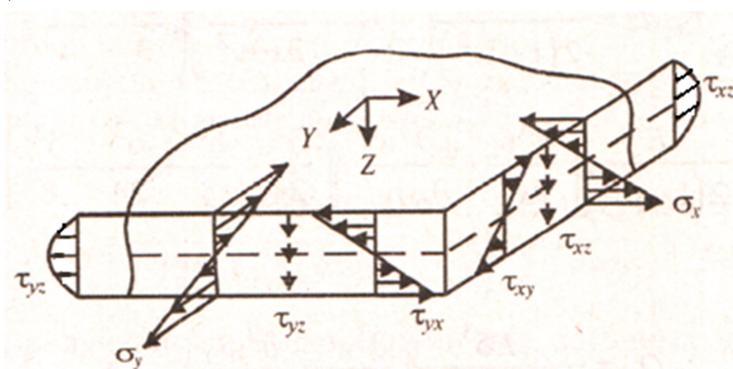


Рис. 5.8

Нормальные напряжения σ_x, σ_y и касательные τ_{xy} достигают наибольших по абсолютной величине значений при $z = \pm \frac{h}{2}$. Касательные напряжения τ_{yz}, τ_{xz} имеют экстремальные значения на уровне срединной плоскости ($z = 0$). При расчете пластин на прочность напряжения τ_{xz}, τ_{yz} , как правило, значительно меньше, чем напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, и мало влияют на оценку прочности пластины.

Наибольшие значения напряжений в точках нижней и верхней поверхностей плиты ($z = \pm \frac{h}{2}$) определяются по формулам:

$$\sigma_x = \pm \frac{6M_x}{h^2}, \quad \sigma_y = \pm \frac{6M_y}{h^2}, \quad \tau_{xy} = \pm \frac{6H}{h^2}, \quad (5.7)$$

Поэтому напряженное состояние в окрестности точек пластины можно рассматривать как плоское напряженное состояние.

Характер распределения напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в точках нижней ($z = h/2$) и верхней ($z = -h/2$) поверхностей плиты повторяет закон распределения соответствующих усилий M_x, M_y, H (рис.5.3-5.5).

Для анализа напряженного состояния в окрестности точек нижней и верхней поверхностей плиты вычислим главные напряжения и определим положения главных сечений по формулам:

$$\sigma_{\max, \min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \operatorname{tg}(\alpha_{\max}) = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_{\max} - \sigma_x}. \quad (5.8)$$

Главные напряжения $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ в точках нижней поверхности пластины представлены на рис. 5.9, рис. 5.10. Для разделения зон растяжения и зон сжатия поверхности рассечены плоскостью нуль. На рис. 5.11 поверхности $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ совмещены. Такое совмещение позволяет визуально оценить соотношение модулей главных напряжений в каждой точке нижней поверхности. Напряжения в центре пластины $\sigma_{\max}(0,0) = 0,961 \text{ МПа}$, $\sigma_{\min}(0,0) = 0,412 \text{ МПа}$. Напряжения на конце меньшей полуоси, $\sigma_{\max}(0,b) = -0,366 \text{ МПа}$, $\sigma_{\min}(0,b) = -1,831 \text{ МПа}$.

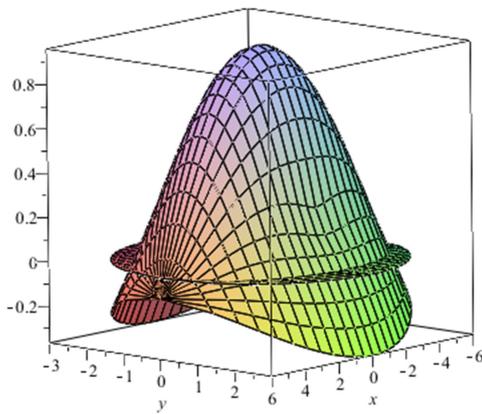


Рис. 5.9. Напряжения σ_{\max}

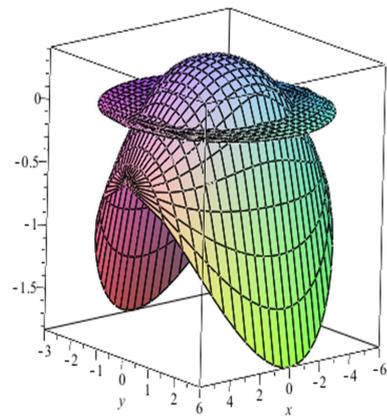


Рис. 5.10. Напряжения σ_{\min}

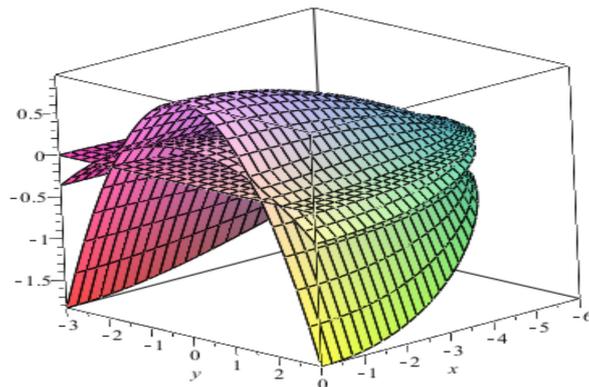


Рис.5.11. Напряжения $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}$ в точках нижней поверхности (половина плиты)

На рис. 5.12 показано векторное поле главных напряжений (картина напряженного состояния в точках). Вектор растягивающего напряжения отмечен красным цветом, а сжимающего напряжения – синим.

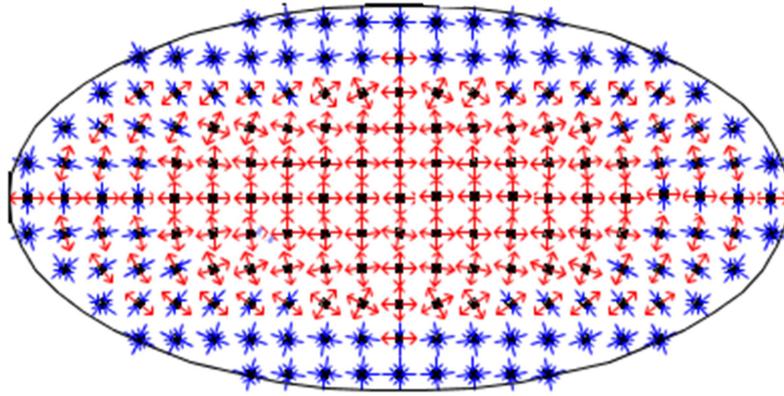


Рис. 5.12. Картина напряженного состояния в точках нижней поверхности

В точках центральной части плиты имеет место *двустороннее растяжение*, вблизи зон жесткого закрепления - *двустороннее сжатие*, в переходных зонах *растяжение – сжатие* (рис. 5.13).

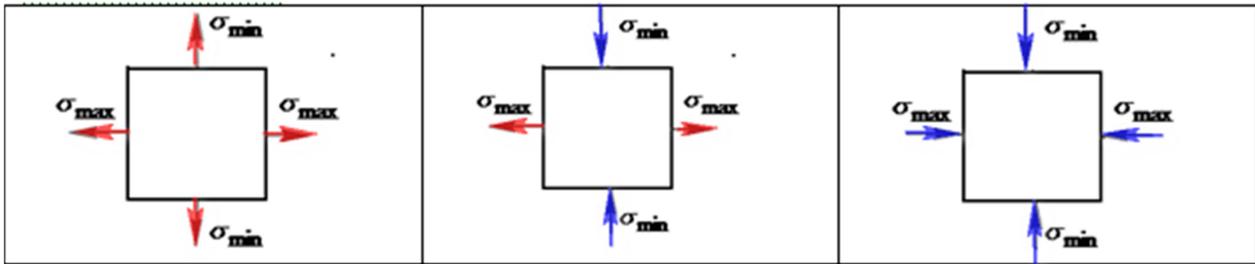


Рис. 5.13. Виды напряженных состояний в точке

Для пластины из хрупкого материала *напряженное состояние - двустороннее растяжение*, на наш взгляд, является *наиболее опасным*. Напряженное состояние *двустороннее сжатие* - *наиболее благоприятным*.

В точке $(x = 0, y = 0, z = \frac{h}{2})$ двустороннее растяжение, $\sigma_{\max} = 0,961 \text{ МПа}$, $\sigma_{\min} = 0,412 \text{ МПа}$ (самая опасная точка нижней поверхности плиты).

Рассмотрим напряженное состояние в точках **верхней поверхности плиты** ($z = -\frac{h}{2}$).

На рис. 5.14 показаны поверхности σ_{\max} , σ_{\min} и их сечение нуль плоскостью.

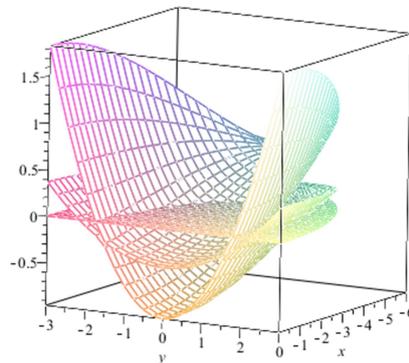


Рис. 5. 14. Напряжения σ_{\max} , σ_{\min} в точках верхней поверхности (половина плиты)

На рис. 5.15 показано векторное поле главных напряжений в точках верхней поверхности

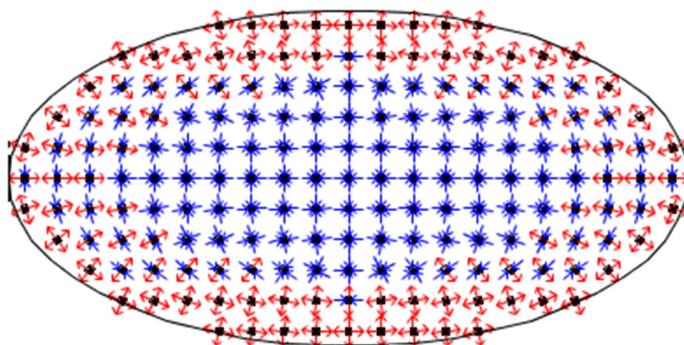


Рис. 5.15. Векторное поле главных напряжений в точках верхней поверхности

В точке $(x = 0, y = b, z = -\frac{h}{2})$ имеет место двустороннее растяжение $\sigma_{\max} = 1,831 \text{ МПа}$, $\sigma_{\min} = 0,366 \text{ МПа}$ (самая опасная точка на верхней поверхности и из всех точек плиты).

Анализ картины напряженного состояния позволяет прогнозировать появление трещин на нижней и верхней поверхности пластины при увеличении интенсивности распределенной нагрузки q .

Первые трещины будут появляться на верхней поверхности плиты в точках, отвечающих концам малой оси эллипса (трещины перпендикулярны вектору наибольшего растягивающего напряжения). Затем трещины будут развиваться вдоль длинной закрепленной кромки. На нижней поверхности плиты первые трещины возникнут в центре (трещины перпендикулярны вектору наибольшего растягивающего напряжения). Далее трещины будут развиваться вдоль длинной оси эллипса.

Анализ НДС плиты на основе конечно-элементного решения. Объектом исследования является плита с жестко закрепленным эллиптическим контуром. Задаем геометрические размеры эллипса, граничные условия, жесткость и нагрузки в программном комплексе **Лира**.

В конечно-элементной модели криволинейные участки поверхности заменяются треугольником, а кривые линии – ломаными.

В библиотеке КЭ в Лире выбираем треугольный конечный элемент с тремя степенями свободы в узле (КЭ 12). Выполняем триангуляцию области с помощью генератора сеток. Шаги триангуляции: $h=1\text{м}$; $h=0,5\text{м}$; $h=0,25\text{м}$. Результаты триангуляции с шагом $h=1\text{м}$ и шагом $h=0,5\text{м}$ представлены на рис.5.16, 5.17

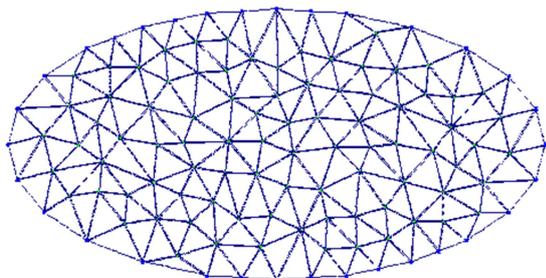


Рис. 5.16. Сетка с шагом $h=1\text{ м}$

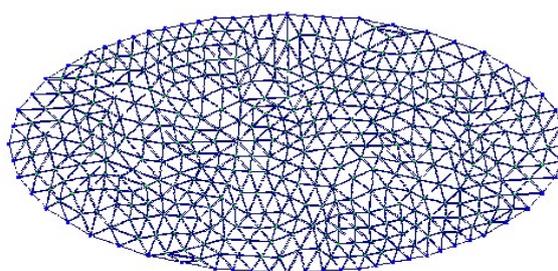


Рис. 5.17. Сетка с шагом $h=0,5\text{ м}$

Из рисунков видно, что исходная область симметрична относительно двух осей x, y после триангуляции в отношении узлов сетки таким свойством не обладает. Можно выделить $\frac{1}{4}$ часть области, наложив необходимые связи на узлы вдоль осей симметрии, но такая принудительная триангуляция исключает расчет на несимметричную нагрузку.

В число параметров управления процедурой генерации сеток входят параметры: максимальное расстояние между узлами; допускаемый минимальный угол в вершине треугольника. Поэтому при переходе от сетки с шагом $h=1\text{м}$ к сетке с шагом $h=0,5\text{м}$ нельзя гарантировать, что более мелкая сетка (с шагом $h=0,5\text{м}$) содержит узлы сетки с шагом $h=1,0\text{м}$. Кроме того, одновременно со сгущением сетки необходимо корректировать положение точек на криволинейном контуре. Несовпадение координат узлов на двух (трех) вложенных сетках затрудняет применение процедуры уточнения решений (экстраполяцию Ричардсона), так как приходится выбирать искомое значение перемещения (усилия) в узле, который ближе всех расположен к заданной точке.

Можно строить сетку на основе полярной системы координат, когда каждая последующая сетка получалась из предыдущей дроблением стороны элемента вдоль радиуса и по дуге. На рис. 3.4 показана такая конечно-элементная сетка 8×16 . Однако построенная таким способом сетка, имеет свои недостатки, вблизи центра эллипса появляются «игольчатые» элементы. При измельчении плиты в окружном направлении сходимость по изгибающим моментам становится не монотонной, точность падает и процесс расходится.

Выполним конечно-элементный анализ НДС плиты по перемещениям и изгибающим моментам и результаты сравним с аналитическим решением.

В табл.5.1 приведены значения прогибов в центре плиты $V(0,0)$, изгибающие моменты в двух точках $M_y(0,0)$, $M_y(0,3)$, а также результаты экстраполяции анализируемых величин на трёх сетках

Таблица 5.1

Шаг	$V(0,0), \text{мм}$	$M_y(0,0), \text{кНм/м}$	$M_y(0,3), \text{кНм/м}$
$2h=1\text{м}$	-0,62165	5,2048	-7,9211
$h=0,5\text{м}$	-0,63906	6,1883	-10,208
$h/2=0,25\text{м}$	-0,64232	6,2622	-11,264
Экстраполяция	-0,64307	6,2682	-12,17
Аналит. решен.	-0,65857	6,410	-12,20

Относительная погрешность прогибов и изгибающих моментов представлена в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Шаг	$\varepsilon_V, \%$	$\varepsilon_{M_y(0,0)}, \%$	$\varepsilon_{M_y(0,b)}, \%$
$2h=1\text{м}$	5,61	18,80	35,07
$h=0,5\text{м}$	2,96	3,46	16,33
$h/2=0,25\text{м}$	2,47	2,31	7,67
Экстраполяция	2,35	2,21	0,25

На рис. 5.18-5.20 дана графическая иллюстрация изменения погрешности (%) по прогибам и изгибающим моментам

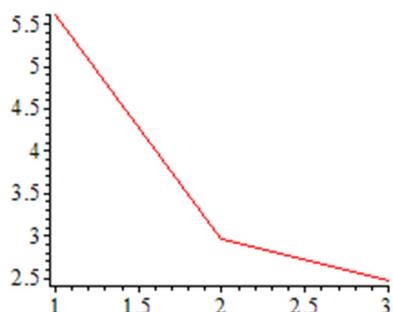


Рис. 5.18. График ε_V

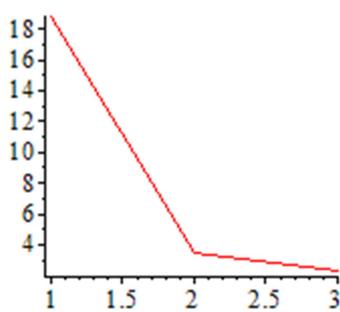


Рис. 5.19. График $\varepsilon_{M_y(0,0)}$

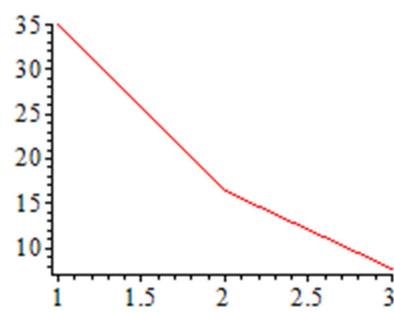


Рис. 5.20. График $\varepsilon_{M_y(0,b)}$

Существенное повышение точности в результате экстраполяции на трех вложенных сетках отмечено для максимального по абсолютной величине изгибающего момента $|\varepsilon_{M_y(0,b)}| = 12 \text{ кНм} / \text{м}$.

Значения главных напряжений на нижней грани в центре и на конце меньшей полуоси, а также результаты экстраполяции на трёх сетках представлены в табл. 5.3.

Таблица 5.3

Шаг	Нижняя грань, центр		Нижняя грань, меньшая полуось	
	σ _{max} , МПа	σ _{min} , МПа	σ _{max} , МПа	σ _{min} , МПа
2h=1м	0.919	0.391	-0.208	-1.223
h=0.5м	0.942	0.403	-0.306	-1.531
h/2=0.25м	0.948	0.406	-0.330	-1.690
Экстрап.Рич.	0.950	0.407	-0.337	-1.857
Аналитич. Реш.	0.919	0.391	-0.208	-1.223
Погрешность	1.174	1.205	7.808	1.419

При вычислении поперечных сил ($Q_y(0,b), Q_x(a,0)$) на 3-х сетках сходимость не наблюдалась.

Вывод: при удовлетворительной практической сходимости по перемещениям плохую сходимость демонстрируют внутренние силы и напряжения (сходимость по поперечным силам отсутствует). Усилия определяются дифференцированием перемещений, а операция дифференцирования является некорректной, поскольку незначительному изменению функции может отвечать значительное изменение производной. Для моментов – дифференциро-

вание дважды, для поперечных сил – трижды (поле перемещений задается полином 3-й степени). Понижение степени полинома сопровождается накоплением погрешности.

6. Пологая оболочка

Рассмотрим пологую прямоугольную в плане оболочку, срединная поверхность которой является эллиптическим параболоидом (рис. 6.1).

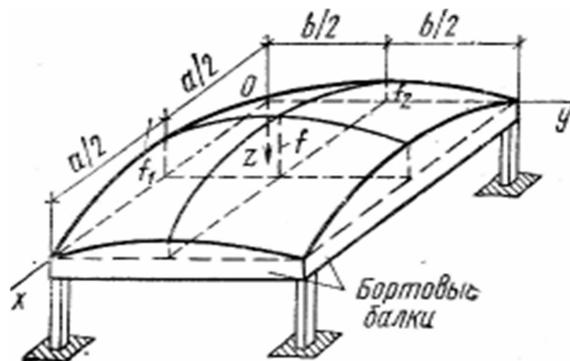


Рис. 6.1. Пологая оболочка

Оболочка считается полой, если отношение стрелки подъема оболочки к наименьшему размеру в плане $f/a \leq 1/5$. На контуре оболочку будем считать опертая на бортовые элементы. Ими могут служить балки с криволинейным поясом. Опорные элементы обладают достаточно большой жесткостью в отношении перемещений в плоскости этих конструкций и несравнимо меньшей жесткостью относительно перемещений из этих плоскостей. Это позволяет в качестве расчетной схемы принять схему опирания оболочки на идеальные диафрагмы или практически эквивалентную ей для полой оболочки схему опирания на шарнирные опоры.

Система дифференциальных уравнений полой оболочки имеет вид [3]

$$-Kx \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi \right) - Ky \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi \right) + D \left(\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} w \right) + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} w \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} w \right) \right) - q = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} \Phi \right) + 2 \left(\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} \Phi \right) + \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} \Phi \right)}{Eh} + Kx \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w \right) + Ky \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w \right) = 0 \quad (6.2)$$

В уравнениях (6.1), (6.2) через $w(x, y)$ обозначена функция прогиба, через D цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{1}{12} \frac{E h^3}{1 - \nu^2} \quad (6.3)$$

Функция Φ - это функция напряжений, умноженная на толщину оболочки h .

$$\Phi(x, y) = h \phi(x, y) \quad (6.4)$$

Мембранные напряжения выражаются через функцию напряжений.

$$\sigma_{x_\phi} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi, \sigma_{y_\phi} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi, \tau_{xy_\phi} = - \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \phi \right) \quad (6.5)$$

Мембранные усилия, связанные с деформацией срединной поверхности, определяются следующим образом:

$$N_x = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi(x, y), N_y = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, y), S_{xy} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \Phi(x, y) \right) \quad (6.6)$$

Усилия, возникающие при изгибе оболочки: изгибающие моменты, крутящий момент, обобщенные поперечные силы, выражаются через функцию прогиба

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y) \right) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y) \right) \right), \\ M_y &= -D \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w(x, y) \right) + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, y) \right) \right), \\ M_{xx} &= -D (1 - \nu) \left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} w(x, y) \right), \\ Q_x &= -D \left(\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3} w(x, y) \right) + (2 - \nu) \left(\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} w(x, y) \right) \right), \\ Q_y &= -D \left(\left(\frac{\partial^3}{\partial y^3} w(x, y) \right) + (2 - \nu) \left(\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} w(x, y) \right) \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

По краям оболочка соединена с диафрагмами, абсолютно жесткими в их плоскости и гибкими из нее, вследствие чего на всех кромках обеспечиваются граничные условия:

$$\begin{aligned} x=0, x=a \quad , \quad w=0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} w=0, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Phi=0, \nu=0, \\ y=0, y=b \quad , \quad w=0, \frac{\partial^2}{\partial y^2} w=0, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi=0, u=0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В приведенных формулах $w(x,y)$, $u(x,y)$, $v(x,y)$ – перемещения точек срединной поверхности в направлении координатных осей x , y , z соответственно.

Задача (6.1), (6.2) с граничными условиями (6.8) является несколько приближенной, но именно для таких условий закрепления получено аналитическое решение в виде двойных тригонометрических рядов [8]:

$$\begin{aligned} w &= \sum_n \left(\sum_m w_{m,n} \sin\left(\frac{\pi x m}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y n}{b}\right) \right), \quad \Phi = \sum_n \left(\sum_m \Phi_{m,n} \sin\left(\frac{\pi x m}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y n}{b}\right) \right), \\ u &= \sum_n \left(\sum_m u_{m,n} \cos\left(\frac{\pi x m}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y n}{b}\right) \right), \quad v = \sum_n \left(\sum_m v_{m,n} \sin\left(\frac{\pi x m}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y n}{b}\right) \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Отметим, что мембранные напряжения по толщине оболочки постоянны, а изгибные напряжения изменяются по линейному закону. Поэтому анализ напряженного состояния оболочки необходимо выполнять в точках верхней ($z=-h/2$), нижней ($z=-h/2$) и срединной ($z=0$) поверхностях.

Для оболочки приняты следующие исходные данные. Размеры в плане $a=b=20$ м; толщина $h=0.07$ м; стрелки подъема $f_1=f_2=0.05 \cdot a$; коэффициент Пуассона $\mu=0.2$, модуль упругости $E=2.69775 \cdot 10^7$ кН/м² (материал оболочки – бетон В20). Уравнение срединной поверхности имеет вид

$$Z(x, y) = -0,2x - 0,2y + 0,01x^2 + 0,01y^2. \quad (6.10)$$

Картина напряженного состояния в точках нижней и верхней поверхностей оболочки, полученная в работах [9,10], представлена на рис. 6.2, 6.3.

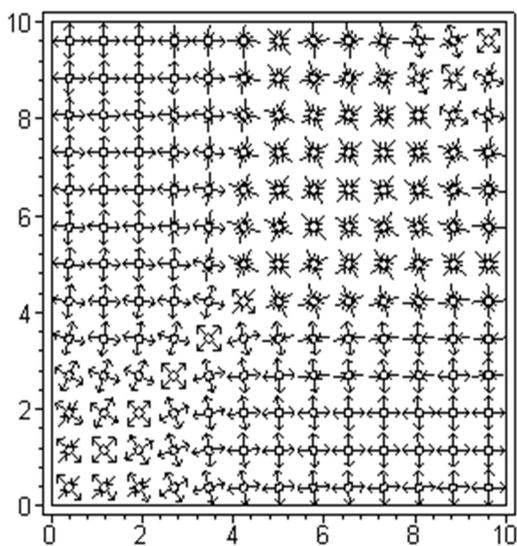


Рис. 6.2. Нижняя поверхность плиты (¼ часть)

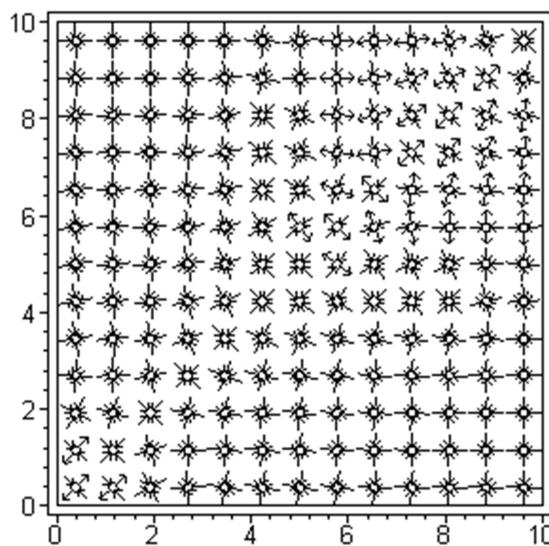


Рис. 6.3. Верхняя поверхность плиты (¼ часть)

В окрестности приложения кусочно-постоянной нагрузки на нижней поверхности имеет место двустороннее растяжение, а на верхней двустороннее сжатие. Вблизи угловой точки нижней и верхней поверхности напряженное состояние «растяжение-сжатие». В зависимости от соотношения интенсивностей нагрузок по всей поверхности и локальной нагрузки в центре наиболее опасными являются точки в угловой зоне или в центре.

Приведем анализ НДС оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q=5 \text{ кН/м}^2$ и кусочно-постоянной нагрузкой интенсивностью $p=20 \text{ кН/м}^2$ в центре на площадке 1 м^2 . Кусочно-постоянная нагрузка, заданная на малой площади (площадь оболочки в плане 400 м^2), моделирует сосредоточенную силу $P = 20 \text{ кН}$.

Анализ НДС пологой оболочки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой в центре, приведен в работах [9, 10].

Создадим расчётную схему в ПК Лира с использованием треугольного конечного элемента, шаг триангуляции примем: $2h=1 \text{ м}$; $h=0,5 \text{ м}$.

На рис. 6.4 представлена срединная поверхность оболочки с шагом триангуляции $2h=1 \text{ м}$.

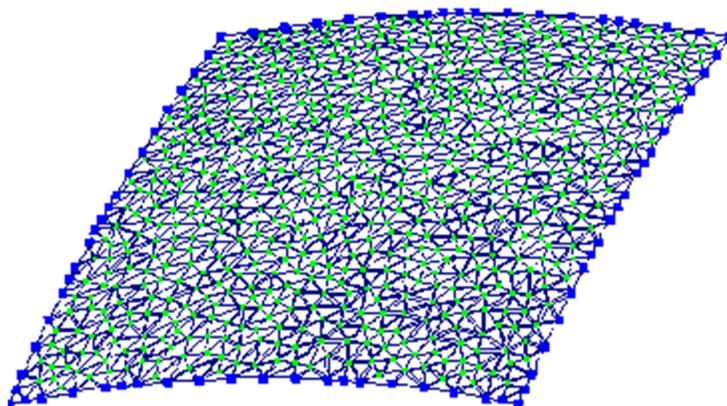
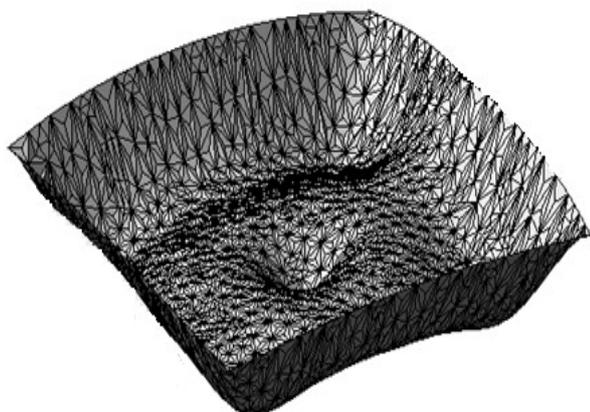
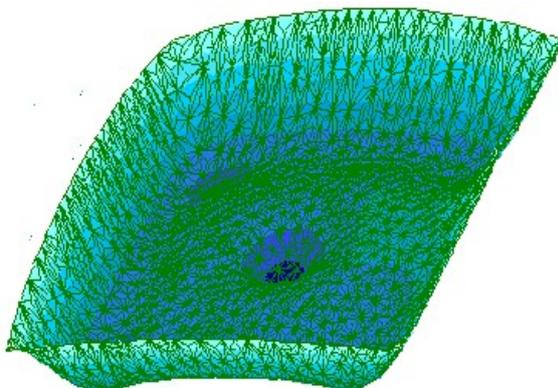


Рис. 6.4

На рис. 6.5 показан деформированный вид срединной поверхности, а на рис. 6.6 - вертикальные перемещения точек срединной поверхности ($h=0,5\text{м}$).



6.5. Деформированный вид



6.6. Вертикальные перемещения

На рис. 6.7, 6.8 представлены изополя главных напряжений σ_{\max} , σ_{\min} на нижней поверхности оболочки

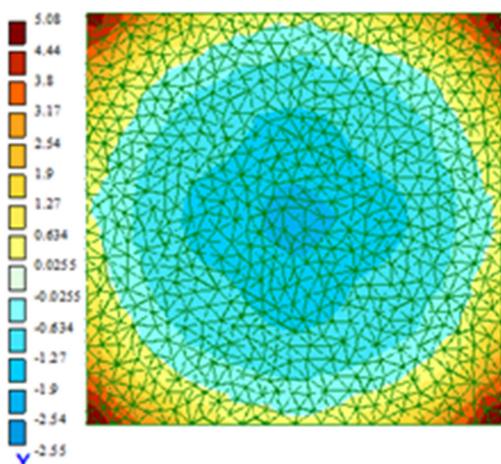


Рис. 6.7. Изополя σ_{\max}

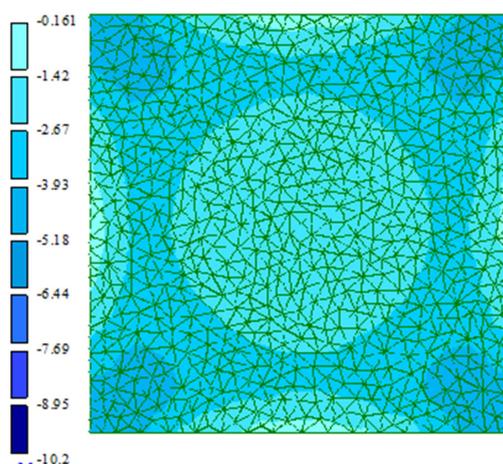


Рис. 6.8. Изополя σ_{\min}

Результаты вычислений максимального прогиба V_{\max} и наибольшего растягивающего напряжения σ_{\max} , σ_{\min} (напряжение вблизи угловой точки), а также результаты экстраполяции на двух сетках (формула 2.1) представлены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Шаг триангуляции	V_{\max} , мм	σ_{\max} , МПа	σ_{\min} , МПа
2h=1м	-9,77	5,02	-5,01
h=0,5м	-9.39	5,08	-10,02
Экстраполяция «2h+h»	-9,26	5,10	-11.93

Примем результаты экстраполяции за точное решение и относительно него определим относительную погрешность сеточных решений. В табл. 6.2 приведены результаты сравнения

Таблица 6.2

Шаг триангуляции	$\varepsilon_V, \%$	$\varepsilon_{\sigma \max}, \%$	$\varepsilon_{\sigma \min}, \%$
2h=1м	5,51	1,57	58,00
h=0,5м	1,40	0,39	16,01

Анализ данных табл. 6.2 показывает, что с уменьшением шага сетки в два раза погрешность по перемещениям уменьшается в четыре раза.

При удовлетворительной практической сходимости по перемещениям плохую сходимость демонстрируют внутренние силы и напряжения.

Библиографический список

1. Марчук Г. И. Повышение точности решений разностных схем/ Г. И. Марчук, В. В. Шайдулов. - М.: Наука, 1979. – 320 с.
2. Перельмутер А. В. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. / А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. - Изд. 4. - М.: СКАД СОФТ, 2011. – 736 с.
3. Александров А. В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учеб. для строит. вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов. - 2-е изд. испр. – М.: Высшая школа, 2002. – 400 с.
4. Рекач В. Г. Руководство к решению задач по теории упругости: учеб. пособие для вузов/ В. Г. Рекач. - Изд. 2-е, исправ. и доп. - М.: Высшая школа, 1977.
5. Аверин А. Н. Применение системы Maple для решения задач теории упругости / А. Н. Аверин // Проблемы многоуровневого высшего профессионального образования: сб. тезисов докладов регион. науч.-метод. конф. проф.-препод. состава, посвященной 75-летию НГАСУ (Сибстрин); Новосиб. гос. арх.-строит. ун-т (Сибстрин); отв. за вып. Т. Н. Мельник. - Новосибирск, 2005. - С. 56-58.
6. Аверин А. Н. Графическая иллюстрация гипотез и проверка формул сопротивления материалов на решениях задач теории упругости / А.Н. Аверин // Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Серия: Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений. – Воронеж, 2005. - №2. - С. 92-97.
7. Погорелов В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций/ В. И. Погорелов – СПб.: БХВ - Петербург, 2007. – 528 с.
8. Аверин А. Н. Расчет прочности полой оболочкой в системе Maple. / А.Н. Аверин // Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Серия: Современные методы статического и динамического расчета зданий и сооружений. – Воронеж, 2004. - №1. - С. 100-107.
9. Аверин А. Н. Напряженно-деформированное состояние полой оболочки при действии сосредоточенных нагрузок / А. Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. - 2011. - Т.1. - №2. - С.12-17.

10. Аверин А. Н. Напряженно-деформированное состояние пологой оболочки при действии сосредоточенной нагрузки / А. Н. Аверин // Наука и инновации в строительстве SIB -2008: Материалы международного конгресса. - Воронеж, 2008. - С. 9-14.

References

1. Marchuck G.E., Shaidurov V.V. Enhancement of accuracy of solution of differential schemes, M.: Nauka, 1979. – 320 p.
2. Perelmuter A.V., Slivker V.I. Design models of constructions and possibility of their analysis. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. Pub. house 4. - M.: SCAD SOFT, 2011. – 736 p.
3. Alexandrov A.V., Potapov V.D. Material resistance. Base of elasticity and plasticity theory student book for building universities . - second updated issue. M.: Higher school, 2002. – 400 p.
4. Reckach V.G., manual for solution of the elasticity theory problem solution: student book for university. - Issue 2-e, updated and added. M.: Higher school, 1977.
5. Averin A.N. Application of the system Maple for the solution of the elasticity theory problem. Problems of multileveled higher education: collection of reports of regional scientific conference of lecturers devoted of to 75-year of NGASU ИГАСУ (Sibstrin); Novosibirsk state arch. university (Sibsrin); responsible for the issue. T. N. Melnick. Novosibirsk, 2005. - P. 56-58.
6. Averin A.N.. Graphical illustration of hypotheses and testing of the formulas of material resistance for elasticity theory problem solution. Scientific bulletin of VGASU. Seria: Modern methods of static and dynamic design of buildings and structures. Voronezh, 2005. - No2. - P. 92-97.
7. Pogorelov V.I. Structural mechanics of thin-walled structures. StP: BHV – Petersburg, 2007. – 528 p.
8. Averin A.N.. Calculation of shallow shell in the system of Maple. Scientific bulletin of VGASU. Seria: Modern methods of static and dynamic design of buildings and structures. Voronezh. 2004. - No1. - P. 100-107.
9. Averin A.N. Depressed shell deflected mode under the action of focused loads. Structural mechanics and constructions. - 2011. - V.1. - No2. - P.12-17.
10. Averin A.N. Depressed shell deflected mode under the action of focused loads. Structural mechanics and constructions . Science and innovation in construction. SIB -2008: Materials of international congress. Voronezh, 2008. - P. 9-14.

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ПЛОСКОЙ РАСКОСНОЙ ФЕРМЫ
С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПОЯСАМИ**В. Б. Арутюнян¹Национальный исследовательский университет “МЭИ”
Россия, г. Москва

¹Студентка, тел.: +7(916)592-49-52; e-mail: viktorina.autocad@yandex.ru

Дается вывод формулы зависимости прогиба статически определимой балочной фермы от числа панелей. Решетка фермы — раскосного типа со стойками и шпренгельным усилением боковых панелей. Для решения задачи используется система компьютерной математики Maple и метод индукции для обобщения частных решений на общий случай. Получены точные формулы для усилий в некоторых стержнях и распределение усилий в решетке. В процессе вывода составляются и решаются рекуррентные уравнения, дающие выражения для коэффициентов в итоговой формуле. Найдена асимптотика решений и формулы для сдвига подвижной опоры.

Ключевые слова: стержневая конструкция, прогиб, индукция, точное решение, Maple

**FORMULAS FOR CALCULATION OF THE DEFLECTION OF FLAT DIAGONAL
TRUSSES WITH PARALLEL BELTS**

V. B. Arutyunyan

*National Research University “MPEI”,
Russia, Moscow*

¹Student, tel.: +7(916)592-49-52; e-mail: viktorina.autocad@yandex.ru

The derivation of the deflection formula of the statically determined beam truss from the number of panels is given. Lattice truss is diagonal type with racks and with reinforced side panels. We use the Maple system of computer mathematics and the induction method to generalize particular solutions to the General case. Exact formulas for the forces in some rods and the distribution of forces in the lattice are obtained. In the process of derivation, recurrent equations are compiled and solved, which give expressions for the coefficients in the final formula. The asymptotics of solutions and formulas for the shift of a movable support are found.

Keywords: core construction, deflection, induction, exact solution

Предлагается схема и аналитический расчет прогиба симметричной статически определимой фермы балочного типа в зависимости от числа панелей. Характерной особенностью рассматриваемой фермы являются нисходящие раскосы длиной $c = \sqrt{4a^2 + h^2}$, пересекающие по две панели (рис. 1). Боковые панели укреплены дополнительными короткими раскосами длиной $c/2$. Аналитические расчеты балочных ферм с решеткой различного типа с произвольным числом панелей приведены в [1-9].

