



ISSN 2219-1038

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск № 2 (15), 2017

Учредитель

Федеральное государственное
бюджетное образовательное
учреждение высшего
образования
«Воронежский
государственный
технический
университет»

Издатель

Строительный факультет

Главный редактор

Сафронов В.С., д. т. н., проф.

Зам. главного редактора

Ефрюшин С.В., к. т. н., доц.

Ответственный секретарь

Габриелян Г.Е., к. т. н., доц.

Технический секретарь

Флавианов В.М., м. н. с.

Члены редколлегии

Шитикова М.В., д. ф.-м. н., проф.

Шапиро Д.М., д. т. н., проф.

Орлов А.С., д. т. н., проф.

Свентиков А.А., д. т. н., проф.

Иванов Ю.В., к. т. н., доц.

Андреев А.В., к. т. н., доц.

Рогатнев Ю.Ф., к. т. н., доц.

СОДЕРЖАНИЕ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Кирсанов М.Н.

Формула для прогиба и анализ кинематической
изменяемости решетчатой фермы 5

Широков А.С.

Аналитический расчет смещения опоры балочной фермы
с верхними шпренгелями 11

Доманов Е.В.

Вывод формулы для прогиба балочной фермы
с крестообразной решеткой 15

Трещев А.А., Ромашина А.В.

О концентрации напряжений в пластинке с круговыми
отверстиями, выполненной из нелинейно упругого
ортотропного материала 20

Судакова И.А., Цветкова А.Б.

Собственные колебания круглых пластин
из ортотропных разносопротивляющихся материалов 27

Черняев А.А.

Решение двумерных задач теории упругости
и строительной механики методом интерполяции
с использованием конформных радиусов 32

Синозерский А.Н., Козлова А.В., Резунов А.В., Мухтаров Р.А.

Использование ядровых показателей при оценке
предельных состояний внецентренно сжимаемых
со стандартной скоростью призм из мелкозернистого
бетона 45

Волокитин В.П., Волокитина О.А., Еремин А.В.

Использование метода вдавливания сферического штампа
для определения деформационно-прочностных
характеристик асфальтобетонных покрытий
на мостовых сооружениях 57

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Сафронов В.С., Барченкова Н.А. Попова И.А.
Моделирование деформирования и нагруженности
плиты проезжей части железобетонного балочного
моста **64**

Гриднев С.Ю., Подлесных И.С.
Расчет напряженно-деформированного состояния стале-
железобетонных пролетных строений с учетом
распределения температуры в слоях дорожной одежды **75**

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**Сафронов В.С., Черников А.В., Антипов А.В.,
Сафронов Н.В., Суханов А.С.**
Надежность усиленного накладной плитой
плитного пролетного строения автодорожного моста **85**

Струков С.Ю., Ефрюшин С.В., Глушков А.В.
Исследование напряженно-деформированного
состояния элементов монолитного железобетонного
каркаса многоэтажного здания с учетом этапов его
возведения **95**

Попечительский совет

ООО «Предприятие
Инвестстройиндустрия»
в лице директора
Ушакова И.И.

ООО «Предприятие
по инженерному и научно-
техническому обслуживанию
строительного комплекса
«СтройНаука»
в лице зам. директора
Глушкова А.В.

Воронежское региональное
отделение Общероссийской
организации «РОИС»
в лице председателя

Бутырина В.М.

© ВГТУ, 2017

Адрес редакции: 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./ факс: +7(473) 2-71-52-30

**По вопросам размещения статей просьба обращаться
по адресу:**

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./факс: +7 (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф. **Сафронову Владимиру Сергеевичу**,
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: vss22@mail.ru
зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц. **Ефрюшину Сергею Владимировичу**,
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru
отв. секретарю, канд. техн. наук, доц. **Габриеляну Грайру Егишеевичу**
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: grayr2010@rambler.ru



ISSN 2219-1038

STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific-Technical Journal

Issue №2 (15), 2017

Founder

State Educational Institute
of Higher Vocational Education

Voronezh State Technical
University

Editor

Construction institute

Chief Editor

Dr of Sc. Tech. Prof.
V.S. Safronov

Deputy of Chief Editor

PhD S.V. Efrushin

Senior Secretary

PhD G.E. Gabrielyan

Technical Secretary

Sc. associate V.M. Flavianov

Members of editorial board

Shitikova M.V., Dr. of Math Prof.

Shapiro D.M., Dr. of Tech Sc.

Orlov A.S., Dr. of Tech Sc.

Sventikov A.A., Dr. of Math Prof.

Ivanov Y.V., PhD, Ass. Prof.

Andreev A.V., PhD Ass. Prof.

Rogatnev Y.F. PhD Ass. Prof.

CONTENT

STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

Kirsanov M. N. The formula for the deflection and analysis of kinematic variability of the lattice truss	5
Shirokov A.S. Analytical calculation of the support offset of beam truss with upper shprengels	11
Domanov E.V. The derivation of the formula for deflection of a girder with a cross type lattice	15
Treshchyov A.A., Romashina A.V. About the tension concentration in the plate with circular holes made of nonlinear elastic orthotropic material	20
Sudakov I.A., Tzvetkova A.B. Self-induced vibrations of circular plates from orthotropic differently resisting materials	27
Chernyaev A.A. Solution of bi-variate problems of theory of elasticity and structural mechanics by interpolation method with application of conformal radiuses	32
Sinozersky A.N., Kozlova A.V., Rezunov AV., Mukhtarov R.A. Application of core indexes at the assessment of limiting state of eccentrically compressed with standard velocity prisms from fine grained concrete	45
Volokitin V.P., Volokitina O.A., Eryomin A.V. Use of spherical stamp pressing-in method for definition of deformative - strength properties of asphalt concrete blanket on bridge structures.	57

CALCULATION AND DESIGN OF BRIDGES AND TRAFFIC STRUCTURES

Safronov V.S., Barchenkova N.A., Popova I.A..

Simulation of deformation and loading of the slab of concrete beam bridge road way.

64

Gridnev S.Yu., Podlesnykh I.S.

Calculation of deflected mode of steel reinforced concrete spans with account of temperature spreading in the road base layers

76

CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

Safronov V.S., Chernikov A.V., Antipov A.V.,

Safronov N.V., Sukhanov A.S.

Strength of road bridge slab span reinforced with floor slab

Strukov S.Yu., Efrushin S.V., Glushkov A.V.

Investigations of deflected mode of monolithic concrete frame of multistoried building with account of its construction stages

Board of Trustees

Ltd. «Enterprise
Investroyindustriya»
Director **I.I. Ushakov**

Ltd. «Enterprise on Engineering
and Scientific Service of Building
Complex StroyNauka»
Deputy Director
A.V. Glushkov

Voronezh regional Department of
all Russian public organization
«RSEC»
Chairman

V.M. Butyrin

© VGTU, 2017

Address : 84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh, Russia
Tel/ fax.: +7 (473) 2715230

Concerning the articles publication one can address:
84, 20-letie Oktyabrya st., Voronezh 394006, Russia

Chief editor Dr Sc.Tech., Prof.Vladimir Sergeevich Safronov
Tel./fax: +7 (473) 2715230 E-mail: vss22@mail.ru

Deputy of chief editor, PhD of Tech. Sc., associate professor Sergei Vladimirovich Efrushin
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

Senior secretary, PhD of Tech.Sc., associate professor Grayr Egisheevich Gabrielyan

тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail:grayr2010 @rambler.ru

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет
"МЭИ"

Д-р физ.-мат. наук, проф.

М. Н. Кирсанов

Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14;

e-mail: c216@ya.ru

National Research University "MPEI",

Dr of Physics and Mathematics, Professor

M. N. Kirsanov

Moscow, Russia, tel.: +7(495)3627314;

e-mail: c216@ya.ru

М.Н. Кирсанов

ФОРМУЛА ДЛЯ ПРОГИБА И АНАЛИЗ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИЗМЕНЯЕМОСТИ РЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ

В системе символьной математики Maple построена математическая модель деформирования плоской фермы с шестью опорами. Показано, что при определенном числе панелей ферма допускает мгновенную изменяемость. Рассмотрено действие нагрузки, равномерно распределенной по узлам верхнего или нижнего пояса. Выведена формула зависимости прогиба фермы от размеров и числа панелей. Показано, что распределение сжатых и растянутых стержней существенно зависит от числа панелей.

Ключевые слова: внешне статически неопределимая ферма, прогиб фермы, метод индукции, Maple, кинематическая изменяемость, сжатые и растянутые стержни.

M. N. Kirsanov

THE FORMULA FOR THE DEFLECTION AND ANALYSIS OF KINEMATIC VARIABILITY OF THE LATTICE TRUSS

In the system of symbolic mathematics Maple a mathematical model of deformation of a flat truss with six supports is constructed. It is shown that, with a certain number of panels, it can be instantly variable. The effect of a load uniformly distributed over the nodes of the upper or lower belt is considered. The formula for the dependence of the deflection of the truss on the size and number of panels is derived. It is shown that the distribution of compressed and stretched rods essentially depends on the number of panels.

Keywords: externally statically indeterminate truss, deflection of a truss, induction method, Maple, kinematic variability, compressed and stretched rods.

В отличие от простых балочных ферм с параллельными поясами, для расчета которых применим метод сечений, решетчатые фермы не доступны для непосредственного анализа усилий в стержнях. Еще большие трудности возникают в применении метода индукции совместно с системой компьютерной математики при аналитическом расчете решетчатых ферм с произвольным числом панелей [1-5]. Рассмотрим решетчатую ферму с шестью опорами (рис. 1). Ферма внешне статически неопределима. Для определения усилий в стержнях и реакций опор необходимо составлять систему уравнений равновесия сразу для всех узлов, решение которой дает и усилия в стержнях, и реакции опор. В ферме с n панелями в половине пролета, считая по нижнему поясу, число стержней – $n_s = 8n + 30$, включая семь опорных стержней (пять моделируют подвижные опоры и два — правый неподвижный шарнир), число шарниров – $m = 4n + 15$. Шарниры верхнего пояса загружены вертикальными силами.

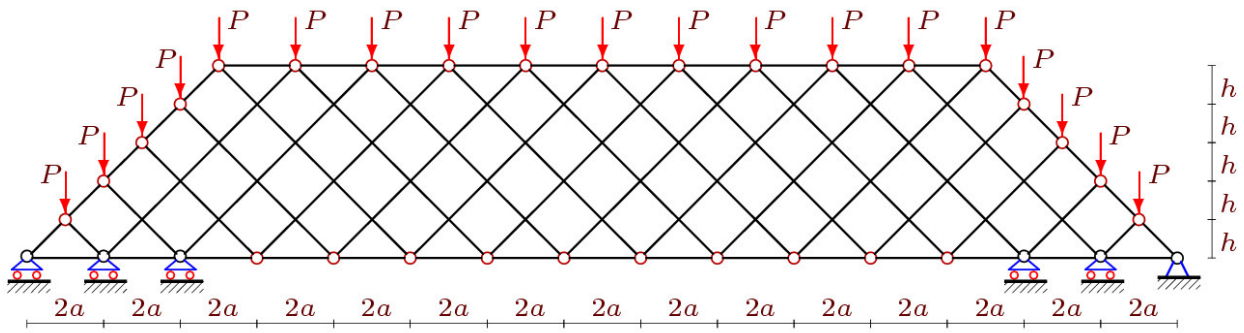


Рис. 1. Ферма при $n=5$

Прогиб фермы определяется по формуле Максвелла - Мора. Решение системы уравнений равновесия узлов получается по программе [6] в символьной форме. Для этого нумеруются стержни и узлы (рис. 2). Начало координат располагается в левой подвижной опоре. Фрагмент ввода координат в программу имеет вид

```

> for i to 2*n+6 do x[i]:=2*a*i-2*a: y[i]:=0:od:
> for i to 4 do x[i+2*n+6]:=a*i: y[i+2*n+6]:=h*i:
> x[i+4*n+11]:=4*n*a+5*a+a*i:
y[i+4*n+11]:=5*h-h*i:
> od:
>for i to 2*n+1 do
> x[i+2*n+10]:=2*a*i+3*a: y[i+2*n+10]:=5*h:
>od:

