

# **СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ**

**Научно-технический журнал**

**Выпуск № 3 (18), 2018**

- Строительная механика и сопротивление материалов
- Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела
- Механика грунтов
- Расчет и проектирование металлических конструкций
- Расчет и проектирование железобетонных конструкций
- Расчет и проектирование конструкций из полимерных материалов
- Расчет и проектирование мостов и транспортных сооружений
- Расчет и проектирование оснований и фундаментов зданий и сооружений
- Прочность соединений элементов строительных конструкций
- Динамическое воздействие подвижной нагрузки на упругие системы
- Экспериментальные и натурные исследования конструкций и материалов

**Воронеж**

# **STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES**

**Scientific and Technical Journal**

**Выпуск № 3 (18), 2018**

- Structural Mechanics and Strength of materials
- Applied problems of solid body under deformation
- Soil Mechanics
- Calculation and design of metal structures
- Calculation and design of reinforced concrete structures
- Calculation and design from polymeric structures
- Calculation and design of bridges and transport structures
- Calculation and design of bases and foundations of buildings and structures
- Strength of joints of building structure units
- Mobile load dynamic affect on elastic system
- Pilot and field observations of structures and materials

**Voronezh**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

## Научно-технический журнал

**Учредитель** – Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

**Издатель** – Строительный факультет Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Воронежский государственный технический университет»

### Редакционная коллегия журнала:

**Главный редактор: Сафронов В. С.**, д-р техн. наук, проф.,  
Воронежский государственный технический университет

**Зам. главного редактора – Ефрешин С. В.**, канд. техн. наук, доцент,  
Воронежский государственный технический университет

**Ответственный секретарь - Габриелян Г. Е.**, канд. техн. наук, доцент,  
Воронежский государственный технический университет

### Члены редколлегии:

**Гриднев С. Ю.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Зверев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Липецкий государственный технический университет

**Кирсанов М. Н.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Национальный исследовательский университет "МЭИ",  
г. Москва

**Козлов В. А.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Колчунов В. И.**, д-р техн. наук, проф., Юго-Западный государственный университет, г. Курск

**Леденев В. В.**, д-р техн. наук, проф., Тамбовский государственный технический университет

**Нгуен Динь Хоа**, канд. техн. наук, Национальный Строительный университет, Ханой, Вьетнам

**Нугужинов Ж. С.**, д-р техн. наук, проф., научно-исследовательский, экспертный и изыскательский «Казахстанский многопрофильный институт Реконструкции и Развития», Карагандинский государственный технический университет, Казахстан

**Овчинников И. Г.**, д-р техн. наук, проф., Саратовский государственный технический университет

**Пшеничкина В. А.**, д-р техн. наук, проф., Волгоградский государственный технический университет

**Трещев А. А.**, д-р техн. наук, проф., Тульский государственный университет

**Турищев Л. С.**, канд. техн. наук, доцент, Полоцкий государственный университет, Белоруссия

**Шапиро Д. М.**, д-р техн. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

**Шимановский А. О.**, д-р техн. наук, проф., Белорусский государственный университет транспорта, Белоруссия

**Шитикова М. В.**, д-р физ.-мат. наук, проф., Воронежский государственный технический университет

Адрес редакции: 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84, ком. 2211  
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: vss22@mail.ru

© ФГБОУ ВО «ВГТУ», 2018

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

## Scientific and Technical Journal

**Founder** - State Educational Institute of Higher Education “Voronezh State Technical University”

**Editor** – Construction department of Federal State Government-financed Educational Institute of Higher Education “Voronezh State Technical University”

### Editorial board:

**Chief editor: Safronov V.S.**, Dr of Tech.Sc., professor,  
“Voronezh State Technical University”

**Deputy of chief editor – Efryushin S.V.**, PhD of Tech. Sc., associate professor,  
“Voronezh State Technical University”

**Senior Secretary - Gabrielyan G.E.**, PhD of Tech. Sc., associate professor,  
“Voronezh State Technical University”

### Members of editorial board:

**Gridnev S.Yu.**, Dr of Tech., prof., Voronezh State Technical University

**Zverev V.V.**, Dr of Tech., prof., Lipetsk State Technical University

**Kirsanov M.N.**, Dr of Physical –Mathematical Sc., prof., National research university "MEI", Moscow

**Kozlov V.A.**, Dr of Physical and Mathematical Sc., prof., Voronezh State Technical University

**Kolchunov V.I.**, Dr of Tech., prof., South-East State University, Kursk

**Ledenyov V.V.**, Dr of Tech., prof., Tambov State Technical University

**Nguyen Dinh Hoa**, PhD of Tech. Sc., National Construction University, Hanoi, Vietnam

**Nuguzhinov Zh. S.**, Dr of Tech., prof. Scientific –research, expert and exploration “Kazakhstan multisectoral institute of reconstruction and development”, Karaganda State Technical University , Kazakhstan

**Ovchinnikov I.G.**, Dr of Tech., prof., Saratov State Technical University

**Pshenichkina V.A.**, Dr of Tech., prof., Volgograd State Technical University

**Treshchyov A.A.**, Dr of Tech., prof., Tula State University

**Turishchev L.S.**, PhD of Tech.Sc., associate professor, Polotsk State University, Byelorussia

**Shapiro D.M.**, Dr of Tech., prof., Voronezh State Technical University”

**Shimanovsky A.O.**, Dr of Tech., prof., Byelorussian State University of Traffic, Byelorussia

**Shitikova M.V.**, Dr of Physical and Mathematical Sc., prof., Voronezh State Technical University

© FGBOU VO «VGTU», 2018

16+

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.....</b>	<b>7</b>
<i>Аверин А. Н.</i> Конечный элемент жесткой нити.....	7
<i>Трещев А. А., Судакова И. А.</i> О связи деформаций с напряжениями для изотропных материалов, не подчиняющихся гипотезе «единой кривой деформирования» в квазилинейном приближении.....	18
<i>Курсанов М. Н.</i> Индуктивный анализ деформативности плоской мнорешетчатой фермы .....	28
<i>Белянкин Н. А., Бойко А. Ю., Плясова А. А.</i> Индуктивный анализ деформативности многорешетчатой фермы при несимметричном нагружении .....	33
<i>Синозерский А. Н., Мухтаров Р. А.</i> Условные параллельные состояния внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью в границах ядра сечения призм из мелкозернистого бетона...	42
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ .....</b>	<b>51</b>
<i>Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Мартынова М. М.</i> Расчет плоского стального каркаса на статическую нагрузку с учетом пластических деформаций материала .....	51
<i>Ефреушин С. В., Бурлаков А. В., Шаранин А. И.</i> Вынужденные колебания мачты. Исследование динамической реакции конструкции мачты при внешнем воздействии.....	61
<i>Беляева С. Ю., Кузнецов Д. Н., Сазыкин В. Г.</i> Выбор конструктивного решения усиления стальных балок покрытия .....	73
<b>РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ .....</b>	<b>81</b>
<i>Сафронов В. С., Черников А. В.</i> Деформационный расчет составных изгибаемых железобетонных стержневых элементов.....	81
<i>Потапов Ю. Б., Поликутин А. Э., Левченко А. В., Н. Ф. Зуй</i> Влияние фибрового армирования на появление и развитие трещин в балках .....	93
<i>Габриелян Г. Е., Варнавский В. С., Флавианов В. М., Пехник О. И.</i> Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты балочной клетки при воздействии переменных нагрузок.....	102

## CONTENT

<b>STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS</b> .....	7
<i>A. N. Averin</i> Final element of rigid filament.....	7
<i>A. A. Treshchev, I. A. Sudakova</i> About the relationship of strain with stresses for isotopic materials not obeying hypothesis of “a single curve of deformation” in quasi-linear approximation.....	18
<i>M. N. Kirsanov</i> Inductive analysis of the deformation of a planar multi-layer truss.....	28
<i>N. A. Belyankin, A. Y. Boyko, A. A. Plyasova</i> Inductive analysis of the deformation of a multi-link truss under non-symmetric load- ing.....	33
<i>A. N. Sinozersky, R. A. Mukhtarov</i> Conditional limiting states of prisms from fine-grained concrete eccentrically compressed with normal velocity inside section nucleus .....	42
<b>CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES</b> .....	51
<i>V. S. Varnavsky, G. E. Gabrielyan, M. M. Martynova</i> Calculation of the flat steel frame for the static load taking into account plastic deformations of the material.....	51
<i>S. V. Efryushin, A. V. Burlakov, A. I. Sharanin</i> Forced masch oscillations. Investigation of dynamic reaction of mast structure under exter- nal impact .....	61
<i>S. Yu. Belyaeva, D. N. Kuznetsov, V. G. Sazykin</i> Choice of constructive solution of reinforcement of surface steel beams .....	73
<b>CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES</b> .....	81
<i>Safronov V. S, Chernikov A. V</i> Deformative calculation of composite bending reinforced concrete rod elements.....	81
<i>Yu. B. Potapov, A. E. Polikutin, A. V. Levchenko, N. P. Duy</i> Fibre reinforcement effect on cracks appearance and development in beams .....	93
<i>G. E. Gabrielyan, V. S. Varnavsky, V. M. Flavianov, O. I. Pekhnik</i> Finite element simulation of deflected mode of of i-beam grillage ground slab under the varia- ble load.....	102

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

---

УДК 624.072.526

## КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЖЕСТКОЙ НИТИ

А. Н. Аверин<sup>1</sup>

Воронежский государственный технический университет  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики, тел.: +7(432) 271-52-30; e-mail: AN\_Averin@mail.ru

---

Рассматривается дискретная модель жесткой нити в виде цепи, состоящей из отдельных, соединенных между собой стержней с упругими вставками. Все нагрузки приводятся в узлы. Материал стержней считается линейно-упругим. В качестве исходных принимаются уравнения совместности деформации звеньев цепи и уравнения равновесия узлов и стержней. Поперечная сила в звеньях цепи выражается через изгибающие моменты, действующие по концам звена. Изгибающие моменты в упругих вставках определяются через угол взаимного поворота звеньев цепи прилегающих к узлу. В уравнениях совместности деформаций длина звеньев цепи определяется с учетом их продольных деформаций. Вводятся новые переменные: проекции на координатные оси внутренних усилий в стержнях цепи и безразмерные параметры, определяемые как отношение поперечной силы к продольной силе в звене цепи. В новых переменных уравнения равновесия узлов переходят в линейные двухчленные уравнения. В результате проекции усилий в звеньях цепи выражаются через проекции усилий в первом звене. В качестве базисных неизвестных принимаются: проекции на координатные оси внутренних усилий в первом звене цепи и безразмерный параметр, равный отношению поперечной силы к продольной силе. Используется метод начальных параметров и все неизвестные величины выражаются через базисные неизвестные. Разрешающая система нелинейных уравнений включает два уравнения совместности деформаций и уравнение условие - изгибающий момент в шарнире на правом конце жесткой нити равен нулю. Решение системы трех нелинейных уравнений выполняется методом Ньютона. Матрица Якоби, вычисленная на решении, используется при формировании конечно-элементных уравнений жесткой нити. Приводится пример расчета свободных колебаний вблизи положения статического равновесия комбинированной системы предварительно напряженных жестких и гибких нитей, соединенных в узлах стержнями – растяжками.

**Ключевые слова:** жесткая нить, дискретная модель жесткой нити, конечный элемент жесткой нити.

## КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ЖЕСТКОЙ НИТИ FINAL ELEMENT OF RIGID FILAMENT

A. N. Averin<sup>1</sup>

Voronezh state technical university  
Voronezh Russia

---

<sup>1</sup>PhD of Tech. Sc., Associate professor of department of Structural Mechanics, tel.: +7(432) 271-52 -30;  
e-mail: AN\_Averin@mail.ru

---

Discrete model of rigid filament as a chain consisting of separate connected with each other rods with elastic inserts is under analysis. Every loads effect in the nodes. The rod material is considered to be as linear – elastic. The equations of compatibility of chain links deformation and the equations of nodes and rods equilibrium are taken as initial. The shear in chain links is expressed by bending moments effecting at the chain ends. Bending moments in elastic inserts are determined by the mutual turning angle of the chain adjoining the node. In the equations of deformation compatibility the chain length is found with consideration of their longitudinal deformations.

© Аверин А.Н., 2018

New variables are introduced: projections onto coordinate axes of internal forces in chain rods and nondimensional parameters defined as the ratio of shear and longitudinal force in chain link. In new variables the equations of nodes equilibrium transforms into linear binomial equations. As a result force projections in the chain links are expressed by the force projections in the first chain. The following basic unknowns are: projections onto coordinate axes of internal forces in the first chain and nondimensional parameter equal to ratio of shear and longitudinal forces. Method of initial parameters is used and every unknown quantity is expressed by basic unknowns. Resolving system of nonlinear equations includes two equations of deformation compatibility and the equation of the condition that is bending moment in joint on the right end of rigid filament is equal to zero. The system of three nonlinear equations is solved by Newton's method. Jacobi matrix based on the solution is used while forming finite element equations of rigid filament. There is given the example of calculation of free vibrations near the location of static equilibrium of combined system of post-tensioned rigid and flexible Filaments connected in the nodes by rod-stretch.

**Keywords:** rigid filament, discrete model of rigid filament, final element of rigid filament.

В качестве расчетной схемы реальной нити принимается цепь, состоящая из отдельных, соединенных между собой элементов с упругими вставками. Масса элементов и все нагрузки приводятся в узлы (рис. 1).

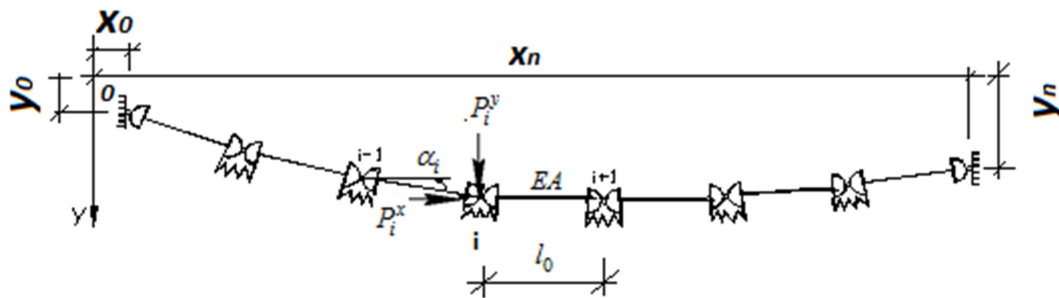


Рис. 1

Уравнения равновесия узлов и элементов цепи имеют вид [1]

$$-N_i \cos(\alpha_i) + N_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}) + Q_i \sin(\alpha_i) - Q_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) + P_i^x = 0 \quad (1)$$

$$-N_i \sin(\alpha_i) + N_{i+1} \sin(\alpha_{i+1}) - Q_i \cos(\alpha_i) + Q_{i+1} \cos(\alpha_{i+1}) + P_i^y = 0 \quad (2)$$

$$Q_i \cdot l_0 = M_i - M_{i-1}, \quad (3)$$

где  $N_i, Q_i$  - продольная и поперечная силы в  $i$ -м элементе цепи,  $M_i$  - изгибающий мо-

мент в  $i$ -м узле,  $\alpha_i$  - угол наклона  $i$ -го элемента к оси  $x$ ,  $l_0 = \frac{L}{n}$  - длина элемента цепи,

$L$  - начальная длина заготовки нити,  $n$  - число звеньев цепи.

Число уравнения в системе (1), (2), (3) равно  $3n - 2$ , а неизвестных -  $3n$  (продольные и поперечные силы в звеньях цепи и углы наклона звеньев к оси  $x$ ). Поэтому эту систему необходимо дополнить двумя уравнениями совместности деформаций. Геометрический смысл уравнений совместности: сумма проекций на координатные оси длин звеньев цепи равна разности координат точек конца  $(x_n^*, y_n^*)$  и начала  $(x_0^*, y_0^*)$  жесткой нити:

$$\sum_{i=1}^n l_i \cos(\alpha_i) = x_n^* - x_0^*, \quad \sum_{i=1}^n l_i \sin(\alpha_i) = y_n^* - y_0^*. \quad (4)$$

Считаем, что материал стержней линейно-упругий. Абсолютное удлинение элемента цепи пропорционально продольной силе:

$$\Delta l_i = \frac{N_i \cdot l_0}{E \cdot A}, \quad (5)$$



а изгибающий момент пропорционален кривизне:

$$M_i = E \cdot J \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{2 \cdot E \cdot J \cdot \sin(\alpha_i - \alpha_{i+1})}{l_0 \cdot (1 + \cos(\alpha_i - \alpha_{i+1}))}. \quad (6)$$

В формулах (4), (5) введены следующие обозначения:  $E$  - модуль упругости материала,  $A$  - площадь поперечного сечения,  $J$  - момент инерции поперечного сечения элемента цепи.

Обозначим через  $l_i = l_0 + \Delta l_i = l_0 + \frac{N_i \cdot l_0}{E \cdot A}$  длину элемента цепи в результате продольной деформации. Тогда уравнения совместности деформаций (4) примут вид

$$\sum_{i=1}^n \left(l_0 + \frac{N_i \cdot l_0}{E \cdot A}\right) \cos(\alpha_i) = x_n^* - x_0^*, \quad \sum_{i=1}^n \left(l_0 + \frac{N_i \cdot l_0}{E \cdot A}\right) \sin(\alpha_i) = y_n^* - y_0^*. \quad (7)$$

Обозначим через

$$t_i = \frac{Q_i}{N_i} \quad (8)$$

отношение поперечной силы к продольной силе в  $i$ -м звене цепи.

Введем обозначения для направляющих косинусов вектора внутренних сил в  $i$ -м звене

$$\cos(\gamma_i) = \frac{N_i}{\sqrt{N_i^2 + Q_i^2}}, \quad \sin(\gamma_i) = \frac{Q_i}{\sqrt{N_i^2 + Q_i^2}}, \quad t_i = \operatorname{tg}(\gamma_i) = \frac{Q_i}{N_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (9)$$

Направляющие косинусы в (9) выразим через тангенс угла  $\gamma_i$ :

$$\sin(\gamma_i) = \frac{t_i}{\sqrt{1 + t_i^2}}, \quad \cos(\gamma_i) = \frac{1}{\sqrt{1 + t_i^2}}. \quad (10)$$

Перейдем к новым переменным:

$$\begin{aligned} X_i &= N_i \cos(\alpha_i) - Q_i \sin(\alpha_i) = \sqrt{N_i^2 + Q_i^2} \cos(\alpha_i + \gamma_i), \\ Y_i &= N_i \sin(\alpha_i) + Q_i \cos(\alpha_i) = \sqrt{N_i^2 + Q_i^2} \sin(\alpha_i + \gamma_i), \\ t_i &= \frac{Q_i}{N_i}, \quad (i = 1, \dots, n). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует несколько очевидных соотношений:

$$X_i^2 + Y_i^2 = N_i^2 + Q_i^2, \quad \cos(\alpha_i + \gamma_i) = \frac{X_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}}, \quad \sin(\alpha_i + \gamma_i) = \frac{Y_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}}. \quad (12)$$

Выразим направляющие косинусы звеньев цепи через новые переменные  $X_i, Y_i, t_i$ :

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_i) &= \cos((\alpha_i + \gamma_i) - \gamma_i) = \cos(\alpha_i + \gamma_i) \cos(\gamma_i) + \sin(\alpha_i + \gamma_i) \sin(\gamma_i) = \\ &= \frac{X_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + t_i^2}} + \frac{Y_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} \frac{t_i}{\sqrt{1 + t_i^2}} = \frac{(X_i + Y_i t_i)}{\sqrt{(X_i^2 + Y_i^2)(1 + t_i^2)}}, \\ \sin(\alpha_i) &= \sin((\alpha_i + \gamma_i) - \gamma_i) = \sin(\alpha_i + \gamma_i) \cos(\gamma_i) - \cos(\alpha_i + \gamma_i) \sin(\gamma_i) = \\ &= \frac{Y_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + t_i^2}} - \frac{X_i}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2}} \frac{t_i}{\sqrt{1 + t_i^2}} = \frac{(Y_i - X_i t_i)}{\sqrt{(X_i^2 + Y_i^2)(1 + t_i^2)}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\cos(\alpha_i) = \frac{(X_i + Y_i t_i)}{\sqrt{(X_i^2 + Y_i^2)(1 + t_i^2)}}, \quad \sin(\alpha_i) = \frac{(Y_i - X_i t_i)}{\sqrt{(X_i^2 + Y_i^2)(1 + t_i^2)}}. \quad (13)$$

С учетом (9), (12) выражения для поперечной и продольной сил в  $i$ -м звене цепи примут вид

$$Q_i = t_i \sqrt{\frac{X_i^2 + Y_i^2}{1 + t_i^2}}, \quad N_i = \sqrt{\frac{X_i^2 + Y_i^2}{1 + t_i^2}}. \quad (14)$$

Подстановка (13) в (6) дает выражения для изгибающего момента в  $i$ -м узле цепи

$$\begin{aligned} M_0 &= 0 \\ M_i &= -(2EJ(-Y_i X_{i+1} - Y_i Y_{i+1} t_{i+1} + X_i t_i X_{i+1} + X_i t_i Y_{i+1} t_{i+1} \\ &\quad + X_i Y_{i+1} - X_i X_{i+1} t_{i+1} + Y_i t_i Y_{i+1} - Y_i t_i X_{i+1} t_{i+1})) / \\ &\quad \left( l_0 \left( \sqrt{(X_i^2 + Y_i^2)(1 + t_i^2)} \sqrt{(X_{i+1}^2 + Y_{i+1}^2)(1 + t_{i+1}^2)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + X_i X_{i+1} + X_i Y_{i+1} t_{i+1} + Y_i t_i X_{i+1} + Y_i t_i Y_{i+1} t_{i+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + Y_i Y_{i+1} - Y_i X_{i+1} t_{i+1} - X_i t_i Y_{i+1} + X_i t_i X_{i+1} t_{i+1} \right) \right) , \\ &\quad (i = 1, \dots, n-1), \\ M_n &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В новых переменных уравнения равновесия узлов (1), (2) превращаются в линейные двухчленные уравнения:

$$-X_i + X_{i+1} = P_i^x, \quad -Y_i + Y_{i+1} = P_i^y. \quad (16)$$

Будем считать, что проекции внутренних сил на координатные оси в первом звене цепи  $X_1, Y_1$  и отношение  $t_1 = (Q_1 / N_1)$  известны. Тогда проекции во всех остальных звеньях цепи выражаются через заданные величины  $X_1, Y_1$  по формулам:

$$X_j = X_1 + \sum_{i=1}^{j-1} P_i^x, \quad Y_j = Y_1 + \sum_{i=1}^{j-1} P_i^y, \quad (j = 2, \dots, n). \quad (17)$$

Опишем алгоритм решения задачи.

1. Задаемся  $X_1, Y_1, t_1$  (начальное приближение к этим величинам).

Поперечную и продольную силы в первом звене цепи определим через заданные величины:

$$Q_1 = t_1 \sqrt{\frac{X_1^2 + Y_1^2}{1 + t_1^2}}, \quad N_1 = \sqrt{\frac{X_1^2 + Y_1^2}{1 + t_1^2}}, \quad (18)$$

Направляющие косинусы 1-го звена цепи определим по формулам:

$$\cos(\alpha_1) = \frac{(X_1 + Y_1 t_1)}{\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2)(1 + t_1^2)}}, \quad \sin(\alpha_1) = \frac{(Y_1 - X_1 t_1)}{\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2)(1 + t_1^2)}}. \quad (19)$$

Координаты 1-го узла вычислим с учетом продольной деформации звена цепи:

$$x_1 = x_0^* + l_0 \left(1 + \frac{N_1}{E \cdot A}\right) \cos(\alpha_1) = x_0^* + l_0 \left(1 + \frac{1}{E \cdot A} \sqrt{\frac{X_1^2 + Y_1^2}{1 + t_1^2}}\right) \frac{(X_1 + Y_1 t_1)}{\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2)(1 + t_1^2)}} \quad (20)$$

$$y_1 = y_0^* + l_0 \left(1 + \frac{N_1}{E \cdot A}\right) \sin(\alpha_1) = y_0^* + l_0 \left(1 + \frac{1}{E \cdot A} \sqrt{\frac{X_1^2 + Y_1^2}{1 + t_1^2}}\right) \frac{(Y_1 - X_1 t_1)}{\sqrt{(X_1^2 + Y_1^2)(1 + t_1^2)}}$$

Таким образом, все искомые усилия в первом звене и перемещения первого узла цепи определены через заданные величины  $t_1 = (Q_1 / N_1)$ ,  $X_1, Y_1$ .

2. По формулам (17) определяем проекции усилий во втором звене цепи:

$$X_2 = X_1 + P_1^x, \quad Y_2 = Y_1 + P_1^y. \quad (21)$$

Параметр  $t_2 = (Q_2 / N_2)$  найдем, используя уравнения равновесия 1-го звена цепи (3) и выражение (15) для изгибающих моментов. Так как в точке шарнирного закрепления цепи изгибающий момент  $M_0 = 0$ , то из уравнения равновесия первого звена находим изгибающий момент в упругой вставке 1-го узла:

$$M_1 = Q_1 \cdot l_0. \quad (22)$$

Но, с другой стороны, изгибающий момент  $M_1$  может быть вычислен по формулам (15):

$$\begin{aligned} M_1 = & - (2EJ \left( ((X_1 Y_2 - Y_1 X_2) t_2 + X_1 X_2 + Y_1 Y_2) t_1 + (-Y_1 Y_2 \right. \\ & \left. - X_1 X_2) t_2 + X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \right)) / \left( l_0 \left( ((X_1 X_2 + Y_1 Y_2) t_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + Y_1 X_2 - X_1 Y_2) t_1 + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) t_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{(X_1^2 + Y_1^2)(1 + t_1^2)} \sqrt{(X_2^2 + Y_2^2)(1 + t_2^2)} + X_1 X_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + Y_1 Y_2 \right) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнение (23) решаем с помощью команды solve() системы символьной математики Maple, в результате получаем

$$\begin{aligned} t_2 = & \left( ((4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2) t_1 + 4X_1 Y_2 - 4Y_1 X_2) EJ^2 + \left( \right. \right. \\ & \left. \left. -4M_1 X_1 Y_2 + 4M_1 X_2 Y_1 \right) t_1 + 4M_1 X_1 X_2 + 4M_1 Y_1 Y_2 \right) l_0 EJ \\ & + \left( (-M_1^2 X_1 X_2 - M_1^2 Y_1 Y_2) t_1 - M_1^2 X_1 Y_2 + M_1^2 X_2 Y_1 \right) l_0^2 \Big/ \\ & \left( ((-4X_1 Y_2 + 4Y_1 X_2) t_1 + 4X_1 X_2 + 4Y_1 Y_2) EJ^2 + \left( \right. \right. \\ & \left. \left. -4M_1 X_1 X_2 - 4M_1 Y_1 Y_2 \right) t_1 - 4M_1 X_1 Y_2 + 4M_1 X_2 Y_1 \right) l_0 EJ \\ & + \left( (M_1^2 X_1 Y_2 - M_1^2 X_2 Y_1) t_1 - M_1^2 X_1 X_2 - M_1^2 Y_1 Y_2 \right) l_0^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Далее определяем

$$Q_2 = t_2 \sqrt{\frac{X_2^2 + Y_2^2}{1 + t_2^2}}, \quad N_2 = \sqrt{\frac{X_2^2 + Y_2^2}{1 + t_2^2}}. \quad (25)$$

Из уравнения равновесия 2-го звена цепи найдем изгибающий момент:

$$M_2 = Q_2 \cdot l_0 + M_1 \quad (26)$$

Координаты 2-го узла цепи вычислим по формулам:

$$\begin{aligned} x_2 = & x_1 + l_0 \left(1 + \frac{1}{E \cdot A} \sqrt{\frac{X_2^2 + Y_2^2}{1 + t_2^2}}\right) \frac{(X_2 + Y_2 t_2)}{\sqrt{(X_2^2 + Y_2^2)(1 + t_2^2)}}, \\ y_2 = & y_1 + l_0 \left(1 + \frac{1}{E \cdot A} \sqrt{\frac{X_2^2 + Y_2^2}{1 + t_2^2}}\right) \cdot \frac{(Y_2 - X_2 t_2)}{\sqrt{(X_2^2 + Y_2^2)(1 + t_2^2)}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Таким образом, на шаге алгоритма с номером  $n-1$  величины  $X_{n-1}, Y_{n-1}, X_n, Y_n, t_{n-1}, t_n, x_{n-1}, y_{n-1}$  выражены через начальные значения базисных неизвестных  $X_1, Y_1, t_1$  и мы приходим к системе трех нелинейных уравнений относительно неизвестных  $X_1, Y_1, t_1$ .

Смысл первого уравнения:  $x_n$ - координата узла цепи с номером  $n$  должна совпадать с координатой конца нити  $x_n^*$ :

$$f_1(X_1, Y_1, t_1) = x_{n-1} + l_0 \left(1 + \frac{1}{E \cdot A} \sqrt{\frac{X_n^2 + Y_n^2}{1 + t_n^2}}\right) \frac{(X_n + Y_n t_n)}{\sqrt{(X_n^2 + Y_n^2)(1 + t_n^2)}} - x_n^* = 0. \quad (28)$$

Смысл второго уравнения:  $y_n$ - координата узла цепи с номером  $n$  должна совпадать с координатой конца нити  $y_n^*$ :

$$f_2(X_1, Y_1, t_1) = y_{n-1} + l_0 \left(1 + \frac{1}{E \cdot A} \sqrt{\frac{X_n^2 + Y_n^2}{1 + t_n^2}}\right) \cdot \frac{(Y_n - X_n t_n)}{\sqrt{(X_n^2 + Y_n^2)(1 + t_n^2)}} - y_n^* = 0. \quad (29)$$

Смысл третьего уравнения: изгибающий момент на правом конце нити  $M_n$  в точке шарнирного закрепления равен нулю:

$$Q_n \cdot l_0 + M_{n-1} = 0. \quad (30)$$

С учетом выражений для  $Q_n$  и  $M_{n-1}$  получим

$$f_3(X_1, Y_1, t_1) = t_n \sqrt{\frac{X_n^2 + Y_n^2}{1 + t_n^2}} l_0 - (2EJ \left( ((X_{n-1} Y_n - Y_{n-1} X_n) t_n + X_{n-1} X_n + Y_{n-1} Y_n) t_{n-1} + (-Y_{n-1} Y_n - X_{n-1} X_n) t_n + X_{n-1} Y_n - Y_{n-1} X_n \right)) / \left( l_0 \left( ((X_{n-1} X_n + Y_{n-1} Y_n) t_n + Y_{n-1} X_n - X_{n-1} Y_n) t_{n-1} + (X_{n-1} Y_n - Y_{n-1} X_n) t_n + \sqrt{(X_{n-1}^2 + Y_{n-1}^2)(1 + t_{n-1}^2)} \sqrt{(X_n^2 + Y_n^2)(1 + t_n^2)} + X_{n-1} X_n + Y_{n-1} Y_n \right) \right) = 0 \quad (31)$$

Решение системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} f_1(X_1, Y_1, t_1) &= 0 \\ f_2(X_1, Y_1, t_1) &= 0 \\ f_3(X_1, Y_1, t_1) &= 0 \end{aligned} \quad (32)$$

выполняется методом Ньютона. На каждом шаге итераций элементы матрицы Якоби вычисляются с использованием формул численного дифференцирования. По достижении заданной точности решений матрица Якоби фиксируется и в дальнейшем используется при построении касательной матрицы жесткости.

Заметим, что после определения искомых усилий  $X_1, Y_1$  реакции по концам нити определяются из уравнений равновесия нити по формулам:

$$R_x^H = -X_1, \quad R_y^H = -Y_1, \quad (33)$$

$$R_x^k = X_1 - \sum_{j=1}^{n-1} P_j^x, \quad R_y^k = Y_1 - \sum_{j=1}^{n-1} P_j^y.$$

Выполним построение касательной матрицы жесткости для дискретной модели жесткой нити. Введем в рассмотрение вектор функцию

$$U = \begin{bmatrix} f_1(X_1, Y_1, t_1) \\ f_2(X_1, Y_1, t_1) \\ f_3(X_1, Y_1, t_1) \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Обозначим через

$$u_0 = [X_1, Y_1, t_1, x_0^*, y_0^*, x_n^*, y_n^*]^T \quad (35)$$

вектор, характеризующий состояние цепи в статическом положении равновесия. Дадим малое смещение концевым узлам цепи. Вектор возмущенного состояния цепи представим в виде

$$u = [X_1 + \Delta X_1, Y_1 + \Delta Y_1, t_1 + \Delta t_1, x_0^* + \Delta x_0^*, y_0^* + \Delta y_0^*, x_n^* + \Delta x_n^*, y_n^* + \Delta y_n^*]^T. \quad (36)$$

Вектор-функцию  $U$  в возмущенном состоянии разложим в ряд в окрестности точки  $u_0$ , отвечающей положению равновесия. В результате получим

$$U(u) = U(u_0) + A(u_0) \cdot \Delta u + o(\Delta u)^2, \quad (37)$$

где

$$\Delta u = [\Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta t_1, \Delta x_0^*, \Delta y_0^*, \Delta x_n^*, \Delta y_n^*]^T. \quad (38)$$

В разложении (36)  $A(u_0)$  - матрица Якоби вектор - функции  $U$  по переменным  $u$  в точке  $u_0$ . Так как  $U(u_0) = 0$ , то с точностью до величин второго порядка малости уравнения для определения приращений примут вид

$$A(u_0) \cdot \Delta u = 0. \quad (39)$$

Отметим, что матрица  $A(u_0)$  прямоугольная и состоит из трех строк и семи столбцов (размерность вектор - функции три, а вектора  $\Delta u$  - семь).

Матрицу  $A(u_0)$  представим в виде

$$A(u_0) = A_1 + A_2, \quad (40)$$

где

$$A(u_0) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & -1 & 0 & 1 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Аналогично вектор  $\Delta u$  представим в виде суммы двух векторов:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta t_1, \Delta x_0^*, \Delta y_0^*, \Delta x_n^*, \Delta y_n^* \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \Delta X_1, \Delta Y_1, \Delta t_1, 0, 0, 0, 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0, 0, 0, \Delta x_0^*, \Delta y_0^*, \Delta x_n^*, \Delta y_n^* \end{bmatrix}^T \quad (42)$$

Тогда уравнение (39) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \\ \Delta t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0^* \\ \Delta y_0^* \\ \Delta x_n^* \\ \Delta y_n^* \end{bmatrix} \quad (43)$$

В уравнениях (42) введем обозначения для матриц:

$$J = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

В обозначениях (44)  $J$  - матрица Якоби вектор-функции  $U = [f_1(X_1, Y_1, t_1), f_2(X_1, Y_1, t_1), f_3(X_1, Y_1, t_1)]^T$  по переменным  $[X_1, Y_1, t_1]^T$ .

Обозначим через  $C = J^{-1}$  - матрицу, обратную к матрице Якоби  $J$ . Для элементов матрицы введем обозначения  $C = \{c_{ij}, (i, j = 1, 2, 3)\}$ . Умножим матричное уравнение (43) слева на матрицу  $C$ , в результате получим две группы уравнений.

Первая система уравнений связывает приращения усилий в первом звене цепи с приращениями координат конечных узлов:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \Delta Y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_{1,1} & -c_{1,2} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ -c_{2,1} & -c_{2,2} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0^* \\ \Delta y_0^* \\ \Delta x_n^* \\ \Delta y_n^* \end{bmatrix} \quad (45)$$

Второе уравнение устанавливает связь между приращением параметра  $\Delta t_1$  и приращениями координат конечных узлов цепи:

$$\Delta t_1 = [-c_{31}, -c_{32}, c_{31}, c_{32}] \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_0^* \\ \Delta y_0^* \\ \Delta x_n^* \\ \Delta y_n^* \end{bmatrix} \quad (46)$$

С учетом (33) и (45) уравнения, устанавливающие связь между приращениями реакций и приращениями координат конечных узлов, примут вид

$$\begin{bmatrix} \Delta R_x^H \\ \Delta R_y^H \\ \Delta R_x^k \\ \Delta R_y^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & -c_{1,1} & -c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & -c_{2,1} & -c_{2,2} \\ -c_{1,1} & -c_{1,2} & c_{1,1} & c_{1,2} \\ -c_{2,1} & -c_{2,2} & c_{2,1} & c_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_0^* \\ \Delta y_0^* \\ \Delta x_n^* \\ \Delta y_n^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_{j=1}^{n-1} P_j^x \\ \sum_{j=1}^{n-1} P_j^y \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Матрица связи между приращениями реакций и приращениями координат опорных узлов цепи – искомая касательная матрица жесткости метода конечного элемента.

Полученные конечно-элементные уравнения жесткой нити были использованы для расчета отдельных нитей и комбинированных систем. Сравнительные расчеты одиночных жестких нитей проводились на примерах, приведенных в работах [2, 3]. Было получено хорошее совпадение результатов.

На рис. 2 представлена комбинированная система жестких и гибких нитей, соединенных в узлах стержнями – растяжками. Для такой системы был выполнен статический расчет на постоянную и временную нагрузки. В расчетной схеме использовались конечные элементы гибкой нити [4].

В работах [5, 6] приведены примеры комбинированных систем, в которых при различных загрузках гибкие нити выключаются из работы, свободно провисая под собственным весом, то есть работают как односторонние связи. В рассматриваемой комбинированной системе гибким и жестким нитям задавалось предварительное натяжение. В расчетной схеме предварительное натяжение достигалось заданием начальной длины нити меньше расстояния между точками, которые она соединяет.

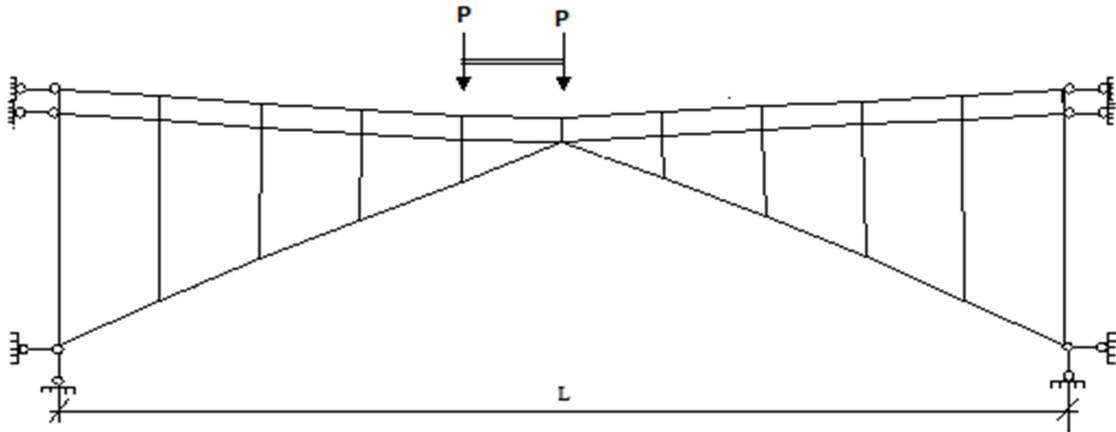
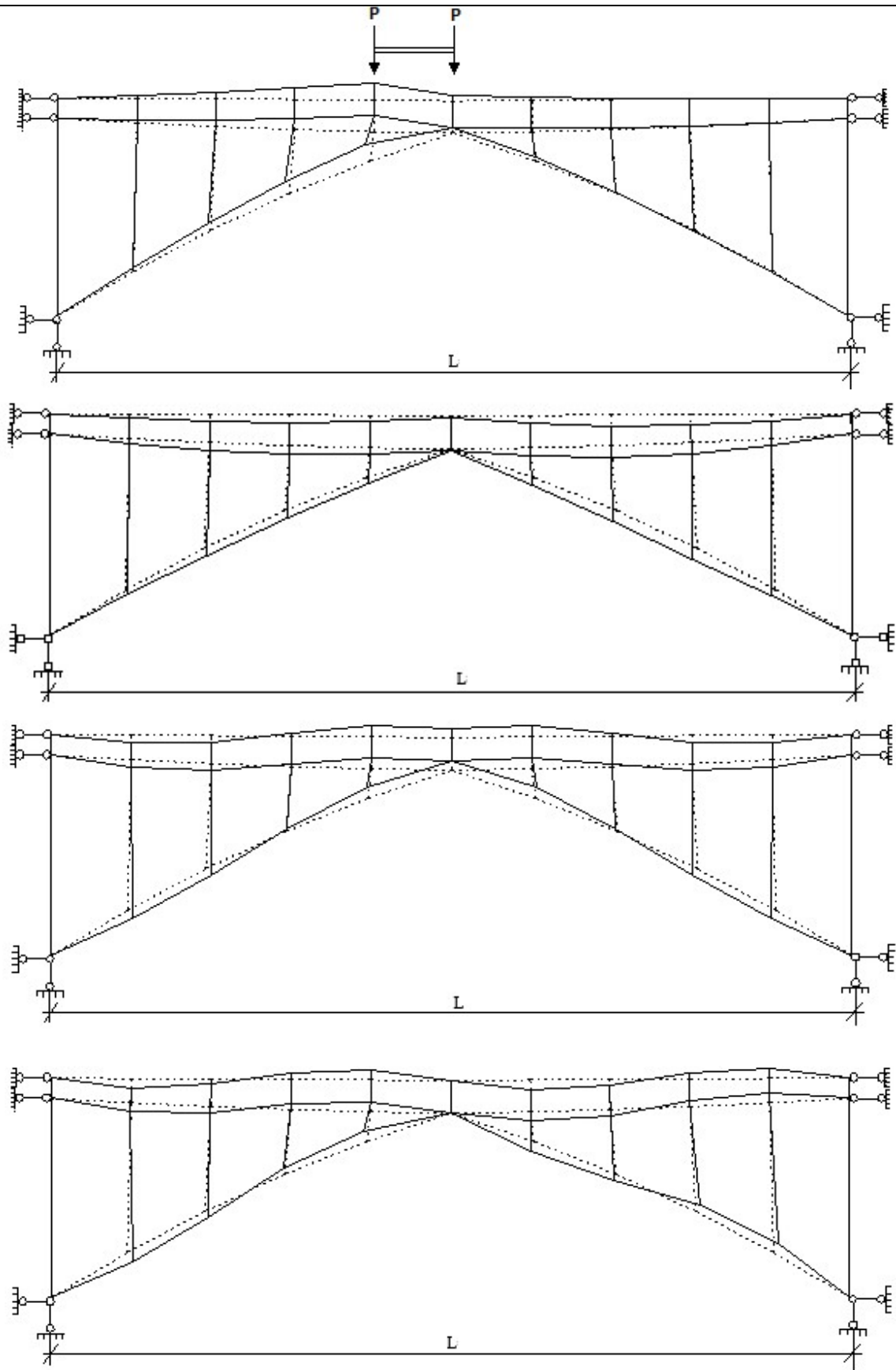


Рис. 2

Также были выполнены расчеты свободных колебаний комбинированной системы вблизи положения статического равновесия. Построение разрешающих уравнения свободных колебаний выполнялось по методике, приведенной в статье [7]. На рис. 3 представлены первые четыре формы свободных колебаний комбинированной системы вблизи статического положения равновесия (пунктирной линией показана форма статического положения равновесия).



**Рис. 3.** Формы свободных колебаний комбинированной системы  
вблизи статического положения равновесия



## Библиографический список

1. Ананьин А. И. К расчету гибких и жестких нитей / А. И. Ананьин, А. Н. Аверин // Исследования висячих комбинированных конструкций. - Воронеж, 1980. - С. 15-29.
2. Аверин А. Н. Вариант уравнений жесткой нити / А. Н. Аверин // Методы и алгоритмы расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1990. - С. 160-166.
3. Аверин А. Н. Малые колебания жесткой нити вблизи статического положения равновесия / А. Н. Аверин // Строительная механика и конструкции. - 2018. - № 2. - С. 53-66.
4. Аверин А. Н. Конечный элемент гибкой нити / А. Н. Аверин // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2002. - С. 34-38.
5. Аверин А. Н. Расчет систем с односторонними связями / А. Н. Аверин, А. Ю. Пузаков // Строительная механика и конструкции. - 2015. - Т. 1. - № 10. - С. 15-32.
6. Аверин А. Н. Анализ напряженно-деформированного состояния геометрически нелинейных стержневых систем / А. Н. Аверин, А. Ю. Пузаков // Строительная механика и конструкции. - 2013. - Т. 1. - № 6. - С. 34-52.
7. Аверин А. Н. Малые колебания непологой гибкой нити / А. Н. Аверин, А. Ф. Хмыров // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2000. - С. 149-154.

## References

1. Ananjin A. I., Averin A. N. To the design of flexible and rigid filament. Researches of suspension completed structures. - Voronezh, 1980. - P. 15-29.
2. Averin A. N. Variant of rigid rod equation. Methods and algorithms of constructions and structures design. - Voronezh, 1990. - P. 160-166.
3. Averin A. N. Low motions of rigid filament near static equilibrium position. Structural mechanics and structures. 2018. No 2. - P. 53-66.
4. Averin A. N. Finite element of flexible rod. Modern methods of static and dynamic design of constructions and structures. - Voronezh, 2002. - P. 34-38.
5. Averin A. N., Puzakov A. Yu. Design of the systems with one side connections. Structural Mechanics and structures. - 2015. - V. 1. - № 10. - P. 15-32.
6. Averin A. N., Puzakov A. Yu Analysis of deflected mode of geometrically nonlinear bar system. Structural Mechanics and structures. - 2013. - V. 1. - № 6. - P. 34-52.
7. Averin A. N., Khmyrov A. F. Low motions of nongentle flexible filament. Modern methods of static and dynamic design of constructions and structures. Voronezh, 2000. - P. 149-154.

**О СВЯЗИ ДЕФОРМАЦИЙ С НАПРЯЖЕНИЯМИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ, НЕ ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ ГИПОТЕЗЕ «ЕДИНОЙ КРИВОЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ» В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ**

А. А.Трещев<sup>1</sup>, И. А.Судакова<sup>2</sup>  
Тульский государственный университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Тула

---

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой «Строительство, строительные материалы и конструкции»

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доц. кафедры «Строительство, строительные материалы и конструкции»  
тел.: +7(4872)25-71-08; e-mail: taa58@yandex.ru

---

Анализируются наиболее общие потенциальные соотношения для изотропных разносопротивляющихся материалов. Показано, что, несмотря на достаточно большое количество предложенных квазилинейных моделей, определяющих соотношений для изотропных материалов, наиболее общими, точными, экспериментально адаптированными и теоретически непротиворечивыми являются потенциалы деформаций, сформулированные в двух нормированных пространствах напряжений.

**Ключевые слова:** квазилинейные соотношения, нормированные пространства напряжений, разносопротивляющийся материал, закон изменения объема, формы и фазовая характеристика, вид напряженного состояния, потенциал деформаций.

**ABOUT THE RELATIONSHIP OF STRAIN WITH STRESSES FOR ISOTROPIC MATERIALS NOT OBEYING HYPOTHESIS OF “A SINGLE CURVE OF DEFORMATION” IN QUASI-LINEAR APPROXIMATION**

A .A. Treshchev, I. A. Sudakova  
Tula state university<sup>1,2</sup>  
Tula, Russia.

---

<sup>1</sup>Dr. of Tech. Sc, professor, head of the department of construction, building materials and structures

<sup>2</sup>PhD of Tech. Sc, associate professor of department of onstruction, building materials and structures,  
ph.: +7(4872) 25-71-08; e-mail: taa58@yandex.ru

---

There is analyzed the most general potential ratio for isotropic differently resistive materials. It is shown that despite of the great amount of suggested quasi-linear models, determining rations for isotropic materials the deformation potentials formulated in two normalized stress spaces are the most general, accurate, experimentally adapted and theoretically consistent.

**Keywords:** a quasilinear correlation, normalized stress space, different resistant material, the law of change of volume, shape and phase characteristics, the kinde of stress state, strain potential.