Известны конечные формулы для прогиба арочных ферм [10- 14] с произвольным числом панелей, включая внешне статически неопределимые арочные фермы [15-20]. В этих работах для обобщения ряда частных решений на произвольный случай использовался метод индукции и система компьютерной математики Maple [21-22]. Более сложные задачи о деформации пространственных ферм решены в [23-29].

Прогиб внешне статически неопределимых ферм в аналитической форме получен в [30,31]. Ранее в работе [32] описан другой подход к решению задач о деформации ферм в аналитическом виде.

Метод индукции использован и при выводе формул для прогиба рассматриваемой фермы (рис. 1).

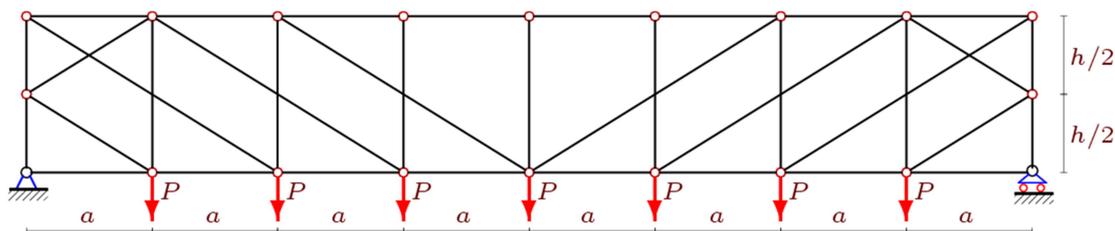


Рис. 1. Ферма с четырьмя панелями в половине пролета.
Нагрузка по узлам нижнего пояса

Ферма с $2n$ панелями в пролете содержит $8n+8$ стержней, включая три стержня, моделирующие опоры, усилия которых входят в общую систему уравнений равновесия узлов. Система уравнений равновесия составляется в системе Maple по программе, использованной и проверенной в работах [1, 34]. В программу необходимо ввести координаты шарниров и порядок соединения стержней. Для этого задается произвольная нумерация стержней и шарниров (рис. 2).

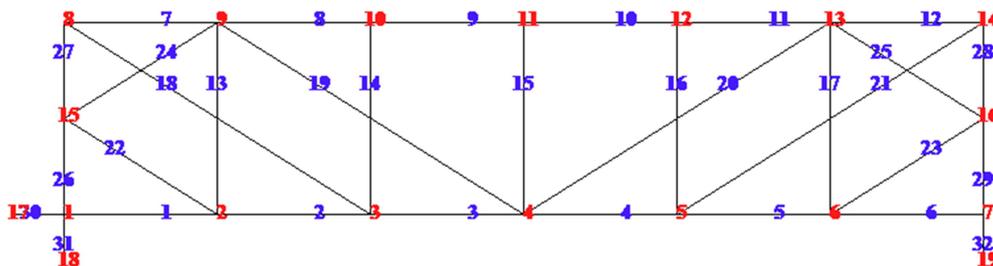


Рис. 2. Нумерация стержней и узлов в программе, $n = 3$

В программе Maple этот фрагмент имеет вид

```
> for i to 2*n+1 do x[i]:=a*i-a: y[i]:=0:
>     x[i+2*n+1]:=x[i]:y[i+2*n+1]:=h: end:
> x[4*n+3]:=0:     y[4*n+3]:=h/2:
> x[4*n+4]:=x[2*n+1]: y[4*n+4]:=h/2:
```

Порядок соединения стержней вводится по аналогии с заданием графа. Указываются номера концов стержней (в произвольном порядке). Стержни поясов, например, вводятся следующим образом

```
> for i to 2*n do
>     N[i]:=[i,i+1];
>     N[i+2*n]:=[i+2*n+1,i+2*n+2];
> end:
```

Векторы, кодирующие стойки, имеют вид

```
> for i from 1 to 2*n-1 do
> N[4*n+i]:=[1+i,2*n+2+i];
> end;
```

Кодировка остальных стержней вводится аналогично. В матрицу $G:=\text{Matrix}(n3,n3)$ системы линейных уравнений равновесия размером $n3:=8*n+8$ вносятся направляющие косинусы усилий с учетом того, что проекции одного и того же усилия имеют разные знаки при рассмотрении равновесия узлов (шарниров) по концам стержня.

Прогиб фермы (вертикальное перемещение узла) рассчитывается по формуле Максвелла – Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_3-3} S_i s_i l_i / (E F_i),$$

где E — модуль упругости стержней, F_i — площади, S_i — усилие в стержне i от действия внешней нагрузки, а s_i — усилия в стержне i от действия единичной вертикальной силы в средней точке пролета, l_i — длина стержня. В сумму входят только деформируемые стержни. Стержни, моделирующие опоры, предполагаются недеформируемыми. Ряд расчетов выявил общую форму решения

$$E F \Delta = P(C_1 a^3 / \gamma + C_2 h^3 + C_3 c^3) / (4 h^2). \quad (1)$$

Здесь принято, что площадь сечений стержней в поясах F' больше, чем в решетке: $F' = \gamma F$, $\gamma > 1$. Неизменность формы решения — свойство регулярных ферм. Далеко не все фермы обладают этим свойством. Фермы трапециевидного и треугольного очертания этим свойством не обладают. Вывод аналитических зависимостей в конечной форме для них невозможно. Здесь же для завершения решения остается только найти закономерность образования коэффициентов в (1). Для этого задача с числом панелей $n=1,2,3\dots$ решается столько раз, сколько потребуется для определения общих членов последовательностей коэффициентов. Необходимая минимальная длина последовательностей зависит от приложенной нагрузки. Для распределенной нагрузки решения всегда сложнее. Это подтверждает опыт решений [1-10]. В данной задаче коэффициенты при c^3 образуют последовательность 2, 7/2, 8, 21/2, 18, 43/2, 32, 73/2, 50, 111/2, 72, 157/2, 98, 211/2. Оператор **rgf_findrecur** системы Maple для членов этой последовательности возвращает следующее рекуррентное уравнение

$$C_{2,n} = C_{2,n-1} + 2C_{2,n-2} - 2C_{2,n-3} - C_{2,n-4} + C_{2,n-5}.$$

Оператор **rsolve** возвращает решение уравнения:

$$C_2 = (2n^2 + (1 + 3(-1)^n)n + 3(1 - (-1)^n)) / 4.$$

Точно так же для коэффициента при a^3 получаем уравнение седьмого порядка

$$C_{1,n} = 3C_{1,n-1} - C_{1,n-2} - 5C_{1,n-3} + 5C_{1,n-4} + C_{1,n-5} - 3C_{1,n-6} + C_{1,n-7}.$$

При выводе этого уравнения потребовалось решить в символьной форме задачу о прогибе ферм с 1, 2, ..., 14 панелями. Заметим, что время счета и преобразований в системе Maple

существенно больше численного счета и преобразований и быстро растет с усложнением фермы. Решение последнего уравнения имеет вид

$$C_1 = (10n^4 + 8n^2 + 12((-1)^n - 3)n + 15(1 - (-1)^n)) / 6.$$

Аналогично получаем и последний коэффициент как функцию n :

$$C_3 = (2n^2 + ((-1)^n - 1)n + 1 - (-1)^n) / 4.$$

Использованный алгоритм решения задачи удобен тем, что он легко перестраивается на другие нагрузки заданной конструкции. Основная трудоемкость задачи приходится не на решение, а на программирование структуры фермы. Для случая сосредоточенной нагрузки в середине пролета имеем более простые выражения для коэффициентов в формуле (1)

$$C_1 = 2(2n^3 + 3n(-1)^n + 4n - 3) / 3,$$

$$C_2 = (4n - 3 + 3(-1)^n) / 4,$$

$$C_3 = (4n - 1 + (-1)^n) / 4.$$

При равномерном загрузении верхнего пояса решение не отличается от полученного решения при нагрузке на нижний пояс.

Кривые полученного решения для равномерной нагрузки при условии постоянства пролета конструкции $L = 40\text{ м}$, $a = L / (2n)$ показывают, что зависимость безразмерного относительного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_{sum} L)$, $P_{sum} = P(2n - 1)$, от числа панелей немонотонная и убывающая (рис. 3). Однако это не совсем точно. Начиная с некоторых значений n прогиб начинает расти. Это подтверждает следующий предел, задающий положительный угол наклона асимптоты

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta'}{n} = \frac{h}{8L}.$$

Зависимость же прогиба от высоты фермы явно нелинейная. Это показывают графики на рис. 4.

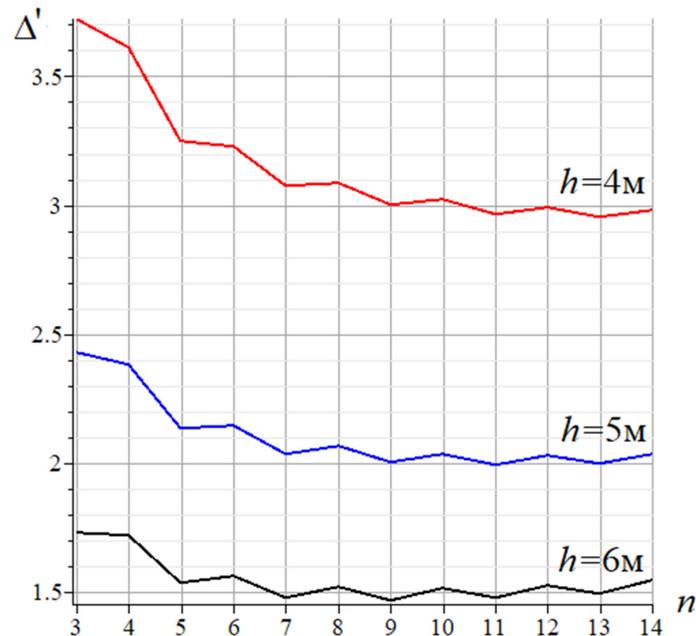


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей. Равномерная нагрузка, $\gamma = 1$

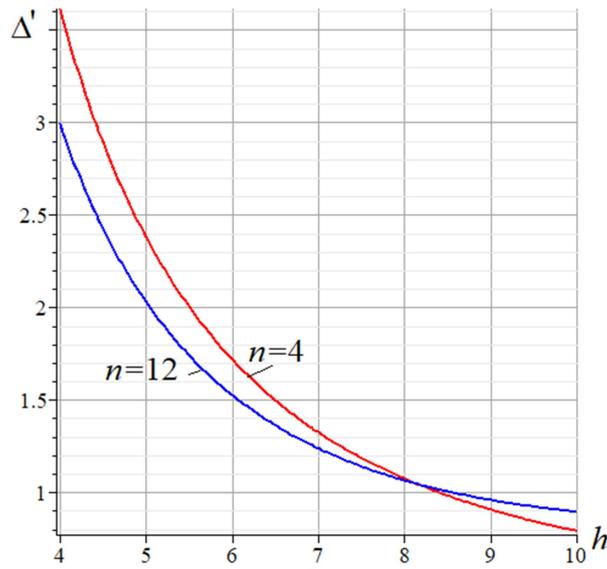


Рис. 4. Зависимость прогиба фермы от ее высоты. Равномерная нагрузка. $\gamma = 1$

Опуская выкладки, приведем также формулу для смещения подвижной опоры при действии нагрузки, распределенной по нижнему поясу

$$\delta = Pn(n-1)(2n-1)a^2 / (3hEF).$$

Для случая нагрузки в середине пролет смещение опоры имеет вид

$$\delta = Pn(2n^2 - 4n + 1 - (-1)^n)a^2 / (4hEF).$$

Графики этих зависимостей (рис. 5) показывают, что кривые имеют горизонтальные асимптоты. По аналогии с прогибом введена относительная величина $\delta' = \delta EF / (P_{sum}L)$ и принято, что пролет имеет фиксированную длину $a = L / (2n)$. Параметры задачи: $\gamma = 1$, $h = 4\text{ м}$, $L = 100\text{ м}$. Для распределенной нагрузки принято $P_{sum} = P(2n-1)$, для сосредоточенной $P_{sum} = P$.

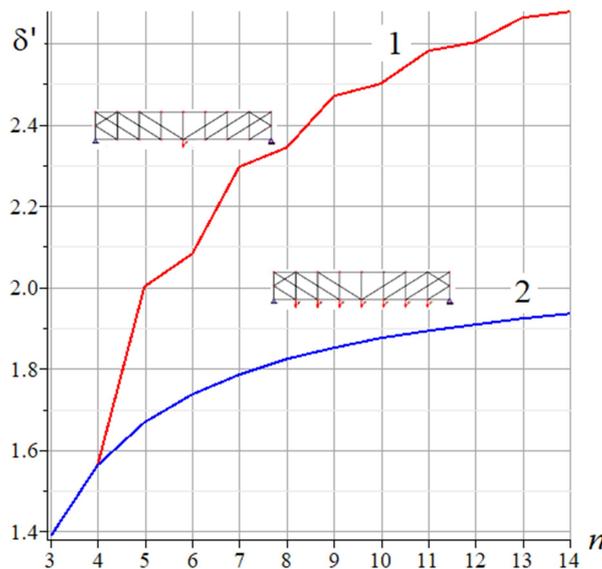


Рис. 5. Смещение опоры:
1 — сосредоточенная сила, 2 — распределенная нагрузка

Наличие горизонтальной асимптоты подтверждает предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta' = L / (12h)$ в случае распределенной нагрузки и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta' = L / (8h)$ — в случае сосредоточенной.

Одновременно с расчетом прогиба программа выдает усилия во всех стержнях. Формулы для усилий в середине пролета наиболее интересны для практических инженеров, проверяющих ферму на прочность и устойчивость. Формула для сжимающего усилия в верхнем поясе имеет вид:

$$S_{(-)} = -Pan^2 / (2h).$$

Усилие растяжения в стержне нижнего пояса в середине пролета также получено методом индукции:

$$S_{(+)} = Pa(n^2 - 2) / (2h).$$

Заметим, однако, что в стержнях средней панели формулы для усилий можно получить еще и методом Риттера и проверить полученные решения. В других же стержнях фермы это сделать нельзя. Единственный путь для вывода соответствующих формул — метод индукции.

Графические возможности Maple позволяют дать наглядное представление об усилиях во всех стержнях. На рисунке 6 толщина линий стержней пропорциональна относительным усилиям S_i / P . Синим цветом выделены сжатые стержни, красным — растянутые. Все раскосы кроме двух верхних боковых, как и предполагалось, оказались растянутыми, три центральные стойки — ненагруженными. На рисунке 7 приведено распределение усилий при действии одной силы в середине пролета.

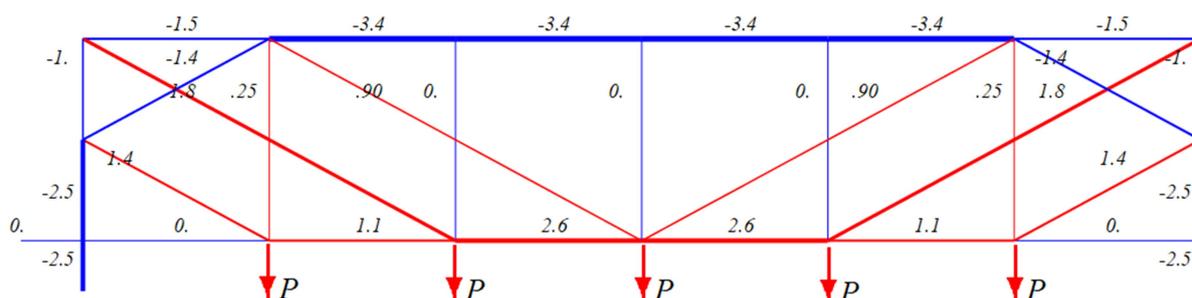


Рис. 6. Усилий в стержнях фермы при действии нагрузки, равномерно распределенной по узлам нижнего пояса, $n=3$

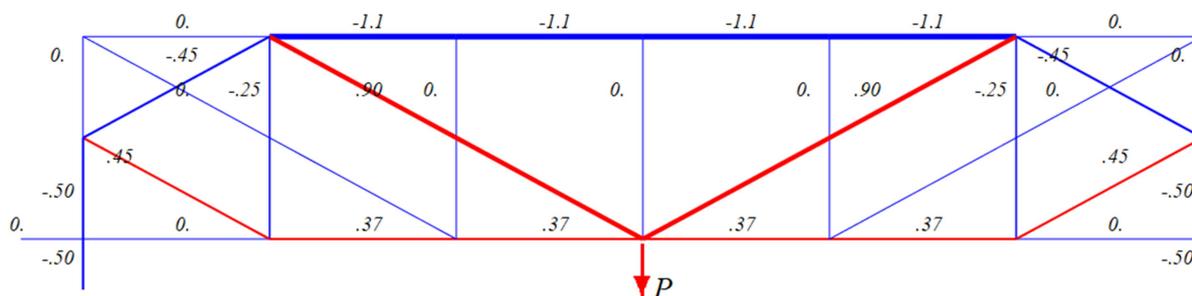


Рис. 7. Распределение усилий в стержнях при сосредоточенной нагрузке

Обзор некоторых работ, использующих приведенный алгоритм для расчета плоских статически определимых ферм, содержится в [19, 29, 32].

Библиографический список

1. Кирсанов М.Н., Москвин В.Г. Деформации плоской фермы с усиленной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2018. №4(279). С.10-14.
2. Кирсанов М.Н., Пахомов В.А. Аналитический расчет величины прогиба решетчатой фермы // Постулат. 2018. № 3(29). С.13.
3. Кирсанов М.Н., Заборская Н.В. Деформации периодической фермы с раскосной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 3(71). С. 61–67
4. Кирсанов М.Н. Статический расчет плоской фермы с двойной треугольной решеткой // Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2017. № 11 (248). С. 32-36.
5. Кирсанов М.Н. Индуктивный вывод формул для деформаций плоской решетчатой фермы // Строительство и реконструкция. 2017. №2(70). С. 17-22.
6. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. N3. С.23-27.
7. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. № 10. С. 24-27. <http://ms.enjournal.net/article/13159/>
8. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме // Механизация строительства. 2017. №4. С. 20-23. <http://ms.enjournal.net/article/12930>
9. Белянкин Н., Бойко А., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой // Строительство и архитектура. 2017. Том 5. Выпуск 2 (15). С. 122-125. doi 10.12737/25106
10. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета деформаций арочной фермы с произвольным числом панелей // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2018. 4 (67). С. 86-94. doi: 10.18720/CUBS.67.7
11. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5. С. 9-14.
12. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 5. С. 50-55
13. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. №9. С. 8-10.
14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels // Научный альманах. 2017. № 2-3(28). С. 268-271.
15. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load // Science Almanac. 2016. No. 3-3(17). С. 75-78. doi: 10.17117/na.2016.03.03.075
16. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2018. 14(1). С. 64-70. doi:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
17. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
18. Тиньков Д.В. Расчет прогиба плоской арочной фермы с крестообразной решеткой // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 74.
19. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С. 12–33.
20. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. doi: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
21. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2017. Том 7. Выпуск 1 (22). Ст. 1. doi: 10.22227/2305-5502.2017.1.1

22. Кирсанов М.Н. Точное решение задачи о прогибе балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2017. Т. 7. № 1 (22). С. 1.
23. Кирсанов М.Н. Прогиб пространственного покрытия с периодической структурой // Инженерно-строительный журнал. 2017. № 8(76). С. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
24. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171
25. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой // Инженерно-строительный журнал. 2016. 4(64). С. 52-58. doi: 10.5862/MCE.64.5
26. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 2. С. 2-6.
27. Кирсанов М.Н. Напряженное состояние и деформации прямоугольного пространственного стержневого покрытия // Научный журнал строительства и архитектуры. 2016. №1(41). С. 93-100.
28. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 1 (53). С. 32-38.
29. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12(26). С. 28.
30. Кирсанов М.Н., Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. Анализ прогиба внешне статически неопределимой балочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 31-35.
31. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем - Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
32. Тиньков Д.В. Анализ точных решений прогиба регулярных шарнирно-стержневых конструкций // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2015. № 6. С. 21-28.

Reference

1. Kirsanov M.N., Moskvina V.G. Deformatsii ploskoy fermy s usilennoy reshetkoy. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2018. №4(279). P.10-14.
2. Kirsanov M.N., Pakhomov V.A. Analiticheskiy raschet velichiny progiba reshetchatoy fermy. Postulat. 2018. № 3(29). P.13.
3. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
4. Kirsanov M.N. Sticheskiy raschet ploskoy fermy s dvoynoy treugol'noy reshetkoy. Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal s prilozheniyem. 2017. No. 11 (248). P. 32-36.
5. Kirsanov M.N. Induktivnyy vyvod formul dlya deformatsiy ploskoy reshetchatoy fermy Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. 2017. No.2(70). P. 17-22.
6. Kirsanov M.N. K vyboru reshetki balochnoy fermy. Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsiy i sooruzheniy. 2017. No.3. P. 23-27.
7. Kirsanov M.N. Zavisimost' progiba ploskoy reshetchatoy fermy ot chisla paneley. Mekhanizatsiya stroitel'stva. 2017. № 10. P. 24-27. — <http://ms.enjournal.net/article/13159/>
8. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba i usilii v reshetchatoy ferme. Mekhanizatsiya stroitel'stva. 2017. №4. S. 20-23. <http://ms.enjournal.net/article/12930>
9. Belyankin N., Boyko A., Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet progiba balochnoy fermy s usilennoy treugol'noy reshetkoy. Stroitel'stvo i arkhitektura. 2017. Vol5. No. 2 (15) P.122-125. doi 10.12737/25106
10. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta deformatsiy arochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley. Stroitel'stvo unikal'nykh zdaniy i sooruzheniy. 2018. 4 (67). P. 86-94. doi:

10.18720/CUBS.67.7

11. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. O zavisimosti deformatsiy ploskoy arochnoy fermy ot chisla paneley. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2017. № 5. S. 9-14.
 12. Kirsanov M.N. Analiz progiba arochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika inzhenernykh konstruktsey i sooruzheniy*. 2017. – № 5. – P. 50-55
 13. Kirsanov M.N. Analiticheskaya otsenka progiba i usiliy v kriticheskikh sterzhnyakh arochnoy fermy. *Transportnoye stroitel'stvo*. 2017. №9. P. 8-10.
 14. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. *Nauchnyy al'manakh*. 2017. N 2-3(28). P. 268-271. https://elibrary.ru/download/elibrary_28913798_61471993.pdf
 15. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load // *Science Almanac*. 2016. No. 3-3(17). Pp. 75-78. doi: 10.17117/na.2016.03.03.075
 16. Kirsanov M.N. Induktivnyy analiz deformatsii arochnoy fermy. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018. 14(1). Pp.64-70. DOI:10.22337/2587-9618-2018-14-1-64-70
 17. Kirsanov M.N. Formuly dlya rascheta progiba arochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsey*. 2018. №1. P.7-11.
 18. Tin'kov D.V. Raschet progiba ploskoy arochnoy fermy s krestoobraznoy reshetkoy // *Postulat*. 2017. № 12 (26). P. 74.
 19. Osadchenko N.V. Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa // *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsey*. 2018. Vol.1. №16. P. 12–33.
 20. Kirsanov M.N. Analytical calculation of deflection of rectangular spatial roof structure. *Vestnik MGSU*. 2018, vol. 13, issue 5 (116), P. 579–586. doi: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
 21. Kirsanov M.N. Exact Solution of the Problem of Deflection of a Girder with an Arbitrary Number of Panels in the Maple System. *Construction: Science and Education*. 2017, vol. 7, issue 1 (22), paper 1. (In Russian) doi: 10.22227/2305-5502.2017.1.1
 22. Kirsanov M.N. Tochnoye resheniye zadachi o progibe balochnoy fermy s proizvol'nym chislom paneley v sisteme Maple. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovaniye*. 2017. Vol. 7. No. 1 (22). P. 1.
 23. Kirsanov M.N. The deflection of spatial coatings with periodic structure. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 08. Pp. 58–66. doi: 10.18720/MCE.76.6
 24. Kirsanov M.N. Analiticheskoye issledovaniye zhestkosti prostranstvennoy staticheskoy opredelimoy fermy. *Vestnik MGSU*. 2017. T. 12. Vyp. 2 (101). P. 165–171
 25. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. doi: 10.5862/MCE.64.5
 26. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a spatial core regular structure with a flat face // *Construction mechanics and the calculation of structures*. 2015. № 2. P. 2-6.
 27. Kirsanov M.N. Napryazhennoye sostoyaniye i deformatsii pryamougol'nogo prostranstvennogo sterzhnevogo pokrytiya . *Nauchnyy zhurnal stroitel'stva i arkhitektury*. 2016. No. 1(41). P. 93-100.
 28. Kirsanov M.N. Analiz progiba fermy pryamougol'nogo prostranstvennogo pokrytiya. *Magazine of Civil Engineering*. 2015. No. 1 (53). P. 32-38.
 29. Osadchenko N.V. Raschet progiba ploskoy nerazreznoy staticheskoy opredelimoy fermy s dvumya prolotami. *Postulat*. 2017. No. 12(26). P. 28.
 30. Kirsanov M.N., Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analiz progiba vneshne staticheskoy neopredelimoy balochnoy fermy. *Stroitel'naya mekhanika i konstruktsey*. 2017. Vol. 1. No. 14. P. 31-35.
 31. Ignat'yev V.A. *Raschet regul'yarnykh sterzhnevyykh sistem* - Saratov: Saratovskoye vyssheye voyenno-khimicheskoye voyennoye uchilishche, 1973.
- Tinkov D.V. Analysis of exact solutions of the deflection of regular hinge-rod structures // *Construction mechanics of engineering structures and structures*. 2015. No. 6. P. 21-28.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ СО СТАНДАРТНОЙ СКОРОСТЬЮ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА ПРИ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТАХ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ЯДРА СЕЧЕНИЯ

А. Н. Синозерский¹, Р. А. Мухтаров²
Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹Канд. техн. наук, проф. кафедры строительной механики

²Ст. преподаватель кафедры строительной механики

Предлагается методика расчёта разрушающих внутренних усилий $N_{\mu}(e)$ внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью $\dot{\theta} = 0,3923$ коротких призм из мелкозернистого бетона при эксцентриситетах $e > e_{яс}$. Методика опирается на сведения, полученные при испытаниях на центральное и внецентренное сжатие. Адекватность методик опыту проверена для нагружений со скоростью $\dot{\theta}_2 = 0,1 \cdot \dot{\theta}$. Рассмотренный способ может найти применение для оценки предельных усилий элементов из мелкозернистого бетона.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон, стандартная скорость, ядро сечения, предельное состояние.

LIMITING STATED OF ECCENTRICALLY COMPRESSED WITH STANDARD VELOCITY PRISMS FROM FINE-GRAINED CONCRETE AT ECCENTRICITIES OUTSIDE THE CORE OF SECTION

A.N. Sinozersky¹, R. A. Mukhtarov²
Voronezh state technical university^{1,2}
Voronezh, Russia

¹PhD of Tech. Sc., professor of the department of Structural Mechanics

²Senior lecture of the department of Structural Mechanics

There is suggested the method of calculation of internal forces $N_{\mu}(e)$ eccentrically compressed short prisms from fine-grained concrete with standard velocity of $\dot{\theta} = 0,3923$ at $e \geq e_{яс}$ eccentricities. The method is based on the data obtained during the central and off-center compression tests. The adequacy of methods to test is controlled for the loadings with the velocity of $\dot{\theta}_2 = 0,1 \cdot \dot{\theta}$. The analyzed method can be applied for assessment of limiting forces of the elements from fine-grained concrete.

Ключевые слова: eccentric compression, fine-grained concrete, standard velocity, section core, limiting state.

Введение

Расчёты на прочность внецентренно сжатых бетонных элементов часто проводят с помощью условных эпюр напряжений.

Столяров Я. В. [1] за начальную стадию разрушения полагал достижение в бетоне предела прочности сжатию σ_u . Им принята параболическая "m"-го порядка эпюра σ и не допускаются положительные деформации ε .

П. Л. Пастернак и Э. Е. Сигалов [2] предлагали прямоугольные эпюры в сжатой и растянутой частях сечения.

© Синозерский А. Н., Мухтаров Р. А., 2018

Залесов А. С. [3] рекомендовал прямоугольную в растянутой и трапецеидальную в сжатой зонах при линейном законе распределения ε по высоте сечения.

Дочев Д. Х. [4] вводил в расчёт условную ядровую точку при сохранении основных положений по [3].

Предельные усилия определяли с помощью заданных диаграмм σ и ε в [5], [6], [7], СНиП 2.03.01-84, [8] и настоящей работе и т. д.

Постановка задачи

При центральном сжатии элементов $b \cdot l \cdot h = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,4$ м из мелкозернистого бетона с постоянной по ГОСТ 10180-90 скоростью $\dot{F} = 3923 \text{ Н} \cdot \text{с}^{-1}$ (или относительной $\dot{\theta} = \dot{F} / b \cdot h \cdot \dot{\sigma}_{1,00} = 0,3923 \text{ с} \dot{\sigma}_{1,00} = 1,00 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$) установлены:

призмный [9] предел прочности $\bar{\sigma}_u = 26,09 \pm 1,47 \text{ МПа}$;

напряжения [10, 11, 12] $\bar{\sigma}_\tau = 12,36 \pm 0,69 \text{ МПа}$ и $\bar{\sigma}_\nu = 20,11 \pm 1,37 \text{ МПа}$, характеризующие нижнюю и верхнюю (по [13]) границы образования микротрещин;

определяемый через приращения поперечной $\Delta\varepsilon_t < 0$ и продольной $\Delta\varepsilon > 0$ деформаций дифференциальный коэффициент $\nu_\Delta = -\Delta\varepsilon_t / \Delta\varepsilon$, график которого представлен на рис. 1 [10];

функция [9]

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha \cdot (\varepsilon)^\beta,$$

при максимальном напряжении $\bar{\sigma}_u = 26,09 \text{ МПа}$, и соответствующей деформации $\bar{\varepsilon}_u = 1600 \cdot 10^{-6}$, модуле упругости $E = 31390 \text{ МПа}$ и параметрах $\alpha = 15880500 \text{ МПа}$, $\beta = 2,0810$, принимающая вид (рис. 2) :

$$\sigma = 31390 \cdot \varepsilon - 15880500 \cdot (\varepsilon)^{2,0810}. \quad (1)$$

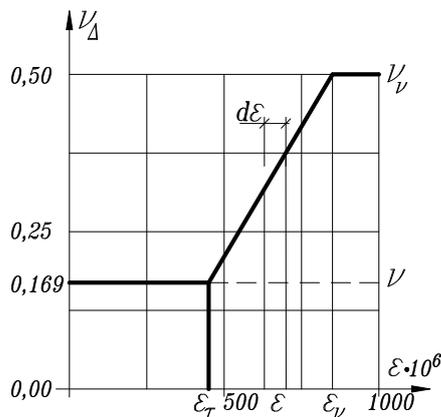


Рис. 1. График " $\nu_\Delta - \varepsilon$ "

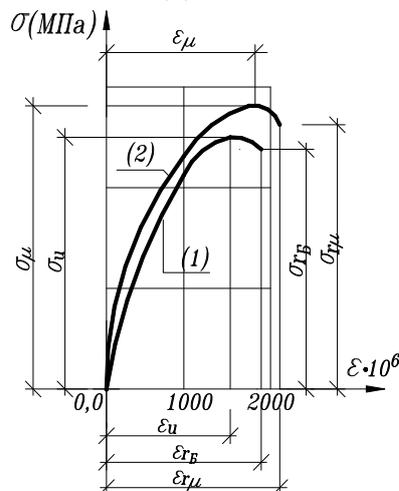


Рис. 2. Графики зависимостей (1) и (2)

Здесь и в дальнейшем сжимающие σ , ε , равнодействующие внешних F и внутренних N сил берутся по модулю.

По результатам испытаний на внецентренное сжатие [14] имели среднее разрушающее усилие $\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u = 185,3 \pm 13,7 \text{ кН}$ при доверительной погрешности $\pm\Delta\bar{F}_u$ с вероятностью $p=0,95$, числе опытов $n = 7$ и относительном эксцентриситете

$$e = y_f / h = 0,015 / 0,100 = 0,150.$$

Опытные нагрузки $\bar{F}_u(e)$ превосходят вычисляемые по методике [15] с помощью (1) экстремальные равнодействующие $N_B(e)$, называемые базовыми. Это увеличение характеризуется величиной $\bar{K}_\mu(e) = \bar{F}_u(e) / N_B(e) > 1$.

В [9] определены показатели предельного ядрового состояния:

- эксцентриситете $e_{яс} = y_{яс}/h = 0,10730$;
- коэффициент увеличения $K_{\mu}(e_{яс}) = 1,07916$;
- экстремальные напряжения $\sigma_{\mu}(e_{яс}) = K_{\mu}(e_{яс}) \cdot \bar{\sigma}_u = 28,155 \text{ МПа}$

и деформация $\varepsilon_{\mu}(e_{яс}) = K_{\mu}(e_{яс}) \cdot \bar{\varepsilon}_u = 1726,66 \cdot 10^{-6}$;

- параметры $\beta_{\mu} = \beta = 2,0810$, параметрами $\alpha_{\mu} = 14625000 \text{ МПа}$ представленной на рис. 2 и рис. 3 функции

$$\sigma(e_{яс}) = 31390 \cdot \varepsilon - 14625000 \cdot (\varepsilon)^{2,08100} \quad (2)$$

- напряжение в точке 5 (см. рис.3) $\sigma_{5\mu}(e_{яс}) = \bar{\sigma}_u = 26,09 \text{ МПа}$ (3)

и зависимость $\varepsilon_{i\mu}(e_{яс}) = B_{\mu}(e_{яс}) \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r\mu}(e_{яс})$, (4)

где характеристика эпюры $\varepsilon - B_{\mu}(e_{яс})$, м^{-1} ;

наибольшая в сечении - $\varepsilon_{r\mu}(e_{яс}) = \varepsilon_{5\mu}(e_{яс})$.

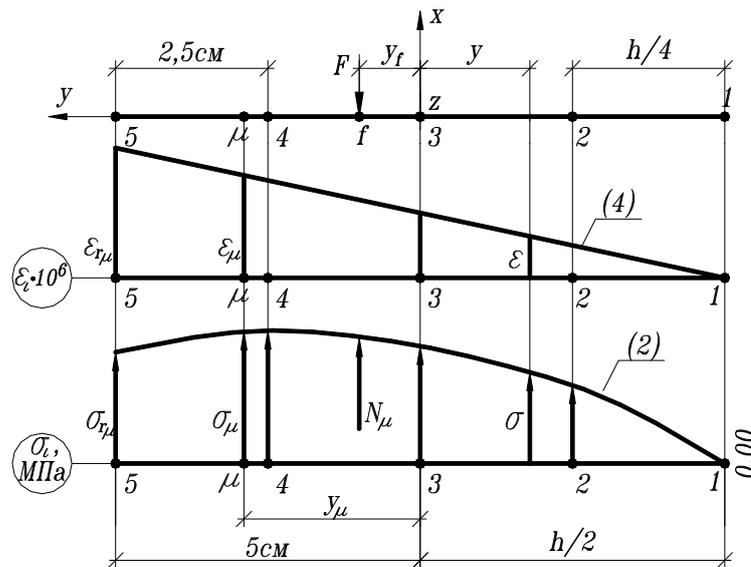


Рис. 3. Эпюры деформаций и напряжений при $e_{яс} = 0,10730$

Постановка задачи

На основании изложенных сведений предложим методику расчёта разрушающих усилий $N_{\mu}(e)$ и соответствующих условных НДС внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью коротких призм из мелкозернистого бетона при эксцентриситетах $e \geq e_{яс}$.

1. Предельное НДС в случае $e_{яс} = 0,10730$

По итерационной формуле Ньютона [16] вычисляем наибольшую сжимающую деформацию

$$\varepsilon_{bc} = \varepsilon_{r\mu} = \varepsilon_{5\mu(k+1)} = \frac{\alpha_{\mu} \cdot (1 - \beta) \cdot (\varepsilon_{5\mu(k)})^{\beta} + \sigma_{5\mu}}{E - \alpha_{\mu} \cdot \beta \cdot (\varepsilon_{5\mu(k)})^{\beta-1}} = 2183,550 \cdot 10^{-6}, \quad (5)$$

подстановка которой в (2) приводит к исходному (3).

Теперь при $y_1 = -0,5 \cdot h$ и $\varepsilon_{1\mu} = 0$ из уравнения (4) найдём

$$\text{параметр } B_{\mu}(0) = \varepsilon_{r\mu}/h = 2,183550 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}. \quad (6)$$

На ПЭВМ с помощью пакета программ MathCAD из решения соответствующих

назначенному $B_\mu(0)$ интегральных уравнений $N_{\mu(0)} = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy$ и $M_{z\mu(0)} = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy \cdot y$ получим разность $M_{z\mu(0)} - N_{\mu(0)} \cdot y_f = \Phi_{\mu(0)} = -2,04 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0$, а задаваясь

$$B_{\mu(1)} = 2,183559 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} - \Phi_{\mu(1)} = 1,28 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0.$$

Далее, уточнив $B_\mu = [B_{\mu(1)} \cdot \Phi_{\mu(0)} - B_{\mu(0)} \cdot \Phi_{\mu(1)}] / [\Phi_{\mu(0)} - \Phi_{\mu(1)}] = 2,18355553 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$, будем окончательно иметь:

$$\Phi_\mu = 0 \text{ МН} \cdot \text{м}, N_\mu(e_{яс}) = 204,922 \text{ кН},$$

$$\text{функции } \varepsilon_{i\mu}(e_{яс}) = 2,18355553 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2183,550 \cdot 10^{-6} \quad (7)$$

и (2) с деформациями $\varepsilon_{i\mu}$ и напряжениями $\sigma_{i\mu}$ в табл.1.

Таблица 1

θ	$e_{яс}$	Точки i	1	2	3	4	5	μ
		Координаты y_i , м	-0,050	-0,025	0,000	0,025	0,050	*2,9076 · 10 ⁻²
0,3923	0,10730	$\varepsilon_{i\mu}(e_{яс}) \cdot 10^6$ по (7)	-0,0055	545,883	1091,772	1637,661	2183,550	1726,659
		$\sigma_{i\mu}(e_{яс})$, МПа по (2)	-1,739 · 10 ⁻⁴	14,764	24,237	28,077	26,090	28,155

*координата вычислена из уравнения $\varepsilon_\mu(e_{яс}) = B_\mu \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r\mu}(e_{яс})$.

2. Оптимальное предельное состояние

Расчёт элементов при эксцентриситетах $e > e_{яс}$ производим с учётом сопротивления бетона растянутой зоны.