```

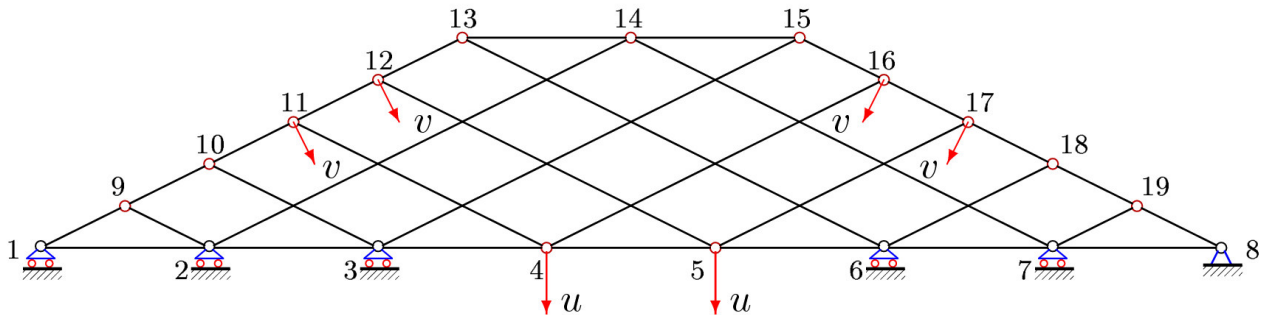


Рис. 2. Схема возможных скоростей, $n=1$

Направляющие косинусы усилий в системе уравнений равновесия узлов определяются по координатам узлов и длинам стержней. Решение в системе Maple дает аналитические выражения для усилий во всех стержнях. Для расчета прогиба используется формула Максвелла – Мора в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-7} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF).$$

Обозначено: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса, E — модуль упругости, F — площадь сечения стержней. Будем считать, что все стержни имеют одинаковую жесткость EF . Было обнаружено, что при $n=1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, \dots$ определитель системы уравне-

ний равновесия обращается в ноль. Это соответствует кинематической изменяемости конструкции. Для подтверждения кинематической изменяемости найдена схема возможных скоростей (случай $n=1$, рис. 3). Часть шарниров и стержней в этой схеме неподвижна. Стержни 11-12, 4-5 и 16-17 движутся мгновенно поступательно. Стержни 10-11, 12-13, 4-3 и им симметричные совершают мгновенные повороты вокруг своих мгновенных центров скоростей. Очевидна связь скоростей шарниров $v/c = u/a$, $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Аналогичную схему возможных скоростей можно найти при других n , отмеченных как недопустимые при решении системы уравнений.

Таким образом, рассматривая ферму при допустимых значениях n вида $n = ((-1)^k - 1 + 10k) / 4, k = 1, 2, 3, \dots$, можно получить последовательность решений для прогиба и найти ее общий член. Замечено, что формула для прогиба при этом имеет один и тот же вид

$$\Delta = \frac{P(A_k a^3 + C_k c^3)}{2h^2 EF}. \quad (1)$$

Для обнаружения закономерности в последовательности коэффициентов при a^3 потребовалось проанализировать 18 выражений и получить последовательность 37, 637, 1249, 5285, 8225, 21393, 29541, 60385, 77773, 137685, 169497, 272717, 325289, 488905, 569725, 813673, 931381, 1278445. Оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple получено следующее линейное однородное рекуррентное уравнение девятого порядка:

$$A_k = A_{k-1} + 4A_{k-2} - 4A_{k-3} - 6A_{k-4} + 6A_{k-5} + 4A_{k-6} - 4A_{k-7} - A_{k-8} + A_{k-9}.$$

Интересно заметить, что коэффициенты этого уравнения (1, 4, -4, -6 ...) совпадают с коэффициентами аналогичного (но более высокого порядка) уравнения, полученного при анализе фермы с пятью внешними связями [5]. Оператор `rsolve` дает решение полученного рекуррентного уравнения в виде полинома четвертого порядка по k , с коэффициентами, зависящими от четности k :

$$A_k = (250k^4 + (212(-1)^k + 500)k^3 + (318(-1)^k + 518)k^2 + 412((-1)^k + 1)k + 225(-1)^k + 375) / 24.$$

Коэффициент C_k удовлетворяет уравнению $C_k = C_{k-1} + 2C_{k-2} - 2C_{k-3} - C_{k-4} + C_{k-5}$, также полученному оператором `rgf_findrecur`, и имеет вид

$$C_k = 5(2k^2 + 2((-1)^k + 1)k + 5(-1)^k + 7) / 4.$$

Зависимость безразмерного прогиба $\Delta' = EF \Delta / (P_{sum} L)$, вычисленного при постоянной длине пролета фермы $L = (4n + 10)a = 100$ м и постоянной, не зависящей от числа панелей нагрузке $P_{sum} = (2n + 9)P$, представлена кривыми на рис. 3. Информация о распределении от-

носительных усилий S_i / P в отдельных стержнях представлена на рис. 4. Наиболее сжатыми оказываются нижние стержни в боковых частях фермы (выделены синим цветом), наиболее растянутыми — стержни в нижнем поясе, но не в середине, как следовало ожидать, а между опорами 2 и 3.

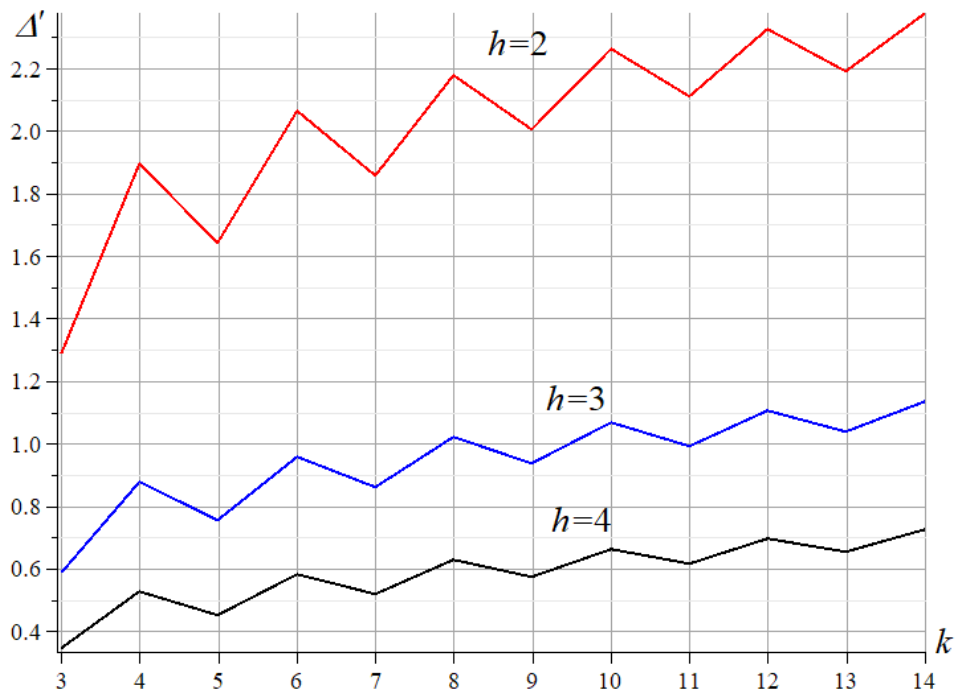


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей (h - в метрах)

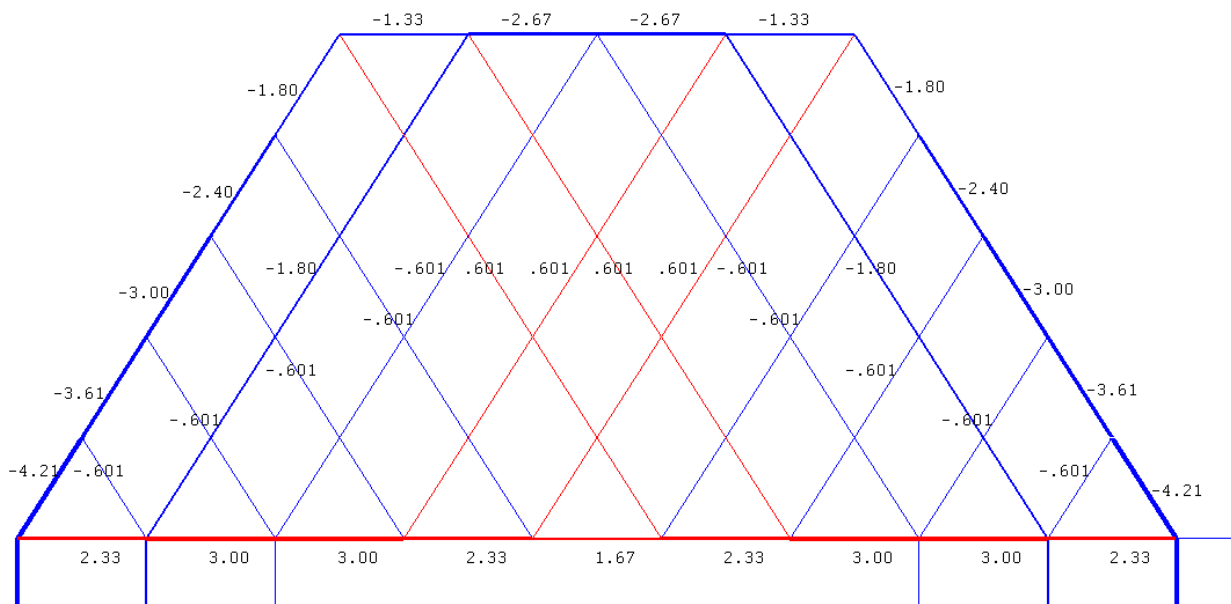


Рис. 4. Распределение усилий в стержнях фермы, $k=1, n=2$

Для фермы с $n=5$ распределение усилий существенно меняется (рис. 5). При $n=3$ и $n=4$ ферма становится мгновенно изменяемым механизмом и усилия в ферме не рассчитываются. Наиболее растянутые стержни занимают предсказуемое место в середине нижнего

2. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы/ М.Н. Кирсанов, А.Н. Маслов // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4–10.
3. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами/ М.Н. Кирсанов // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
4. Кирсанов М.Н. Статический анализ и монтажная схема плоской фермы/ М.Н. Кирсанов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2016. № 5 (39). С. 61-68.
5. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости / М.Н. Кирсанов// Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27-30
6. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики/ М.Н. Кирсанов. СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
7. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
8. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы/ М.Н. Кирсанов // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 2 (101). С. 165–171.
9. Astakhov S. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan. Construction and Architecture. Vol. 5 № 2, 2017. pp. 50-54. https://doi.org/10.12737/article_596f6d7da0eb38.03494133

References

1. Kirsanov M. N. Formulas for calculating deflection and effort in lattice truss // Mechanization of construction. 2017. 4 (874). Pp. 20-23.
2. Kirsanov M. N., Maslov A.N. The formula for the deflection of multiple lattice beam truss calculation // Structural mechanics and calculation of structures. 2017. 2(271). Pp. 4-10.
3. Kirsanov M. N. Calculation of the deflection of a flat lattice truss with four supports // Transport Construction. 2017. №7. Pp.15-17.
4. Kirsanov M. N. Sticheskiy analiz i montazhnaya skhema ploskoj fermy // Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova. 2016. No. 5 (39). Pp. 61-68
5. Kirsanov M.N. Vyvod formuly dlya progiba reshetchatoj fermy, imeyushchej sluchai kinematicheskoy izmenyaemosti // Stroitel'naya mekhanika i konstrukcii. 2017. № 1 (14). Pp. 27–30.
6. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
7. Kirsanov M.N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52–58. doi: 10.5862/MCE.64.
8. Kirsanov M. N. Analiticheskoe issledovanie zhestkosti prostranstvennoj staticheski opredelimoj fermy // Vestnik MGSU. 2017. Vol. 12. Vol. 2 (101). Pp. 165–171.
9. Astakhov S. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan. Construction and Architecture. Vol. 5 № 2, 2017. Pp. 50–54. https://doi.org/10.12737/article_596f6d7da0eb38.03494133

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет
"МЭИ"

Студент

А.С. Широков

Россия, г. Москва, тел.: +7(926)963-78-06;

e-mail: as.Shirokov@yandex.ru

National Research University "MPEI",
Student

A.S. Shirokov

Moscow, Russia, tel.: +7(926)963-78-06;

e-mail: as.Shirokov@yandex.ru

А.С. Широков

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СМЕЩЕНИЯ ОПОРЫ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ВЕРХНИМИ ШПРЕНГЕЛЯМИ

Плоская ферма имеет две опоры. Усилия в стержнях находятся методом вырезания узлов, а смещение подвижной опоры - с помощью формулы Максвелла - Мора. Методом индукции с использованием системы компьютерной математики Maple получено обобщение решения на произвольное число панелей. Выводятся формулы для усилий в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

Ключевые слова: ферма, смещение опоры, интеграл Мора, метод индукции, Maple.