Широкое применение обобщенного закона Гука на протяжении двух веков подтвердило его правомерность в качестве фундаментального закона. С другой стороны, данные экспериментов по деформированию таких материалов, как чугуны [1 – 5], графиты [6 – 18], керамика [19], бетоны [20 – 24],+ и широкий спектр хаотически наполненных композитов [25 - 30], показывают, что связь напряжений с деформациями в линейной форме, когда используется модуль упругости  $E$  и один коэффициент Пуассона  $\nu$ , приводит к серьезным ошибкам при расчете конструкций, выполняемых из подобных материалов.

Целесообразнее отказаться от деформационных зависимостей Гука и обратиться к аналитическим представлениям данных механических испытаний при осевых растяжении и при сжатии, выразив их не двумя константами, а четырьмя в форме «меры» деформаций  $E^+$  (секущего модуля) на растяжение, «меры» деформаций  $E^-$  на сжатие и соответствующих параметров поперечной деформации  $\nu^+$  и  $\nu^-$ . Такая интерпретация деформационных свойств изотропного материала определяет его как квазилинейную сплошную среду. Математические модели, определяющие состояния представленных подобным образом материалов, получили в 60-е годы двадцатого столетия название разномодульной теории упругости, которая и оперирует квазилинейными определяющими уравнениями.

Неоспоримое первенство в преобразовании фундаментального закона Гука на случай материалов, чувствительных к виду напряженного состояния, закрепилось за российскими учеными и их коллегами из некоторых республик бывшего Советского Союза. Изыскания в данном направлении материаловедения и теории деформирования, встречавшиеся до 1960-х годов, имели случайный характер и не привлекали заметного интереса. В последующие годы проведение регулярных исследований было вызвано широким использованием новых материалов, что, очевидно, выявило значительные фундаментальные формулировки результатов при построении уравнений состояния для материалов, деформационные характеристики которых зависят от вида напряженного или деформированного состояний. Повышение интереса к подобному физико-механическому явлению, возникшее в последнее время, можно объяснить повсеместным использованием конструкционных композитов, неперменной исключительностью деформирования которых, по утверждению многих исследователей, представляется явное отклонение деформированных характеристик от общепринятой «гипотезы единой кривой» [1 – 30].

Достаточно подробный обзор работ, касающихся построения определяющих соотношений для квазилинейных изотропных материалов, имеется в работах [31, 32]. В этих же работах в рамках двух нормированных пространств напряжений представлены достаточно общие потенциальные соотношения между деформациями и напряжениями в квазилинейном приближении, из которых как упрощенный вариант можно получить практически все известные модели уравнений состояния других авторов.

В первом пространстве потенциал деформаций сформулирован в виде

$$W = 0,5[(A + B\alpha_1)\sigma_1^2 + (A + B\alpha_2)\sigma_2^2 + (A + B\alpha_3)\sigma_3^2] + [C + E\alpha_3 + D(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + [C + E\alpha_1 + D(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + [C + E\alpha_2 + D(\alpha_1 + \alpha_3)]\sigma_1\sigma_3, \quad (1)$$

а во втором в следующей форме:

$$W = (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3\xi)\sigma^2 + (\tilde{b}_2 + \tilde{b}_4\xi + \tilde{b}_5\eta\cos 3\varphi)\tau^2, \quad (2)$$

где  $\alpha_k = \sigma_k / S$  – главные нормированные напряжения;  $S = \sqrt{\sigma_k \sigma_k}$  – норма первого векторного пространства;  $\cos \psi = \xi = \sigma / S_0$ ,  $\sin \psi = \eta = \tau / S_0$  – нормированные напряжения второго пространства;  $\cos 3\varphi = \sqrt{2} \det(S_{ij}) / \tau^3$  – фазовый инвариант;  $S_0 = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  – норма второго пространства;  $\sigma = \delta_{ij} \sigma_{ij} / 3$  – нормальное октаэдрическое напряжение;  $\tau = \sqrt{S_{ij} S_{ij}} / 3$  – октаэдрические касательные напряжения;  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$  – девиатор тензора напряжений;  $\delta_{ij}$  – единичный тензор;  $\tilde{b}_1 = 1,5(A + 2C)$ ,  $\tilde{b}_2 = 1,5(A - C)$ ,

$\tilde{b}_3 = 1,5(B + 4D + 2E)/\sqrt{3}$ ,  $\tilde{b}_4 = 4,5(B - E)/\sqrt{3}$ ,  $\tilde{b}_5 = 0,75(B - 2D + 2E)\sqrt{2}/\sqrt{3}$  – константы, вычисляемые через механические характеристики материала.

Между параметрами двух нормированных пространств имеются однозначные зависимости:

$$S_0 = S/\sqrt{3}; \quad I_\alpha = \sqrt{3}\xi; \quad III_\alpha = (3\xi^3 + 9\xi\eta^2 + 1,5\sqrt{2}\eta^3 \text{Cos}3\varphi)/\sqrt{3}, \quad (3)$$

где  $I_\alpha = \alpha_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ ;  $II_\alpha = \alpha_k \alpha_k = 1$ ;  $III_\alpha = \alpha_k \alpha_k \alpha_k$  – инварианты первого пространства.

Следствием принятых потенциалов являются общие законы деформирования:

а) закон, определяющий изменение объема,

$$e = \sigma/3K_0 + \tau/3D_0; \quad (4)$$

б) закон, характеризующий изменение формы,

$$\mathcal{E} = \sqrt{1 + tg^2 \omega (\tau/2G_0 + \sigma/3D_0)}; \quad (5)$$

в) уравнение, связывающие фазовые параметры,

$$tg \omega = 3\tilde{b}_5 \eta \text{Sin}3\varphi / (3\eta/2G_0 + \xi/D_0), \quad (6)$$

где  $K_0$  – квазилинейная функция, определяющая изменение объема;  $G_0$  – квазилинейная функция, определяющая изменение формы;  $D_0$  – квазилинейная функция, определяющая дилатансию;  $\omega = \varphi - \beta$  – разность между фазами напряжений и деформаций;  $K_0 = 1/[2\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3 \xi(2 + \eta^2) - \tilde{b}_5 \eta^3 \text{Cos}3\varphi]$ ;  $2G_0 = 3/[2\tilde{b}_2 + \xi^3(2\tilde{b}_4 - \tilde{b}_3) + \tilde{b}_5 \eta^3(2 + \xi^2) \text{Cos}3\varphi]$ ;  $D_0 = 1/\tilde{b}_4 \eta^3$ ;  $3e = \theta = \delta_{ij} e_{ij}$  – изменение объема при малых деформациях;  $\mathcal{E} = \gamma/2$ ;  $\gamma = \sqrt{4/3 \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}$  – сдвиг на октаэдрической площадке;  $\varepsilon_{ij} = e_{ij} - \delta_{ij} \theta/3$  – девиаторная часть тензора деформаций.

В статье [31] и в монографии [32] продемонстрировано, что полученные квазилинейные уравнения состояния учитывают дилатационные свойства материалов. Кроме того, как следует из уравнений (5), средние напряжения влияют на изменение формы, но так, что если касательные напряжения  $\tau = 0$ , то изменение формы отсутствует:  $\mathcal{E} = 0$ , т. е. чисто гидростатическое напряжение не приводит к сдвигу. Существование этих свойств у разносопротивляющихся материалов неоднократно подтверждалось во всех теоретических и экспериментальных исследованиях [1 – 30].

Две формы потенциала деформаций (1) и (2) содержат пять констант, подлежащих определению. Поэтому в общем случае опытов по одноосному растяжению и одноосному сжатию, из которых можно установить только четыре константы, недостаточно. Из двух указанных экспериментов вычисляются следующие параметры:

$$\begin{aligned} A &= 0,5(1/E^+ + 1/E^-); & B &= 0,5(1/E^+ - 1/E^-); \\ C &= -0,5(v^+/E^+ + v^-/E^-); & D &= -0,5(v^+/E^+ - v^-/E^-). \end{aligned} \quad (7)$$

Как вполне естественным вариантом была рассмотрена [31, 32] возможность нахождения пятой константы из опытов на чистый сдвиг. Из обработки результатов испытаний на сдвиг вытекает значение константы материала  $G_q$  (модуль сдвига при чистом сдвиге), а из выражения потенциала (2) определяется параметр

$$\tilde{b}_2 = 1,5(A - C) = 0,75/G_q. \quad (8)$$

Однако из испытаний материалов при одноосных растяжении и сжатии выражение (2) требует, чтобы константа потенциала определялась следующим образом:

$$\tilde{b}_2 = 0,75[(1 + \nu^+)/E^+ + (1 + \nu^-)/E^-]. \quad (8^*)$$

Данный факт подтвердил то, что соотношения рассматриваемого уровня точности (1) и (2) описывают состояния разносопротивляющихся композиций, которые не предполагают независимость модуля сдвига  $G_q$  от четырех других параметров  $E^+$ ,  $E^-$ ,  $\nu^+$  и  $\nu^-$ , то есть между этими характеристиками должно соблюдаться равенство

$$1/G_q = 1/G = (1 + \nu^+)/E^+ + (1 + \nu^-)/E^-. \quad (9)$$

Задачу вычисления пятой константы предложено [31, 32] решать из анализа соотношения фаз напряжений и деформаций, как это выполняется в классических нелинейных моделях деформирования в области упругости [33]. До настоящего времени надежных опубликованных данных по комплексным испытаниям разносопротивляющихся материалов практически нет, то есть отсутствуют описания зависимости  $tg\omega$  при сложных видах напряженного состояния. В свете вышеизложенного были предложены [31, 32] три априорных способа вычисления пятой константы, находящихся в строгом соответствии с известными экспериментами и фундаментальными законам механики твердого тела и строительной механики.

Так были рекомендованы следующие наиболее адекватные подходы вычисления недостающей константы

*Вариант № 1.* Предполагается, что НДС материала не зависят от угла вида напряженного состояния, а это приводит к равенству  $\tilde{b}_5 = 0$  (2) и из опытов на одноосные растяжение и сжатие вытекают зависимости:

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &= 0,75[(1 - 2\nu^+)/E^+ + (1 - 2\nu^-)/E^-]; \\ \tilde{b}_2 &= 0,75[(1 + \nu^+)/E^+ + (1 + \nu^-)/E^-]; \quad \tilde{b}_3 = -1,5\sqrt{3}(\nu^+/E^+ - \nu^-/E^-); \\ \tilde{b}_4 &= 0,375\sqrt{3}[(3 + 2\nu^+)/E^+ - (3 + 2\nu^-)/E^-]. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом константа  $E$ , фигурирующая в записи (1), определена следующим образом:

$$E = -0,25[(1 + 2\nu^+)/E^+ - (1 + 2\nu^-)/E^-]. \quad (11)$$

Тогда в форме записи (1) сохраняется пять вычисленных констант, а выражение (2) превращается в четырехконстантное:

$$W = (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_3\xi)\sigma^2 + (\tilde{b}_2 + \tilde{b}_4\xi)\tau^2. \quad (2^*)$$

*Вариант № 2.* Естественным является предположение о малозначимости члена  $E\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ , где сомножителями одновременно являются три главных нормированных напряжения – величины малого порядка по сравнению с нормой векторного пространства  $S$  (нормированное пространство № 1) в соотношениях вида (1). Дополнительно замечено, что совместное влияние трех нормированных напряжений среди величин второго порядка малости минимально. Поэтому в форме (1) достаточно представить  $E = 0$ . В результате потенциал (1) превращается в четырехконстантный:

$$\begin{aligned} W &= 0,5[(A + B\alpha_1)\sigma_1^2 + (A + B\alpha_2)\sigma_2^2 + (A + B\alpha_3)\sigma_3^2] + \\ &+ [C + D(\alpha_1 + \alpha_2)]\sigma_1\sigma_2 + [C + D(\alpha_2 + \alpha_3)]\sigma_2\sigma_3 + \end{aligned} \quad (1^*)$$

$$+[C + D(\alpha_1 + \alpha_3)]\sigma_1\sigma_3,$$

и значения всех констант устанавливаются из двух экспериментов по условиям (7). В то же время в записи потенциала (2) сохраняется пять констант, которые вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1 &= 0,75[(1 - 2v^+)/E^+ + (1 - 2v^-)/E^-]; & \tilde{b}_2 &= 0,75[(1 + v^+)/E^+ + (1 + v^-)/E^-]; \\ \tilde{b}_3 &= 0,25\sqrt{3}[(1 - 4v^+)/E^+ - (1 - 4v^-)/E^-]; & \tilde{b}_4 &= 0,75\sqrt{3}(1/E^+ - 1/E^-); \\ \tilde{b}_5 &= 0,125\sqrt{6}[(1 + 2v^+)/E^+ - (1 + 2v^-)/E^-].\end{aligned}\quad (12)$$

*Вариант № 3.* Пятая константа однозначно устанавливается из гипотетического предположения о совпадении законов, определяющих изменение объема в квазилинейной форме при трехосном равном сжатии или растяжении, с подобным законом, соответствующим обобщенному закону Гука:

$$\theta^-/3 = \sigma^-(1 - 2v^-)/E^-; \quad \theta^+/3 = \sigma^+(1 - 2v^+)/E^+. \quad (13)$$

Сравнивая уравнение (4) и зависимости (13) при трехосном равном сжатии ( $\xi = -1$ ,  $\eta = 0$ ) и равном растяжении ( $\xi = 1$ ,  $\eta = 0$ ), приходим к следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}E &= 0,25\sqrt{3}[(1 - 2v^+)/E^+ - (1 - 2v^-)/E^-] - 0,25[(1 - 4v^+)/E^+ - (1 - 4v^-)/E^-]; \\ \tilde{b}_1 &= 0,75[(1 - 2v^+)/E^+ + (1 - 2v^-)/E^-]; & \tilde{b}_2 &= 0,75[(1 + v^+)/E^+ + (1 + v^-)/E^-]; \\ \tilde{b}_3 &= 0,75[(1 - 2v^+)/E^+ - (1 - 2v^-)/E^-]; \\ \tilde{b}_4 &= 0,375\sqrt{3}\{[(3 - 4v^+)/E^+ - (3 - 4v^-)/E^-] - \\ &\quad - \sqrt{3}[(1 - 2v^+)/E^+ - (1 - 2v^-)/E^-]\}; \\ \tilde{b}_5 &= 0,75\sqrt{2}\{0,5[(1 - 2v^+)/E^+ - (1 - 2v^-)/E^-] + \sqrt{3}(1/E^+ - 1/E^-)\}.\end{aligned}\quad (14)$$

При таком варианте обе формы потенциала деформаций (1) и (2) остаются пятиконстантными при однозначном определении констант только из двух простейших опытов.

В работе [34] Н. М. Матченко и И. Н. Матченко попытались предложить наиболее универсальные подходы и формы построения квазилинейных четырехконстантных потенциалов деформаций, одновременно заметив в работе [32] недопустимую оплошность в критике формы потенциалов напряжений, предложенных в статьях [35 – 37]. Данная оплошность касается утверждения, что согласно потенциалу [35 – 37] в изотропном материале чистое гидростатическое напряжение вызывает изменение формы. На самом же деле этого не происходит и данное критическое замечание не соответствует действительности. Однако недостатки потенциала [35 – 37] сохраняются для трехконстантной формы, так как экспериментально определяемых материальных параметров имеется четыре, что непременно приводит к ограничению на механические характеристики материалов, то есть устанавливает функциональную зависимость между некоррелируемыми величинами.

Попытка же предложить новый подход к построению форм квазилинейных четырехконстантных потенциалов деформаций [34] оказалась лишь переделкой инвариантных обозначений потенциалов (1) и (2). Поясню по сути. Все квазилинейные модели деформирования изотропных материалов базируются на введении тех или иных количественных и качественных характеристик напряженного состояния сплошной среды. В работе [34] Н. М. Матченко и И. Н. Матченко рассматривают три группы таких параметров:

а) количественные параметры первой группы –

$$H_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij};$$

$$H_{II} = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = S^2 = \sigma_k\sigma_k = 3S_0^2; \quad (15)$$

б) количественные параметры второй группы –

$$I_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij};$$

$$I_{II} = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 9\tau^2; \quad (16)$$

в) количественные параметры третьей группы –

$$J_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij};$$

$$J_{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 3(S_0^2 - 1,5\tau^2). \quad (17)$$

Качественной характеристикой напряженного состояния для всех этих групп в работе [34] предлагается использовать один следующий параметр:

$$\chi = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = 3\sigma / S = 3\sigma / (\sqrt{3}S_0). \quad (18)$$

В результате использования данных параметров (15) – (18) позволило Н. М. Матченко и И. Н. Матченко [34] получить три формы квазилинейного потенциала:

$$W = (A_h + a_h\chi)H_I^2 + (B_h + b_h\chi)H_{II}; \quad (19)$$

$$W = (A_i + a_i\chi)I_I^2 + (B_i + b_i\chi)I_{II}; \quad (20)$$

$$W = (A_j + a_j\chi)J_I^2 + (B_j + b_j\chi)J_{II}. \quad (21)$$

Нетрудно заметить, что все три формы потенциала (19) – (21) с учетом уравнений (15) – (18) легко преобразуются и полностью совпадают с представлением (2\*). Поэтому комбинации (19) – (21) самостоятельного значения не имеют, а представляют другую форму обозначений. Тем более показано [31, 32], что пятиконстантный потенциал имеет более высокую точность при описании экспериментальных диаграмм деформирования большинства разносопротивляющихся материалов при сложных напряженных состояниях.

С другой стороны, в работе [38] утверждается, что автором получен более общий квазилинейный потенциал, чем предложенный в работах [31, 32]. Этот потенциал имеет вид

$$\Phi = \Phi_1[\sigma_i\varphi_1(u, \zeta)] + \Phi_2[\sigma_0\varphi_2(u, \zeta)] + \Phi_3[S_3^{1/3}\varphi_3(u, \zeta)], \quad (22)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений;  $\sigma_0$  – шаровая часть тензора напряжений;  $u = \sigma_0 / \sigma_i$  – параметр, учитывающий вид напряженного состояния (недостатки данного качественного параметра обсуждались в работе [32]);  $\varphi_1(u, \zeta)$ ,  $\varphi_2(u, \zeta)$ ,  $\varphi_3(u, \zeta)$  – функции, подлежащие определению из экспериментов;  $S_3$  – третий инвариант тензора девиатора напряжений.

Однако сам автор никак не конкретизировал функции  $\varphi_1(u, \zeta)$ ,  $\varphi_2(u, \zeta)$ ,  $\varphi_3(u, \zeta)$  и утверждал, что «... наибольшую трудность представляет определение функций  $\varphi_i(u, \zeta)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Тем не менее это было сделано в [31] при некоторых предположениях». Данные предположения представлены здесь выше (см. выражения (7) – (14)).

## Выводы

Таким образом, в настоящее время наиболее общие квазилинейные определяющие соотношения изотропных материалов, пригодные для беспроблемного использования при решении прикладных научных и инженерных задач, являются две формы потенциала деформаций (1) и (2).

## Библиографический список

1. Леонов М. Я. Зависимости между деформациями и напряжениями для полухрупких тел / М. Я. Леонов, В. А. Паняев, К. Н. Русинко // Инж. журн. МГТ. – 1967. – № 6. – С. 26 – 32.
2. Писаренко Г. С. Экспериментальное исследование закономерностей деформирования углеродистой стали в условиях сложного напряженного состояния при низких температурах / Г. С. Писаренко, А.А.Лебедев, В. П. Ломашевский // Пробл. прочности. – 1968. – № 5. – С. 42–47.
3. Писаренко Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г.С.Писаренко, А. А. Лебедев. – Киев: Наукова думка, 1976. – 416 с.
4. Стеценко В. А. Механические характеристики серого чугуна при растяжении и сжатии / В. А. Стеценко // Исслед. по механике деформируемых сред. – Тула: ТПИ, 1972. – С. 103–109.
5. Jamroz L. Wytzymalosciowe Wlasnosci Zeliwa Sferoidalnegon / L.Jamroz, I.Mechanizne // Prace Instytutu Odlewnictwa. – 1971. – Rok. 21. – №3. – Str. 283 – 302.
6. Березин А. В. Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел / А. В.Березин. – М.: Наука, 1990. – 135 с.
7. Березин А. В. Деформируемость и разрушение изотропных графитовых материалов / А. В. Березин, В. И. Строков, В. Н. Барабанов // Конструкционные материалы на основе углерода. – М.: Металлургия, 1976. – Вып. 11. – С. 102–110.
8. Некоторые особенности методик исследования прочности свойств графитов при плоском напряженном состоянии / А. М. Фридман [и др.] // Заводская лаборатория. – 1972. – №9. – С. 1137–1140.
9. Сопротивление деформированию и разрушению изотропных графитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния / А. В. Березин [и др.] // Проблемы прочности. – 1979. – №2. –С. 60–65.
10. Строков В.И. Методика исследования прочностных и деформационных свойств графита в условиях сложного напряженного состояния / В.И.Строков, В.Н.Барабанов // Заводская лаборатория. – 1974. – №9. – С. 1141–1144.
11. Фридман А.М. Исследование разрушения углеграфитовых материалов в условиях сложного напряженного состояния / А.М.Фридман, Ю.П.Ануфриев, В.Н.Барабанов // Проблемы прочности. – 1973. – №1. – С. 52–55.
12. Jones R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. – №8. – P. 995–1001.
13. Jones R. M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – P. 16–25.
14. Jones R. M. Buckling of Stiffened Multilayered Circular Shells wiht Different Ortotropic Moduli in Tensione and Compression / R. M. Jones // AIAA Journal. – 1971. – Vol.9. – №5. – P. 917–923.
15. Jones R. M. A Nonsystemmetric Compliance Matrix Approach to Notlinear Multimodulus Ortotropic Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №10. – P. 1436–1443.
16. Jones R. M., Further Characteristics of a Nonlinear Material Model for ATJ-S Graphite / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // Jounal Composit Materials. – 1975. – Vol. 9. – №7. – P. 251–265.



17. Jones R. M., Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite / R. M. Jones, D. A. R. Nelson // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14 – №10. – P. 1427–1435.
18. Jones R. M., Material for nonlinear Deformation / R. M. Jones, D. A. R. Nelson // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14. – №6. – P. 709–716.
19. Романов В. В. Исследование зависимости модуля упругости шлакокамнелитого материала от вида нагружения / В. В. Романов // *Физ.-хим. исслед. по технологии стекла и ситалов*. – М.: Наука, 1984. – С. 78–81.
20. Матченко Н. М. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 2. Нелинейные соотношения / Н. М. Матченко, Л. А. Толоконников, А. А. Трещев // *Изв. РАН. МТТ*. – 1999. – №4. – С. 87–95.
21. Bazant Z.P. Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete / Z.P. Bazant, P.D. Bhat // *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*. – 1976. – Vol. 102. – № EM4. – P. 701–722.
22. Kupfer H. B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung / H. B. Kupfer // *Beton und Stahlbetonbau*. – 1973. – №11. – P. 269–274.
23. Kupfer H. B. Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses / H. B. Kupfer, H. K. Hilsdorf, H. Rusch // *ACI Journal*. – Vol. 66. – 1969. – №8. – P. 656–666.
24. Tasuji M. E. Stress-Strain Response and Fracture of Concrete in Biaxial Loading / M. E. Tasuji, F. O. Slate, A. H. Nilson // *ACI Journal*. – 1979. – №7. – P. 806–812.
25. Гольдман А. Я. Исследование механических свойств тканевых стеклопластиков при растяжении и сжатии нормально к плоскости армирования / А. Я. Гольдман, Н. Ф. Савельев, В. И. Смирнова // *Механика полимеров*. – 1968. – №5. – С. 803–809.
26. Деревянко Н. И. Свойства армированного полистирола при кратковременном растяжении, сжатии и изгибе / Н. И. Деревянко // *Механика полимеров*. – 1968. – №6. – С. 1059–1064.
27. Елсуфьев С. А. Исследование деформирования фторопласта-4 при линейном и плоском напряженном состояниях / С. А. Елсуфьев // *Механика полимеров*. – 1968. – №4. – С. 742–746.
28. Елсуфьев С. А. Изучение деформирования фторопласта в условиях плоского напряженного состояния / С. А. Елсуфьев, В. М. Чебанов // *Исслед. по упругости и пластичности*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1971. – Вып. 8. – С. 209–213.
29. Калинка Ю. А. Исследование физико-механических свойств хаотически наполненных стеклопластиков / Ю. А. Калинка, С. М. Боровикова // *Механика полимеров*. – 1971. – №3. – С. 411–415.
30. Schwartz R.T., Characteristics of Boron Fibers and Boron-Fiber-Reinforced Plastic Composites / R.T. Schwartz, H.S. Schwartz // *AIAA Journal*. – 1967. – Vol. 5. – №2. – P. 119–126.
31. Матченко Н. М. Определяющие соотношения изотропных разносопротивляющихся сред. Ч. 1. Квазилинейные соотношения / Н. М. Матченко, Л. А. Толоконников, А. А. Трещев // *Изв. РАН. МТТ*. – 1995. – №1. – С. 73–78.
32. Трещев А. А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А. А. Трещев // *Москва – Тула: РААСН – ТулГУ*, 2016. – 328 с.
33. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела / Л. А. Толоконников. – М.: Высшая школа, 1979. – 318 с.
34. Матченко Н. М. К построению четырехконстантных определяющих соотношений квазилинейной изотропной упругой среды / Н. М. Матченко, И. Н. Матченко // *Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*. – 2016. – № 4. – С. 73–80.
35. Мясников В. П. Нелокальная модель разномодульного вязкоупругого тела / В. П. Мясников, В. А. Ляховский, Ю. Ю. Подладчиков // *Докл. АН СССР*. – 1990. – Т. 312. – №2. – С. 302–305.

36. Мясников В. П. Деформационная модель идеально сыпучей зернистой среды / В. П. Мясников, А. И. Олейников // Докл. АН СССР. – 1991. – Т. 316. – №3. – С. 565–568.
37. Мясников В. П. Основные общие соотношения модели изотропно-упругой разносопротивляющейся среды / В. П. Мясников, А. И. Олейников // Докл. АН СССР. – 1992. – Т. 322. – №1. – С. 57–60.
38. Березин А. В. О законах деформирования разномодульных дилатирующих сред / А. В. Березин // Проблемы машиностроения и автоматизации. Международный журнал. – 2007. – №2. – С. 70–72.

#### References

1. Leonov M.Ya., Panaev V.A., Rusinko K.N. Dependence between the deformations and stresses for semi-brittle body. Engineering journal MSB. - 1967. - № 6. - P. 26 – 32.
2. Pisarenko G.S. Experimental study of the regularities of deformation of carbon steel in conditions of complex stress state at low temperatures / G.S.Pisarenko, A.A.Lebedev, V.P.Romaszewski // Probl. strengths. - 1968. - № 5. - P. 42-47.
3. Pisarenko G.S. Deformation and strength of materials at complex stress state / G.S.Pisarenko, A.A.Lebedev. - Kyiv: Naukova Dumka, 1976. - 416 p.
4. Stetsenko V.A. Mechanical characteristics of gray iron under tension and compression / V.A.Stetsenko // Research. on the mechanics of deformable media. - Tula: TPI, 1972. - P. 103-109.
5. Jamroz L. Wytzymalosciowe Wlasnosci Zeliwa Sferoidalnegon. L.Jamroz, I.Mechanizne Prace Instytutu Odlewnictwa. – 1971. – Rok. 21. – №3. – P. 283 – 302.
6. Berezin A.V. Influence of damages on deformation and strength characteristics of solid bodies. A.V.Berezin. - Moscow: Science, 1990. - 135 p.
7. Berezin A.V.,Strokov V.I, Barabanov V.N. Deformation and destruction of isotropic graphite materials. Structural materials based on carbon. - Moscow: Metallurgy, 1976. - Issue. 11. – P. 102-110.
8. Friedman A.M. Some features of methods of research of graphite strength properties under a plane stress state [and others]. Zavodskaya laboratoriya. - 1972. - №9. – P. 1137-1140.
9. Resistance to deformation and destruction of isotropic graphite materials under complex stress conditions / A.V.Berezin [and others] // Strength Problems. - 1979. - №2. - P. 60-65.
10. Strokov V.I. Methods of research of strength and deformation properties of graphite in conditions of complex stress state / V.I.Strokov, V.N.Barabanov // Factory laboratory. - 1974. - №9. - P. 1141-1144.
11. Friedman A.M. Investigation of the destruction of carbon-graphite materials under complex stress state / A.M.Friedman, J.P.Anufriev, V.N.Barabanov // Problems of strength. - 1973. - №1. - P. 52-55.
12. Jones R.M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. – №8. – P. 995–1001.
12. Jones R. M. Modeling Nonlinear Deformation of Carbon-Carbon Composite Materials. AIAA Journal. – 1980. – Vol. 18. – №8. – P. 995–1001.
13. Jones R.M. Stress-Strain Relations for Materials with Different Moduli in Tension and Compression / R.M.Jones // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №1. – P. 16–25.
14. Jones R.M. Buckling of stiffened multilayered circular Shells wiht different ortotropic moduli in tensione and compression. AIAA Journal. – 1971. – Vol.9. – №5. – P. 917–923.
15. Jones R.M. A Nonsystemmetric Compliance Matrix Approach to Notlinear Multimodulus Ortotropic Materials. AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15. – №10. – P. 1436–1443.
16. Jones R.M., Further Characteristics of a Nonlinear Material Model for ATJ-S Graphite / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // Jounal Composit Materials. – 1975. – Vol. 9. – №7. – P. 251–265.
17. Jones R.M., D.A.R.Nelson. Theoretical-experimental correlation of material models for non-linear deformation of graphite. AIAA Journal. – 1976. – Vol. 14 – №10. – P. 1427–1435.

18. Jones R.M., Material for nonlinear Deformation / R.M.Jones, D.A.R.Nelson // *AIAA Journal*. – 1976. – Vol. 14. – №6. – P. 709–716.
19. Romanov V.V. Investigation of dependence of the elastic modulus of slag-silica material on the type of loading. *Fiz.-him. research. according to the technology of glass and sitalov.* - Moscow: Science, 1984. - P. 78-81.
20. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treshchev A.A. Governing relations of isotropic differently resistive medium. Part 4. A Nonlinear correlation. *Izv. RAS. MSB.* - 1999. - №4. - P. 87-95.
21. Bazant Z.P., P.D.Bhat. Endochronic theory of inelasticity and failure of concrete. *Journal of the engineering mechanics division, ASCE.* – 1976. – Vol. 102. – № EM4. – P. 701–722.
22. Kupfer H. B. Das nicht-linear Verhalten des Betons bei Zweiachsiger Beanspruchung. *Beton und Stahlbetonbau.* – 1973. – №11. – P. 269–274.
23. Kupfer H .B., H. K. Hilsdorf, H. Rusch. Behavior of concrete under biaxial stresses. *ACI Journal.* – Vol. 66. – 1969. – №8. – P. 656–666.
24. Tasuji M.E., Slate F.O., Nilson A.H. Stress-strain response and fracture of concrete in biaxial loading. // *ACI Journal.* – 1979. – №7. – P. 806–812.
25. Goldman A.Ya. Investigation of mechanical properties of fabric fiberglass under tension and compression is normal to the plane of reinforcement / A.Ya.Goldman, N.F.Savelyev, V.I.Smirnova // *Mechanics of polymers.* - 1968. - №5. - P. 803-809.
26. Derevyanko N.I. Properties of reinforced polystyrene at short-term tension, compression and bending. *Mechanics of polymers.* - 1968. - №6. – P. 1059-1064.
27. Alsufiev S.A. Investigation of the deformation of fluoroplastic-4 in the linear and plane stress conditions / S.A.Alsufiev // *Mechanics of polymers.* - 1968. - №4. - P. 742-746.
28. Alsufiev S.A. the Study of deformation of PTFE under conditions of plane stress state / A.S.Olsufyev, V.M.Chebanov // *Issled. by elasticity and plasticity.* - L.: Publishing house of LSU, 1971. - Issue. 8. - P. 209-213.
29. Kalinka Y.A., S.M.Borovikova. Study of physico-mechanical properties of randomly filled with fiberglass / Y.A.Kalinka, // *Mechanics of polymers.* - 1971. - №3. – P. 411-415.
30. Schwartz R.T., Schwartz H.S. Characteristics of Boron Fibers and Boron-Fiber-Reinforced Plastic Composites. *AIAA Journal.* – 1967. – Vol. 5. – №2. – P. 119–126.
31. Matchenko N.M., Tolokonnikov L.A., Treshchev A.A. The governing relations of isotropic differen resistant environments. Part 1. A quasilinear correlation. *Izv. RAS. MSB.* - 1995. - №1. - P. 73-78.
32. Treshchev A.A. Theory of deformation and strength of materials with initial or induced sensitivity to the type of stress state. The governing relations. – Moscow; Tula: RAABC; TulGU, 2016. – 328 p.
33. Tolokonnikov L.A. *Mechanics of deformable solid body.* - Moscow: High school, 1979. - 318 p.
34. Matchenko N.M., Matchenko I.N. For construction of four contacted determining ratios of quasi linear isotropic elastic medium. *Bulletin of CHGPU after the name of I.Ya.Yakovleva. Seria. Mechanics of the limit state.* - 2016. - № 4. - P. 73-80.
35. Myasnikov V.P., Lyakhovsky V.A., Podladchikov Y.Y. Nonlocal model of a multi-modulus viscoelastic body. *Report. USSR Academy of Sciences.* - 1990. - Vol. 312. - №2. - P. 302-305.
36. Myasnikov V.P., Oleinikov A.I. Deformation model is a free-flowing granular medium. *Report. USSR Academy of Sciences.* - 1991. - Vol. 316. - №3. - P. 565-568.
37. Myasnikov V.P. Oleinikov A.I. General basic relations of the model of isotropic elastic differently resistive environment. *Report. USSR Academy of Sciences.* - 1992. - Vol. 322. - №1. - P. 57-60.
38. Berezin A.V. About the laws of deformation of multimodular dilating environment. *Problems of mechanical engineering and automation. International journal.* - 2007. - №2. - P. 70-72.

## INDUCTIVE ANALYSIS OF THE DEFORMATION OF A PLANAR MULTI-LAYER TRUSS

M. N. Kirsanov<sup>1</sup>

*National Research University "MPEI",*

*Russia. Moscow*

---

<sup>1</sup> Dr. Sci., Professor tel.: +7(495)3627314; e-mail: c216@ya.ru

---

The statically determinate trussed trapezoidal truss with three triple diagonal grid and columns has two supports. With the use of Maple symbol mathematics for an arbitrary number of panels, formulas are derived for the deflection of the truss under the action of a load uniformly distributed over the nodes of the lower or upper belts. The kinematic degeneracy of the construction is noted for some values of the number of panels, which is manifested in the vanishing of the determinant of the system of equilibrium equations for the nodes of the truss. The dependence of the horizontal displacement of the support on the load and the size of the truss is found.

**Keywords:** planar truss, deflection, induction method, Maple, analytical solution

## ИНДУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАТИВНОСТИ ПЛОСКОЙ МНОГОРЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ

М. Н. Кирсанов<sup>1</sup>

Национальный исследовательский университет "МЭИ"

Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup> Д-р. физ.-мат. наук, профессор, тел.: +7(495)362-73-14; e-mail: c216@ya.ru

---

Статически определимая ферма трапецеидального очертания с тройной раскосной решеткой и стойками имеет с две опоры. С использованием пакетов символьной математики Maple для произвольного числа панелей выведены формулы для прогиба фермы под действием нагрузки, равномерно распределенной по узлам нижнего и верхнего пояса. Замечено кинематическое вырождение конструкции при некоторых значениях числах панелей, что проявляется в равенстве нулю определителя системы уравнений равновесия узлов фермы. Найдена зависимость горизонтального смещения опоры от нагрузки и размеров фермы.

**Ключевые слова:** плоская ферма, прогиб, метод индукции, Maple, точное решение

### Introduction

Formulas in the engineering practice of engineers occupy a special place. Real numerical calculations for analyzing the deformability and strength of the designed structure can be verified by another calculation, in another specialized calculation package, or by the formula derived for the simplified model of the structure. The most obvious and common simplification of the truss scheme is its hinge model. At the same time, the most demanded formulas include not only the size of the truss, the load and the characteristics of the material, but also integer values such as the number of rods or panels, when it comes to regular designs.

A semi-empirical formula of Kachurin is known that is valid for beam trusses with simplified allowance for the lattice type [1], the formulas of Professor V. Ignatyev, including the formula for the deflection of a cantilevered cross-shaped lattice [2], and solutions obtained by induction using the computer mathematic operators Maple [3,4].

Consider a beam truss (Figure 1). The truss is conditionally allocated  $2n$  panels in the span, counting on the lower belt of length  $L = 2na$ . In this case, the total number of rods in the truss, including three rods, which simulate a movable and fixed support, is  $m = 8k + 4$ .

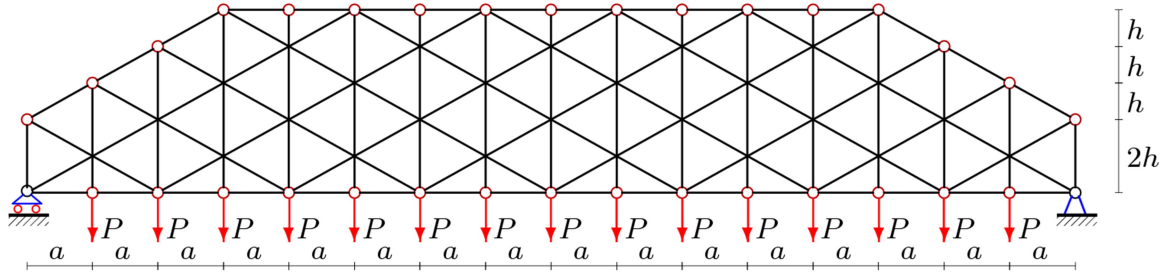


Fig. 1. Truss:  $n=8$

Calculation of efforts is made according to the program [5], written in the language Maple. The program introduces the coordinates of the hinges and vectors containing information about the numbers of the ends of the rods. The matrix of the equilibrium equations for the nodes consists of the direction cosines of the forces in the rods. The first calculations showed that the proposed scheme of the truss has an implicit defect, manifested in the fact that for certain values of the number of panels the determinant of the matrix of the system of equations degenerates. In these exceptional cases, a certain periodicity is revealed. For  $n = 3, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 15, 17, \dots$  the determinant is equal to zero. To ensure that in the process of aligning the sequence of solutions, over which there will be a general dependence of the deflection on the number of panels, skip these we introduce the function  $n = (10k + 13 - (-1)^k) / 4$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

To confirm the degeneracy of the system of equations of equilibrium and the kinematic variability of the system, we can give a picture of the distribution of possible node velocities for  $n = 4$  (Fig. 2). The velocities  $u$  and  $v$  are connected. The instantaneous velocity center of the corresponding bracing lies at the point  $K$ . Hence  $v/(2a)=u/c$ . Here  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ .

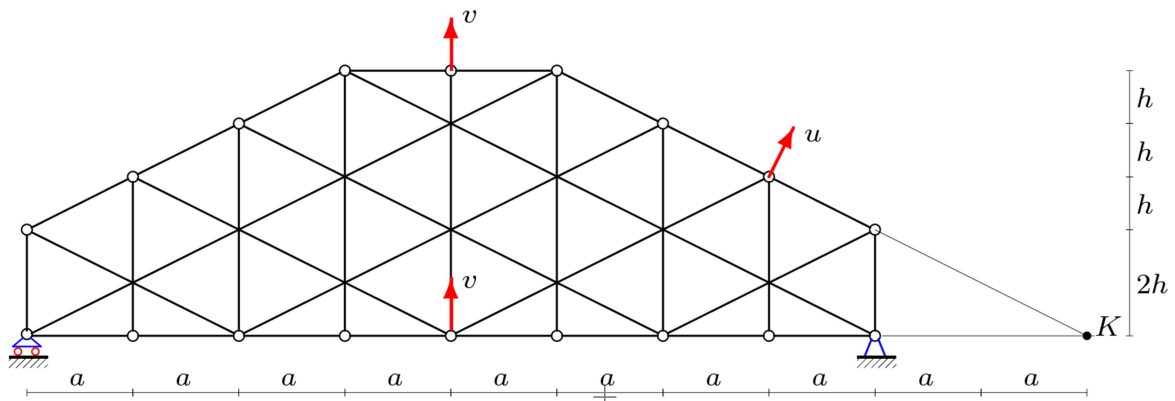


Fig. 2. The velocities of the nodes of the instantly changing truss at  $n=4$

The deflection is determined by the Maxwell-Mohr's formula

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m-3} S_i s_i l_i / (EF),$$

where:  $EF$  — the stiffness of the rods,  $S_i$  — the forces in the rods from the load action,  $s_i$  — the forces in the rods from the action of a single vertical force applied to the middle node of the lower belt,  $l_i$  — the length of the rods. Fixed hinge supports are assumed to be rigid.

The calculation shows that the general form of the formula for deflection has the form:

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (6h^2 EF) \quad (1)$$

and does not depend on the number of panels.

The non-monotonically increasing sequence is obtained for the coefficient  $a^3$ : 102, 308, 1923, 2547, 8028, 9870, 22467, 26927, 50790, 59868, 100047, 116343, 178788, 205502, 297063, 337995, 466422, 525972. In order to obtain the general term of this sequence, we first determine the recurrence equation to which the common term is subject. To do this, we use the **rgf\_findrecur** package of the **genfunc** system Maple. The operator gives the following equation

$$C_{1,k} = C_{1,k-1} + 4C_{1,k-2} - 4C_{1,k-3} - 6C_{1,k-4} + 6C_{1,k-5} + 4C_{1,k-6} - 4C_{1,k-7} - C_{1,k-8} + C_{1,k-9}.$$

The solution of the equation is given by operator **rsolve**:

$$C_1 = (250k^4 + 100((-1)^{k+1} + 13)k^3 + (2950(-1)^{k+1} + 4222)k^2 + (484(-1)^{k+1} + 900)k + 1935(-1)^k - 1743) / 64.$$

Similarly, coefficient  $C_2$  is obtained from the equation

$$C_{2,k} = 3C_{2,k-2} - 3C_{2,k-4} + C_{2,k-6}$$

and has the form

$$C_2 = (10(116(-1)^{k+1} + 109)k^2 + (158(-1)^k - 22)k + 1795(-1)^k - 1355) / 24.$$

The coefficient  $C_3$  is obtained from the solution of equation

$$C_{3,k} = C_{3,k-2} + C_{3,k-4} - C_{3,k-6}$$

and has the form

$$C_3 = 4(5 - \cos(2\varphi))k + 64 \cos(2\varphi) + 15 \cos \varphi - 15 \sin \varphi - 17,$$

where  $\varphi = \pi k / 2$ .

It is interesting to note that when loading the nodes of the lower belt (Figure 3), all coefficients of the solution will not change, except

$$C_3 = 4((5 - (-1)^k) + 5)k + 17(-1)^k - 1).$$

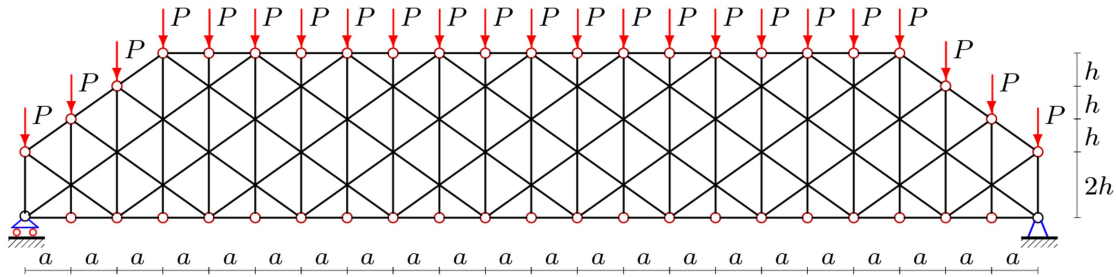


Fig. 3. Truss with load on the upper belt:  $n=11$

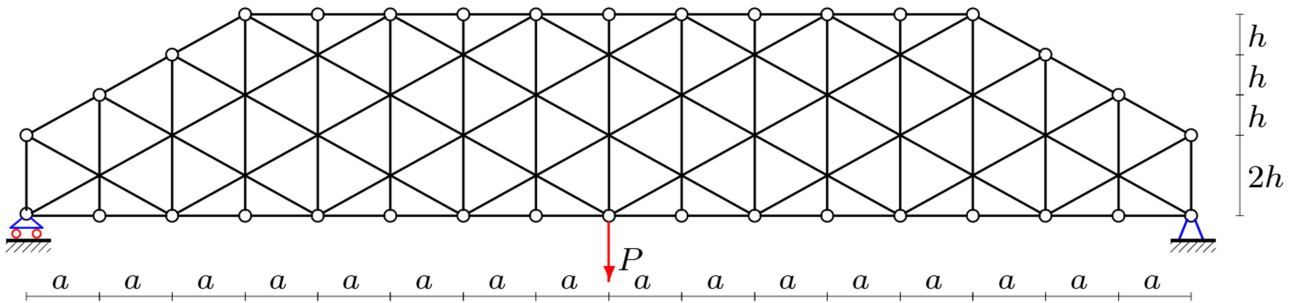


Fig. 4. Truss with load in the center,  $n=8$

The coefficients in (1) for this load have the form

$$C_1 = (10k^3 + 3(13 - \cos(2\varphi))k^2 + (423 - 347 \cos(2\varphi))k - 281 \cos(2\varphi) + 289) / 8,$$

$$C_2 = (10(80(-1)^{k+1} + 91)k + 851(-1)^{k+1} + 967) / 12,$$

$$C_3 = 59 - 28 \cos(2\varphi) + 15 \cos \varphi - 15 \sin \varphi.$$

Example. Let's construct the graph of the obtained function for the case of loading the lower belt with the flight  $L = 100$  m. We introduce the dimensionless deflection  $\Delta' = \Delta EF / (P_s L)$ , where  $P_s = (2n - 1)P$  is the total load on the truss. The graph was very uneven. The jumps of the deflection at neighboring points of the graph reach several times. In fact, the plot shows the amount of deflection only in one node – in the middle of the span. A more accurate characterization of the deformations of the structure can be obtained from the data of several neighboring points and their mean value.

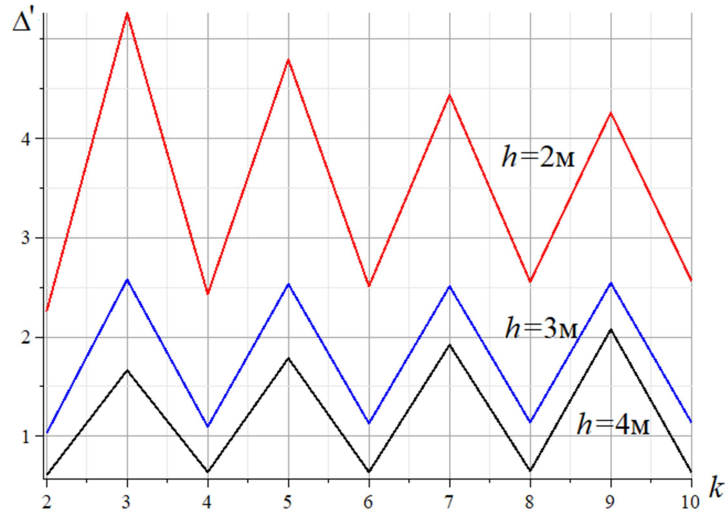


Fig. 5. Dependence of the deflection on the number of panels

One of the most common issues associated with optimizing a truss is choosing the rational height of the truss. The objective function here can be weight, and strength or flexibility. The resulting formula gives a simple solution to this problem. The graph (Fig. 6) shows the dependence of deflection on height at  $L = 100$  m and different numbers of panels.