Рассмотрим вначале так называемый **оптимальный случай** с e_{opt} , когда усилия и НДС определяются на основании следующих предпосылок:

деформации распределяются по линейному закону (рис. 4, а)

$$\varepsilon_i(e_{opt}) = B(e_{opt}) \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_5(e_{opt}) \quad (8)$$

с наибольшими

$$\varepsilon_5(e_{opt}) \text{ по (5) и } \varepsilon_1(e_{opt}) = \varepsilon_{tv}(e_{opt}); \quad (9)$$

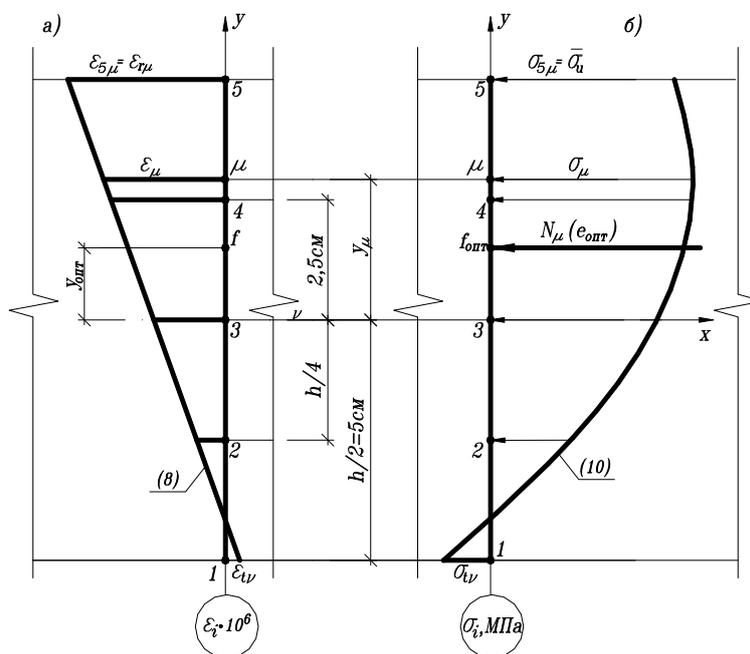


Рис. 4. Эпюры деформаций и напряжений при $e_{opt} = 0,15451$

напряжения при коэффициенте $K_\mu(e_{opt}) = K_\mu(e_{яс})$ и параметре α_μ, β_μ зависимости (2) представлены функцией

$$\sigma_5(e_{opt}) = 31390 \cdot \varepsilon - 14625000 \cdot (\varepsilon)^{2,08100} \quad (10)$$

с $\sigma_{5\mu}(e_{opt})$ по (3);

соответствующая верхней границе образования микротрещин растягивающая деформация

$$\varepsilon_{tv}(e_{onm}) = K_{\mu}(e_{onm}) \cdot \varepsilon_{tv}. \quad (11)$$

Для случая центрального сжатия (см. рис. 1), выполнив интегрирование

$$-v_{\tau} \int_0^{\varepsilon_v} d\varepsilon - \left(\frac{v_v - v_{\tau}}{\varepsilon_v - \varepsilon_{\tau}} \right) \cdot \int_{\varepsilon_{\tau}}^{\varepsilon_v} (\varepsilon - \varepsilon_{\tau}) \cdot d\varepsilon,$$

получим $\varepsilon_{tv} = -v_{\tau} \cdot \varepsilon_v - 0,5 \cdot (v_v - v_{\tau}) \cdot (\varepsilon_v - \varepsilon_{\tau}) = -208,003 \cdot 10^{-6},$ (12)

где $v_{\tau} = 0,169$ и $v_v = 0,500$ – коэффициенты поперечной деформации до $\bar{\sigma}_{\tau} = 12,36 \text{ МПа}$ и при $\bar{\sigma}_v = 20,11 \text{ МПа}$;

$\varepsilon_{\tau} = 448,172 \cdot 10^{-6}$ и $\varepsilon_v = 843,575 \cdot 10^{-6}$ – вычисленные по (5) при $\alpha = 15880500 \text{ МПа}$, $\beta = 2,08100$, $E = 31390 \text{ МПа}$ для случаев $\bar{\sigma}_{\tau}$ и $\bar{\sigma}_v$ (см. [11, 12]).

Теперь руководствуясь (11), будем иметь $\varepsilon_{tv} = 1,07916 \cdot (-208 \cdot 10^{-6}) = -224,47 \cdot 10^{-6}$ и принимаем окончательно

$$\varepsilon_{tv}(e_{onm}) = -0,140 \cdot \bar{\varepsilon}_u = -0,140 \cdot 1600 \cdot 10^{-6} = -224 \cdot 10^{-6}. \quad (13)$$

Найдём e_{onm} . Назначая в (8) параметр

$$B = (\varepsilon_{5\mu} - \varepsilon_{tv})_{onm} / h = (2183,55 + 224) \cdot 10^{-6} / 0,1 = 2,40755 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

и задавая в приближении $p = 0$ эксцентриситетом $e_{p=0} = 0,1545$ ($y_{fp=0} = 1,545 \cdot 10^{-2} \text{ м}$), вычислим:

$$\Phi_0 = M_{z0} - N_0 \cdot y_{fp} = 2,376 \cdot 10^{-7} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0;$$

$$\Delta y_{fp=0} = (M_{z0} / N_0) - y_{fp=0} = 1,3004 \cdot 10^{-6} \text{ м} > 0.$$

В $p = 1$ с $e_{p=1} = 0,15452$ ($y_{fp=1} = 1,5452 \cdot 10^{-2} \text{ м}$); $\Phi_1 = -1,278 \cdot 10^{-7} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0$, $\Delta y_{fp=1} = -0,6996 \cdot 10^{-6} \text{ м} < 0$.

В $p = 2$ уточняем:

$$y_{fp=2} = \frac{y_{fp=0} \cdot \Delta y_{fp=1} - y_{fp=1} \cdot \Delta y_{fp=0}}{\Delta y_{fp=1} - \Delta y_{fp=0}} = 1,54507 \cdot 10^{-2} \text{ м} \approx 1,5451 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для $e_{onm} = 0,15451$ в случае $B(e_{onm}) = 2,40753770 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ установлены:

$$\Phi(e_{onm}) = 0 \text{ МН} \cdot \text{м}, \quad y_f = M_z(e_{onm}) / N_{\mu}(e_{onm}) = 1,5451 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad N_{\mu}(e_{onm}) = 182,699 \text{ кН},$$

$$F(\text{СНУП}) = 260,9 \cdot (1 - 2 \cdot 0,15451) = 180,277 \text{ кН}, \quad \delta = 1,34 \%. \quad (14)$$

Функции $\varepsilon_{i\mu}(e_{onm}) = 2,40753770 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2183,550 \cdot 10^{-6}$ (14) и $\sigma_{i\mu}$ по (10) с деформациями $\varepsilon_{i\mu}(e_{onm})$ и $\sigma_{i\mu}(e_{onm})$ в табл. 2.

Таблица 2

θ	e_{onm}	Точки i	1	2	3	4	5	μ	n
		Координаты y_i , м	-0,050	-0,025	0,000	0,025	0,050	*3,10225· 10 ⁻²	**4,06964· 10 ⁻²
0,3923	0,15451	$\varepsilon_{i\mu}(e_{onm}) \cdot 10^6$ по (14)	-223,988	377,897	979,781	1581,666	2183,550	1726,660	0
		$\sigma_{i\mu}(e_{onm})$, МПа по (10)	-6,660	10,760	22,745	27,949	26,090	28,155	0

* и ** - координаты y_{μ} и y_n вычислены из уравнений :

$$\varepsilon_{\mu}(e_{яс}) = B(e_{onm}) \cdot (y_{\mu} - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r\mu}(e_{яс}) \quad (15)$$

и $0 = B(e_{onm}) \cdot (y_n - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r\mu}(e_{яс}). \quad (16)$

3. Характеристики предельных состояний в случаях $e_{яс} < e < e_{onm}$

Исходные данные (рис. 5):

относительный эксцентриситет, например $e = 0,150$, с $y_f = 0,015 \text{ м}$;

наибольшая деформация в сечении $\varepsilon_{5\mu}$ по (5);

коэффициент увеличения $K_{\mu}(e) = K_{\mu}(e_{яс}) = 1,07916$ и распределённые по закону (10) напряжения $\sigma(e)$.

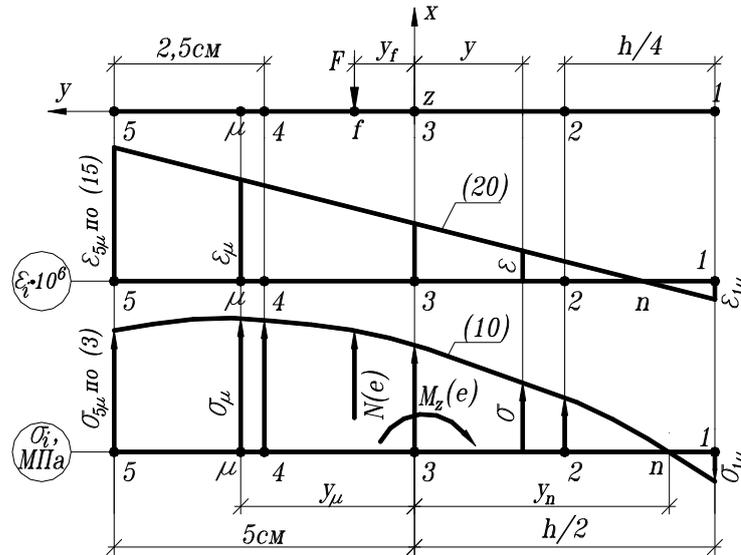


Рис. 5. Эпюры деформаций и напряжений при $e = 0,150$

Приняв функцию

$$\epsilon(e) = B(e) \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \epsilon_{r\mu}, \quad (17)$$

найдем в точке 1 с координатой $y_1 = -0,5 \cdot h = -0,05\text{м}$ (рис. 5) растягивающую деформацию $\epsilon_1(e)$, при которой

$$\Phi(e) = |M_z(e) - N(e) \cdot y_f| \leq 1 \cdot 10^{-9} \text{МН} \cdot \text{м}, \quad (18)$$

где $M_z(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy \cdot y$ и $N(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy$ – изгибающий момент относительно оси z и равнодействующая внутренних сил, определяемые на ПЭВМ с помощью пакета программ MathCAD.

Решение проводим в результате последовательных приближений $p = 0, 1, 2, \dots, k$. Задаёмся $\epsilon_1(e)_{k-1}, \epsilon_1(e)_k$. Вычисляем соответствующие

параметры $B(e)_{k-1} = [\epsilon_{r\mu} - \epsilon_1(e)_{k-1}] / h,$

$B(e)_k = [\epsilon_{r\mu} - \epsilon_1(e)_k] / h$ и, получив

разности $\Phi(e)_{k-1} = M_z(e)_{k-1} - N(e)_{k-1} \cdot y_f > 0,$

$\Phi(e)_k = M_z(e)_k - N(e)_k \cdot y_f < 0$ противоположных знаков, методом

хорд [16] уточняем

$$\epsilon_1(e)_{k+1} = \frac{\epsilon_1(e)_{k-1} \cdot \Phi(e)_k - \epsilon_1(e)_k \cdot \Phi(e)_{k-1}}{\Phi(e)_k - \Phi(e)_{k-1}}. \quad (19)$$

Далее продолжаем расчёт до выполнения условия (18).

В рассматриваемом случае, назначив $\epsilon_1(e)_0 = -206 \cdot 10^{-6}$ и $\epsilon_1(e)_1 = -205 \cdot 10^{-6}$, будем иметь:

$B(e)_0 = [2183,550 - (-206)] \cdot 10^{-6} / 0,1 = 2,38955 \cdot 10^{-2} \text{м}^{-1},$

и $B(e)_1 = [2183,550 - (-205)] \cdot 10^{-6} / 0,1 = 2,38855 \cdot 10^{-2} \text{м}^{-1};$

$\Phi(e)_0 = 3,1471 \cdot 10^{-6} \text{МН} \cdot \text{м} > 0$ и $\Phi(e)_1 = -1,2496 \cdot 10^{-6} \text{МН} \cdot \text{м} < 0;$

$$\epsilon_1(e)_2 = \frac{-206 \cdot 10^{-6} \cdot (-1,2496 \cdot 10^{-6}) - (-205 \cdot 10^{-6}) \cdot 3,1471 \cdot 10^{-6}}{-1,2496 \cdot 10^{-6} - 3,1471 \cdot 10^{-6}} = -205,284 \cdot 10^{-6};$$

$B(e)_2 = [2183,550 - (-205,284)] \cdot 10^{-6} / 0,1 = 2,388834 \cdot 10^{-2} \text{м}^{-1}$ и

$\Phi(e)_2 = -1,1 \cdot 10^{-9} \text{МН} \cdot \text{м} < 0;$

$$B(e) = \frac{B(e)_0 \cdot \Phi(e)_2 - B(e)_2 \cdot \Phi(e)_0}{\Phi(e)_2 - \Phi(e)_0} = 2,38883424 \cdot 10^{-2} \text{м}^{-1} \text{ и } \Phi(B) = 0 \cdot 10^{-1} \text{МН} \cdot \text{м};$$

равнодействующую внутренних сил $N_\mu(e = 0,150) = 184,631 \text{кН};$

$$\text{функции } \varepsilon_{i\mu}(e = 0,150) = 2,38883424 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2183,550 \cdot 10^{-6}, \quad (20)$$

$\sigma_{i\mu}(e = 0,150)$ по (10)

с деформациями $\varepsilon_{i\mu}(e = 0,150)$, напряжениями $\sigma_{i\mu}(e = 0,150)$ в табл. 3 и соответствующими эпюрами на рис. 5.

Таблица 3

θ	e	Точки i	1	2	3	4	5	μ	n
		Координаты y_i , м	-0,050	-0,025	0,000	0,025	0,050	$3,0874 \cdot 10^{-2}$	$-4,1406 \cdot 10^{-2}$
0,3923	0,150	$\varepsilon_{i\mu} \cdot 10^6$ по (20)	-205,284	391,924	989,133	1586,341	2183,550	1726,659	0,0002
		$\sigma_{i\mu}$, МПа по (10)	-6,134	11,112	22,879	27,962	26,090	28,155	$7,246 \cdot 10^{-6}$

Замечание: координаты y_μ и y_n вычислены по формулам (15) и (16).

Расчётная равнодействующая внутренних сил $N_\mu(e = 0,150) = 184,634$ кН располагается в границах доверительного интервала средней разрушающей нагрузки $\bar{F}_u(e = 0,150) \pm \Delta \bar{F}_u = 185,3 \pm 13,7$ кН при относительном отклонении $\delta_\mu = (N_\mu - \bar{F}_u) \cdot 100 \% / \bar{F}_u = -0,36 \%$.

4. Условное НДС при $e > e_{\text{огт}} = 0,15451$

Полагаем, что разрушению короткого внецентренно сжимаемого элемента шириной b , высотой $h = b$ и длиной l сопротивляется только часть бетонного сечения $b \cdot h' < b \cdot h$ (рис. 6).

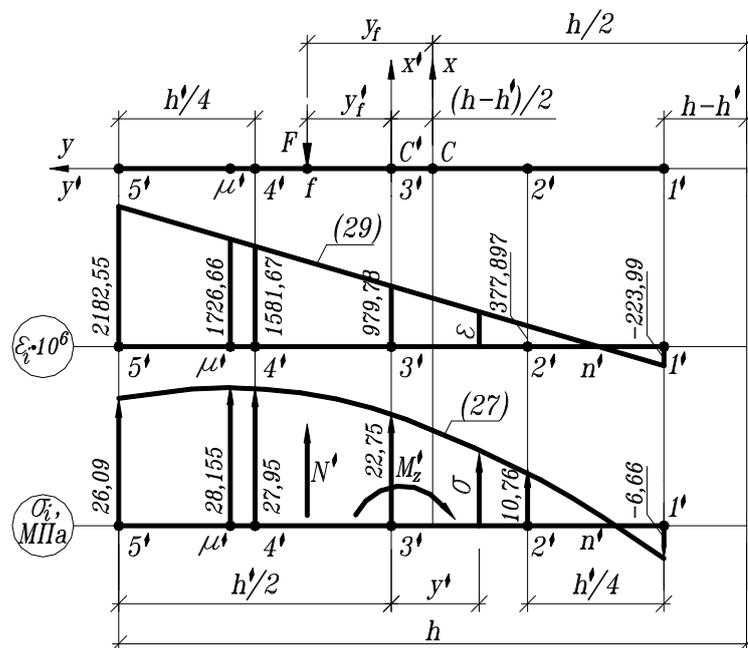


Рис.6. Предельное состояние при $e = 0,200$

Для этой части задаёмся:

центральными осями $x' C' y'$;

точками $i = f, 1', 2', 3', 4', 5'$

с координатами $y'_f = y_f - 0,5 \cdot (h - h')$, (21)

$y'_{1'} = -h'/2, y'_{2'} = -h'/4, y'_{3'} = 0, y'_{4'} = h'/4, y'_{5'} = h'/2;$ (22)

$$\text{функциями деформаций } \varepsilon_i = B'(e) \cdot (y'_i - 0,5 \cdot h') + \varepsilon_{5'} \quad (23)$$

$$\text{и напряжений } \sigma_i = E \cdot \varepsilon_i - \alpha' \cdot (\varepsilon_i)^{\beta'} \quad (24)$$

с характеристикой эпюры деформаций $B'(e), \text{ м}^{-1}$;

наибольшей в сечении $\varepsilon_{5'} = \varepsilon_{r\mu}$ по (5);

растягивающей $\varepsilon_{1'} = \varepsilon_{tv}$ (13);

параметрами $\alpha' = \alpha_{\mu} = 14625000 \text{ МПа}$ и $\beta' = \beta_{\mu} = 2,08100$ по (10).

$$\text{Принимая } y'_f = h' \cdot e_{\text{опт}} \quad (25)$$

и $y_f = h \cdot e$, из решения уравнения (21) находим высоту воспринимающего предельную нагрузку прямоугольного элемента

$$h' = \frac{1 - 2 \cdot e}{1 - 2 \cdot e_{\text{опт}}} \cdot h. \quad (26)$$

Дальнейший расчёт выполняем для заданной b и вычисленных h', y'_f соответственно по формулам (26), (25).

4.1. Случай $e = 0,200$ ($y_f = 0,020 \text{ м}$)

Имеем: $b = h = 0,1 \text{ м}$; $e_{\text{опт}} = 0,15451$; $\varepsilon_{5'} = 2183,550 \cdot 10^{-6}$; $\varepsilon_{1'} = -224 \cdot 10^{-6}$;

$$\text{функции напряжений } \sigma_i = 31390 \cdot \varepsilon_i - 14625000 \cdot (\varepsilon_i)^{2,08100} \quad (27)$$

$$\text{и деформаций } \varepsilon_i = B'_{\mu'}(e) \cdot (y'_i - 0,5 \cdot h') + 2183,550 \cdot 10^{-6} \quad (28)$$

с экстремальными $\sigma_{\mu'} = 28,155 \text{ МПа}$ и $\varepsilon_{\mu'} = 1726,660 \cdot 10^{-6}$.

Определяем:

$$\text{высоту (26) - } h' = \frac{1 - 2 \cdot 0,200}{1 - 2 \cdot 0,15451} \cdot 0,1 = 8,68332 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\text{координату (25) - } y'_f = 8,68332 \cdot 10^{-2} \cdot 0,15451 = 1,34166 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

нулевое приближение параметра

$$B'_{\mu'(0)} = (\varepsilon_{5'} - \varepsilon_{1'})/h' = (2183,550 + 224) \cdot 10^{-6} / 8,68332 \cdot 10^{-2} = 2,77261462 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

На ПЭВМ с помощью пакета программ MathCAD из решения соответствующих назначенному $B'_{\mu'(0)}$ интегральных уравнений

$$N'_{\mu'(0)} = \int_{A'} \sigma \cdot b \cdot dy \text{ и } M'_{z\mu'(0)} = \int_{A'} \sigma \cdot b \cdot dy \cdot y \text{ получим}$$

$$\Phi'_{\mu'(0)} = M'_{z\mu'(0)} - N'_{\mu'(0)} \cdot y'_f = 4,51 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0.$$

Теперь, задавшись $B'_{\mu'(1)} = 2,772585 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ с $\Phi'_{\mu'(1)} = -4,55 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0$,

уточним

$$B'_{\mu'}(e) = \frac{B'_{\mu'(0)} \cdot \Phi'_{\mu'(1)} - B'_{\mu'(1)} \cdot \Phi'_{\mu'(0)}}{\Phi'_{\mu'(1)} - \Phi'_{\mu'(0)}} = 2,77260058 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

Далее будем иметь $\Phi'_{\mu'}(e) = 0 \text{ МН} \cdot \text{м}$;

$$N'_{\mu'}(e) = 158,644 \text{ кН}, y'_f = M'_{z\mu'}(e) / N'_{\mu'}(e) = 1,34166 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\text{функции } \varepsilon_{i\mu'}(e) = 2,77260058 \cdot 10^{-2} \cdot (y'_i - 0,5 \cdot h') + 2183,550 \cdot 10^{-6}, \quad (29)$$

$\sigma_{i\mu'}(e)$ по (27) с деформациями $\varepsilon_{i\mu'}(e)$, напряжениями $\sigma_{i\mu'}(e)$ в табл. 4 и эпюрами на рис. 6.

Таблица 4

θ	e	Точки i	1'	2'	3'	4'	5'	μ'	n'
		Координаты $y'_i \cdot 10^2, \text{ м}$	$-h'/2$	$-h'/4$	0,000	$h'/4$	$h'/2$	2,69378	-3,53380
0,3923	0,200	$\varepsilon_{i\mu'}(e) \cdot 10^6$ по (29)	-223,99	377,897	979,78	1581,67	2183,55	1726,66	-0,0005
		$\sigma_{i\mu'}(e), \text{ МПа}$ по (27)	-6,66	10,76	22,75	27,95	26,09	28,155	$-1,55 \cdot 10^{-5}$

Замечание: координаты $y'_{\mu'}$ и $y'_{n'}$ определены из уравнений $\varepsilon_{i\mu'}(e) = B'_{\mu'}(e) \cdot (y'_{\mu'} - 0,5 \cdot h') + \varepsilon_{5'}$ и $0 = B'_{\mu'}(e) \cdot (y'_{n'} - 0,5 \cdot h') + \varepsilon_{5'}$.

5. Апробация методики п. 4 при $\dot{F}_2 = 392,3 \text{ Н} \cdot \text{с}^{-1}$ и $e = 0,150 > e(\dot{\theta}_2, \text{опт})$

В [9] для относительной скорости $\dot{\theta}_2 = \dot{F}_2/b \cdot h \cdot \dot{\sigma}_{1,00} = 0,03923$:
при $e = 0$ привлекалась функция $\sigma(\dot{\theta}_2) = 31390 \cdot \varepsilon - 2764700 \cdot (\varepsilon)^{1,80358}$ (30)
с экстремальным напряжением, равным призмемному пределу прочности

$$\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_2) = 25,51 \pm 0,69 \text{ МПа} \quad (31)$$

и соответствующей $\bar{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_2) = 1824 \cdot 10^{-6}$; (32)

установлен ядровый эксцентриситет $e_{\text{яс}}(\dot{\theta}_2) = 0,10129$. (33)

Предельное состояние в случае $e_{\text{яс}}(\dot{\theta}_2)$ было представлено:

коэффициентом $K_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{яс}) = 1,08520$, (34)

напряжением $\sigma_{\mu 2} = K_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{яс}) \cdot \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_2) = 1,08520 \cdot 25,51 = 27,683 \text{ МПа}$ } (35)

и деформацией $\varepsilon_{\mu 2} = K_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{яс}) \cdot \bar{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_2) = 1,08520 \cdot 1824 \cdot 10^{-6} = 1979,4 \cdot 10^{-6}$,)

параметрами $\alpha_{\mu 2} = 2588850 \text{ МПа}$ } (36)

и $\beta_{\mu 2} = \beta_2 = 1,80358$, }

зависимостью $\sigma(\dot{\theta}_2, \text{яс}) = 31390 \cdot \varepsilon - 2588850 \cdot (\varepsilon)^{1,80358}$; (37)

наибольшей сжимающей деформацией в момент разрушения

$$\varepsilon_{5\mu 2} = \varepsilon_c(\dot{\theta}_2, \text{яс}) = 2527,7 \cdot 10^{-6} \quad (38)$$

при напряжении $\sigma_{5\mu 2} = \bar{\sigma}_c(\dot{\theta}_2, \text{яс}) = 25,80 \text{ МПа}$. (39)

Можно показать, что при $\bar{\sigma}_\tau(\dot{\theta}_2) = 12,07 \pm 0,39 \text{ МПа}$, $\bar{\sigma}_v(\dot{\theta}_2) = 19,91 \pm 0,98 \text{ МПа}$ [10],

$\nu_\tau = 0,169$, $\nu_v = 0,500$, $K_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{яс}) = 1,0852$, следует принять

$$\varepsilon_{tv}(\dot{\theta}_2) = -255,42 \cdot 10^{-6} \quad (40)$$

и $\sigma_{tv}(\dot{\theta}_2) = -7,160 \text{ МПа}$. (41)

На основании полученных сведений:

найдем показатели оптимального предельного состояния;

вычислим по методике п. 4 усилие $N'(\dot{\theta}_2, e = 0,150)$ и сравним с опытным

$\bar{F}_u(\dot{\theta}_2, e = 0,150) = 180,4 \pm 10,8 \text{ кН}$ из [14].

5.1. Определение $e(\dot{\theta}_2, \text{опт})$

Выполним исследования (см.п.2) при параметре

$$B = \frac{[\varepsilon_{5\mu 2}(\dot{\theta}_2) - \varepsilon_{tv}(\dot{\theta}_2)]}{h} = \frac{[2527,7 - (-255,42)] \cdot 10^{-6}}{0,1} = 2,78312 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

В приближении $p=0$ задаемся $e(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 0,14933$ с координатой

$$y_{fp=0} = 1,4933 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

и $\Delta y_{fp=0} = (M_{z0}/N_0) - y_{fp=0} = 3,96 \cdot 10^{-8} \text{ м} > 0$.

В случае $p=1$ с $e(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 0,14934$ и $y_{fp=1} = 1,4934 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ будем иметь

$$\Delta y_{fp=1} = (M_{z1}/N_1) - y_{fp=1} = -9,604 \cdot 10^{-7} \text{ м} < 0.$$

В приближении $p=2$ находим

$$y_{fp=2} = \frac{y_{fp=0} \cdot \Delta y_{fp=1} - y_{fp=1} \cdot \Delta y_{fp=0}}{\Delta y_{fp=1} - \Delta y_{fp=0}} =$$

$$= \frac{1,4933 \cdot 10^{-2} \cdot (-9,604 \cdot 10^{-7}) - 1,4934 \cdot 10^{-2} \cdot 3,96 \cdot 10^{-8}}{-9,604 \cdot 10^{-7} - 3,96 \cdot 10^{-8}} = 1,49330396 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Назначаем $e(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 0,14933$ ($y_f(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 1,4933 \cdot 10^{-2} \text{ м}$) (42)

и, продолжая расчёт, получаем:

$$B_c(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 2,78312 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ с } \Phi(B_c) = 7,3 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{ м};$$

$$B_1(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 2,78310 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} \text{ с } \Phi(B_1) = -7,35 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{ м};$$

$$B(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = \frac{B_c \cdot \Phi(B_1) - B_1 \cdot \Phi(B_c)}{\Phi(B_1) - \Phi(B_c)} =$$

$$= \frac{2,78312 \cdot 10^{-2} \cdot (-7,35 \cdot 10^{-8}) - 2,78310 \cdot 10^{-2} \cdot 7,3 \cdot 10^{-9}}{-7,35 \cdot 10^{-8} - 7,3 \cdot 10^{-9}} = 2,7831122 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$$

с $\Phi(B_2, \text{опт}) = -0 \cdot 10^{-10} \text{ МН} \cdot \text{ м};$

$$N_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 183,457 \text{ кН};$$

$$\Delta y_{f\mu 2} = [M_{z2}(\dot{\theta}_2, \text{опт})/N_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{опт})] - y_f(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 0 \text{ м};$$

функции $\varepsilon_{i\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{опт}) = 2,78311220 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2527,7 \cdot 10^{-6}$ (43)

и $\sigma_{i\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{опт})$ по (37);

деформации $\varepsilon_{i\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{опт})$ и напряжения $\sigma_{i\mu 2}(\dot{\theta}_2, \text{опт})$ в табл. 5.

Таблица 5

$\dot{\theta}_2$	$e_{\text{опт}}$	Точки i	1	2	3	4	5	$\mu 2$	n
		Координаты $y_i \cdot 10^2, \text{ м}$	-0,050	-0,025	0,000	0,025	0,050	3,02991 $\cdot 10^{-2}$	-4,08226 $\cdot 10^{-2}$
0,03923	0,14933	$\varepsilon_{i\mu 2} \cdot 10^6$ по (43)	-255,418	440,361	1136,141	1831,92	2527,7	1979,401	$-3 \cdot 10^{-4}$
		$\sigma_{i\mu 2}, \text{ МПа}$ по (37)	-7,160	11,532	23,006	27,544	25,800	27,683	$-9,76 \cdot 10^{-6}$

Замечание: координаты $y_{\mu 2}$ и y_n вычислены по формулам (15) и (16).

5.2. Разрушающее усилие $N_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, e = 0,150)$ и соответствующие характеристики предельного состояния

Определяем:

$$\text{высоту (26) } - h' = \frac{1-2 \cdot 0,150}{1-2 \cdot 0,14933} \cdot 0,1 = 9,9809 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\text{координату (25) } - y_f' = 9,9809 \cdot 10^{-2} \cdot 0,14933 = 0,014904 \text{ м};$$

нулевое приближение параметра

$$B'_{\mu 2(0)} = (\varepsilon_5' - \varepsilon_1')/h' = [2527,7 - (-255,42)] \cdot 10^{-6}/9,9809 \cdot 10^{-2} = 2,78844 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1};$$

$$\Phi'_{\mu 2(0)} = M'_{z\mu(0)} - N'_{\mu 2(0)} \cdot y_f' = 7,09 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{ м} > 0.$$

Задаваясь $B'_{\mu 2(1)} = 2,78841 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ и продолжая расчёт, будем иметь:

$$\Phi'_{\mu 2(1)} = -4,95 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{ м} < 0;$$

$$B'_{\mu 2(2)}(\dot{\theta}_2, e = 0,150) = \frac{B'_{\mu 2(0)} \cdot \Phi'_{\mu 2(1)} - B'_{\mu 2(1)} \cdot \Phi'_{\mu 2(0)}}{\Phi'_{\mu 2(1)} - \Phi'_{\mu 2(0)}} =$$

$$= \frac{2,78844 \cdot 10^{-2} \cdot (-4,95 \cdot 10^{-8}) - 2,78841 \cdot 10^{-2} \cdot 7,09 \cdot 10^{-8}}{-4,95 \cdot 10^{-8} - 7,09 \cdot 10^{-8}} = 2,78842233 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$$

при $\Phi'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, e = 0,150) = 0$ МН · м;

равнодействующую внутренних сил $N'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, e = 0,150) = 183,108$ кН; (44)

зависимости

$$\varepsilon_{i\mu}(\dot{\theta}_2, e = 0,150) = 2,78842233 \cdot 10^{-2} \cdot (y'_i - 0,5 \cdot h') + 2527,7 \cdot 10^{-6} \quad (45)$$

и $\sigma_{i\mu 2}(\dot{\theta}_2, e = 0,150)$ по (37);

деформации $\varepsilon_{i\mu}(\dot{\theta}_2, e = 0,150)$ и напряжения $\sigma_{i\mu 2}(\dot{\theta}_2, e = 0,150)$ в табл. 6.

Таблица 6

$\dot{\theta}_2$	e	Точки i	1'	2'	3'	4'	5'	$\mu 2'$	n'
		Координаты $y'_i \cdot 10^2$, м	- $h'/2$	- $h'/4$	0,000	$h'/4$	$h'/2$	3,02411	-4,07453
0,0392 3	0,150	$\varepsilon_{i\mu 2}(\dot{\theta}_2, e) \cdot 10^6$ по (45)	-255,396	440,378	1136,152	1831,926	2527,7	1979,401	$7 \cdot 10^{-4}$
		$\sigma_{i\mu}(\dot{\theta}_2, e)$, МПа по (37)	-7,159	11,532	23,006	27,544	25,800	27,683	$2,297 \cdot 10^{-5}$

Замечание: координаты $y'_{\mu 2'}$ и $y'_{n'}$ определены из уравнений

$$\varepsilon_{i\mu 2'}(e) = B'_{\mu 2'}(\dot{\theta}_2, e) \cdot (y'_{\mu 2'} - 0,5 \cdot h') + \varepsilon_{5'} \text{ и } 0 = B'_{\mu 2'}(\dot{\theta}_2, e) \cdot (y'_{n'} - 0,5 \cdot h') + \varepsilon_{5'}.$$

6. Сводка расчётных и опытных разрушающих усилий

Сравнение вычисленных в п.3 и п.5.2 равнодействующих $N_{\mu}(\dot{\theta}, e = 0,150)$ и $N'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, e = 0,150)$ с предельными экспериментальными нагрузками $\bar{F}_u(\dot{\theta}, e = 0,150) \pm \Delta \bar{F}_u$ и $\bar{F}_u(\dot{\theta}_2, e = 0,150) \pm \Delta \bar{F}_u$ при $e = 0,150 < e(\dot{\theta})_{\text{опт}} = 0,15451$ и $e = 0,150 > e(\dot{\theta})_{\text{опт}} = 0,14933$ выполнено в табл. 7 и на рис. 7.

Таблица 7

Скорость нагруже- ния	Оптималь- ный экс- центриситет	$e = \frac{y_f}{h}$	Нагрузки, кН		Отклонения	
			Расчётные $N_{\mu}(\dot{\theta}, e)$ и $N'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, e)$	Опытные $\bar{F}_u(\dot{\theta}, e) \pm \Delta \bar{F}_u$ и $\bar{F}_u(\dot{\theta}_2, e) \pm \Delta \bar{F}_u$	$\Delta_{\mu}(\dot{\theta}) = N_{\mu}(\dot{\theta}) - \bar{F}_u(\dot{\theta})$, кН и $\Delta'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2) = N'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2) - \bar{F}_u(\dot{\theta}_2)$, кН	$\delta_{\mu}(\dot{\theta}) = [\Delta_{\mu}(\dot{\theta})/\bar{F}_u(\dot{\theta})] \cdot 100\%$ и $\delta'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2) = [\Delta'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2)/\bar{F}_u(\dot{\theta}_2)] \cdot 100\%$
1	2	3	4	5	6	7
$\dot{\theta} \cdot 10^3 = 392,3$	$e(\dot{\theta})_{\text{опт}} = 0,15451$	0,150	$N_{\mu}(\dot{\theta}, e) = 184,631$	$\bar{F}_u(\dot{\theta}, e) \pm \Delta \bar{F}_u = 185,3 \pm 13,7$	$\Delta_{\mu}(\dot{\theta}) = -0,669$	$\delta_{\mu}(\dot{\theta}) = -0,36$
$\dot{\theta}_2 \cdot 10^3 = 39,23$	$e(\dot{\theta}_2)_{\text{опт}} = 0,14933$	0,150	$N'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2, e) = 183,108$	$\bar{F}_u(\dot{\theta}_2, e) \pm \Delta \bar{F}_u = 180,4 \pm 10,8$	$\Delta'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2) = 2,708$	$\delta'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2) = 1,50$

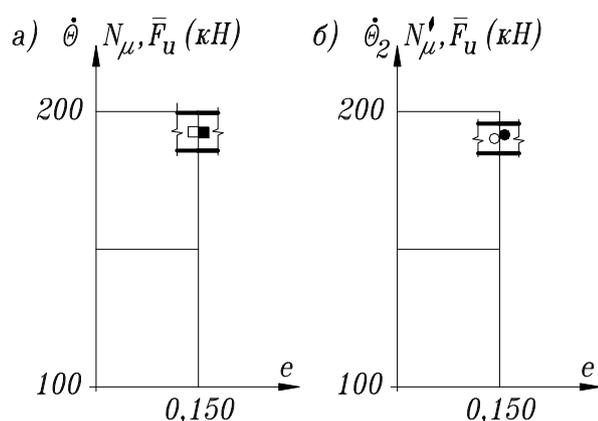


Рис.7. Сравнение расчётных и опытных разрушающих усилий:

□, ○ – средние и опытные разрушающие силы $\bar{F}_u(\dot{\theta})$, $\bar{F}_u(\dot{\theta}_2)$;

■, ● – предельные расчётные нагрузки $N_\mu(\dot{\theta})$, $N_{\mu 2}(\dot{\theta}_2)$

□, ○ - границы доверительных интервалов $\bar{F}_u(\dot{\theta})$, $\bar{F}_u(\dot{\theta}_2)$ при вероятности $p=0,95$.

Выводы

Предложены методики расчёта разрушающих состояний внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью $\dot{\theta} = 0,3923$ коротких призм из мелкозернистого бетона площадью $A = b \cdot h = 0,1 \cdot 0,1$ м при эксцентриситетах:

$e_{\text{яс}} = 0,10730 < e < e_{\text{опт}} = 0,15451$ – с наибольшими сжимающими деформациями $\varepsilon_{bc} = 2183,55 \cdot 10^{-6}$ в поперечном сечении (см. рис. 5);

$e = e_{\text{опт}} = 0,15451$ – с деформациями ε_{bc} и предельными растягивающими

$\varepsilon_{tv} = -224 \cdot 10^{-6}$ (см. рис. 4);

$e > e_{\text{опт}} = 0,15451$ – с ε_{bc} и ε_{tv} в воспринимающей нагрузку части сечения площадью $A' = b \cdot h' < A$ (см. рис. 6).

Адекватность методик опыту проверена для нагружений со скоростью $\dot{\theta}_2 = 0,1 \cdot \dot{\theta}$.

Расчётные равнодействующие внутренних сил $N_\mu(\dot{\theta})$ и $N'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2)$ располагаются (см. рис. 7) в границах доверительных интервалов средних опытных разрушающих нагрузок $\bar{F}_u(\dot{\theta})$ и $\bar{F}_u(\dot{\theta}_2)$ при вероятности $p=0,95$, а относительные отклонения (см. табл. 7) –

$\delta_\mu(\dot{\theta}) = -0,36 \%$, $\delta'_{\mu 2}(\dot{\theta}_2) = 1,50$.

Рекомендации могут найти применение для оценки предельных усилий элементов из мелкозернистого бетона.

Библиографический список

1. Столяров Я. Б. Введение в теорию железобетона/ Я. Б. Столяров. – М.-Л., Стройиздат, 1941. – 447 с.
2. Пастернак П. Л. Расчёт трещиностойкости предварительно напряжённых и обычных железобетонных сечений/ П. Л. Пастернак, Э. Е. Сигалов// Бетон и железобетон. – М., 1961. -№5.
3. Залесов А. С. Расчёт предварительно напряжённых железобетонных элементов по образованию трещин в нормальных сечениях с учётом неупругих деформаций сжатого бетона/ А. С. Залесов// Бетон и железобетон. – М., 1964. - № 8.