A. S. Shirokov

ANALYTICAL CALCULATION OF THE SUPPORT OFFSET OF BEAM TRUSS WITH UPPER SHPRENGELS

A flat truss has two supports. The forces in the rods are determined by the method of cutting the knots, and the displacement of the mobile support by the Maxwell - Mohr formula. The method of induction using the computer mathematic system Maple obtained a generalization of the solution to an arbitrary number of panels. Formulas for forces in the most compressed and stretched rods are obtained.

Key words: truss, deflection, Maxwell - Mohr integral, induction method, Maple.

Плоская ферма под действием нагрузки получает вертикальный прогиб и смещение подвижных опор. В ферме одна подвижная опора, другая неподвижная (рис. 1). Большое значение имеет информация о смещении опоры, так как неконтролируемое смещение опоры под действием нагрузки может иметь необратимые последствия. Рассматривается нагрузка на верхний пояс. Для определения горизонтального смещения подвижной опоры необходимо определить усилия во всех стержнях фермы от действия нагрузки и усилия от единичной силы в направлении исследуемого горизонтального смещения левой (подвижной) опоры. Все преобразования производятся в системе Maple по программе [1]. По этой же программе ранее были получены аналитические решения для плоских [2-8] и пространственных ферм [9].

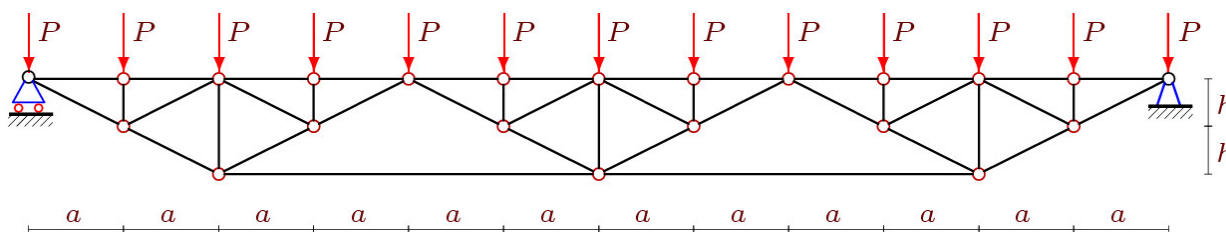


Рис. 1. Ферма при $n=3$

Стержни и узлы фермы нумеруются (рис. 2). В программу вводятся координаты узлов и структура решетки, которая задается специальными векторами, содержащими номера концов стержней.

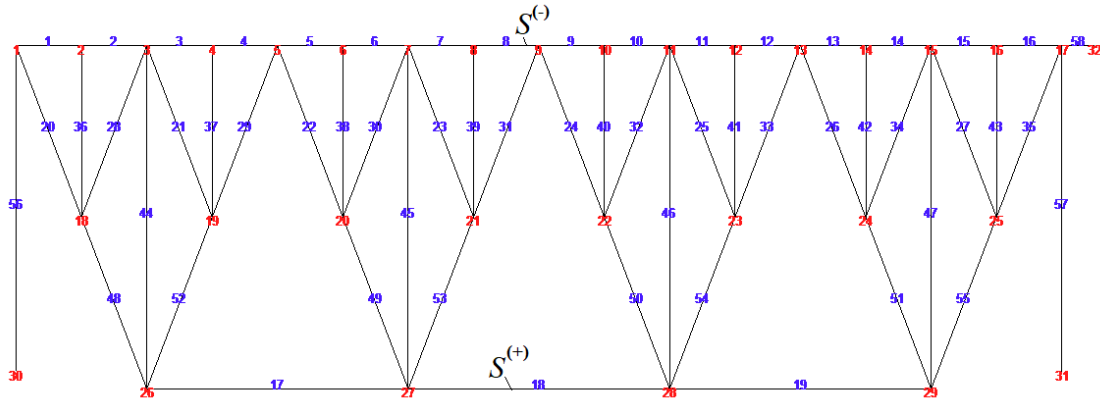


Рис. 2. Схема фермы с пронумерованными стержнями и узлами, $n=4$

Обозначим через n число панелей фермы. Каждая условная панель состоит из четырех стержней верхнего пояса, трех стоек и шести раскосов, образующих шпренгельную решетку. Приведем фрагмент программы кодирования стержней:

```
> for i to 4*n do N[i]:=i,i+1; od;
> for i to n-1 do N[i+4*n]:=6*n+1+i,i+6*n+2; od;
> for i to 2*n do
  N[i+5*n-1]:=2*i-1,i+4*n+1;
  N[i+7*n-1]:=2*i+1,i+4*n+1;
  N[i+9*n-1]:=2*i,i+4*n+1;
od;
> for i to n do
  N[i+11*n-1]:=4*i-1,i+6*n+1;
  N[i+12*n-1]:=2*i+4*n,i+6*n+1;
  N[i+13*n-1]:=2*i+4*n+1,i+6*n+1;
od;
```

Воспользуемся формулой Максвелла-Мора для определения смещения опоры, которая выглядит как

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(l)} l_i / (EF),$$

где $S_i^{(P)}$ – усилия в стержнях от внешней вертикальной нагрузки P , действующей на всю ферму, $S_i^{(l)}$ – усилия от единичной горизонтальной силы, приложенной к левой опоре, l_i – длины стержней.

Жесткость стержней на растяжение-сжатие EF принята одинаковой для всей конструкции. Постепенно увеличивая число пролетов в ферме, заметим, что решение всякий раз имеет один и тот же вид $\Delta EF = -PA_n a^2 / h$, где коэффициенты A_n образуют следующую последовательность: 6, 28, 82, 184, 350, 596, 938, 1392, 1974, 2700. Используя функцию **rgf_findrecur** пакета **genfunc** системы Maple (эта функция требует четное число аргументов), получим из этого ряда рекуррентное уравнение:

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

Решение уравнения с начальными данными $A_1 = 6, A_2 = 28, A_3 = 82, A_4 = 184$ можно получить с помощью функции **rsolve** той же системы Maple. Итоговая формула имеет вид

$$\Delta EF = -PA_n a^2 / h, \text{ где } A_n = n(8n^2 + 10) / 3.$$

С увеличением высоты фермы уменьшается смещение опоры. На рис. 3 кривые зависимости (1) построены при $a=10$. На графике (рис. 3) относительное смещение обозначено через $\Delta' = \Delta EF / P$.

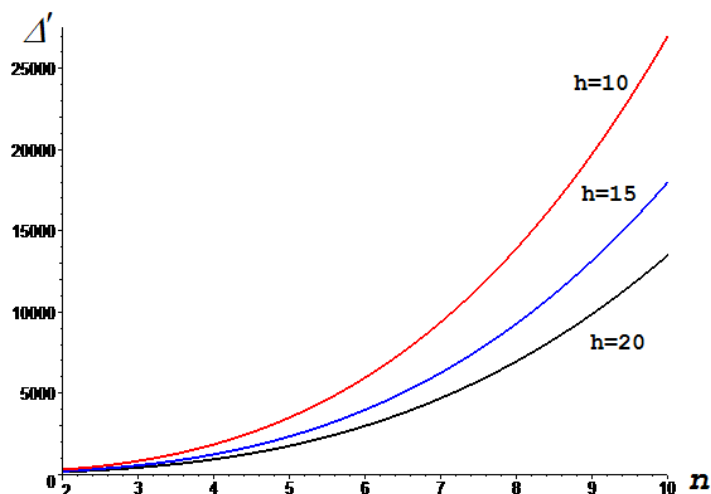


Рис. 3. Зависимость смещения от количества панелей

Найдем усилия в наиболее сжатых и растянутых стержнях.

Очевидно, наиболее сжатый (с отрицательным значением усилий) при такой нагрузке будет стержень в середине верхнего пояса с номером $2n$, а наиболее растянутый — в середине нижнего пояса с номером $9n/2 + ((-1)^n - 1)/4, n > 1$ (см. рис. 2). С помощью функции **rgf_findrecur** получаем рекуррентные соотношения, соответствующие последовательностям искомым усилий. Решение этих уравнений дает функция **rsolve**. Нагрузка на наиболее сжатый стержень определяется зависимостью $S^{(-)} = P(2n^2 - (-1)^n)a / (2h)$, а на наиболее растянутый — $S^{(+)} = P(2n^2 + (-1)^n - 1)a / (2h), n > 1$.

Для сравнения приведем формулу для прогиба (вертикальное смещение среднего узла), полученную в [10] для исследуемой фермы методом индукции:

$$EF \Delta = P(A_n a^3 + C_n c^3 + H_n h^3) / (2h^2),$$

где $c = \sqrt{h^2 + a^2}$ — длина раскоса, а коэффициенты имеют вид $A_n = (20n^4 + 10n^2 - 3(-1)^n + 3) / 6, C_n = (8n^2 - (-1)^n + 1) / 2, H_n = 4(1 - (-1)^n)$.

Библиографический список:

1. Кирсанов М.Н. Maple и Maplelet. Решения задач механики / М.Н. Кирсанов. - СПб.: Изд-во Лань, 2012. - 512 с.
2. Широков А.С. Смещение опор двухпролетной неразрезной фермы, нагруженной сосредоточенной силой / А.С. Широков // Научный альманах. - 2017. - № 2-3(28). - С. 290–292. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.290
3. Kirsanov M.N. The mathematical model of dome covering industrial facility / M.N. Kirsanov S.V. Astahov // Architecture and Engineering. - 2017. - №2(2). - Pp.8-14. DOI: 10.23968/2500-0055-2017-2-2-8-14

4. Кирсанов М.Н. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы/ М.Н. Кирсанов, А.П. Суворов // Вестник МГСУ. – 2017.– Т. 12.– Вып. 8 (107).– С. 869–875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875
5. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба арочной фермы/ М.Н. Кирсанов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. – № 5. – С. 50-55
6. Кирсанов М. Н. Анализ усилий и деформаций в корабельном шпангоуте моделируемого фермой / М.Н. Кирсанов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2017. — Т. 9. — № 3. — С. 560–569. DOI: 10.21821/2309-5180-2017-9-3-560-569
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice // M.N. Kirsanov, N.V. Zaborskaya // Magazine of Civil Engineering. 2017. – No. 3. – Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
8. Belyankin N.A. Analysis of the deflection of the flat statically determinate girder / N.A. Belyankin, A. Y. Boyko // Science Almanac.– 2017. – No. 2-3(28). – С. 246-249. https://elibrary.ru/download/elibrary_28913792_32626016.pdf
9. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice / M.N. Kirsanov // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. Pp. 52 - 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
10. Белянкин Н.А. Аналитический расчет прогиба балочной фермы с усиленной треугольной решеткой / Н.А. Белянкин, А.Ю. Бойко, М.Н. Кирсанов // Строительство и архитектура. – 2017. – Т. 5. – 2 (15). – С. 42–44. DOI 10.12737/25106