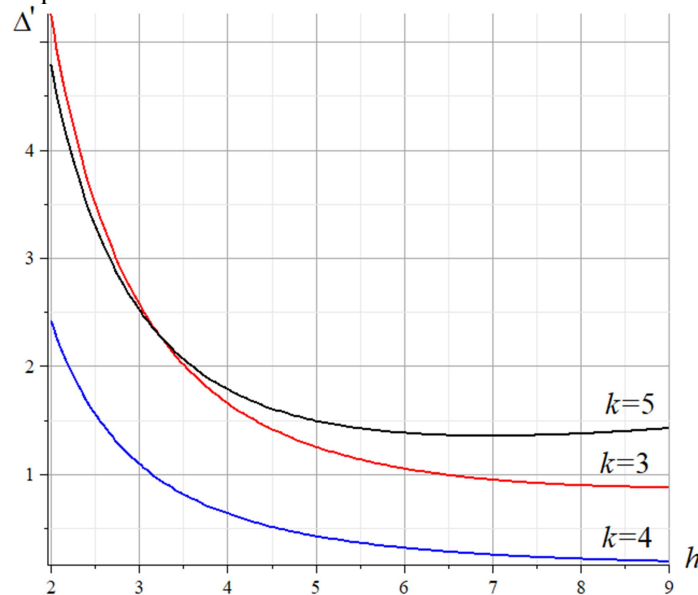


Fig. 6. Dependence of deflection from the height of truss

A minimum of the function that can be used to select the size of the truss is traced. It should also be noted that the order of the curves as a function of  $k$  is clearly absent. At the beginning of the graph, for small truss heights, the smallest deflection is observed at  $k = 4$ . Then the curves  $k = 5$  and  $k = 3$  are go. Starting at a height of  $h = 3$  m, the curves for  $k = 3$  and  $k = 5$  change places.

### Conclusion

The proposed scheme of the truss, in spite of the sufficient complexity of the lattice, allows an analytic solution of the deflection problem for an arbitrary number of panels. It should be kept in mind that for some numbers of panels the truss is kinematically degenerate. Therefore, the thoughtless transfer of the solution for the truss from one number of panels to another is unacceptable. The real picture of the speeds of the nodes of the variable truss is given in the paper. A numerical example shows on the graphs that the resulting function is nonmonotonic.

### References

1. Kachurin, V.K. On the deflection of bridge trusses. Moscow. Collection 17, NTK NKPS, 1928.
2. Ignatiev V.A. Calculation of regular rod systems. Saratov: Saratov Higher Military-Chemical Military School, 1973. 433 p.
3. Kirsanov M.N. Formulas for calculating arch arch deflection *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018. №1. Pp.7–11.
4. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems on the deflection of planar trusses of arch type. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018. Vol. 1. № 16. Pp. 12–33.
5. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.

### Библиографический список

1. Качурин В.К. О прогибе мостовых ферм. –М.: сб.17, НТК НКПС, 1928.
2. Игнатъев, В.А. Расчет регулярных стержневых систем/ В.А. Игнатъев. – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973. – 433 с.
3. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. №1. С.7-11.
4. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.
5. Кирсанов М. Н. Maple и Maplet. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.



## ИНДУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАТИВНОСТИ МНОГОРЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ ПРИ НЕСИММЕТРИЧНОМ ЗАГРУЖЕНИИ

Н. А.Белянкин<sup>1</sup>, А. Ю.Бойко<sup>2</sup>, А. А.Плясова<sup>3</sup>

Национальный исследовательский университет “МЭИ”  
Россия, г. Москва

---

<sup>1</sup>Студент; e-mail: [belankin2@gmail.com](mailto:belankin2@gmail.com)

<sup>2</sup>Студент; e-mail: [boykoanyu@mail.ru](mailto:boykoanyu@mail.ru)

<sup>3</sup>Студентка; e-mail: [annaplyasova13@gmail.com](mailto:annaplyasova13@gmail.com)

---

Ферма с одной неподвижной шарнирной и тремя подвижными опорами имеет двойную крестообразную решетчатую структуру. Показано, что при некоторых значениях числа панелей определитель системы уравнений равновесия узлов вырождается. Выводятся аналитические зависимости прогиба от числа панелей. Уравнения для определения усилий в стержнях решаются в символьной форме в системе компьютерной математики Maple. Применяется формула Максвелла - Мора и метод индукции для получения общего решения.

**Ключевые слова:** Ферма, прогиб, формула Максвелла-Мора, Maple

## INDUCTIVE ANALYSIS OF THE DEFORMATION OF A MULTI-LINK TRUSS UNDER NON-SYMMETRIC LOADING

N. A.Belyankin<sup>1</sup>, A. Y.Boyko<sup>2</sup>, A. A.Plyasova<sup>3</sup>

*National Research University “MPEI”,  
Russia. Moscow*

---

<sup>1</sup>Student; e-mail: [belankin2@gmail.com](mailto:belankin2@gmail.com)

<sup>2</sup> Student; e-mail: [boykoanyu@mail.ru](mailto:boykoanyu@mail.ru)

<sup>3</sup> Student; e-mail: [annaplyasova13@gmail.com](mailto:annaplyasova13@gmail.com)

---

A truss has one fixed hinged and three movable supports and a double cross-shaped lattice structure. Analytical dependences of the deflection on the number of panels are derived. It is shown that for some values of the number of panels, the determinant of the system of equilibrium equations for nodes degenerates. Equations for determining the forces in rods are solved in symbolic form in the system of computer mathematics Maple. The Maxwell-Mohr formula and the method of induction are used to obtain a general solution.

**Keywords:** Truss, deflection, Maxwell-Mohr formula, Maple

### Введение

Расчет жесткости фермы, оцениваемой, как правило по перемещению ее узлов под действием нагрузок, выполняется в большинстве случаев численно в стандартных пакетах, основанных на методе конечных элементов. С появлением и развитием систем компьютерной математики (Maple, Mathematica, Derive, Reduce и др.) стало возможным выводить аналитические зависимости с достаточно широкой областью применения таких решений.

Востребованность формул для расчета строительных конструкций определяется числом независимых параметров задачи. Формулы для расчета какой-либо конкретной конструкции, в которые входят только размеры, величина нагрузки определенного вида и характеристики свойств материала получаются в системах компьютерной математики достаточно просто и особой ценности не имеют.

Чем универсальней формула, тем больше ее ценность. Наиболее сложно ввести в формулу целочисленные параметры, характеризующие число панелей или число каких-нибудь ячеек периодичности. В работах [1-6] методом индукции получены решения для плоских ферм. Для ферм консольного типа найдены простые аналитические решения в [7-9]. Серия решений задач о прогибе решетчатых ферм с различным видом решетки содержится в работах [10-18]. Значительно реже встречаются аналитические решения для регулярных статически неопределимых решеток [19]. Ряд ферм арочного вида аналитически рассчитаны в [20-27]. Метод индукции применим в пространственных задачах [28-35] и для внешне неопределимых ферм [35,36]. Известна также приближенная формула Качурина [38] для расчета широкого класса балочных ферм и формулы Игнатьева В.А. [39].

### Расчет

В настоящей работе на основе программы [40], использованной в [2] и многих других работах, для нахождения усилий в стержнях статически определимых фермах и упомянутого метода индукции выводятся формулы для прогиба центрального узла плоской фермы (рис. 1). Ферма с  $n$  панелями (считаются по нижнему поясу) содержит  $m=4n+18$  стержней и  $2n+9$  сочленяющих узлов.

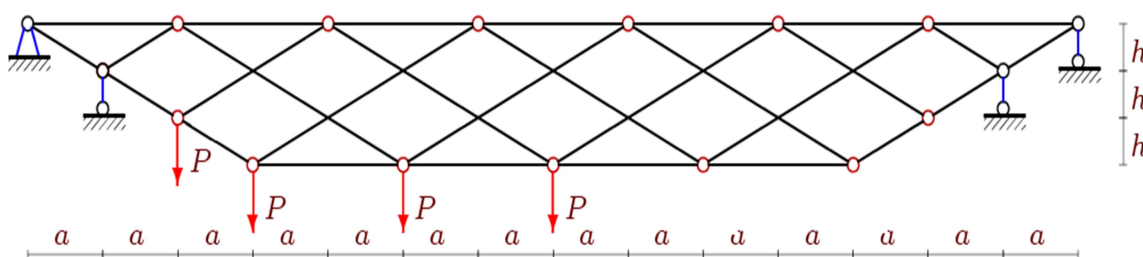


Рис. 1. Ферма при значениях  $n = 2k = 4$

Ферма внешне статически неопределима. Из трех уравнений равновесия конструкции в целом найти пять реакций невозможно. Это вытекает из того, что в свободная от опор ферма не является жестким телом, имея две степени свободы. Поэтому для определения реакций опор требуется полный расчет фермы с вырезанием всех узлов и составлением общей системы равновесия. Фермы с похожей решеткой рассчитаны аналитически в [41,42]. Ферма может быть использована как жесткий элемент в составе пространственной конструкции, например покрытия промышленного здания (рис. 2).

1. Рассмотрим решение задачи о действии сил на половину пролета по нижнему поясу. В программу [2] вводятся координаты узлов, порядок соединения стержней и узлов. Результатом расчетов являются аналитические выражения для усилий.

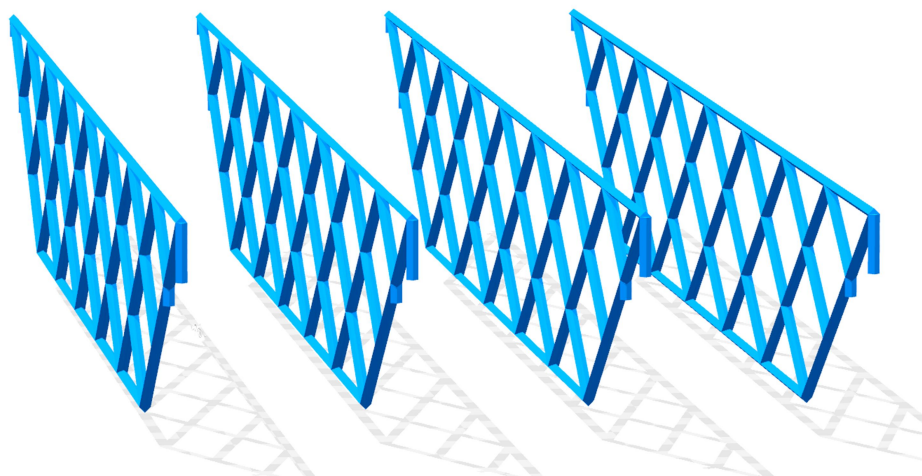


Рис. 2. Ферма в составе пространственной конструкции.  
Горизонтальные связи не показаны

Смещение вычисляется по формуле Максвелла – Мора

$$\Delta = P \sum_{i=1}^{m-5} S_i^2 l_i / (EF),$$

где  $S_i$  — усилия в стержнях фермы от действия единичной нагрузки  $P$ ,  $l_i$  — длины стержней,  $EF$  — жесткость стержней (принята одинаковой для всех стержней). Принимается четное число панелей  $n=2k$ . Суммирование ведется по всем стержням, кроме опорных. В процессе счета было замечено, что при  $k=2,5,8...$  определитель системы уравнений равновесия обращается в ноль, что соответствует кинематической изменяемости конструкции. В качестве подтверждения этого факта приведем одну из возможных картин распределения скоростей узлов фермы (рис. 3).

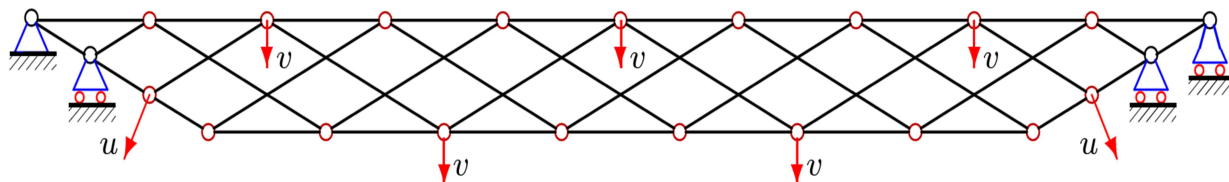


Рис. 3. Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы,  $n=2k=4$

Для того, чтобы исключить эти значения из метода индукции для параметра  $k$  выбирается закон изменения  $k = ((-1)^j + 6j - 1) / 4, j=1,2,3...$

Получено следующее выражение для прогиба

$$EF\Delta = P(A_j a^3 + C_j c^3) / (2h^2) \quad (1)$$

где  $c = \sqrt{h^2 + a^2}$ .

Рассчитаем коэффициенты в (1) от нагрузки по нижнему поясу при нагрузке от 3-го узла, до узла  $(6j + 15 + (-1)^j) / 4$  (рис.1). Методом индукции получено

$$A_j = (4j^3 + 6(1 + (-1)^j)j^2 + 2(4 + 3(-1)^j)j + (-1)^j + 5) / 2,$$

$$C_j = (6j + (-1)^j + 5) / 2..$$

Для получения этих зависимостей из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$  и  $c$ :

- Для размера  $a$ : 5, 57, 59, 255, 257, 693, 695, 1467, 1469, 2673, 2675, 4407, 4409, 6765, 6767, 9843;
- Для размера  $c$ : 5, 9, 11, 15, 17, 21, 23, 27, 29, 33, 35, 39, 41, 45, 47, 51.

Для последовательностей меньшей длины закономерность не определялась. Оператор **rgf\_findrecur** из пакета **genfunc** системы Maple по этим данным дал однородное линейное рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют члены последовательностей:

$$A_j = A_{j-1} + 3A_{j-2} - 3A_{j-3} - 3A_{j-4} + 3A_{j-5} + A_{j-6} - A_{j-7}$$

Такое же уравнение получилось и для коэффициента  $C_j$ . График зависимости безразмерного прогиба фермы  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$  при в данном случае при  $a = L / (4n)$  от числа панелей представлен на рис. 4.

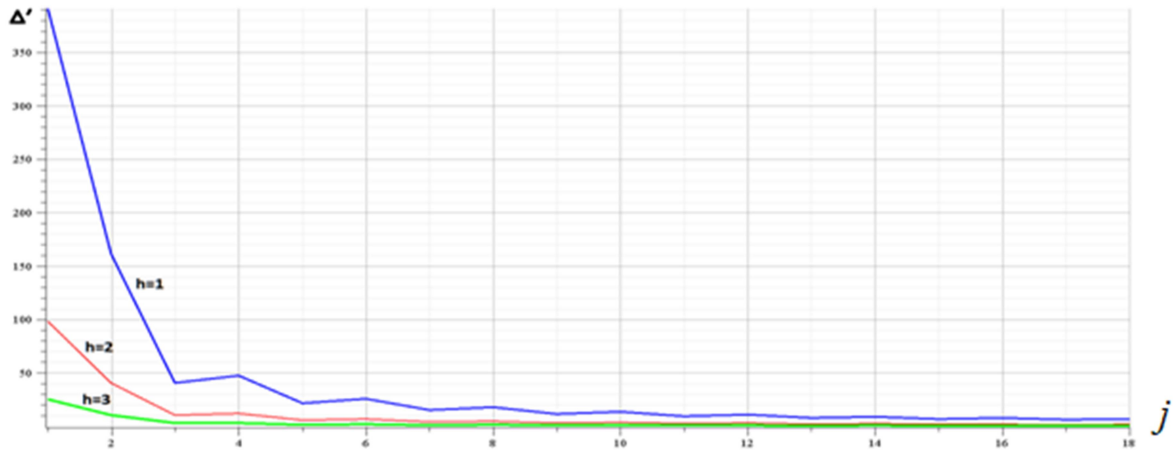


Рис. 4. График зависимости прогиба фермы от числа панелей,  $L=100\text{м}$

2. Аналогично, рассчитаем в (1) коэффициенты от нагрузки по *верхнему* поясу (рис. 5).

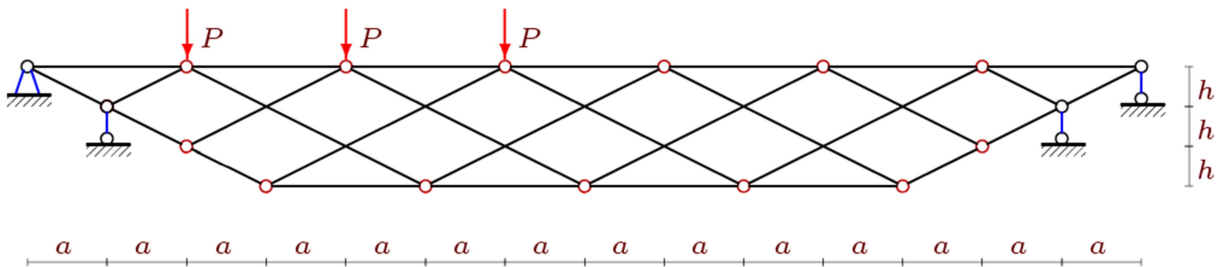


Рис. 5. Ферма с нагрузкой по верхнему поясу  $n=4$

Стоит отметить, что расчет проводился отдельно для узлов фермы с четными и нечетными по счету порядковыми номерами соответственно.

2.1. Методом индукции при нагрузке в узлах фермы с *четными* порядковыми номерами (с 2-го до 20-го) получено:

$$A_j = 32j^4 + 64j^3 - 12j^2 - 44j + 15,$$

$$C_j = (4j^2 + 4j - 3) / 3.$$

Для этого из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$  и  $c$ :

- Для размера  $a$ : 55, 903, 4095, 11935, 27495, 54615, 97903, 162735, 255255, 382375;
- Для размера  $c$ : 15, 63, 135, 231, 351, 495, 663, 855, 1071, 1311

Оператор `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` системы Maple по этим данным дал рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют члены последовательностей:

$$A_j = 5A_{j-1} - 10A_{j-2} + 10A_{j-3} - 5A_{j-4} + A_{j-5}$$

$$C_j = 3C_{j-1} - 3C_{j-2} + C_{j-3}.$$

Отметим, что в данном случае общая формула расчета прогиба имеет вид:

$$EF\Delta = P(A_j a^3 + C_j c^3) / ((2h^2)(j+1))$$

График зависимости прогиба фермы от числа панелей в данном случае при  $a = L / (4n)$ ,  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ , представлен на рис. 6.

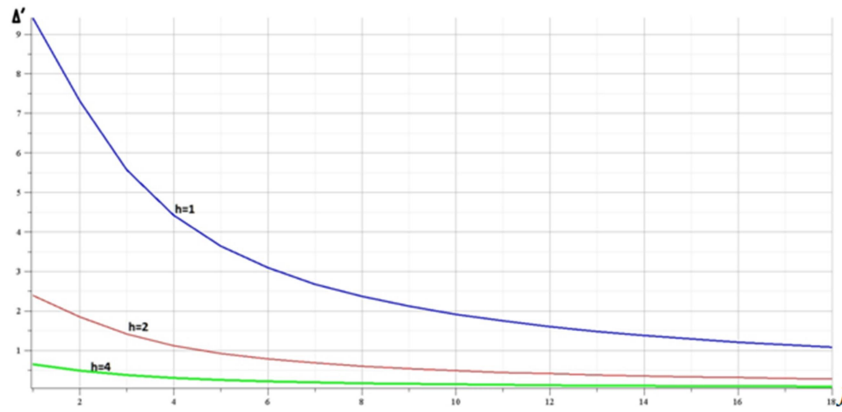


Рис. 6. График зависимости прогиба фермы от числа панелей,  $L=100$  м

2.2. Аналогично, методом индукции при нагрузке в узлах фермы с *нечетными* порядковыми номерами (с 3-го до 19-го) получено:

$$A_j = 64j^5 + 160j^4 + 40j^3 - 92j^2 - 6j + 25,$$

$$C_j = 24j^3 + 44j^2 + 2j + 1.$$

Для этого из решений для ферм с числом панелей от 1 до 14 были выявлены последовательности коэффициентов перед кубами линейных размеров  $a$  и  $c$ :

- Для размера  $a$ : 191, 4573, 28771, 107585, 302695, 710341, 1469003, 2767081, 4850575, 8030765, 12691891, 19298833, 28404791, 40658965;
- Для размера  $c$ : 71, 373, 1051, 2249, 4111, 6781, 10403, 15121, 21079, 28421, 37291, 47833, 60191, 74509.

Оператор `rgf_findrecur` из пакета `genfunc` системы Maple по этим данным дал рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют члены последовательностей:

$$A_j = 6A_{j-1} - 15A_{j-2} + 20A_{j-3} - 15A_{j-4} + 6A_{j-5} - A_{j-6}$$

$$C_j = 4C_{j-1} - 6C_{j-2} + 4C_{j-3} - C_{j-4}.$$

Формула расчета прогиба для данного случая имеет следующий вид:

$$EF\Delta = P(A_j a^3 + C_j c^3) / ((2h^2)(2j+1)^2)$$

График зависимости прогиба фермы от числа панелей в данном случае при  $a = L / (4n)$ ,  $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ , представлен на рис. 7.

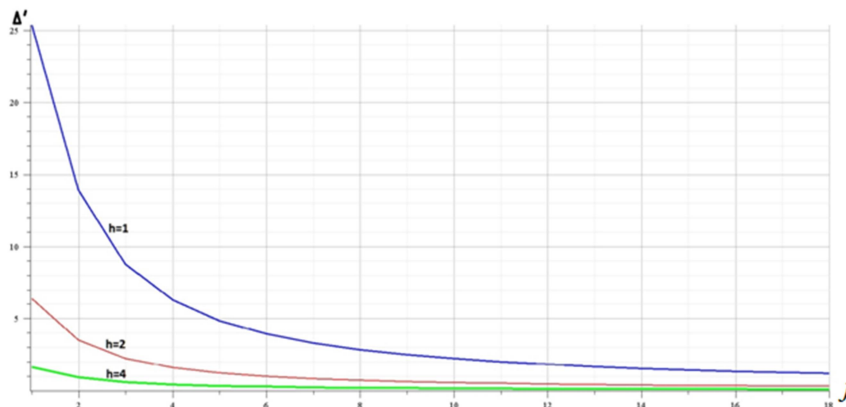


Рис. 7. График зависимости прогиба фермы от числа панелей,  $L=100$  м

## Выводы

Получены аналитические выражения для зависимости прогиба от числа панелей при несимметричном нагружении фермы. Подобное решение для простой балочной фермы с использованием метода двойной индукции было получено ранее Рахматулиной А. и Смирновой А. [6]. Здесь же решена более сложная задача о ферме, допускающей кинематическую изменяемость. Основная трудность возникла из-за невозможности в отдельных случаях получить искомые зависимости в общем случае. Потребовалось разделить задачу на две — отдельно получено для четного числа, связанного с числом панелей, отдельно — для нечетного.

Обзор работ, использующих метод индукции для вывода аналитических зависимостей для плоских ферм, дан в [43].

## Библиографический список

6. Кирсанов М.Н. О влиянии наклона подвижной опоры на жесткость балочной фермы // Вестник МГСУ. 2016. № 10. С. 35-44.
7. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5 (31). С. 38-42.
8. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба двухпролетной плоской фермы // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 5. С. 35-38.
9. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. № 1 (29). С. 84-105.
10. Voropay R.A., Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of a truss with an asymmetric lattice on the number of panels // Postulat. 2018. No. 6
11. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss loaded at half-span by a uniform load // Postulat. 2018. №. 3. 22.
12. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss // Postulat. 2018. No. 5.
13. Kitaev S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple// Postulat. 2018. No. 5
14. Domanov E.V. The dependence of the deflection of the cantilever truss on the number of panels obtained in the system Maple // Строительная механика и конструкции. 2018. №.2 17. С. 80-86.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Analytical calculation and analysis of planar springel truss // Строительная механика и конструкции. 2018. № 2 (17). С. 72-79.
16. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости // Строительная механика и конструкции. 2017. Т. 1. № 14. С. 27-30.
17. Кирсанов М.Н. К выбору решетки балочной фермы// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 3. С. 23-27.
18. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме//Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 4. С. 20-23.
19. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы с решеткой типа "butterfly"//Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 4 (267). С. 2-5.
20. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет балочной фермы со сложной решеткой // Строительная механика и расчет сооружений. 2015. № 3 (260). С. 7-12.
21. Кирсанов М.Н. Аналитический метод расчета прогиба плоской фермы со сложной решеткой шпренгельного типа // Транспортное строительство. 2017. № 5. С. 11-13.
22. Kirsanov M.N. A precise solution of the task of a bend in a lattice girder with a random number of panels // Russian Journal of Building Construction and Architecture. 2018. № 1 (37). С. 92-99.
23. Кирсанов М.Н. Зависимость прогиба плоской решетчатой фермы от числа панелей // Механизация строительства. 2017. Т. 78. № 10. С. 24-27.
24. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 6 (257). С. 2-6.

25. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load //Science Almanac. 2016. No. 3-3(17). Pp. 75-78. DOI: 10.17117/na.2016.03.03.075
26. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels//Научный альманах. 2017. N 2-3(28). С. 268-271. [https://elibrary.ru/download/elibrary\\_28913798\\_61471993.pdf](https://elibrary.ru/download/elibrary_28913798_61471993.pdf)
27. Кирсанов М.Н., Степанов А.С. О зависимости деформаций плоской арочной фермы от числа панелей // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. № 5 (274). С. 9-14.
28. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 7-11.
29. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование деформаций плоской фермы арочного типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2015. № 3 (31). С. 42-48.
30. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ деформации арочной фермы // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2018. Т. 14. № 1. С. 64-70.
31. Кирсанов М.Н. Аналитическая оценка прогиба и усилий в критических стержнях арочной фермы // Транспортное строительство. 2017. № 9. С. 8-10.
32. Кирсанов М.Н. Сравнительный анализ жесткости двух схем арочной фермы // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2015. № 9 (36). С. 44-55.
33. Кирсанов М.Н. Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы// Инженерно-строительный журнал. 2011. № 6 (24). С. 28-34.
34. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы//Вестник Московского энергетического института. 2012. № 5. С. 5-8.
35. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 1. С. 49-53.
36. Кирсанов М.Н. Расчет пространственной стержневой системы, допускающей мгновенную изменяемость//Строительная механика и расчет сооружений. 2012. № 3 (242). С. 48-51.
37. Леонов П.Г., Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и анализ пространственной стержневой конструкции в системе maple // В сборнике: Информатизация инженерного образования ИН-ФОРИНО-2014 Труды международной научно-методической конференции. 2014. С. 239-242.
38. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015.Т. 1. С. 4-8
39. Доманов Е. В. Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей//Научный альманах. 2016. №6-2 (19). С. 214-217. DOI: 10.17117/na.2016.06.02.214
40. Кирсанов М.Н. Оценка прогиба и устойчивости пространственной балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2016. № 5 (268). С. 19-22.
41. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels // Postulat. 2018. №. 6
42. Arutyunyan V.B. Calculation of the deflection of a statically indeterminate beam truss // Postulat 2018. №. 6.
43. Качурин В.К. О прогибе мостовых ферм. –М.: сб.17, НТК НКПС, 1928.
44. Игнатьев В.А. Расчет регулярных стержневых систем/ В.А. Игнатьев. – Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973. – 433 с.
45. Кирсанов М. Н. Maple и MapleT. Решения задач механики. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
46. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts // Postulat. 2018. No. 6.
47. Domanov E.V. An analytical solution of the problem of the externally statically indeterminate truss deflection with an arbitrary number of panels // Postulat. 2017. №. 7.
48. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.

## References

6. Kirsanov M.N. On the influence of the inclination of a mobile support on the rigidity of a beam truss, *Vestnik MGSU*, 2016, no. 10, pp. 35-44.
7. Kirsanov M.N. Inductive analysis of the effect of the installation error on the stiffness and strength of a flat truss, *Engineering and Construction Journal*, 2012, no. 5(31), pp. 38-42.
8. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a two-span flat truss, *Mechanization of construction*, 2017, 78. no. 5, pp. 35-38.
9. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*, 2016, no. 1(29), pp. 84-105.
10. Voropay R.A., Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of a truss with an asymmetric lattice on the number of panels, *Postulat*, 2018, no. 6.
11. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The formula for the deflection of a truss is loaded at half-span by a uniform load, *Postulat*, 2018, no. 3, 22.
12. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. Two-parameter derivation of the formula for deflection of the console truss, *Postulat*, 2018, no. 5.
13. Kitaev S.S. Derivation of the formula for the deflection of a cantilevered truss with a rectangular diagonal grid in the computer mathematics system Maple, *Postulat*, 2018, no. 5.
14. Domanov E.V. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018, no. 2(17), pp. 80-86.
15. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A., Analytical calculation and analysis of planar springel truss *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018, no. 2(17), pp. 72-79.
16. Kirsanov M.N. Derivation of the formula for the deflection of a lattice truss, which has cases of kinematic variability *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2017, vol. 1, no. 14, pp. 27-30.
17. Kirsanov M.N. To the choice of the lattice of the beam truss, *Construction mechanics of engineering structures and structures*, 2017, no. 3, pp. 23-27.
18. Kirsanov M.N. Formulas for the calculation of deflection and effort in the lattice farm, *Mechanization of construction*, 2017, no.4, pp. 20-23.
19. Kirsanov M.N. Analytical calculation of a beam truss with a "butterfly" type grating, *Construction mechanics and calculation of structures*, 2016, no. 4(267), pp. 2-5.
20. Kirsanov M.N. Analytic calculation of a beam truss with a complex lattice, *Construction mechanics and calculation of structures*, 2015, no. 3(260), pp. 7-12.
21. Kirsanov M.N. Analytical method for calculating the deflection of a flat truss with a complex grid of a spiral type, *Transport construction*, 2017, no. 5, pp. 11-13.
22. Kirsanov M.N. A precise solution of the problem of a bend in a lattice girder with a random number of panels, *Russian Journal of Building Construction and Architecture*, 2018, no. 1, (37). pp. 92-99.
23. Kirsanov M.N. Dependence of the deflection of a flat lattice truss on the number of panels, *Mechanization of construction*, 2017, no. 10, pp. 24-27.
24. Kirsanov M.N. Analytical calculation of multi-lattice truss, *Construction mechanics and calculation of structures*, 2014, no. 6(257), pp. 2-6.
25. Kazmiruk I.Yu. On the arch truss deformation under the action of lateral load, *Science Almanac*. 2016. no. 3-3 (17). pp. 75-78. DOI: 10.17117 / na.2016.03.03.075
26. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels, *Science almanac*, 2017. no.2-3(28), pp. 268-271. [https://library.ru/download/elibrary\\_28913798\\_61471993.pdf](https://library.ru/download/elibrary_28913798_61471993.pdf)
27. Kirsanov M.N., Stepanov A.S. On the Dependence of the Deformations of a Flat Arched Truss on the Number of Panels, *Construction Mechanics and Calculation of Structures*, 2017, no. 5(274), pp. 9-14.
28. Kirsanov M.N. Formulas for calculating arch truss deflection, *Construction mechanics and structures*, 2018, vol. 1, no. 16. pp. 7-11.



29. Kirsanov M.N. Analytical study of the deformations of a flat truss of an arched type, *Vestnik of the State University of Marine and River Fleet them. Admiral S.O. Makarov*, 2015, no. 3(31), pp. 42-48.
30. Kirsanov M.N. Inductive analysis of arched truss deformation. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, no. 1, pp. 64-70.
31. Kirsanov M.N. Analytic evaluation of deflection and forces in critical arched trusses, *Transport construction*, 2017, no.9, pp. 8-10.
32. Kirsanov M.N. Comparative analysis of the rigidity of two schemes of an arch farm, *Building of unique buildings and structures*, 2015, no. 9(36), pp. 44-55.
33. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of the spatial core system, *Engineering and construction journal*, 2011, no.6(24), pp. 28-34.
34. Kirsanov M.N. Analytical calculation and optimization of a spatial beam farm, *Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute*, 2012, no.5, pp. 5-8.
35. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the spatial bar system, *Construction mechanics of engineering structures and structures*, 2012, no.1, pp. 49-53.
36. Kirsanov M.N. Calculation of a three-dimensional bar system permitting instantaneous variability, *Construction mechanics and design of structures*, 2012, no.3(242), pp. 48-51.
37. Leonov PG, Kirsanov M.N. Analytical calculation and analysis of the spatial core structure in the maple system, In the collection: *Informatization of engineering education INFORMINO-2014 Proceedings of the International Scientific and Methodical Conference*, 2014, pp. 239-242.
38. Larichev S.A. Inductive Analysis of the Influence of the Building Rise on the Stiffness of a Spatial Beam Farm, *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. M: Infra-M, 2015, vol. 1. pp. 4-8.
39. Domanov E.V. Analytic dependence of the deflection of the spatial console of a triangular profile on the number of panels, *Science Almanac*, 2016, no. 6-2(19), pp. 214-217. DOI: 10.17117 / na.2016.06.02.214
40. Kirsanov M.N. Evaluation of the deflection and stability of a spatial beam truss, *Construction mechanics and calculation of structures*, 2016, no.5(268). pp. 19-22.
41. Domanov E.V. The formula for the dependence of the deflection of an externally statically indeterminate truss on the number of panels, *Postulat*. 2018. no. 6
42. Arutyunyan V.B. Calculation of the deflection of a statically indeterminate beam truss, *Postulat*, 2018, no. 6.
43. Kachurin, V.K. On the deflection of bridge trusses. Moscow. Collection 17, NTK NKPS, 1928.
44. Ignatiev V.A. Calculation of regular rod systems. Saratov: Saratov Higher Military-Chemical Military School, 1973, 433 p.
45. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
46. Voropay R.A. Derivation of the formula for the deflection of the truss with additional horizontal struts, *Postulat*, 2018, no. 6.
47. Domanov E.V. An analytical solution of the problem of the externally statically indeterminate truss deflection with an arbitrary number of panels, *Postulat*, 2017, no. 7.
48. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems on the deflection of planar trusses of arch type. *Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii* [Structural Mechanics and Structures], 2018, vol. 1. no.16. pp. 12–33.

## УСЛОВНЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ СО СТАНДАРТНОЙ СКОРОСТЬЮ В ГРАНИЦАХ ЯДРА СЕЧЕНИЯ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА

А. Н. Синозерский<sup>1</sup>, Р. А. Мухтаров<sup>2</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, проф. кафедры строительной механики

<sup>2</sup>Ст. преподаватель кафедры строительной механики

---

Привлекая сведения о базовых и предельных ядровых характеристиках, определяются коэффициенты увеличения  $K_\mu(e)$  при относительных эксцентриситетах  $e < e_{яс}$ , устанавливаются соответствующие принятым показателям  $K_\mu(e)$  напряженно-деформированные состояния и равнодействующие внутренних сил  $N_\mu(e)$ , оценивается адекватность  $N_\mu(e)$  опытным нагрузкам  $\bar{F}_u(e)$ . Предлагается формула для вычисления наибольшей деформации  $\varepsilon_{5\mu}(e)$  в момент разрушения при заданном эксцентриситете  $e$  в интервале  $[e, e_{яс}]$ . Рассмотренный способ может найти применение для оценки предельных усилий внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью элементов из мелкозернистого бетона.

**Ключевые слова:** внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон, стандартная скорость, ядро сечения, предельное состояние.

## CONDITIONAL LIMITING STATES OF PRISMS FROM FINE-GRAINED CONCRETE ECCENTRICALLY COMPRESSED WITH NORMAL VELOCITY INSIDE SECTION NUCLEUS

A.N. Sinozersky<sup>1</sup>, R. A. Mukhtarov<sup>2</sup>

Voronezh state technical university<sup>1,2</sup>

Voronezh, Russia

---

<sup>1</sup>PhD of Tech. Sc., professor of the department of Structural Mechanics

<sup>2</sup>Senior lecture of the department of Structural Mechanics

---

Taking into consideration the information about basic and limit core characteristics there are determined the enlargement factors  $K_\mu(e)$  at relative eccentricities  $e < e_{яс}$ , there is also defined deflected modes and resultants of the internal forces  $N_\mu(e)$ . Adequacy  $N_\mu(e)$  of experimental loads  $\bar{F}_u(e)$  is estimated. There is suggested the formula for calculation of the biggest deformation  $\varepsilon_{5\mu}(e)$  at the moment of destruction at designed eccentricity  $e$  in the val  $[e, e_{яс}]$ . The under analysis method can be applied for estimation of breaking stresses of elements from fine-grained concrete eccentrically compressed with standard velocity

**Ключевые слова:** eccentric compression, fine-grained concrete, standard velocity, section core, limiting sate.

### Введение

Известно, что бетон не подчиняется закону Гука. Поэтому, исходя из упругопластических свойств материала, при оценке неоднородных напряженных состояний (изгибаемых и нагружаемых внецентренно элементов) предлагались определяемые по результатам испытаний на центральное растяжение и сжатие:

---

© Синозерский А. Н., Мухтаров Р. А., 2018

зависимости между нормальным напряжением  $\sigma$  и относительной деформацией  $\varepsilon$

параболическая [1, 14]  $\sigma = \alpha \cdot \varepsilon + \beta \cdot \varepsilon^2$  (1)

и степенная [2]  $\sigma = A \cdot \varepsilon^{1/n}$ ; (2)

функция [3], [4]  $\sigma = a \cdot \varepsilon^3 + b \cdot \varepsilon^2 + c \cdot \varepsilon$ ; (3)

формула [5]  $\sigma = E \cdot K_v \cdot \varepsilon$ . (4)

Вычисляемые с помощью (1)...(4), например максимальные равнодействующие внутренних сил  $N_B$ , составляют только часть от опытных разрушающих нагрузок  $\bar{F}_u$  при внецентренных воздействиях. Предельные усилия в подобных случаях определяют с помощью условных диаграмм напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$  [6, 7, 13], СНиП 2.03.01-84 и т.д., а в настоящей работе привлекаются зависимость  $\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha_\mu \cdot (\varepsilon)^{\beta_\mu}$  и новая методика определения предельного НДС.

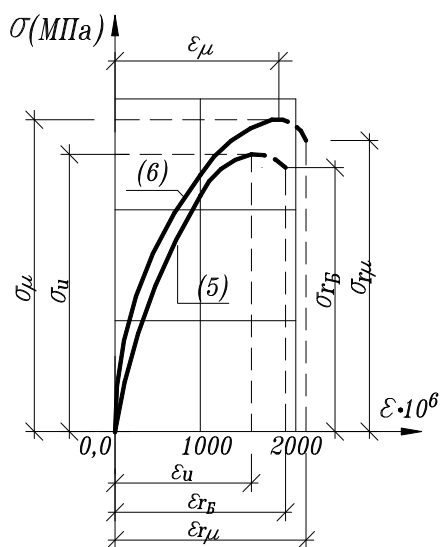
### Постановка задачи

В опытах на центральное сжатие элементов  $h \cdot b \cdot l = 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,4$  м с постоянной по ГОСТ 10180-90 скоростью  $\dot{F} = 3923 \text{ Н} \cdot \text{с}^{-1}$  установлена функция [8]:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha \cdot (\varepsilon)^\beta,$$

при максимальном напряжении, равном призмному пределу прочности  $\bar{\sigma}_u = 26,09$  МПа, и соответствующей деформации  $\bar{\varepsilon}_u = 1600 \cdot 10^{-6}$ , модуле упругости  $E = 31390$  МПа и параметрах  $\alpha = 15880500$  МПа,  $\beta = 2,08100$ , принимающая вид (рис. 1)

$$\sigma = 31390 \cdot \varepsilon - 15880500 \cdot (\varepsilon)^{2,0810}. \quad (5)$$



С помощью (5) по методике [9] определены представленные в табл. 1 характеристики базовых состояний. Они получены:

- при экстремальных равнодействующих внутренних сил  $N_B(e)$  внецентренно сжимаемых призм с относительными эксцентриситетами  $e = y_f/h$  приложения нагрузки  $F(e)$ ;

- при зависимости деформации от координаты  $y$  (рис. 2)

$$\varepsilon = B_B(e) \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r_B}(e), \quad (6)$$

где  $B_B(e)$ ,  $\text{м}^{-1}$  – показатель эпюры  $\varepsilon$ ;

$\varepsilon_{r_B}(e)$  – наибольшая деформация в сечении по

$$\varepsilon_{r_B}(e) = \bar{\varepsilon}_u \cdot r_B(e); \quad (7)$$

$r_B(e) > 1$  – коэффициент увеличения  $\bar{\varepsilon}_u$ , вычисляемый из условия  $N_B(e) = \max N(e)$ .

Рис. 1. График « $\sigma - \varepsilon$ »

Таблица 1

Координата точки $y_f$ , мм, при $z_f = 0$	Эксцентриситет $e = y_f/h$	$r_B(e)$	$\varepsilon_{r_B}(e) \cdot 10^6$	$B_B(e) \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$N_B(e)$ , кН	Разрушающая сила $\bar{F}_u(e) \pm \Delta F_u$ , кН
1	2	3	4	5	6	7
5,0	0,05	1,1955	1912,80	1,48878349	222,255	236,3±17,7
10,0	0,10	1,2579	2012,64	1,97093588	193,485	207,9±14,7
10,730*	0,10730	1,26463	2023,408	2,02342392	189,890	204,922

\* результаты расчёта при ядровом эксцентриситете  $e_{яс} = 0,10730$  из [8].

В табл. 1 приведены средние экспериментальные разрушающие усилия  $\bar{F}_u(e)$  с границами доверительных интервалов  $\pm \Delta F_u$  для вероятности 0,95. Увеличение нагрузки  $\bar{F}_u(e)$

по сравнению с базовыми равнодействующими  $N_B(e)$  предложено [10] оценивать показателем  $K_\mu(e) > 1$ . Наибольший  $K_\mu(e_{яс}) = 1,07916$  имеет место для случая  $e = e_{яс} = 0,10730$  [8]:

$$\text{с функцией } \sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha_\mu(e_{яс}) \cdot (\varepsilon)^{\beta_\mu(e_{яс})},$$

$$\text{экстремальными напряжением } \sigma_\mu(e_{яс}) = K_\mu(e_{яс}) \cdot \bar{\sigma}_u = 1,07916 \cdot 26,09 = 28,155 \text{ МПа}$$

$$\text{и деформацией } \varepsilon_\mu(e_{яс}) = K_\mu(e_{яс}) \cdot \bar{\varepsilon}_u = 1,07916 \cdot 1600 \cdot 10^{-6} = 1726,66 \cdot 10^{-6};$$

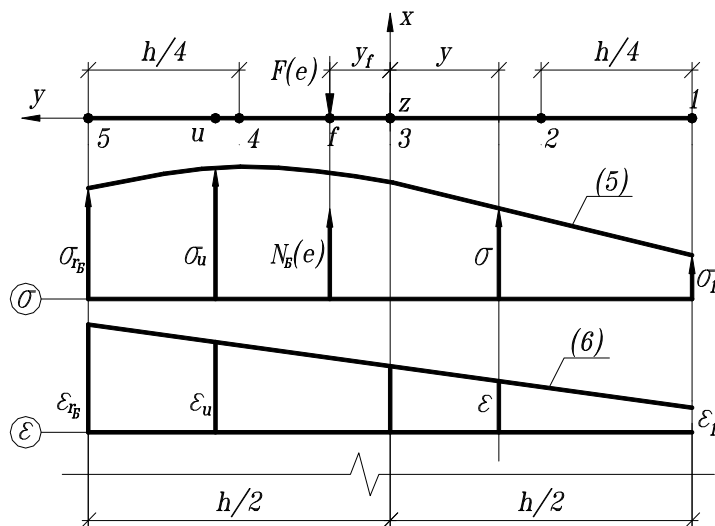


Рис. 2. Базовое состояние

$$\text{параметрами } \beta_\mu(e_{яс}) = \beta = 2,0810$$

$$\text{и } \alpha_\mu(e_{яс}) = \frac{E}{\beta \cdot [\varepsilon_\mu(e_{яс})]^{\beta-1}} = \frac{31390}{2,0810 \cdot [1726,66 \cdot 10^{-6}]^{1,0810}} = 14625000 \text{ МПа};$$

$$\text{коэффициентом } r_\mu(e_{яс}) = 1,26462$$

(8)

$$\text{наибольшей деформацией } \varepsilon_{r_\mu}(e_{яс}) = r_\mu(e_{яс}) \cdot \varepsilon_\mu(e_{яс}) = 1,26462 \cdot 1726,66 \cdot 10^{-6} = 2183,569 \cdot 10^{-6}.$$

$$\text{Приняв для дальнейших исследований } \varepsilon_{5\mu}(e_{яс}) = \varepsilon_{r_\mu} = 2183,55 \cdot 10^{-6},$$

(9)

$$\text{получим } \sigma_{5\mu}(e_{яс}) = 31390 \cdot 2183,55 \cdot 10^{-6} - 14625000 \cdot (2183,55)^{2,0810} = 26,09 \text{ МПа} = \bar{\sigma}_u,$$

$$N_\mu(e_{яс}) = 204,922 \text{ кН и } K_\mu(e_{яс}) = N_\mu(e_{яс})/N_B(e_{яс}) = 204,922/189,890 = 1,07916.$$

Поставим задачу: привлекая приведённые выше сведения о базовых и предельных ядровых характеристиках:

- найти показатели  $K_\mu(e)$  при относительных эксцентриситетах  $e$  меньше  $e_{яс}$ ;
- установить соответствующие принятым  $K_\mu(e)$  напряжённо-деформированные состояния и равнодействующие  $N_\mu(e)$ ;
- оценить адекватность  $N_\mu(e)$  опытным нагрузкам  $\bar{F}_u(e)$ .

### Методика определения коэффициентов $K_\mu(e)$ , предельных НДС и усилий при $e < e_{яс}$

К моменту разрушения задаёмся:

$$\text{зависимостями } \sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha_\mu(e) \cdot (\varepsilon)^{\beta_\mu(e)},$$

(10)

$$\varepsilon = B_\mu(e) \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r_\mu}(e),$$

(11)

с экспериментальными (см. рис. 1)  $\sigma_{\mu}(e) = K_{\mu}(e) \cdot \bar{\sigma}_u,$  (12)

$$\varepsilon_{\mu}(e) = K_{\mu}(e) \cdot \bar{\varepsilon}_u, \quad (13)$$

- параметрами  $\beta_{\mu}(e) = \beta = 2,0810,$  (14)

$$\alpha_{\mu}(e) = \frac{E}{\beta \cdot [\varepsilon_{\mu}(e)]^{\beta-1}} ; \quad (15)$$

- показателем эяюры деформаций  $B_{\mu}(e), \text{ м}^{-1};$

- наибольшей деформацией  $\varepsilon_{r_{\mu}}(e).$

Подобно [8] принимаем:

- коэффициент  $r_{\mu}(e) = r_{\text{Б}}(e),$  (16)

- в точке 5 с координатой  $y_5 = h/2$  (см. рис. 2),  $\varepsilon_{r_{\mu}}(e) = \varepsilon_{5\mu}(e)$  (17)

и напряжением  $\sigma_{5\mu}(e) = \bar{\sigma}_u.$  (18)

Вводим допущение, что деформация  $\varepsilon_{5\mu}(e)$  пропорциональна показателю (16) и, следовательно,

$$\varepsilon_{5\mu}(e) = \varepsilon_{5\mu}(e_{\text{яс}}) \cdot r_{\text{Б}}(e) / r_{\mu}(e_{\text{яс}}) \quad (19)$$

с  $\varepsilon_{5\mu}(e_{\text{яс}})$  по(9).

Тогда, с учётом (13) и (18), будем иметь:

параметр (15) -  $\alpha_{\mu}(e) = E / [\beta \cdot [\bar{\varepsilon}_u \cdot K_{\mu}(e)]^{\beta-1}]$  (20)

равенство (10) –

$$\bar{\sigma}_u = E \cdot \varepsilon_{5\mu}(e) - \frac{E}{\beta \cdot (\bar{\varepsilon}_u)^{\beta-1} \cdot [K_{\mu}(e)]^{\beta-1}} \cdot [\varepsilon_{5\mu}(e)]^{\beta} ;$$

после преобразований последнего

– уравнение  $[K_{\mu}(e)]^{\beta-1} = \frac{E \cdot [\varepsilon_{5\mu}(e)]^{\beta}}{[E \cdot \varepsilon_{5\mu}(e) - \bar{\sigma}_u] \cdot \beta \cdot (\bar{\varepsilon}_u)^{\beta-1}} ;$  (21)

коэффициент  $K_{\mu}(e)$  – предварительно прологарифмировав выражение (21).