4. Дочев Д. Х. Расчёт предварительно напряжённых железобетонных элементов по образованию трещин с учётом неупругих свойств бетона в сжатой зоне сечения/ Д. Х. Дочев // Бетон и железобетон. – М., 1967. - № 1.
5. Гвоздев А. А. Основные направления развития теории железобетона/ А. А. Гвоздев, О.Я. Берг// Бетон и железобетон. – М., 1970. - №4.
6. Урзун И. А. Реализация диаграмм деформирования бетона при однородном и неоднородном напряжённых состояниях/ Урзун И. А. // Бетон и железобетон. – М., 1991, С. 19-20.
7. Синозерский А. Н. Базовые и разрушающие усилия внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона при эксцентриситетах в границах ядра сечения/ А. Н. Синозерский, А.В. Резунов, Р. А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГТУ. Строительная механика и конструкции. Воронеж– 2018. – Вып. №1(16). – С. 40-53.
8. Синозерский А.Н. Сопротивление внецентренному сжатию в стадии простого нагружения бруса прямоугольного сечения из упруго-пластично-вязкого материала (на примере мелкозернистого бетона): диссертация на соискание учёной степени канд.техн.наук: ТН№009733: защищена 18.03.1975: утв.10.11.1976, ВИСИ, Воронеж, 1974. – 166 с.
9. Синозерский А. Н. Зависимость условных деформаций, характеризующих нижнюю границу образования микротрещин мелкозернисто бетона 28-дневного возраста, от эксцентриситета приложения с постоянной скоростью сжимающей силы/ А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. - Воронеж– 2010. – Вып. №1. – С.39-41.
10. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона/ О. Я. Берг. - М.: Госстройиздат, 1962. – 184 с.
11. Синозерский А. Н. Комбинированный способ расчёта разрушающих усилий внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона/ А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ . Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып. №2(5). – С.49-51.
12. Синозерский А. Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии / А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып. №1(4). – С.72-83.
13. Лапчик М. П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов/ М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчика. – М.: Изд.центр «Академия», 2004. -384 с.
14. Goschy B. Using the ultimate strength theory in design eccentrically loaded rectangular concrete columns, “Civil engineering ant Public Works Review”, March 1961, v. 56, №656.
15. Viest J. M., Elstner R. C., Hognestad E., Sustained load strength of Eccentrically loaded short reinforced concrete columns, “Journal of the American Concrete Institute”, March, №7, 1956.

Reference

1. Stolyarov Ya. B. Introduction in the theory of reinforced concrete – М.-L., Stroiizdat, 1941. - 447 p.
2. Pasternack P.L. Sigalov E. E. calculation of crack resistance of prestressed and standard reinforced concrete sections. Concrete and reinforced concrete – М., 1961. -№5.
3. Zalesov A.S Calculation of prestressed reinforced concrete elements for cracks formrtion in standard sections with account of nonelastic deformations of compressed concrete. Concrete and reinforced concrete. – М., 1964. - No 8.
4. Dochev D.Kh. Calculation of prestressed reinforced elements for cracks formation of nonelastic characteristics of concrete in compressed section zone. Concrete and reinforced concrete. – М., 1967. - No 1.

5. Gvozdyov A. A., Berg O.Ya. Main directions of the reinforce theory development. Concrete and reinforced concrete – M., 1970. - No4.
6. Ursun I.A. Concrete deformation diagram realization at homogeneous and non homogeneous stressed state. Concrete and reinforced concrete . – M., 1991, P. 19-20.
7. Sinozersky A.N., Resunov A.V., Mukhtarov R.A. Basic and destructive forces of eccentrically compressed prisms from fine – grained concrete at eccentricities inside the core section. Scientific journal of VGTU. Structural Mechanics and constructions. Voronezh– 2018. – Issue No1(16). – P. 40-53.
8. Sinosersky A.N. Resistance to off-center compression in the stage of simple loading of right-angled section beam from elastic- plastic –viscous material (on example of fine-grained concrete): PhD thesis TH№009733: defended in 18.03.1975, approved 10.11.1976, VICI, Voronezh, 1974. – 166 p.
9. Sinozersky A. N., Mukhtarov R. A. Dependence of conditional deformations, characterized the lower bounds of microcracks of fine-grained concrete of 28-days age, eccentricities of application with constant velocity compressed force. Scientific –technical journal of VGASU. Structural Mechanics and constructions. - Voronezh– 2010. – Issue. №1. – P.39-41.
10. Berg O. Ya. Physical basis of the theory of concrete and reinforced concrete durability. - M.: Gosstroizdat, 1962. – 184 p.
11. Sinozersky A. N., Mukhtarov R. A. Combined method of calculation of destructive forces of eccentrically compressed prisms from fine-grained concrete. Scientific –technical journal of VGASU. Structural Mechanics and constructions. - Voronezh– 2012. – Issue. No 2 (5). – P.49-51.
12. Sinozersky A. N., Mukhtarov R. A. Definition of the basic forces and deflected mode of prisms from fine-grained concrete at off-center compression. Scientific –technical journal of VGASU. Structural Mechanics and constructions. - Voronezh– 2012 Issue. No 1 (4). – P.72-83.
13. Lapchick M.P., Ragulina M.I., Khenner E.K Numerical methods: student book. M.: Pub. Center “Akademiya”, 2004. -384 p.
14. Goschy B. Using the ultimate strength theory in design eccentrically loaded rectangular concrete columns, “Civil engineering and Public Works Review”, March 1961, v. 56, №656.
15. Viest J. M., Elstner R. C., Hognestad E., Sustained load strength of Eccentrically loaded short reinforced concrete columns, “Journal of the American Concrete Institute”, March, №7, 1956.

АНАЛИЗ ЗАВИСИМОСТИ ПРОГИБА ФЕРМЫ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ ОТ ЧИСЛА ПАНЕЛЕЙ

М. Н. Кирсанов¹

Национальный исследовательский университет "МЭИ

Россия, г. Москва

¹ Д-р физ.-мат. наук, проф., тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

Строится математическая модель пространственной статически определимой фермы с опорами по периметру сооружения. Получено аналитическое решение задачи о прогибе конструкции под действием равномерно распределенной и сосредоточенной нагрузки. Прогиб вычислен в системе Maple по формуле Максвелла-Мора. Для обобщения частных решений на общий случай используется метод индукции. Решение имеет полиномиальный по числу панелей характер. Найдены асимптотические свойства решения.

Ключевые слова: статически определимая ферма, покрытие, метод индукции, Maple, прогиб

ANALYSIS OF THE DEPENDENCE OF THE DEFLECTION OF THE RECTANGLE COVERING TRUSS ON THE NUMBER OF PANELS

M. N. Kirsanov¹

National Research University "MPEI",

Russia, Moscow

¹ Dr. Sci., Professor tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

A mathematical model of a statically defined spatial truss with supports along the perimeter of the structure is constructed. The analytical solutions of the problem of structural deflection under the action of uniformly distributed and concentrated load are obtained. The deflection is calculated in the Maple system by the Maxwell-Mohr formula. The induction method is used to generalize particular solutions to the General case. The solution is polynomial in the number of panels. Asymptotic properties of the solution are found.

Keywords: statically determinate farm, coating, method of induction, Maple, deflection

Не всегда в задачах строительной механики правомерны плоские модели пространственных конструкций. Если пространственное покрытие состоит из ряда плоских ферм, соединенных горизонтальными связями, то такое упрощенное решение вполне допустимо после аккуратного пересчета нагрузки, приложенной ко всей конструкции, на нагрузку к отдельной ферме. При этом, как правило, горизонтальные связи не несут нагрузку, и решение будет правомерно. Если для численных расчетов, основанных на методе конечных элементов [1-5], выбор модели (плоской или пространственной) не сильно влияет на сложность расчетов, то при выводе аналитических зависимостей моделирование и расчет пространственных конструкций принципиально сложнее [6,7].

Рассмотрим прямоугольную в плане конструкцию покрытия (рис. 1). Ферма состоит из отдельных ферм с раскосной решеткой с вертикальными опорными стержнями с шарнирным креплением в основаниях.

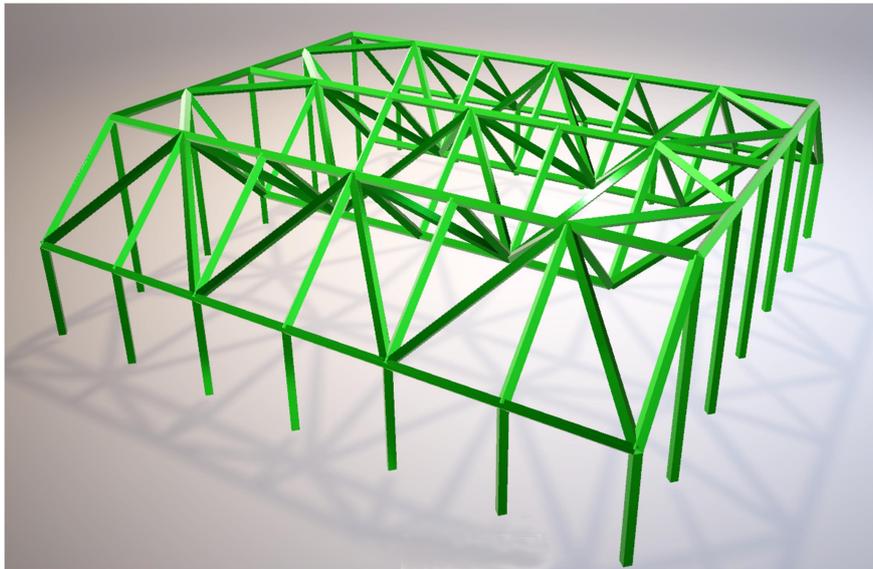


Рис. 1. Ферма при $m=n=3$

Еще три стержня в угловых точках нижнего контура предотвращают перемещения по горизонтали конструкции в целом. На рисунке 1 эти стержни не указаны, на рисунке 2 это угловые шарниры 1 и 3, на рисунке 3 — шарниры 1 и 9. В ферме условно выделяются панели по сторонам — $2n$ панелей длиной a по одной стороне и $2m$ длиной b по другой.

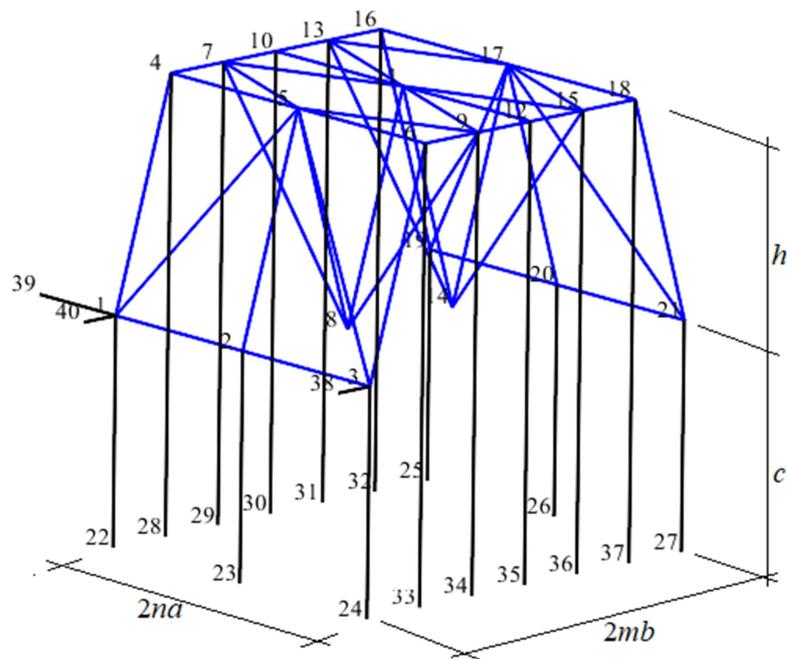


Рис. 2. Нумерация узлов при $m=3, n=1$

Всего в ферме $K = 12mn + 6(m + n) + 3$ стержней. Опорные стойки имеют длину c , общая высота покрытия $h+c$. Число стоек (они предполагаются жесткими) равно $4(n+m)$. Три угловые опорные стержня также жесткие, таким образом общее число опорных стержней $n_o = 4(n + m) + 3$. Раскосы фермы имеют длины $d = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2}$, $r = \sqrt{b^2 + h^2}$, $g = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $q = \sqrt{a^2 + h^2}$.

Рассмотрим действие на ферму сосредоточенной силы P , приложенной к центральному узлу покрытия при $m=3$ (рис. 3).

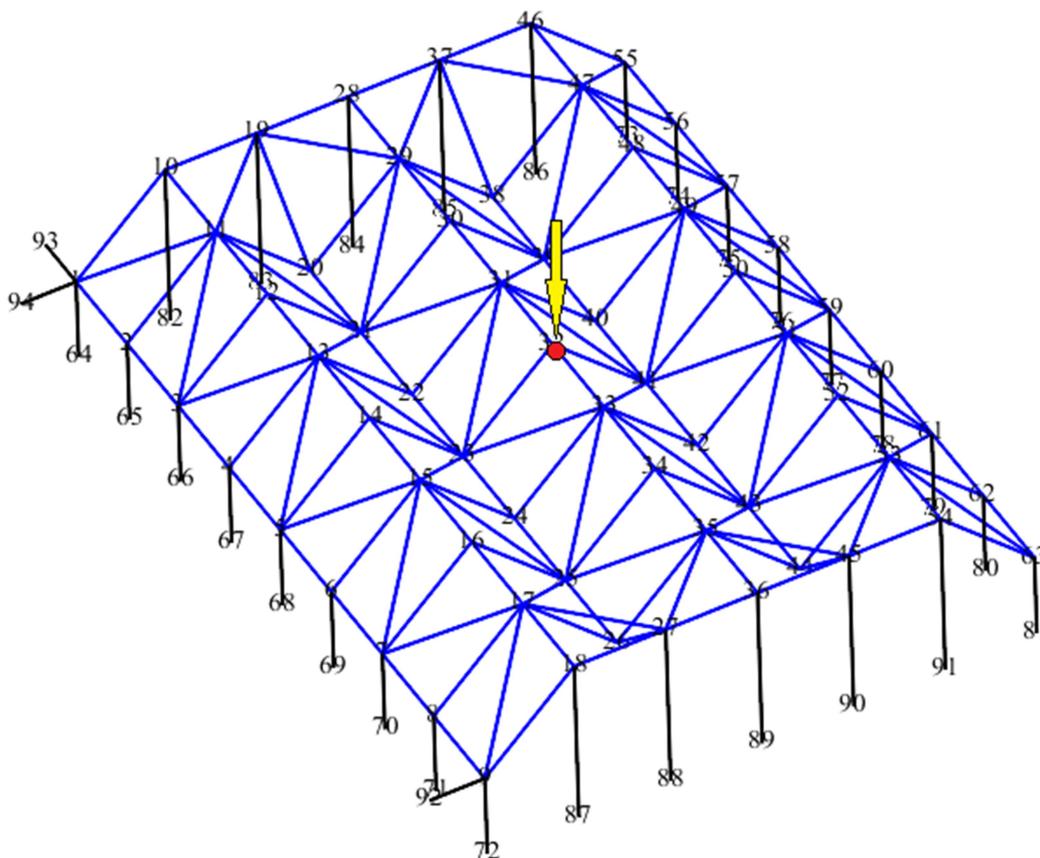


Рис. 3. Сосредоточенная нагрузка при $m=3, n=4$

Усилия в стержнях для вывода формулы прогиба необходимо определять также в формульном виде. В программе [8], записанной на языке системы компьютерной математики Maple, для определения усилий статически определимых ферм используется метод вырезания узлов. Прогиб фермы определяется по формуле Максвелла - Мора

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{K-n_0} (s_i^{(1)})^2 l_i / (EF).$$

Здесь обозначено: l_i — длины стержней, $s_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы P , E — модуль упругости, F — площадь сечения стержней. Все стержни имеют одинаковую жесткость EF .

В процессе расчета ферм с различным числом панелей n замечено, что выражение для прогиба имеет один и тот же вид

$$\Delta = \frac{P(A_n a^3 + B_n b^3 + D_n d^3 + Q_n q^3 + G_n g^3 + R_n r^3)}{4h^2 EF}. \quad (1)$$

Остается методом индукции [6,7] найти зависимость коэффициентов в этом выражении от числа n . При выявлении закономерности последовательности коэффициентов при коэффициенте a^3 потребовалось проанализировать 12 выражений и записать ряд целых чисел 46, 211, 484, 1021, 1738, 2863, 4240, 6169, 8422, 11371, 14716, 18901, 23554, 29191. Оператор **rgf_findrecur**, для работы которого требуется подключить специальный пакет **genfunc** системы Maple, дает следующее однородное линейное рекуррентное уравнение шестого порядка

$$A_n = 2A_{n-1} + A_{n-2} - 4A_{n-3} + A_{n-4} + 2A_{n-5} - A_{n-6}.$$

Решение полученного рекуррентного уравнения в виде полинома n , дает встроенный в систему оператор **rsolve**:

$$A_n = (2n^3 + 14n^2 + ((-1)^n + 59)n + 5(-1)^n - 67) / 2. \quad (2)$$

Другие коэффициенты определяются проще и имеют вид

$$D_n = n, \quad R_n = 4 + (-1)^n. \quad (3)$$

Три коэффициента не зависят от n

$$B_n = 26, \quad Q_n = 4, \quad G_n = 20. \quad (4)$$

Зависимость (1) с коэффициентами (2-4) дает решение поставленной задачи.

При $m=2$ имеем аналогичные выражения

$$A_n = (18n^3 - 12n^2 + 3(5 - 3(-1)^n)n + 6(-1)^n - 22) / 2.$$

$$D_n = 9n - 8, \quad R_n = 14 - 9(-1)^n.$$

$$B_n = 1, \quad Q_n = 8, \quad G_n = 4.$$

Рассмотрим пример. Зафиксируем длины сторон покрытия $L=2na=100$ м, $b=2$ м. Графики зависимости прогиба от числа панелей показывают, что с увеличением n безразмерный прогиб $\Delta' = EF\Delta / (PL)$ падает (рис. 4). Однако более точный анализ показывает, что на этих кривых имеется точка минимума. Это следует из положительного значения предела, указывающего на наличие наклонной асимптоты

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = r^3 / (4h^2 L). \quad (5)$$

Решение по предложенному алгоритму можно повторить и для случая распределенной нагрузки. Для вычисления прогиба используем формулу

$$\Delta = \sum_{i=1}^{K-n_0} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF),$$

где $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от вертикальной нагрузки P , равномерно распределенной по всем узлам фермы, кроме опорных.

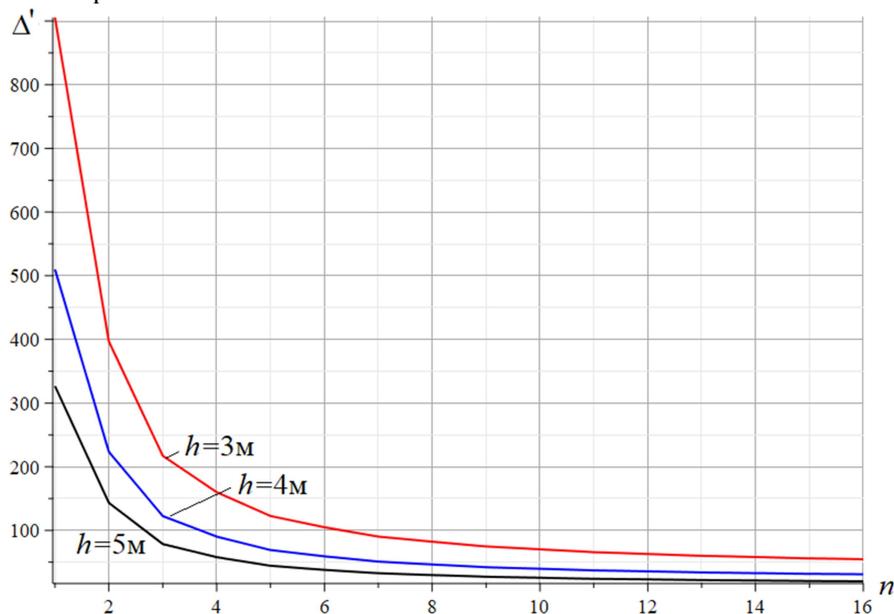


Рис. 4. Сосредоточенная нагрузка. Зависимость прогиба от числа панелей, $m=3$

Решение в этом случае при $m=2$ имеет тот же вид (1) с коэффициентами

$$A_n = (210n^4 - 144n^3 + 6(31 - 3(-1)^n)n^2 + 8(6(-1)^n - 47)n - 33(-1)^n + 161) / 72,$$

$$B_n = 5(2n - 1) / 18,$$

$$D_n = (18n^2 - 26n + 13) / 9,$$

$$Q_n = 16(2n - 1) / 9,$$

$$G_n = 8(2n - 1) / 9,$$

$$R_n = (26n - 16 - 9(-1)^n) / 9.$$

Примем суммарную нагрузку на покрытие в виде $P_{sum} = (2n + 1)(2m + 1)P$. Как и в предыдущем примере зададим длины сторон покрытия $L=2na=100$ м, $b=2$ м. Зависимость относительного прогиба $\Delta' = EF\Delta / (P_{sum}L)$ в этом случае иная (рис. 5). Прогиб растет, выходя на асимптоту с углом наклона

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta' / n = r^3 / (20h^2L).$$

Экстремальных точек на графике здесь нет. С увеличением высоты h , как и следовало ожидать, прогиб уменьшается.

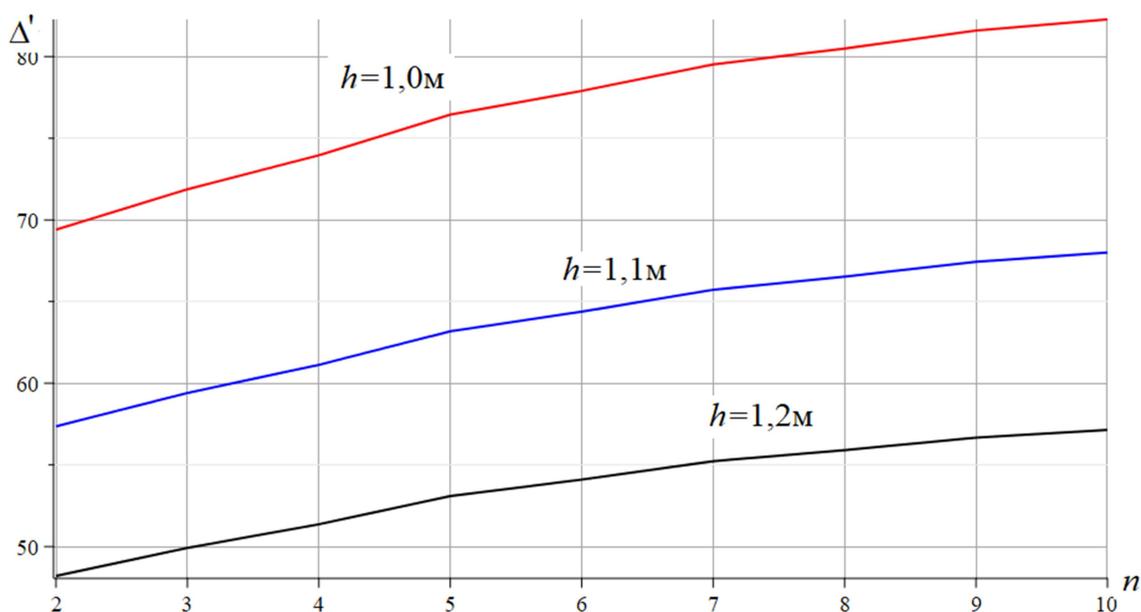


Рис. 5. Распределенная нагрузка. Зависимость прогиба от числа панелей при $m=2$

Обзоры работ, использующих метод индукции при выводе аналитических зависимостей прогиба плоских ферм от числа панелей содержатся в статьях [9-11].

Библиографический список

1. Марутян А.С., Павленко Ю.И. Приближенный расчет перекрестных систем на статические воздействия // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. № 4. С. 14–20.
2. Марутян А.С. Легкие металлоконструкции из перекрестных систем. Пятигорск : Изд-во РИА КМВ, 2009. 348 с.

3. Марутян А.С., Григорьян М.Б., Глухов С.А. Пространственные решетчатые несущие конструкции (модули типа «Пятигорск»-2) // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 1. С. 64–71.
4. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
5. Rumlova J., Fojtik R. The timber truss: The studying of the behaviour of the spatial framework joint // Perspectives in Science. March 2016. Vol. 7. Pp. 299–303.
6. Доманов Е.В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // Научный альманах. 2016. № 6–2 (19). С. 214–217.
7. Ершов Л.А. формулы для расчета деформаций пирамидального купола // Научный альманах. 2016. № 11–2 (25). С. 315–318
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба пространственного прямоугольного покрытия // Вестник МГСУ. 2018. Т. 13. Вып. 5 (116). С. 579–586. DOI: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
9. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал, 2015. №5(57). С. 66–73.
10. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
11. Осадченко Н.В. Расчёт прогиба плоской неразрезной статически определимой фермы с двумя пролётами // Постулат. 2017. № 12(26). С. 28.

References

1. Marutyanyan A.S., Pavlenko YU.I. Priblizhenny raschet perekrestnykh sistem na staticheskiye vozdeystviya. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2009. № 4. P. 14–20.
2. Marutyanyan A.S. legkiye metallokonstruktsii iz perekrestnykh sistem. Pyatigorsk : Izd-vo RIA KMV, 2009. 348 p.
3. Marutyanyan A.S., Grigor'yan M.B., Glukhov S.A. Prostranstvennyye reshetchatyye nesushchiye konstruktsii (moduli tipa «Pyatigorsk»-2). Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 2014. № 1. P. 64–71.
4. Zok F.W., Latture R.M., Begley M.R. Periodic truss structures. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2016. Vol. 96. Pp. 184–203.
5. Rumlova J., Fojtik R. The timber truss: The studying of the behaviour of the spatial framework joint. Perspectives in Science. March 2016. Vol. 7. Pp. 299–303.
6. Domanov Ye.V. Analiticheskaya zavisimost' progiba prostranstvennoy konsoli treugol'nogo profilya ot chisla paneley. Science Almanac. 2016. No. 6–2 (19). P. 214–217.
7. Yershov L.A. formuly dlya rascheta deformatsiy piramidal'nogo kupola. Science Almanac. 2016. № 11–2 (25). P. 315–318
8. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet progiba prostranstvennogo pryamougol'nogo pokrytiya. Vestnik MGSU. 2018. T. 13. Vyp. 5 (116). P. 579–586. DOI: www.dx.doi.org/10.22227/1997-0935.2018.5.579-586
9. Tin'kov D.V. Sravnitel'nyy analiz analiticheskikh resheniy zadachi o progibe fermennykh konstruktsiy. Inzhenerno-stroitel'nyy zhurnal, 2015. №5(57). S. 66–73.
10. Osadchenko N.V. Analiticheskiye resheniya zadach o progibe ploskikh ferm arochnogo tipa. Stroitel'naya mekhanika i konstruktsii. 2018. Vol.1. №16. P. 12–33.
11. Osadchenko N.V. Raschet progiba ploskoy nerazreznoy staticheski opredelimoj fermy s dvumya prolotami. Postulat. 2017. No. 12(26). P. 28.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ И НАТУРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНИЧЕСКИХ НЕКРУГОВЫХ ЖЁСТКО ЗАЩЕMLЁННЫХ СТЕРЖНЕЙ

В. А. Козлов¹

Воронежский государственный технический университет
Россия, г. Воронеж

¹Докт. физ.-мат. наук, зав. кафедрой строительной механики
тел.: +7(473)276-40-06 e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

В работе методом фотоупругости исследуется напряжённое состояние конического стержня прямоугольного поперечного сечения с жёстко заделанным основанием при действии сосредоточенного крутящего момента, приложенного на свободном торце сечения. Экспериментально полученные распределения нормальных и касательных напряжений по длине стержня представлены графически. Отмечен ярко выраженный краевой эффект в области жесткой заделки, обусловленный стеснением деформации, при этом нормальные напряжения в области заделки на порядок выше касательных.

Ключевые слова: метод фотоупругости, напряженно-деформированное состояние конического стержня прямоугольного поперечного сечения, краевой эффект

EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF CONICAL NON-CIRCULAR RIGIDLY CLAMPED RODS

V. A. Kozlov¹

*Voronezh State Technical University
Voronezh, Russia*

¹The doctor of physical and mathematical sciences, head of the Department of structural mechanics
tel.: +7(473)276-40-06 e-mail: vakozlov@vgasu.vrn.ru

In this paper, the photoelasticity method is used to study the stress state of a conical rod of rectangular cross-section with a rigidly sealed base under the action of concentrated torque applied at the free end of the section. The experimentally obtained distributions of normal and shear stresses along the length of the rod are presented graphically. A pronounced edge effect in the area of rigid sealing due to tightness of the deposition is noted, while the normal stresses in the region of sealing are much higher than the tangents.

Keywords: photoelasticity method, stress-strain state of conical rod of rectangular cross-section, edge effect

Среди многочисленных технических задач, возникающих при конструировании машин и проектировании инженерных сооружений, важное место занимают расчёты на стеснённое кручение стержней постоянного сечения [1]. Однако степень разработки проблемы, связанной с расчётом стержней некругового очертания и переменным сечением по длине, ещё в значительной степени отстаёт от запросов инженерной практики. Объясняется это сложностью применяемого математического аппарата трёхмерной теории упругости. Поэтому теоретические расчёты в ответственных случаях проверяются экспериментальными исследованиями и натурными испытаниями сооружений.

© Козлов В. А., 2018

В настоящей работе поляризационно-оптическим методом [2] исследуется напряженно-деформированное состояние стержня переменного сечения (рис.1), жестко зашпемлённого по концевому сечению. Стеснение депланации в поперечных сечениях таких стержней обусловлено как вследствие заделки опорного контура, так и наличием коничности. В последнем случае в каждом из поперечных сечений стержня способность к депланации различна. Но по условию совместности деформаций сечения должны иметь одни и те же депланации.

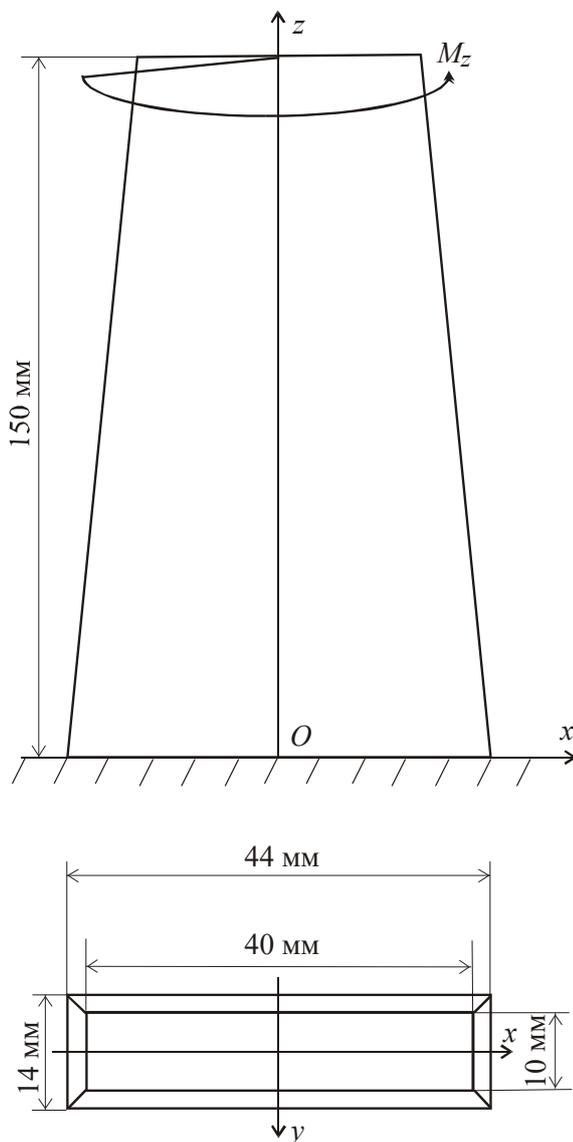


Рис. 1. Геометрические размеры модели конического стержня

В качестве методики исследования принят метод «замораживания». Сущность этого метода состоит в том, что деформации, а, следовательно, и напряжения, возникающие при нагружении модели из специального полимера, когда он находится в высокоэластичном состоянии, сохраняются при охлаждении модели до температуры стеклования и снятии приложенной нагрузки.

В качестве материала для изготовления моделей использовалась эпоксидная смола марки ЭД-22. Заготовки обрабатывались на фрезерном станке при интенсивном охлаждении,

чтобы в образцах не возникли температурные напряжения. Затем модель приклеивалась с помощью эпоксидной смолы на массивное основание, нагружалась в специальном устройстве сосредоточенным крутящим моментом и помещалась в термошкаф. Температурный график нагрева модели до высокоэластичного состояния с последующим охлаждением обеспечил постоянную температуру во всём объёме испытуемого образца, что исключает появление температурных напряжений.

«Замороженная» модель разрезалась на отдельные слои (срезы) толщиной 2,5 мм перпендикулярно продольной оси z . Разрезка производилась алмазными фрезами в режиме с охлаждением, исключающем нагрев модели и появление в ней остаточных напряжений. Необходимые значения параметров изоклин α и разности хода δ определялись на приборе КСП-7 методом компенсации Сенармона.

Оптическая схема в координатно-синхронном поляриметре (КСП) по методу Сенармона состоит из поляризатора, пластины в четверть волны и анализатора. При этом оси пластины в четверть волны совпадают с крестом поляризации, для которого одна из осей параллельна оси поляризатора, а вторая – оси анализатора. Независимо от остальных элементов оптической схемы анализатор может поворачиваться на некоторый угол Ψ по отношению к перпендикулярному с поляризатором положению. Всегда можно подобрать угол Ψ , при котором интенсивность света станет равна нулю, при этом

$$\Psi = \frac{\Delta\alpha}{2} \pm \pi n, \quad (1)$$

где α – разность фаз колебаний вдоль главных направлений исследуемой модели.

Последовательность определения этого угла следующая.

1. В модели (исследуемая пластина или срез из объемной модели) определяются направления главных напряжений σ_1 и σ_2 . Определяя направление наибольшего главного напряжения σ_1 , наблюдают движение полос при вращении анализатора до полного затемнения. В зависимости от того, какое из направлений главных напряжений в модели параллельно плоскости пропускания поляризатора, полосы могут смещаться в сторону более низких или более высоких порядков.
2. Модель помещается между поляризатором и пластиной в четверть волны, которая не выводится из оптической системы, так как ее ось совпадает с плоскостью пропускания поляризатора.
3. Вся оптическая система устанавливается синхронным поворотом осей под углом 45° по отношению к направлению главных напряжений.
4. Вращая лишь анализатор, получают темноту. Полученный угол поворота анализатора связан с угловой разностью фаз равенством

$$\pm 2\Psi = \Delta\alpha \pm 2\pi n. \quad (2)$$

Непосредственно на приборе измеряется только дробная часть разности хода. Для определения целого значения n разности хода приводимые измерения сочетают с предварительным определением целых порядков полос, или проводят измерения при двух монохроматических источниках света. Изложенная схема подтверждает трудоемкость метода компенсации Сенармона, но она обеспечивает высокую точность измерения оптической разности хода.

Что касается непосредственно определения напряжений в модели, то при нормальном просвечивании среза (вдоль оси z) можно определить разность нормальных напряжений $\sigma_x - \sigma_y$ и касательные напряжения τ_{xy} :

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_y &= \frac{\delta_z}{C_\sigma h} \cos 2\alpha_z, \\ \tau_{xy} &= \frac{\delta_z}{2C_\sigma h} \sin 2\alpha_z,\end{aligned}\tag{3}$$

где h – толщина срезов; $C_\sigma = 10^{-7}$ см²/кг – оптический коэффициент напряжений.

При наклонном просвечивании по взаимно перпендикулярным осям z_1 и z_2 , проведённым под углом 45° к оси z , определяются

$$\begin{aligned}\sigma_y - \sigma_2 &= \frac{\delta_1}{\sqrt{2}hC_\sigma} \cos 2\alpha_1, \\ \tau_{y2} &= \frac{\delta_1}{2\sqrt{2}hC_\sigma} \sin 2\alpha_1, \\ \sigma_y - \sigma_1 &= \frac{\delta_2}{\sqrt{2}hC_\sigma} \cos 2\alpha_2, \\ \tau_{y1} &= \frac{\delta_2}{2\sqrt{2}hC_\sigma} \sin 2\alpha_2,\end{aligned}\tag{4}$$

Величины (3), (4) позволяют подсчитать значения

$$\begin{aligned}\sigma_x - \sigma_y &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_2) - \tau_{12}, \\ \sigma_y - \sigma_z &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_y) - \tau_{12},\end{aligned}\tag{5}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z - \sigma_x &= 2\tau_{12}, \quad \tau_{yz} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\tau_{y1} + \tau_{y2}), \\ \tau_{xy} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\tau_{y1} - \tau_{y2}), \quad \tau_{xz} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.\end{aligned}\tag{6}$$

Разделение нормальных напряжений, входящих в (5), (6), выполнено численным интегрированием уравнений равновесия пространственной задачи. При этом приращения касательных напряжений получены с помощью нормального и наклонного просвечивания основного и косоуго просвечивания вспомогательного, соседнего с основным, срезов.

$$\bar{\sigma}_z \cdot 10^{-6}$$

По результатам эксперимента построен ряд графиков нормальных и касательных напряжений в различных сечениях стержня. В качестве примера на рис. 2 показано распределение безразмерных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_z = \sigma_z \cdot C_\sigma$, а на рис. 3 – безразмерных касательных напряжений $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \cdot C_\sigma$ в зависимости от безразмерной продольной координаты $\bar{z} = z/l$ (l – длина стержня).