References

1. Kirsanov M. N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems. SP.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Shirokov A.S. Displacement of supports of a two-span continuous truss loaded with concentrated force // Scientific almanac. 2017. No. 2-3 (28). P. 290-292. DOI: 10.17117 / na.2017.02.03.290
3. Kirsanov M.N., Astahov S.V. The mathematical model of dome covering an industrial facility // Architecture and Engineering. 2017. № 2 (2). P. 8-14. DOI: 10.23968 / 2500-0055-2017-2-2-8-14
4. Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Investigation of deformations of a planarly externally statically indeterminate truss // Vestnik MGSU. Vol. 12. No. 8 (107). P. 869-875. DOI: 10.22227 / 1997-0935.2017.8.869-875
5. Kirsanov M.N. Analysis of arch arch deflection // Construction mechanics of engineering structures and structures. 2017. No. 5. P. 50–55
6. Kirsanov MN Analysis of forces and deformations in a ship frame modeled by a truss // Bulletin of the State Naval and River Fleet University named after Admiral SO Makarov. 2017. Vol. 9. No. 3. P. 560–569. DOI: 10.21821 / 2309-5180-2017-9-3-560-569
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. P. 61-67. doi: 10.18720 / MCE.71.7.
8. Belyankin N.A., Boyko A.Y. Analysis of the deflection of the flat statically determinate girder // Science Almanac. 2017. No. 2-3 (28). P. 246-249. https://library.ru/download/elibrary_28913792_32626016.pdf
9. Kirsanov M. N. Analysis of the buckling of spatial truss with cross lattice // Magazine of Civil Engineering. 2016. No. 4. P. 52 – 58. DOI: 10.5862/MCE.64.5
10. Belyankin N., Boyko A., Kirsanov M.N. Analytical calculation of the deflection of a beam truss with a reinforced triangular lattice // Construction and architecture (2017). Vol. 5. Issue 2 (15). P. 42-44. DOI 10.12737 / 25106

УДК 624.04

Национальный исследовательский университет
"МЭИ",
Студент
Е. В. Доманов
Россия, г. Москва, тел.: +7(999)602-98-50
e-mail: domanov312@mail.ru

National Research University "MPEI",
Student
E.V.Domanov
Moscow, Russia, tel.: +7(999)602-98-50
e-mail: domanov312@mail.ru

Е.В. Доманов

ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПРОГИБА БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С КРЕСТООБРАЗНОЙ РЕШЕТКОЙ

С помощью операторов системы символьной математики Maple построена математическая модель статически определимой плоской фермы. Рассмотрено действие нагрузки, равномерно распределенной по узлам верхнего или нижнего пояса. Выведена формула зависимости прогиба фермы от размеров и числа панелей. Решение может быть использовано при проектировании стержневых строительных конструкций и оценке численных решений.

Ключевые слова: статически определимая ферма, прогиб фермы, метод индукции, Maple

E. V. Domanov

THE DERIVATION OF THE FORMULA FOR DEFLECTION OF A GIRDER WITH A CROSS TYPE LATTICE

With the help of operators of the system of symbolic mathematics Maple, a mathematical model of a statically determinate flat truss constructed. The effect of a load uniformly distributed over the nodes of the upper or lower belt is considered. The formula for the dependence of the deflection of the truss on the size and number of panels is derived. The solution can be used in the design of rod building structures and the evaluation of numerical solutions.

Keywords: statically determinate truss, deflection of a truss, induction method, Maple.

Аналитические решения задач строительной механики полезны для оценки точности численных решений, полученных в пакетах стандартных программ, основанных в основном на методе конечных элементов, и при проектировании перспективных сооружений. Развитие программ символьной математики (Mathematica, Maple, Maxima и др.) дает надежды на получение замкнутых решений (формул) простой заменой численной моды на символьную в известных алгоритмах метода сечений или метода вырезания узлов при расчете ферм. Однако реальные расчеты показывают, что возникающие здесь трудности зачастую снижают ценность полученных решений либо из-за необычайной громоздкости формул, либо из-за весьма узкой области применимости результата. В некоторых подходах [1] даются только алгоритм и расчетные уравнения задач деформирования стержневых (в том числе и статически неопределимых) конструкций. Однако простых рабочих формул для прогибов конструкции при этом подходе получить не удастся. Ограничения в применимости метода возникают также, если решение содержит недостаточное число параметров задачи, например только ее размеры. Ввод же в решение числа панелей или стержней расширяет применимость полученных формул. В [2-11] решение этой задачи применительно к выводу формул прогиба плоских ферм достигнуто с помощью метода индукции.

Рассмотрим схему фермы с крестообразной решеткой (рис. 1). В ферме с n панелями в половине пролета, считая по нижнему поясу, число стержней – $n_s = 8n + 8$, включая три опорные стержня (один в подвижной опоре и два в правой неподвижной), число внутренних шарниров – $m = 4n + 4$.

© Доманов Е.В., 2017

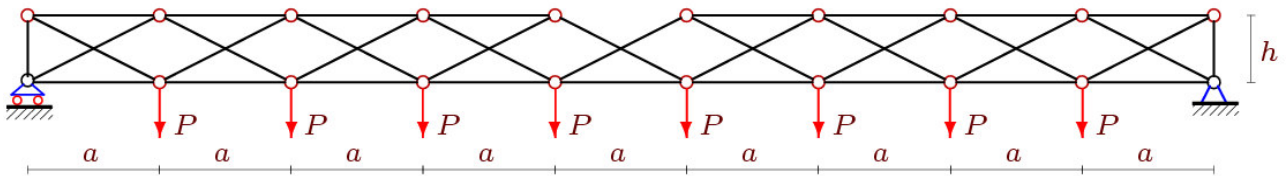


Рис. 1. Ферма при $n=4$. Нагрузка на нижний пояс

Для определения прогиба в упругой стадии работы конструкции по формуле Максвелла - Мора необходимо знать усилия во всех деформируемых стержнях. Решение в символьной форме получим по программе [12], написанной на языке Maple. В программу вводятся координаты узлов и структура фермы. Начало координат располагается в левой подвижной опоре. Сначала нумеруются узлы нижнего пояса (слева направо), затем верхнего. Приведем соответствующий фрагмент ввода координат в программу:

```
for i to 2*n+2 do
  x[i]:=a*i-a:      y[i]:=0:
  x[i+2*n+2]:=a*i-a: y[i+2*n+2]:=h:
end:
```

Направляющие косинусы усилий в системе уравнений равновесия узлов определяются по их координатам. Сначала вычисляются проекции L_{xy} стержней на оси координат и их длины $L[i]$:

```
for i to ns do
  Lxy[1]:=x[N[i][2]]-x[N[i][1]]:
  Lxy[2]:=y[N[i][2]]-y[N[i][1]]:
  L[i]:=subs(a^2+h^2=c^2, sqrt(Lxy[1]^2+Lxy[2]^2)); end;
```

Замена $\text{subs}(a^2+h^2=c^2,..)$ сделана для компактной записи результата. Затем в цикле по числу стержней ns заполняется квадратная матрица G уравнений равновесия:

```
for i to ns do
  for j to 2 do
    t:=2*N[i][2]-2+j:
    if t<= ns then G[t,i]:=-Lxy[j]/L[i]:fi;
    t:=2*N[i][1]-2+j:
    if t<= ns then G[t,i]:= Lxy[j]/L[i]:fi;
  end;
end;
```

Решение системы линейных уравнений получается методом обратной матрицы $G1:=1/G$: $S1:=G1.B1$ без привлечения оператора **LinearSolve** и дает выражения для усилий во всех стержнях в символьной форме. Практика счета в символьной форме показывает, что применение операторов пакета **LinearAlgebra** требует большего времени для счета. Прогиб

определяется по формуле Максвелла – Мора в виде: $\Delta = \sum_{i=1}^{n_s} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF)$. Здесь обозначено:

но: $S_i^{(P)}$ — усилия в стержнях от заданной нагрузки, l_i — длины стержней, $S_i^{(1)}$ — усилия от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса, EF — жесткость стержней, принятая одинаковой для всей конструкции. Формула для прогиба (вертикальное смещение узла в середине пролета) для всех чисел панелей имеет один и тот же вид:

$$\Delta_n = \frac{A_n a^3 + B_n h^3 + C_n c^3}{h^2 EF}. \quad (1)$$

При обнаружении общего члена последовательности коэффициентов при a^3 потребовалось проанализировать 16 выражений прогиба и получить следующие числа: 7, 53, 210, 574, 1289, 2515, 4468, 7372, 11515, 17185, 24742, 34538, 47005, 62559, 81704, 104920. Оператором `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple для членов последовательности выведено линейное однородное рекуррентное уравнение седьмого порядка:

$$A_n = 3A_{n-1} - A_{n-2} - 5A_{n-3} + 5A_{n-4} + A_{n-5} - 3A_{n-6} + A_{n-7}.$$

С помощью оператора `rsolve` получено решение рекуррентного уравнения, задающее искомую формулу для коэффициента при a^3 в формуле (1)

$$A_n = (34n^4 + 68n^3 + 44n^2 + (5 - 3(-1)^n)2n + 3(1 - (-1)^n)) / 24. \quad (2)$$

Аналогично находим, что коэффициент B_n удовлетворяет однородному уравнению

$$B_n = B_{n-1} + 3B_{n-2} - 3B_{n-3} - 3B_{n-4} + 3B_{n-5} + B_{n-6} - B_{n-7}$$

и имеет вид

$$B_n = (2n^3 + 3(1 - (-1)^n)n^2 + 3(1 - (-1)^n)n - (-1)^n + 1) / 4. \quad (3)$$

Интересно заметить, что рекуррентные уравнения для коэффициентов A_n и C_n идентичны, но решения зависят от начальных условий и получаются разные. Для коэффициента C_n решение имеет вид

$$C_n = (8n^4 + 16n^3 + 14n^2 + (3 - (-1)^n)2n - (-1)^n + 1) / 8. \quad (4)$$

Выражение (1) с коэффициентами (2-4), зависящими от числа панелей, есть аналитическое решение задачи о прогибе фермы под действием равномерной нагрузки по узлам нижнего пояса.

Теперь рассмотрим случай, когда усилия приложены к узлам верхнего пояса (рис. 2).

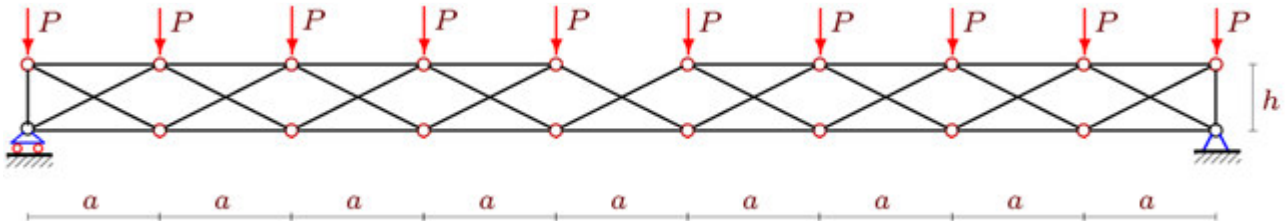


Рис. 2. Нагрузка по верхнему поясу, $n=4$

С помощью оператора `rgf_findrecur` пакета `genfunc` системы Maple были найдены рекуррентные уравнения для каждого коэффициента формулы прогиба (1). Они оказались одинаковыми, как для нижнего, так и для верхнего случая нагружения фермы. Решение для коэффициентов при нагружении верхнего пояса отличается от предыдущего лишь несколькими слагаемыми и имеет вид

$$A_n = (34n^4 + 68n^3 + 20n^2 + (3(-1)^n - 7)2n - (1 + (-1)^n)3) / 24,$$

$$B_n = (2n^3 + 3(1 - (-1)^n)n^2 + (1 - 5(-1)^n)n - (-1)^n + 1) / 4,$$

$$C_n = (8n^4 + 16n^3 + 6n^2 + ((-1)^n - 1)2n + (-1)^n - 1) / 8.$$

Пусть задана суммарная нагрузка на ферму P_* . Сравнительные зависимости безразмерного прогиба $\Delta' = EF\Delta_n / (P_*L)$, вычисленного при постоянной длине пролета фермы

$L=(2n+1)a=100$ м и нагрузке $P = P_* / (2n)$ при загрузении нижнего пояса и $P = P_* / (2n + 2)$ при загрузении узлов верхнего пояса, представлены кривыми на рис. 3. Кривые для нагрузки по нижнему поясу выделены утолщением, по верхнему — пунктиром. Высота фермы h задана в метрах. При малых числах n решение предсказуемо — увеличение высоты фермы приводит к уменьшению прогиба. При $n=11$ кривые прогиба пересекаются. Зависимость получается обратная.