Далее определяем:

по (12) и (13) – экстремальные напряжения  $\sigma_{\mu}(e)$  и деформации  $\varepsilon_{\mu}(e);$

(14) и (15) – параметры  $\beta_{\mu}(e)$  и  $\alpha_{\mu}(e)$  функции (10).

При установленной таким образом зависимости "σ – ε" выполняем решение интегральных уравнений:

$$N_{\mu}(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy, \quad (22)$$

$$M_{z\mu}(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy \cdot y, \quad (23)$$

включая разность  $M_{z\mu}(e) - N_{\mu}(e) \cdot y_f = \Phi_{\mu}(e),$  (24)

на ПЭВМ с помощью пакета программ MathCAD. Для назначенной по (19) деформации  $\varepsilon_{r_{\mu}}(e) = \varepsilon_{5\mu}(e),$  задаваемых в приближениях  $p=0,1$  параметрах  $B_{\mu p=0}(e), B_{\mu p=1}(e)$  с  $\Phi_{\mu p=0}(e) > 0, \Phi_{\mu p=1}(e) < 0$  методом хорд [11] уточняем  $B_{\mu p=2}(e), \dots,$  до  $B_{\mu}(e),$  при котором

$$|\Phi_{\mu}(e)| \leq 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}. \quad (25)$$

Теперь из (22) вычисляем соответствующую показателю  $B_{\mu}(e)$  равнодействующую  $N_{\mu}(e),$  затем по (11) и (10) при  $y_i = -h/2, -h/4, 0, h/4, h/2$  с  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  – деформации  $\varepsilon_{i\mu}(e)$  и напряжения  $\sigma_{i\mu}(e).$  Для  $\sigma_{5\mu}(e)$  должно удовлетворяться условие (18).

**Расчёт в случае  $e = 0,05$  ( $y_f = 0,005$  м)**

Дано:  $\bar{\sigma}_u = 26,09$  МПа,  $\bar{\varepsilon}_u = 1600 \cdot 10^{-6}$ ;  $r_B(e) = 1,1955$ ; по (8) и (9) -  $r_\mu(e_{яс}) = 1,26462$  и  $\varepsilon_{5\mu}(e_{яс}) = 2183,55 \cdot 10^{-6}$ .

Находим

$$(19) - \varepsilon_{5\mu}(0,05) = 2183,55 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1955 / 1,26462 = 2064,2 \cdot 10^{-6}; \quad (26)$$

(21) –

$$[K_\mu(0,05)]^{1,0810} = \frac{31390 \cdot [2064,2 \cdot 10^{-6}]^{2,0810}}{[31390 \cdot 2064,2 \cdot 10^{-6} - 26,09] \cdot 2,0810 \cdot (1600 \cdot 10^{-6})^{1,0810}} = 1,05948.$$

Логарифмируя обе части последнего равенства [12]

$$1,0810 \cdot \ln[K_\mu(0,05)] = \ln(1,05948),$$

определяем коэффициент

$$K_\mu(0,05) = (e_n)^{\ln(1,05948)/1,0810} = 1,05490.$$

Продолжая расчёт, будем иметь в предельном состоянии:

экстремальные напряжения (12) -  $\sigma_\mu(0,05) = 1,05490 \cdot 26,09 = 27,522$  МПа

и деформацию (13) -  $\varepsilon_\mu(0,05) = 1,05490 \cdot 1600 \cdot 10^{-6} = 1687,84 \cdot 10^{-6}$

$$\text{функции (10) - } \sigma = 31390 \cdot \varepsilon - 14989000 \cdot (\varepsilon)^{2,0810} \quad (27)$$

с параметром  $\alpha_\mu(0,05) = 14989000$  МПа по (15);

$$\text{зависимость (11) - } \varepsilon = B_\mu(0,05) \cdot (y - 0,5 \cdot h) + 2064,2 \cdot 10^{-6} \quad (28)$$

с подлежащим определению показателем  $B_\mu(0,05)$  и наибольшей деформацией (17), с учётом (26) принимаемой в виде  $\varepsilon_{r_\mu}(0,05) = 2064,2 \cdot 10^{-6}$ . (29)

Теперь, задаваясь  $B_{\mu p=0}(0,05) = 1,629775 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$  и  $B_{\mu p=1}(0,05) = 1,629734 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$  с  $\Phi_{\mu p=0}(0,05) = 4,83 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0$  и  $\Phi_{\mu p=1}(0,05) = -4,92 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0$ , находим по формуле [11]

$$B_{\mu p=2}(0,05) = \frac{B_{\mu p=0} \cdot \Phi_{\mu p=1} - B_{\mu p=1} \cdot \Phi_{\mu p=0}}{\Phi_{\mu p=1} - \Phi_{\mu p=0}} =$$

$$= \frac{1,629775 \cdot 10^{-2} \cdot (-4,92 \cdot 10^{-8}) - 1,629734 \cdot 10^{-2} \cdot 4,83 \cdot 10^{-8}}{(-4,92 \cdot 10^{-8}) - 4,83 \cdot 10^{-8}} =$$

$$= 1,62975469 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1} \quad (30)$$

с  $\Phi_{\mu p=2}(0,05) = 0 \text{ МН} \cdot \text{м} < 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}$  (требование (25) удовлетворяется).

При установленном таким образом параметре  $B_\mu(0,05)$  из уравнения

$$\varepsilon_{i\mu}(0,05) = 1,62975469 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2064,2 \cdot 10^{-6} \quad (31)$$

и функции (27) вычислены представленные в табл. 2 деформации  $\varepsilon_{i\mu}(0,05)$  и напряжения  $\sigma_{i\mu}(0,05)$ , а на рис.3 построены соответствующие эпюры. Равнодействующая (22) -  $N_\mu(0,05) = 234,4$  кН.

Таблица 2

$e = y_f/h$	Точки $i$	1	2	3	4	5	$\mu$
	Координаты $y_i$ , м	-0,050	-0,025	0	0,025	0,050	$2,6907 \cdot 10^{-2}$
0,050	Деформации $\varepsilon_i \cdot 10^6$ по (31)	434,445	841,884	1249,323	1656,761	2064,2	1687,841
	Напряжения $\sigma_i$ , МПа, по 27)	12,126	20,440	25,603	27,512	26,090	27,522

Примечание: координата  $y_\mu$  определена из равенства

$$\varepsilon_\mu(e) = B_\mu(e) \cdot (y_\mu - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{5\mu}(e). \quad (32)$$

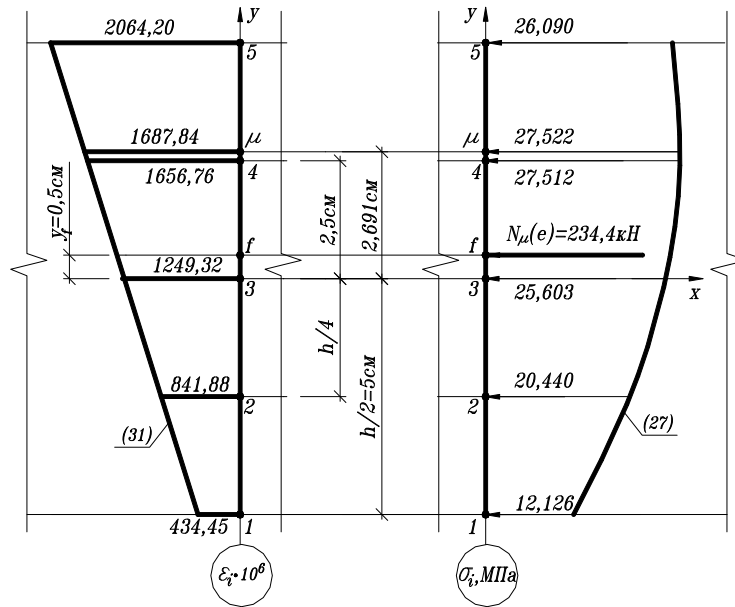


Рис. 3. Условное предельное НДС при  $e = 0,05$

### Расчёт в случае $e = 0,10$ ( $y_f = 0,010$ м)

Дано: призматический предел прочности  $\bar{\sigma}_u = 26,09$  МПа и соответствующая деформация  $\bar{\varepsilon}_u = 1600 \cdot 10^{-6}$ ; базовый  $r_b(0,10) = 1,2579$  и ядровый  $r_\mu(e_{яс}) = 1,26462$  коэффициенты; наибольшая деформация в предельном ядровом состоянии  $\varepsilon_{5\mu}(e_{яс}) = 2183,55 \cdot 10^{-6}$ .

Определяем

$$(19) - \varepsilon_{5\mu}(0,10) = 2183,55 \cdot 10^{-6} \cdot 1,2579 / 1,26462 = 2171,95 \cdot 10^{-6}; \quad (33)$$

(21) –

$$[K_\mu(0,10)]^{1,0810} = \frac{31390 \cdot [2171,95 \cdot 10^{-6}]^{2,0810}}{[31390 \cdot 2171,95 \cdot 10^{-6} - 26,09] \cdot 2,0810 \cdot (1600 \cdot 10^{-6})^{1,0810}} = 1,08317.$$

Логарифмируя обе части полученного выражения [12]

$$1,0810 \cdot \ln[K_\mu(0,10)] = \ln(1,08317),$$

найдем

$$K_\mu(0,10) = (e_n)^{\ln(1,08317)/1,0810} = 1,07671,$$

где  $e_n = 2,71828 \dots$  - основание натуральных логарифмов.

Далее получаем:

$$\text{экстремальные напряжения (12) - } \sigma_\mu(0,10) = 1,07671 \cdot 26,09 = 28,091 \text{ МПа}$$

и

$$\text{деформацию (13) - } \varepsilon_\mu(0,10) = 1,07671 \cdot 1600 \cdot 10^{-6} = 1722,74 \cdot 10^{-6};$$

$$\text{функцию (10) - } \sigma = 31390 \cdot \varepsilon - 14661000 \cdot (\varepsilon)^{2,0810} \quad (34)$$

с

$$\text{параметром } \alpha_\mu(0,10) = 14661000 \text{ МПа по (15).}$$

Назначая зависимость (11) с учётом (17) и (33) в виде

$$\varepsilon = B_\mu(0,10) \cdot (y - 0,5 \cdot h) + 2171,95 \cdot 10^{-6} \quad (35)$$

и задаваясь показателями  $B_{\mu p=0}(0,10) = 2,1284 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$  и  $B_{\mu p=1}(0,10) = 2,12838 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$  с  $\Phi_{\mu p=0}(0,10) = 3,22 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0$  и  $\Phi_{\mu p=1}(0,10) = -3,85 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0$ , по формуле (30) вычисляем

$$B_{\mu p=2}(0,10) = \frac{2,1284 \cdot 10^{-2} \cdot (-3,85 \cdot 10^{-8}) - 2,12838 \cdot 10^{-2} \cdot 3,22 \cdot 10^{-8}}{(-3,85 \cdot 10^{-8}) - 3,22 \cdot 10^{-8}} = 2,12839089 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}. \quad (36)$$

Так как при этом выполняется условие (25) -  $\Phi_{\mu p=2}(0,10) = -0 \cdot 10^{-10}$  МН · м, то принимая  $B_{\mu}(0,10) = B_{\mu p=2}(0,10)$  будем иметь:

по (22) – равнодействующую  $N_{\mu}(0,10) = 208,3$  кН;

функцию (11) -  $\varepsilon_{i\mu}(0,10) = 2,12839089 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2171,95 \cdot 10^{-6}$ ; (37)

представленные в табл.3 вычисленные по (37) и (34) деформации  $\varepsilon_{i\mu}(0,10)$  и напряжения  $\sigma_{i\mu}(0,10)$ ;

построенные на рис. 4 эпюры  $\varepsilon_{i\mu}(0,10)$  и  $\sigma_{i\mu}(0,10)$  условного предельного состояния.

Таблица 3

$e = y_f/h$	Точки $i$	1	2	3	4	5	$\mu$
		Координаты $y_i$ , м	-0,050	-0,025	0	0,025	0,050
0,100	Деформации $\varepsilon_i \cdot 10^6$ по (37)	43,559	575,657	1107,755	1639,852	2171,95	1722,74
	Напряжения $\sigma_i$ , МПа по (34)	1,355	15,415	24,405	28,023	26,091	28,091

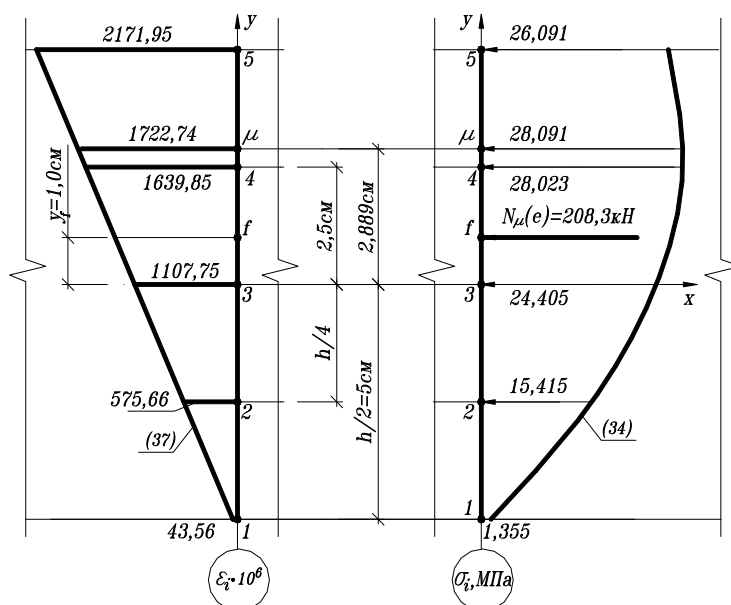


Рис.4. Условное предельное НДС при  $e = 0,10$

### Сравнение полученных результатов

В табл. 4 приведены:

расчётные  $N_{\mu}(e)$  и опытные  $\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u$  разрушающие усилия;

отклонения

- абсолютные

$$\Delta N_{\mu}(e) = N_{\mu}(e) - \bar{F}_u(e), \quad (38)$$

- относительные

$$\delta_{\mu}(e) = [\Delta N_{\mu}(e) / \bar{F}_u(e)] \cdot 100\%. \quad (39)$$

Таблица 4

$e = y_f/h$	Усилия, кН		Отклонения	
	$N_{\mu}(e)$	$\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u$	$\Delta N_{\mu}(e)$ , кН по (38)	$\delta_{\mu}(e)$ , % по (39)
0,05	234,4	$236,3 \pm 17,7$	-1,9	-0,80
0,10	208,3	$207,9 \pm 14,7$	0,4	0,19



Модули расхождений  $\delta_\mu(e)$  составляет менее 1%.

Расчётные предельные нагрузки  $N_\mu(e)$  располагаются (см. табл.4) в границах доверительных интервалов  $[\bar{F}_u(e) - \Delta\bar{F}_u, \bar{F}_u(e) + \Delta\bar{F}_u]$  средних экспериментальных разрушающих усилий  $\bar{F}_u(e)$  с погрешностями  $\Delta\bar{F}_u$  для вероятности  $p=0,95$ .

### Выводы

Предложены:

формула (19) для вычисления наибольшей деформации  $\varepsilon_{5\mu}(e)$  в момент разрушения при заданном эксцентриситете  $e = y_f/h$  в интервале  $[e = 0,05, e_{яс} = 0,1073]$  в отличие от наибольшей  $\bar{\varepsilon}_u$  центрального сжатия;

новая методика определения условных предельных НДС и соответствующих усилий  $N_\mu(e)$ .

Расчётные равнодействующие внутренних сил  $N_\mu(e)$  адекватны средним опытным разрушающим нагрузкам  $\bar{F}_u(e)$  (не выходят из интервалов  $\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u$  при вероятности 0,95, а отклонения  $N_\mu(e) - \bar{F}_u(e)$  составляют 0,19 %, -0,80 %).

Рассмотренный способ может найти применение для оценки предельных усилий внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью элементов из мелкозернистого бетона.

### Библиографический список

1. Столяров Я. Б. Введение в теорию железобетона/ Я. Б. Столяров – М.-Л., Стройиздат, 1941. -447 с.
2. Остроменцкий Ю. Ц. Сложное сопротивление нелинейно-упругого стержня прямоугольного сечения/ Ю. Ц. Остроменцкий // Расчёт пространственных систем и сооружений, взаимодействующих с грунтом: сб. трудов МИСИ. – М., 1968. - №53.
3. Лекишвили Г. Л. Работа внецентренно сжатых бетонных коротких элементов при малых эксцентриситетах: Дис. на ... канд. техн. наук/ Г. Л. Лекишвили. –Тбилиси, 1967.
4. Пирадов А.В. К расчёту несущей способности внецентренно сжатых элементов/ А. В. Пирадов, В. И. Аробелидзе, А. Г. Хуцишвили // Бетон и железобетон. – М., 1988. - №6. - С. 43-44.
5. Урзун И. А. Реализация диаграмм деформирования бетона при однородном и неоднородном напряжённых состояниях/ И. А. Урзун // Бетон и железобетон. – М., 1991. - С.19-20.
6. Гениев Г. А. Некоторые задачи расчёта стержней при общей нелинейной зависимости напряжений и деформации/ Г. А. Гениев // Исследования по вопросам строительной механики и теории пластичности; ЦНИИПС. - М., 1956.
7. Гвоздев А. А. Основные направления развития теории железобетона/ А. А. Гвоздев, О. Я. Берг // Бетон и железобетон. – М.,1970. - №4.
8. Синозерский А. Н. Базовые и разрушающие усилия внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона при эксцентриситетах в границах ядра сечения/ А. Н. Синозерский, А. В. Резунов, Р. А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. - Воронеж, 2018. – Вып. №1(16). – С. 40-53.
9. Синозерский А. Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии / А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. - Воронеж– 2012. – Вып. №1(4). – С. 72-83.
10. Синозерский А. Н. Использование ядровых показателей при оценке предельных состояний внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бе-

тона/ А. Н. Синозерский, А. В. Козлова, А. В. Резунов, Р. А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. - Воронеж– 2017. – Вып. №2(15). – С. 45-56.

11. Лапчик М. П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов/ М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчика. – М.: Изд.центр «Академия», 2004. – 384 с.
12. Бронштейн И. Н. Справочник по математике/ И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. – М.: Изд. «Наука», 1967. – 608 с.
13. Goschy B. Using the ultimate strength theory in design essentially loaded rectangular concrete columns, “Civil Engineering and Public Works Review”, March 1961, v. 56, №656.
14. Viest J. M., Elstner R. C., Hognestad E., Sustained load strength of Eccentrically loaded short reinforced concrete columns, “Journal of the American Concrete Institute”, March, №7, 1956.

#### Reference

1. Stolyarov Ya. B. Introduction in the theory of reinforced concrete – M.-L., Stroiizdat, 1941. - 447 p.
2. Ostromensky Yu. Ts. Compound resistance of non-linear elastic rod of rectangular section. Calculation of special systems and structures interacting with ground: collection of works of MISI – M., 1968. - №53.
3. Lekishvily G. L. Eccentrically compressed short concrete elements at small eccentricities: Thesis of PhD of Tech. Sc. –Tbilisi, 1967.
4. Piradov V.I., V.I. Arobalidze, A. G. Khutzishvily. About the bearing capacity of eccentrically compressed elements. Concrete and reinforced concrete. M., 1988. - №6. - P. 43-44.
5. Urzun I.A. Realization of diagram of concrete deformation at homogeneous and non- homogeneous stressed states. Concrete and reinforced concrete. – M., 1991. - P.19-20.
6. Geniev G.A. Some problems of rods calculation at general nonlinear dependence of stresses and deformation. Investigations of structural mechanics and theory of elasticity problems. TzNIIPS. - M., 1956.
7. Gvozdyov A. A., Berg O.Ya. Main directions of the development of reinforced concrete theory. О. Я. Берг – М.,1970. - №4.
8. Sinozersky A.N., Rezunov A.V., Mukhtarov R.A. Basic and destructive forces of eccentrically compressed prisms from fine-grained concrete at eccentricities inside core section. Structural Mechanics and constructions. - Voronezh, 2018. – Issue №1(16). – P. 40-53.
9. Sinozersky A.N., Mukhtarov R.A. Determination of basic forces and deflected mode of prisms from fine- grained concrete at eccentric compression. Structural Mechanics. - Voronezh– 2012. – Issue №1(4). – С. 72-83.
10. Sinozersky A.N., Kozlova A.V., Rezunov A.V., Mukhtarov R.A. Application of core data while estimating limiting state of eccentrically compressed prisms from fine-grained concrete eccentrically compressed with standard velocity. Structural Mechanics and constructions– 2017. – Issue №2(15). – С. 45-56.
11. Lapchik M.P., Ragulina M.I., Khenner E.K. Numerical methods: tutorial for students. – М.: Publish center “Akademia”, 2004. – 384 p.
12. Bronshtein I.N., Semendyaev K. A. – М.: Isue. “Nauka”, 1967. – 608 p.
13. Goschy B. Using the ultimate strength theory in design eccentrically loaded rectangular concrete columns, “Civil engineering and Public Works Review”, March 1961, v. 56, №656.
14. Viest J. M., Elstner R. C., Hognestad E., Sustained load strength of Eccentrically loaded short reinforced concrete columns, “Journal of the American Concrete Institute”, March, №7, 1956.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.042+624.072

## РАСЧЁТ ПЛОСКОГО СТАЛЬНОГО КАРКАСА НА СТАТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ С УЧЁТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ МАТЕРИАЛА

В. С. Варнавский<sup>1</sup>, Г. Е. Габриелян<sup>2</sup>, М. М. Мартынова<sup>3</sup>  
Воронежский государственный технический университет<sup>1, 2, 3</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup> Канд. тех. наук, доцент кафедры строительной механики, e-mail: mailVVS@inbox.ru

<sup>2</sup> Канд. тех. наук, доцент кафедры строительной механики, e-mail: grayr2010@rambler.ru

<sup>3</sup> Магистр кафедры строительной механики, e-mail: 8542433@mail.ru

Анализируется численный поэтапный расчёт несущей способности плоской стальной рамы по критерию предельного равновесия. Применяемая методика позволяет моделировать пошаговый процесс упруго-пластического деформирования конструкции в ходе нагружения и учесть перераспределение усилий. В данной работе продолжено исследование возможностей ПК ЛИРА при выполнении расчётов пошаговым методом рамного статически неопределимого стального каркаса с учётом пластических деформаций материала. Дана оценка достоверности численной схемы решения.

**Ключевые слова:** стальная рама, несущая способность, предельное равновесие, программный комплекс ЛИРА

## CALCULATION OF THE FLAT STEEL FRAME FOR THE STATIC LOAD TAKING INTO ACCOUNT PLASTIC DEFORMATIONS OF THE MATERIAL

V. S. Varnavsky<sup>1</sup>, G.E. Gabrielyan<sup>2</sup>, M.M. Martynova<sup>3</sup>  
Voronezh State Technical University<sup>1, 2, 3</sup>  
Voronezh, Russia

1. PhD of Tech. Sc., associate professor of department of Structural Mechanics., e-mail: mailVVS@inbox.ru

2. PhD of Tech. Sc., associate professor of department of Structural Mechanics., e-mail: grayr2010@rambler.ru

3. Master of department of Structural Mechanics., e-mail: 8542433@mail.ru

Numerical stepwise calculation of the bearing capacity of steel frame according to the criterion of limiting equilibrium is analyzed. The technique allows to simulate the step by step process of structure elastoplastic deformation during loading and take into account the redistribution of efforts. In this article we proceed to investigate the possibility of design-computational complex LIRA for performing the calculations of the statically indeterminate steel frame taking into consideration plastic deformation of the material. The reliability of the numerical solution scheme is estimated.

**Keywords:** steel frame, bearing capacity, limiting equilibrium, design-computational complex LIRA

В связи с тем, что большинству строительных сталей присущи пластические свойства, нормативные документы рекомендуют при наличии возможности учитывать эти свойства в расчётах. Наиболее распространёнными видами расчёта строительных конструкций на прочность с учётом пластических деформаций стали являются

© Варнавский В. С., Габриелян Г. Е., Мартынова М. М., 2018

1. Расчёт по критерию ограниченных пластических деформаций, согласно которому сохраняется целостность элементов конструкции и не ухудшаются эксплуатационные свойства материала. Такой метод рекомендуется нормативными документами. В качестве примеров таких расчётов можно привести исследования, проведённые в работах [1- 9].
2. Расчёт на определение предельной несущей способности всей конструкции или её части. Расчёт производится на максимальную возможную нагрузку, возникающую в исключительных случаях эксплуатации.

В настоящей работе выполняется расчёт плоского стального каркаса на определение предельной несущей способности всей конструкции или её части при статической нагрузке с учётом пластических деформаций материала. Расчёт основан на принципе предельного равновесия, поэтому под предельной несущей способностью понимается состояние рамы или её части, граничащее с превращением её в геометрически изменяемую систему (механизм) в результате образования в ней пластических шарниров. Появление пластического шарнира означает исчерпание несущей способности сечения стержня. Такой тип расчёта позволяет давать верхнюю оценку максимально возможной нагрузки, возникающей в исключительных случаях эксплуатации.

Представленные здесь результаты являются продолжением и развитием выполненных ранее исследований [10, 11] для менее сложных стальных каркасов. Для обеспечения исследования всего хода упругопластического деформирования конструкции вплоть до разрушения здесь применяется метод пошагового нагружения.

Основными целями данной работы являются: определение несущей способности плоской стальной рамы, применяемой в промышленном строительстве, и её частей по критерию предельного равновесия; исследование возможностей программно-вычислительного комплекса ЛИРА для расчёта несущей способности плоской стержневой системы с учётом пластических деформаций материала; оценка достоверности полученных результатов.

В качестве объекта исследования принята плоская стальная рама, являющаяся частью запроектированного несущего пространственного каркаса промышленного здания в Рязанской области. Расчётная схема №1 плоской рамы, включающая в себя размеры, нагрузку (собственный вес каркаса и перекрытий; полезная временная нагрузка), нумерацию конечных элементов, изображена на рис. 1.

Существенным требованием к решению нелинейной задачи численными методами является обеспечение сходимости и достоверности решения. В упругопластическом расчёте конструкции по сравнению с линейно-упругим точность конечно-элементной сетки разбиения конструкции (КЭ-сетки) играет более значительную роль. При ошибочно выбранной КЭ-сетке решение может быть либо неточным либо отсутствовать. Кроме того с учётом выбранного в данной работе метода пошагового нагружения важное влияние на результат будет оказывать шаг приращения нагрузки. Следует отметить, что в данной работе под достоверностью решения имеется в виду достоверность численной схемы решения. Она достигается путём достижения совпадения результатов на последовательных вложенных КЭ-сетках и шагах приращения нагрузки.

В связи с этим для обеспечения сходимости и достоверности решения было проведено: 1) исследование влияния шага нагружения на результат расчета; 2) исследование влияния точности КЭ-сетки на результат; 3) подбор соответствующего шага нагружения и КЭ-сетки, которые обеспечивали бы нам достоверный результат расчета. Под результатом понимается: 1) схема и порядок возникновения пластических шарниров в стержнях рамы; 2) величины нагрузок, приводящих к потере несущей способности рамы или её частей.

Максимально допустимая нагрузка для упругого расчета является начальной для упругопластического расчёта. Неизменной в ходе нагружения является только постоянная нагрузка от собственного веса каркаса и перекрытий, а временная может пропорционально

возрастать из-за неблагоприятных факторов. В дальнейших результатах будет оцениваться только изменение (возрастание) временной нагрузки. Величина нагрузки оценивается для удобства не абсолютной величиной  $P$ , а соответствующим ей коэффициентом  $k$ , где  $P=k \cdot P_0$ , где  $P_0$  – начальная временная нагрузка, являющаяся максимальной нагрузкой для упругого расчета.

В настоящей работе было выполнено несколько расчётов рамы при различных конечно-элементных сетках и разных шагах приращения по временной нагрузке.

Для первоначального упругопластического расчета № 1 выбирается КЭ-сетка №1 (КЭ=4) (рис. 1). Так как в данном нелинейном расчёте применяется метод пошагового нагружения, то первоначально исследовалось влияние величины шага приращения нагрузки  $\Delta P$  на результаты расчёта. Необходимо было подобрать вложенные (т.е кратные друг другу) шаги приращения нагрузки  $\Delta P$ , дающие близкие или совпадающие результаты расчёта, что подтвердило бы сходимость численной схемы расчёта по величине шага нагружения. В ходе исследования были установлены три таких шага приращения нагрузки  $\Delta P=0,1P_0$ ,  $\Delta P=0,05P_0$ ,  $\Delta P=0,01P_0$ .

Для более точных шагов приращения нагрузки  $\Delta P=0,05P_0$ ,  $\Delta P=0,01P_0$  схемы разрушения рамы, полученные в расчёте №1, со спецификацией сечений стержней изображены на рис. 1, 2. Указаны разрушаемые КЭ и места образования пластических шарниров в раме. Последовательность разрушения элементов и возникновения пластических шарниров иллюстрируется их цветом.

Каждый цвет соответствует определённой стадии нагружения (или стадии разрушения) из таблиц. В представленных таблицах для каждой стадии нагружения указаны номера разрушаемых КЭ, суммарный коэффициент  $k=\sum k_i$  для нагрузки (где  $P=k \cdot P_0$ ) и текущий коэффициент  $k_i$ , характеризующий приращение нагрузки на данной стадии по сравнению с предыдущей (т. е.  $\Delta P_i=k_i \cdot P_0$ ).

По результатам расчёта №1 (рис. 1, 2 и табл. 1, 2) можно сделать следующие выводы:

- из всех стадий разрушения максимальная разница по предельным нагрузкам, найденным с шагом  $\Delta P=0,1P_0$  и шагом  $\Delta P=0,05P_0$  возникает на первой стадии и составляет  $\Delta k=(3,6-3,55)/3,55 \cdot 100 \%=1,4 \%$ .
- из всех стадий нагружения максимальная разница по предельным нагрузкам, найденным с шагом  $\Delta P=0,05P_0$  и шагом  $\Delta P=0,001P_0$  возникает на третьей стадии и составляет  $\Delta k=(7,45-7,36)/7,45 \cdot 100 \%=1,2 \%$ ;
- для шагов  $\Delta P=0,05P_0$ , и  $\Delta P=0,01P_0$  на остальных стадиях нагружения разница по предельным нагрузкам ещё меньше; на первых четырёх стадиях наблюдается полное совпадение мест и порядка образования пластических шарниров в стержнях рамы для обоих шагов приращения нагрузки. На пятой и шестой стадиях имеет место незначительное расхождение в местах образования пластических шарниров (№ КЭ=302, 41, 38, 60).

Таким образом, для выбранных наиболее точных двух шагов приращения нагрузки  $\Delta P=0,05P_0$ ,  $\Delta P=0,01P_0$  наблюдается хорошее совпадение схем и последовательностей образования пластических шарниров, а также, величин соответствующих им нагрузок (оценка по коэффициентам  $k$ ).

С целью проверки сходимости решения и обеспечения более точных результатов был произведен упругопластический расчёт №2, в котором использована сетка № 2 (рис. 3, 4) уплотнённая в 2 раза по сравнению с сеткой №1. Результаты расчёта №2 с шагами приращения нагрузки  $\Delta P,0$  равными  $0,05P_0$ ,  $0,01P_0$  представлены на рис. 3, 4 и в табл. 3, 4.

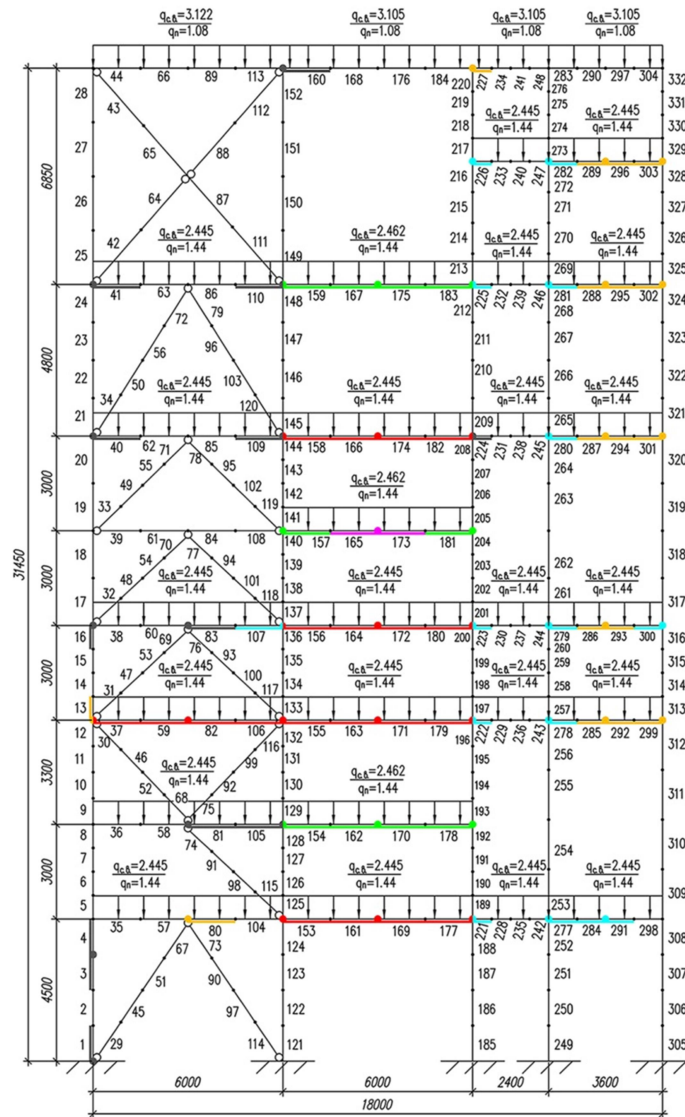


Рис. 1. Схема разрушения рамы: сетка №1; шаг нагрузки  $\Delta P=0.05P_0$  (нагрузка:  $q_n$  – полезная временная нагрузка,  $q_{c.v.}$  – собственный вес каркаса и перекрытий)

Таблица 1

Результаты расчёта : сетка №1; шаг нагрузки  $\Delta P=0.05P_0$

Номер стадии разрушения	$k_i$ на $i$ -й стадии	Суммарный $k=\sum k_i$	Номер разрушаемых КЭ-элементов
1 <span style="color:red">█</span>	3,55	3,55	37, 59, 82, 106, 153, 155, 156, 158, 161, 163, 164, 166, 169, 171, 172, 174, 177, 179, 180, 182
2 <span style="color:green">█</span>	3,00	6,55	154, 157, 159, 162, 167, 170, 175, 178, 181, 183
3 <span style="color:purple">█</span>	0,9	7,45	165, 173
4 <span style="color:blue">█</span>	4,5	11,95	107, 221-223, 225, 226, 277-282, 284, 291, 300
5 <span style="color:yellow">█</span>	0,85	12,8	13, 80, 227, 285, 286-289, 292-296, 299, 301, 302, 303
6 <span style="color:black">█</span>	1,6	14,4	1, 3, 4, 16, 40, 41, 81, 83, 105, 109, 110, 160, 224

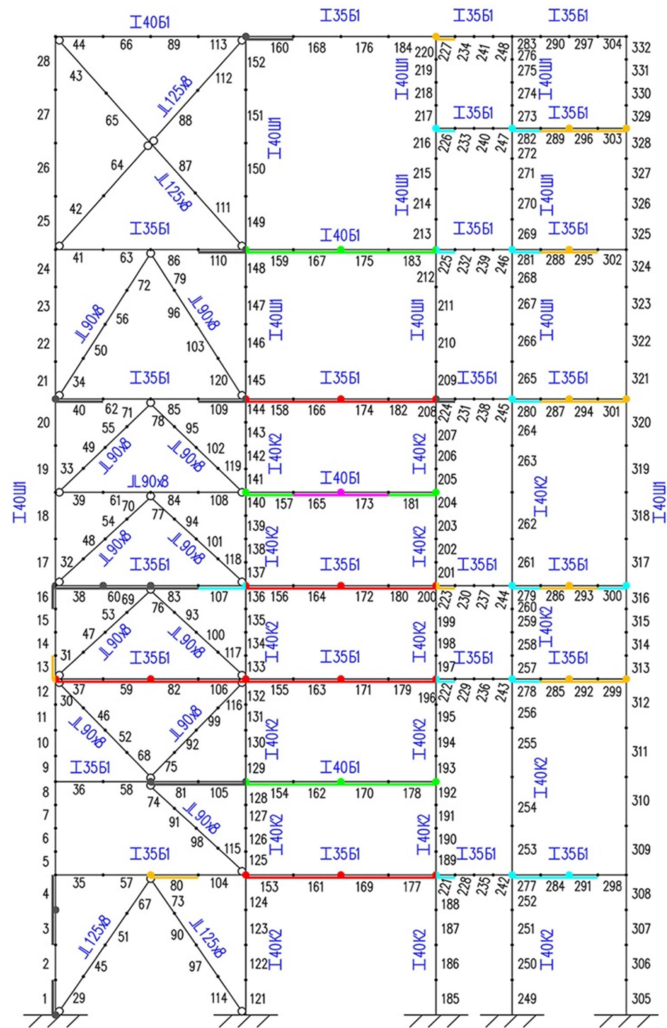


Рис. 2. Схема разрушения рамы: сетка №1; шаг нагрузки  $\Delta P=0.01P_0$

Таблица 2

Результаты расчёта: сетка №1; шаг нагрузки  $\Delta P=0.01P_0$

Номер стадии разрушения	$k_i$ на $i$ -й стадии	Суммарный $k = \sum k_i$	Номер разрушаемых КЭ-элементов
1 <span style="color: red;">█</span>	3,50	3,50	37, 59, 82, 106, 153, 155, 156, 158, 161, 163, 164, 166, 169, 171, 172, 174, 177, 179, 180, 182
2 <span style="color: green;">█</span>	3,03	6,53	154, 157, 159, 162, 167, 170, 175, 178, 181, 183
3 <span style="color: magenta;">█</span>	0,83	7,36	165, 173
4 <span style="color: cyan;">█</span>	4,64	12,0	107, 221, 222, 225, 226, 277-282, 284, 291, 300
5 <span style="color: yellow;">█</span>	0,72	12,72	13, 80, 223, 227, 285-289, 292-296, 299, 301, 303
6 <span style="color: black;">█</span>	1,62	14,34	1, 3, 4, 16, 38, 40, 60, 81, 83, 105, 109, 110, 160, 224

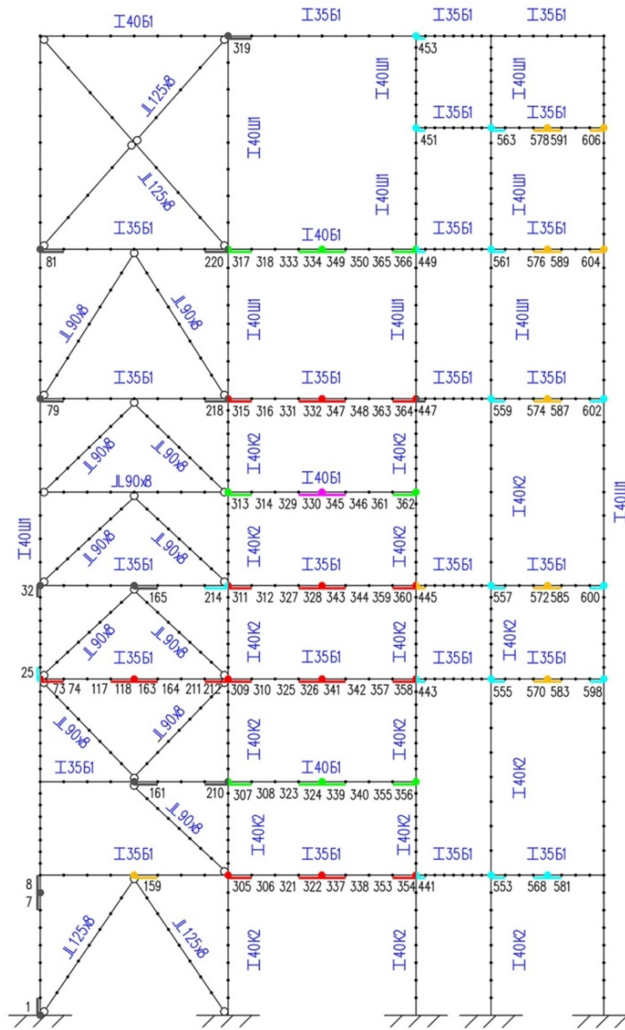


Рис. 3. Схема разрушения рамы: сетка №2; шаг нагрузки  $\Delta P=0.05P_0$

Таблица 3

Результаты расчёта: сетка №2; шаг нагрузки  $\Delta P=0.05P_0$

Номер стадии разрушения	$k_i$ на $i$ -й стадии	Суммарный $k = \sum k_i$	Номер разрушаемых КЭ-элементов
1	3,55	3,55	73, 118, 163, 212, 305, 309, 311, 315, 322, 326, 328, 332, 337, 341, 343, 347, 354, 358, 360, 364
2	3,05	6,6	307, 313, 317, 324, 334, 339, 349, 356, 362, 366
3	0,8	7,4	330, 345
4	4,95	12,35	25, 214, 441, 443, 449, 451, 453, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 568, 581, 598, 600, 602
5	0,45	12,8	159, 445, 570, 572, 574, 576, 578, 583, 585, 587, 589, 591, 604, 606
6	1,6	14,4	1, 7, 8, 32, 79, 81, 161, 165, 210, 218, 220, 319, 447



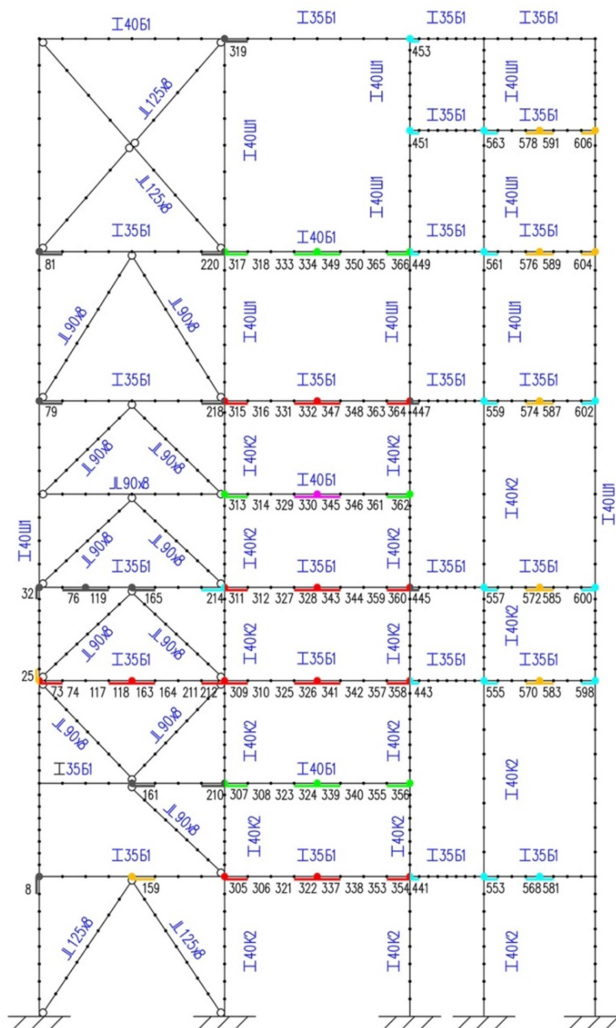


Рис. 4. Схема разрушения рамы: сетка №2; шаг нагрузки  $\Delta P=0.01P_0$

Таблица 4

Результаты расчёта: сетка №2; шаг нагрузки  $\Delta P=0.01P_0$

Номер стадии разрушения	$k_i$ на $i$ -й стадии	Суммарный $k = \sum k_i$	№№ разрушаемых КЭ-элементов
1	3,50	3,50	73, 118, 163, 212, 305, 309, 311, 315, 322, 326, 328, 332, 337, 341, 343, 347, 354, 358, 360, 364
2	3,03	6,53	307, 313, 317, 324, 334, 339, 349, 356, 362, 366
3	0,84	7,37	330, 345
4	4,97	12,34	25, 214, 441, 443, 449, 451, 453, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 568, 581, 598, 600, 602
5	0,42	12,76	159, 570, 572, 574, 576, 578, 583, 585, 587, 589, 591, 604, 606
6	1,7	14,46	8, 32, 76, 79, 81, 119, 161, 165, 210, 218, 220, 319, 445, 447

Для обоих применяемых шагов приращения нагрузки  $\Delta P$  различие по предельным нагрузкам на любой из стадий разрушения не превышает 1,5 %. На всех стадиях нагружения имеется полное совпадение порядка, места образования разрушаемых КЭ и пластических шарниров. Учитывая аналогичные результаты для расчёта №1, можно сделать вывод: низкое влияние шага приращения нагрузки  $\Delta P$  на результаты расчёта означает, что имеет место сходимость к решению данной задачи по этому параметру. При этом для получения более точного решения рекомендуется использовать более мелкий шаг  $\Delta P$ .

Из попарного сравнения данных табл. 1 и 3 ( $\Delta P=0,05P_0$ ), табл. 2 и 4 ( $\Delta P=0,01P_0$ ) видно, что для любого из шагов приращения нагрузки расхождение для разных КЭ-сеток между соответствующими предельными нагрузками на всех стадиях разрушения, кроме четвёртой не превышает 1,5 %. На четвёртой стадии это различие равно 3,4 %. Сравнивая схемы разрушения рамы для расчётов №1 и №2 между собой, можно заключить, что имеется практически полное совпадение порядка, места образования разрушаемых КЭ и пластических шарниров независимо от выбора КЭ-сетки №1 или КЭ-сетки №2. При этом применение более плотной КЭ-сетки позволяет точнее оценить локализацию разрушаемых КЭ и возникающих пластических шарниров.

Учитывая высокую близость соответствующих предельных нагрузок и схем разрушения рамы для различных вложенных КЭ-сеток, можно считать, что достигнута сходимость к решению задачи по параметру – точность КЭ-сетки.

Таким образом, в ходе исследований установлено, что имеет место сходимость по обоим параметрам (точность КЭ-сетки и шаг приращения нагрузки  $\Delta P$ ). Тем самым подтверждается достоверность выполненных расчётов данной конструкции в рамках применяемой методики вычислений по программе расчёта ЛИРА.

## Выводы

Применяемая методика пошагового нагружения позволяет моделировать и исследовать поэтапное разрушение элементов конструкции в ходе упругопластического нагружения с определением соответствующих предельных нагрузок. Такая информация представляет наибольший практический интерес, так как позволяет выявить те элементы конструкции, которые окажутся наиболее слабыми при высокой сверхнормативной нагрузке.

Программно-вычислительный комплекс ЛИРА может успешно применяться для расчёта несущей способности плоской рамной системы с учётом пластических деформаций материала в рамках рассмотренной методики. При этом требуется подбор параметров расчёта для обеспечения сходимости и достоверности результатов.

В дальнейшем планируется продолжить исследования упругопластического деформирования представленной конструкции на другие виды нагрузок и их сочетания.