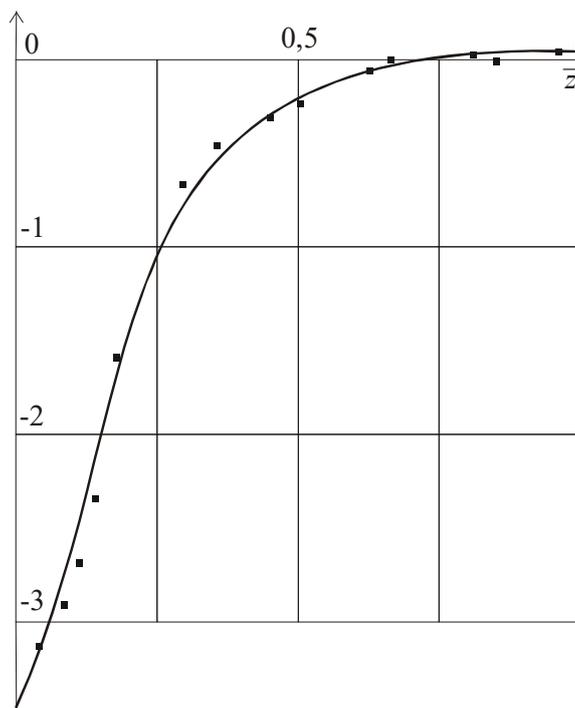


Рис. 2. Распределение по длине стержня нормальных напряжений $\bar{\tau}_{xy} \cdot 10^{-7}$

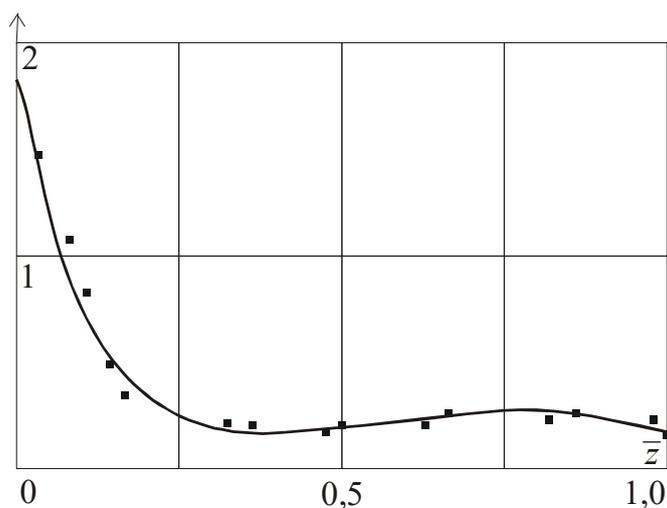


Рис. 3. Распределение по длине стержня касательных напряжений

Для нормальных напряжений (см. рис. 2) в области заделки наблюдается ярко выраженный краевой эффект, вызванный стеснением деформации. Касательные напряжения также имеют наибольшее значение в области заделки (см. рис. 3), а затем равномерно распределяются по длине модели, несколько возрастая к свободному концу. Последнее, видимо, вызвано уменьшением живого поперечного сечения стержня в силу его коничности.

В заключение отметим, что нормальные напряжения в области заделки на порядок выше касательных. Стеснённый изгиб конического стержня рассмотрен в работе [3]. Полученные результаты будут полезны при проектировании строительных конструкций, содержащих трёхмерные жёстко закреплённые стержневые элементы.

Библиографический список

1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел/ Н. Х. Арутюнян, Б. Л. Абрамян. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. – 686 с.
2. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений: справочное пособие. – Киев: Наукова думка, 1981. – 583 с.
3. Булатов С. Н. Исследование методом фотоупругости консольных конических стержней сложного очертания/ С. Н. Булатов, В. А. Козлов// Тез. докл. всесоюз. научно-техн. совещания «Экспериментальные исследования и испытания строительных металлоконструкций». – Львов, 1987. – С.133.

References

1. Harutyunyan N. H., Abramyan B. L. Torsion of elastic bodies. – M.: State publishing house of physical and mathematical literature, 1963. – 686 p.
2. Experimental methods of strain and stress research: Reference book. – Kiev: Naukova Dumka, 1981. – 583 p.
3. Bulatov S. N., Kozlov V. A. Research by the method of photoelasticity of cantilever conical rods of complex shape / Abstracts of the all-Union scientific and technical meeting «Experimental researches and testing of steel structures». – Lvov, 1987. – P. 133.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.21:533.6; 699.83

РАСЧЕТ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ МОСТОВ С УЧЕТОМ СДВИГА ПЛИТЫ ПО ВЕРХНЕМУ ПОЯСУ БАЛКИ

А. В. Козлов¹

Воронежский государственный технический университет
Россия, г. Воронеж

¹Доц. кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов
тел.: +7(473)271-52-02 e-mail: kozlov.a.v@inbox.ru

Описывается расчет сталежелезобетонного пролетного строения моста методом конечных элементов с учетом податливости стыка железобетонной плиты по верхнему поясу стальной балки в пределах определения «неподатливого соединения». Приведены алгоритмы расчета поперечных сечений без допущений об абсолютной жесткости поперечного сечения, т.е. в обход гипотезы плоских сечений, что повышает точность определения напряжений в различных элементах пролетного строения. Анализ расчетной схемы при расчете на равномерно-распределенную нагрузку от собственного веса показал, что учет гибкости анкеров в пределах определения «неподатливого соединения» приводит к значительному перераспределению усилий между железобетонной плитой и верхним поясом стальной балки.

Ключевые слова: сталежелезобетонные мосты, напряженно-деформированное состояние мостовых конструкций

STRUCTURAL ANALYSIS OF STEEL- CONCRETE COMPOSITE BRIDGES WITH ACCOUNT OF SLAB SHIFT ON THE UPPER BEAM CHORD

A. V. Kozlov¹

Voronezh State Technical University
Voronezh, Russia

¹Associate professor of the department of roads and bridges designing
tel.: +7(473)271-52-02 e-mail: kozlov.a.v@inbox.ru

The design of steel-concrete bridge span is described by the method of finite elements with account of reinforced concrete slab suppleness butt on steel beam upper chord within the definition of a “non-compliant connection”. There are given the algorithms of calculation of cross profiles without the assumption about absolute rigidity of cross profiles that is without the hypotheses of flat profiles, which increases the accuracy of stresses in different span components. The analysis of the design scheme while calculating evenly distributed load from proper weight shows that tie bolt flexibility accounting within the definition of “non-compliant connection” leads to the significant forces redistribution between reinforced concrete slab and upper steel beam chord.

Keywords: steel-concrete composite bridges, deflected model of bridge structures

Постановка задачи. С началом применения сталежелезобетонных конструкций в мостостроении одним из вопросов по работе сталежелезобетонных мостов стал учет влияния сдвига между железобетонными и стальными конструктивными элементами таких сооружений на распределение силовых факторов в объединенной балке. В работе [1] при анализе экспериментально-теоретических исследований, проводимых в этом направлении, отмечаются

© Козлов А. В., 2018

значительные расхождения значений жесткости, полученных различными авторами, для связующих элементов стальной и железобетонной частей поперечного сечения конструкции. Из результатов испытаний временной нагрузкой натуральных пролетных строений автор делает вывод о малом влиянии соединительных швов на работу сталежелезобетонных конструкций в целом. В связи с этим в действующих в настоящее время российских строительных нормативных документах применяются расчетные формулы, не учитывающие сдвиг в месте контакта стальной балки и железобетонной плиты, и при действии вертикальных нагрузок для эпюры относительных деформаций принята справедливой гипотеза плоских сечений, в соответствии с которой сечения, нормальные к продольной оси элемента, остаются плоскими после деформирования элемента. В работе [2] сделано предположение, что сдвиговые смещения, включающие остаточные и неупругие деформации, деформации ползучести, вносят существенный вклад в распределение напряженно-деформированного состояния рассматриваемых конструкций под действием постоянной нагрузки. При этом под действием временной нагрузки конструкция работает как упругая с малыми сдвиговыми смещениями и значительной сдвиговой жесткостью шва между плитой и балкой. В соответствии с положениями теории составных стержней Ржаницына А.Р. сталежелезобетонное пролетное строение рассматривается как составной стержень под воздействием постоянной нагрузки и усадки бетона. В такой постановке получение аналитического решения с учетом действия постоянных и подвижных временных нагрузок, температур, усадки бетона затруднительно в связи с возникающими сложностями при выборе граничных условий, условий сопряжения, а также при назначении жесткостных характеристик в зоне контакта составного стержня при различных направлениях действия усилий.

Наряду с аналитическими решениями еще на ранней стадии рассмотрения проблемы были предложены и численные подходы [3], реализующие метод Вулфа на одном из алгоритмических языков того времени. В настоящее время в связи с бурным развитием вычислительной техники и сопутствующего программного обеспечения численные решения сложных технических задач занимают доминирующее положение в научных исследованиях, в ряде случаев уточняя аналитические, так как не используют гипотезы и предположения, которые принимаются с целью получения конечных аналитических формул. В предлагаемой работе представлен численный алгоритм расчета сталежелезобетонных двутавровых балок без допущений об абсолютной жесткости поперечного сечения, то есть без учета гипотезы плоских сечений, что повышает точность определения напряженно-деформированного состояния (НДС) в различных элементах конструкции.

На рис. 1 показана общая схема деформирования сталежелезобетонной балки по гипотезе плоских сечений и с учетом проскальзывания (сдвига) железобетонной плиты. С учетом гипотезы плоских сечений балка изгибается с радиусом R , измеряемым от центра изгиба до нейтральной линии 1-1. В любой части балки нормальное сечение принимается абсолютно жестким. В данной статье принято, что железобетонная плита изгибается по своему радиусу $R_{жб}$, металлическая балка – по радиусу $R_{металл}$, при этом центры изгиба плиты и балки находятся в разных точках. В результате происходит сдвиг плиты по металлической балке, равный нулю в середине пролета и максимальный по краям балки.

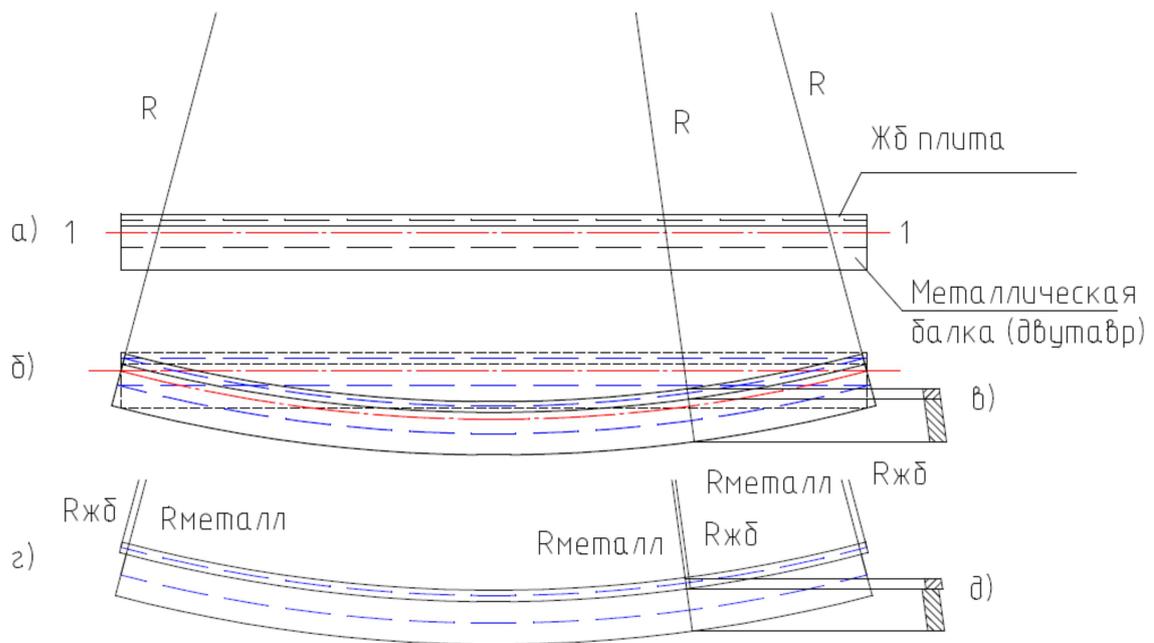


Рис. 1. Деформированная схема балки:

- а) – исходная схема (ось 1-1 – нейтральная линия общего сталежелезобетонного сечения);
- б), в) – деформированная схема по гипотезе плоских сечений;
- г), д) – принятая в настоящей работе схема.

Расчетная схема. Расчеты сталежелезобетонной балки выполняются методом конечных элементов (МКЭ) в лицензионном программном комплексе ЛИРА-САПР. В качестве расчетной модели принята однопролетная шарнирно-опертая балка, состоящая из сварного двутавра со сплошной стенкой и смонтированной на верхнем поясе железобетонной плиты. Принятые характеристики материалов: бетон В25, $E=3,06 \cdot 10^6$ т/м², $\nu=0,2$; сталь 10ХСНД, $E=2,1 \cdot 10^7$ т/м², $\nu=0,3$. Конечно-элементная схема поперечного сечения представлена на рис. 2.

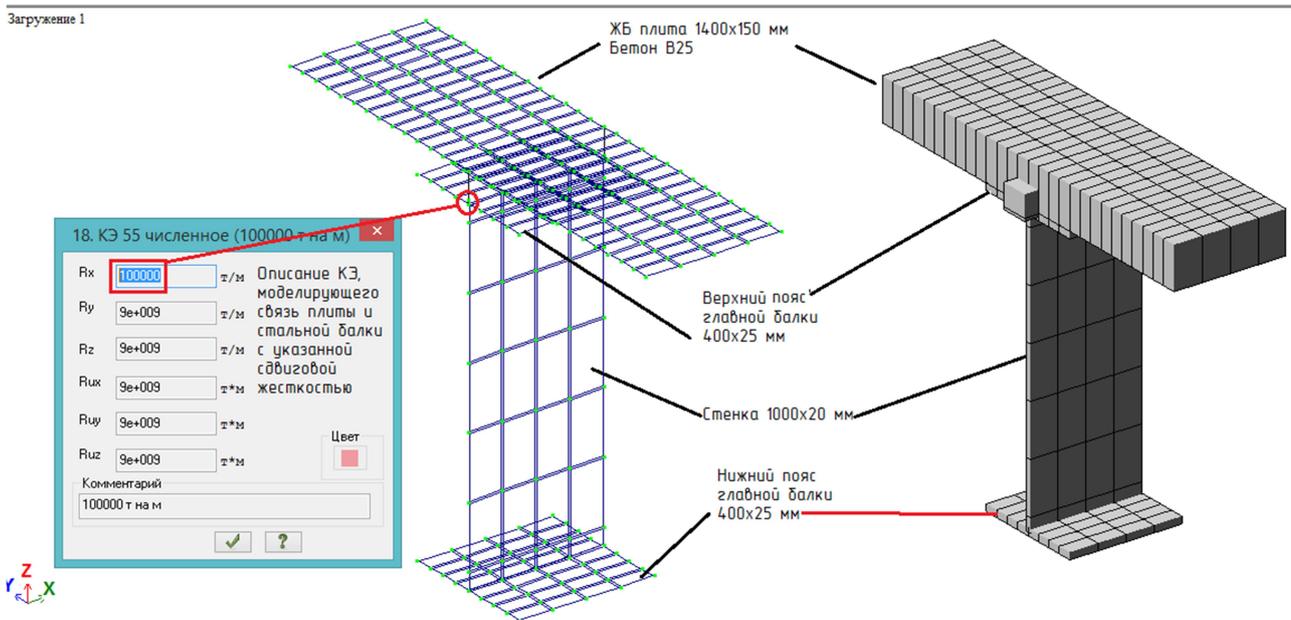


Рис. 2. Фрагмент конечно-элементной модели балки длиной 24 м.

Моделирование сдвиговой жесткости соединительных элементов. Моделирование соединительных элементов (анкеров) выполнено в линейной постановке, то есть в предположении их упругой работы на сдвиг без достижения несущей способности и пластических деформаций. Диапазон значений сдвиговых жесткостей подобран таким образом, чтобы на примере приведенной конечно-элементной модели (рис. 2) можно было составить наглядные зависимости напряжений и перемещений от этих жесткостей.

В расчетной схеме анкеры расставлены с шагом 0,4 м вдоль длины балки и смоделированы с помощью специальных КЭ 55, описываемых коэффициентами жесткости по шести степеням свободы (3 линейных и 3 угловых). Продольная ось балки располагается вдоль оси X, поэтому вариации сдвиговой жесткости моделируются только по этой степени свободы (R_x , рис.2). По остальным степеням свободы коэффициенты жесткости задаются бесконечно большими ($9 \cdot 10^9$ т/м).

Экспериментальные значения сдвиговой жесткости самых распространенных в настоящее время конструкций объединения железобетонной плиты со стальными балками (гибких стержневых упоров) представлены в диссертации [4]. Для одного соединительного элемента с диаметром стержня $d_s=14$ мм на стадии упругих деформаций сдвиговая жесткость составляет примерно $8,1 \text{ кН}/100 \text{ мкм} = 81 \text{ кН}/\text{мм} = 8,25 \text{ т}/\text{мм} = 8250 \text{ т}/\text{м}$. Гибкие стержневые анкеры устанавливаются на верхнем поясе балки обычно в количестве от 9 до 16 шт. на погонный метр длины пояса. Соответственно, погонная сдвиговая жесткость такого стыка находится в интервале от 74250 т/м до 132000 т/м.

При выполнении данной работы произведено варьирование жесткости соединения таким образом, чтобы получить наглядную сводную таблицу зависимости напряжений и перемещений от погонной сдвиговой жесткости стыков расчетной модели, представленную ниже. Интервал сдвиговой жесткости реальных конструкций, указанный выше, выделен цветом.

Таблица

Зависимость НДС балки от жесткости соединения

погонная сдвиговая жесткость стыка, т/м ²	проскальзывание ЖБ плиты по стальной балке на торце, мм	прогиб балки в середине пролета, мм	сжимающее напряжение в верхнем поясе стальной балки, т/м ²	сжимающее напряжение в ЖБ плите, т/м ²	растягивающее напряжение в нижнем поясе стальной балки, т/м ²
250	16,49	223,42	38500	152	40100
750	14,41	211,35	35000	400	39200
1250	12,79	201,97	32300	592	38500
2500	9,98	185,65	27600	926	37200
3000	9,17	180,95	26300	1020	36900
5000	6,9	167,86	22500	1290	35900
12500	3,54	148,38	17000	1680	34400
25000	1,91	138,93	14400	1870	33700
75000	1,12	134,3	13150	1955	33400
125000	0,337	129,67	11900	2040	33100
250000	0,146	128,38	11600	2070	33000

Анализ данных таблицы показывает, что в пределах границ значений сдвиговой жесткости соединения с наиболее часто применяемыми конструктивными решениями, учет этой жесткости в расчетной модели позволяет получить осязательное перераспределение напряжений и перемещений:

- прогиб балки – в пределах 3,5 %;
- сжимающее напряжение в верхнем поясе – в пределах 10,5 %;
- сжимающее напряжение в плите - в пределах 4 %;
- растягивающее напряжение в нижнем поясе - в пределах 1 %.

При этом наибольшее перераспределение напряжений происходит в верхнем сжатом поясе стальной балки.

Численные результаты. Ниже представлены графики зависимости НДС рассматриваемой конструкции от сдвиговой жесткости соединения (ось абсцисс – погонная жесткость соединения, т/м^2). На всех графиках указано граничное значение между податливым и неподатливым соединением (прямолинейный отрезок) согласно Еврокод EN 1994-2:2006-07 и идентичному ему техническому кодексу [5].

На рис. 3 представлена зависимость максимальной величины проскальзывания (взаимного сдвига на торце шарнирно опертой однопролетной балки длиной 24 м) железобетонной плиты по верхнему поясу от погонной сдвиговой жесткости соединения. Прямым отрезком обозначена граница характеристической амплитуды проскальзывания согласно Еврокоду [5]: более 6 мм соединение считается податливым, а менее – неподатливым. На пересечении этого отрезка с кривой зависимости проскальзывания от жесткости стыка находится граничное значение погонной сдвиговой жесткости для рассматриваемой конструкции (7009 т/м^2), ниже которой соединение будет считаться податливым в соответствии с [5].

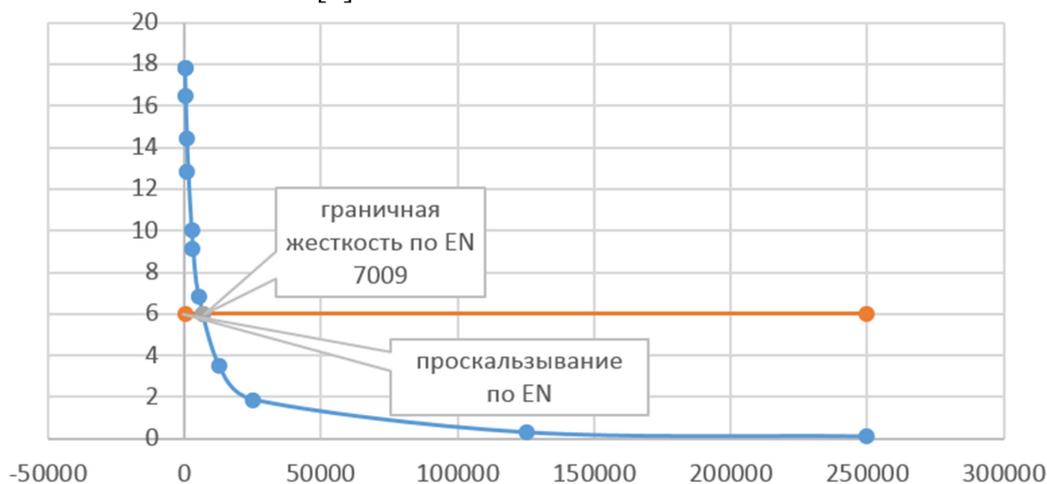


Рис. 3. Максимальное проскальзывание ж/б плиты (ось ординат – проскальзывание плиты по верхнему поясу балки, мм)

На рис. 4 – 7 в середине пролета отображены зависимости прогиба балки, а также сжимающие и растягивающие напряжения (абсолютные значения) в конструктивных элементах в зависимости от погонной сдвиговой жесткости соединения.

Еврокод EN 1994-2:2006-07 и идентичный ему технический кодекс [5] дает следующее определение податливости сдвигового соединения между бетонными и стальными элементами: «Соединительный элемент может считаться податливым, если его характеристическая амплитуда проскальзывания δ_{uk} составляет не менее 6 мм» (п. 6.6.1.1 [5]). Из этого определения следует, что жестким (неподатливым) соединением является такое, в котором проскальзывание не превышает 6 мм.

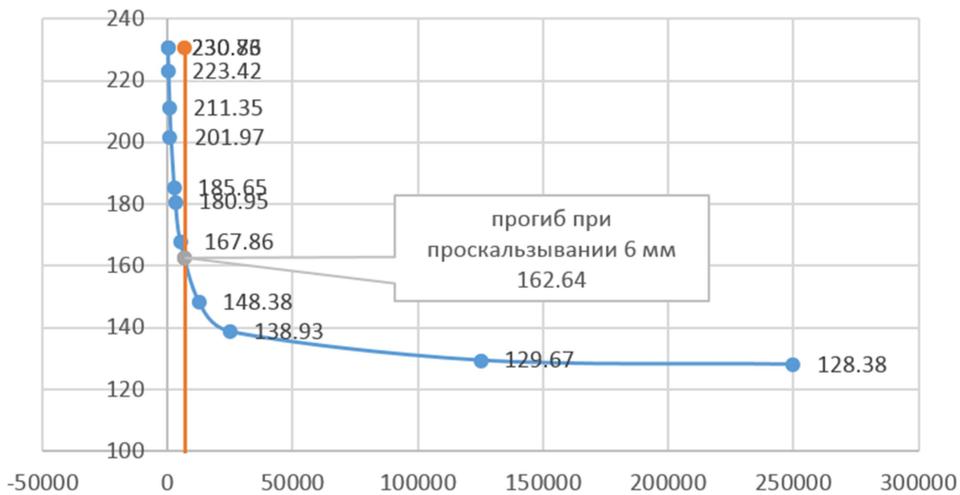


Рис. 4. Прогиб балки
(ось ординат – прогиб в середине пролета, мм)

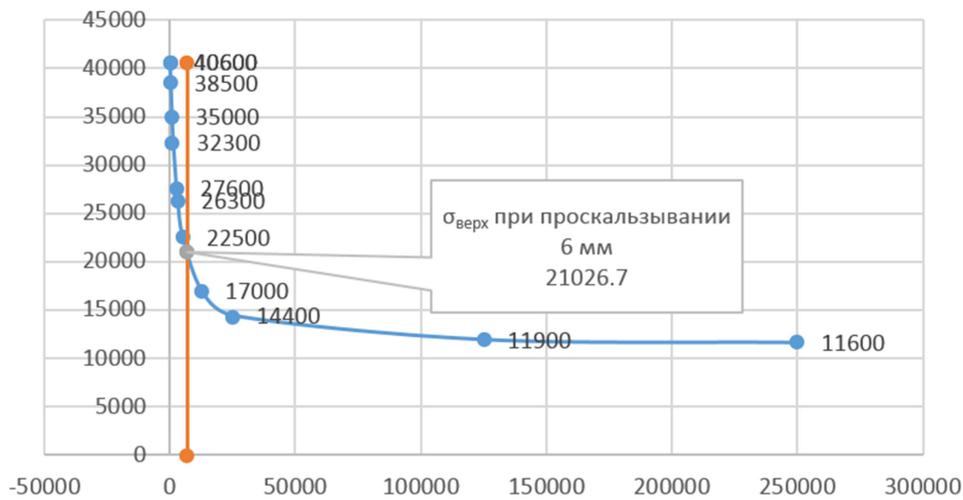


Рис. 5. Нормальные сжимающие напряжения в верхнем поясе стальной балки
(ось ординат – напряжения, т/м²)

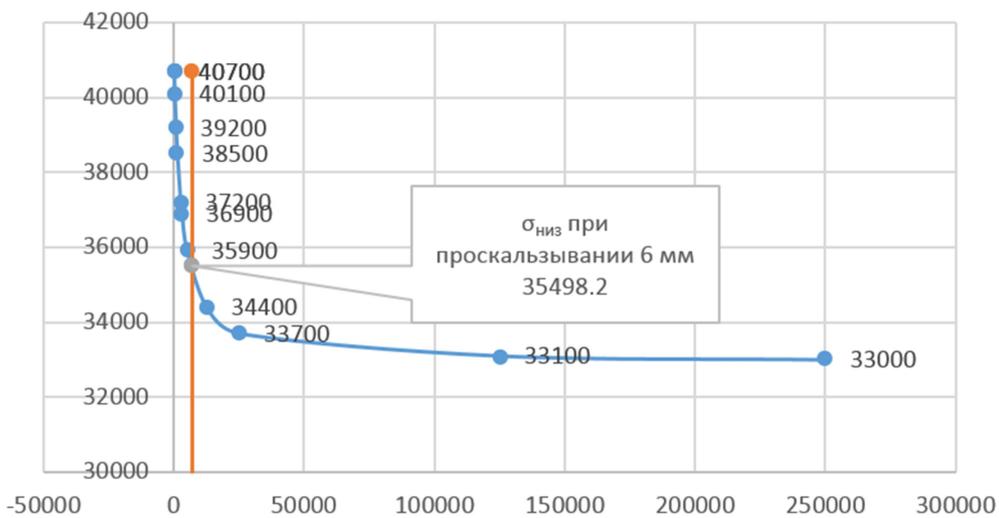


Рис. 6. Нормальные растягивающие напряжения в нижнем поясе стальной балки
(ось ординат – напряжения, т/м²)

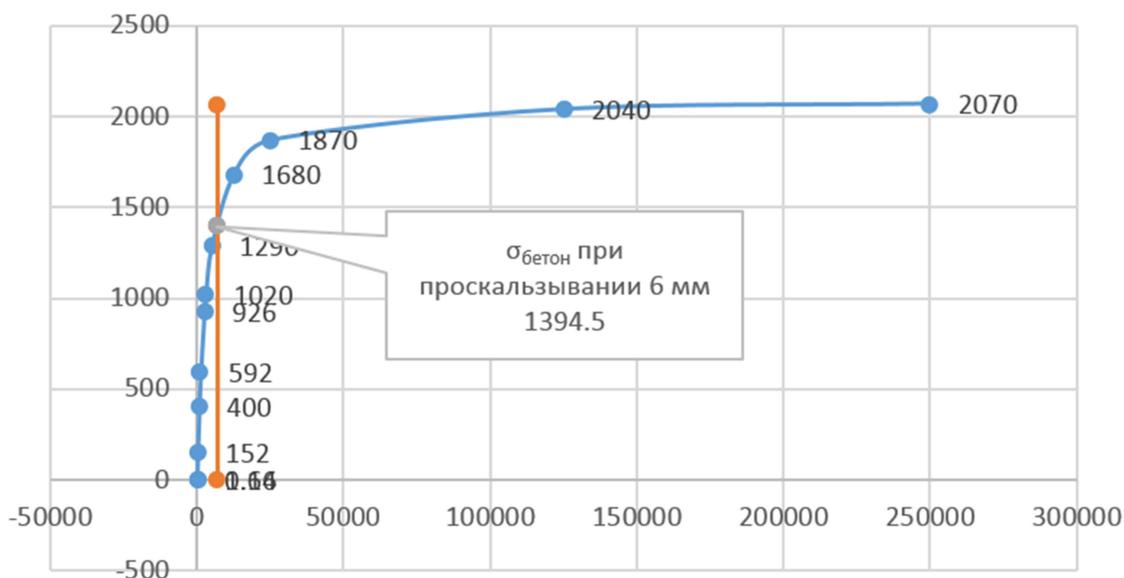


Рис. 7. Нормальные сжимающие напряжения в железобетонной плите (ось ординат – напряжения, т/м²)

Анализ приведенных графических зависимостей, показывает, что максимальная величина взаимного сдвига железобетонной плиты и верхнего пояса на торцах балки длиной 24 м, имеющая значение 6 мм (обозначена как граничное значение между податливым и неподатливым соединением согласно [5]) вызывает следующие приращения напряжений и перемещений относительно абсолютно жесткого соединения:

- приращение прогиба балки в середине пролета – с 128,4 мм до 167,6 мм (+30,5%);
- приращение абсолютного значения нормальных напряжений в верхнем поясе стальной балки в середине пролета – с 11600 т/м² до 21027 т/м² (+81,3%);
- приращение абсолютного значения нормальных напряжений в нижнем поясе стальной балки в середине пролета – с 33000 т/м² до 35498 т/м² (+7,6%);
- падение абсолютного значения нормальных напряжений в сжатой плите в середине пролета – с 2070 т/м² до 1394,5 т/м² (-32,6%).

Выводы

Результаты численных экспериментов свидетельствуют о том, что при допущении граничного значения проскальзывания (6 мм) между стальной балкой и железобетонной плитой сталежелезобетонных пролетов мостовых сооружений происходит значительное перераспределение напряжений между балкой и плитой: первая ощутимо перегружается (особенно верхний пояс) и получает дополнительный прогиб, вторая наоборот, разгружается. При этом даже небольшие значения проскальзывания (до 1 - 2 миллиметров по краям балки) приводят к значительному перераспределению усилий между железобетонной плитой (в ней усилия уменьшаются) и верхним поясом двутавровой стальной балки (в нем усилия увеличиваются). Следовательно, в реальном проектировании сталежелезобетонных пролетных строений мостов необходим учет сдвиговой податливости между стальной балкой и железобетонной плитой проезжей части.

Библиографический список

1. Стрелецкий Н. Н. Сталежелезобетонные пролетные строения мостов/Н. Н. Стрелецкий. – М.: Транспорт, 1981. – 360 с.
2. Белуцкий И. Ю. Совершенствование методов оценки работоспособности эксплуатируемых сталежелезобетонных пролетных строений/ И. Ю. Белуцкий. – Владивосток: Дальнаука, 2003.– 281 с.
3. Перельмутер А. В. Использование методов квадратичного программирования для расчета систем с односторонними связями/ А. В. Перельмутер // Исследования по теории сооружений. – М.: Стройиздат, 1972. № 19. – С. 138-147.
4. Решетников В. Г. Новые эффективные конструкции сталежелезобетонных пролетных строений мостов: дис. ... канд. техн. наук / В. Г. Решетников. – М., 2002.
5. Технический кодекс установившейся практики ТКП EN 1994-2-2009 (02250) Еврокод 4. Проектирование сталежелезобетонных конструкций. Часть 2. Основные принципы и правила для мостов/ Министерство архитектуры и строительства Республики Беларусь. - Минск, 2010.
6. El Sarraf R. D., Iles A., Momtahan D. Easey and S Hicks (2013). Steel-concrete composite bridge design guide. NZ Transport Agency research report 525. 252 pp.
7. KICT (Korea Institute of Construction Technology). (2004). Development of steel-concrete composite deck for highway bridges (in Korean), Report No. KICT 2004-053.
8. Oguejiofor E.C. and Hosain M.U. (1992). “Behavior of perfobond ribshear connectors in composite beams: full-size tests.” Canadian J. of Civil Engineering, 19, pp. 224-235.
9. Valente I. & Cruz, P.J.S. (2004). “Experimental analysis of perfobond shear connection between steel and lightweight concrete.” J. Constructional Steel Research, 60, pp. 465-479.

References

1. Streletskij, N.N. Steel-reinforced concrete bridges span structures – M.: Transport, 1981. – 360 p.
2. Belutsky I.Yu. The development of assessment methods of operational integrity of operated steel reinforced concrete spans. – Vladivostok: Dalnauka, 2003. – 281 p.
3. Perelmuter A.V. The use of quadratic programming methods for t calculation of systems with one-way connections. Theory of structures Research. – M.: Stroyizdat, 1972. № 19. –138-147p.
4. Reshetnikov V.G. New effective structures of steel-reinforced concrete span structures of bridges. – Thesis of PhD of Tech. Sc. M., 2002.
5. Technical code of established practice of tap EN 1994-2-2009 (02250) Eurocode 4. Design of steel-reinforced concrete structures. Part 2. Basic principles and regulations for bridges. – Ministry of architecture and construction of the Republic of Belarus, Minsk, 2010.
6. El Sarraf R. D., Iles A., Momtahan D. Easey and S Hicks (2013). Steel-concrete composite bridge design guide. NZ Transport Agency research report 525. 252 p.
7. KICT (Korea Institute of Construction Technology). (2004). Development of steel-concrete composite deck for highway bridges (in Korean), Report No. KICT 2004-053.
8. Oguejiofor E.C. and Hosain M.U. (1992). “Behavior of perfobond ribshear connectors in composite beams: full-size tests.” Canadian J. of Civil Engineering, 19, 224-235p.
9. Valente I. & Cruz, P.J.S. (2004). “Experimental analysis of perfobond shear connection between steel and lightweight concrete.” J. Constructional Steel Research, 60, 465-479p.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.26

НАДЕЖНОСТЬ ДЛИТЕЛЬНО ЭКСПЛУАТИРУЕМОГО МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ ЗДАНИЯ С КРОВЕЛЬНЫМИ СЭНДВИЧ-ПАНЕЛЯМИ

В. С. Сафронов¹, Нтахизанийе Мельхиор²
Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 2715230, e-mail: yss22@mail.ru

²Магистрант кафедры строительной механики

Предлагается и апробируется на реальном объекте методика расчета надежности длительно эксплуатируемого металлического покрытия одноэтажного производственного здания с несущими балочными фермами и кровельными сэндвич-панелями. Количественные параметры надежности несущей системы пространственного покрытия определяются по вероятностным показателям отказа наиболее нагруженных элементов покрытия, а также характерных сечений сэндвич-панелей в зависимости от разброса прочностных характеристик материалов с учетом появившихся повреждений после длительной эксплуатации. Приводятся результаты численных исследований надежности в виде графиков изменения надежности несущей системы покрытия и кровельных сэндвич-панелей в зависимости от величины коэффициентов вариации прочности обшивки из асбестоцемента, элементов деревянного каркаса и конструкции соединения каркаса с обшивкой.

Ключевые слова: производственное одноэтажное здание, металлическая несущая система покрытия, кровельные сэндвич-панели, повреждения, коэффициент вариации прочности материалов, надежность несущей системы после длительной эксплуатации, логарифмический показатель надежности отдельных элементов и конструкции в целом.

REABILITY OF LONG-TERM OPERATED METALLIC ROOFING BY SANDWICH PANELS

Safronov V.S.¹, Ntachizaniie Melchior²
Voronezh State Technical University^{1,2}
Voronezh, Russia

¹Drof Tech. Sc., professor of the department. of Structural Mechanics

²Undergraduate student of the department. of Structural Mechanics

The method of calculation of long operated metal roofing of one-storey building with bearing girders and sandwich panels is suggested and tested on the real object. Quantaty reability parameters of bearing system of spatial roofing is determined by probabilistic characteristics of the most loaded roofing components failure, but also of typical profiles of sandwich –panels in dependence on dispersion of material strength properties with account of appeared damages after the long-term operation. There are presented the results of quantity investigations of reliability in the form of diagrams of reliability change of roofing bearing system and sandwich-panels in dependence on coefficients value of cement asbestos encasement variation, timber framework components and structure of framework and encasement joining.

Keywords: industrial one-storeyed building, metal bearing roofing system, roofing sandwich panels, damages, coefficient of materials reability variations, reability of bearing system after long-term operation, logarithmic characteristics of reability of some components and structure in total.

© Сафронов В. С., Нтахизанийе Мельхиор, 2018

Введение

При проведении обследований длительно эксплуатируемых зданий и сооружений или определении безопасных режимов эксплуатации сильно изношенных несущих строительных конструкций в настоящее время используются рекомендуемые ГОСТ 27751-2014 [1] расчетные положения, не учитывающие изменение случайных показателей прочности материалов. В целях принятия обоснованных проектных решений для восстановления изношенных несущих конструкций или обоснования сноса зданий и сооружений с повышенным риском разрушения необходима разработка вероятностных методик расчета, позволяющих давать более обоснованные рекомендации [2-4].

В настоящее время эффективные методики расчета вероятности возникновения предельных состояний разработаны преимущественно для стальных и железобетонных центрально и внецентренно сжимаемых и изгибаемых конструкций с ненапрягаемой и предварительно напряженной арматурой [5-7]. В случае составных конструкций из различных материалов вероятностные подходы практически отсутствуют. Затруднения вызывают необходимость учета особенностей напряженно-деформированного узлов соединения и топологии сложной пространственной статической расчетной схемы составной конструкции [8].

В настоящей статье предлагается апробированная на реальном объекте методика статистической оценки эксплуатационной надежности построенного более 50 лет назад металлического покрытия одноэтажного производственного здания с несущей металлической системой покрытия и кровельными трехслойными сэндвич-панелями с асбоцементными обшивками, деревянным каркасом и заполнением из минераловатных плит

1. Краткое описание рассматриваемого здания и конструкции покрытия

На момент обследования объект исследования представляет собой прямоугольное в плане одноэтажное однопролетное здание с металлическим каркасом шириной 12,0 м и длиной 36,0 м. Шаг несущих конструкций несущего металлического каркаса равен 4,0 м. Здание эксплуатируется без проведения ремонтно-восстановительных работ более 50 лет. Общий вид здания со стороны дворового фасада представлен на рис. 1.

Металлический несущий каркас здания представляет собой систему из 20 вертикальных металлических стоек, жестко заделанных в ленточный фундамент и поддерживающих смонтированные поперек здания 10 стропильных металлических ферм (рис. 2). Стойки выполнены из двух сваренных между собой швеллеров №18, а фермы выполнены из парных равнобочных уголков 65×5 мм. Каждая ферма опирается на стойку через узел верхнего пояса и через подкос фермы из уголков 80×50×5 мм на высоте 4 м от уровня пола. В продольном направлении фермы раскреплены 3 металлическими распорками, выполненными из сваренных между собой равнобочных уголков 65×5 мм, расположенными вдоль наружных стен и по оси симметрии ферм. В продольном направлении соседние стойки объединены вертикальными порталными металлическими связями.