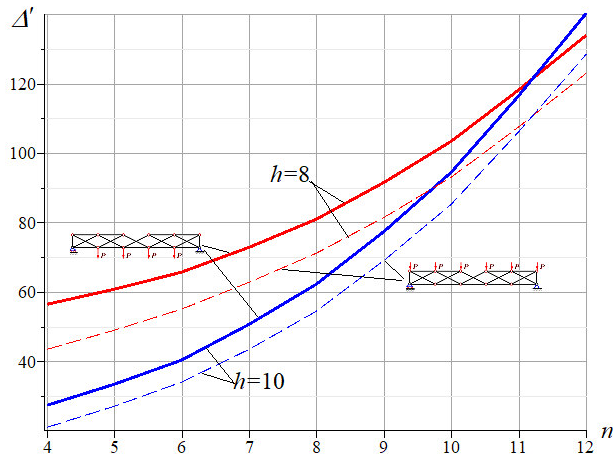


Рис. 3. Зависимость прогиба от числа панелей

Методом индукции при поддержке операторами системы Maple в [4-11] выведены формулы для прогиба плоских ферм различной структуры в аналитической форме. Более сложные задачи для пространственных конструкций решены этим методом в [13-15].

Библиографический список

1. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоского призматического каркаса/ Л.С. Рыбаков // Известия Российской Академии наук. Сер. Механика твердого тела. 2001. № 4. С. 106-118.
2. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // Science Almanac. 2016. N 4-3(18). С.257-259.
3. Кирсанов М.Н. Исследование деформаций плоской внешне статически неопределимой фермы/ Н.М.Кирсанов, А.П. Суворов // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. Вып. 8 (107). С. 869-875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875
4. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба и усилий в решетчатой ферме/ М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. 2017. 4 (874). С. 20-23.
5. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет прогиба распорной фермы с произвольным числом панелей/ М.Н. Кирсанов // Механизация строительства. 2017. № 3 (873). С. 26-29
6. Кирсанов М.Н. Вывод формулы для прогиба решетчатой фермы, имеющей случаи кинематической изменяемости/ М.Н. Кирсанов // Строительная механика и конструкции. 2017. № 1 (14). С. 27–30.
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. Magazine of Civil Engineering. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
8. Кирсанов М.Н. Расчет прогиба плоской решетчатой фермы с четырьмя опорами/ М. Н. Кирсанов // Транспортное строительство. 2017. №7. С.15-17.
9. Кирсанов М.Н. Формулы для расчета прогиба балочной многорешетчатой фермы/ М.Н. Кирсанов А.Н. Маслов // Строительная механика и расчет сооружений. 2017. 2(271). С. 4–10.

10. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
11. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа/М. Н. Кирсанов // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
12. Кирсанов М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики/ Кирсанов М.Н. - СПб.: Изд-во Лань, 2012. 512 с.
13. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы пространственного покрытия с крестообразной решеткой/ М.Н. Кирсанов // *Инженерно-строительный журнал*. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
14. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью / М.Н. Кирсанов // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 2. С. 2-6.
15. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли/ М.Н. Кирсанов // *Инженерно-строительный журнал*. 2014. №5(49). С. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4

Библиографический список

1. Rybakov L.S. Linear theory of plane prism girder. *News of Russian Academy of science. Series Mechanics of solid body*. 2001. № 4 . P. 106-118.
2. Ponamareva M.A. The displacement of the support trusses with parallel belts under uniform load // *Science Almanac*. 2016. N 4-3(18). С.257-259.
3. Kirsanov M.N., Suvorov A.P. Research of deformation of statistically indeterminate plane frame. *Bulletin of MGSU* 2017. V. 12. Issue. 8 (107). P. 869-875. DOI: 10.22227/1997-0935.2017.8.869-875
4. Kirsanov M.N. Formulas for calculation of bending and stresses in lattice girder. *Building mechanization*. 2017. 4 (874). P. 20-23.
5. Kirsanov M.N. Analytical design of bending of bracing girder with arbitrary number of panels . *Building Mechanization*. 2017. № 3 (873). P. 26-29
6. Kirsanov M.N. Formulation for bending of latticed girder having the cases of kinetic changing. *Structural Mechanics and construction*. 2017. № 1 (14). P. 27–30.
7. Kirsanov M.N., Zaborskaya N.V. Deformations of the periodic truss with diagonal lattice. *Magazine of Civil Engineering*. 2017. No. 3. Pp. 61–67. doi: 10.18720/MCE.71.7.
8. Kirsanov M.N. Calculation of bending of plane latticed girder with four piers. *Traffic construction*. 2017. №7. P.15-17.
9. Kirsanov M.N. Maslov A.M. Formulas for calculation of beam multi latticed girder. *Structural Mechanics and construction design*. 2017. 2(271). P. 4–10.
10. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // *Architecture and Engineering*. 2016. Т. 1. № 3. P. 14-17.
11. Kirsanov M.N. Analysis of bending latticed beam separator girder. *Engineer-building journal*. 2015. №5(57). С. 58–65. doi: 10.5862/MCE.57.5
12. Kirsanov M.N. Maple и Maplet. Solution of the problems of Mechanics. SP.: Pub. House Lan, 2012. 512 p.
13. Kirsanov M.N.. Analysis of girder bending of spatial cover with cruciform lattice. *Engineer-building journal*. 2016. № 4 (64). С. 52-58.
14. Kirsanov M.N. Analytical design of spatial bar regular structure with plane face. *Structural Mechanics and construction design*. 2015. № 2. P. 2-6.
15. Kirsanov M.N. Bending, torsion and asymptotic analysis of spatial bar cantilever. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. №5(49). P. 37–43. doi: 10.5862/MCE.49.4

16. УДК 539.319: 539.219.2: 624.07
Тульский государственный университет
Д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой
«Строительство, строительные материалы
и конструкции»
А.А. Трещев
Аспирант кафедры
«Строительство, строительные материалы
и конструкции»
А.В. Ромашина
Россия, г. Тула, тел.: +7(4872)25-71-08
e-mail: taa58@yandex.ru

Tula state university
Dr. of Tech Sc. professor, the head of the department
“Construction, building materials and structures”
A.A. Treshchyov
PhD student of the department “Construction, building materials and structures”
A.V. Romashina
Russia, Tula, ph. +7(4872)257108
e-mail: taa58@yandex.ru

А.А. Трещев, А.В. Ромашина

О КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛАСТИНКЕ С КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ НЕЛИНЕЙНО УПРУГОГО ОРТОТРОПНОГО МАТЕРИАЛА

Анализируется задача о концентрации напряжений для пластины с двумя отверстиями, воспринимающей одноосное растяжение равномерно распределённой нагрузкой. Пластина выполнена из материала, обладающего свойствами разносопротивляемости и ортотропии. Здесь адаптированы определяющие соотношения, представленные в пространстве нормированных напряжений. Математическая модель задачи построена с использованием метода конечных элементов в симплексной форме. Получены характерные распределения напряжений в зоне концентратора напряжений.

Ключевые слова: одноосное растяжение, плоское напряженное состояние, ортотропный разносопротивляющийся материал, концентрация напряжений.

A.A. Treshchyov, A.V. Romashina

ABOUT THE TENSION CONCENTRATION IN THE PLATE WITH CIRCULAR HOLES MADE OF NONLINEAR ELASTIC ORTHOTROPIC MATERIAL

The problem of stress concentration for the plate with two holes perceiving the uniaxial tension evenly under distributed load is analyzed. The plate is made of the material with different resistance and orthotropy properties. The defined ratios in normalized stresses are adapted here. Problem mathematical model is constructed using the finite element method in simplex form.

Keywords: uniaxial tension, plane stress, orthotropic different resistant material, stress concentration.

Практически все новые и традиционные анизотропные конструкционные материалы не подчиняются классическим законам упругопластического деформирования твердых тел, основанным на гипотезе единой кривой деформирования, причём в каждом из направлений. Их механические свойства зависят от вида напряженного состояния, у них могут проявляться дилатация и разносопротивляемость. Подобными свойствами обладают железобетоны, многие полимеры и конструкционные графиты, а также большинство композитов.

Очень часто для выполнения конструктивных, технологических, экономических и других требований приходится устраивать отверстия, пазы, выточки, нарушая тем самым сплошность элементов конструкций и сооружений транспортного строительства. В процессе эксплуатации они становятся местами резких скачков напряжений. Концентрация напряжений является одним из главных факторов, влияющих на прочность перфорированных элементов, а потому исследование влияния концентраторов на напряженно-деформированное

состояние конструктивных элементов из материалов с усложнёнными свойствами является актуальной задачей транспортного строительства

В качестве конкретного материала при постановке и решении задачи принят материал ПЗ6-50, который является ортотропным разносопротивляющимся, т.е. характеризуется тем, что механические свойства в направлении продольной ориентации отличаются от механических свойств в перпендикулярном направлении и описывается значительно большим (в сравнении с классическим ортотропным материалом) числом упругих механических параметров, полученных на основе ряда экспериментов, приведённых в работе [1].

Здесь рассматривается тонкая физически нелинейная пластина с парой отверстий радиусом r , с центрами, расположенными на расстоянии d друг от друга, находящаяся в равновесии. Она имеет конечные размеры $2a$ и $2b$ по направлению основных осей декартовой системы координат X_1 и X_2 и нагружена в своей плоскости растягивающей равномерно распределённой по толщине h нагрузкой p_x , которая приложена к внешнему контуру Γ_2 в соответствии с рис. 1. Нагружение простое при активной деформации, в связи с чем для описания свойств материала принимаются уравнения состояния, представленные через параметры нормированного пространства напряжений [1].

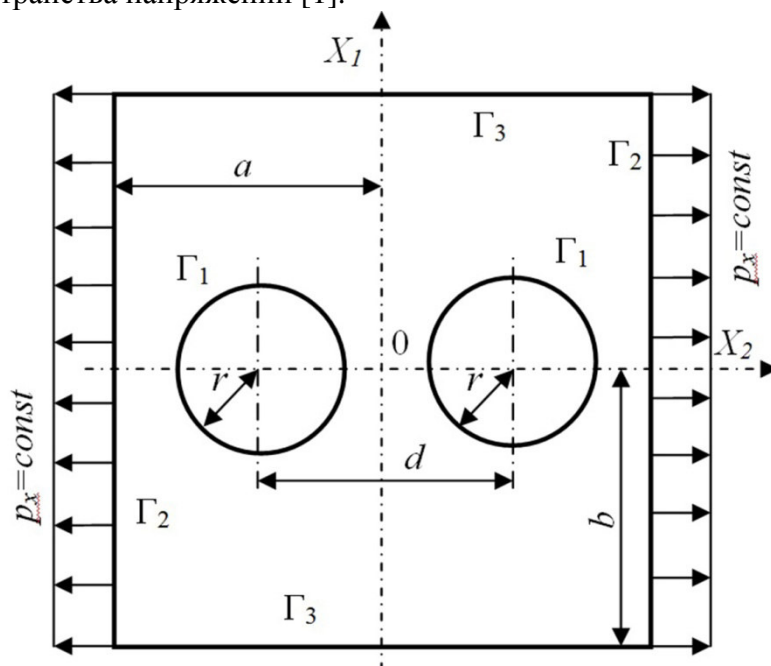


Рис. 1. Расчетная схема пластины

Функции, описывающие напряженно-деформированное состояние, зависят только от координат X_1 и X_2 . Вектор перемещений имеет две ненулевые составляющие $u_1 = u$, $u_2 = v$ в направлении соответствующих осей. Перемещения $u_3 = w$ в направлении оси X_3 есть, но они имеют второстепенное значение и определяются после решения задачи из уравнения $w = e_{33}x_3$. Деформации e_{33} не зависят от координаты X_3 и малы настолько, что далее не рассматриваются.

Уравнения связи между основными компонентами тензора малой деформации и перемещениями в рамках задачи транспортного строительства в условиях плоского напряженного состояния принимаются для пластинки в виде:

$$e_{11} = u_{,1}; \quad e_{22} = u_{,2}; \quad \gamma_{12} = u_{,2} + u_{,1}. \quad (1)$$

По всей толщине пластинки и на её плоских поверхностях имеется равенство: $\sigma_{33} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$.