## Библиографический список

1. Биджиев Р. Х. Алгоритм расчета колебаний стержня под действием подвижной нагрузки с учетом упругопластических деформаций/ Р. Х. Биджиев, В. С. Варнавский// Методы и алгоритмы расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1990. С. 77-83.
2. Биджиев Р. Х. Расчет сталежелезобетонных балок на подвижную нагрузку с учетом ограниченных пластических деформаций/ Р. Х. Биджиев, В. С. Варнавский //Расчет прочности, устойчивости и колебаний сооружений: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1990. С. 18-25.
3. Варнавский В. С. Алгоритм расчета колебания упругопластического стержня под действием подвижной нагрузки с учетом деформации сдвига и инерции вращения/

- В. С. Варнавский //Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 1993. - С. 33-38.
4. Варнавский В. С. Расчет балочных и стержневых систем на подвижную нагрузку с учетом пластических деформаций материала: автореф. дис. ... канд. техн. наук / В. С. Варнавский; Воронежская архитектурно-строительная академия. - Воронеж, 1994.
  5. Варнавский В. С. Динамический расчет упруго-вязкопластичной балки на подвижную нагрузку/ В. С. Варнавский / Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций: межвуз. сб. науч. тр. - Воронеж, 1998. С. 36-43.
  6. Варнавский В. С. Численные исследования деформирования балок в области малых пластических деформаций при подвижной нагрузке/ В. С. Варнавский// Современные проблемы механики и прикладной математики: тезисы докладов школы. 1998. С. 65.
  7. Варнавский В. С. Упругопластическое деформирование неразрезной балки под действием подвижной нагрузки/ В. С. Варнавский//Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2000. С. 91-97.
  8. Варнавский В. С. Моделирование процессов повторно-переменного и знакопеременного нагружений для строительных сталей в области малых пластических деформаций/ В. С. Варнавский//Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. - Воронеж, 2000. - С. 47-53.
  9. Варнавский В. С., Биджиев Р. Х. Алгоритм моделирования колебаний сталежелезобетонных мостовых балок при нелинейных колебаниях с учетом влияния скорости деформации и предыстория загрузения/ В. С. Варнавский, Р. Х.Биджиев// Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Дорожно-транспортное строительство. – Воронеж, 2004. - № 3. - С. 40-45.
  10. Варнавский В. С. Определение несущей способности металлического рамного каркаса с применением программного комплекса Лира/ В. С. Варнавский, А. С. Поворин// Строительная механика и конструкции. - 2011. - Т. 2. - № 3. - С. 113-121.
  11. Варнавский В. С. Численное исследование несущей способности металлической рамы на основе программного комплекса Лира/ В.С. Варнавский, А.О. Болотов // Строительная механика и конструкции. - 2014. - Т. 1. - № 8. - С. 117-125.

#### References

1. Bidjiev R. H. , Varnavsky, V. S. The algorithm for calculating the vibrations of the rod under the action of a moving load taking into account elastic-plastic deformations. In the collection: Methods and algorithms for calculating structures. Voronezh, 1990. P. 77-83.
2. Bidjiev R. H. , Varnavsky, V. S. Calculation of steel-concrete composite beams to moving load taking into account the limited plastic deformations. In the collection: Calculation of strength, stability and vibrations of structures. Interuniversity collection of scientific works. Voronezh Institute of Civil engineering. Voronezh, 1990. P. 18-25.
3. Varnavsky, V. S. The algorithm of calculation of vibrations of elasto-plastic rod under the action of a moving load taking into account shear deformation and rotational inertia. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures. Voronezh, 1993. P. 33-38.

4. Varnavsky V. S. Calculation of beam and rod systems to moving load taking into account plastic deformations of material. Abstract of the thesis for the degree of candidate of technical Sciences / Voronezh Academy of architecture and construction. Voronezh, 1994
5. Varnavsky V. S. Dynamic analysis of elastic-viscoelastic beams to moving load. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures. Interuniversity collection of scientific works . Voronezh, 1998. P. 36-43.
6. Varnavsky V. S. Numerical investigation of deformation of beams in the field of small plastic deformations under dynamic load. In the book: Modern problems of mechanics and applied mathematics. Abstracts of the school reports. 1998. P. 65.
7. Varnavsky V. S. Elastic-plastic deformation of a continuous beam under the action of moving load. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures. Voronezh, 2000. P. 91-97.
8. Varnavsky V. S. Modeling of re-alternating and alternating loading processes for building steels in the field of small plastic deformations. In the collection: Modern methods of static and dynamic calculation of structures and structures Voronezh, 2000. P. 47-53.
9. Varnavsky, V. S., Bidjiev R. H. the Algorithm of modeling of vibrations of steel-concrete composite bridge beams in nonlinear oscillations taking into account the influence of strain rate and background loading. Scientific Bulletin of Voronezh state University of architecture and construction. Series: Road and transport construction. 2004. No. 3. P. 40-45.
10. Varnavsky V. S., Povorin A. S. Determination of metal frame load-bearing capacity using design-computational complex Lira. Structural mechanics and structures. 2011. Issue №2(3). P.113-121.
11. Varnavsky V. S., Bolotov A. O. Numerical investigation of load-bearing capacity of metal frame using design-computational complex Lira. Structural mechanics and structures. 2014. Issue №1(8). P.117-125.

**ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАЧТЫ.  
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ КОНСТРУКЦИИ  
МАЧТЫ ПРИ ВНЕШНЕМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

С. В. Ефрюшин<sup>1</sup>, А. В. Бурлаков<sup>2</sup>, А. И. Шаранин<sup>3</sup>  
Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент

<sup>2</sup>Аспирант кафедры строительной механики, тел.: 8(473) 254-58-21

e-mail: gefe92@mail.ru

<sup>3</sup>Научный сотрудник ВГТУ НТЦ «Мосты»

---

Приводятся результаты динамического расчета на вынужденные колебания существующей телевизионной мачты на оттяжках высотой 331,5 метров. Расчеты даются в программном комплексе «MIDAS CIVIL» при ударе легкомоторного самолета в 3-й ярус: график зависимости амплитуд колебаний 3-го яруса вант мачты от времени, амплитудный спектр колебательного процесса (спектральная плотность), участие собственных форм колебаний. Кроме того, приводятся результаты динамического расчета при пульсационном воздействии ветра: графики переходного процесса (зависимость амплитуды колебаний от времени) при четырех разных вариантах преднапряжения, на основе которых определялись коэффициенты динамичности (отношение максимальных перемещений к перемещениям от статического ветра), с последующим их сравнением с нормативными коэффициентами. Также рассматривается один из способов линеаризации расчетной схемы мачты, обладающей геометрической нелинейностью для последующего динамического расчета на вынужденные колебания. Осуществляется исследование динамической реакции конструкции мачты при ударе в 3-й ярус легкомоторного самолета и динамической реакции конструкции мачты при пульсационном воздействии ветра.

**Ключевые слова:** телевизионная мачта, геометрическая нелинейность, линеаризация, динамический расчет, вынужденные колебания.

**FORCED MAST OSCILLATIONS. INVESTIGATION OF DYNAMIC REACTION  
OF MAST STRUCTURE UNDER EXTERNAL IMPACT**

S. V. Efyushin, A. V. Burlakov, A. I. Sharanin<sup>3</sup>  
Russia, Voronezh

---

<sup>1</sup>PhD of Tech. Sc., associate professor

<sup>2</sup>postgraduate of the department of Structural mechanics, tel.: +74732545821

e-mail: gefe92@mail.ru

<sup>3</sup>scientific associate of VGTU NTZ “Mosty”

---

The paper presents the results of dynamic analysis of forced oscillations of an existing TV mast guyed of 331.5 meters height.

There were given the results of dynamic analysis in the software “MIDAS CIVIL” at the impulse onto the third tier by light airplane: graph of mast guy third tier oscillations amplitude dependence on time, amplitude spectrum of oscillation process (spectrum density), and participation of eigenvibrations.

There are presented the results of dynamic analysis at pulsating wind effect: graphs of transition processes (oscillations amplitude dependence on time) at four different variants of pretension on which base there was determined dynamic factors (ratio of maximal shift and shifts from static wind), with their following comparison with standard factors.

---

© Ефрюшин В. С., Бурлаков А. В., Шаранин А. И., 2018

One of the methods of analysis of linearization of mast scheme with geometrical nonlinearity for the following dynamic analysis of forced oscillations was under observation in the very paper. The research of dynamic reactions of mast structure at impulse onto the third tier by light airplane and mast reaction at pulsating wind effect was conducted.

**Keywords:** television mast, geometric nonlinearity, linearization, dynamic analysis, forced oscillations.

В качестве объекта исследования выбрана реально существующая конструкция мачты областного радиотелевизионного передающего центра «Бобровская РТС». Конструктивная схема мачты представляет собой ствол, который опирается на фундамент шарнирно, и оттяжки из стального каната, расположенные полярно симметрично к стволу.

Ствол мачты – сквозная четырёхгранная конструкция с поясами и распорками трубчатого сечения и крестовыми раскосами из круглой стали (в секциях, где крепятся ванты, раскосы из уголков). Ствол набирается из секций длиной 6,750 м, шириной 3,536 м. Для поясов используется труба диаметром 273 мм (в верхней секции на отметке 302,25 м, где крепятся ванты 325 мм), для распорок - труба диаметром 121 мм, раскосов - 42 мм.

Оттяжки из стального каната диаметром 45,5 мм и 52 мм крепятся к стволу на отметках 72,750 м, 147,0 м 221,25 м, 302,25 м, 331,5 м, а к анкерным фундаментам - на расстоянии 128,56 м 191,28 м, 259,28 м.

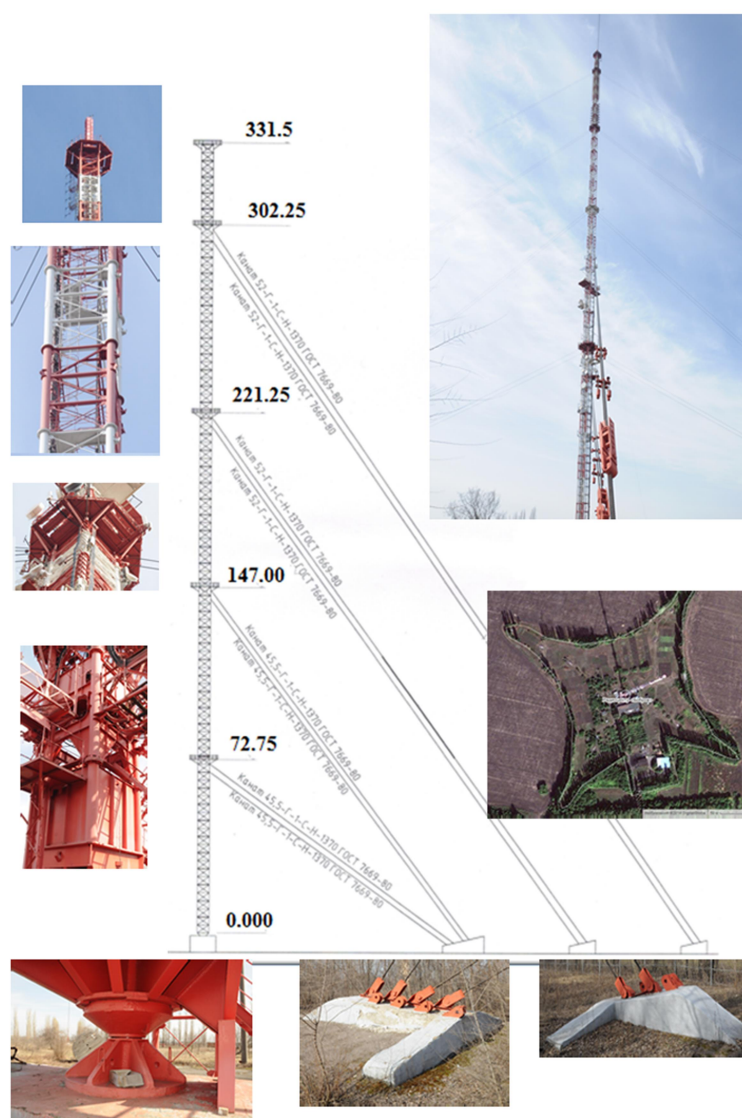


Рис. 1. Общий вид и схема мачты

Конструктивная схема мачты за счет наличия в ней вант обладает геометрической нелинейностью. Показателем геометрической нелинейности служит ситуация, при которой перемещения стержневой системы не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с размерами сооружения.

Для осуществления динамического расчета требуется использование динамической модели линейризованной системы. Это конструкция, работающая в геометрически линейной подстановке, но учитывающая достигнутый уровень усилий в вантах в состоянии, предшествующем линейризации.

Для получения линейризованной системы был использован способ [1], который предусматривает замену оттяжек ферменными стержнями (работающими только на сжатие, растяжение) с вычислением их приведенных жесткостей, определяемых по формуле

$$\bar{EA} = \frac{1}{\frac{1}{EA} + \frac{Dy + Dz}{LH^3}}$$

где  $\bar{EA}$  - приведенная жесткость,  $EA$  - первоначальное значение жесткости;  $L$  - длина ванты;  $H$  - достигнутый уровень усилия в вантах в состоянии, предшествующем линейризации;  $Dy$ ,  $Dz$  - величины интегралов в случае нагрузок, равномерно распределенных по хорде вантового элемента:

$$Dy = \int_0^L Q_y^2(x) dx = \frac{q_y^2 \cdot L^3}{12}, \quad Dz = \int_0^L Q_z^2(x) dx = \frac{q_z^2 \cdot L^3}{12}.$$

Задание жесткости реализуется заданием новой площади поперечного сечения, которая представлена в последнем столбце расчетной таблицы.

При проведении динамических расчетов было использовано несколько вариантов преднапряжения вант [2]. При проведении исследования динамической реакции мачты на удар самолета было рассмотрено три варианта преднапряжения: базовое (Н0), 1.3Н0 и 0.7Н0. При проведении исследования динамической реакции мачты на ветровое воздействие было рассмотрено четыре варианта преднапряжения: базовое (Н0), 0.7Н0, 0.5Н0, 0.01Н0.

Определение преднапряжения и принятые варианты показаны в табл. 1.

Таблица 1

Варианты преднапряжения вант

ярус	D каната	канат	L(м)	sina	угол наклона	y*A	H0=(y*A*sina*L)/(8*f0/L) (кН)	H0(ф) кН	Варианты преднапряжения Н*			
									1.3	0.7	0.5	0.01
1	45.5	1	138.355	0.50956	30.6	0.0764	37.4	40	52	28	20	0.4
		2	140.134	0.51915	31.3	0.0764	38.6					
2	45.5	3	187.893	0.77039	50.4	0.1004	100.9	100	130	70	50	1
		4	190.053	0.77347	50.7	0.1004	102.5					
3	52	5	286.068	0.76555	50.0	0.0764	116.2	120	156	84	60	1.2
		6	288.240	0.76759	50.2	0.0764	117.4					
4	52	7	391.826	0.76565	50.0	0.1004	209.2	210	273	147	105	2.1
		8	393.898	0.76733	50.1	0.1004	210.8					
Провисание f0/L=y*A*sina*L/(8*H0) [м]								0.018	0.014	0.026	0.036	1.800

В табл. 2 показана линейаризация расчетной схемы на действие удара самолета при базовом натяжении.

Таблица 2

Линеаризация расчетной схемы на действие удара самолета (Н0)

№ яруса вант	№ оттяжек	E кН/м2	D мм2	A м2	Вес 1 м.п. оттяжек кН/м	qy кН/м	qx кН/м	Длина ванты L м	Усилие в вантах Н кН	EA кН	Dx	Dy	EАпр кН	Апр м2	Радиус приведенного сечения (мм)	D (мм)					
1	1	1.47E+08	45.5	0.00099	0.0763			139.23	40.27	145530	1309.38	0.00	6629.29	0.000045	3.79	7.58					
	2								41.87		1309.38	0.00	7407.95	0.000050	4.01	8.01					
	3								40.27		1309.38	0.00	6629.29	0.000045	3.79	7.58					
	4								38.68		1309.38	0.00	5902.51	0.000040	3.58	7.15					
2	5													187.77	99.43	3211.78	0.00	41200.76	0.000280	9.45	18.90
	6														87.80	3211.78	0.00	31110.55	0.000212	8.21	16.42
	7														99.43	3211.78	0.00	41200.76	0.000280	9.45	18.90
	8														111.03	3211.78	0.00	51628.20	0.000351	10.58	21.15
3	9		52	0.0013	0.1003			285.79	118.33	191100	19568.69	0.00	21476.44	0.000146	6.82	13.64					
	10								86.36		19568.69	0.00	8964.07	0.000061	4.41	8.81					
	11								118.33		19568.69	0.00	21476.44	0.000146	6.82	13.64					
	12								156.31		19568.69	0.00	43174.55	0.000294	9.67	19.34					
4	13													391.54	210.01	50320.97	0.00	52331.64	0.000356	10.65	21.30
	14														205.72	50320.97	0.00	50015.16	0.000340	10.41	20.82
	15														210.01	50320.97	0.00	52331.64	0.000356	10.65	21.30
	16														214.29	50320.97	0.00	54662.88	0.000372	10.88	21.76

В табл. 3 показана линейаризация для проведения динамического расчета на действие пульсационной составляющей ветрового воздействия при базовом натяжении.

Таблица 3

Линеаризация расчетной схемы (Н0)

№ яруса вант	№ оттяжек	E кН/м2	D мм2	A м2	Вес 1 м.п. оттяжек кН/м	qy кН/м	qx кН/м	Длина ванты L м	Усилие в вантах Н кН	EA кН	Dx	Dy	EАпр кН	Апр м2	Радиус приведенного сечения (мм)	D (мм)						
1	1	147000000	45.5	0.00099	0.0763			139.23	107.33	145530	2493.87	0.00	46819.96	0.000319	10.07	20.14						
	2								0.008		114.93	1309.38	14.39	76131.08	0.000518	12.84	25.69					
	3								0.029		107.35	2493.87	0.00	46841.26	0.000319	10.07	20.15					
	4								-0.008		92.03	1309.38	14.39	52444.81	0.000357	10.66	21.32					
2	5													187.77	135.99	6834.20	0.00	46853.34	0.000319	10.08	20.15	
	6														0.021	150.49	3211.78	243.30	81499.90	0.000554	13.29	26.58
	7														0.035	136.04	6834.20	0.00	46884.87	0.000319	10.08	20.16
	8														-0.021	101.32	3211.78	243.30	40711.23	0.000277	9.39	18.78
3	9		52	0.0013	0.1003			285.79	218.99	191100	41634.03	0.00	52343.61	0.000356	10.65	21.30						
	10								0.027		236.14	19568.69	1418.04	92506.37	0.000629	14.16	28.31					
	11								0.046		219.02	41634.03	0.00	52360.27	0.000356	10.65	21.30					
	12								-0.027		165.63	19568.69	1418.04	46740.73	0.000318	10.06	20.13					
4	13													391.54	312.69	112996.53	0.00	68157.23	0.000464	12.15	24.30	
	14														0.029	325.85	50320.97	4206.72	108013.06	0.000735	15.30	30.59
	15														0.05	312.64	112996.53	0.00	68132.83	0.000463	12.15	24.30
	16														-0.029	244.60	50320.97	4206.72	67800.11	0.000461	12.12	24.24

Динамический расчет выполнялся в программном комплексе MIDAS CIVIL, были сформированы две динамические расчетные схемы. Каждая расчетная схема отвечает необходимым требованиям для выполнения динамического расчета: схема – линеаризована, определены уравнения, которыми описываются внешние воздействия на мачту.



Первая расчетная схема предназначена для исследования динамической реакции конструкции мачты при ударе в 3-й ярус легкомоторного самолета (см. рис.2). Узловая нагрузка, прикладываемая в ярус крепления вант, является функцией зависимости силы от времени при ударе самолета [3] (см. рис. 3). При задании параметров динамического расчета был учтен коэффициент демпфирования (затухания) для металлических башен, мачт принимается равным 0.025. Было сформировано три динамических расчетных модели, различающихся преднатяжением вант: базовое натяжение, 0,7 от базового, 1,3 от базового.

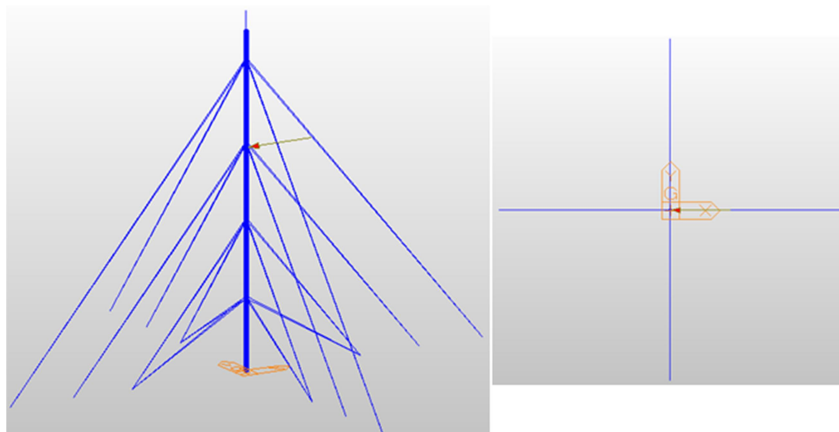


Рис. 2. Динамическая расчетная схема с приложенной динамической узловой нагрузкой в 3-й ярус. Аксонометрия и вид сверху

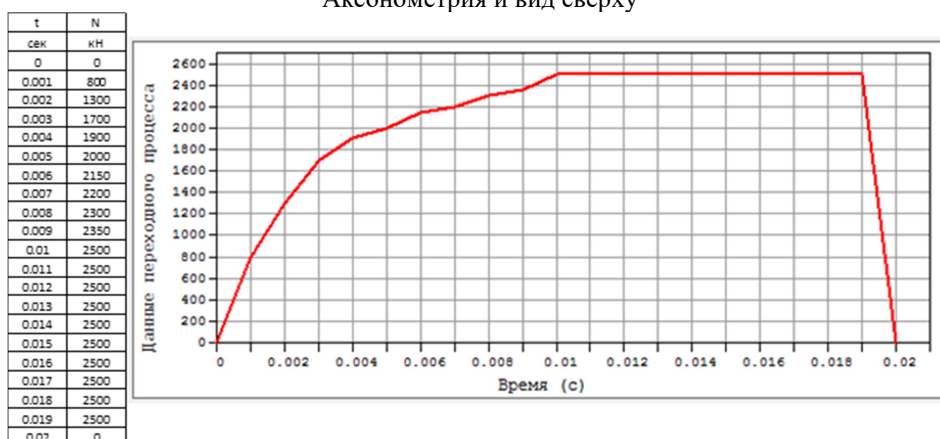


Рис. 3. Функция зависимости силы от времени при ударе самолета

Вторая расчетная схема предназначена для исследования динамической реакции конструкции мачты при пульсационном воздействии ветра (рис. 4, 5.)

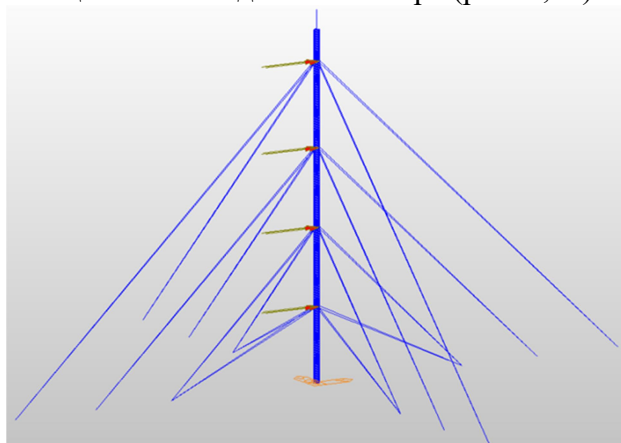


Рис. 4. Динамическая расчетная схема при пульсационном воздействии ветра

В каждый ярус приложена узловая нагрузка, являющаяся совокупностью статической и пульсационной составляющей ветрового воздействия. С учетом пульсации ветрового давления узловая нагрузка, собранная с некоторой «грузовой площадки», в МКЭ может быть представлена, в виде

$$P_n = P_{ст, n} + P_{p, n}(t),$$

где  $n$  – номер узла,  $P_{ст}$  – статическая составляющая ветровой нагрузки,  $P_{p,n}(t)$  – амплитудное значение динамической составляющей ветровой нагрузки.

Значение пульсационной составляющей определяется согласно п. 6.7 (б) [4]. Расчет приведен в табл. 4.

Таблица 4

Расчет пульсационной составляющей ветрового воздействия

Пояснение		Ед.изм	1 ярус	2 ярус	3 ярус	4 ярус
$P_{p,n}$	Равнодействующая пульсационной составляющей ветровой нагрузки (расчетная)	кН	24.38	18.38	20.38	19.15
$P_{ст,n}$	Расчетное значение средней составляющей ветровой нагрузки		47.51	39.67	46.81	46.01
$P_{p,n}$	Равнодействующая пульсационной составляющей ветровой нагрузки (расчетная)		17.41	13.13	14.55	13.68
$P_{ст,n}$	Нормативное значение средней составляющей ветровой нагрузки		33.93	28.34	33.43	32.87
$L$	Длина расчетного участка	м	110	74.38	77.63	69.49
$Z$	Уровень приложения нагрузки		72.75	147.00	221.25	302.25
$\omega_p$	$w_p = ck(z)\zeta(z)vw_0$	кН/м	0.158	0.177	0.187	0.197
$\zeta$	Коэффициент пульсаций давления ветра на уровне Z	-	0.567	0.512	0.481	0.460
Коэффициент пространственной корреляции давления ветра		$v$	0.905			
		$\rho=b$	3.056			
		$\chi=h$	6.750			
$\omega_m$	$w_m = w_0kc_s$	кН/м	0.308	0.381	0.431	0.473
$\omega_0$	нормативное значение ветрового давления	кПА	0.3			
$K$	$k(z_e) = k_{10}(z_e/10)^{2\alpha}$	-	1.81	2.24	2.53	2.78
$c$	Аэродинамический коэффициент	-	0.567			

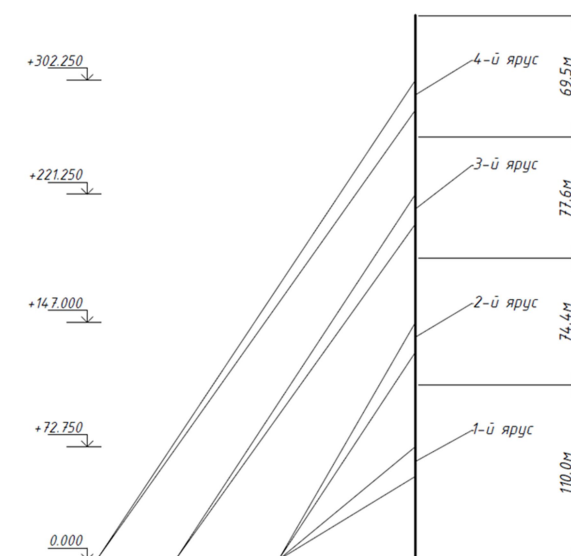


Рис. 5. Расчетные участки

Согласно обобщенному энергетическому спектру Давенпорта [5] в исследовании было принято двухминутное осреднение ветрового напора:

$$\omega = 1.5 \text{ рад/с}, f = 0.238 \text{ Гц},$$

$$T = 8 \text{ сек}.$$

В табл. 5 показаны амплитудные значения статической и пульсационной составляющей ветрового воздействия.

Таблица 5

Деление нагрузки на 4 пояса

Деление на 4 пояса (узла)					
Расчетные					
$P_{p,p}$	кН	6.09	4.60	5.09	4.79
$P_{ст,p}$		11.88	9.92	11.70	11.50
Нормативные					
$P_{p,n}$	кН	4.35	3.28	3.64	3.42
$P_{ст,n}$		8.48	7.08	8.36	8.22

Для исследования принимаем 4 расчетные схемы при разных вариантах натяжения вант: Но, 0.7Но, 0.5Но, 0.01Но. Рассматривается ветровое воздействие направление 1, вдоль оттяжки (по результатам статического расчета самое опасное).

Результаты исследования динамической реакции конструкции мачты при ударе в 3-й ярус легкомоторного самолета представлены на [рис. 6-8](#)

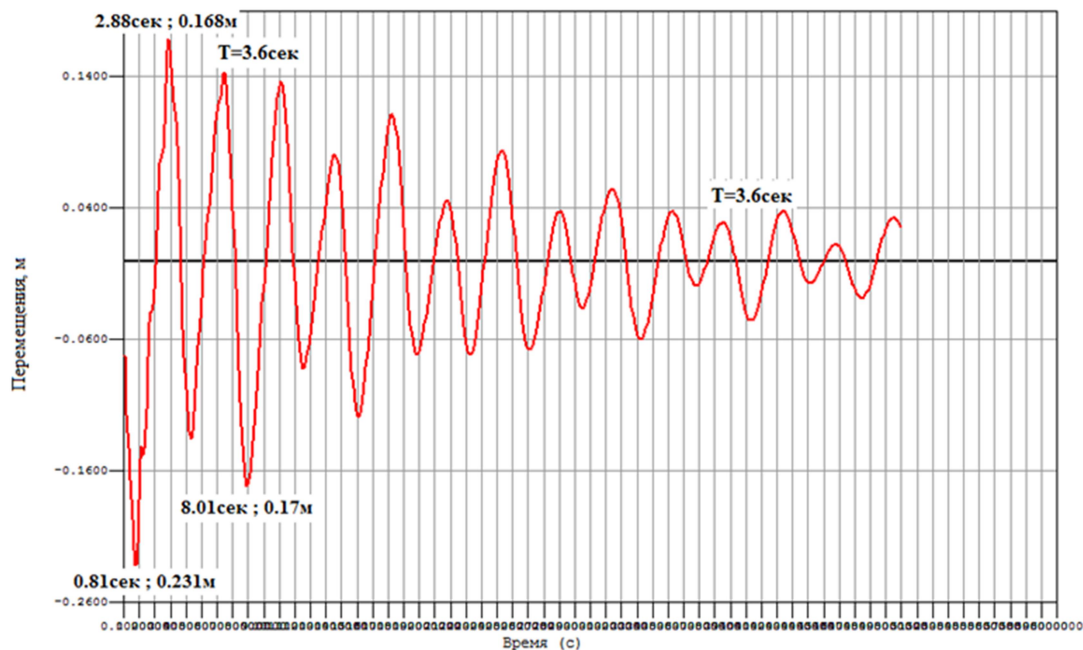


Рис. 6. График зависимости амплитуд колебаний 3-го яруса вант мачты от времени при преднапряжении 0.7Н0



Амплитудный спектр колебательного процесса представлен на рис. 9

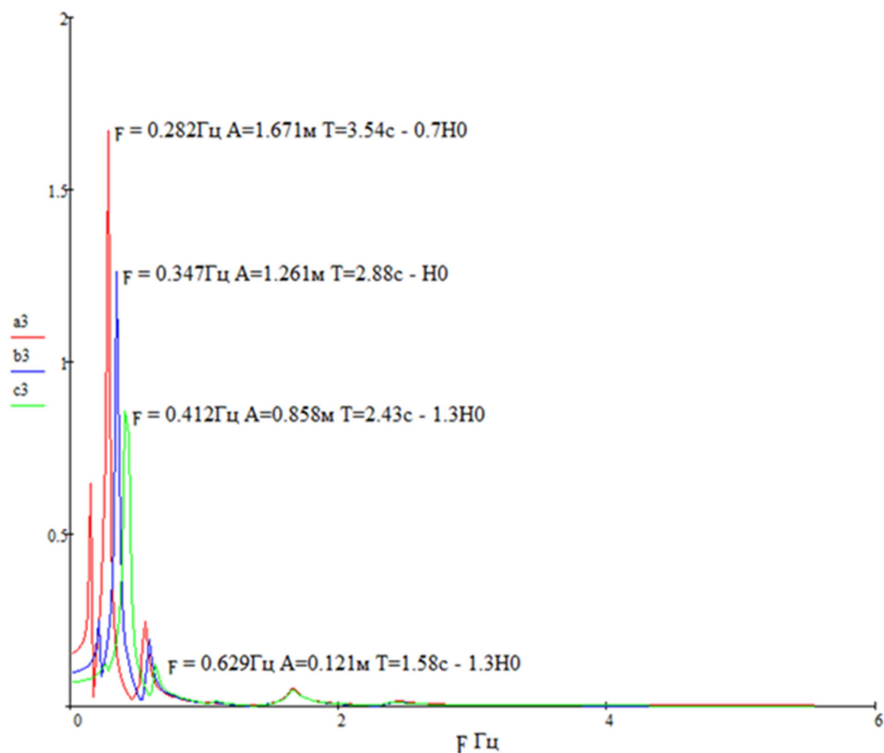
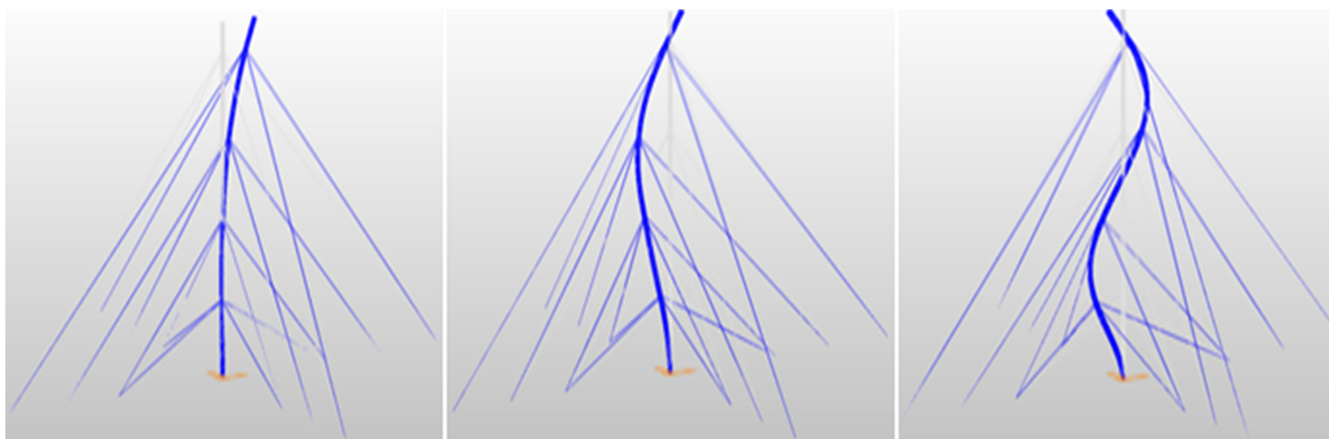


Рис. 9. Сопоставление амплитудных спектров при разных вариантах натяжения (3 ярус): а3 – 0.7H0, b3 – H0, с3 – 1.3H0, а, b, с – амплитуды (м)

Анализируя вклад каждой из учтенных форм собственных колебаний (рис. 10), можно сделать следующий вывод: наибольший вклад в динамическую работу мачты вносят при 0.7H0 2 и 4 форма, при H0 2, 4 и 9 форма, при 1.3H0 4 и 9 форма собственных колебаний.



2 форма С.К.

4 форма С.К.

9 форма С.К.

Рис. 10. Формы собственных колебаний



Таблица 6

Анализ графиков зависимости перемещения от времени.  
Определение коэффициента динамичности

Перемещения, мм, установившиеся колебания							
№ яруса	От статического ветра	Значения с		Добавка от пульсационной составляющей ветра	Кдин	Кдин (ср)	Кдин (max)
		+	-				
H <sub>0</sub>							
1	30.24	47.41	13.078	17.17	1.57	1.64	1.79
2	76.43	121.48	31.37	45.06	1.59		
3	104.20	167.8	40.59	63.61	1.61		
4	91.70	164.489	18.92	72.78	1.79		
0.7H <sub>0</sub>							
1	33.65	52.03	15.26	18.39	1.55	1.80	2.32
2	89.29	141.27	37.3	51.99	1.58		
3	125.48	217.19	33.76	91.72	1.73		
4	130.24	302.5	-42.03	172.27	2.32		
0.5H <sub>0</sub>							
1	37.00	58.01	15.99	21.01	1.57	1.82	2.34
2	100.48	162.166	38.79	61.69	1.61		
3	137.39	241.35	33.43	103.96	1.76		
4	133.37	311.855	-45.12	178.49	2.34		
0.01H <sub>0</sub>							
1	45.89	74.79	16.99	28.90	1.63	1.88	2.38
2	128.39	218.18	38.6	89.79	1.70		
3	163.28	297.93	28.62	134.66	1.82		
4	139.92	332.8	-52.96	192.88	2.38		

Таблица 7

## Определение коэффициентов динамичности согласно [3]

Коэффициент динамичности				2.2	2.3	2.3	2.4	
ξ	$\varepsilon = \frac{\sqrt{\gamma_f w_0}}{940 f_1}$	Параметр (зависит от частоты собственной формы колебаний)	ε	-	0.068	0.079	0.079	0.080
	Частота первой формы собственных колебаний		f	Гц	0.319	0.277	0.276	0.274
	Декремент колебаний		δ	-	0.15			

## Выводы

- Использование динамической модели линеаризованной системы позволяет произвести расчет на вынужденные колебания с учетом геометрической нелинейности, возникающей из-за конструктивной особенности мачты (наличие вант). Линеаризация расчетной схемы осуществлялась заменой оттяжек ферменными стержнями (работающими только на сжатие, растяжение) с вычислением их приведенных жесткостей.
- Результаты исследования динамической реакции конструкции мачты при ударе легкомоторного самолета следующие:
  - по графику зависимости амплитудных значений перемещений ярусов мачты от времени видно, что с уменьшением преднапряжения уменьшается жесткость

всей системы, а следовательно, колебательный процесс имеет больший период и амплитуду колебаний;

- при анализе амплитудного спектра колебательного процесса так же прослеживается зависимость частот колебаний от преднапряжения вант, которая отмечалась при проведении модального анализа (с увеличением преднапряжения частота увеличивается, амплитудное значение перемещения падает);
  - наибольший вклад в динамическую работу мачты вносят при 0.7Но 2 и форма, при Но 2, 4 и 9 форма, при 1.3Но 4 и 9 форма собственных колебаний.
3. В качестве исследования динамической реакции конструкции мачты при пульсационном воздействии ветра было проведено сравнение коэффициентов динамичности, определенных согласно [4] и полученных как результат динамического расчета. Сравнение показало незначительную разницу, что подтверждает корректность использованной динамической модели линеаризованной системы. Также выявлена зависимость коэффициента динамичности от преднапряжения – с уменьшением преднапряжения коэффициент динамичности конструкции увеличивается за счет снижения общей жесткости мачты.

#### Библиографический список

1. Перельмутер А. В. SCAD Office. Расчет мачт на оттяжках/ А. В. Перельмутер. - Киев: Издание ООО SCAD Office Soft, 2004. - 46 с.
2. Ефрюшин С. В. Исследование влияния преднапряжения в оттяжках мачты на частоты и формы свободных колебаний/ С. В. Ефрюшин, А. В. Бурлаков // Строительная механика и конструкции. – 2017. - №1 (14). – С. 33-44.
3. Бирбраер А. Н. Экстремальные воздействия на сооружения/ А. Н. Бирбраер, А.Ю. Роleder. - СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 594 с.
4. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция. - М.: Мин-регион России, 2011.
5. Усовершенствование вертикально-осевой ветроэнергетической установки (ВЭУ)/ П. Ф. Богданович, Д. А. Григорьев, В. В. Заневский; УО «Гродненский государственный аграрный университет». - Гродно, Республика Беларусь, 2014.

#### References

1. V. Perelmuter SCAD Office. Calculation of guyed masts. Kiev: Edition of SCAD Soft Office company, 2004.— 46 p.
2. Efyushin S.V., Burlakov A.V., Research of pretension effect in mast guys on free motions frequencies and kinds. // Structural mechanics and structures. – 2017. - №1 (14). – P. 33-44.
3. Birbrayer A.N., Roleder A.Yu. Exstreme impacts onto structures. SP. Pub. House Polytechnic university, 2009. – 594p.
4. SP 20.13330.2011. Loads and impacts. Updated reduction.- M.: Minregion of Russia, 2011.
5. Bogdanovich, P. Ph., Grigoryev D.A., Zanevsky V.V. Improvement of vertical-axis wind –energetic plant. "Grodno state agricultural university", Grodno, Republic of Belarus, 2014.



## ВЫБОР КОНСТРУКТИВНОГО РЕШЕНИЯ УСИЛЕНИЯ СТАЛЬНЫХ БАЛОК ПОКРЫТИЯ

С. Ю. Беляева<sup>1</sup>, Д. Н. Кузнецов<sup>2</sup>, В. Г. Сазыкин<sup>3</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>  
Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup> Канд. техн. наук, доц. кафедры металлических конструкций и сварки в строительстве  
Тел.: +7(909)2173110, e-mail: svetboy@yandex.ru

<sup>2</sup> Ст. преподаватель кафедры металлических конструкций и сварки в строительстве  
Тел.: +7(910)3468912, e-mail: kuznecov82@bk.ru

<sup>3</sup> Ст. преподаватель кафедры металлических конструкций и сварки в строительстве  
Тел.: +7(951)8687247, e-mail: vitalijsazykin@rambler.ru

---

Рассматриваются варианты устранения ошибочного решения конструкторов принятого при разработке рабочей документации на металлические конструкции каркаса главного корпуса дрожжевого завода строящегося в Липецкой области. Стальной каркас выполнен по рамно-связевой схеме. Здание многопролетное, состоит из двух блоков разной высоты, входящих в состав главного корпуса дрожжевого завода. Поперечные сечения стоек и ригелей каркаса выполнены из прокатных двутавров. В зоне повышенных снеговых отложений у перепада высотной отметки несущие балки покрытия двутавры №70Б0 были ошибочно заменены на двутавры №55Б1. Приводится общее описание возможных вариантов усиления несущих балок. Выбрано два наиболее целесообразных, по мнению авторов, способа усиления без демонтажа несущих и ограждающих конструкций. В работе представлены результаты статических расчетов системы плоских рам до усиления и после усиления (для двух вариантов). Рассмотрены достоинства и недостатки предложенных вариантов усиления, обоснован окончательный выбор схемы усиления. Для выбранного варианта усиления приводятся результаты подбора поперечных сечений элементов и конструктивные решения узлов.

**Ключевые слова:** двутавровая балка покрытия, усиление стальных конструкций, увеличение несущей способности, шпренгель, подкосы.

## CHOICE OF CONSTRUCTIVE SOLUTION OF REINFORCEMENT OF SURFACE STEEL BEAMS

S. Yu. Belyaeva<sup>1</sup>, D. N. Kuznetsov<sup>2</sup>, V. G. Sazykin<sup>3</sup>

Voronezh state technical university<sup>1,2,3</sup>  
Voronezh, Russia

---

<sup>1</sup> PhD of Tech. Sc. associate professor of department of Metal structures and welding in construction  
ph.: +7(909)2173110, e-mail: svetboy@yandex.ru

<sup>2</sup> Senior Lecturer of department of Metal structures and welding in construction  
ph.: +7(910)3468912, e-mail: kuznecov82@bk.ru

<sup>3</sup> Senior Lecturer of department of Metal structures and welding in construction  
ph.: +7(951)8687247, e-mail: vitalijsazykin@rambler.ru

---

There is analyzed the variants of constructors' erroneous decision taken while developing the working documentation for metal structures of under construction in Lipetsk region yeast plant main building framework. Steel framework is performed as box frame. The multispan building consists of two blocks of different heights as components of the yeast plant main building. Framework vertical posts and beams cross sections are made of rolled flanged beam. In the zone of high snow sedimentation at difference in elevation the bridging flanged beam №70Б0 were changed by bridging flanged beam №55Б1 erroneously. The general description of possible variants of joists reinforcement is given. Two the most reasonable from the authors' view methods of reinforcement without assembling of carrying and filler structures were chosen. The results of static calculations of the flat frames system before and after their reinforcement (two variants) are presented in the very article. There are analyzed advantages and shortages of suggested variants of

reinforcement and substantiated the final choice of the scheme of reinforcement. For chosen variant of reinforcement there are given the results of the matching of cross sections of the members and constructive decisions of nuds.

**Keywords:** bridging flanged beam, steel structures reinforcement, carrying capacity increase, truss member, post

## Введение

Стальные каркасы нашли широкое применение в зданиях различного назначения, что объясняется хорошо известными и описанными в специальной литературе [4, 5] достоинствами стали как конструкционного материала. Скорость возведения зданий и сооружений с металлическим каркасом значительно выше, чем с монолитным железобетоном, уменьшение сроков строительства обеспечивает более скорый ввод в эксплуатацию зданий со стальным каркасом. Для промышленных предприятий уменьшение времени строительства часто влияет на окупаемость проектов. Перечисленные преимущества делают выгодным использование стали в качестве основного материала для несущих конструкций каркасов производственных зданий. В промышленном строительстве, реализуемом зачастую в условиях значительного сокращения сроков, на стадии проектирования, изготовления строительных конструкций или при монтаже возможно появление ошибок. В данной работе рассмотрены вопросы усиления балок покрытия стального каркаса главного корпуса дрожжевого завода, построенного в 2016-2017 гг. в Липецкой области. Необходимость усиления вызвана ошибкой при выполнении проекта на стадии КМД (конструкции металлические детализированные).

### 1. Объект исследования

Многопролетное здание главного корпуса состоит из двух разновысотных блоков, разделенных по деформационному шву противопожарной стеной. Размеры в плане складской одноэтажной части здания составляют 68x107 м, а многоэтажная производственная часть имеет размеры 78,5x98,5 м. Стальной каркас здания выполнен по рамно-связевой схеме, такая схема имеет широкую практику применения [4, 6, 11]. Пространственная устойчивость и геометрическая неизменяемость в поперечном направлении обеспечена рамами без шарниров, в продольном направлении – вертикальными связями между колоннами, горизонтальными дисками железобетонных перекрытий и дисками покрытий из стального профилированного настила по прогонам. Колонны и балки, входящие в состав поперечных рам каркаса выполнены из прокатных двутавров и, как было сказано выше, имеют жесткое сопряжение между собой. Материал несущих рам - сталь класса С345.

Рамные узлы обеспечивают передачу с ригелей на колонны каркаса поперечных, продольных сил и изгибающих моментов и запроектированы фланцевыми по серии 2.440-2 [9], с вутами и без них. В серийных узлах [3] поперечные силы передаются на опорный столик из листа толщиной 40 мм через торцы опорных фланцев, изгибающий момент и продольные силы - через фланцы и высокопрочные болты на полку и стенку колонны, укрепленную поперечными, а в случае необходимости и диагональными ребрами жесткости. При проектировании таких соединений, согласно Серии 2.440-2 выпуск 7, учитывается реальная изгибная жесткость узлов. За предельный узловой момент принимается наименьшее значение, полученное из следующих условий: образования пластического шарнира во фланце или в полке колонны, достижения предела текучести в стенке колонны или достижения разрушающих усилий в наиболее нагруженных болтах.

В складской, пониженной части здания проектом предусмотрены рамные узлы с вутами (рис. 1). Такое решение узла обеспечивает увеличение высоты опорного сечения балки и, как следствие, подбор сечения ригеля не по максимальному опорному моменту, а по сниженной его величине. Применение узла с вутом, помимо уменьшения расхода стали на ригели, дает возможность использовать прокатные двутавры в тех случаях, когда применение уз-

ла без вута привело бы к необходимости перехода на сварные сечения или к поиску другого решения жесткого узла.