Покрытие здания выполнено из смонтированных на верхние пояса металлических ферм кровельных трехслойных сэндвич-панелей размерами 4,х 1,5 м с плоскими асбоцементными обшивками, деревянным каркасом из двух брусьев 4х13 см и одного дополнительного бруса 8,5х4 см и заполнением из минераловатных плит. Соединение обшивки с деревянным каркасом трехслойных кровельных панелей выполнено на шурупах диаметром 4 мм с шагом 250 мм.



Рис. 1. Фасад рассматриваемого производственного здания



Рис. 2. Общий вид несущих конструкций покрытия

Кровля на смонтированные сэндвич-панели выполнена из металлических профилированных листов, прикрепленных к сэндвич-панелям.

В результате длительной эксплуатации под влиянием неблагоприятных атмосферных воздействий окружающей среды в нем возникли различные дефекты и повреждения. Эти неисправности повлияли на несущую способность основных строительных конструкций. Наиболее существенные повреждения получили кровельные панели покрытия и несущие металлические стропильные фермы. Поэтому именно для этих несущих конструкций выполняются оценки эксплуатационной надежности с учетом изношенности при длительной эксплуатации.

2. Методика определения эксплуатационной надежности покрытия здания

При определении вероятностей возникновения отказов отдельных элементов покрытия рассматриваемого здания, соответствующих возникновению в элементах конструкции предельного состояния, рассмотрим следующие гипотезы:

- прочностные характеристики материалов элементов несущих конструкций принимаются случайными, распределенными по нормальному закону в соответствии с измеренными при обследовании средними и стандартами прочности;
- геометрические размеры элементов несущих конструкций в расчетах принимаются по результатам обмерочных работ;
- постоянные и временные нагрузки, включая снеговые, также считаются случайными с распределением, отвечающим нормальному закону.

Ниже приведены принятые расчетные выражения при проведении вероятностных расчетов.

2.1. Определение статистических параметров действующих нагрузок

Рассчитываются по максимальным величинам усилий от каждой из действующих на несущие элементы покрытия рассматриваемого здания нагрузок. Средние значения m_{ij} и стандарты усилий σ_{ij} от нагрузки i -ого типа для j -ого несущих элементов покрытия здания определим из выражений:

$$m_{ij} = S_{ij} / \gamma_{fi}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij} = m_{ij} \cdot v_{fi}, \quad (2)$$

где введены следующие обозначения:

S_{ij} – расчетное усилие от нагрузки i -го типа для j -го несущего элемента покрытия здания;

v_{fi} – коэффициент вариации i -й нагрузки, вычисляемый по рекомендуемой величине коэффициента надежности γ_{fi} по 95-процентной обеспеченности [2] из формулы

$$v_{fi} = (\gamma_{fi} - 1) / 1,64. \quad (3)$$

Статистические характеристики усилий в j -ом несущем элементе конструкции покрытия здания от основного сочетания действующих нагрузок вычислим без учета корреляции между отдельными учитываемыми нагрузками:

$$m_{sj} = m_{s1j} + m_{s2j} + m_{s3j}, \quad (4)$$

$$\sigma_{sj} = \sqrt{\sigma_{1j}^2 + \sigma_{2j}^2 + \sigma_{3j}^2}. \quad (5)$$

В вероятностных расчетах эксплуатационной надежности покрытия здания учитывались следующие основные нагрузки с рекомендуемыми действующими в настоящее время коэффициентами надежности по нагрузкам:

- постоянные нагрузки от собственного веса фермы и сэндвич-панелей: $\gamma_{f1} = 1.1$;
- постоянные нагрузки от веса кровли: $\gamma_{f2} = 1.2$;
- временные нагрузки от снега на кровле здания: $\gamma_{f1} = 1.4$.

2.2. Определение статистических характеристик прочности элементов металлической несущей системы покрытия здания

Рассчитываются по предельным усилиям для каждого растянутого или сжатого элемента стропильной фермы покрытия и несущей рамы каркаса здания. Средние значения прочности элемента и

действующих в ней нормальных усилий m_R , m_N , и стандарты усилий σ_N элемента стропильной фермы находятся в зависимости от условной гибкости элемента и соотношения между постоянной и временной нагрузками по нормативным значениям [10] коэффициента продольного изгиба φ :

$$m_R = \frac{R_{yn}}{1-1.64v_R}, \quad (6)$$

$$m_N = \varphi \cdot m_R \cdot A \quad (7)$$

$$\sigma_N = \varphi \cdot m_R \cdot v_R, \quad (8)$$

где введены следующие обозначения: R_{yn} - нормативное сопротивление стали, A - площадь поперечного сечения элемента фермы, v_R - коэффициент вариации прочности стали, принимаемый в расчетах равным $v_R = 0,08$.

2.3. Определение статистических характеристик прочности трехслойной панели покрытия

Вероятностные расчеты характерных сечений сэндвич-панелей осуществляются для трех следующих видов предельных состояний:

- 1) по прочности асбестоцементных обшивок;
- 2) по прочности соединений брусев каркаса с наружными листами обшивок;
- 3) по прочности фибровых волокон деревянных брусев каркаса.

Математические ожидания прочностных характеристик конструкционных материалов сэндвич-панелей определялись по рекомендуемым действующими государственными документами [10-11] нормативным сопротивлениям применяемых в строительстве типов асбоцемента и древесины по формуле (6), предусматривающей принятую в РФ обеспеченность $P=0,95$. При этом для стандартов прочностных характеристик материалов коэффициенты вариации принимаются в зависимости от технического состояния и изношенности конкретных элементов в диапазоне от 0,10 до 0,30.

2.4. Расчет показателей надежности отдельных элементов и покрытия здания в целом

Вероятности возникновения предельных состояний в отдельных элементах покрытия здания вычисляются с помощью функции Лапласа из предположения, что резерв прочности подчиняется нормальному закону распределения [4], из выражения

$$Q_i = \frac{1}{2} - \Phi(\beta_i), \quad (9)$$

где β_i – характеристика безопасности по i - ому предельному состоянию, равная отношению математического ожидания к стандарту резерва прочности, вычисленному в виде разности между предельным R и максимальным F усилием от основного сочетания действующих нагрузок:

$$\beta_i = \frac{m_R - m_F}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_F^2}}. \quad (10)$$

В соответствии с теоремой о вероятности случайного события, равного произведению трех независимых случайных событий, надежность одной кровельной сэндвич-панели будем оценивать по формуле

$$H_{\Pi} = H_{\text{ац}} \cdot H_{\text{д}} \cdot H_{\text{с}}, \quad (11)$$

где $H_{\text{ац}}$, $H_{\text{д}}$ и $H_{\text{с}}$ – вероятности безотказной эксплуатации асбоцементных обшивок, деревянного каркаса и соединений каркаса и обшивок сэндвич панели соответственно.

Несмотря на внешнюю статическую неопределимость металлических рам каркаса здания отдельные элементы стропильных ферм: пояса, раскосы и стойки, при возникновении предельных состояний в каждом из них приводят к геометрической изменяемости конструкции покрытия и отказу конструкции покрытия. Поэтому надежность включающих стропильные фермы рам каркаса определим приближенно как для многоэлементных систем с последовательным соединением элементов из выражения

$$H_{\Phi} = \prod_1^n H_j. \quad (12)$$

Здесь $H_j (j = 1, \dots, n)$ представляют собой вероятности противоположных вычисленным по формуле (9) случайных событий, описывающих безотказное функционирование всех составляющих стержней рамы, включая элементы стропильной фермы.

Надежность несущей системы покрытия здания в целом определим по надежности несущей рамы и минимальной из вычисленных из выражения (9) надежностей сэндвич-панелей из предположения, что отказ хотя бы одной рамы и одной сэндвич-панели приводит к нарушению безопасного режима эксплуатации:

$$H_{\text{ц}} = H_{\text{ф}} \cdot \min H_n . \quad (13)$$

Для удобства практического использования результатов исследований вероятностной оценки технического состояния несущей системы здания в целом, которые получены по описанной выше методике, определяется логарифмический показатель надежности:

$$\rho_{\text{ц}} = \lg \left(\frac{1}{1-H_{\text{ц}}} \right). \quad (14)$$

Широкое применение предлагаемой методики в инженерной практике и наработка опыта ее использования для зданий и сооружений различных конструктивных форм позволит получать наиболее эффективные проектные решения.

3. Результаты численных расчетов надежности покрытия эксплуатируемого здания

Описанная в предыдущем разделе статьи методика оценки эксплуатационной надежности реализована в виде программы в вычислительном комплексе Mathcad и апробирована при обработке результатов обследования эксплуатирующегося одноэтажного производственного здания в Московской области. Краткое описание исследуемого здания приведено выше в разделе 1, а общие виды снаружи и внутри здания представлены на рис. 1- 2. Ниже приводятся результаты численных расчетов по предлагаемой методике несущей системы здания и трехслойной панели покрытия с учетом данных, полученных при обследовании

3.1. Эксплуатационная надежность несущей системы покрытия здания

Расчетная схема покрытия рассматриваемого производственного здания и принятая при проведении численных расчетов по предлагаемой методике нумерация элементов приведена на рис. 3. Результаты выполненных расчетов сведены в табл. 1.

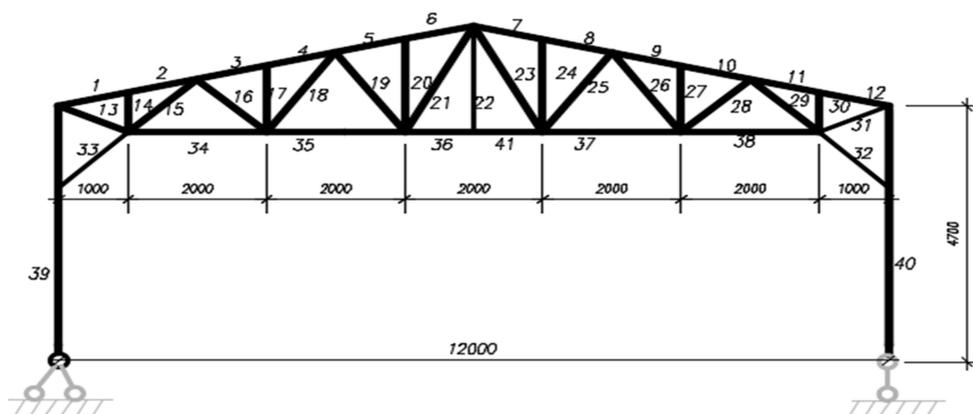


Рис. 3. Расчетная схема покрытия производственного здания

Данные вероятностных расчетов надежности несущей системы здания

№ п/п	Наименование и номер элемента несущей системы здания	Параметры усилий, кН				Х-ка без-сти β	Вер-сть отказа элемента Q	Логарифм. пок-тель надежности ρ
		максимальных		предельных				
		m_{Nmax}	σ_{Nmax}	$m_{Nпред}$	$\sigma_{Nпред}$			
1	Верхний пояс – 1 и 2	16,19	3,238	435,6	87,12	4,811	$7,515 \cdot 10^{-7}$	6,124
2	Верхний пояс – 3 и 4	54	10,8	435,6	87,12	4,347	$5,461 \cdot 10^{-7}$	5,161
3	Верхний пояс – 5 и 6	58,56	11,71	435,6	87,12	4,289	$4,571 \cdot 10^{-7}$	5,047
4	Нижний пояс – 34 и 38	20,8	4,16	701,5	140,3	4,85	$6,185 \cdot 10^{-7}$	6,263
5	Нижний пояс – 35 и 37	17,43	3,486	701,5	140,3	4,874	$5,461 \cdot 10^{-7}$	6,34
6	Нижний пояс – 36 и 41	12,62	2,524	701,5	140,3	4,909	$4,571 \cdot 10^{-7}$	5,005
7	Раскос – 33 и 32	62,61	12,52	452,5	90,5	4,268	$9,88 \cdot 10^{-6}$	4,89
8	Раскос – 13 и 31	3,035	0,607	419,5	83,85	4,964	$3,458 \cdot 10^{-7}$	6,461
9	Раскос – 15 и 29	53,28	10,66	352,7	71,44	4,208	$1,25 \cdot 10^{-5}$	5,945
10	Раскос – 16 и 28	22,26	4,452	419,3	81,85	4,728	$1,134 \cdot 10^{-6}$	6,421
11	Раскос – 18 и 26	11,22	2,244	419,3	83,85	4,864	$5,379 \cdot 10^{-7}$	6,254
12	Раскос – 19 и 25	8,057	1,611	314,9	189,4	4,87	$5,567 \cdot 10^{-7}$	6,127
13	Раскос – 21 и 23	15,48	6,096	149,3	83,85	4,812	$7,468 \cdot 10^{-7}$	6,289
14	Стойки – 14 и 30	8,215	1,643	464,6	72,92	4,886	$5,143 \cdot 10^{-7}$	5,379
15	Стойки – 17 и 27	8,028	1,642	162,3	32,47	4,741	$1,063 \cdot 10^{-6}$	6,366
16	Стойки – 20 и 24	8,028	1,642	78,93	15,79	4,456	$4,175 \cdot 10^{-6}$	5,739
17	Стойки несущей рамы здания - 39, 40	14,82	2,964	947,2	189,4	4,941	$4,301 \cdot 10^{-15}$	6,366

При проведении численных исследований, представленных в табл. 1 надежности несущей системы покрытия здания, коэффициент вариации прочности стали принимался равным $v_{с\sigma} = 0,08$.

При этом надежность несущей системы здания составляет $H_p = 0,9999494$, а логарифмический показатель надежности несущей системы покрытия равен $\rho_p = 4,16$ бела. Такая надежность несущей системы является достаточной [4].

При изменении коэффициента вариации прочности используемой при строительстве стали надежность будет изменяться. На рис. 4 представлен полученный по результатам численных исследования график зависимости логарифмического показателя надежности рамы в зависимости от коэффициента вариации $v_{сталь}$ по прочности стали.

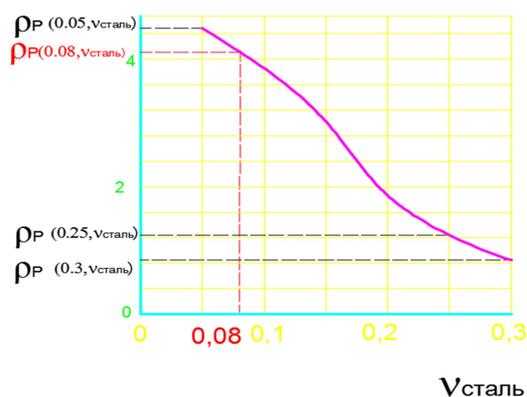


Рис. 4. График зависимости логарифмического показателя надежности рамы в зависимости от коэффициента вариации $v_{сталь}$ по прочности стали с245

3.2. Эксплуатационная надежность трехслойных панелей покрытия

Поперечное сечение типовой трехслойной панели покрытия с обшивками из плоских асбоцементных листов и несущим деревянным каркасом приведено на рис. 5.

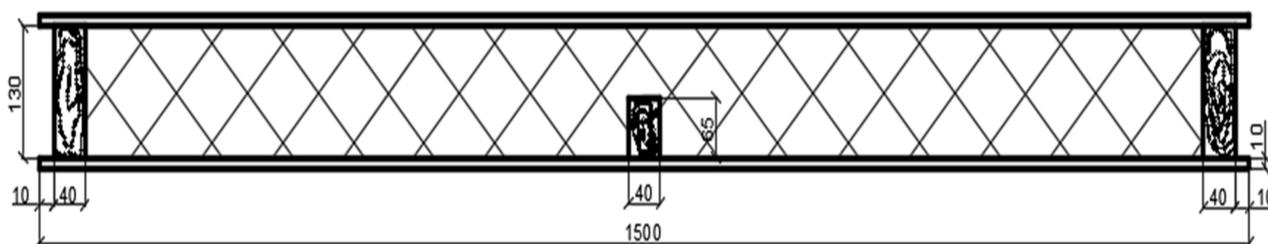


Рис. 5. Поперечное сечение сэндвич-панели с деревянным несущим каркасом

Результаты вероятностных расчетов несущих элементов сэндвич-панелей в виде графиков зависимости логарифмических показателей надежности от коэффициентов вариации прочности материалов представлены на рис. 6-8. На графиках красным цветом показаны нормативные значения коэффициентов вариации, составляющие по отдельным элементам сэндвич-панели следующие величины:

- по прочности соединений обшивок с каркасом: $v_{\text{соед}}=0,10$;
- по прочности брусьев деревянного каркаса: $v_{\text{бр}}=0,15$;
- по прочности асбоцементных листов обшивки: $v_{\text{асб}}=0,20$.

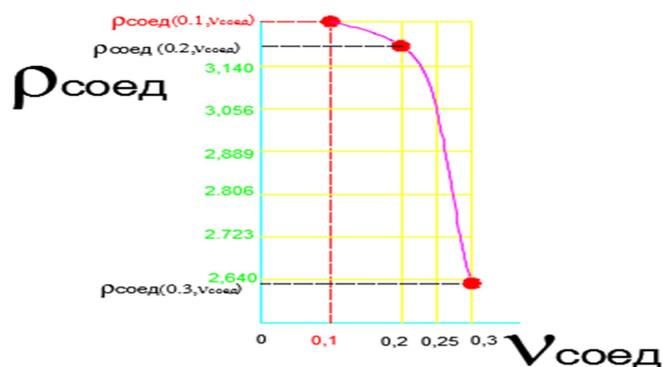


Рис. 6. График изменения логарифмического показателя надежности соединения несущих элементов сэндвич-панели в зависимости от коэффициента вариации $v_{\text{соед}}$ по прочности соединения

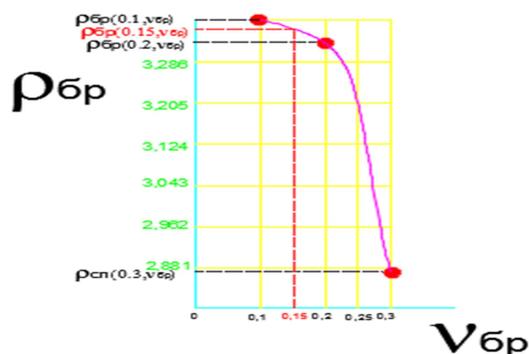


Рис. 7. График зависимости логарифмического показателя надежности сэндвич-панели в зависимости от коэффициента вариации $v_{\text{бр}}$ по прочности брусьев деревянного каркаса

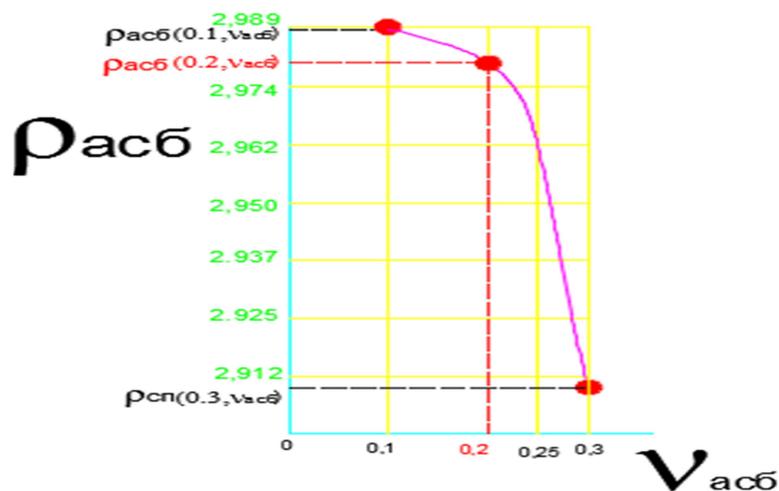


Рис. 8. График зависимости логарифмического показателя надежности сэндвич-панели в зависимости от коэффициента вариации $V_{асб}$ по прочности асбестоцементного листа

Используя приведенные на рис 6-8 графики, можно получить проектные значения эксплуатационной надежности новых сэндвич панелей. На момент строительства она составляла

$$H_{п} = H_{ац} \cdot H_{д} \cdot H_{с} = 0,99999721,$$

что отвечает достаточно высокому логарифмическому показателю надежности кровельных сэндвич-панелей, равному $\rho_{сп} = \log\left(\frac{1}{1 - H_{п}}\right) = 4,94$ бела.

В настоящее время износ прослуживших более 50 лет трехслойных кровельных панелей является весьма значительным. Даже без учета снижения средних значений прочностных показателей материалов вследствие увеличения в два раза коэффициента вариации вероятность безотказной эксплуатации сэндвич-панелей с использованием графиков, приведенных на рис. 6-8, снижается до значения $H_{п}=0,999$, отвечающего недопустимому риску по условиям безопасного уровня эксплуатации зданий с находящимися в нем рабочими, логарифмическому показателю надежности $\rho_{ц} = 2,5 - 3,0$. Особенно сильное влияние, по нашим оценкам, имеет рост вероятности предельного состояния сэндвич-панелей по прочности соединений обшивок с каркасом.

Выводы

- Предложенная методика расчета эксплуатационной надежности, несущей системы покрытия производственного одноэтажного здания, выполненной из различных материалов, апробирована при оценке эксплуатационной надежности покрытия длительно эксплуатируемого производственного здания. Она показала свою эффективность для применяемых в строительстве конструкций.
- По результатам численных расчетов эксплуатационной надежности кровельных сэндвич-панелей с асбестоцементными обшивками и деревянным каркасом, применяемых в строительстве, получено, что наиболее низкой надежностью такая плита обладает по прочности соединений каркаса с обшивкой.
- Разработанная и апробированная методика может использоваться в инженерной практике для оценки технического состояния длительно эксплуатируемых зданий или для принятия решений по перестройке, реконструкции или демонтажу опасных для находящихся в них зданий.

Библиографический список

1. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – М.: Стандартиформ, 2015. – 339 с.
2. Лычев А.С. Вероятностные методы расчета строительных элементов и систем: учеб пособие/ А. С. Лычев – М.:АСВ, 2008-184 с.
3. Ржаницын А. Р. Теория расчёта строительных конструкций на надёжность/ А. Р. Ржаницын. - М.: Стройиздат,1973. - С. 282.
4. Райзер В.Д. Теория надежности сооружений/В. Д. Райзер. –М.: АСВ, 2010.-252с.
5. Сафронов В. С. Прогнозирование риска разрушения длительно эксплуатируемой железобетонной фермы покрытия здания/ В. С. Сафронов, Д. Т.Чан // Строительная механика и конструкции. - 2016. - Вып. 2 (13). - С. 45-54.
6. Сафронов В. С. Надежность несущего каркаса реконструируемого производственного здания при перепрофилировании/ В. С. Сафронов, Д. Т. Чан// Строительная механика и конструкции. - 2018. - Вып. 1(16). -С. 54-65.
7. Сафронов В. С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок/ В. С. Сафронов, Нгуен Динь Хоа// Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Строительство и архитектура. – 2010. - №1(17). – С. 152-166.
8. Сафронов В. С. Анализ прочности длительно эксплуатируемого одноэтажного здания и рекомендации по его усилению/ В. С. Сафронов, Н. А. Барченкова, А. Ю. Калгин // Актуальные проблемы стр-ва, стр. индустрии и пром-сти: мат-лы XIX международной науч.-техн. конф.; Тульский государственный университет. – Тула, 2018. - С. 12-15.
9. Пшеничкина В. А. Оценка остаточного ресурса основного корпуса Р-1 ОАО «ВОЛТАЙР-ПРОМ» как сложной системы/ В. А. Пшеничкина, К. Н. Сухина// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2016. - № 1. - С. 60-65.
10. СП 20.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. Нормы проектирования /Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 1998.– 96 с.
11. Справочное пособие к СНиП 2.03.09-85 по проектированию асбестоцементных конструкций. – М.: Стройиздат, 1990.
12. Справочное пособие к СНиП II-25-80 по проектированию деревянных конструкций. –М.: Стройиздат, 1986.

References

1. State standard specification 27751-2014. Reability of building structures and bases. Main positions. – М.: Standartinform, 2015. – 339 p.
2. Lychyov A.S. Probabalistic methods of building components and systems design: student book. М.:ASV, 2008-184 p.
3. Rzhانيتsin A.R. Design theory of building structures for reability. М.:Stroiizdat,1973. - P. 282.
4. Raizer V.D. Theory of structures reability. М.: ASV, 2010.-252p.
5. Safronov V.S., Chang D.T. Prognostication of destruction risk of long-term operated reinforced concrete building cover girder. Structural mechanics and structures. - 2016. - Issue. 2 (13). - P. 45-54.

6. Safronov V.S., Chang D.T. Reability of bearing framework of industrial building under reconstruction during conversion of an enterprise .Structural mechanics and structures . - 2018. - Issue. 1(16). -P. 54-65.
7. Safronov V.S. Probabilistic assessment of risk of appearance of limiting state in profiles of flexible reinforced beams. Scientific bulletin of VGASU. Construction and Architecture. – 2010. - №1(17). – C. 152-166.
8. Safronov V.S., Barchenckova N.A., Kalgin A.Yu. Analysis of long-term operated one-storey building reability and recommendation for its strengthening. Actual problems of construction. Materials of XIX International scientific technical conference. Tula state university. Tula, 2018. - P. 12-15.
9. Pshenichkina V.A., Sukhina K.N. Assessment of residual resources of main building R-1 OAO “VOLTAIR -PROM” as complicated system. Structural mechanics of engineering structures and constructions. – 2016. - No 1. - P. 60-65.
10. Set of rules 20.13330.2017. Steel structures. Updated version Building standards and regulations 23-81*. Standard of desing. Gosstroi of Russia – M.: GUP TsPP, 1998.– 96 p.
11. Reference book for Building standards and regulations 2.03.09-85 on design of asbestos concrete structures. –M.: Stroiizdat, 1990.
12. Reference book for Building standards and regulations 25-80 on design of timber structures. –M.: Stroiizdat, 1986.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.046.5: 69.059.2: 699.88

РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ КОНСТРУКТИВНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ ПО ЗАЩИТЕ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ ОТ ПРОГРЕССИРУЮЩЕГО ОБРУШЕНИЯ

А. С. Саражинский¹, С. В. Ефрюшин²

Воронежский государственный технический университет^{1,2}

Россия, Воронеж

¹ Аспирант кафедры строительной механики

² Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики,
тел.: +7(473)271-52-30. e-mail: stroymech.vgasu@yandex.ru

Объект исследования – 25-этажное жилое здание в монолитно-каркасном исполнении. Цель исследования: сравнение результатов расчета на прогрессирующее обрушение при разных вариантах расположения элементов защиты каркаса здания от прогрессирующего обрушения – балочного монолитного перекрытия по высоте здания. Выявлена зависимость напряжённо-деформированного состояния каркаса жилого дома при разрушении 2-х угловых колонн от расположения по высоте здания элементов защиты каркаса здания от прогрессирующего обрушения – балочного монолитного перекрытия.

В работе приводятся практические выводы и рекомендации по расчету на прогрессирующее обрушение и способам защиты от него с использованием программного комплекса ЛИРА-САПР. Учитывается физическая и геометрическая нелинейность. Опыт проделанных расчётов может быть использован при моделировании подобных чрезвычайных ситуаций.

Ключевые слова: прогрессирующее обрушение, физическая и геометрическая нелинейность, нелинейный расчет, ЛИРА-САПР.

DESIGN ANALYSIS OF STRUCTURAL MEASURES FOR PROTECTION OF FRAME BUILDINGS AGAINST PROGRESSING COLLAPSE

A. S. Sarazhinskij¹, S. V. Efyushin²

Voronezh state technical university

Voronezh, Russia

¹ Postgraduate student of the department of Structural Mechanics

² Dr. of Tech. Science, Prof. of the department of Structural Mechanics,
tel.: +7(473)271-52-30. e-mail: stroymech.vgasu@yandex.ru

The object of investigation is the 25-story residential building in monolithic frame design. The target of investigation is the comparison of the progressive collapse calculation results at different variants of location of building frame protection elements against progressive collapse that is beam girder monolithic bridging in height. There is found the dependence of residential building frame deflected mode at two corner columns collapse on location of building frame protection elements in building height caused by progressive fall that is beam girder monolithic bridging.

There are given the practical conclusions and made some calculation recommendations on progressive collapse and protective against it measures with the help of soft ware package LIRA-SAPR. Physical and geometrical nonlinearity is taken into account. The calculations experience can be applied simulating analogical emergencies.

Keywords: progressing collapse, physical and geometrical nonlinearity, nonlinear calculation, LIRA-SAPR.

© Саражинский А. С., Ефрюшин С. В., 2018

Каркасные монолитные жилые здания имеют ряд особенностей, связанных с более «свободными» архитектурно-планировочными решениями [6], что обуславливает специфику расчета монолитных зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения при чрезвычайных ситуациях, поэтому данное исследование на прогрессирующее обрушение имеет свою актуальность. Целью исследования является сравнение результатов расчета на прогрессирующее обрушение при разных вариантах расположения элементов защиты каркаса здания от прогрессирующего обрушения – балочного монолитного перекрытия [5] по высоте здания. Проанализировано шесть вариантов расположения балочных монолитных перекрытий: 12-й этаж; 19-й этаж; 7-й этаж; 12-й и 19-й этажи; 7-й и 12-й этажи; 1, 7 и 12-й этажи. Объект исследования – 25-этажный жилой дом, построенный в г. Воронеже. Указанный объект по конструктивным характеристикам является достаточно распространённым в практике строительства [6].

Далее приводятся основные данные расчётной модели.

Создание расчетных схем для расчета на прогрессирующее обрушение проводилось в программном комплексе ЛИРА-САПР [3] и было выполнено следующее:

- создана физическая модель 25-этажного жилого дома (рис. 1);

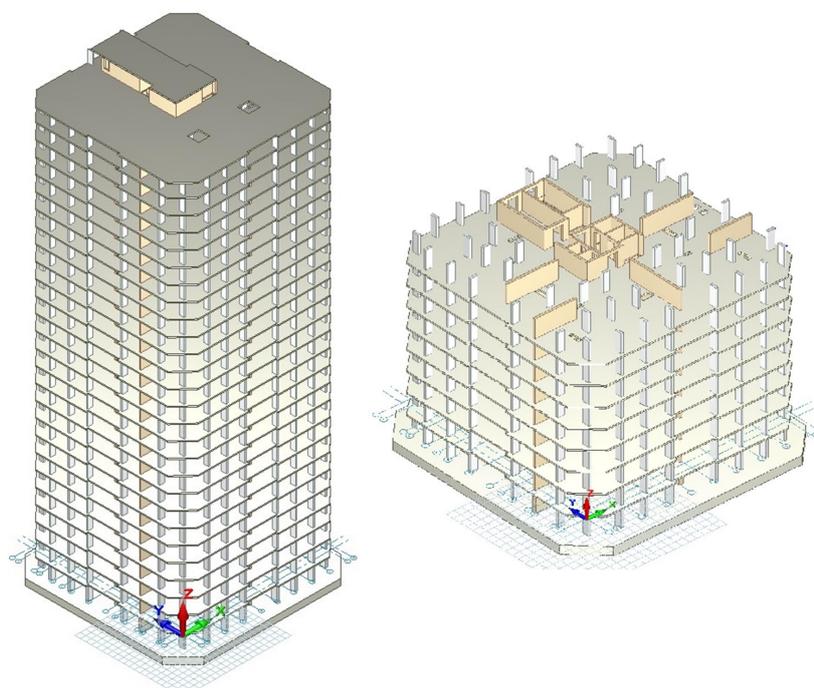


Рис. 1. Аналитическая модель жилого дома

- проведен сбор нагрузок согласно СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия»;
- выполнена четырехугольная триангуляция пластин с шагом 0,3 м;
- назначены связи – все узлы фундаментной плиты закреплены по 6-ти степеням свободы: X, Y, Z, UX, UY, UZ;
- произведено назначение жесткостей и материалов согласно СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003»;
- составлена таблица расчетных сочетаний нагрузок (РСН) и таблица расчетных сочетаний усилий (РСУ) в соответствии с СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия»;
- выполнен расчет 25-этажного жилого дома в линейной постановке на все действующие расчетные нагрузки для последующего задания армирования несущих элементов здания (для расчета в нелинейной постановке).

После анализа результатов армирования несущих конструкций жилого дома было выполнено следующее:

- замена типа конечных элементов КЭ 10, 42, 44 на КЭ 410, 442, 444 (с учетом физической и геометрической нелинейности) соответственно для расчета в нелинейной постановке;

- задание жесткостей несущим элементам здания (рис. 2, 3, 4) с учетом результатов армирования. Материал несущих конструкций – бетон В25, арматура А500. Прочностные и деформационные характеристики материалов принимаются нормативными согласно СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003» и рекомендациям по защите монолитных жилых зданий от прогрессирующего обрушения п. 2.3 [7].

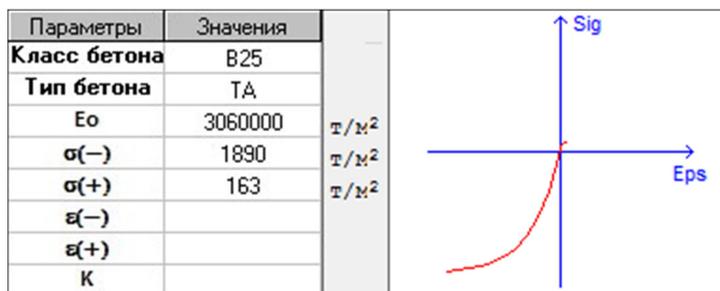


Рис. 2. Закон нелинейного деформирования материала – бетон В25

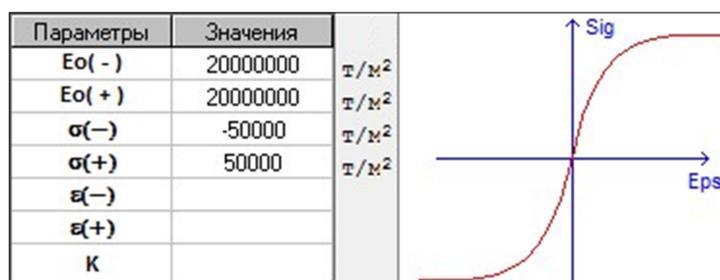


Рис. 3. Закон нелинейного деформирования материала – арматура А500

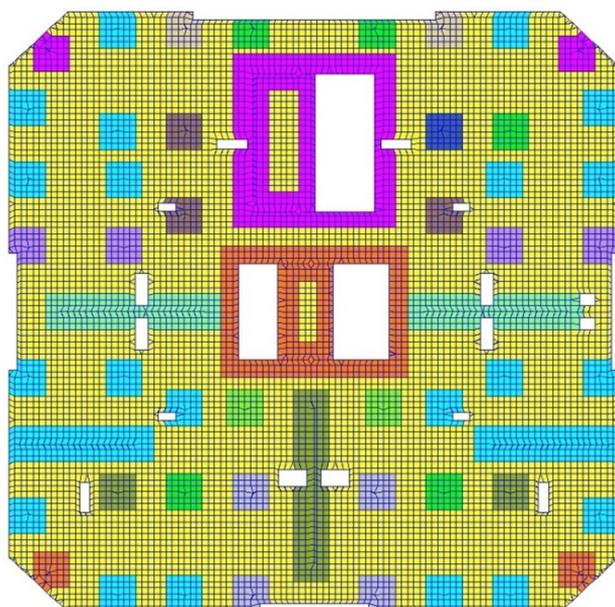


Рис. 4. Пример задания жесткостей в нелинейной постановке

Выполнено два нагружения с использованием системы МОНТАЖ ЛИРА-САПР [4, 8]:

- стадия 1, включающая постоянные и длительные временные нагрузки согласно СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия», с коэффициентами сочетания нагрузок и коэффициентами надежности по нагрузкам, равными единице, согласно рекомендациям по защите монолитных жилых зданий от прогрессирующего обрушения пп. 2.1 и 2.2 [7];

- стадия 2 – демонтаж 2-х угловых колонн (рис. 5), в верхние узлы разрушенных колонн прикладывается вертикальная нагрузка (против направления оси Z) для учета коэффициента динамичности.

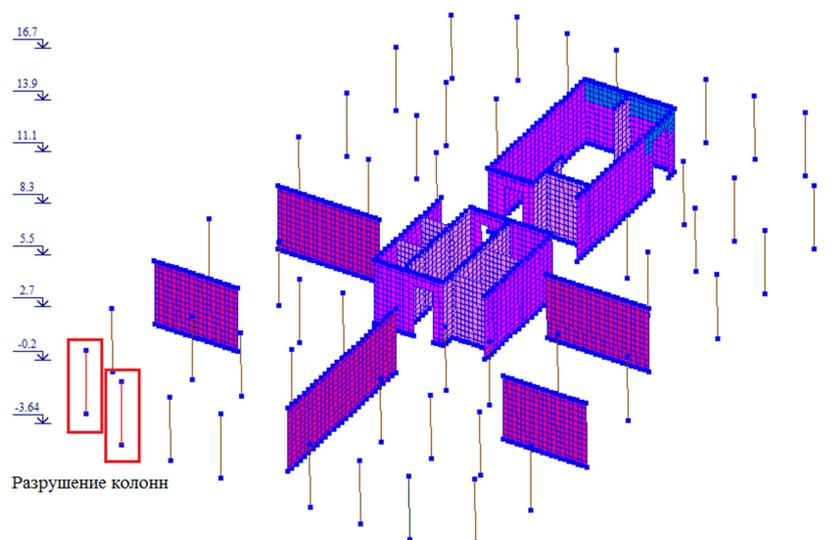


Рис. 5. Демонтаж 2-х угловых колонн

Вычисление коэффициента динамичности выполнялось согласно методике, изложенной в [1], в которой коэффициент динамичности $k_d=1,14$;

- накладывали на плиту перекрытия над разрушенными элементами ограничение по перемещению UZ согласно рекомендациям учебного пособия «ЛИРА-САПР 2011» пример 16: «Технология расчета на устойчивость к прогрессирующему обрушению» [2];

- моделировали балочное монолитное перекрытие [5] (рис. 6) – балка (бетон В25) сечением 30x40 см с армированием арматурой А500 диаметрами стержней 16, 25 мм (4 стержня в нижней и 4 стержня в верхней части балки диаметром 25 мм, в середине балки стержни диаметром 16 мм);

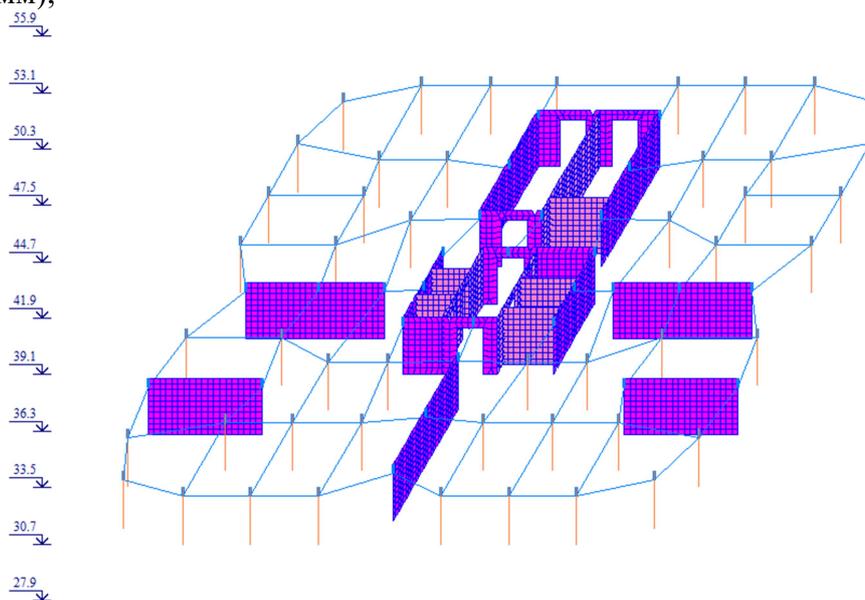


Рис. 6. Балочное монолитное перекрытие

- моделировали нелинейные загрузки конструкции: простой шаговый метод расчета, количество шагов 10.