В состоянии плоского напряжения в ортотропном теле через каждую точку проходят две перпендикулярные плоскости упругой симметрии, в силу чего на основании закона упругости для разносопротивляющегося материала получается [1]

$$\begin{aligned} e_{11} &= (A_{1111} + B_{1111} \cdot \alpha_{11}) \cdot \sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22})] \cdot \sigma_{22}; \\ e_{22} &= [A_{1122} + B_{1122} \cdot (\alpha_{11} + \alpha_{22})] \cdot \sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222} \cdot \alpha_{22}) \cdot \sigma_{22}; \\ \gamma_{12} &= (A_{1212} + B_{1212} \cdot \sqrt{2} \cdot \alpha_{12}) \cdot \tau_{12}, \end{aligned} \quad (2)$$

где A_{ijkl} , B_{ijkl} – константы, определяемые из экспериментов по деформированию образцов материала, вырезанных вдоль главных осей ортотропии и под углом 45° к ним через механические характеристики E_i^\pm , ν_{ij}^\pm , E_{ij}^\pm (модули упругости, коэффициенты поперечной деформации при растяжении и сжатии вдоль главных осей анизотропии и модули упругости при растяжении и сжатии образцов, вырезанных под углом 45° к этим осям) [1]:

$$\begin{aligned} A_{1111} &= (1/E_1^+ + 1/E_1^-)/2; & B_{1111} &= (1/E_1^+ - 1/E_1^-)/2; \\ A_{2222} &= (1/E_2^+ + 1/E_2^-)/2; & B_{2222} &= (1/E_2^+ - 1/E_2^-)/2; \\ A_{1122} &= -(\nu_{12}^+/E_2^+ + \nu_{12}^-/E_2^-)/2; & B_{1122} &= -(\nu_{12}^+/E_2^+ - \nu_{12}^-/E_2^-)/2; \\ A_{1212} &= (1/E_{12}^+ + 1/E_{12}^-) - 0,25[(1/E_1^+ + 1/E_1^- + 1/E_2^+ + 1/E_2^- - 2(\nu_{21}^+/E_1^+ + \\ &+ \nu_{21}^-/E_{21}^-)]; & B_{1212} &= \sqrt{2}(1/E_{12}^+ - 1/E_{12}^-) - 0,125\sqrt{2} [(1/E_1^+ - 1/E_1^- + 1/E_2^+ - \\ &- 1/E_2^-) - 4(\nu_{21}^+/E_1^+ - \nu_{21}^-/E_1^-)]; & \nu_{ij}^+/E_j^+ &= \nu_{ji}^+/E_i^+; & \nu_{ij}^-/E_j^- &= \nu_{ji}^-/E_i^-; \\ \alpha_{ij} &- нормированные напряжения; & \alpha_{ij} &= \sigma_{ij}/S = \sigma_{ij}/\sqrt{\sigma_{ij} \cdot \sigma_{ij}}; & \sigma_{ij} &- симметричный \\ &&&&&& \text{тензор напряжений.} \end{aligned}$$

Уравнения связи между компонентами тензора малых деформаций и напряжениями в условиях плоского напряжения в форме метода переменных «параметров упругости» Биргера приводятся к виду [2]

$$\{e\} = [C]\{\sigma\}, \quad (3)$$

где $\{e\} = \{e_{11}e_{22}\gamma_{12}\}^T$ – вектор-столбец ненулевых деформаций; $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}\sigma_{22}\tau_{12}\}^T$ – вектор-столбец ненулевых напряжений; $[C]$ – матрица податливостей ортотропного разносопротивляющегося материала, зависящих от вида напряженного состояния, компоненты которой определяются через тензорные параметры (2).

Из преобразования уравнения (3) с учетом соотношений (2) вытекает зависимость между напряжениями и деформациями при плоском напряженном состоянии:

$$\{\sigma\} = [D(\alpha_{ij})]\{e\}, \quad (4)$$

где $[D(\alpha_{ij})] = [C]^{-1}$ – матрица жесткостей материала, зависящая от вида напряженного состояния.

Принимая за основу определяющие соотношения (2), мы тем самым не меняем уравнения статико-геометрической природы. Поэтому остаются справедливыми основные положения и зависимости классической механики деформирования анизотропных материалов. Для данной задачи уравнения равновесия при условном отсутствии объемных сил представляются следующим образом [3]:

$$\sigma_{11,1} + \tau_{12,2} = 0; \quad \tau_{12,1} + \sigma_{22,2} = 0. \quad (5)$$

При статических граничных условиях на контуре пластинки имеем

$$\begin{aligned} p_{1\nu} &= \sigma_{11} \cos(\nu x_1) + \tau_{12} \cos(\nu x_2); \\ p_{2\nu} &= \sigma_{22} \cos(\nu x_2) + \tau_{12} \cos(\nu x_1), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\cos(\nu x_k)$ - косинусы углов между осями x_k и внешней нормалью к площадке, на которую действуют усилия с проекциями $p_{k\nu}$, ($k = 1,2$).

Сохраняется одно из общих уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана:

$$e_{11,22} + e_{22,11} = \gamma_{12,12}. \quad (7)$$

Совокупность уравнений (1) – (5), (7) в сочетании с граничными условиями (6) позволяет произвести постановку краевых задач о плоском напряженном состоянии по методу сил или методу перемещений. Ввиду существенной сложности получаемых нелинейных дифференциальных уравнений математическую модель рассматриваемой задачи предлагается строить в рамках метода конечных элементов с расчетным алгоритмом, разработанным на основе методики пошагового нагружения. Поэтому необходимость формулировки разрешающих дифференциальных уравнений краевой задачи отпадает.

В рамках формирования математической модели принимается плоская конечно-элементная модель с двумя степенями свободы в узле. Вся область, ограниченная контуром пластинки разбивается треугольными симплекс конечными элементами [4]. В зоне расположения концентраторов напряжений сетка конечных элементов сгущается. Перемещения в произвольной точке элемента $u(x_1, x_2)$ и $v(x_1, x_2)$ через перемещения узлов элемента $\{U\}$ представляются следующим образом:

$$\{u \ v\}^T = [N]\{U\}, \quad (8)$$

где $\{U\} = \{u_i \ v_i \ u_j \ v_j \ u_k \ v_k\}^T$; i, j, k – номера узлов конечного элемента.

Поля перемещений в пределах выбранного в задаче треугольного элемента определяются с помощью интерполяционного полинома первой степени [4]: $u = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_2$; $v = a_4 + a_5 x_1 + a_6 x_2$. Функции формы $[N]$ принимаются в виде

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad (9)$$

где $N_i = (a_i + b_i x_1 + c_i x_2) / 2\Delta$, ($i \rightarrow j \rightarrow k$), Δ – площадь треугольного элемента; $a_i = x_{1j} x_{2k} - x_{1k} x_{2j}$; $b_i = x_{1i} - x_{2k}$; $c_i = x_{1k} - x_{2j}$.

Используя уравнения (1), (2) и продифференцированную матрицу $[N]$, получим зависимости между деформациями и перемещениями узлов элемента:

$$\{e\} = [B]\{U\}, \quad (10)$$

$$\text{где } [B] = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}; \quad 2\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_{1i} & x_{2i} \\ 1 & x_{1j} & x_{2j} \\ 1 & x_{1k} & x_{2k} \end{vmatrix}.$$

Связь между напряжениями и деформациями в матричной форме принимается в виде (4). Формулировка принятого МКЭ основана на вариационном принципе Лагранжа. При этом потенциальная энергия конечного элемента может быть представлена в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{U\}^T [B]^T [D(\sigma)] [B] \{U\} dV - \{U\}^T \{P\} - \int_S \{U\}^T [N]^T \{p\} dS, \quad (11)$$

где dV – объем элемента; S – контур внешней границы конечного элемента; $\{p\}$ – вектор внешней поверхностной нагрузки в проекциях на оси декартовой системы координат; $\{P\}$ – вектор внешней узловой нагрузки.

Для плоского напряженного состояния конечного элемента с толщиной h приходим к следующему общему уравнению метода конечных элементов (после минимизации функционала (11) по вектору $\{U\}$ и приведения распределенной поверхностной нагрузки к сосредоточенным узловым силам):

$$[K]\{U\} = \{P\}, \quad (12)$$

где $[K] = [B]^T [D(\sigma)] [B] h \Delta$ – матрица жесткости конечного элемента.

Векторы $\{U\}$, $\{P\}$ (14) рассматриваются как вектор неизвестных узловых перемещений и вектор внешней узловой нагрузки на пластину.

Решение системы алгебраических уравнений рассматриваемой задачи с учетом глобальной матрицы жесткости, полученной сложением матриц жесткости отдельных конечных элементов и соответствующих граничных условий, производится методом Гаусса. Исходная нелинейная задача решается методом «переменных параметров упругости» в сочетании с пошаговым нагружением. На каждом шаге нагружения параметры напряженно-деформированного состояния пластины уточняются итерационно с проверкой сходимости вычислительного процесса. Сходимость оценивалась по величинам узловых перемещений смежных этапов приближения: $\left| (\{U\}^k - \{U\}^{k-1}) / \{U\}^{k-1} \right| < \delta_u$, где k – номер итерации; δ_u – устанавливаемая точность $\delta_u = 0,001$.

Для иллюстрации реализации разработанной математической модели рассматривается прямоугольная пластина с размерами $2a=300$ мм, $2b=100$ мм, толщиной $h=20$ мм с отверстиями радиусом $r=25$ мм и расстоянием между ними 20 мм, нагруженная равномерно распределенной растягивающей нагрузкой интенсивностью P (см. рис. 1) и выполненная из полимерного трехармированного стеклопластикового композита П36-50. Для указанного композита известны следующие механические характеристики [5]: $E_1^+ = 10300$ МПа; $E_1^- = 11770$ МПа; $E_2^+ = 17600$ МПа; $E_2^- = 18540$ МПа; $E_{12}^+ = 5250$ МПа; $E_{12}^- = 5470$ МПа; $\nu_{21}^+ = 0,11$; $\nu_{21}^- = 0,136$. В расчете рассматривалась половина пластины, а отброшенная часть заменялась соответствующими граничными условиями симметрии. Расчетная схема к задаче с разбиением на конечные элементы приведена на рис. 2 (числами обозначена нумерация узлов).

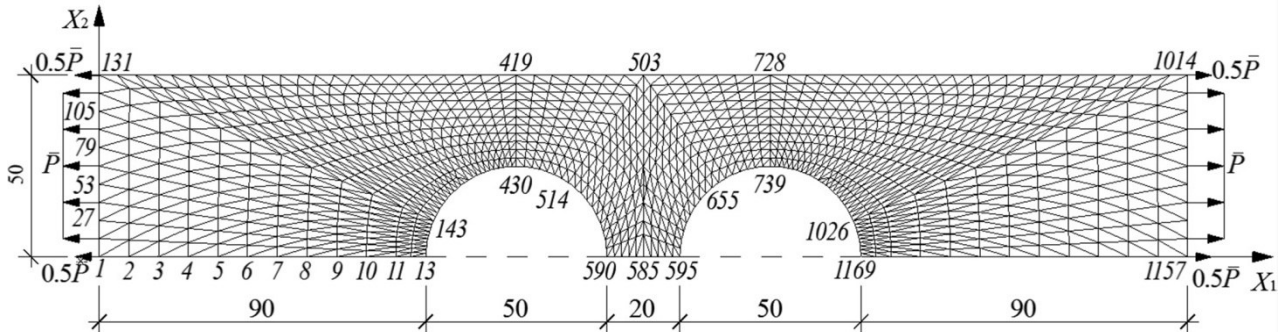


Рис. 2. Расчетная конечно-элементная схема

Для оценки влияния усложненных свойств композита П36-50 на разных этапах нагружения были приняты три характерных уровня нагрузки: $P_1 = 10$ МПа, $P_2 = 15$ МПа, $P_3 = 20$ МПа. Интен-

сивности нагрузки P_1 на рис. 3 соответствуют кривые, обозначенные цифрой 1, P_2 – цифрой 2, P_3 – цифрой 3. Распределение напряжений, представленное сплошными кривыми, соответствует классическому решению для однородных ортотропных материалов. Штриховые кривые – решения, полученные на основе представленной математической модели, учитывающей двоякую анизотропию (начальную ортотропию и наведенную деформационную анизотропию за счет разносопротивляемости материала).