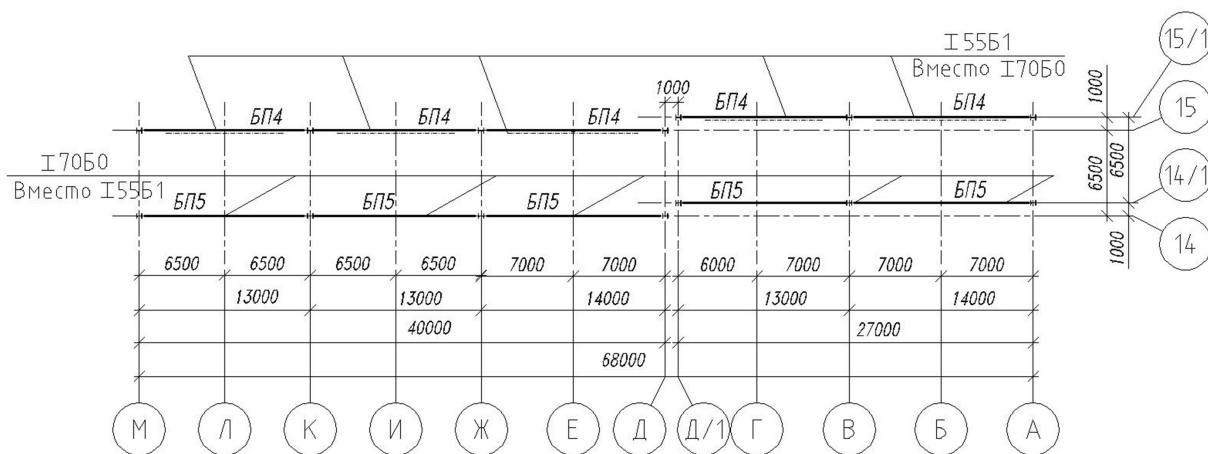


**Рис. 1.** Общий вид рамного узла сопряжения балок покрытия с колоннами складской части здания

Технологический проект дрожжевого завода, как и в случае других производств, является основополагающей частью для всех остальных разделов проекта промышленного здания. Данный проект выполнялся испанской компанией, что усложняло проработку архитектурных и конструктивных решений по нормативным требованиям Российской Федерации и потребовало больших затрат времени на начальном этапе проектирования. Сжатые сроки реализации проекта главного корпуса обусловили «работу с листа» предприятия-разработчика документации КМД, производителя металлоконструкций и монтажной организации. При выполнении детализировочной стадии рабочей документации - проекта КМД, в зоне повышенных снеговых отложений у перепада высотной отметки (рис. 2) двутавры №70Б0 были ошибочно заменены на двутавры №55Б1. Таким образом, рамные балки по осям 15 и 15/1 заменили на балки меньшего сечения, которые должны были располагаться по осям 14 и 14/1 (рис. 3). Шаг рам складского блока составляет 6,5 м, пролеты балок по рассматриваемым осям – 13 и 14 м, рама разбита противопожарной стеной на двухпролетную и трехпролетную части.



**Рис. 2.** Общий вид перехода от складского блока к производственной части здания



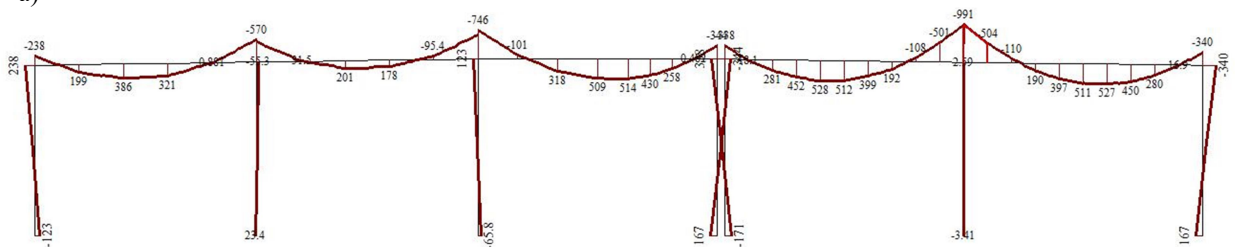
**Рис. 3.** Схема фрагмента расположения балок покрытия складской части здания в осях 14-15/1 (повернуто на 90°)

Ошибка была обнаружена в процессе технического и авторского надзора, когда балки и покрытие были смонтированы, а контур складского блока здания практически закрыт. Замена установленных балок меньшего сечения на балки, заложенные в проекте, на момент выявления ошибки вызывала затруднения в связи с необходимостью демонтажа значительного количества несущих и ограждающих конструкций.

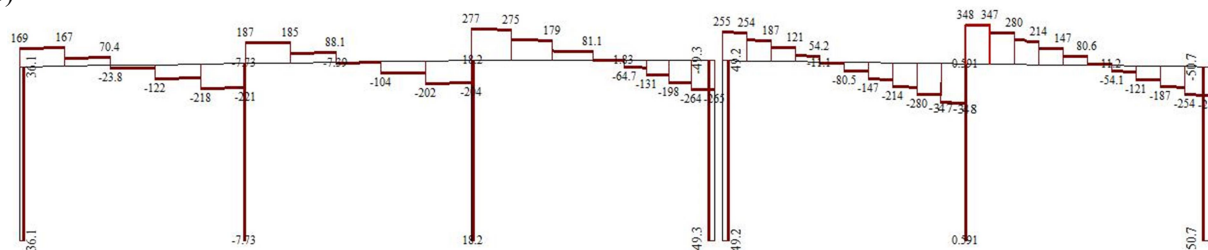
## 2. Методика проведения исследований

Для оценки несущей способности и деформативности смонтированных конструкций была разработана расчетная схема рассматриваемой части складского блока производственного корпуса. Действующие на каркас нагрузки: собственный вес, вес инженерных систем, снеговая нагрузка с учетом повышения в месте перехода от многоэтажной к одноэтажной части здания, ветровая нагрузка - определялись по требованиям СП 20.13330.2016. Расчет внутренних усилий в несущих элементах каркаса выполнялся в ПК Лира 9.6. По результатам расчета наибольшие изгибающие моменты в многопролетной раме складского блока возникают на средних опорах (рис. 4).

а)



б)



**Рис. 4.** Эпюры внутренних усилий поперечной рамы по осям 15 и 15/1:  
а) изгибающие моменты  $M_y$ , кН\*м; б) поперечные силы  $Q_z$ , кН

Проверочные расчеты показали, что опорные сечения установленных по осям 15 и 15/1 балок, даже увеличенные вутами, не проходили по требованиям прочности СП 16.13330.2016 для изгибаемых элементов – перенапряжения на средних опорах в начале вута составили от 10 до 22%. Прогиб балок от нормативных нагрузок - 56 мм, что соответствует предельному значению по СП 20.13330.2016.

В сложившейся ситуации возникла необходимость усиления существующих балок без демонтажа элементов покрытия, причем пролетное пространство склада должно было оставаться свободным. Распространенным способом усиления балок является увеличение их поперечного сечения [1, 2, 3, 7, 8]. Однако усиление наиболее нагруженных опорных участков балок, и, следовательно, изменение деталей фланцевого рамного узла технически представляется затруднительным ввиду сложного напряженно-деформированного состояния его элементов [5, 9]. Поэтому с целью снижения опорного момента усиление выполнялось методом регулирования напряжений [10], а именно изменением конструктивной схемы балок. Было рассмотрено два наиболее приемлемых варианта усиления, выполняемых без демонтажа покрытия и в отсутствии снеговой нагрузки.

### 3. Выбор конструктивного решения усиления балок покрытия

Первый вариант предусматривает постановку подкосов на средних опорах (рис. 5), счет чего уменьшается рабочий пролет балок и значительно снижаются изгибающие моменты (в 4,8 раза) и поперечные силы (в 3,5 раза) на опорах. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил от основного сочетания нагрузок в рассматриваемых рамах с подкосами приведены (рис. 6). Увеличивающиеся при данном способе усиления в балках покрытия продольные силы совместно с изгибающими моментами не вызывают усилий, превышающих несущую способность опорного узла. Прогибы балок в середине пролета уменьшаются до 34 мм (на 40 %).



Рис. 5. Схема усиления балок подкосами по координатной оси 15

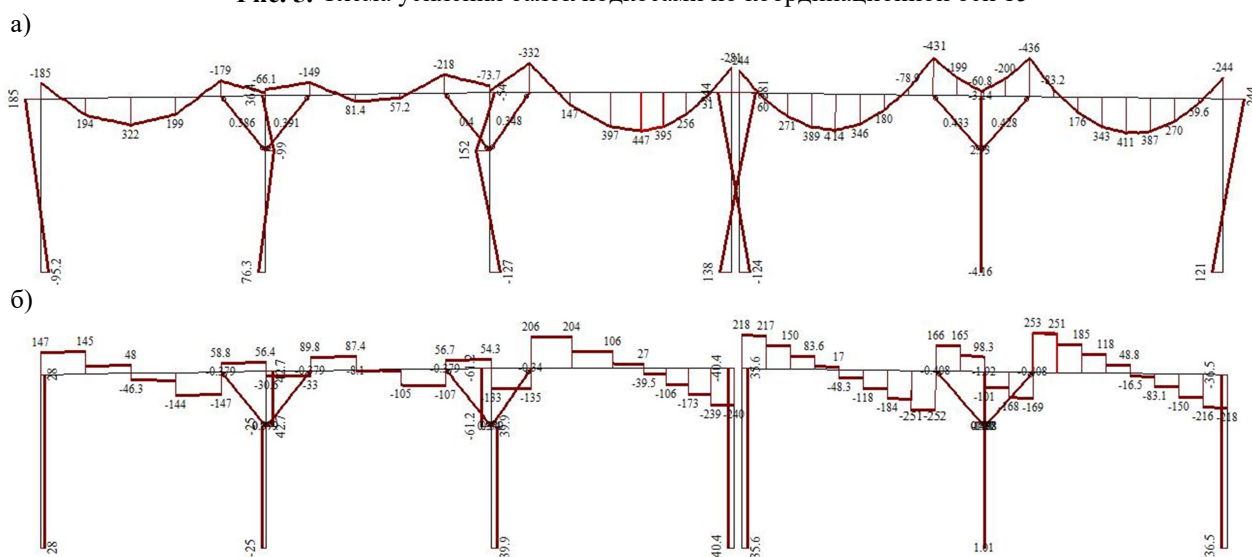


Рис. 6. Эпюры внутренних усилий поперечной рамы по осям 15 и 15/1:  
а) изгибающие моменты  $M_y$ , кН\*м; б) поперечные силы  $Q_z$ , кН

Однако такое решение усиления приводит к появлению дополнительных усилий в средних колоннах рамы, особенно при загрузке временными нагрузками от технологических подвесок и снеговой нагрузкой в шахматном порядке, в результате не выполняется условие устойчивости колонн в плоскости поперечной рамы с перенапряжениями до 5 %, что недопустимо и требует усиления колонн. Кроме того, пространство около колонн в верхней части цеха занято разводкой инженерных систем различного назначения и при постановке подкосов возникали вопросы обхода опорной части балок технологическими трубопроводами. Вследствие указанных причин вариант усиления балок покрытия подкосами при достаточной простоте его исполнения не был принят как окончательный.

Второй вариант усиления выполняется путем постановки шпренгелей трапецидального вида (рис. 7), что в значительной степени увеличивает жесткость пролетной части рамных балок и приводит к перераспределению усилий в них. Ниже показаны (рис. 9) эпюры внутренних усилий в элементах рассматриваемых рам и стержнях шпренгельных систем.

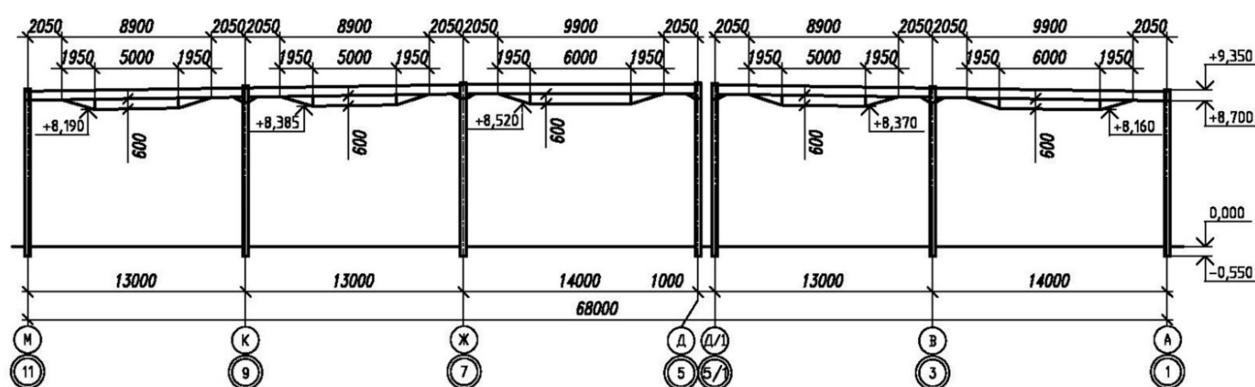


Рис. 7. Схема усиления созданием шпренгельных систем

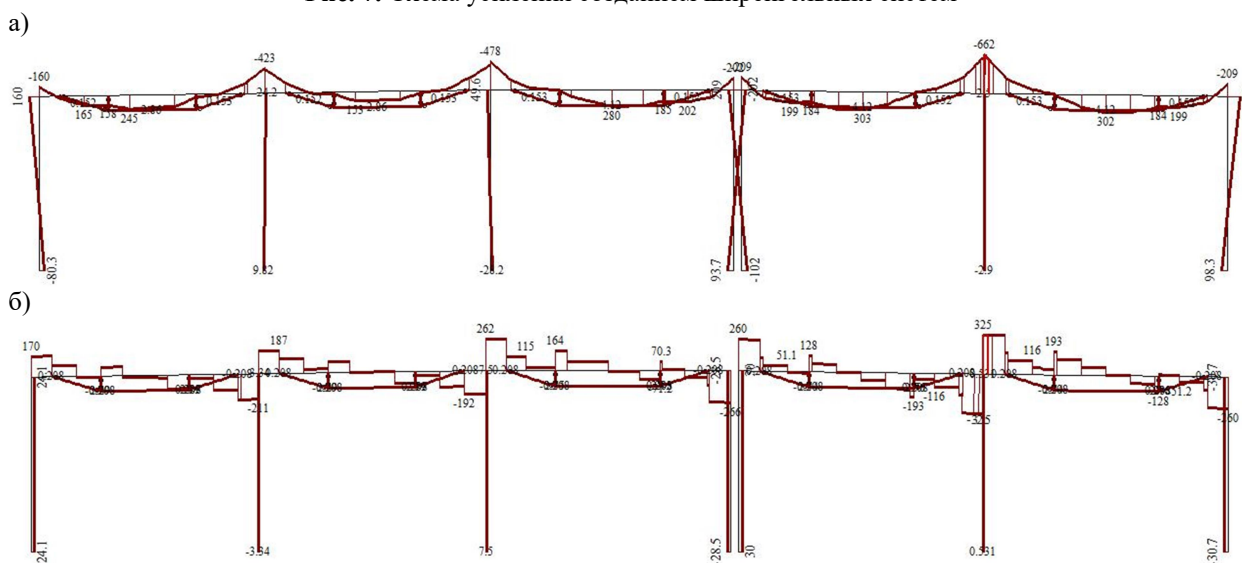


Рис. 8. Эпюры внутренних усилий поперечной рамы по осям 15 и 15/1:  
а) изгибающие моменты  $M_y$ , кН\*м; б) поперечные силы  $Q_z$ , кН

Так как увеличение жесткостей элементов принятой конструкции усиления незначительно отражается на перераспределении изгибающих моментов и прогибах балок, стержни шпренгельной системы подобраны по положениям СП 16.13330.2016 из профилей минимально требуемого сечения. По результатам расчетов в качестве элементов усиления трехпролетной рамы использованы парные уголки  $L 100 \times 8$ , составленные в виде тавра; двухпролетной рамы – два швеллера №12, устанавливаемые с зазором 220 мм для обхода фахверко-

вой стойки противопожарной стены. Усиление постановкой шпренгелей трапецеидального вида уменьшило опорные изгибающие моменты в среднем на 37 – 50 %, поперечные силы – до 8 %, прогибы пролетной части балок до – 7%. Например, после введения шпренгеля момент на средней опоре двухпролетной рамы снизился с 1000 кН\*м до 670 кН\*м, что отвечает несущей способности существующего опорного узла. Прогибы в пролете уменьшились с 56 до 52 мм и не превышают допустимых нормативных значений. Разработанные схемы и узлы крепления элементов усиления к существующим балкам покрытия показаны (рис. 9). В местах крепления шпренгелей ввиду локального развития пластических деформаций в стенках усиливаемых балок для обеспечения их местной устойчивости установлены поперечные ребра жесткости.

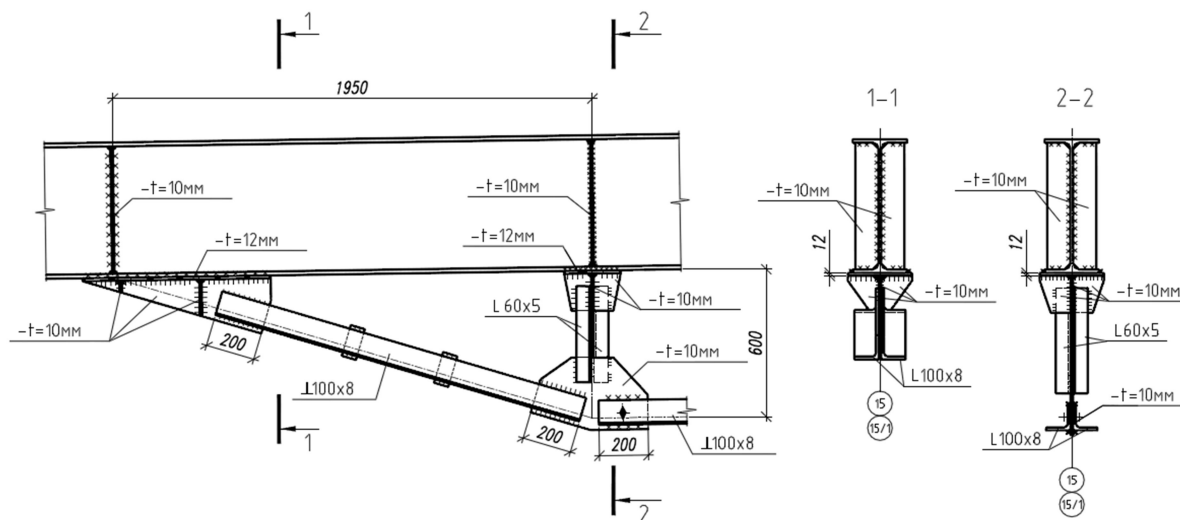


Рис. 9. Схема узла крепления шпренгеля к усиливаемой балке покрытия

### Выводы

1. Предложенные варианты усиления значительно снижают моменты в наиболее нагруженных опорных сечениях рамных балок и могут быть рекомендованы для усиления ригелей многопролетных рам с фланцевыми узлами сопряжения балок и колонн.

2. При разработке и обосновании проекта усиления помимо обеспечения несущих функций усиливаемых конструкций необходимо учитывать ряд факторов, а именно: требования монтажной технологичности и выполнения усиления без разгрузки балок, что значительно снижает трудоемкость работ; технологические особенности производственного процесса внутри складского корпуса, влияющие на возможность размещения элементов усиления. Усиление балок покрытия постановкой шпренгелей трапецеидального вида в полной мере соответствует предъявляемым требованиям.

3. Принятый вариант усиления имеет простые узловое решения и, как следствие, достаточно прост в исполнении. Общий расход стали С345 на узловое детали и стержни шпренгельных систем, добавленные в рамы по осям 15 и 15/1, составил около 2 тонн.

### Библиографический список

1. Бельский М. Р. Усиление металлических конструкций под нагрузкой / М.Р. Бельский. - Киев: Будивельник, 1975. – 120 с.
2. Беляев Б. И. Причины аварий стальных конструкций и способы их устранения / Б. И. Беляев, В. С. Корниенко. – М.: Стройиздат, 1968. – 206 с.

3. Валь В. Н. Усиление стальных каркасов одноэтажных производственных зданий при их реконструкции / В. Н. Валь, Е. В. Горохов, Б. Ю. Уваров. – М.: Стройиздат, 1987. – 220 с.
4. Металлические конструкции: В 3-х т. Т. 2. Конструкции зданий: учеб. для строит. ВУЗов / В. В. Горев [и др.] ; под ред. В. В. Горева. – 3-е изд., – М.: Высшая школа, 2004. – 551 с.
5. Металлические конструкции: Специальный курс: учеб. пособие для вузов / Е. И. Беленя [и др.]; под ред. Е. И. Беленя – 3-е изд., перераб. и доп.– М.: Стройиздат, 1991. – 687 с.
6. Металлические конструкции: учебник / В. О. Пермяков, [и др.]; под общ. ред. В. О. Пермякова и О. В. Шимановского. – К.: Изд-во «Сталь», 2008. – 812 с.
7. Металлические конструкции: учебник для студ. высш. учеб. заведений/ Ю. И. Кудишин [и др.]; под ред. Ю. И. Кудишина – Изд. 10-е, стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 687 с.
8. Муханов К. К. Металлические конструкции: учебник для вузов. - Изд. 3-е, испр. и доп. - М.: Стройиздат, 1978. – 572 с.
9. Проектирование металлических конструкций. Специальный курс: учеб. пособие для вузов/ В. В. Бирюлев, И. И. Кошин, И. И. Крылов, А. В. Сильвестров. – Л.: Стройиздат, 1990 – 432 с.
10. Ребров И. С. Усиление стержневых металлических конструкций: Проектирование и расчет / И. С. Ребров. – Л.: Стройиздат. Ленингр. отд-ние, 1988. – 228 с.
11. Elastic design of single-span steel portal frame buildings to Eurocode 3, 2012. – 181 p.

#### References

1. Belsky M.R. Reinforcement of metal structures under load. Kiev: Budivelnik, 1975. – 120 p.
2. Belyaev B.I., Kornienko V.S. Causes of steel structures accidents and ways of their elimination. - Moscow: Stroyizdat, 1968. – 206 p.
3. Val V.N., Gorokhov E.V., Uvarov B.Yu. Reinforcement of steel frameworks of single-storied industrial buildings during their reconstruction. Moscow: Stroiizdat, 1987. – 220 p.
4. Metal structures. In 3 volumes. T.2. Constructions of buildings. Textbook for building universities 3rd ed., Moscow: Higher School, 2004. - 551 p.
5. E.I. Belenya, N.N. Streleckyi, G. S. Vedennikov and etc Metal structures: Spec. course: Textbook for universities.- 3rd ed., Moscow: Stroiizdat, 1991. – 687 p.
6. V.O. Permyakov, O.O. Nilov, O.V. Shimanovsky, I.D. Belov and etc Metal structures: textbook. К .: Publishing house "Steel", 2008. – 812 p.
7. Metal constructions: a textbook for stud. supreme. training. institutions / Yu.I. Kudishin, E.I. Belenya, V.S. Ignatieff and etc.; Ed. Yu.I. Kudishina - Ed. 10, str. - М .: Publishing Center "Academy", 2007. – 687 p.
8. Muhanov K.K. Metal constructions. Textbook for VUZov - 3rd ed., Moscow: Stroiizdat, 1978. – 572 p.
9. V.V. Birulev, I.I. Koshin, I.I. Krylov, A.V. Silvestrov, Design of metal structures. Spec. course. Textbook for universities. Leningrad-Stroiizdat, 1990. – 432 p.
10. Rebrov I.S. Reinforcement of rod metal structures: Design and calculation . L: Stroyizdat. Leningr. Otd., 1988. – 228 p.
11. Elastic design of single-span steel portal frame buildings to Eurocode 3, 2012. – 181 p.



# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 669.01

## ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ СОСТАВНЫХ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Сафронов В. С.<sup>1</sup>, Черников А. В.<sup>2</sup>  
Воронежский государственный технический университет<sup>1,2</sup>  
Россия, г. Воронеж

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики, тел.: +7 (473) 2715230, e-mail: [yss22@mail.ru](mailto:yss22@mail.ru)

<sup>2</sup>Магистрант кафедры строительной механики

Предлагается и апробируется методика деформационного расчета несущей способности изгибаемых составных элементов, выполненных из двух соединенных между собой по длине железобетонных стержней. Предполагается, что один из составляющих конструкцию стержней является сборным, а второй изготавливается в монолитном варианте. При этом возможна несовместность сопротивления действующим нагрузкам составляющих элементов составной конструкции. В расчетах учитываются нелинейные диаграммы деформирования бетона и арматуры сборной и монолитной частей. Предлагаемый расчетный алгоритм, построенный с использованием гипотезы плоских сечений, учитывает поэтапность изменения напряженно-деформированного состояния при объединении элементов составной конструкции. Приводятся результаты численных исследований несущей способности сборно-монолитной конструкции пролетного строения с использованием трех линейной диаграммы деформирования бетона составляющих элементов и двух линейных диаграмм для рабочей арматуры. Дается анализ изменения распределения деформаций и напряжений по высоте поперечного сечения в зависимости от степени совместного деформирования составной конструкции.

**Ключевые слова:** изгибаемая железобетонная сборно-монолитная конструкция, несущая способность, деформационный расчет, нелинейные диаграммы деформирования, гипотеза плоских сечений, влияние несовместности деформирования элементов составной конструкции.

## DEFORMATIVE CALCULATION OF COMPOSITE BENDING REINFORCED CONCRETE ROD ELEMENTS

Safronov V. S.<sup>1</sup>, Chernikov A. V.<sup>2</sup>  
Voronezh State Technical University<sup>1,2</sup>  
Voronezh, Russia

<sup>1</sup>Doctor of Tech. Sc., professor of the department of Structural mechanics

<sup>2</sup>Undergraduater of the department of Structural mechanics

There is suggested and tested the method of updated deformation calculation of bearing capacity of bending composite elements, compounded from two connected with each other reinforced concrete rods. It is supposed that one of the rods composing structure is prefabricated but the other is monolithic. Thus the resistance incompatibility to operating loads of composite construction constituent elements is possible. Nonlinear diagrams of concrete restraint and deformation of prefabricated and monolithic members of reinforcement is considered while calculating. Suggested calculation algorithm made with application of plane section hypothesis considers phasing of deflected mode change during assemblage of prefabricated construction members. The results of numerical calculation of bearing capacity of framework composite construction with use of three linear diagram of concrete restraint compositing elements and two linear diagram for working reinforcement is given. There is also presented the analysis of deformation and tension distribution change with height of cross section in dependence of composite construction mutual deformation.

**Keywords:** bending reinforced concrete composite construction, bearing capacity, deformation calculation, nonlinear diagram, plane section hypothesis, effect of incompatibility of composite structure constituent elements.

© Сафронов В. С., Черников А.В., 2018

## Введение

Современная теория железобетона исходит из представления применяемых в конструкциях с обычной и предварительно напряженной арматурой материалов в виде нелинейно деформируемых сред [1-2]. Применение для расчетов инженерных конструкций аналитических методов является неэффективным, так как требует использования весьма сложных математических представлений, которые приводят к существенным затруднениям при реализации. Поэтому наибольшее внимание в настоящее время уделяется разработке численных расчетных алгоритмов. В настоящее время они используются в большинстве широко применяемых в проектных, а также в научно-исследовательских организациях вычислительных комплексах: SCAD, LIRA, Midas, SAP2000 и др., содержащих блоки расчета железобетонных конструкций на изгиб, внецентренное сжатие и растяжение и т.п.

Широкое распространение в проектной практике для прочностных оценок железобетонных конструкций находят алгоритмы деформационного расчета, при которых можно учитывать физические нелинейности деформирования, отражающие основные особенности силового взаимодействия бетона и арматуры. В частности, деформационные алгоритмы достаточно часто применяются для расчета изгибаемых железобетонных конструкций, так как позволяют использовать существенно упрощающую вычисления гипотезу плоских сечений. В настоящее время известны ряд публикаций, посвященных различным алгоритмам деформационного расчета. Наиболее общим является подход, описанный в работе [3] и реализованный в широко распространенной в РФ вычислительной программе ЕТАР [4]. Другой алгоритм, который нашел применение в расчетах мостовых железобетонных конструкций, описан в работах [5-6]. Применительно к вероятностным исследованиям прочности железобетонных конструкций деформационный алгоритм описан для изгибаемых железобетонных балок в статье [7], а для внецентренно сжатых стержневых элементов – в публикации [8]. В настоящее время требования по использованию нелинейных алгоритмов и рекомендации по их применению для расчетов несущей способности железобетонных изгибаемых и внецентренно сжатых стержневых конструкций включены в действующий нормативный документ СП 63.133.2012 «Железобетонные конструкции».

Общая номенклатура применяемых в строительстве железобетонных конструкций требует совершенствования известных алгоритмов деформационного расчета, которые можно применять для широкого спектра рассматриваемых практических задач. В настоящее время практически нет апробированных алгоритмов деформационного расчета составных железобетонных стержневых конструкций, которые часто используются в строительстве для проектирования ремонтных работ и усиления изношенных несущих элементов [9-12].

В настоящем исследовании предлагается и апробируется методика деформационного расчета несущей способности изгибаемых составных элементов, выполненных из двух соединенных между собой железобетонных стержней. Предполагается, что один из составляющих конструкцию стержней является сборным, а второй стержень выполняется в монолитном варианте. При этом возможна несовместность сопротивления действующим нагрузкам составляющих элементов составной конструкции. В расчетах учитываются нелинейные диаграммы деформирования бетона и арматуры сборной и монолитной частей. Предлагаемый расчетный алгоритм, построенный с использованием гипотезы плоских сечений, учитывает поэтапность изменения напряженно-деформированного состояния при объединении элементов составной конструкции.

### 1. Постановка задачи и основные расчётные положения

Рассматривается составная изгибаемая железобетонная конструкция, выполненная из нижней армированной у нижних и верхних бетонных волокон продольной арматурой части и соединенной с ней верхней части, в которой продольная арматура расположена только вблизи верхней поверхности бетона (рис. 1).

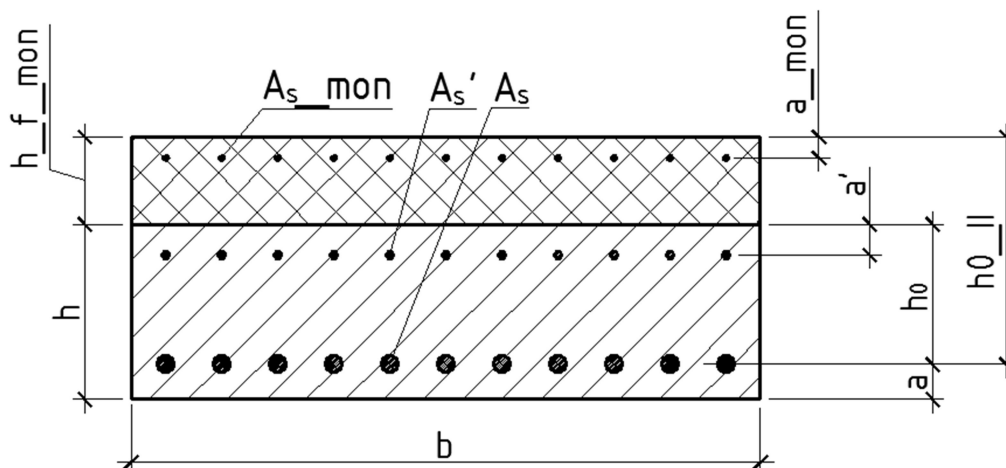


Рис. 1. Поперечное сечение составной сборно-монолитной конструкции

Предполагается, что нижняя часть конструкции выполняется в заводских условиях с доведением прочностных характеристик до проектных показателей заданного класса бетона, а верхняя часть изготавливается в монолитном варианте на строительной площадке. Такая составная конструкция часто применяется в инженерной практике для проведения усиления балочных или плитных железобетонных перекрытий многоэтажных зданий или при поэтапном строительстве железобетонных пролетных строений мостовых сооружений [9-12]. Для проектирования составной конструкции не вводятся ограничения на классы по прочности бетона составляющих элементов конструкции и устанавливаемую в них продольную арматуру.

В зависимости от принятого в проекте способа объединения сборной и монолитной частей составной конструкции и податливости осуществленного соединения возможна несовместность сопротивления действующим нагрузкам элементов составной конструкции. При прочностном расчёте с целью определения несущей способности требуется применение нелинейного вычислительного алгоритма, учитывающего поэтапное изменение конструкции на различных этапах воздействия нагрузок и деформационных параметров соединительного конструкции.

В целях упрощения рассматриваемой задачи будем предполагать, что прочность сопряжения отдельных частей конструкции обеспечена.

Исходя из изложенного описания рассматриваемой составной конструкции, выделим следующие два этапа загрузки:

- **1-й этап**, когда на смонтированную только нижнюю сборную плиту конструкции действуют лишь её собственный вес и давление от незатвердевшей бетонной смеси, уложенная в опалубку с рабочей арматурой верхней плиты. Напряженно-деформированное состояние в волокнах нижней плиты по мере затвердевания бетона считается неизменным;
- **2-й этап**, который начинается после полного затвердевания бетона верхней плиты, а действующие нагрузки могут быть различными и включать постоянные от веса дорожного или полового покрытия и временные от полезной нагрузки на перекрытие и подвижные от проезжающего транспорта.

Введем следующие допущения для построения вычислительного алгоритма деформационного расчета составной конструкции:

- относительные деформации бетона и арматуры по высоте сечения элемента на каждом этапе загрузки распределяются в соответствии с гипотезой плоских сечений по линейному закону. При этом полные деформации в волокнах нижней части сечения на 2-м этапе загрузки суммируются с деформациями, появившимися в конце 1-го этапа загрузки;
- зависимости между напряжениями и относительными деформациями бетона и арматуры принимаются нелинейными. Ограничения на диаграммы деформирования не вводятся;
- сопротивление бетона и ползучесть в растянутых волокнах составного сечения не учитываются;
- скачок деформации в волокне на границе нижней и верхней частей составного сечения зависит от степени совместного сопротивления сборной и монолитной частей. Её величину бу-

дем в расчетах варьировать коэффициентом совместного сопротивления  $K_c$ , задавать в диапазоне от  $K_c=0$  (полное разделение частей конструкции) до  $K_c=1$  (полное объединение).

## 2. Алгоритм деформационного расчета составной конструкции без учета несовместности сопротивления действующим нагрузкам

В соответствии с принятыми допущениями о деформировании составной конструкции на различных этапах нагружения расчетные эпюры деформаций по высоте могут отличаться в зависимости от положения границы сжатой зоны второго этапа нагружения.

Варианты графического представления, которые требуют различных математических описаний эпюр деформаций, показаны на рис. 2. По **первому** варианту, когда граница сжатой зоны второго этапа нагружения проходит ниже сжатой зоны сборной плиты, функция, описывающая деформацию сборно-монолитной конструкции, является кусочно-линейной (рис. 2, а), с тремя интервалами (*I, II, III*). Во **втором** случае, при котором граница сжатой зоны второго этапа нагружения проходит в сжатой зоне сборной плиты (рис. 2, б), также имеют место три различных кусочно-линейных интервала (*I, II, III*) изменения деформаций. Их положение описывается другими соответствующими линейными выражениями. По **третьему** расчетному варианту, представленному на рис. 2, в, граница сжатой зоны второго этапа нагружения проходит в монолитной накладной плите. Здесь также имеются три интервала с другими границами (*I, II, III*).

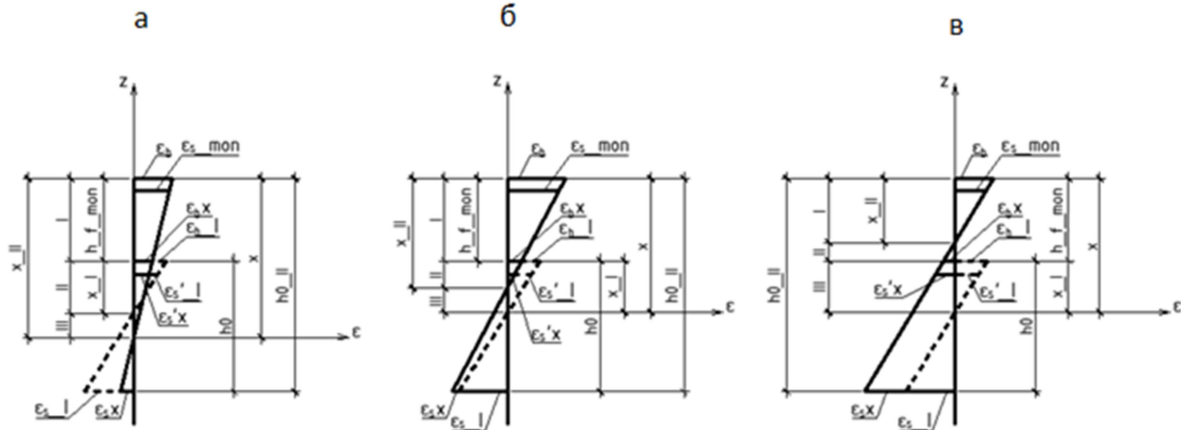


Рис. 2. Варианты представления эпюр деформаций при деформационных расчетах составной конструкции с учётом этапности нагружения

Наиболее простой алгоритм деформационного расчета можно построить при отсутствии несовместного сопротивления сборной и монолитной частей составной конструкции или раздельном восприятии этими частями действующих на каждом из двух этапов нагрузок. При этом для составной конструкции выполняется интегрирование по высоте поперечного сечения, используя данные о распределении деформаций в бетонной части конструкции и арматуре. В общем виде разрешающие расчетные уравнения, которые отвечают двум уравнениям проекций на ось стержня и моментов внутренних сил относительно поперечной оси, имеют вид:

$$b \int_0^h \sigma_b(z) dz + \sum_1^3 \sigma_{si} A_i = 0; \quad (1)$$

$$b \int_0^h \sigma_b(z) z dz + \sum_1^3 \sigma_{si} z_i A_i = 0. \quad (2)$$

В приведенных уравнениях неизвестными являются координата нейтрального слоя  $z_0$  и максимальная деформация верхнего волокна рассматриваемого поперечного сечения  $\varepsilon_{b,max}$ . По этим величинам из математических соотношений, связывающих независимые переменные с максимальными деформациями в различных волокнах по высоте, можно получить условия для остановки вычислений при определении несущей способности конструкции. Они имеют смысл достижения максимальными деформациями в в бетоне  $\varepsilon_{b,max}$  или арматуре  $\varepsilon_{s,max}$  предельных допустимых величин:

- деформация крайнего волокна сжатой зоны бетона;

$$\varepsilon_{b.max} = \varepsilon_{b.ult};$$

- деформация волокна сжатой (если она является сжатой) зоны бетона в месте сопряжения сборной и монолитной накладной плиты усиления;

$$\varepsilon_{bl.max} = \varepsilon_{b.ult};$$

- деформация нижней (растянутой) арматуры сборной плиты;

$$\varepsilon_{s.max} = \varepsilon_{s.ult};$$

- деформация верхней (сжатой или растянутой) арматуры сборной плиты;

$$\varepsilon_{s'.max} = \varepsilon_{s.ult};$$

- деформация арматуры (сжатой или растянутой) монолитной накладной плиты усиления;

$$\varepsilon_{s\_mon.max} = \varepsilon_{s.ult}.$$

### 3. Алгоритм деформационного расчета составной конструкции с учетом несовместности сопротивления действующим нагрузкам

Рассмотрим два варианта расчета:

- приближенный, который предложен нами в работе [13];
- уточненный, основные положения которого приводятся ниже.

При построении **приближенного** алгоритма выполняется два нелинейных деформационных расчета несущей способности сборно-монолитной конструкции в предположении полного совместного и полного несовместного сопротивления. Для случая несовместного сопротивления несущая способность при заданном коэффициенте совместного сопротивления  $K_c$  несущая способность определяется по линейной интерполяции. Недостатком предложенного алгоритма является невозможность подробного описания напряженно деформированного состояния для промежуточных значений коэффициента совместного сопротивления. Этот недостаток отсутствует в предлагаемой здесь методике уточненного расчета.

В соответствии с разработанной схемой **уточненного** алгоритма строится эпюра перераспределения деформаций по высоте поперечного сечения  $\Delta \varepsilon_{full}$ , которая представляет разницу между эпюрами деформаций при полностью совместном  $\varepsilon_{int}$  и полностью несовместном сопротивлении  $\varepsilon_{dis}$  составляющих сборно-монолитной конструкции (рис.3). При различных коэффициентах совместного сопротивления  $K_c$ , выраженных в относительных величинах или в процентах эти эпюры будут различными. Они показаны на крайнем правом графике на рис 3.

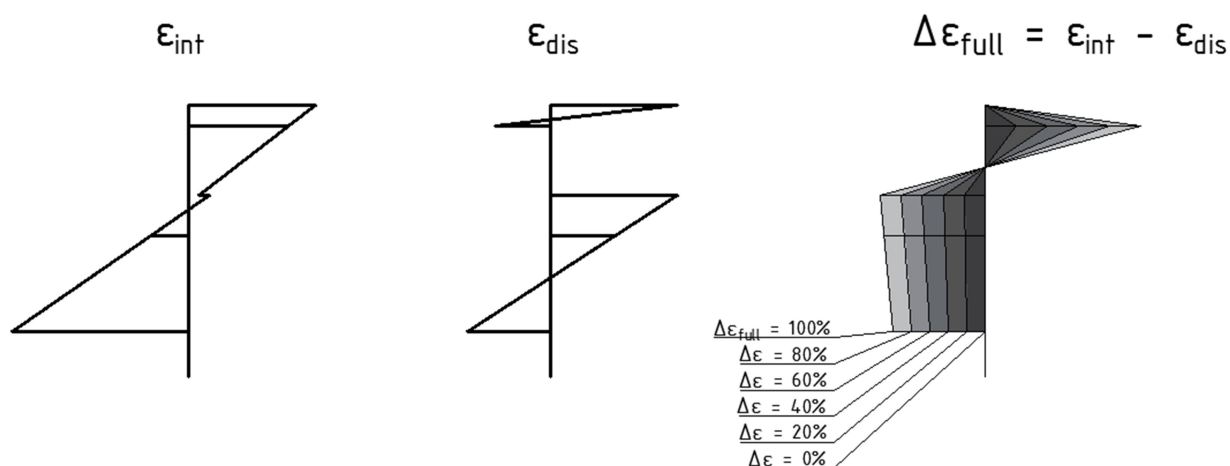


Рис. 3. Формирование эпюры перераспределения деформаций

Последовательность вычислений при двух этапном рассмотрении составной сборно-монолитной железобетонной конструкции с учетом степени совместного сопротивления сборной и монолитной частей поперечного сечения показана на рис .4, где введены следующие обозначения:

- а – эпюра деформаций от первого этапа нагружения;
- б – эпюра деформаций на втором этапе нагружения без учета деформаций на первом этапе;
- в – итоговая эпюра деформаций сборно-монолитного сечения при  $K_c = 1,0$ ;
- г – эпюра перераспределения деформаций для заданного значения коэффициента совместного сопротивления  $K_c$ , полученная по формуле:

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_{full} * (1 - k_c). \quad (3)$$

- д – итоговая эпюра деформаций сборно-монолитного сечения составной конструкции с учётом деформации первого этапа нагружения и степени совместного сопротивления сборной и монолитной частей сечения.

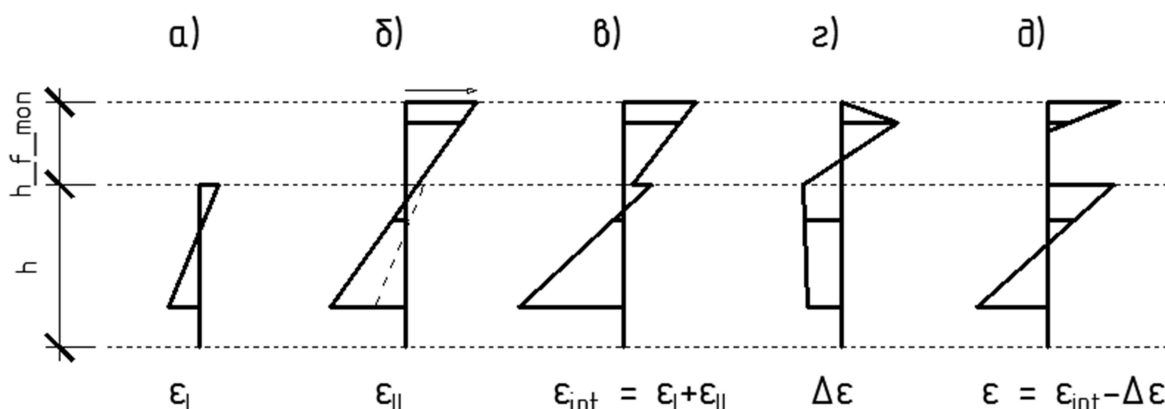


Рис. 4. Последовательность вычислений при уточненном деформационном расчете сборно-монолитной железобетонной конструкции

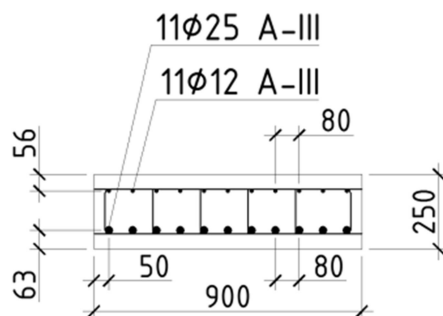
После построения эпюры деформаций с использованием принятых расчетных нелинейных диаграмм деформирования бетона и арматуры строятся распределения напряжений по высоте поперечного сечения, которые используются для расчета предельных изгибающих моментов, оценивающих несущую способность сборно-монолитной конструкции.

#### 4. Аprobация предложенного вычислительного алгоритма на примере составной сборно-монолитной железобетонной конструкции

Описанная выше методика уточненного расчета несущей способности сборно-монолитной конструкции реализована в программе на языке вычислительного комплекса Mathcad.

Аprobация программы выполнена на примере сборно-монолитно плитного пролетного строения автодорожного моста, рассмотренного в статье [13]. На реальном объекте конструкция пролетного строения выполнена составной из сборных железобетонных плит, сверху которых устроена монолитная железобетонная плита толщиной 15 см.. Прочностные и деформационные параметры бетона сборной и монолитной плиты приняты одинаковыми в соответствии классом по прочности В30. Опалубочные размеры и армирование сборной железобетонной плиты приведены на рис. 5. При проведении деформационных расчетов принимались для бетона трех линейные диаграммы деформирования для параметров класса В30, для арматуры – двух линейные диаграммы деформирования для параметров класса А400.

## Армирование сборной плиты



**Рис. 5.** Опалубочные размеры и армирование сборной железобетонной плиты

При проведении численных исследований несущей способности варьировалась степень совместности сопротивления действующим нагрузкам составной сборно-монолитной плиты. Результаты численных исследований влияния степени совместности на распределение по высоте сечения при предельном состоянии плиты путем сопоставления деформаций в характерных волокнах сборно-монолитной конструкции при различных уровнях совместного сопротивления представлены в табл. 1.

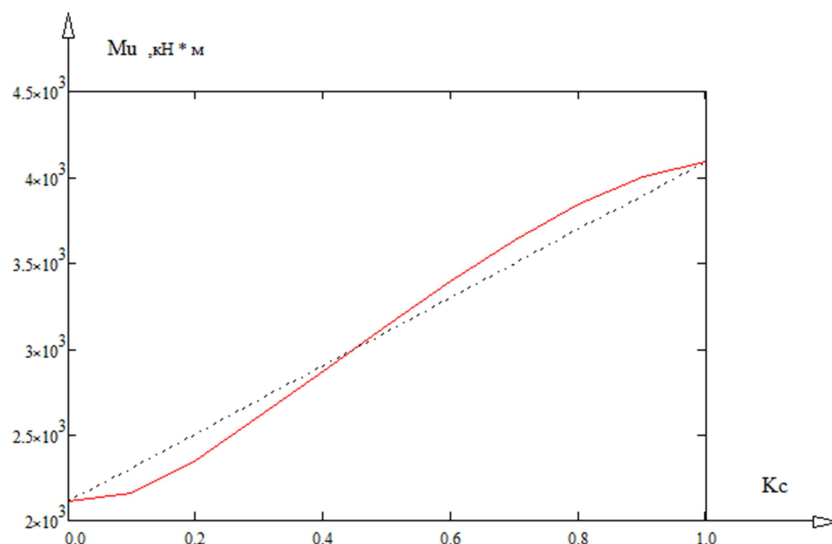
Таблица 1

Сопоставление деформаций в характерных волокнах сборно-монолитной конструкции при различных уровнях совместного сопротивления

Степень совместного сопротивления, %	Деформация $\times 10^3$				
	Сборная плита			Монолитная плита	
	Крайнее сжатое волокно бетона	Верхняя арматура	Нижняя арматура	Крайнее сжатое волокно бетона	Арматура
0	3,50	1,77	2,31	3,50	-1,55
10	3,21	1,49	2,56	3,50	0,26
20	2,92	1,21	2,82	3,50	1,11
30	2,63	0,92	3,07	3,50	1,61
40	2,33	0,64	3,33	3,50	1,94
50	2,04	0,36	3,58	3,50	2,17
60	1,75	0,08	3,84	3,50	2,34
70	1,46	-0,20	4,09	3,50	2,47
80	1,17	-0,48	4,35	3,50	2,57
90	0,88	-0,76	4,60	3,50	2,66
100	0,58	-1,04	4,86	3,50	2,73

Из анализа представленных в табл. 1 расчетных данных следует, что для размеров и параметров армирования рассматриваемой сборно-монолитной конструкции предельное состояние возникает при достижении крайним сжатым волокном монолитной накладной плиты предельного значения для принятого класса бетона независимо от степени совместности сопротивления нагрузкам сборной и монолитной частей конструкции.