Результаты расчета на прогрессирующее обрушение

1. Деформации – перемещение по Z (рис. 7-12, 19, 20):

- при расположении балочного монолитного перекрытия на «экваторе» здания – 12-й этаж, деформации уменьшились на 7 %;
- при расположении выше «экватора» здания – 19-й этаж, деформации уменьшились на 6 %; при расположении ниже «экватора» здания – 7-й этаж, деформации уменьшились на 9 %;
- при расположении балочных монолитных перекрытий в верхней части по высоте здания – 12-й и 19-й этажи, деформации уменьшились на 12 %;
- при расположении в нижней части здания – 7-й и 12-й этажи, деформации уменьшились на 15 %.

2. Усилия – продольное усилие N в колоннах (рис. 21, 22): исследование по способу защиты от прогрессирующего обрушения – балочное монолитное перекрытие, показало, что усилие N в колонне, которая при перераспределении усилий восприняла большую часть усилий от разрушенных колонн, уменьшилось до 5 %; данный результат указывает, что перераспределение усилий незначительно - до 5 %, но, анализируя другие колонны, также воспринимавших усилия от разрушенных колонн, на примере колонны в осях А-3 (см. таблицу) можно сделать вывод, что перераспределение усилий достаточно существенно по высоте здания – 15 %.

3. Разрушения – количество КЭ в стадии образования пластического шарнира (рис. 13-18, 23, 24):

- при расположении балочного монолитного перекрытия на «экваторе» здания – 12-й этаж, разрушения уменьшились на 13 %;
- при расположении выше «экватора» здания – 19-й этаж, разрушения уменьшились на 9 %; при расположении ниже «экватора» здания – 7-й этаж, разрушения уменьшились на 19 %;
- при расположении балочных монолитных перекрытий в верхней части по высоте здания – 12-й и 19-й этажи разрушения уменьшились на 23 %;
- при расположении в нижней части здания – 7-й и 12-й этажи разрушения уменьшились на 28 %.

Исследование по способу защиты от прогрессирующего обрушения – балочное монолитное перекрытие, показало, что расположение балочных монолитных перекрытий в нижней части по высоте здания повышает устойчивость к прогрессирующему обрушению в случае разрушения 2-х угловых колонн здания.

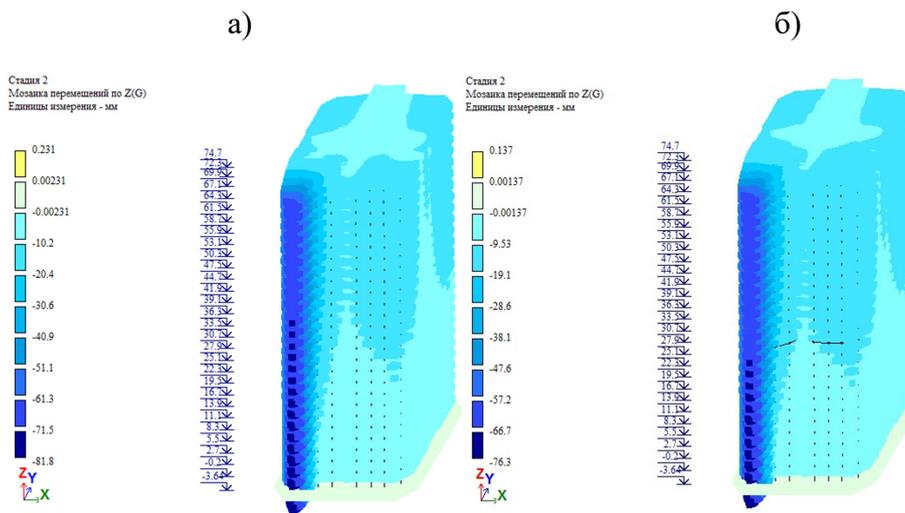


Рис. 7. Перемещение по Z: а) разрушение 2-х угловых колонн;
б) с балочным монолитным перекрытием на 12 этаже жилого дома

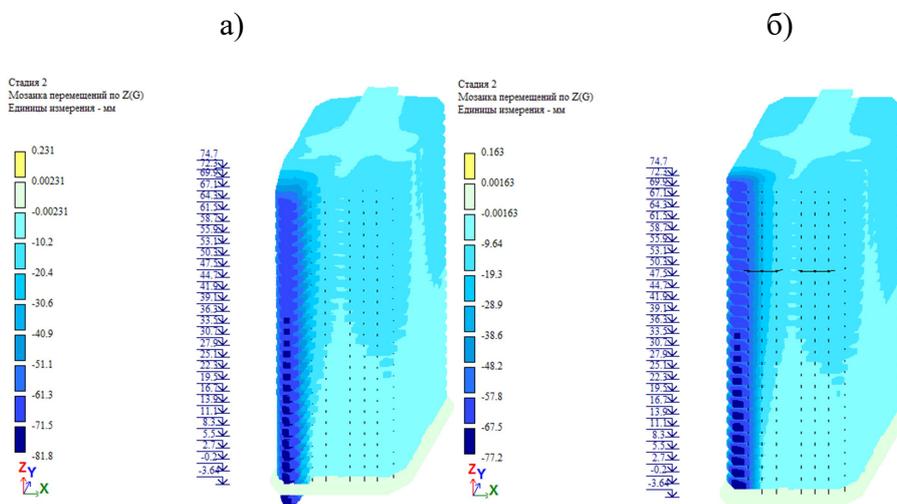


Рис. 8. Перемещение по Z: а) разрушение 2-х угловых колонн;
б) с балочным монолитным перекрытием на 19 этаже жилого дома

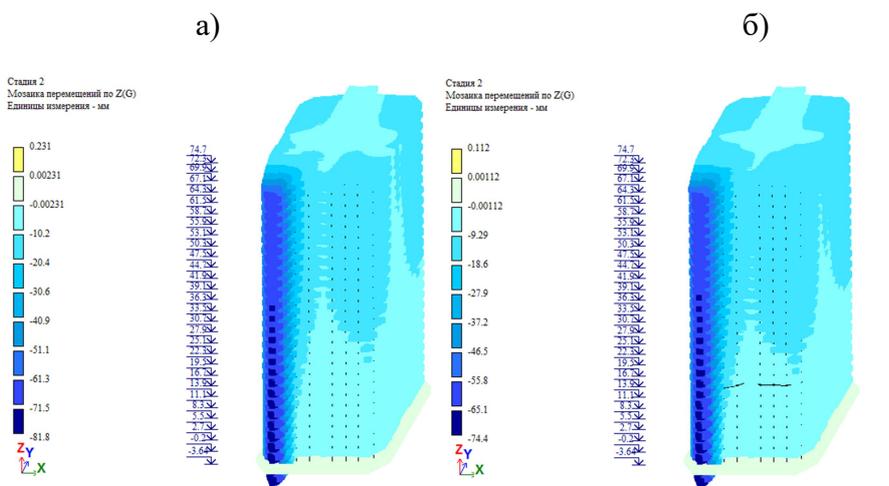


Рис. 9. Перемещение по Z: а) разрушение 2-х угловых колонн;
б) с балочным монолитным перекрытием на 7 этаже жилого дома

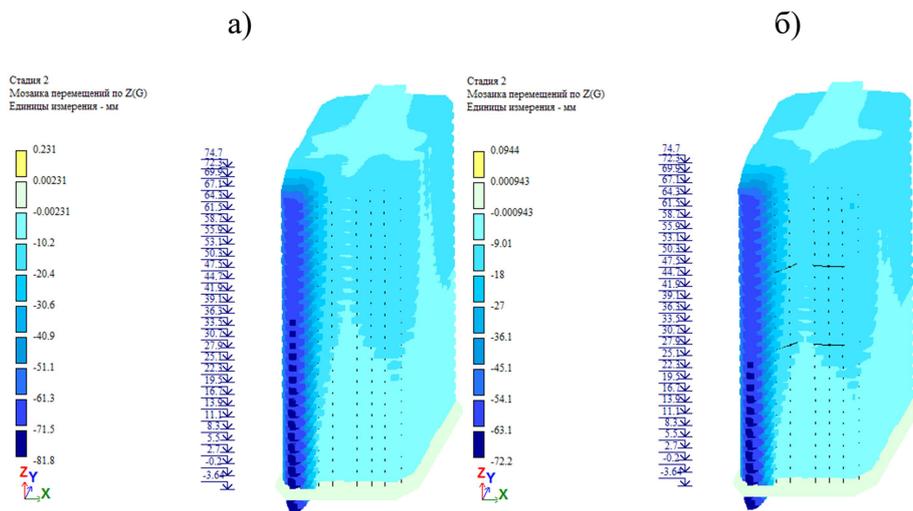


Рис. 10. Перемещение по Z: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 12 и 19 этаже жилого дома

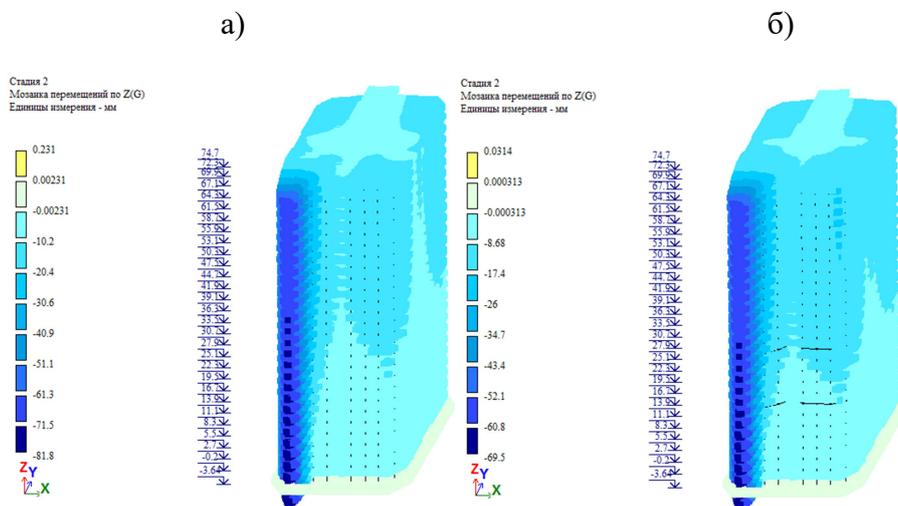


Рис. 11. Перемещение по Z: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 7 и 12 этаже жилого дома

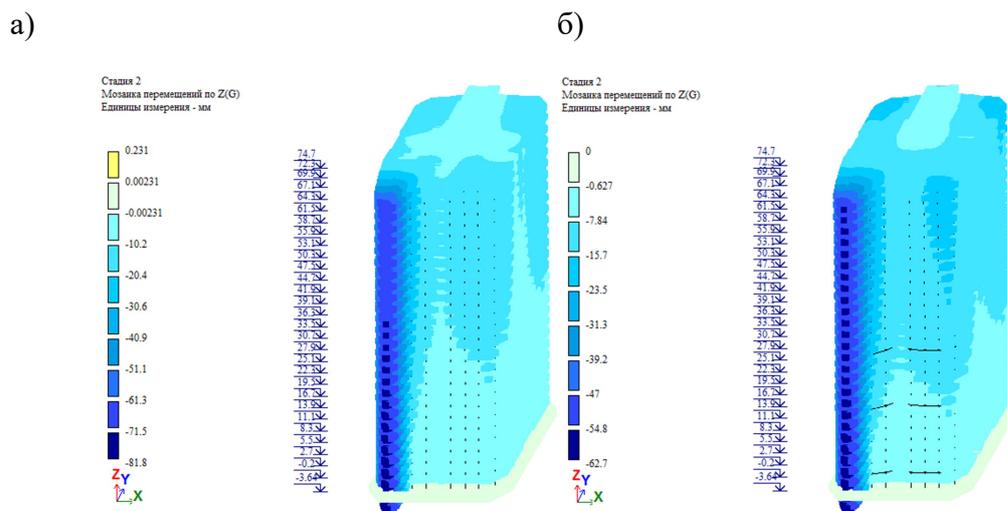
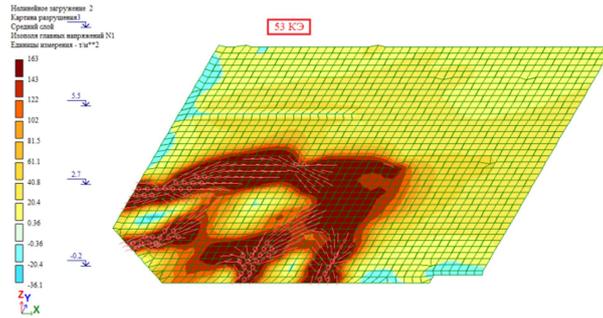


Рис. 12. Перемещение по Z: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 1, 7 и 12 этаже жилого дома

а)



б)

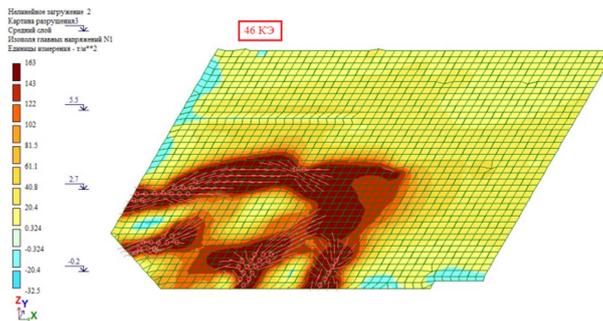
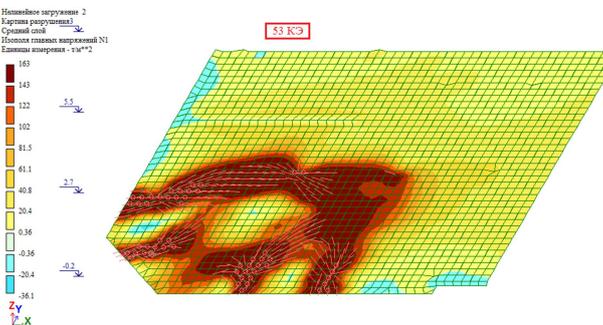


Рис. 13. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 12 этаже жилого дома

а)



б)

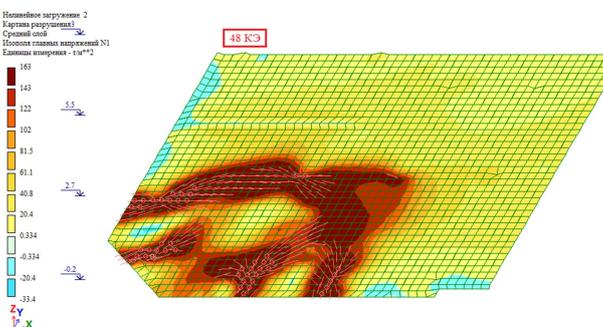


Рис. 14. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 19 этаже жилого дома

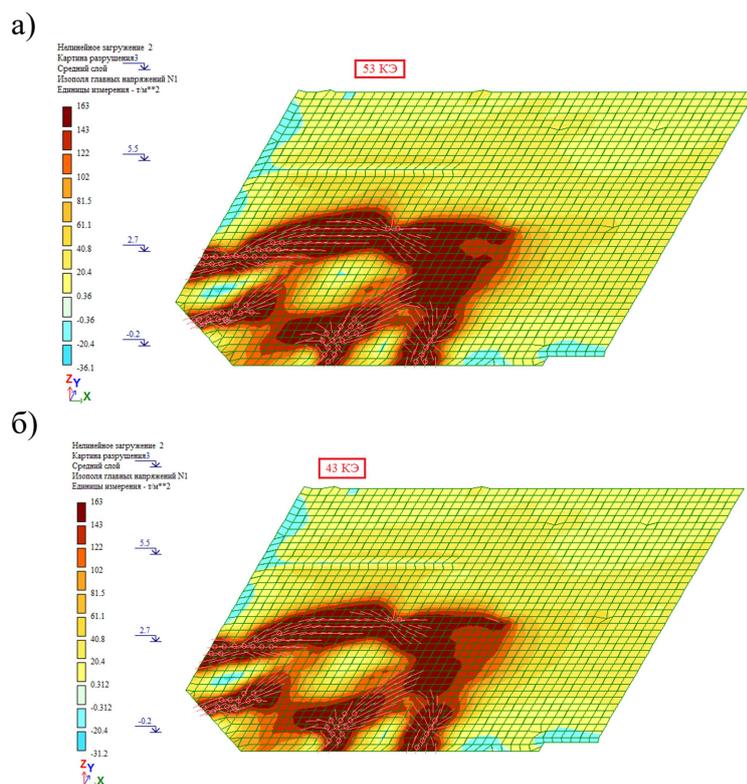


Рис. 15. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 7 этаже жилого дома

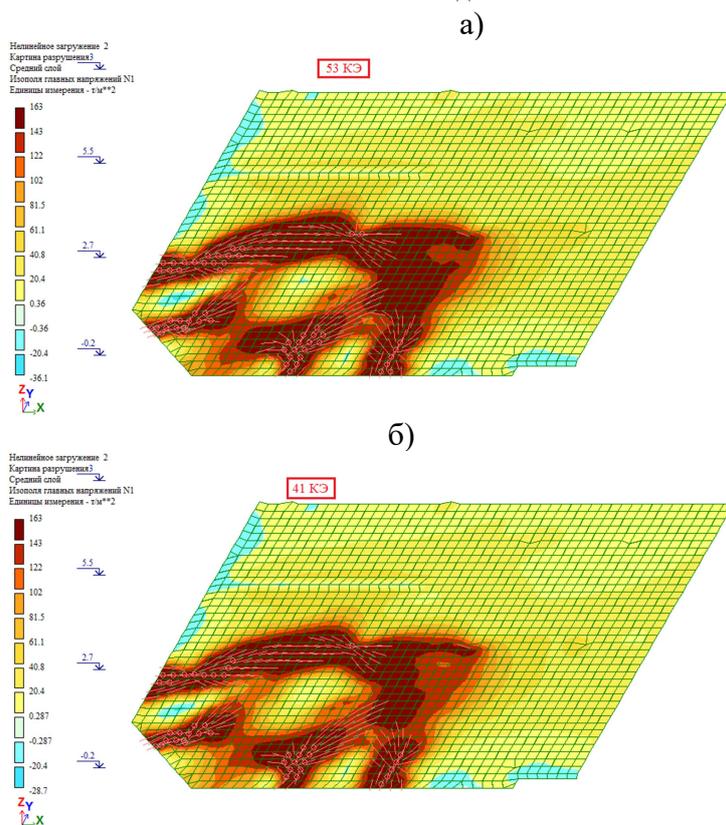


Рис. 16. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 12 и 19 этаже жилого дома

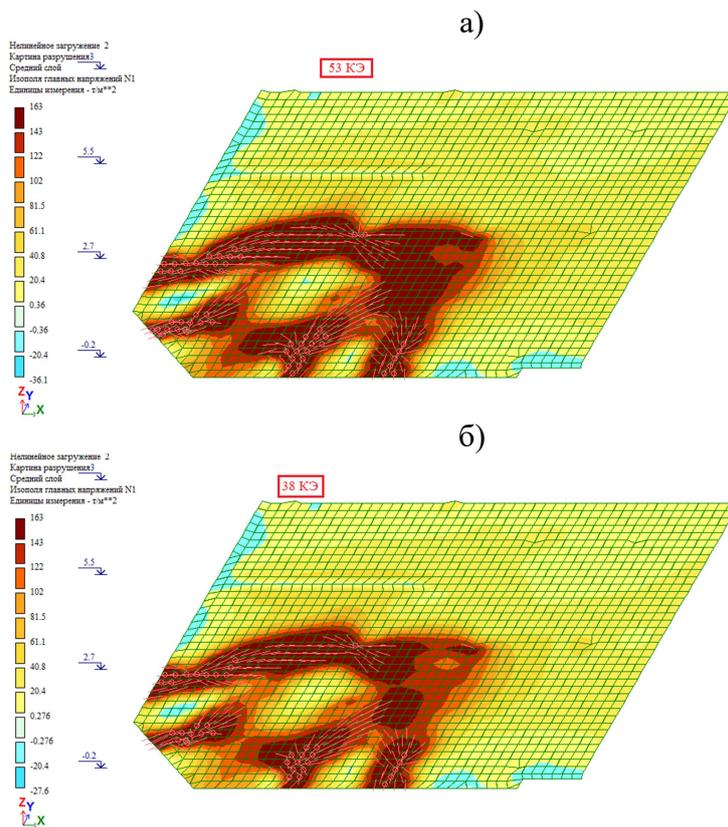


Рис. 17. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 7 и 12 этаже жилого дома

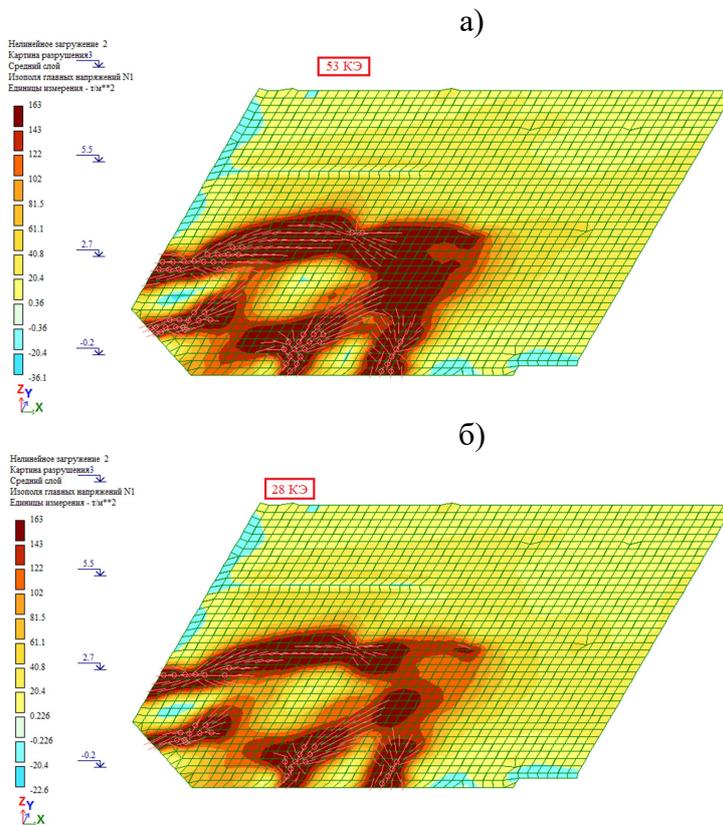


Рис. 18. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами: а) разрушение 2-х угловых колонн; б) с балочным монолитным перекрытием на 1, 7 и 12 этаже жилого дома

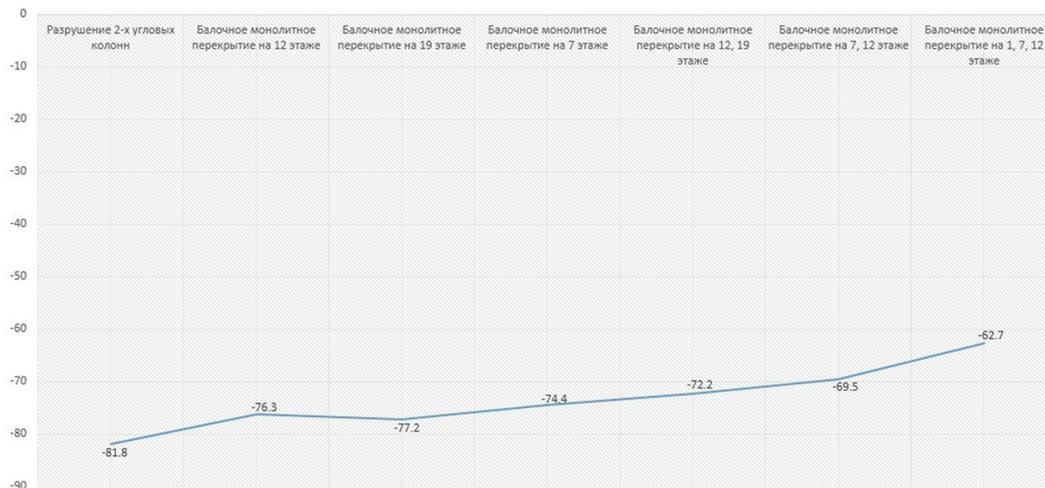


Рис. 19. Максимальное перемещение по Z в соответствии с расположением балочного монолитного перекрытия, мм

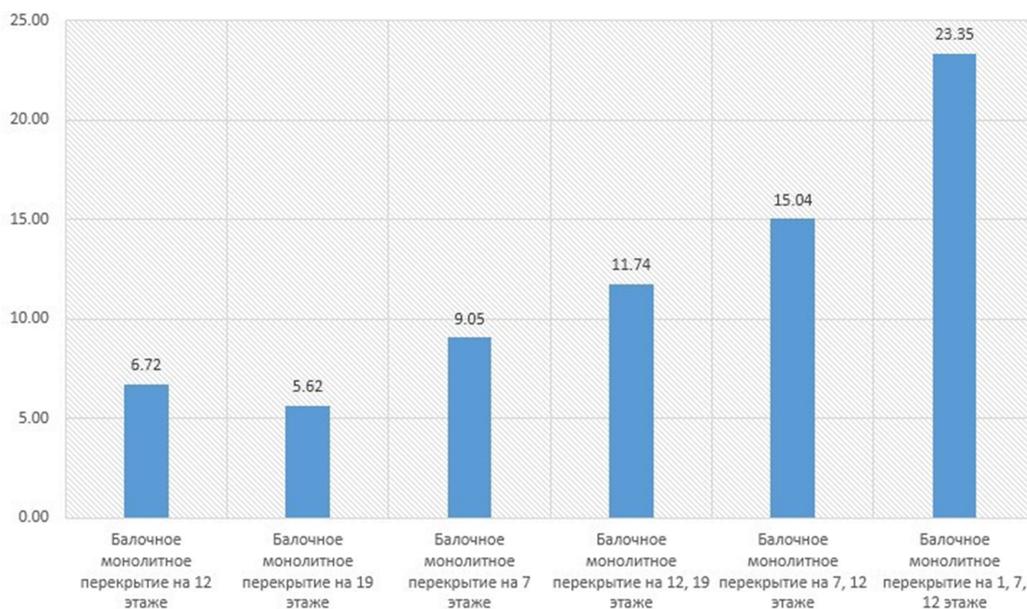


Рис. 20. Процентное уменьшение максимального перемещения по Z в соответствии с расположением балочного монолитного перекрытия от разрушения 2-х угловых колонн жилого дома

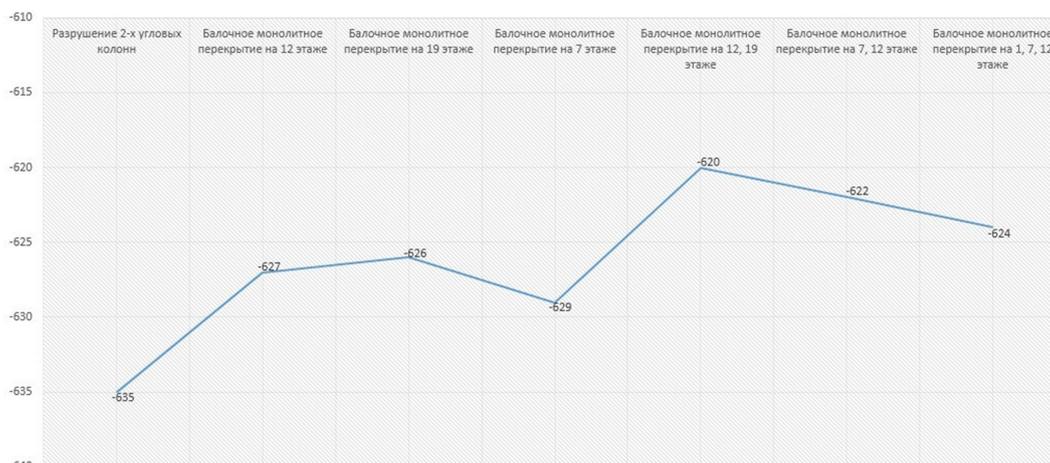


Рис. 21. Максимальное усилие N в колонне в соответствии с расположением балочного монолитного перекрытия, т

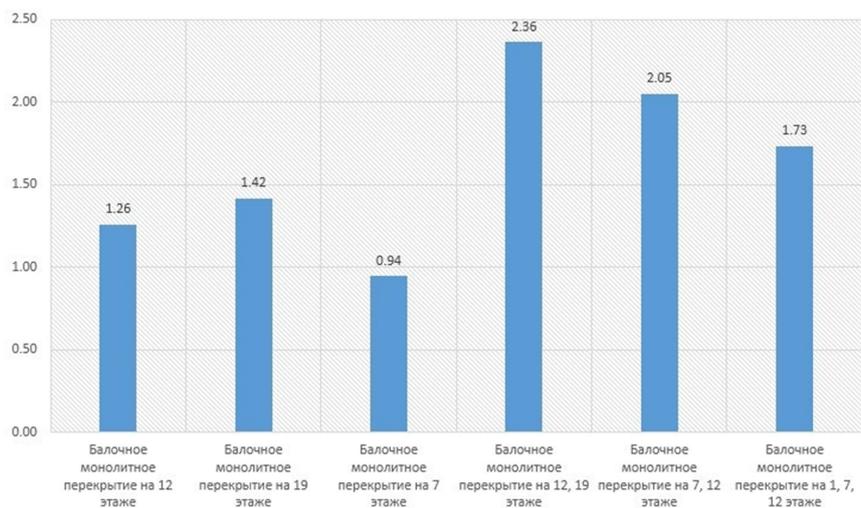


Рис. 22. Процентное уменьшение максимального усилия N в соответствии с расположением балочного монолитного перекрытия от разрушения 2-х угловых колонн жилого дома

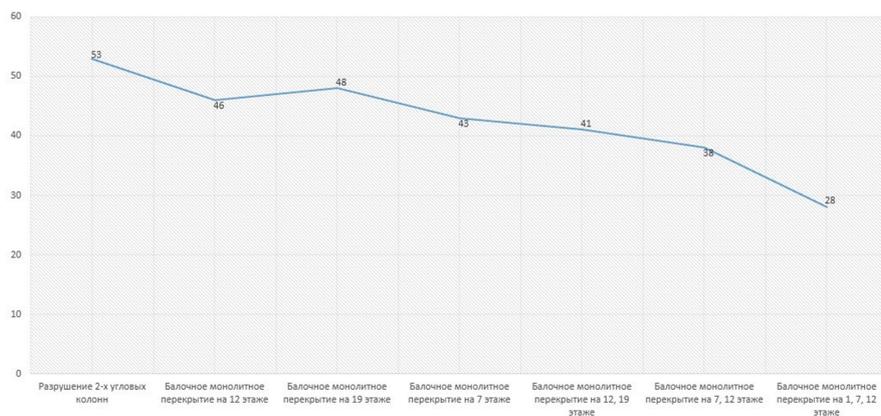


Рис. 23. Разрушения (кол-во КЭ в стадии образования пластического шарнира) в соответствии с расположением балочного монолитного перекрытия, кол-во КЭ

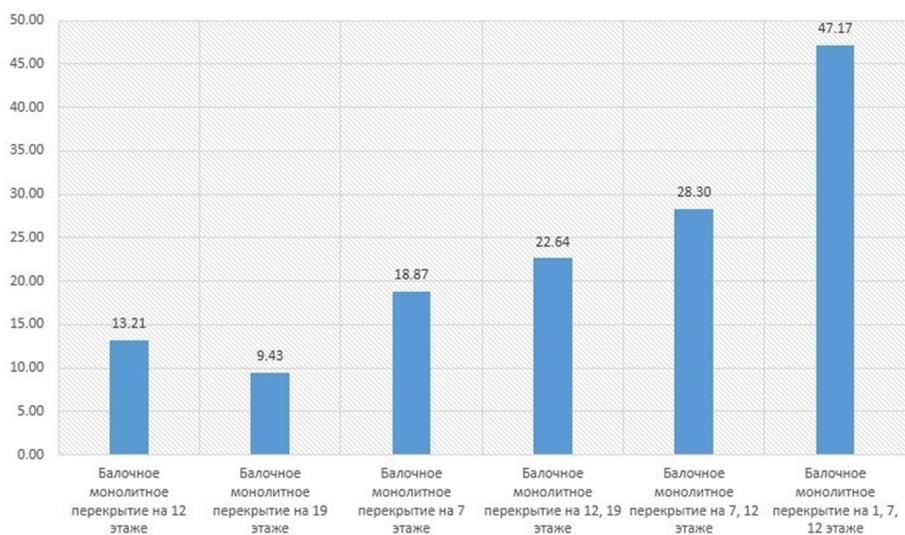


Рис. 24. Процентное уменьшение разрушения плиты перекрытия, участок над разрушенными элементами в соответствии с расположением балочного монолитного перекрытия от разрушения 2-х угловых колонн жилого дома

Перераспределение усилий в колонне в осях А-3

Описание	Усилие N в верхнем узле колонны в осях А-3, т			
	1 этаж	7 этаж	12 этаж	19 этаж
Разрушение 2-х угловых колонн	-596	-442	-314	-165
Балочное монолитное перекрытие на 12 этаже			-293	
Балочное монолитное перекрытие на 19 этаже				-147
Балочное монолитное перекрытие на 7 этаже		-416		
Балочное монолитное перекрытие на 12, 19 этаже			-290	-141
Балочное монолитное перекрытие на 7, 12 этаже		-413	-280	
Балочное монолитное перекрытие на 1, 7, 12 этаже	-588	-399	-271	
Мах процентные соотношения	1.34	9.73	13.69	14.55

Выводы

Предложенные рекомендации по расчету на прогрессирующее обрушение и способам защиты от него с использованием программного комплекса ЛИРА-САПР могут быть использованы при моделировании чрезвычайных ситуаций. Балочное монолитное перекрытие, как способ защиты от прогрессирующего обрушения, показал свою эффективность при расположении балочных монолитных перекрытий в нижней части по высоте здания по сравнению с другими вариантами расположения – в средней и верхней частях по высоте здания.

Библиографический список

1. Алмазова В. О. Проблемы сопротивления зданий прогрессирующему обрушению / В. О. Алмазова, А. И. Плотникова, Б. С. Расторгуева // Вестник МГСУ. – 2011. - №2. – С. 15-20.
2. Гензерский Ю. В. ЛИРА-САПР 2011: учеб. пособие / Гензерский Ю. В., Д. В. Медведев, О. И. Палиенко, В. П. Титок. – Киев.: Электронное издание, 2011, 396 с.
3. Городецкий Д. А. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ЛИРА-САПР 2013: учеб. пособие / Д. А. Городецкий, М. С. Барабаш, Р. Ю. Водопьянов, В. П. Титок, А. Е. Артамонова; под ред. акад. РААСН А. С. Городецкого. – Киев. – М.: Электронное издание, 2013. - 376 с.
4. Ефрюшин С. В. Исследование напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / С. В. Ефрюшин, А. С. Сарражинский // Строительная механика и конструкции. – 2016. - №2 (13). – С. 33-44.
5. Байков В. Н. Железобетонные конструкции. Общий курс: учебник для ВУЗов/ В. Н. Байков, Э. Е. Сигалов. – М., 2011, 767 с.

6. Молодых С. А. Возведение зданий и сооружений из монолитного железобетона: учеб. пособие / С.А. Молодых, Е.А. Митина, В.Т. Ерофеев [и др.] / - М.: Изд-во АСВ, 2005 – 192 с.
7. Рекомендации по защите монолитных жилых зданий от прогрессирующего обрушения / Москомархитектура. - М.: МНИИТЭП и НИИЖБ, 2005. – 40 с.
8. Струков С. Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния элементов монолитного железобетонного каркаса многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / С. Ю. Струков С.Ю., С. В. Ефрюшин, А. В. Глушков // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №2 (15). – С. 95-103.

References

1. Almazova V.O., Plotnikova V.O., Rastorguyeva B.S. Problems of buildings resistance to the progressing collapse. Bulletin of MGSU. – 2011. - No. 2. – P. 15-20.
2. Genzersky Yu.V. Medvedenko D.V., Paliyenko O.I., Titok V. P. LIRA-SAPR 2011. Manual // Genzersky Yu.V., – То.: Electronic edition, 2011, 396 p.
3. Gorodetsky D.A., Barabash M.S., Vodopyanov R.Yu., Titok V. P., Artamonov A.E Software LIRA-SAPR 2013. Manual under edition of the academician of RAASN Gorodetsky A. S.- Kiev. М.: Electronic issue, 2013, 376 p.
4. Efryushin S.V., Sarazhinsky A. S. Research of multistoried building base plate deflected mode with account of stages of its construction. Structural mechanics and constructions. 2016. No. 2 (13). P.33-44.
5. Bikes B. H., Sigalov E.E. Reinforced concrete structures. General course. Textbook for higher education institutions. М. 2011, 767 p.
6. Molodikh S.A., Mitin E.A, Erofeyev V.T. Construction of buildings and structures from monolithic reinforced concrete. М.: Publishing house of ACB, 2005, 192 p.
7. Recommendations on protection of monolithic residential buildings against progressive collapse. Moscomarkhitectura. - М.: МНИИТЕП and НИИЖБ, 2005. – 40 p.
8. Strukov S. Yu., Efryushin S.V., Glushkov A.V. Research of multistoried building reinforced frame deflected mode with account of stages of its construction. Structural mechanics and constructions. – 2017. - No. 2 (15). – P. 95-103.

УДК 699.81:624.014.004

РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ ОГНЕСТОЙКОСТИ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ УСИЛИЙ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

С. В. Ефрюшин¹, В. В. Юрьев²
Воронежский государственный технический университет^{1,2}
Россия, г. Воронеж

¹Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики

²Магистрант кафедры строительной механики, e-mail: vvuriev@gmail.com

Анализируются результаты расчета каркасного сооружения на непроектные нагрузки. Расчеты даются в программном комплексе «SCAD ++» при воздействии повышенных температур с учетом совместной работы строительных конструкций. Приводится график изменения нормальных напряжений в элементах каркаса, деформированный вид с учетом теплового расширения материала в момент наступления предельного состояния, а также определяется критическая температура. Кроме того, рассмотрено влияние перераспределения усилий на напряженно-деформированное состояние каркаса при воздействии повышенных температур на ограниченной площади.

Ключевые слова: металлический несущий каркас, перераспределение усилий, воздействие повышенных температур, программный комплекс SCAD ++.