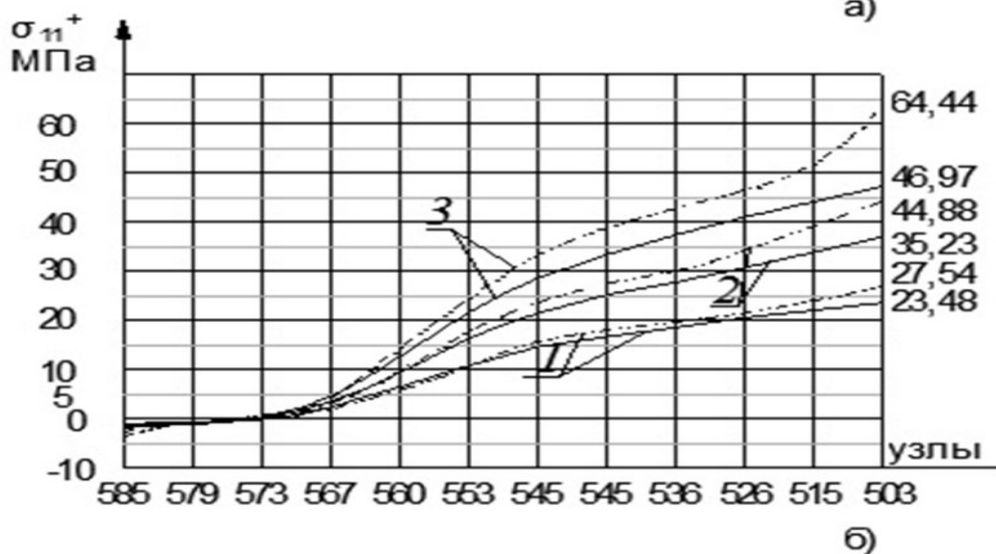
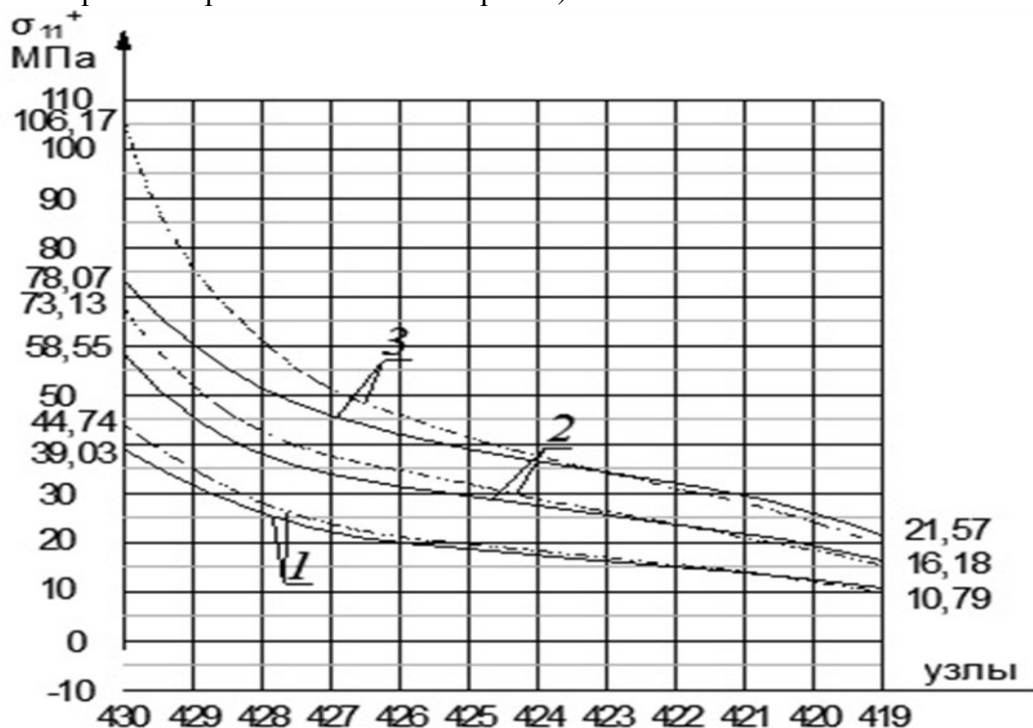


Рис. 3. Нормальные напряжения вдоль X_1 при растяжении (см. рис. 2):
а) по узлам 419-430; б) по узлам 585-503

Из рис. 3, а, б видно, что при уровне нагрузки P_1 слабо проявляются свойства разносопротивляемости полимера ПЗ6-50 (напряжения σ_{11} и σ_{22} слабо отличаются от величин, полученных по классической теории). Так, в зоне концентрации напряжений (по узлам 430-590, см. рис. 2) отличие напряжений σ_{11} от классического решения достигает 15,2 %. По мере увеличения нагрузки влияние разносопротивляемости становится более ощутимым:

24,9 % при значении нагрузки P_2 и 36,7 % при $-P_3$. Разница напряжений σ_{22} в аналогичной зоне может достигать 38,4%. На рис 3, б видно, что по линии 503-585 отличие значений напряжений σ_{11} от данных классической теории составляет 17,3 % при значении нагрузки P_1 , 27,4 % - при P_2 и 37,2 %- при $-P_3$.

Результаты решения рассмотренной задачи без учета усложненных свойств материала, полученные с помощью разработанной в данной работе математической модели (при обнулении нелинейных членов), и решение, полученное для однородного ортотропного материала с помощью конечно-элементного пакета ANSYS Mechanical APDL 17.2, неплохо согласуются между собой, так как разница значений σ_{11} в зоне концентрации не превышает 1,3 %.

Выводы

Из приведённых результатов можно сделать вывод о том, что неучет явления разносопротивляемости приводит к значительным погрешностям при вычислении основных характеристик напряженно-деформированного состояния перфорированных элементов конструкций, подвергающихся одноосному растяжению. Это особенно заметно проявляется в непосредственной близости к отверстиям. Учет зависимости деформационных и прочностных характеристик от вида напряженного состояния вносит значительные поправки в результаты исследований и поэтому необходим для получения достоверных результатов инженерных расчетов.

Библиографический список

1. Трещев А.А. Теория деформирования и прочности материалов с изначальной или наведенной чувствительностью к виду напряженного состояния. Определяющие соотношения / А.А.Трещев. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2016. – 328 с.
2. Петров В.В. Методы расчета конструкций из нелинейно-деформируемого материала / В.В.Петров, И.В.Кривошеин. – М.: АСВ, 2009. – 208 с.
3. Амбарцумян С.А., Разномодульная теория упругости / С.А.Амбарцумян. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
4. Неделин А.В. Напряженное состояние пластинки из дилатирующего материала, ослабленного отверстием / А.В. Неделин, А.А.Трещев // Известия вузов. Строительство. – 2001. – №8. – С. 16–20.
5. Розе А.В. Трехармированные тканые материалы / А.В. Розе, И.Г. Жигун, М.Н. Душин // Механика полимеров. – 1970. – №3. – С. 471–476.

References

1. Treshchoyv A.A. Theory of deformation and strength of materials with initial or induced sensitivity to the type of stress state. The governing relations. Moscow; Tula: RAASN; TulGU, 2016. – 328 p.
2. Petrov V.V., Krivoshein I.V.. Methods of calculation of structures made of nonlinear material. M: ASV, 2009. – 208. – 208 p.
3. Ambartsumyan S.A. Heterogeneous theory of elasticity. M.: Nauka. 1982. – 320 p.
4. Nedelin A.V., Treshchev A.V.. The Stress state of the plate from woolen material weakened by holes . News of universities. Construction. – 2001. – No. 8. – P. 16-20.
5. Roze A.V. Zhigun I.G., Dushin M.N. Three reinforced fabrics . A.V.Roze. Mechanics of polymers. – 1970. – No. 3. – Pp. 471-476

Тулский государственный университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры строительства,
строительных материалов и конструкций
И.А. Судакова
Магистрант кафедры «Строительство,
строительные материалы и конструкции»
А.Б. Цветкова
Россия, г. Тула, тел.: +7(4872)25-71-08;
e-mail: sudakova.inga@yandex.ru

Tula State University
PhD of Tech. Sc, associate professor of department
“Construction, building materials and structures”
I.A. Sudakova
Undergraduate student of the department “Construc-
tion, building materials and structures”
A.B. Tsvetkova
Russia, Tula, ph. +7(4872)25-71-08
e-mail: sudakova.inga@yandex.ru

И.А. Судакова, А.Б. Цветкова

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ИЗ ОРТОТРОПНЫХ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

На основе физических соотношений, предложенных в работах Матченко Н.М., Трещева А.А., для ортотропных разнородных сред рассмотрена постановка задачи о собственных колебаниях круглой пластинки. При определении параметров напряженно-деформированного состояния учитывается влияние поперечного сдвига. Исследуется влияние разнородности.

Ключевые слова: теория упругости, круглые пластины, разнородные ортотропные материалы, материалы, свободные колебания

I.A. Sudakov, A.V. Tsvetkova

SELF-INDUCED VIBRATIONS OF CIRCULAR PLATES FROM ORTHOTROPIC DIFFERENTLY RESISTING MATERIALS

The problem of natural vibrations of circular plate for orthotropic different resistant environments Based on the physical relations suggested by A. M. Martchenko and A.A. Treshchyov was analyzed. While determining deflected mode parameters the transverse shear influence is under consideration. Different resistance affect is researched.

Keywords: theory of elasticity, circular plates, different resistant orthotropic materials, self-oscillations

В настоящее время большое внимание уделяется решению практически важных задач описания процесса деформирования элементов конструкций, выполненных из материалов, имеющих неклассические свойства. Зависимость механических характеристик ортотропного материала от вида напряженного состояния относится к числу таких задач. Известно, что вид напряженного состояния может оказать настолько сильное влияние на параметры жесткости, прочности, пластичности и ползучести, что неучет данного эффекта для ряда материалов приведет к неверному описанию процесса деформирования.

Большинство существующих теорий деформирования разнородных сред имеет ряд существенных недостатков, таких как:

- неучет влияния сложных видов напряженного состояния при определении жесткости материала;
- привлечение к расчету кусочных и непотенциальных зависимостей;
- большое количество констант, входящих в определяющие соотношения;
- наличие ограничений, накладываемых на некоррелируемые константы материалов;
- узкая область устойчивости потенциалов деформаций или напряжений.

В данной работе используется подход к построению определяющих соотношений ортотропных разносопротивляющихся сред, свободных от известных недостатков, предложенный в работах [2, 3]. На основе принятых физических зависимостей выполняется постановка задачи о собственных колебаниях круглой пластины.

Рассмотрим круглую пластинку средней толщины радиусом R из ортотропного разносопротивляющегося материала, обладающего цилиндрической анизотропией. Задачу удобно рассматривать в цилиндрической системе координат.

При решении поставленной задачи введены традиционные для данного класса исследований технические гипотезы:

- 1) нормальное к срединной плоскости перемещение W не зависит от координаты Z ($e_z = 0$);
- 2) нормаль к срединной плоскости после деформации поворачивается на угол Ψ_r относительно оси r и Ψ_θ - относительно оси θ ;
- 3) при определении параметров напряженного состояния влиянием нормальных напряжений σ_z пренебрегаем ввиду их малости.