Зависимость несущей способности сборно-монолитной железобетонной плиты от степени совместности сопротивления нагрузкам отдельных частей конструкции выполнена по приближенной и уточненной методикам деформационного расчета. На рис. 6 график уточненного расчета представлен сплошной линией, а приближенного – показанной точками прямой линии.



**Рис. 6.** Графики зависимости несущей способности от степени совместного сопротивления нагрузкам частей составной железобетонной плиты

Из этого рисунка видно, что отклонение приближенных значений несущей способности сборно-монолитной плиты от уточненных составляет от 3 до 5 %. Отметим, что при приближении степени совместности сопротивления к объединению частей конструкции приближенная оценка несущей способности выше уточненной.

Выше было отмечено, что использование уточненной методики деформационного расчета позволяет анализировать распределение деформаций и напряжений по высоте составного сечения в зависимости от степени совместного сопротивления частей конструкции. Такие исследования представлены для рассматриваемой конструкции в табл. 2. Из сопоставления распределений напряжений по высоте поперечного сечения видно, что при варьировании степени совместности сопротивления отдельных частей конструкции действующим нагрузкам изменяется нагруженность отдельных частей. Полученные данные позволяют по экспериментальным измерениям деформаций характерных волокон конструкции оценивать фактическую степень совместности объединения элементов составной конструкции.

Таблица 2

Расчетные эпюры распределения деформаций и напряжений для различных значений степени совместности сопротивления частей сборно-монолитной плиты

Степень совместности, %	Эпюра деформаций	Эпюра напряжений
0	<p>Эпюра деформаций для степени совместности 0%. Показывает линейное распределение деформаций по высоте сечения. Максимальные деформации достигают <math>4 \times 10^{-3}</math> на уровне <math>0.2 \times 10^3</math> мм, минимальные — <math>-4 \times 10^{-3}</math> на уровне <math>-0.2 \times 10^3</math> мм.</p>	<p>Эпюра напряжений для степени совместности 0%. Показывает распределение напряжений по высоте сечения. Максимальные напряжения достигают <math>2 \times 10^4</math> на уровне <math>0.2 \times 10^3</math> мм, минимальные — <math>-2 \times 10^4</math> на уровне <math>-0.2 \times 10^3</math> мм.</p>



Степень с совместности, %	Эпюра деформаций	Эпюра напряжений
20		
30		
40		
50		

Степень с совместности, %	Эпюра деформаций	Эпюра напряжений
60		
70		
80		
90		
100		

## Выводы

- Предложенная в настоящей статье уточненная методика расчета несущей способности составной сборно-монолитной железобетонной конструкции апробирована путем сопоставления с результатами расчетов по ранее разработанному приближенному алгоритму. Она показала свою эффективность для применяемых в мостостроении конструкций.
- По результатам численных расчетов на примере реальной мостовой составной железобетонной плиты предельное состояние возникает при достижении крайним сжатым волокном монолитной накладной плиты предельного значения для принятого класса бетона независимо от степени совместности сопротивления нагрузкам сборной и монолитной частей конструкции.
- Использование в инженерной практике разработанной уточненной методики деформационного расчета позволяет анализировать распределение деформаций и напряжений по высоте составного сечения в зависимости от степени совместного сопротивления частей конструкции

## Библиографический список

1. Байков В. Н. Железобетонные конструкции//В. Н. Байков. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.
2. Бондаренко В. М. Расчетные модели силового сопротивления железобетона: // В. М. Бондаренко. – М.: АСВ, 2004. – 472 с.
3. Петреня Е. Н. Алгоритм нелинейного расчета поперечных сечений железобетонных конструкций с учетом дефектов и элементов усиления / Е. Н. Петреня, А. А. Петранин, М. В. Косенко // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. – Воронеж: Изд-во ВГАСА, 2000. – С. 18–31.
4. Петранин А. А. Поэтапный расчет железобетонных плитно-балочных конструкций с учетом нелинейных свойств материалов / А. А. Петранин, Е. Н. Петреня // Современные методы статического и динамического расчета сооружений и конструкций. – Воронеж: Изд-во ВГАСА, 2002. – С. 17–23
5. Шапиро Д. М. Деформационный нелинейный расчёт железобетонных балок таврового сечения / Д. М. Шапиро, А. В. Агарков // Научный вестник «Строительство и архитектура», №1. – ВГАСУ, 2008. – С. 27–33.
6. Сафронов В. С. Влияние деформационных характеристик песчаной засыпки на напряженно-деформированное состояние грунтозасыпных мостов// В. С. Сафронов, В. В. Зазвонов// Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2010. - Вып.1. - С. 18-22.
7. Сафронов В. С. Расчет несущей способности внецентренно сжатого стержня из железобетона с использованием деформационной модели// В. С. Сафронов, Катембо А. Л.. Строительная механика и конструкции. 2016, Вып.1(12), С. 64-74
8. Сафронов В.С. Расчетный анализ работоспособности и живучести железобетонных пролетных строений автодорожных мостов. // В.С. Сафронов., А. А. Петранин, Е. Н. Петреня, М. В. Косенко// Дороги и мосты» - 2006. - №16. - С 178-18.
9. Сафронов В. С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок / В. С. Сафронов, Нгуен Динь Хоа // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Сер. Строительство и архитектура. – Воронеж, 2010. – Вып. 1. – С. 157–166.
10. Сафронов В. С. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой// В. С. Сафронов, Е. Н. Петреня, А. А. Петранин, С. Д. Степанов// Известия вузов. Строительство. - 1998. - №11-12. – С. 31-35.
11. Сафронов В. С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных мостов, имеющих дефекты и повреждения// В. С.Сафронов, А. А. Петранин, Е. Н. Петреня// Изв. вузов. Строительство. – 1996. - № 6.- С. 103-109.
12. Сафронов В. С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок//В. С.Сафронов, Нгуен Динь Хоа//Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. - 2010 - №1(17). - С 152-166.

13. Сафронов В. С. Надежность усиленного накладной плитой плитного пролетного строения автодорожного моста// В. С. Сафронов, А. В. Черников, А. В. Антипов, Н. В. Сафронов, А. С. Суханов// Строительная механика и конструкции. - 2017. - Вып. 2(15). - С. 85-95.

### References

1. Baikov V.N. Reinforced concrete structure. – M.: Stroiizdat, 1991. – 767 p.
2. Bondarenko V.M. Calculation models of reinforced concrete. – M.: ASV, 2004. – 472 p.
3. Petrenya E. N., Petranin E.N., Kosenko M.V. Mutual method of static and dynamic calculation of constructions and structures. Voronezh. Pub. House of VGASA. – P. 18–31.
4. Petranin E.N., Petrenya E. N. Phasing calculation of reinforced concrete plate and beam construction with account of nonlinear material properties. Modern methods of static and dynamic calculation of structures and constructions. Voronezh. Pub. House of VGASA, 2002. – p. 17–23
5. Shapiro D.M., Agarkov A.V., Deformation nonlinear calculation of reinforced concrete beams of T-shaped section. Scientific bulletin “Construction and Architecture”, No 1. – VGASU, 2008. – P. 27–33.
6. Safronov V.S., Zazvonov V.V. Influence of deformation characteristics of sand filling on ground fill bridges deflected mode. Structural mechanics and constructions. – Voronezh, 2010. - Issue.1. - P. 18-22.
7. Safronov V.S., Katembo A.L. Calculation of bearing capacity of eccentrically compressed rod from reinforced concrete with application of deformation model. Structural mechanics and constructions. 2016, Issue.1(12), P. 64-74
8. Safronov V.S., Petrenya E.N., Kosenko M.V. Calculation analysis of workability and durability of reinforced concrete bridge spans. Roads and bridges. - 2006. - №16. – P. 178-18.
9. Safronov V.S., Nguen Ding Khoa. Probabilistic assessment the risk appearance of limiting state in bending reinforced concrete beam sections. Scientific bulletin of VGASU. Serial “Construction and Architecture”. Boronezh 2010. – Issue. 1. – P. 157–166.
10. Safronov V.S., Petrenya E.N., Petranin A.A, Stepanov S.D. Algorithm of under reconstruction plate beam structure reinforced with laid on plate. Universities news. Construction. - 1998. - No11-12. – P. 31-35.
11. Safronov V.S., Petrenya E.N., Petranin A.A. Super elemental calculation in mixed place of reinforced concrete bridges having defects and damages. Universities news Construction 1996. – No 6.- P. 103-109.
12. Safronov V.S., Nguen Ding Khoa. Probabilistic assessment of the risk appearance of limiting state in bending reinforced concrete beam sections. Scientific bulletin of VGASU. Construction and Architecture. - 2010 – No 1(17). – P. 152-166.
13. Safronov V.S., Chernikov A.V., Antipov A.V., Safronov N.V., Sukhanov A.S.. Reability of reinforced with laid on plate of bridge plate. Structural Mechanics and structures, 2017. - Issue. 2(15). - P. 85-95.

## ВЛИЯНИЕ ФИБРОВОГО АРМИРОВАНИЯ НА ПОЯВЛЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТРЕЩИН В БАЛКАХ

Ю. Б. Потапов<sup>1</sup>, А. Э. Поликутин<sup>2</sup>, А. В. Левченко<sup>3</sup>, Н. Ф. Зуй<sup>4</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3</sup>  
Россия, г. Воронеж  
Университет гражданского строительства Миен-Трунг<sup>4</sup>  
Вьетнам

---

<sup>1</sup>Д-р техн. наук, проф. кафедры строительных конструкций оснований и фундаментов им. проф. Ю.М. Борисова

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доц. кафедры строительных конструкций оснований и фундаментов им. проф. Ю.М. Борисова

<sup>3</sup>Аспирант кафедры строительных конструкций оснований и фундаментов им. проф. Ю.М. Борисова,  
тел.: +7(920)228-01-08; e-mail: Alevchenko@vgasu.vrn.ru

<sup>4</sup>Канд. техн. наук, заместитель декана строительного факультета

---

Для изучения механики образования и развития нормальных трещин армированных каутоновых изгибаемых элементов с фиброй и без нее были изготовлены и испытаны балки прямоугольного сечения. В статье изложены результаты исследования поведения нормальных трещин, возникающих в полимербетонных балках на основе каутона с дисперсным армированием по всей высоте сечения, только в растянутой зоне и в балках без дисперсного армирования. Представлены значения изгибающего момента, при котором происходило появление трещин, параметры образовавшихся трещин. Установлено, что фибровое армирование увеличивает трещиностойкость фиброкаутоновых балок. Проведен анализ влияния дисперсного армирования на количество, ширину и высоту трещин. На основе анализа результатов проведенных экспериментальных исследований изгибаемых элементов рекомендуется применять фиброкаутоновые балки с дисперсным армированием по всему объему.

**Ключевые слова:** каутон, фибра, фиброкаутон, балка, нормальные сечения, прямоугольное сечение, трещиностойкость.

## FIBRE REINFORCEMENT EFFECT ON CRACKS APPEARANCE AND DEVELOPMENT IN BEAMS

Yu. B. Potapov<sup>1</sup>, A. E. Polikutin<sup>2</sup>, A. V. Levchenko<sup>3</sup>, N. P. Duy<sup>4</sup>

Voronezh state technical university<sup>1,2,3</sup>  
Voronezh, Russia  
MienTrung University of Civil Engineering<sup>4</sup>  
Vietnam

---

<sup>1</sup>PhD of tech. sc., professor of the department of building structures, bases and foundations named after prof. Yu. M. Borisov

<sup>2</sup>PhD of tech. sc., associate professor of the department of building structures, bases and foundations named after prof. Yu. M. Borisov<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Postgraduate of the department of building structures, bases and foundations named after prof. Yu. M. Borisov<sup>3</sup>  
tel.: +7(920)228-01-08 e-mail: Alevchenko@vgasu.vrn.ru

<sup>4</sup>PhD of tech. sc., vice- dean of construction faculty

---

To study the mechanics of appearance and development of typical cracks of reinforcement cauton bending elements with fiber and without it there were made and tested beams of rectangular sections. There are given results of investigation o typical cracks appeared in polymer-concrete beams based on cauton with dispersed reinforcement along the whole section height only in expended zone and in beams without dispersed reinforcement. Bending moment values at which there is cracks appearance and the formed cracks parameters are presented. It was determined that fiber reinforcement increases cracks resistance of fiber cauton beams. There was conducted the analysis of dispersed reinforce-

ment influence on cracks amount, width and height. Based on the analysis results of bending elements investigation it is recommended to apply fiber cauton beams with dispersed reinforcement throughout the volume.

**Keywords:** cauton, fiber, fiber cauton, beam, typical section, rectangular section, crack resistance.

Применение конструкций на основе полимербетонов наиболее эффективно в зданиях и сооружениях, эксплуатирующихся в условиях действия агрессивных сред различной природы. Важным фактором для обеспечения нормальной эксплуатации таких конструкций является предотвращение проникновения агрессивной среды вглубь сечения и воздействия на стальную арматуру. Одним из путей решения такой проблемы является применение материала с повышенными прочностными характеристиками, в частности высокой прочностью на растяжение.

В качестве такого материала предлагается использовать полимербетон на основе жидкого каучука. Один из способов повышения показателя трещиностойкости каучукового бетона — фибровое армирование, расположенное хаотично по всему объему. Получаемый таким образом композиционный материал получил название «фиброкаутон».

Исследование свойств фиброкаутона, а также определение оптимального состава смеси было проведено авторами работ [1-3]. Исследование свойств каутона, а также определением оптимального состава смеси занимались авторы [4, 5], также было изучено влияние радиации на этот материал [6]. Изучением конструкций, изготовленных из него, занимались исследователи [7-13]. Результаты исследования изгибаемых элементов из каутона приведены в работах [7, 15], также в развитие этой темы были проведены испытания двухслойных балок, содержащих в сжатой зоне бетон, а в растянутой – каутон [8-11]. Предпосылки для изучения фиброкаутонных изгибаемых конструкций представлены в работе [12]. Кроме того, исследователи занимались изучением изгибаемых элементов с применением полимерцементной защиты [13, 14]. Одной из положительных характеристик каутона является высокая адгезия к поверхностям различного вида, наиболее высокая величина адгезии со сталью (12...13 МПа). Это подтверждает целесообразность выбора стальной фибры. Известны способы нетрадиционного армирования изгибаемых конструкций, в частности углепластиковыми лентами [16, 17], введением стальной фибры в состав обычных бетонов занимались исследователи [18, 19]. Вопросами влияния мелкодисперсного наполнителя, а именно золы уноса из отходов тепловых электростанций, занимались исследователи полиэфирного бетона [20]. Однако, несмотря на наличие проведенных исследований каутон и, в частности, фиброкаутон, данный материал еще недостаточно изучен для массового применения его в строительных конструкциях. В связи с этим целью исследований, результаты которых приведены в данной статье, является изучение влияния дисперсного армирования на образование и развитие трещин.

Для изучения механики образования и развития нормальных трещин в каутонных и в фиброкаутонных изгибаемых элементах были изготовлены и испытаны балки прямоугольного сечения с продольным армированием. Для определения возможности применения изгибаемых элементов без стержневого армирования были изготовлены элементы с процентом продольного стержневого армирования, равным нулю. Параметры экспериментальных балок приведены в табл. 1.

Параметры экспериментальных балок

Длина балки, мм	1400
Ширина балки, мм	60
Высота балки, мм	120
Количество и диаметр стержней продольной арматуры, мм	0; 1Ø8; 1Ø10; 1Ø12; 2Ø10; 2Ø12
Процент продольного армирования (без учета фибрового), %	0; 0,8; 1,25; 1,8; 2,5; 3,6
Армирование сжатой зоны	Отсутствует
Поперечное армирование	В зоне действия поперечных сил – Вр-1 Ø5 мм, шаг 50мм. В зоне чистого изгиба – отсутствует

Основываясь на исследованиях прочностных характеристик фиброкаутона, автор работы [2] установил, что оптимальным процентом армирования стальной фиброй, с точки зрения технологии изготовления и благоприятных физико-механических характеристик, является 2% от объема элемента. Следует отметить, что фибра располагается не ориентированно, т.е. хаотично. Это обусловлено тем, что микротрещины могут образовываться не только в плоскости действия изгибающего момента. К тому же применение средств направления расположения стальной фибры будет усложнять и удорожать процесс изготовления конструкции.

Схемы испытания экспериментальных балок, расположения арматуры и тензодатчиков для определения изгибающего момента перед появлением трещины приведены на рис. 1. Тензодатчик (тензометрический датчик) служит для преобразования величины деформации в сигнал, воспринимаемый тензоинтерфейсом.

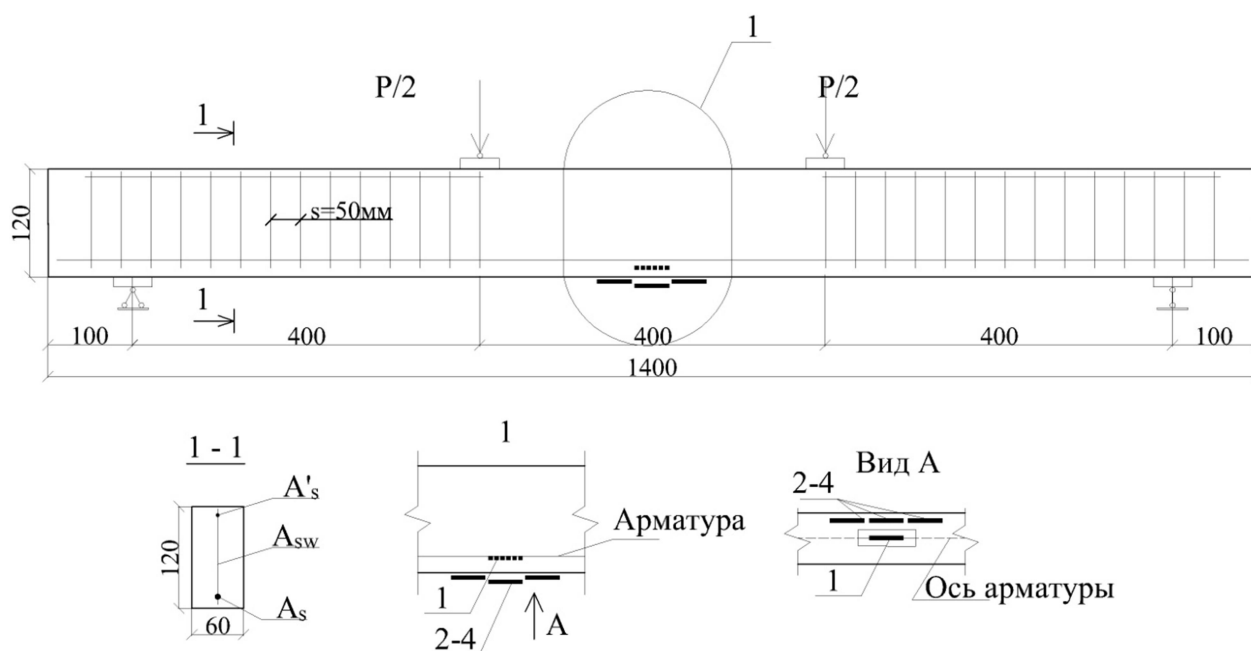


Рис. 1. Схемы испытания, расположения тензодатчиков

Для измерения деформаций арматуры на ее поверхность клеили тензодатчик №1. Тензодатчики №2-4, наклеенные на поверхность балки, предназначены для измерения деформаций в момент появления первой трещины. Для определения прогибов в середине пролета был установлен электронный прогибомер, однако в рамках приводимых в этой статье результатов исследований нас интересовали только данные с тензодатчиков №1-4.

Испытания 4-х серий балок - каутоновых (шифр балок БПК), фиброкаутоновых с расположением фибры по всему объему (шифр балок БПФ) и слоистых каутон-фиброкаутон с расположением фибры в растянутой зоне (шифр балок БПКФ) - были получены данные по образованию и распределению трещин под нагрузкой, которые сведены в табл. 2, 3.

Таблица 2

## Изгибающий момент трещинообразования.

Шифр балки	Процент продольного армирования	$M_{сгс}$ , кН*м	$R_k$ , МПа	$R_{kt}$ , МПа
БПФ - 0	0	2,616	87,5	13,8
БПФ - 8	0,8	2,28	85	10,6
БПФ - 12	1,8	2,476	84	9,5
БПФ - 2x12	3,6	2,478	84	9,5
БПК - 0	0	2,1	85	10,6
БПК - 8	0,8	1,44	87,5	13,0
БПК - 12	1,8	1,45	80	9
БПК - 2x12	3,6	1,84	81	10,2
БПКФ - 0	0	2,38	81	10,2
БПКФ - 8	0,8	2,35	80	10,5
БПКФ - 12	1,8	2,22	75	9
БПКФ - 2x12	3,6	2,47	79	10,5

Примечания:  
 $M_{сгс}$  – изгибающий момент при образовании первой трещины.  
 $R_k$  – нормативное сопротивление материала балки (каутона или фиброкаутона) на сжатие.  
 $R_{kt}$  – нормативное сопротивление материала балки (каутона или фиброкаутона) на растяжение.

Таблица 3

## Параметры образовавшихся трещин

Шифр балки	Максимальная ширина раскрытия $a_{сгс}^{max}$ , мм	Шаг трещин $l_{сгс}$ , см	Высота трещины (от крайнего растянутого волокна балки до вершины трещины) $h_{сгс}$ , см
БПФ - 8	1,51	1 трещина	85
БПФ - 12	2,02	24	80
БПФ - 2x12	1,18	6	60
БПК - 8	1,51	1 трещина	90
БПК - 12	1,60	18	75
БПК - 2x12	1,00	7	60
БПКФ - 8	1,79	1 трещина	80
БПКФ - 12	2,01	22	67
БПКФ - 2x12	1,48	6,5	64

Примечание:  
Максимальная ширина раскрытия трещины определялась в момент достижения напряжений в арматуре предела текучести и измерялась микрометром, для дублирующего измерения – набором поверенных щупов.

Данные, приведенные в табл. 2, позволяют сделать вывод о том, что значение изгибающего момента трещинообразования в фиброкаутоновых балках постоянно, а в каутоновых с увеличением процента армирования возрастает незначительно, при этом дисперсное армирование стальной фиброй увеличивает этот показатель в 1,6 раза

Из табл. 3 видно, что максимальная ширина раскрытия трещины увеличивается с добавлением фибрового армирования, при этом ширина раскрытия трещин в балках с фиброй только в растянутой зоне и в балках с фиброй по всей высоте сечения имеют схожий показатель. Количество трещин с увеличением процента продольного армирования возрастает, а шаг трещин, соответственно, уменьшается. Влияние фибрового армирования на высоту раскрытия трещины с увеличением продольного стержневого армирования уменьшается.

График зависимости максимальной ширины раскрытия трещин от процента продольного армирования приведен на рис. 2.



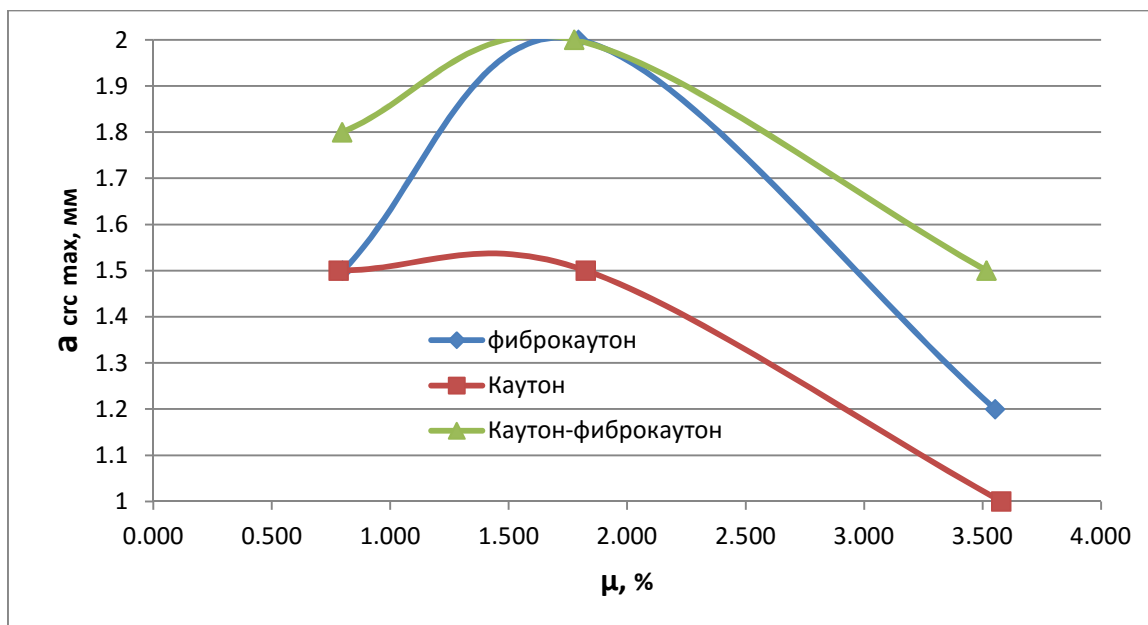


Рис. 2. Зависимость ширины раскрытия трещин от процента продольного армирования

Рис. 2 показывает, что наибольшая ширина раскрытия трещин находится в середине выбранного варьируемого параметра, а именно значения процента продольного армирования, равного 1,8%. Разница в значениях ширины раскрытия трещины обусловлена тем, что из-за добавления дисперсного армирования при образовании трещины волокна металлокорда более интенсивно включаются в работу и тем самым повышают деформативность растянутой зоны.

Зависимость высоты развития трещины каутоновых, фиброкаутоновых и слоистых балок от процента продольного стержневого армирования приведена на рис. 3

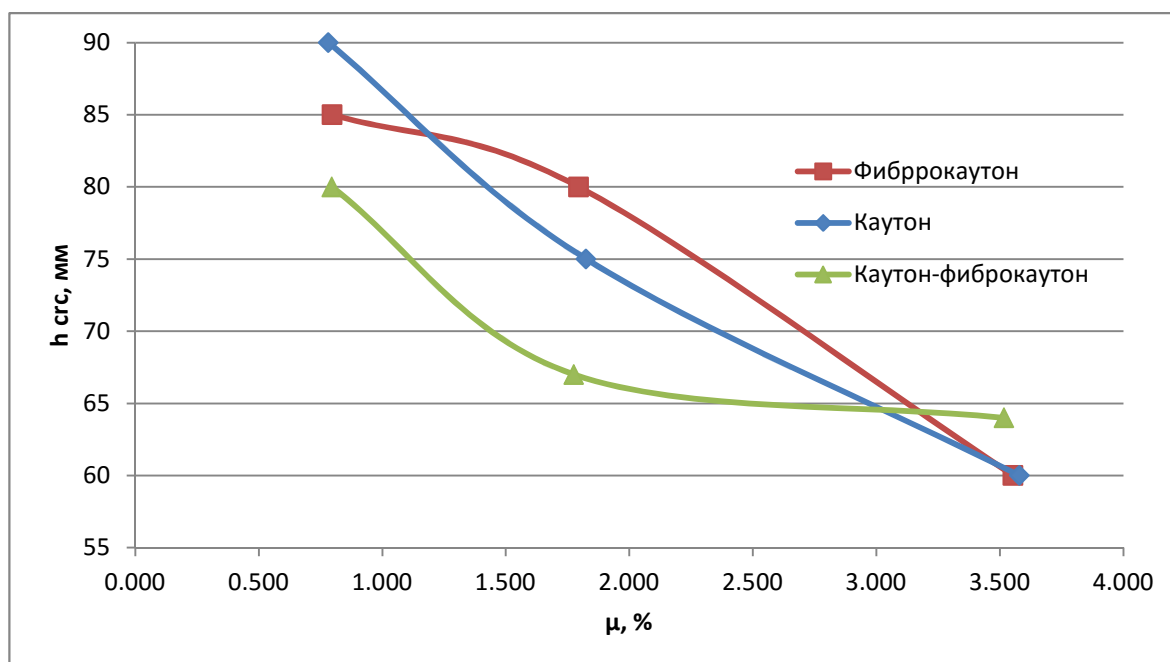


Рис. 3. Зависимость высоты развития трещины от процента продольного армирования

Из рис. 3 видно, что высота раскрытия трещин в балках с продольным армированием уменьшается с увеличением процента армирования.

Зависимость количества трещин в каутоновых, фиброкаутоновых и слоистых балках от процента продольного армирования приведена на рис. 4.

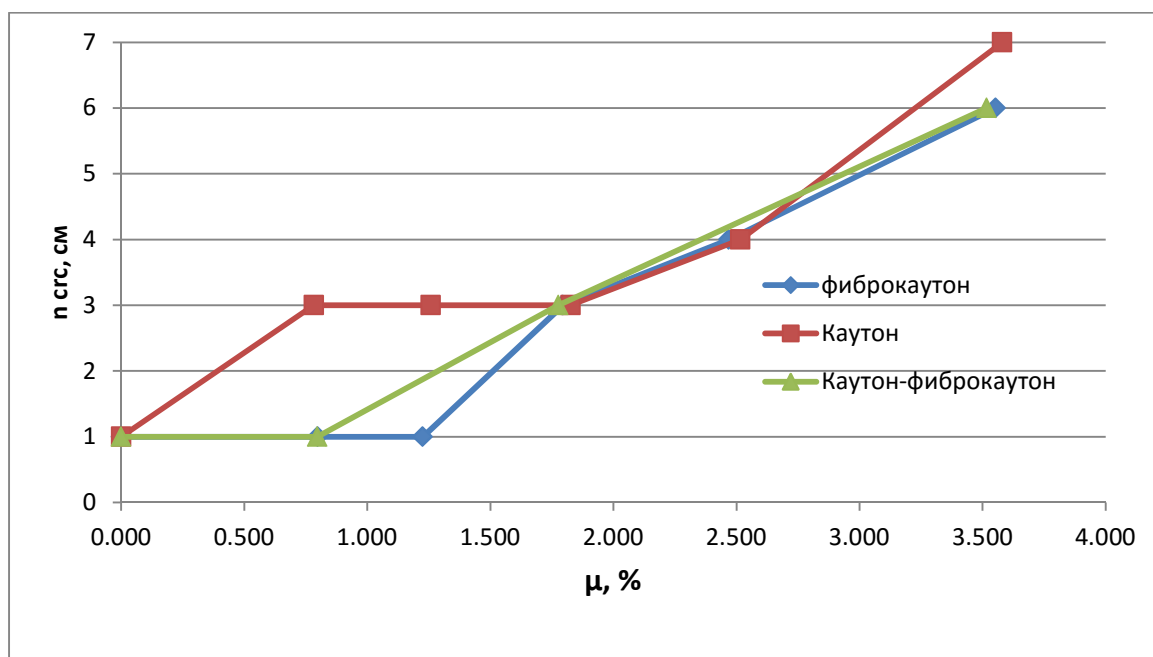


Рис. 4. Зависимость количества трещин от процента продольного армирования

Рис. 4 показывает, что с увеличением процента продольного армирования происходит увеличение количества трещин, при этом добавление фибры в большей степени влияет на число трещин, а следовательно, и на их шаг в границах вирируемого параметра от 0 до 1,8 %.

Зависимость относительного уровня трещиностойкости материала конструкции от процента продольного армирования приведена на рис. 5.

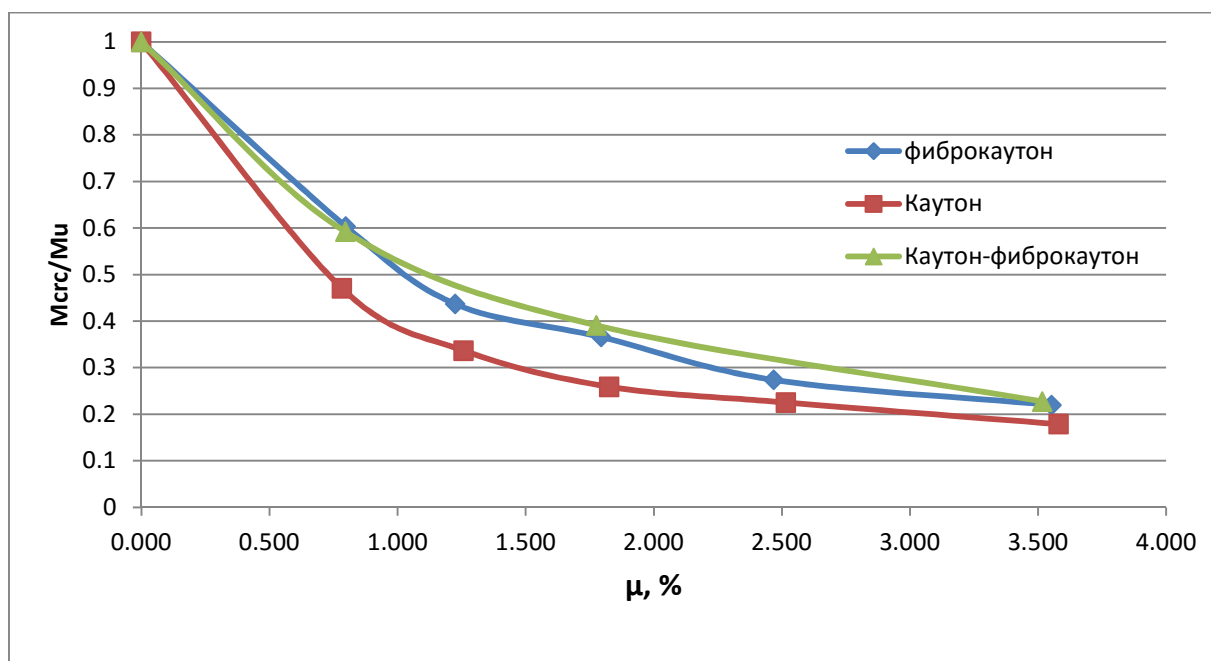


Рис. 5. Зависимость относительного уровня образования трещин от процента продольного армирования

Из рис. 5 видно, что с увеличением процента армирования относительный уровень трещиностойкости падает и величина разницы его значений между испытанными сериями балок

уменьшается. При этом фиброкаптоновые и слоистые балки всех серий образцов имеют схожие показатели. В каптоновых же балках значение относительного уровня трещиностойкости падает более интенсивно.

## ВЫВОДЫ

1. В результате экспериментальных исследований установлено, что изгибающий момент трещинообразования в испытанных балках с добавлением фибры практически не зависит от процента продольного армирования и его значение выше, чем в балках без дисперсного армирования в  $\sim 1,6$  раза.
2. Выявлено, что процесс образования нормальных трещин в фиброкаптоновых балках и в балках с дисперсным армированием только растянутой зоны связан с достижением предела прочности фиброкаптона на растяжение, при дальнейшем увеличении нагрузки происходит плавное раскрытие трещин и вплоть до разрушения продергивания волокон металлокорда из тела каптона не происходит.
3. Добавление дисперсного армирования в изгибаемый элемент увеличивает шаг трещин с одновременным уменьшением их количества и при этом увеличивает максимальную ширину раскрытия трещин перед разрушением.
4. С увеличением процента продольного армирования влияние фибры на количество трещин и, как следствие, на их шаг уменьшается. Это связано с увеличенной прочностью растянутой зоны армированных элементов.
5. С увеличением процента продольного армирования относительный уровень трещиностойкости уменьшается, это связано с тем, что изгибающий момент трещинообразования практически не зависит от процента продольного армирования, а разрушающий изгибающий момент возрастает.
6. Рекомендуются к применению в качестве изгибаемых элементов фиброкаптоновые балки с дисперсным армированием по всему объему.

## Библиографический список

1. Борисов Ю. М. Дисперсно армированные строительные композиты / Ю.М. Борисов, Д.В. Панфилов, С.В. Каштанов, Е.М. Юдин // Строительная механика и конструкции, 2010. – № 2 (5). – С. 32-37.
2. Панфилов Д.В. Дисперсно армированные строительные композиты на основе полибутадиенового олигомера : дис. ... канд. техн. наук: 05.23.05 / Панфилов Дмитрий Вячеславович. - Воронеж, 2004. – 188 с.
3. Фиговский О. Л. Исследование распределения дефектов в структуре фиброкаптона методом Монте-Карло/ О. Л. Фиговский, Ю. Б. Потапов, Д. В. Панфилов, С. В. Каштанов, Е. М.Юдин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. Т.6. – 2014.- №11 (72). – С. 21-25.
4. Потапов Ю. Б. Каптоны – новый класс коррозионностойких строительных материалов/ Ю.Б. Потапов // Строительные материалы XXI века. – 2000.– № 9. – С. 9-10.
5. Чмыхов В. А. Сопротивление каучукового бетона действию агрессивных сред: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.05 / В. А. Чмыхов– Воронеж, 2002. – 224 с.
6. Перекальский О. Е. Строительные композиты на основе полибутадиеновых олигомеров для защиты от радиации : дис. ... канд. техн. наук: 05.23.05. / О. Е. Перекальский- Воронеж, 2006. - 174 с.

7. Поликутин А. Э. Прочность и трещиностойкость наклонных сечений изгибаемых элементов строительных конструкций из армокаутона ]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / А. Э. Поликутин. - Воронеж, 2002. –235 с.
8. Нгуен Фан Зуй. Двухслойные каутоно-бетонные изгибаемые элементы строительных конструкций [Текст]: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.01 / Нгуен Фан Зуй. – Воронеж, 2010. - 185 с.
9. Борисов Ю. М. Исследование несущей способности нормальных сечений двухслойных каутоно-бетонных изгибаемых элементов [Текст] / Ю. М. Борисов, А. Э. Поликутин, Нгуен Фан Зуй // Вестник Центрального регионального отделения РААСН: сб. науч. ст. – Воронеж: ВГАСУ, 2010. – Выпуск 9. – С. 133 – 137.
10. Борисов Ю. М. Напряженно-деформированное состояние нормальных сечений двухслойных каутоно-бетонных изгибаемых элементов строительных конструкций / Ю. М. Борисов, А. Э. Поликутин, Нгуен Фан Зуй // Научный вестник ВГАСУ «Архитектура и строительство». – Воронеж: ВГАСУ, 2010. – № 2. – С. 18-24.
11. Поликутин А.Э. Результаты экспериментальных исследований прочности наклонных сечений каутоно-бетонных изгибаемых элементов при изменении поперечного армирования и пролета среза/ А. Э.Поликутин, З. Х. Чыюнг, С.А. Пинаев. - Самара, 2015. - С. 127-131.
12. Левченко А.В. Фиброкаутон и конструкции на его основе / А. В. Левченко, П. А. Зябухин, Т. О. Офоркаджа //Научная опора Воронежской области, Воронеж, 2017. - С. 197-199.
13. Пинаев С.А. Влияние полимерцементной защиты на трещиностойкость железобетонных изгибаемых элементов / С. А. Пинаев, Франсиско Савити Матиас Да Фонсека// Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета // Материалы межрегиональной научно-практической конференции "Высокие технологии в экологии". – 2011. - №9 - С. - 85-88
14. Potapov Y. B., Pinaev S. A., Arakelyan A.A., Barabash A. D. Polymer-cement material for corrosion protection of reinforced concrete elements, Solid state phenomena 871(2016) 104-109.
15. Potapov Y., Polikutin A., Panfilov D., Okunev M., Comparative analysis of strength and crack resistance of normal sections of bent elements of T-sections, made of rubber concrete, cauton reinforcement and concrete / MATEC Web of Conferences, 2016.- №73
16. Grace, N. F.; Soliman, A. K.; Sayed, G. A.; and Saleh, K. R., “Behavior and Ductility of Simple and Continuous Beams Reinforced with FRP Bars and Stirrups,” accepted for publication, ASCE Journal of Composites for Construction, Nov. 1998.
17. Grace N. F., Sayed G. A., Soliman A. K. and. Saleh K. R. Strengthening Reinforced Concrete Beams Using Fiber Reinforced Polymer (FRP) Laminates / ACI Structural journal. /September-October 1999 С.-865-875.
18. Swamy R. N., Sa’ad A. AI-Ta’an Deformation and Ultimate Strength in Flexure of Reinforced Concrete Beams Made with Steel Fiber Concrete. / Journal Proceedings, 1981 - №78,-С.-395-405.
19. Song P.S., Wang S.H. Mechanical properties of high-strength steel fiber-reinforced concrete / Construction and Building Materials Volume 18, Issue 9, November 2004, Pages 669-673.
20. Gorninski J.P., DalMolin D.C., Kazmierczak C.S. Comparative assessment of isophthalic and orthophthalic polyester polymer concrete: Different costs, similar mechanical properties and durability / Construction and Building Materials Volume 21, Issue 3, March 2007, Pages 546-555.

#### References

1. Yu. M. Borisov, D. V. Panfilov, S. V. Kashtanov, Ye. M. Yudin, Construction dispersed reinforced composites. 2 (2010) 32-37 p.
2. D. V. Panfilov, Dispersed reinforced building composites based on polybutadiene oligomer thesis of PhD of tech. sciences: 05.23.05, Voronezh, 2004– 188 p.

3. O.L. Figovskiy, Yu. B. Potapov, D. V. Panfilov, S. V. Kashtanov, E M Yudin. Research of defects spreading in fiber cauton structure by the Monte Carlo method (Eastern European Journal of Advanced Technology) 11 (2014) 21-25p.
4. Potapov Yu. B. Cautons is a new class of corrosionproof building materials. Building materials of XXIcentury. 2000. № 9. –9-10p.
5. Chmikhov V. A. Aggressive environment resistance of rubber concrete.: thesis of PhD of tech. sc. 05.23.05. Voronezh, 2002. – P. 224.
6. O. E. Perekalsky. Building composites based on polybutadiene oligomers for radiation protection Thesis of PhD of tech. sc.: 05.23.05, Voronezh, 2006. 174p
7. Polikutin A. E. Durability and cracks resistance of bending elements oblique sections of building materials and structures. 05.23.01. Voronezh, 2002. –235 p.
8. Nguyen Phan Dhuy, Double-layered, rubcon-concrete bending elements of building structures, Dis. PhD of tech. sciences: 05.23.01, Voronezh, 2010.
9. Borisov Yu.M., Polikutin A.E., Nguyen Phan Dhuy Research of bearing capacity of typical sections of double-layer cauton-concrete bending elements[Text] Bulletin of Central regional department of RAASN collection of sc.works. – Voronezh: VGASU, 2010. – Issue 9. – P. 133 – 137.
10. Borisov Yu. M., Polikutin A.E., Nguyen Phan Dhuy Deflected mode of typical state double-layer cauton-concrete bending elements , Scientific bulletin of VGASU «Archctecture and Construction». – Voronezh: VGASU, 2010. – № 2. – P. 18-24.
11. Levchenko A.V., Zyabukhin P.A., Ofoekaga T.O. Fiber –cauton and structures on its base, Scientific base of Voronezh region, Voronezh, 2017. - P. 197-199
12. Polikutin A.E., Z. Kh. Chiong, Pinaev S.A. Results of experimental researches of oblique sections of cauton-concrete bending elements durability at the changes of cross reinforcement and span shear -Samara, 2015. - P. 127-131.
13. Pinaev S.A., Saffity Matias Da Fonceka Polymer – concrete protection influence on cracks strength of ferroconcrete bending elements . Scientific bulletin of VGASU. Materials of enter – regional scientific conference “High technologies in ecology”. 2011. - №9 - P. - 85-88
14. Potapov Y., Polikutin A., Panfilov D., Okunev M., Comparative analysis of strength and crack resistance of normal sections of bent elements of T-sections, made of rubber concrete, cauton reinforcement and concrete / MATEC Web of Conferences, 2016.- №73
15. Potapov Y. B., Pinaev S. A., Arakelyan A.A., Barabash A. D. Polymer-cement material for corrosion protection of reinforced concrete elements, Solid state phenomena 871(2016) 104-109.
16. Grace, N. F.; Soliman, A. K.; Sayed, G. A.; and Saleh, K. R., “Behavior and Ductility of Simple and Continuous Beams Reinforced with FRP Bars and Stirrups,” accepted for publication, ASCE Journal of Composites for Construction, Nov. 1998.
17. Grace N. F., Sayed G. A., Soliman A. K. and. Saleh K. R. Strengthening Reinforced Concrete Beams Using Fiber Reinforced Polymer (FRP) Laminates / ACI Structural journal. September-October 1999 C.-865-875.
18. Swamy R. N., Sa’ad A. Al-Ta’an Deformation and Ultimate Strength in Flexure of Reinforced Concrete Beams Made with Steel Fiber Concrete. / Journal Proceedings, 1981 - №78,-C.-395-405.
19. Song P.S., Wang S.H. Mechanical properties of high-strength steel fiber-reinforced concrete / Construction and Building Materials Volume 18, Issue 9, November 2004, Pages 669-673.
20. Gorninski J.P., DalMolin D.C., Kazmierczak C.S. Comparative assessment of isophthalic and orthophthalic polyester polymer concrete: Different costs, similar mechanical properties and durability. Construction and Building Materials Volume 21, Issue 3, March 2007, Pages 546-555.

**КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
ФУНДАМЕНТНОЙ ПЛИТЫ БАЛОЧНОЙ КЛЕТКИ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ  
ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗОК**

Г. Е. Габриелян<sup>1</sup>, В. С. Варнавский<sup>2</sup>, В. М. Флавианов<sup>3</sup>, О. И. Пехник<sup>4</sup>

Воронежский государственный технический университет<sup>1,2,3,4</sup>

Россия, г. Воронеж

---

<sup>1</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики

<sup>2</sup>Канд. техн. наук, доцент кафедры строительной механики

<sup>3</sup>Ст. преподаватель кафедры строительной механики, e-mail: flav@inbox.ru

<sup>4</sup>Магистрант кафедры строительной механики

---

На основе метода конечных элементов (МКЭ) выполнено численное моделирование фундамента и конструкций балочной клетки промышленного здания. В расчетной модели учтены воздействия на фундаментную плиту переменных нагрузок от различных схем заполнения технологических резервуаров. На основании результатов расчета проведен анализ влияния последовательности освобождения и заполнения технологических резервуаров на напряженно-деформированное состояние фундаментной плиты. Выработаны рекомендации по минимизации изменения напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты в зависимости от технологических циклов освобождения и заполнения резервуаров.

**Ключевые слова:** железобетонные конструкции, фундамент, фундаментная плита, резервуары, технологический цикл, переменные нагрузки, перемещения, напряженно-деформированное состояние.

**FINITE ELEMENT SIMULATION OF DEFLECTED MODE OF OF I-BEAM GRILLAGE  
GROUND SLAB UNDER THE VARIABLE LOAD**

G. E. Gabrielyan<sup>1</sup>, V. S. Varnavsky<sup>2</sup>, V. M. Flavianov<sup>3</sup>, O. I. Pehnik<sup>4</sup>

Voronezh state technical university<sup>2,3,4</sup>

Voronezh, Russia

---

<sup>1</sup>PhD of Tech.Sc., associate professor of the department of Structural mechanics

<sup>2</sup> PhD of Tech.Sc., associate professor of the department of Structural mechanics

<sup>3</sup>Senior lecture of the department of structural mechanics, e-mail: flav@inbox.ru

<sup>4</sup>Postgraduate the department of Structural mechanics

---

Based on the finite element method there was implemented numerical simulation of industrial building i-beam grillage base and structure. Effect of variable loads of technological tanks filling different schemes was considered in specified model. The sequence of influence of technological tanks filling and disposal on the ground slab deflected mode was analyzed due to the calculation results. There were developed the recommendations on minimizing of the changes of ground slab deflected mode in dependence of technological cycles of tanks disposal and filling.