DESIGN ANALYSIS OF STRUCTURES FIRE RESISTANCE WITH ACCOUNT OF FORCES REDISTRIBUTION UNDER LOCAL TEMPERATURE AFFECT

S.V. Efryushin¹, V.V. Yurev²
Voronezh State Technical University^{1,2}
Russia, Voronezh

¹PhD of Tech. Sc., associate professor of the department of Structural Mechanics

²Master of the department of Structural Mechanics, e-mail: vvuriev@gmail.com

The results of frame structure calculation to nondesign loads are analyzed. The calculations are given in software package “SCAD++” under the affect of higher temperatures with account of building structures mutual behavior. There is presented the diagram of normal tensions change in frame components and its deformed view with account of material thermal expansion at the limiting state moment and also the critical temperature is determined. The more so there was analyzed forces redistribution influence on frame deflected mode under the affect of higher temperatures on limited area.

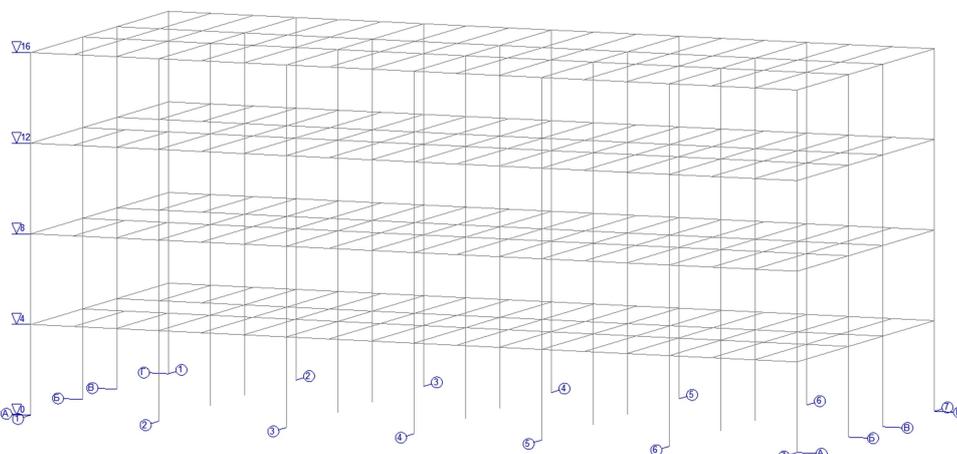
Keywords: metallic support frame, redistribution of forces, the effect of elevated temperatures, SCAD ++ software package.

Количество пожаров в торгово-административных зданиях за последние годы снижается, однако материальный ущерб, связанный с повреждением конструкций здания, возрастает. Применение технически сложных решений для современных промышленных и гражданских многоэтажных зданий с большими площадями требует разработки научно обоснованных методов определения огнестойкости конструкций.

Возникают проблемы с определением фактических пределов огнестойкости. Современные нормы [1] позволяют оценить НДС (напряженно-деформированное состояние) и предел огнестойкости элемента сооружения в условиях пожара, лишь изолировав его от влияния других элементов, в то время как учет совместной работы конструкций приводит к другим выводам об оцениваемых параметрах.

В работе исследуется перераспределение усилий в металлическом каркасном сооружении при воздействии повышенных температур на элементы каркаса. Хотя металлические (стальные) конструкции несгораемые, их фактический предел огнестойкости в среднем составляет 15 минут [2]. Это объясняется резким снижением деформативных и прочностных характеристик материала при повышенных температурах, что и приводит к таким опасным явлениям, как перераспределение усилий в конструкциях сооружений.

В качестве объекта исследования выбрана модель здания торгового склада, запроектированного для постройки в г. Воронеж. На рис. 1 представлен общий вид модели. Схема расположения колонн 1-го этажа представлена на рис. 2, жесткости элементов сооружения указаны на рис. 3.



Ф

Рис. 1. Общий вид расчетной схемы

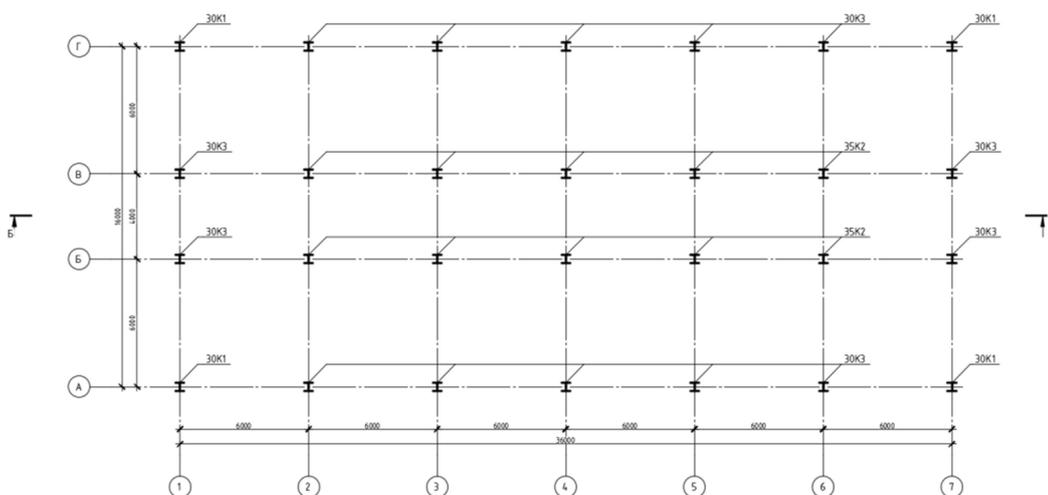


Рис. 2. Схема расположения колонн 1-го этажа

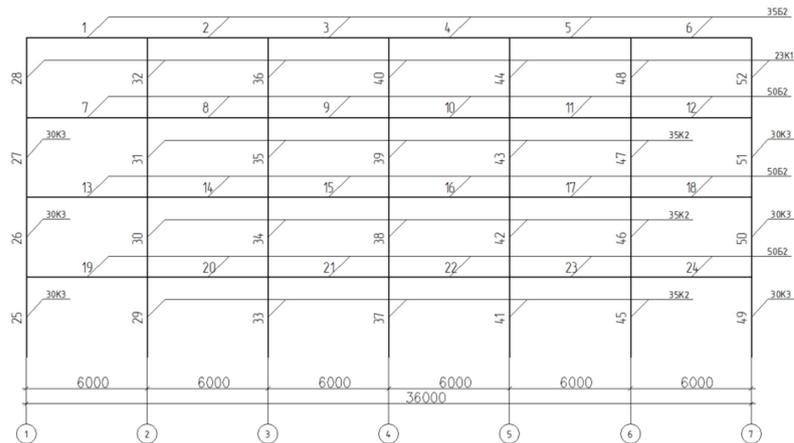


Рис. 3. Жесткости и нумерация элементов сооружения

Моделирование температурного воздействия осуществлялось в программном комплексе SCAD++ [3, 4] при помощи режима МОНТАЖ [5, 6, 7]. В работе рассмотрены температуры: 20 °С, 300 °С, 500 °С, 625 °С, 695 °С, 750 °С. Температуру всех нагреваемых элементов примем одинаковой в каждый момент времени, т.к. высокая теплопроводность металла позволяет предполагать, что теплоперенос в массе металлической конструкции является мгновенным и равномерным, поэтому для металла можно не использовать понятия температурного градиента ни по сечению, ни по длине элементов.

Для каждого варианта местоположения пожара и интенсивности температуры создавалась стадия монтажа, в которой к нагреваемым элементам прикладывалась температурная нагрузка (необходима для учета температурных деформаций), присваивались новые значения модуля упругости E и расчетного сопротивления R , вычисляемые по формулам (1) и (2):

$$E_t = E_{20} \cdot \beta_{tem}, \quad (1)$$

где β_{tem} - понижающий коэффициент, учитывающий падение модуля упругости E при нагреве, E_{20} - значение модуля упругости при $t = 20^\circ\text{C}$. График зависимости β_{tem} от температуры прогрева элемента представлен на рис. 4.

$$R_t = R_{20} \cdot \gamma_{tem} \quad (2)$$

где γ_{tem} - понижающий коэффициент, учитывающий падение расчетного сопротивления R при нагреве, R_{20} - значение расчетного сопротивления при $t = 20^\circ\text{C}$. График зависимости γ_{tem} от температуры прогрева элемента представлен на рис. 5.

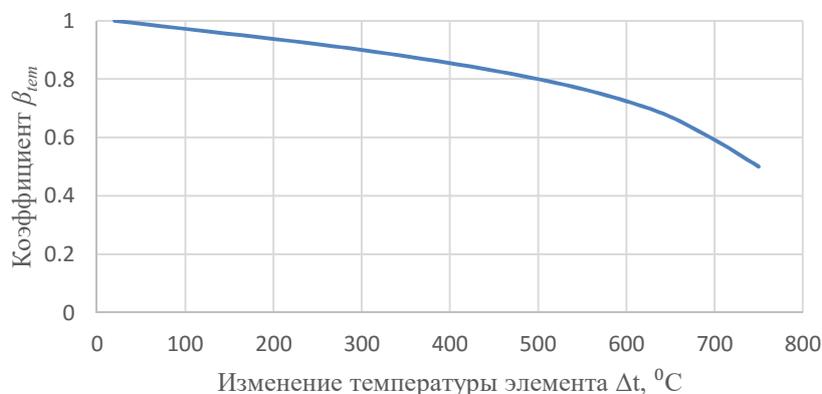


Рис. 4. Зависимость коэффициента β_{tem} от температуры прогрева элемента

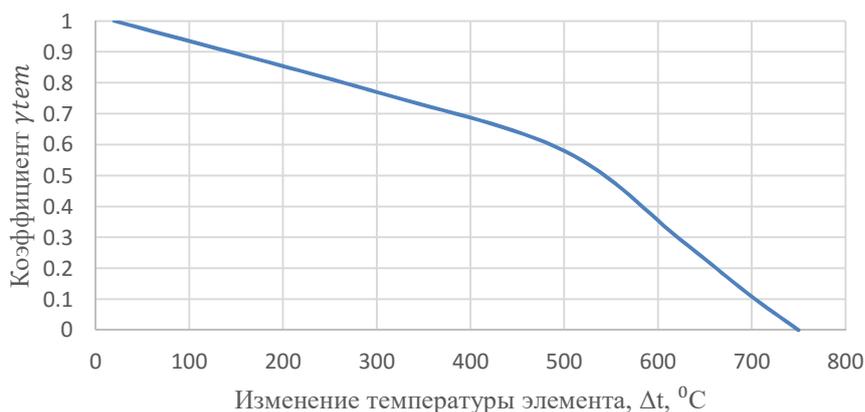


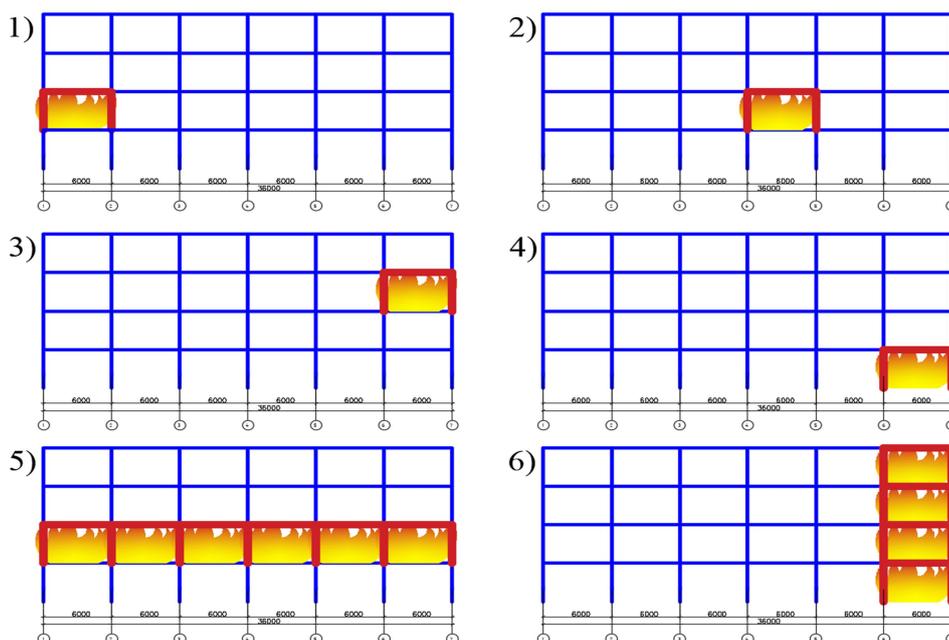
Рис. 5. Зависимость коэффициента γ_{tem} от температуры прогрева элемента

Все элементы каркаса были разделены на 2 группы:

I группа – элементы, подверженные воздействию температур. В этой группе элементов отслеживалось изменение модуля упругости E , расчетного сопротивления R , нормальных напряжений σ .

II группа – элементы, не подверженные воздействию температур. В этой группе элементов отслеживалось изменение нормальных напряжений σ .

Рассмотрено 6 расчетных ситуаций (рис. 6), позволяющих оценить влияние размеров и местоположения пожара на НДС конструкции.



1 – расчетная ситуация №1; 2 – расчетная ситуация №2; 3 – расчетная ситуация №3;
4 – расчетная ситуация №4; 5 – расчетная ситуация №5; 6 – расчетная ситуация №6

Рис. 6. Расчетные ситуации

По результатам расчетов в каждой расчетной ситуации для всех элементов получены графики зависимости нормальных напряжений σ от температуры нагреваемых элементов, а так же эпюры N [кН], M [кНм] при критической температуре. В работе приведены наиболее характерные графики и эпюры. Ниже представлены результаты по каждой расчетной ситуации с пояснениями.

Расчетная ситуация №1

Воздействие повышенных температур на металлоконструкции моделируется в крайнем левом пролете в осях 1-2/А-Б, на отметках от +4,000 м до +8,000 м. Нумерация элементов представлена на рис. 3. Зона возгорания показана на рис. 6.

Анализ элементов группы I

Рассматриваются элементы, подвергающиеся нагреву, т.е. с понижающимися в зависимости от температуры деформационными характеристиками.

Для элемента №14 график изменения нормальных напряжений представлен на рис. 7, эпюры продольной силы N [кН] и изгибающего момента M [кНм] приведены на рис. 8.

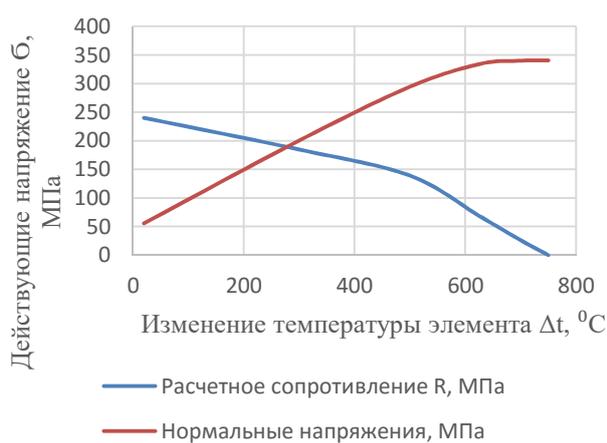


Рис. 7. График зависимости напряжений σ от температуры для элемента №26

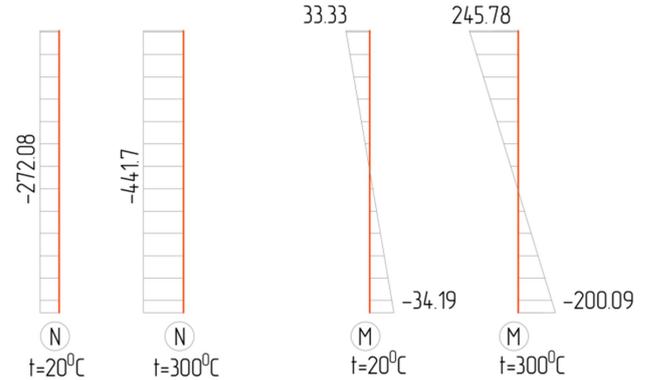


Рис. 8. Эпюры N , [кН], M , [кНм] при $t = 20^\circ\text{C}$ и $t = 300^\circ\text{C}$ для элемента №26

При изменении температуры элементов с 20 до 300°C нормальные напряжения σ увеличиваются в 4 раза (рис. 7). Значения продольной силы N и изгибающего момента M в данном температурном диапазоне значительно возрастают (рис. 8). Потеря несущей способности элемента наступает при температуре $t_{\text{кр}}=300^\circ\text{C}$ через 8 минут стандартного пожара в случае незащищенных конструкций.

Для элемента №13 график изменения нормальных напряжений представлен на рис. 9, эпюры продольной силы N [кН] и изгибающего момента M [кНм] приведены на рис. 10.

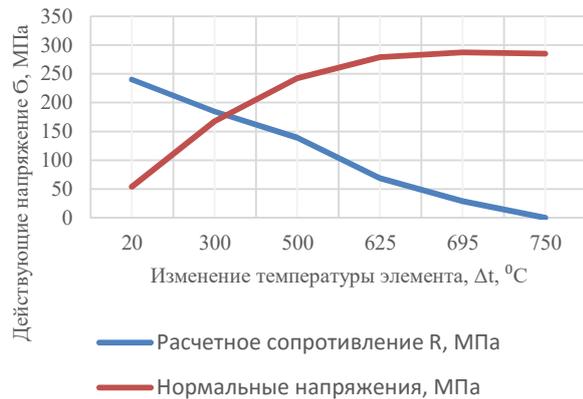


Рис. 9. График зависимости напряжений σ от температуры для элемента №13

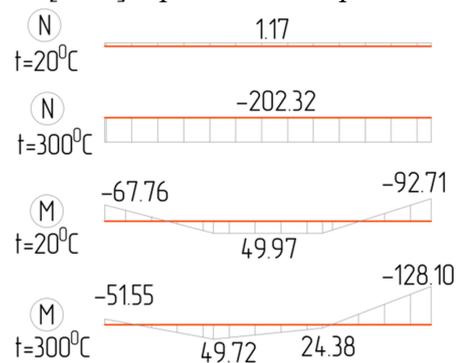


Рис. 10. Эпюры N , [кН], M , [кНм] при $t = 20^\circ\text{C}$ и $t = 300^\circ\text{C}$ для элемента №13

При изменении температуры элементов с 20 до 300 °С нормальные напряжения σ увеличиваются в 3 раза (рис. 9). Появляется значительная продольная сила N , значение изгибающего момента M в данном температурном диапазоне увеличивается на опорах, но понижается в пролете (рис.10). Потеря несущей способности элемента наступает при температуре $t_{кр}=350$ °С.

Анализ элементов группы II

В данном случае расчетное сопротивление не изменяется, т.к. элементы не подвергаются воздействию повышенных температур. Однако наблюдается рост нормальных напряжений, в связи с перераспределением усилий.

Для элемента №14 график изменения нормальных напряжений представлен на рис. 11, эпюры продольной силы N [кН] и изгибающего момента M [кНм] приведены на рис. 12.

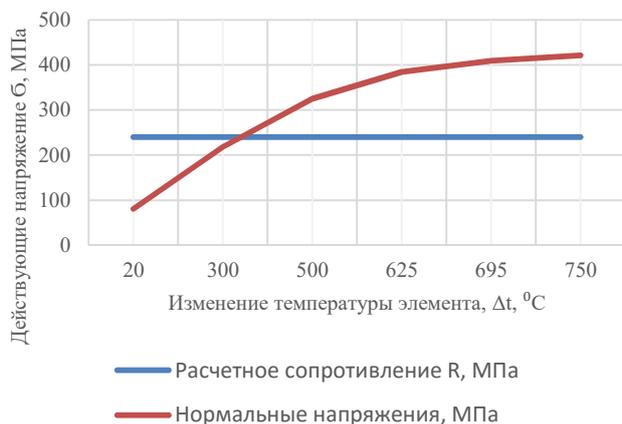


Рис. 11. График зависимости напряжений σ от температуры для элемента №14

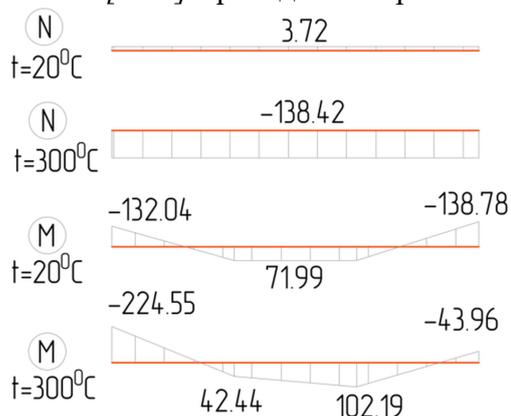


Рис. 12. Эпюры N , [кН], M , [кНм] при $t = 20$ °С и $t = 300$ °С для элемента №14

При изменении температуры элементов с 20 °С до 300 °С нормальные напряжения σ увеличиваются в 3 раза (рис. 11). Появляется значительная продольная сила N , значение изгибающего момента M в данном температурном диапазоне увеличивается на левой опоре и в пролете, но понижается на правой опоре (рис. 12). Потеря несущей способности наступает при температуре нагреваемых элементов $t_{кр}=350$ °С через 7 минут стандартного пожара в случае незащищенных конструкций.

По результатам расчетов следует, что критической температурой для данной расчетной ситуации является $t_{кр}=300$ °С. На рис. 13 представлен деформированный вид каркаса при критической температуре.

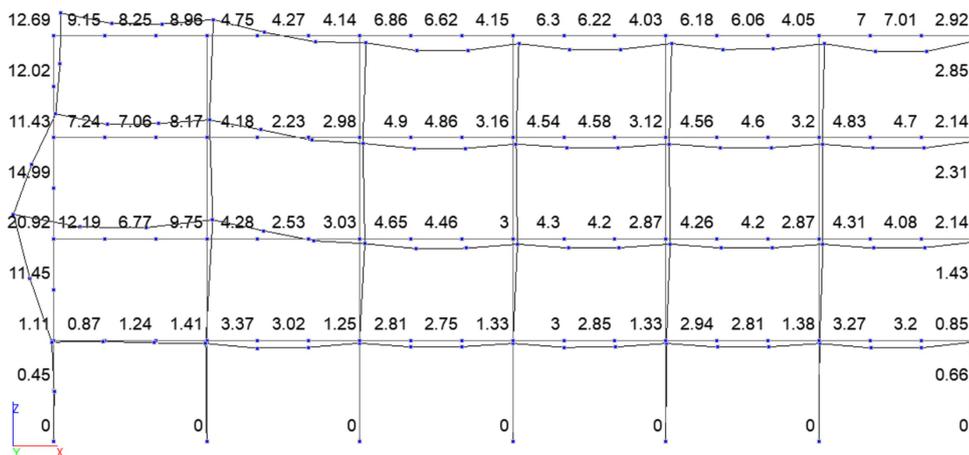


Рис. 13. Деформированный вид каркаса при $t_{кр}=300$ °С

Из рис. 13 следует, что перераспределение усилий в результате температурных воздействий не ограничивается локально в зоне возгорания, а распространяется по всему каркасу.

Расчетная ситуация №2

Воздействие повышенных температур на металлоконструкции моделируется в среднем пролете в осях 4-5/А-Б, на отметках от +4,000 м до +8,000 м. Местоположение пожара и нумерация элементов представлены на рис. 3. Зона возгорания показана на рис. 6. На рис.14 представлен деформированный вид каркаса при критической температуре.

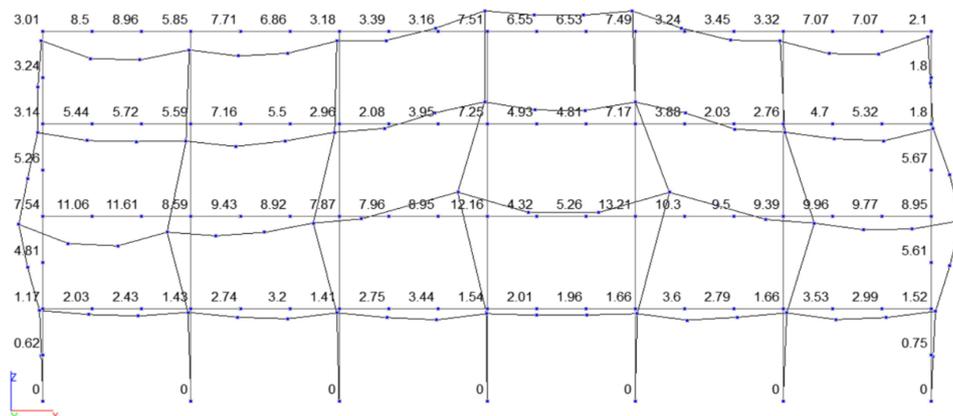


Рис. 14. Деформированный вид каркаса при $t_{кр}=300^{\circ}C$

Расчетная ситуация №3

Из анализа графиков $\sigma(t)$ для каждого элемента видно, что потеря несущей способности наступает при $t_{кр}=300^{\circ}C$ (рис. 14). Заметим, что данное местоположение возгорания более опасно, чем в 1-ой расчетной ситуации, т.к. при одинаковых температурах перемещения удаленных от очага возгорания элементов выше.

Расчетная ситуация №3

Воздействие повышенных температур на металлоконструкции моделируется в крайнем правом пролете в осях 6-7/А-Б, на отметках от +8,000 м до +12,000 м. Местоположение пожара и нумерация элементов представлены на рисунке 3. Зона возгорания показана на рис. 6. Деформированный вид приведен на рис. 15.

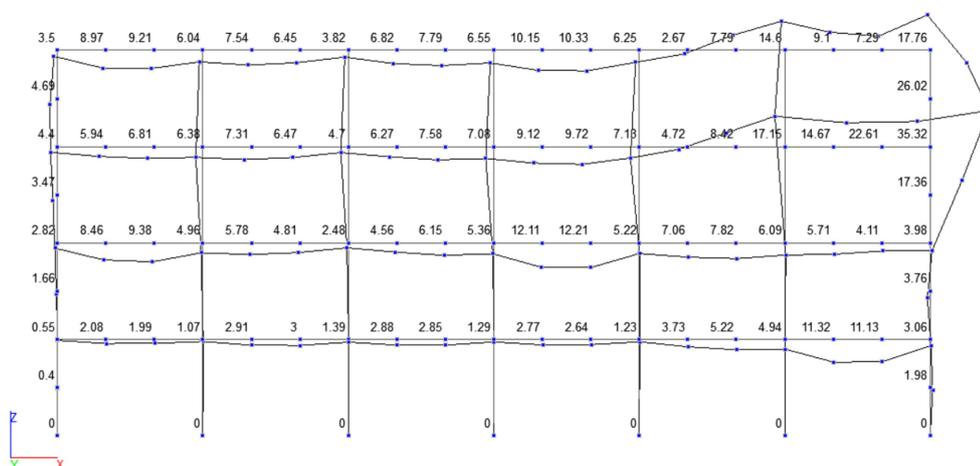


Рис. 15. Деформированный вид при $t_{кр}=500^{\circ}C$

В случае расположения очага возгорания в крайнем пролете на последнем этаже критическая температура возрастает до $t_{кр}=500\text{ }^{\circ}\text{C}$. Появляются значительные температурные деформации, однако следует отметить, что они более локализованы, в отличие от расчетных ситуаций №1-2.

Расчетная ситуация №4

Воздействие повышенных температур на металлоконструкции моделируется в среднем пролете в осях 6-7/А-Б, на отметках от +0,000 м до +4,000 м. Местоположение пожара и нумерация элементов представлены на рис. 3. Зона возгорания показана на рис. 6. На рис. 16 представлен деформированный вид каркаса при критической температуре.

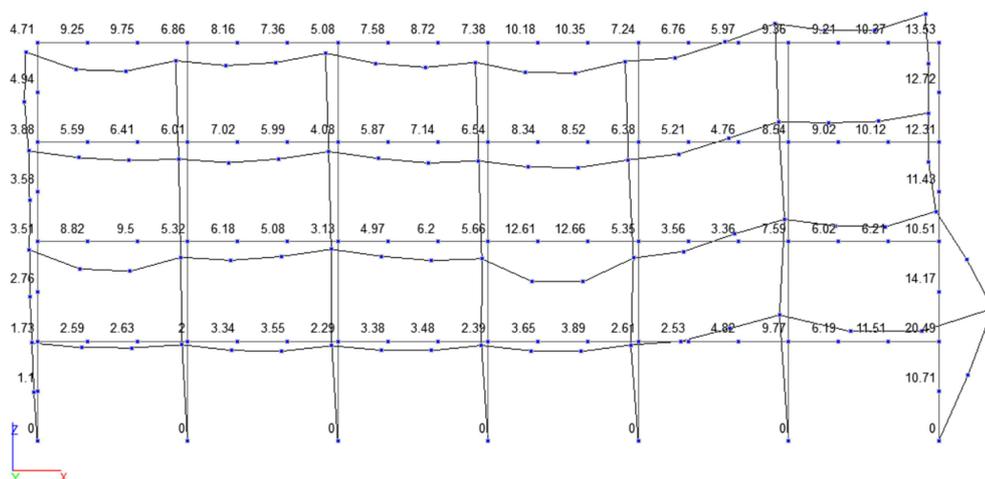


Рис. 16. Деформированный вид каркаса при $t=500\text{ }^{\circ}\text{C}$

Из анализа графиков $\delta(t)$ следует что критическая температура $t_{кр}=500\text{ }^{\circ}\text{C}$. При этой температуре перераспределение усилий наблюдается по всему каркасу, вследствие чего перемещения всех элементов растут.

Расчетная ситуация №5

Воздействие повышенных температур на металлоконструкции моделируется в среднем пролете в осях 1-7/А-Б, на отметках от +4,000 м до +8,000 м. Местоположение пожара и нумерация элементов представлены на рисунке 3. Зона возгорания показана на рис. 6. Деформированный вид приведен на рис. 17.

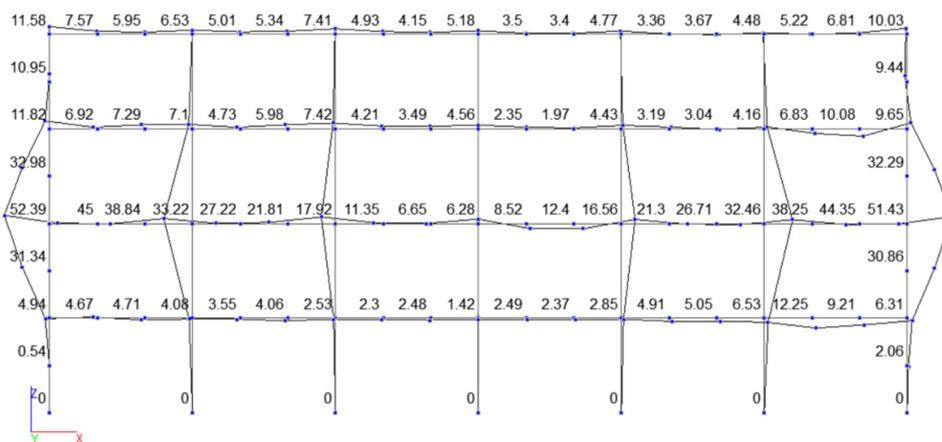


Рис. 17. Деформированный вид при $t_{кр}=300\text{ }^{\circ}\text{C}$

Отметим, что элементы прогреваются симметрично и равномерно, поэтому перераспределение усилий относительно локализовано и мало влияет на деформации отдаленных элементов. Но предельное состояние наступает уже при малых температурах (до 150⁰С), т.к. общая велики температурные деформации.

Расчетная ситуация №6

Воздействие повышенных температур на металлоконструкции моделируется в среднем пролете в осях 6-7/А-Б, на отметках от +0,000 м до +16,000 м. Местоположение пожара и нумерация элементов представлено на рис. 3. Зона возгорания показана на рис. 6. Деформированный вид приведен на рис. 18.

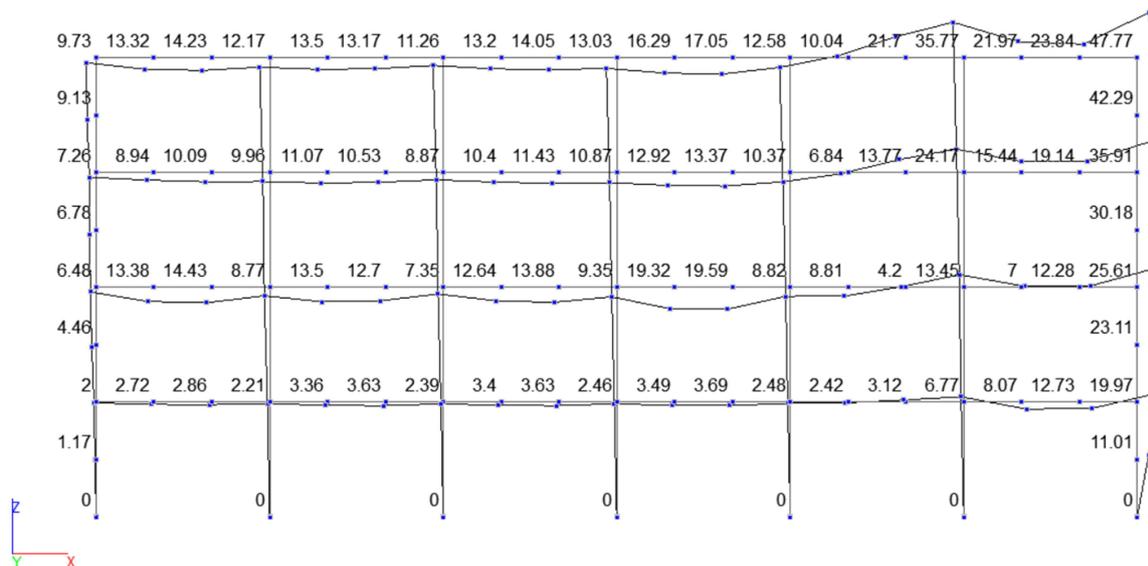


Рис. 18. Деформированный вид при $t=300^{\circ}\text{C}$

Критическая температура $t_{кр}=300^{\circ}\text{C}$. Прогрев элементов не симметричен относительно центра здания, что привело к перераспределению усилий и увеличению перемещений даже в отдаленных элементах.

Выводы

Перераспределение усилий в результате падения модуля упругости и температурных расширений при локальных температурных воздействиях значительно влияет на напряженно-деформированное состояние конструкции.

Для ригелей, подвергающихся огневому воздействию, окруженных элементами с более низкой температурой, характерно уменьшение моментов в пролете и увеличение моментов на опорах.

Для ригелей, не подвергающихся воздействию повышенных температур, но опирающихся на более нагретые колонны, характерно заметное увеличение изгибающих моментов в плоскости рамы по всей длине элемента.

В результате температурных расширений происходит существенное перераспределение изгибающих моментов в каркасе. В некоторых случаях это приводит к появлению предельного состояния в элементах.

Численное моделирование локальных температурных воздействий будет способствовать повышению эксплуатационной надежности конструкций при действии пожаров.

Наиболее опасным случаем распространения пожара является расчетная ситуация №5. При отсутствии огнезащитного покрытия колонны крайних рядов теряют несущую способность через 4 минуты пожара при $t_{кр}=150^{\circ}\text{C}$. Общая длина нагреваемых ригелей в данной расчетной ситуации достаточно велика, поэтому температурные деформации значительны. Это приводит к резкому увеличению изгибающих моментов в колоннах уже при малых температурах. В результате данные элементы имеют низкий фактический предел огнестойкости.

При проектировании зданий и сооружений рекомендуется:

расчетным путем производить анализ потери несущей способности элементов при различных вариантах воздействия пожаров (температурных воздействий);

производить расчет огнестойкости элементов сооружений с учетом перераспределения усилий между элементами сооружения;

проектировать огнезащиту по результатам расчета с учетом совместной работы всех элементов конструкций.

Библиографический список

1. СП 2.13130.2012 «Системы противопожарной защиты. Обеспечение огнестойкости объектов защиты (с Изменением №1)»
2. Пронин, Д. Г. Огнестойкость стальных несущих конструкций / Д. Г. Пронин. – М.: Изд-во АКЦИОМ ГРАФИКС ЮНИОН, 2015. – 52 с.
3. SCAD Office. Вычислительный комплекс SCAD/ В. С. Карпиловский, Э. З. Криксунов, А. А. Маляренко, М. А. Микитаренко, А. В. Перельмутер, М. А. Перельмутер. – М., 2004. - 592 с.
4. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Издание второе. Переработанное и дополненное/ А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: Изд-во «Сталь», 2002. – 618 с.
5. Струков С.Ю. Исследование напряженно-деформированного состояния элементов монолитного железобетонного каркаса многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / С. Ю. Струков, С. В. Ефрюшин, А .В. Глушков // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №2(15). – С. 95-103.
6. Струков С. Ю. Расчетный анализ напряженно-деформированного состояния монолитного каркаса многоэтажного здания при учете стадийности возведения / С. Ю. Струков, С. В. Ефрюшин // Строительная механика и конструкции. – 2015. - №2(11). – С. 79-89.
7. Ефрюшин С. В. Исследование напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты многоэтажного здания с учетом этапов его возведения / С. В. Ефрюшин, А. С. Саржинский // Строительная механика и конструкции. – 2016. - №2(13). – С. 33-43.

References

1. SP 2.13130.2012 "Fire protection systems. Ensuring of the fire resistance of protection objects. (with amendment №1) "
2. Pronin, D.G. Fire resistance of steel bearing structures / Pronin DG - Moscow: Publishing House AXIOM GRAPHICS UNION, 2015. - 52 p.
3. SCAD Office. Computing complex SCAD / V.S. Karpilovsky, E.Z. Kriksunov, A.A. Malyarenko, M.A. Mykytarenko, A.V. Perelmuter, M.A. Perelmuter. - M., 2004. - 592 p. SCAD Office.
4. Perelmuter, A.V. Design models of structures and the possibility of their analysis. Second issue. Revised and enlarged / A.V. Perelmuter, V.I. Sluker; Publisher "Steel". - M., 2002. - 618 p.
5. Strukov S.Yu. Study of the stress-strain state of the elements of the monolithic reinforced concrete frame of a multi-storey building, taking into account the stages of its construction / S.Yu. Strukov, S.V. Efryushin, A.V. Glushkov // Structural mechanics and structures. - 2017. - №2 (15). - pp. 95-103.
6. Strukov S.Yu. Computational analysis of the stress-strain state of the monolithic frame of a multi-storey building, taking into account the staging of construction / S.Yu. Strukov, S.V. Efryushin // Structural mechanics and structures. - 2015. - №2 (11). - pp. 79-89.
7. Efryushin S.V. Study of the stress-strain state of the foundation slab of a multistory building taking into account the stages of its construction / S.V. Efryushin, A.S. Sarazhinsky // Structural mechanics and structures. - 2016. - №2 (13). - p. 33-43.

Научное издание

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И КОНСТРУКЦИИ**

Научно-технический журнал

Выпуск № 4(19)

Редактор Аграновская Н.Н.

Дата выхода в свет: 17.12. 2018. Формат 60*84 1/18. Уч.-изд. л. 13,5.

Усл. печ. л. 13,6. Бумага писчая. Тираж 500 экз. Заказ № 308.

Цена свободная

Адрес учредителя и издателя: 394026 г. Воронеж, Московский проспект, 14

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии издательства
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84