**Keywords:** reinforced concrete structures, ground slab, tanks, technological cycle, variable loads, shifts, deflected mode.

---

© Габриелян Г.Е., Варнавский В. С., Флавианов В. М., Пехник О. И., 2018

## Введение

Исследование влияния технологических циклов и процессов на напряженно-деформированное состояние фундаментов позволяет скорректировать конструкции фундамента на стадии проектирования, ввести определённые ограничения на массогабаритные параметры оборудования при реконструкции или технологической модернизации промышленных зданий, выдать рекомендации по организации тех или иных технологических процессов из условия минимизации их влияния на фундаментные и несущие конструкции. Для решения подобных задач в строительной отрасли используют численные методы, среди которых наиболее распространенным и эффективным является метод конечных элементов (МКЭ). Популярность этого метода [1, 2] объясняется широкой областью и относительной простотой его применения: независимостью расчета от типа конструкции и физических свойств применяемых материалов, упрощенной системой учета взаимодействия расчетных конструкций с окружающей их средой, возможностью автоматизации расчета на любом его этапе. В настоящее время МКЭ занимает ведущее положение среди дискретных методов расчёта строительных конструкций [3, 4, 5, 6, 7]. Анализ изменения напряженно деформированного состояния фундаментной плиты в зависимости от расположения переменных нагрузок с использованием конечно элементных расчётных схем посвящена данная статья.

### Краткая характеристика конструкций фундаментов и балочной клетки здания

Фундамент промышленного здания представляет собой совокупность фундаментной плиты и столбчатых железобетонных фундаментов под технологические резервуары. Материал конструкций - железобетон. Столбчатые фундаменты армированы в соответствии с проектной документацией. Крепление резервуаров осуществляется через выпуски анкерных арматурных стержней.

Помимо резервуаров на фундаментную плиту опираются несущие конструкции каркаса балочной клетки. Балочная клетка выполнена из широкого спектра стальных прокатных профилей, и передает на фундамент снеговые нагрузки. Фундаменты под балочную клетку также столбчатые, железобетонные. Схема фундаментной плиты с расположением технологических резервуаров представлена на рис. 1.

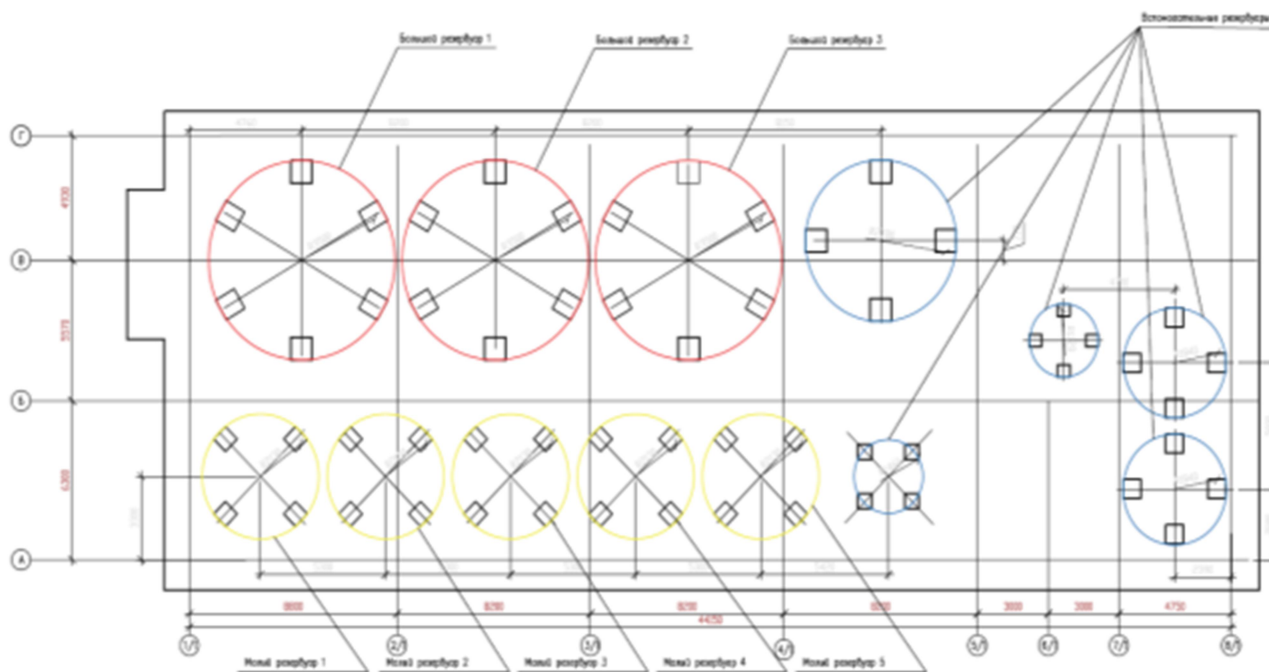


Рис. 1. Схема фундаментной плиты с расположением технологических резервуаров

Нагрузки (от ограждающих конструкций и оборудования, снеговая) приняты в соответствии с проектной документацией и с требованиями СП 20.13330.2011. «Нагрузки и воздействия».

### Компьютерное моделирование деревянной несущей системы здания и её расчет

Объектом расчетного моделирования являются фундаментные и несущие конструкции балочной клетки промышленного здания с учетом всех нагрузок и воздействий в нормальном режиме эксплуатации, а также различных вариантов освобождения и заполнения технологических. Данные по расчету конструкций в нормальном режиме эксплуатации позволят оценить напряженно-деформированное состояние фундаментной плиты, а также принять эти данные для сравнения при последующем расчете с учетом технологических циклов освобождения и заполнения резервуаров.

Вид расчетной схемы балочной клетки приведен на рис. 2.

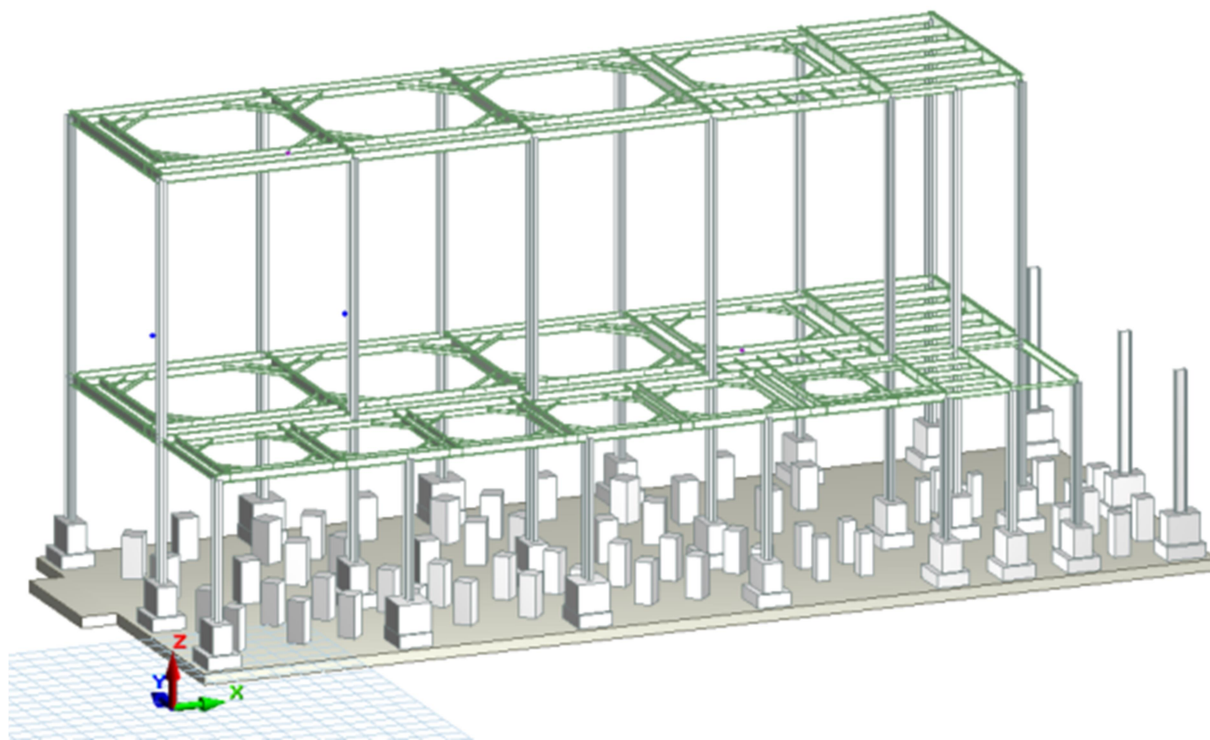


Рис. 2. Расчетная схема конструкции

Нагрузки на фундаментную плиту и несущие конструкции балочной клетки собраны в соответствии с опиранием технологических резервуаров и с грузовыми площадями.

Ветровые нагрузки не учитываются, т. к. конструкции балочной клетки находятся внутри ее основного каркаса. Ветровые нагрузки воспринимаются фахверковыми колоннами, не имеющими связи с элементами балочной клетки.

Нагрузки от снегового покрова передаются с конструкций покрытия цеха промышленного здания на колонны балочной клетки. Величина снеговой нагрузки принята в соответствии с СП 20.13330.2011. «Нагрузки и воздействия» для III снегового района и составляют  $2,16 \text{ кН/м}^2$ . Нагрузка приведена к сосредоточенной в узлы колонн балочной клетки в соответствии с грузовыми площадями.

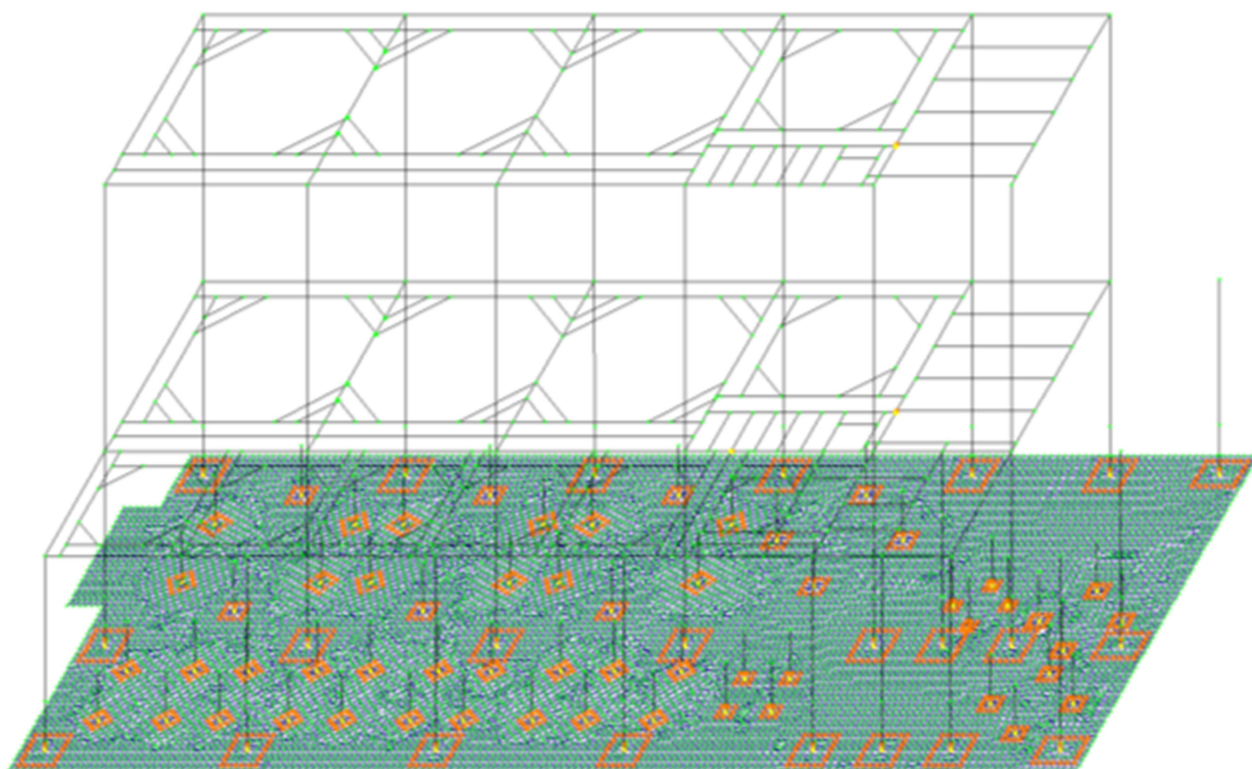
В качестве расчётной модели принята пространственная система, общий вид которой представлен на рис. 3. Реализация расчётной схемы осуществлялась методом конечных элементов с помощью проектно-вычислительного комплекса Лира-Сапр. Построение модели выполнено в 3D-блоке Сапфир.

Каждый стержневой конечный элемент (КЭ) системы имеет 12 степеней свободы, по 6 степеней свободы в узле. Жесткостные характеристики стержней заданы в соответствии с принятой технической документацией. Стержни, соответствующие столбчатым фундаментам, под оборудование и каркас балочной клетки имеют соответствующие жесткостные характеристики. Дробление стержней соответствует изменению сечения столбчатых фундаментов по высоте. Стыковка стержней, моделирующих фундаменты и элементы балочной клетки, центральная. Конструкции фундаментной плиты выполнены с помощью КЭ оболочки. Триангуляция оболочечных элементов выбрана равной  $0,3 \text{ м}$ ,



что позволяет с достаточной точностью анализировать НДС фундаментной плиты. В стыках пластинчатых и стержневых элементов установлены абсолютно-жесткие тела (АЖТ). Установка АЖТ позволяет получать близкие к реальным контуры продавливания, избежать эффекта иглы при совместной работе стержневых и пластинчатых КЭ.

В качестве граничных условий принято упругое основание, моделируемое с помощью коэффициентов постели. В расчетной схеме принята модель упругого основания по Винклеру. Коэффициенты постели рассчитаны в ПК Лира-Сапр в соответствии с инженерно-геологическими изысканиями. Грунтами основания служат пески средней крупности, средней плотности, малой степени водонасыщения.



**Рис. 3.** Расчетная модель конструкции

Для моделирования воздействия внепроектных изменений нагрузок в исходную расчетную модель введено 12 дополнительных загрузений, учитывающих различные схемы загрузения фундаментной плиты. Данные загрузения описаны в модуле редактора загрузений ПК ЛИРА. Расчет ведется в линейной постановке без учета динамического воздействия жидкости.

Варианты загрузения фундаментной плиты включают в себя:

1. Нагрузки при нормальном режиме эксплуатации (все резервуары загрузены).
2. Полное освобождение больших и малых резервуаров.
3. Последовательное освобождение больших резервуаров при заполненных малыми.
4. Последовательное освобождение малых резервуаров при заполненных больших.
5. Освобождение большого резервуара 1 и малых резервуаров 1-2.
6. Освобождение большого резервуара 2 и малых резервуаров 3.
7. Освобождение большого резервуара 3 и малых резервуаров 4-5.

Варианты загрузения 5-7 привязаны к цифровым осям конструкции.

## Расчетные комбинации нагрузок

Номер загрузки	Наименование нагрузки													
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	Собственный вес конструкций	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	Вес обратной засыпки	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	Вес пола	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	Снег	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	Вспомогательные резервуары	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	Большой резервуар 1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
7	Большой резервуар 2	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1
8	Большой резервуар 3	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
9	Малый резервуар 1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
10	Малый резервуар 2	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1
11	Малый резервуар 3	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1
12	Малый резервуар 4	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0
13	Малый резервуар 5	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0

По результатам расчета были получены деформированные схемы несущих фундаментной плиты балочной клетки, изополю вертикальных перемещений и изгибающих моментов по осям X и Y для нормального режима эксплуатации, а также для различных схем загрузки, связанных с циклами освобождения и заполнения технологических резервуаров.

На рис. 4-7 приведены результаты расчета в нормальном режиме эксплуатации конструкции и оборудования.

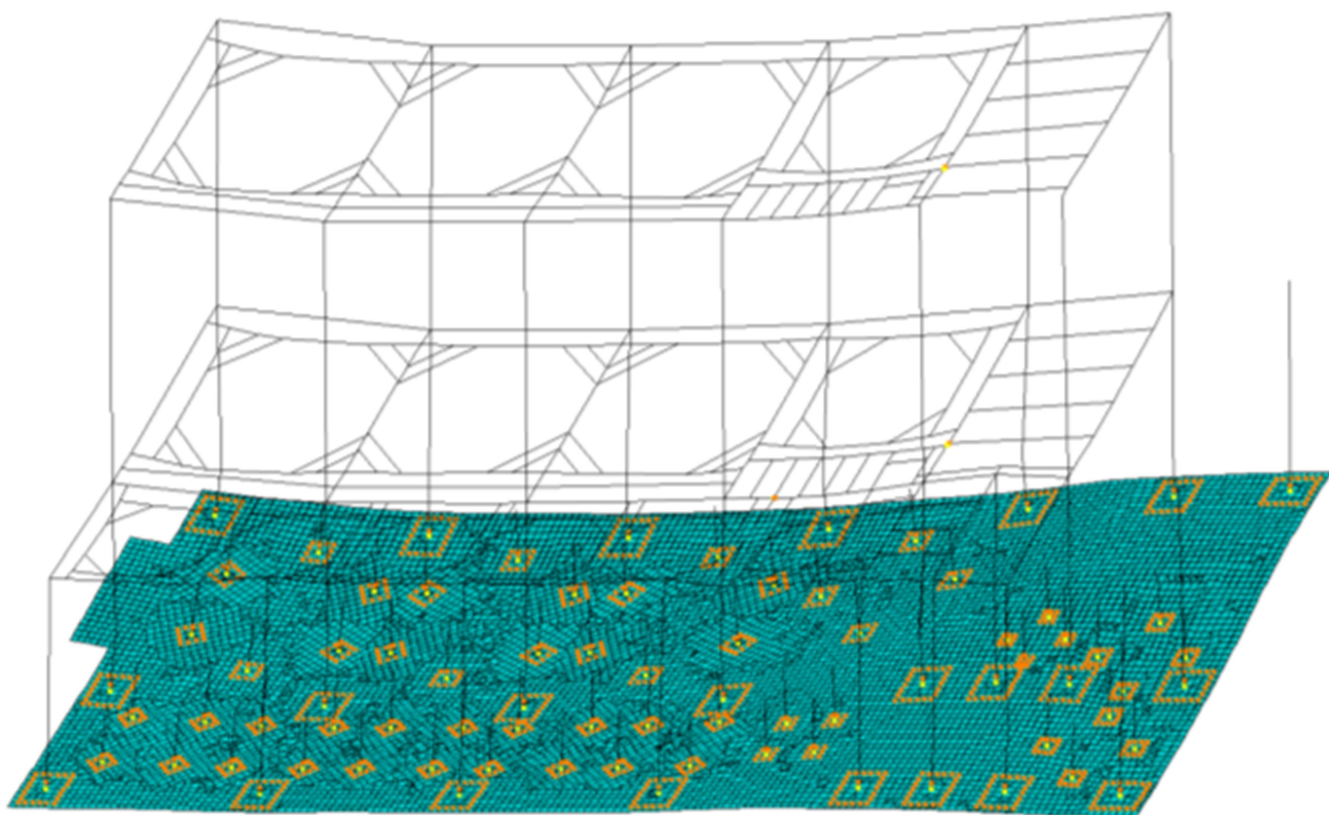


Рис. 4. Деформированный вид расчетной модели

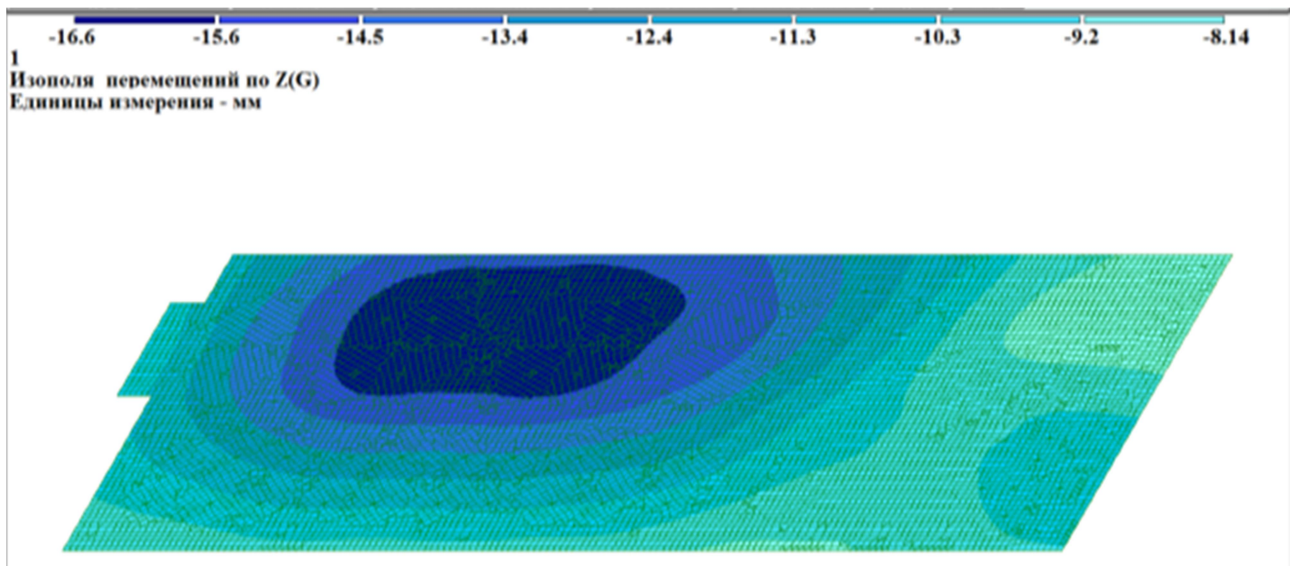


Рис. 5. Изополя перемещений по оси Z, мм

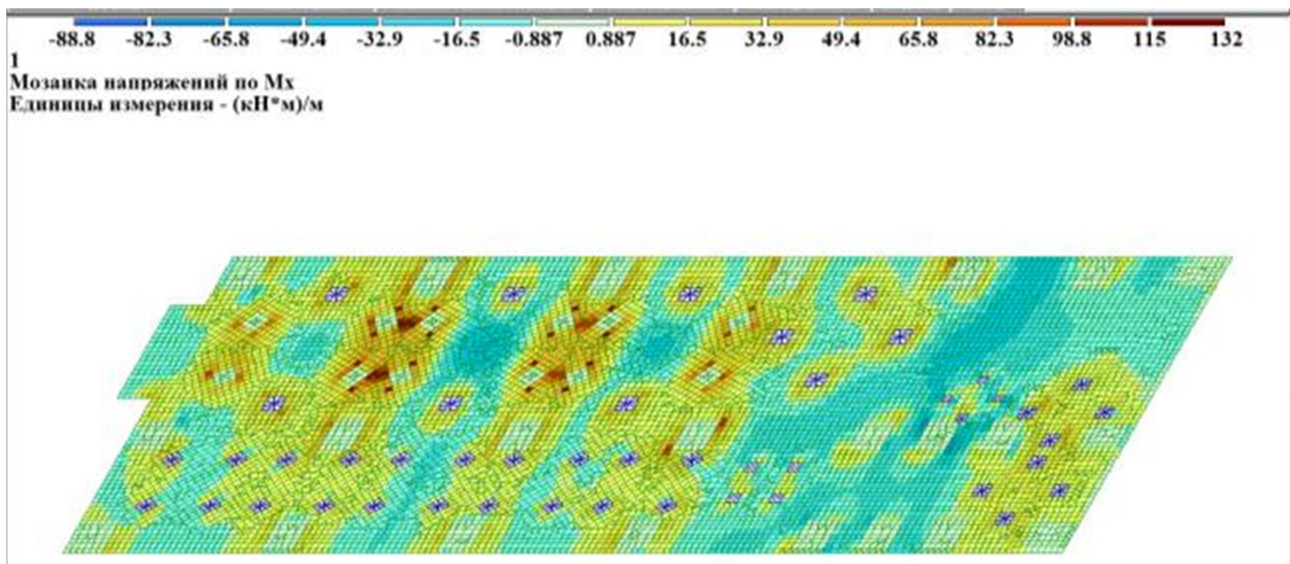


Рис. 6. Изополя изгибающего момента Mx, (кН\*м)/м

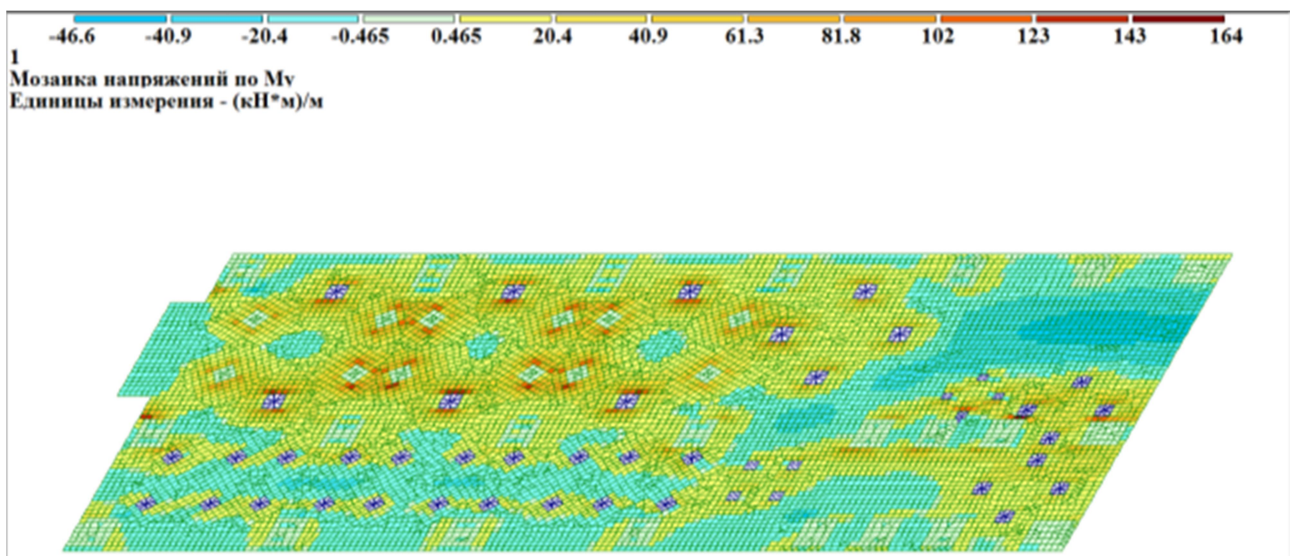


Рис. 7. Изополя изгибающего момента My, (кН\*м)/м

По результатам анализа тринадцати загрузок с различными схемами освобождения и заполнения технологических резервуаров были выявлены наиболее неблагоприятные схемы. Наибольшее влияние на НДС фундаментной плиты оказывает схема при освобождении больших резервуаров и заполнении малых. Результаты расчета при данной схеме приведены на рис. 8-11.

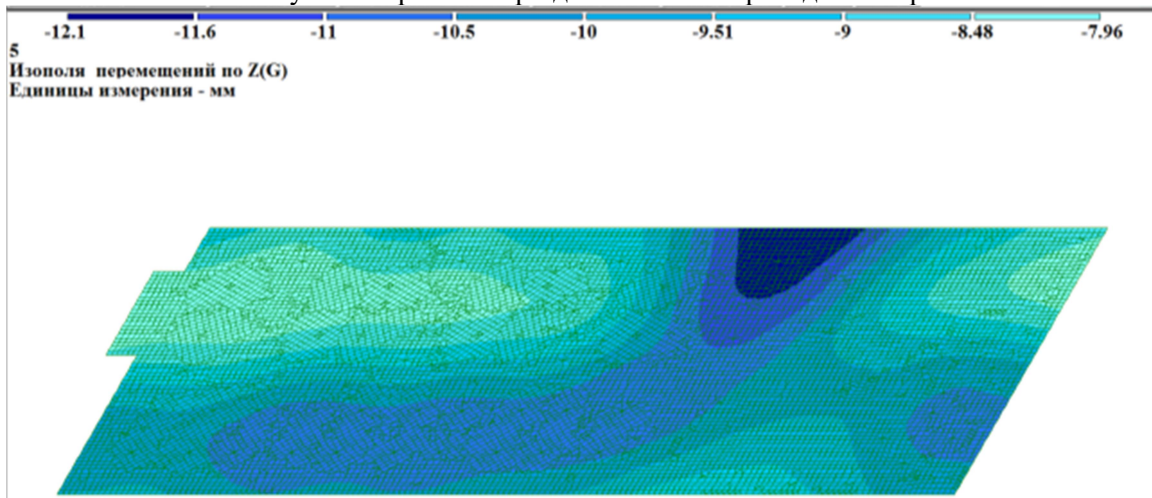


Рис. 8.

Изополя перемещений по оси Z, мм

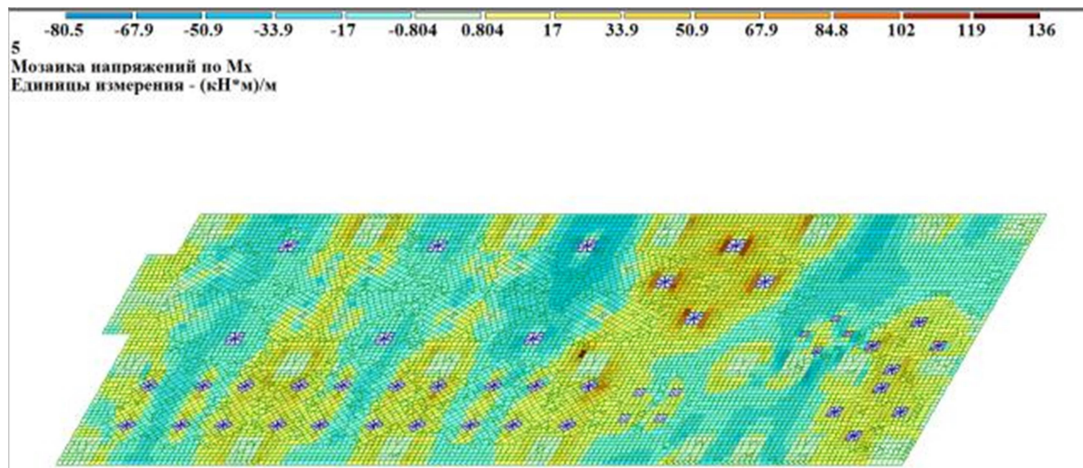


Рис. 9. Изополя изгибающего момента  $M_x$ , (кН\*м)/м

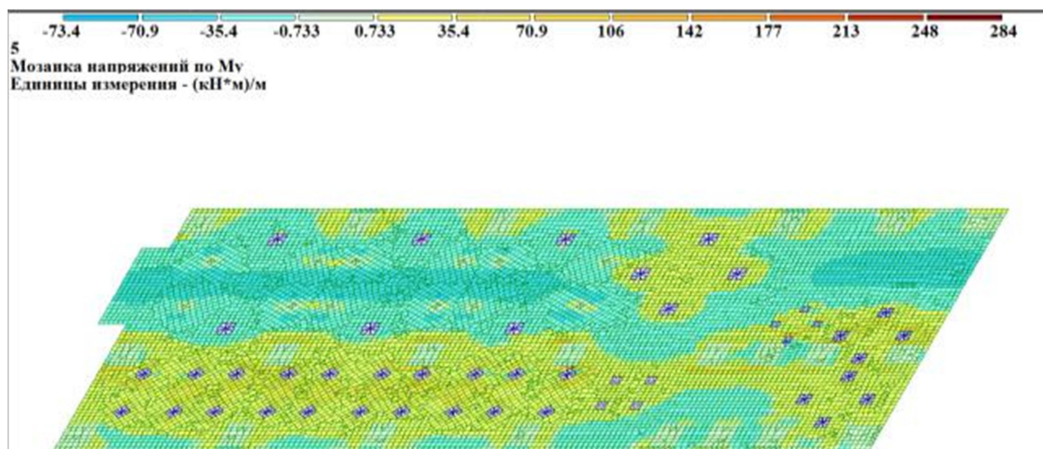


Рис. 10. Изополя изгибающего момента  $M_y$ , (кН\*м)/м

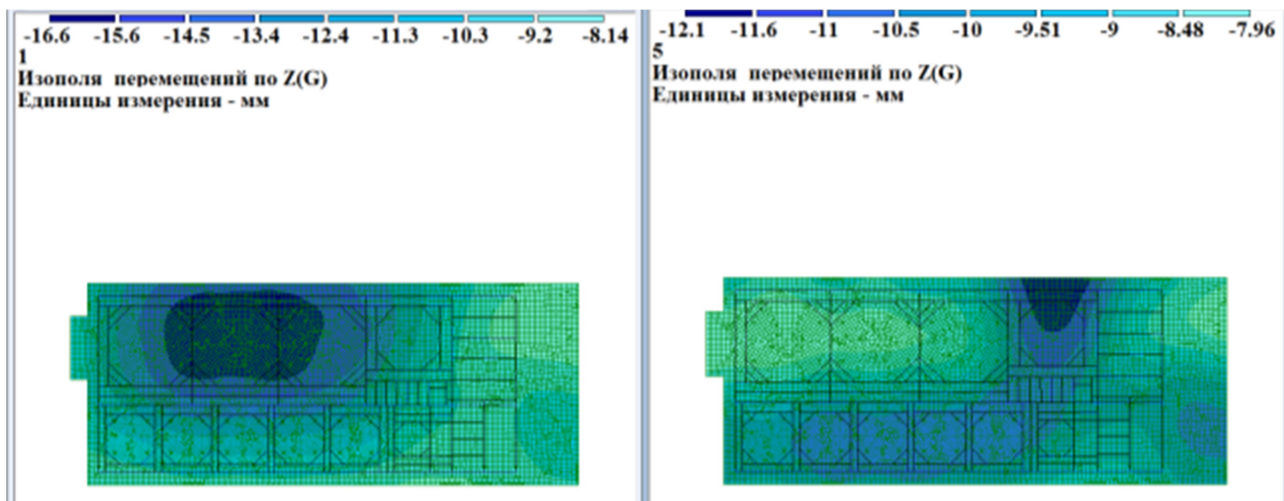


Рис. 11. Изменение напряженно деформированного состояния при освобожденных больших резервуарах и заполненных малых

При одновременном освобождении больших и малых резервуаров так же наблюдается резкое изменение напряженно-деформированного состояния. Прогибы в зоне установки резервуаров снижаются до  $-7,78$  мм, что составляет 53,13 % от первоначального значения. Наибольшие изменения отмечаются по всем характерным сечениям (рис. 12-15).

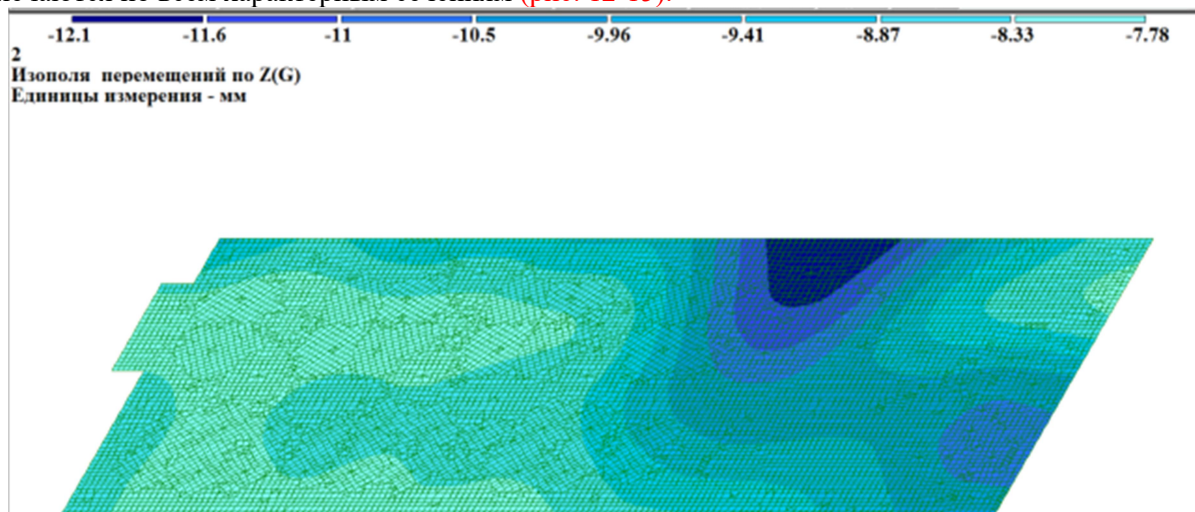


Рис. 12. Изополя перемещений по оси Z, мм

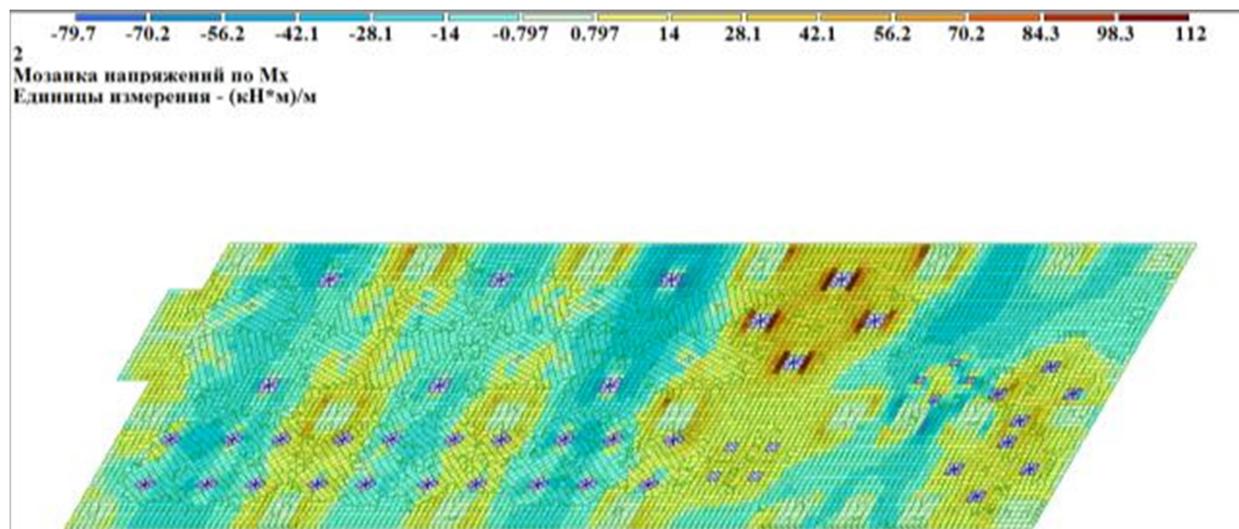


Рис. 13. Изополя изгибающего момента  $M_x$ , (кН\*м)/м

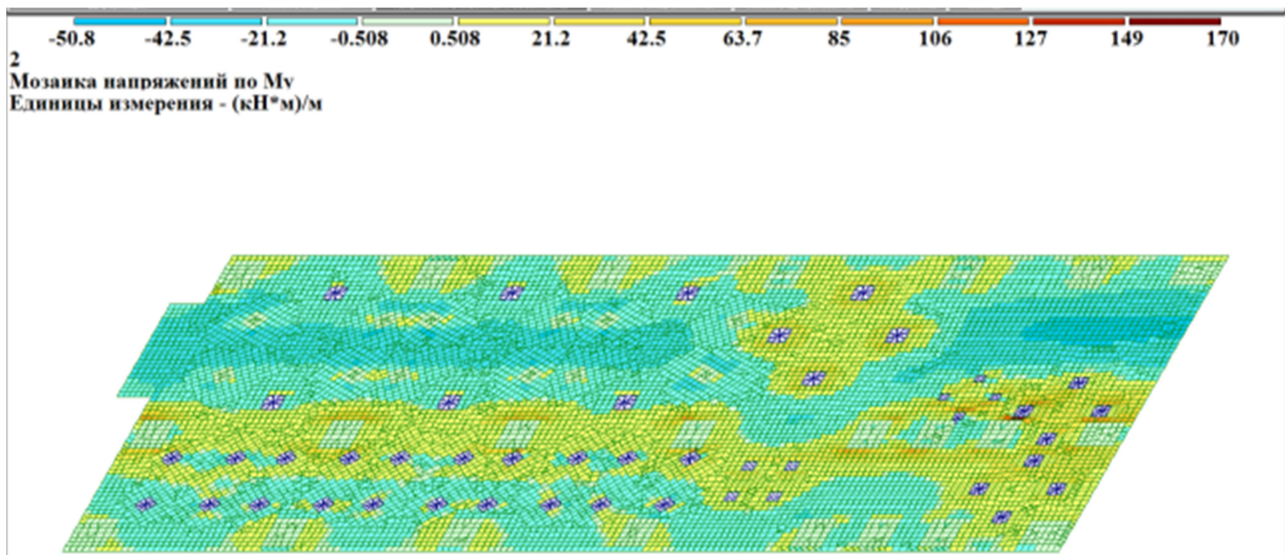


Рис. 14. Изополя изгибающего момента  $M_u$ , (кН\*м)/м

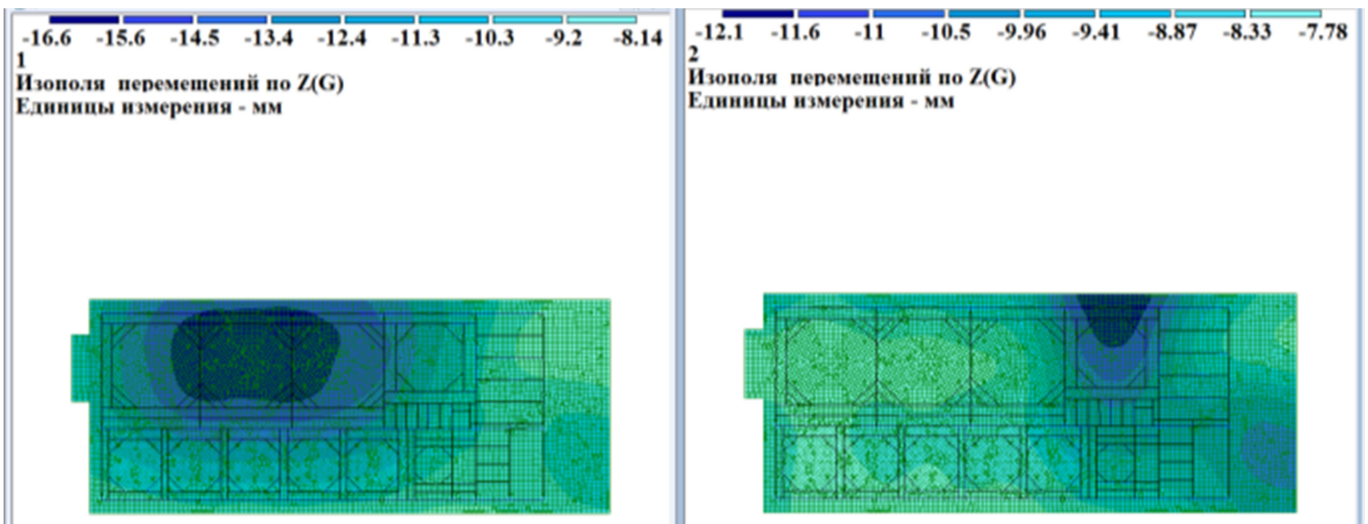


Рис 15. Изменение напряженно деформированного состояния при освобожденных всех резервуаров

### Выводы

1. Фундаментная плита в нормальных условиях эксплуатации имеет вертикальные перемещения в пределах нормативных. Максимальный прогиб плиты по сечению 1 составляет -16,6 мм, по сечению 2 -11,8 мм.
2. При последовательном освобождении больших резервуаров наблюдается плавное изменение напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты. При этом на заключительной стадии при освобождении всех больших резервуаров при заполненных малых наблюдается значительное изменение НДС по всей фундаментной плите (рис. 15). Таким образом, данную стадию разгрузки фундаментной плиты можно считать наиболее неблагоприятной, так как изменение НДС носит неоднородный характер, плита разгружается неравномерно, наблюдается серьезное отличие от первоначальных распределений перемещений
3. При одновременном освобождении больших и малых резервуаров наблюдается резкое изменение напряженно-деформированного состояния. Данный вариант освобождения всех резервуаров одновременно является неблагоприятным. Разгрузка плиты происходит скачкообразно со значительными изменениями зон распределения перемещений.
4. При последовательном освобождении малых резервуаров наблюдается плавное изменение напряженно-деформированного состояния фундаментной плиты. При этом на заключитель-

- ной стадии при освобождении всех малых резервуаров при заполненных больших значительное изменение НДС по всей фундаментной плите не наблюдается.
5. Наиболее рациональной схемой освобождения резервуаров является схема одновременного последовательного освобождения больших и малых резервуаров с привязкой к цифровым осям конструкции (варианты загрузки 5-7). При подобно освобождении резервуаров наблюдается наименьшее негативное влияние на фундаментную плиту. Перераспределение перемещений незначительно изменяется в сравнении с нормальным режимом эксплуатации.

#### Библиографический список

1. Перельмутер А. В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа/ А. В. Перельмутер, В. И. Сливкер. - 4-е изд., перераб. – М.: СКАД СОФТ, 2011. – 736 с.
2. Шапиро Д. М. Метод конечных элементов в строительном проектировании: монография/ Д. М. Шапиро. – М.: Изд-во АСВ, 2015. - 176 с.
3. Шапиро Д. М. Теория и расчётные модели оснований и объектов геотехники: монография. — Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. — 164 с.
4. Габриелян Г. Е. Расчетный анализ напряженно-деформированного состояния элементов каркаса промздания с применением пространственных конечно-элементных моделей/ Г. Е.Габриелян , В. М. Флавианов, Корома Муса// Строительная механика и конструкции.- 2017. - № 1 (14). – С. 72-87.
5. Габриелян Г. Е. Конечно-элементное моделирование напряженно-деформированного состояния несущей системы деревянного здания / Г. Е.Габриелян, В. С. Варнавский, В. М. Флавианов, Н. Ф. Голева// Строительная механика и конструкции.- 2018. - № 1 (16). – С. 116-124.
6. G. Mays. Durability of Concrete Structures-Investigation, repair, protection, Ed.», E&EN Spon, London, 1992.
7. B. M. Das «Principles of foundation engineering». Cengage learning, 2015.

#### References

1. Perelmuter A.V. Slivker V.I. Specified models and possibility of their analysis. – Forth issue, updated. – М.: SKAD SOFT, 2011. – 736 p.
2. Shapiro D.M., Method of finite elements in building design: monograph. Pub. house ASV, 2015. - 176 p.
3. Shapiro D.M. Theory and specified models of foundations and geotechnical objects: monograph. — Voronezh: IPTz «Scientific book», 2012. — 164 p.
4. Gabrielyan G. E., Flavianov V.M., Koroma Musa. Calculation analysis of industrial building frame elements deflected mode with application of special finite –elemental models. // Structural mechanics and structures. 2017. - No 1 (14). – P. 72-87.
5. Gabrielyan G. E., Varnavsky V.S., Flavianov V.M., Goleva N. F. Finite elemental simulation of timber building bearing system. Structural mechanics and structures.- 2018. - No 1 (16). – p. 116-124.
6. G. Mays. Durability of Concrete Structures-Investigation, repair, protection, Ed.», E&EN Spon, London, 1992.
7. B. M. Das «Principles of foundation engineering». Cengage learning, 2015.

Научное издание

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научно-технический журнал**

**Выпуск № 3(18)**

Редактор Аграновская Н.Н.

Дата выхода в свет: 2018. Формат 60\*84 1/18. Уч.-изд. л. 14,0.

Усл. печ. л. 14,1. Бумага писчая. Тираж 500 экз. Заказ № \_\_\_\_.

Цена свободная

---

Адрес редакции: 394006 г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84 комната 2000  
Тел./факс; +7(473) 2715230. , E-mail: vss22@mail.ru

Отпечатано: Отдел оперативной полиграфии ФГБОУ ВО  
«Воронежский государственный университет»  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84