Опираясь на эти предположения, в общем случае движения пластины, получим

$$u_r(r, \theta, z, t) = u_r(r, \theta, t) + z \cdot \psi_\theta(r, \theta, t); \quad u_\theta(r, \theta, z, t) = u_\theta(r, \theta, t) + z \cdot \psi_r(r, \theta, t);$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = w(r, \theta, t). \quad (1)$$

Выражения для деформаций с учетом принятых гипотез примут вид

$$e_r = u_{r,r}; \quad e_\theta = u_{\theta,\theta}/r + u_r/r; \quad e_z = 0;$$

$$\gamma_{\theta z} = u_{\theta,z} + u_{z,\theta}/r; \quad \gamma_{rz} = u_{z,r} + u_{r,z}; \quad \gamma_{r\theta} = u_{r,\theta}/r + u_{\theta,r} - u_\theta/r. \quad (2)$$

В связи с осевой симметрией поставленной задачи функции, характеризующие напряженно-деформированное состояние пластины, будут зависеть только от радиальной координаты r , тогда для отличных от нуля перемещений и деформаций можно записать [1]

$$u_r(r, z, t) = u_r(r, t) + z \cdot \psi_\theta(r, t); \quad u_z(r, z, t) = w(r, t);$$

$$e_r = u_{r,r} + z \cdot \psi_{\theta,r}; \quad e_\theta = u_r/r + z \cdot \psi_\theta/r; \quad \gamma_{rz} = w_{,r} + \psi_\theta. \quad (3)$$

В произвольной ортогональной системе координат закон упругости для ортотропного разносопротивляющегося материала при линейной аппроксимации диаграмм деформирования предлагается записать следующим образом [2]

$$e_{11} = (A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11})\sigma_{11} + [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{22} +$$

$$+ [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{33};$$

$$e_{22} = [A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22})]\sigma_{11} + (A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22})\sigma_{22} +$$

$$+ [A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33})]\sigma_{33};$$

$$e_{33} = [A_{1133} + B_{1133}(\alpha_{11} + \alpha_{33})]\sigma_{11} + (A_{2233} + B_{2233}(\alpha_{22} + \alpha_{33}))\sigma_{22} +$$

$$+(A_{3333}+B_{3333}\alpha_{33})\sigma_{33};$$

$$e_{12}=(A_{1212}+B_{1212}\sqrt{2}\alpha_{12})\tau_{12}; \quad e_{13}=(A_{1313}+B_{1313}\sqrt{2}\alpha_{13})\tau_{13};$$

$$e_{23}=(A_{2323}+B_{2323}\sqrt{2}\alpha_{23})\tau_{23}. \quad (4)$$

Число независимых характеристик ортотропного материала равно 180,

где A_{ijkl} , B_{ijkl} - компоненты тензоров четвертого ранга, для определения которых достаточно простейших опытов по одноосному растяжению и сжатию в направлении главных осей анизотропии и под углом 45° к ним в плоскостях упругой симметрии данного материала. Проведя испытание стандартных образцов ортотропного материала на одноосное растяжение и сжатие поочередно вдоль материальных осей x_1 , x_2 , x_3 и под углом 45° к ним, можно получить

$$\begin{aligned} A_{kkkk} &= (1/E_k^+ + 1/E_k^-) / 2; \quad B_{kkkk} = (1/E_k^+ - 1/E_k^-) / 2; \\ A_{ijij} &= -(v_{ij}^+ / E_j^+ + v_{ij}^- / E_j^-) / 2; \quad B_{ijij} = -(v_{ij}^+ / E_j^+ - v_{ij}^- / E_j^-) / 2; \\ A_{ijij} &= (1/E_{ij}^+ + 1/E_{ij}^-) - 0,25[(1/E_i^+ + 1/E_j^+ + \\ &\quad + 1/E_i^- + 1/E_j^- - 2(v_{ji}^+ / E_i^+ + v_{ji}^- / E_i^-)]; \\ B_{ijij} &= \sqrt{2}(1/E_{ij}^+ - 1/E_{ij}^-) - 0,125\sqrt{2}[(1/E_i^+ + 1/E_j^+ - 1/E_i^- - \\ &\quad - 1/E_j^-) - 4(v_{ji}^+ / E_i^+ - v_{ji}^- / E_i^-)], \end{aligned} \quad (5)$$

где E_i^\pm , v_{ij}^\pm - модули упругости и коэффициенты поперечной деформации в направлениях соответствующих главных осей анизотропии; E_{ij}^\pm - модули упругости в направлениях под углом 45° к соответствующим главным осям анизотропии.

Принятые физические соотношения (4) и условия симметрии рассматриваемой задачи приводят к выводу о том, что тензор напряжений в данном случае имеет только три ненулевые компоненты

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \\ C_{1122} & C_{2222} & \\ & & C_{1313} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где элементы матрицы податливостей определяются следующим образом:

$$C_{1111} = A_{1111} + B_{1111}\alpha_{11}; \quad C_{2222} = A_{2222} + B_{2222}\alpha_{22};$$

$$C_{1122} = A_{1122} + B_{1122}(\alpha_{11} + \alpha_{22}); \quad C_{1313} = A_{1313} + B_{1313}\sqrt{2}\alpha_{13}.$$

Записывая уравнения (6) относительно напряжений, получим

$$\sigma_r = D_{11}(u_{r,r} + z \cdot \psi_{\theta,r}) + D_{12} \cdot (u_r + z \cdot \psi_{\theta}) / r;$$

$$\sigma_{\theta} = D_{12}(u_{r,r} + z \cdot \psi_{\theta,r}) + D_{22} \cdot (u_r + z \cdot \psi_{\theta}) / r;$$

$$\tau_{rz} = D_{44}(w_{,r} + \psi_{\theta}), \quad (7)$$

где коэффициенты D_{ij} зависят от физико-механических свойств материала:

$$D_{ii} = C_{jjjj} / (C_{iiii}C_{jjjj} - (C_{ijij})^2); \quad D_{ij} = -C_{ijij} / (C_{iiii}C_{jjjj} - (C_{ijij})^2); \quad (i, j = 1, 2)$$

$$D_{44} = 1 / C_{1313}. \quad (8)$$

Очевидно, что принятые за основу те или иные физические соотношения не вносят изменений в уравнения движения круглой пластинки, поэтому они приняты в традиционном виде [1]:

$$N_{r,r} + \frac{(N_r - N_{\theta})}{r} = 0; \quad Q_{r,r} + \frac{Q_r}{r} - \frac{\gamma}{g} \cdot w_{,tt} = 0;$$

$$M_{r,r} + \frac{(M_r - M_{\theta})}{r} - Q_r - \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{h^3}{12} \psi_{,tt} = 0. \quad (9)$$

Значения интегральных характеристик, внутренних усилий и моментов определяются традиционным образом:

$$N_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k dz; \quad M_k = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_k z dz; \quad (k = r, \theta); \quad Q_r = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{rz} dz. \quad (10)$$

Для полноты системы разрешающих уравнений необходимо задать условия симметрии в центре пластины ($r = 0$)

$$u_r = 0, \quad \psi_{\theta} = 0, \quad w_{,r} = 0$$

и граничные условия на контуре ($r = R$) в зависимости от вида опирания.

Например, жесткое защемление

$$u_r = 0, \quad \psi_{\theta} = 0, \quad w = 0.$$

Задача сводится к определению собственных значений относительно гармонической частоты ω . При этом определитель характеристического уравнения равен 0. Для решения системы дифференциальных уравнений, ввиду сложности выражений для нелинейных компонентов, используется конечно-разностная аппроксимация повышенной точности. Интегрирование по толщине пластины выполняется по правилу Симпсона.

Выводы

На основе физических соотношений, предложенных в работах Матченко Н.М., Трещева А.А., для ортотропных разнсопротивляющихся сред выполнена математическая постановка задачи о собственных колебаниях круглой пластинки. При определении параметров напряженно-деформированного состояния учитывается влияние поперечного сдвига. Исследуется влияние разнсопротивляемости. Описаны методы решения задачи. Приведены разрешающие уравнения.

Библиографический список

1. Амбарцумян С.А. Разномодульная теория упругости/ С.А. Амбарцумян. - М.: Наука, 1982. - 320 с.
2. Матченко Н.М. Теория деформирования разнсопротивляющихся материалов. Определяющие соотношения/ Н.М. Матченко, А.А. Трещев. – Москва – Тула: РААСН. – ТулГУ. – 2000. – 149 с.
3. Судакова И.А. Описание деформирования структурно анизотропных материалов, чувствительных к виду напряженного состояния/ И.А. Судакова, А.А. Трещев // Материалы 30-й Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы современного строительства». – Пенза: ПГАСА, 1999. – С.114.

References

1. Ambartsumyan S.A. Multimodulus elasticity theory / S.A.Ambartsumyan. - M.: Nauka, 1982. - 320 p.
2. Matchenko N.M., Treshchoyv A.A. Theory of deformation of variously resistant materials. Defining ratios. Moscow – Tula. – The TSU. – 2000. – 149 p.
3. Sudakova I.A., Treshchoyv A.A. Description of the structural deformation of anisotropic materials sensitive to the kind of the stress state. Materials of the 30th of All-Russian scientific and technical conference “Actual problems of modern construction” – Penza: SCIENTIFIC, 1999. – P. 114.

УДК 539.3: 624.04

*Орловский государственный университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры
строительных конструкций и материалов
А.А. Черняев
Россия, г. Орел, тел.: +7(4862)73-43-95
e-mail: Chernyev87@yandex.ru*

*Orel State University
PhD of Tech. Sc., associate professor of the depart-
ment of building structures and materials
A.A. Chernyev
Russia, Oryol, tel.: +7(4862)734395;
e-mail: Chernyev87@yandex.ru*

А.А. Черняев

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ МЕТОДОМ ИНТЕРПОЛЯЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Рассматриваются некоторые двумерные задачи теории упругости и строительной механики, связанные с односвязной выпуклой областью и описываемые дифференциальными уравнениями эллиптического типа второго и четвертого порядка: устойчивость, свободные колебания и поперечный изгиб пластинок, колебания и поперечный изгиб мембраны, кручение призматического бруса. Для определения соответствующих задач интегральных физико-механических характеристик (критическое усилие, основная частота колебаний, максимальный прогиб, геометрическая жесткость сечения) предлагается использовать метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ), разработанный А.В. Коробко, с заменой коэффициента формы на отношение внутреннего к внешнему конформных радиусов плоской области. Показано, что такая замена позволяет повысить точность получаемых решений до 1,5...2 раз.

Ключевые слова: двумерные задачи теории упругости и строительной механики, пластинки, мембраны, призматический брус, устойчивость, колебания, изгиб, кручение, метод интерполяции по коэффициенту формы, метод интерполяции по отношению конформных радиусов.

A.A. Chernyev

SOLUTION OF BI-VARIATE PROBLEMS OF THEORY OF ELASTICITY AND STRUCTURAL MECHANICS BY INTERPOLATION METHOD WITH APPLICATION OF CONFORMAL RADIUSES

There are analyzed some bi-variate problems of the theory of elasticity and construction mechanics connected with one-coherent convex area and described by differential equations of elliptic type of the second and fourth order: stability, free oscillations and a cross bend of plates, oscillations and cross bending of membrane, prism beam torsion. For definition of the problems connected with the integral physical – mechanical characteristics (critical forces, main frequency of oscillations, maximal bending, geometric rigidity of section) there was suggested to apply the method of interpolation according to the coefficient of a form (МИКФ) developed by A.V. Korobko changing coefficient of form by the ratio of internal to external conform radiuses of flat area. Such change raise the accuracy of received solutions up to 1,5...2 times.

Keywords: bi-variate problems of the theory of elasticity and construction mechanics, plates, membranes, prismatic bar, stability, oscillations, bending, torsion, interpolation method of form coefficient, an interpolation method on the relation of conformal radiuses.

Основные методы решения двумерных задач теории упругости и строительной механики, технической теории пластинок. Геометрические методы

Все задачи технической теории пластинок сводятся к решению краевых задач для одного или нескольких дифференциальных уравнений с двумя переменными. Нахождение точных решений этих уравнений возможно лишь в ряде частных случаев, наиболее элементарных: круглая и кольцевая пластинки под осесимметричной нагрузкой; прямоугольная пла-

© Черняев А.А., 2017

стинка, две стороны которой шарнирно оперты, а две другие имеют произвольные граничные условия, эллиптическая пластинка, жестко защемленная по контуру, под равномерно распределенной нагрузкой и ряд других задач. Во всех остальных случаях используют приближенные методы, в большей части численные.

Вариационные методы В. Ритца, Б.Г. Галеркина, С.П. Тимошенко, Э. Треффца, Л.В. Канторовича и др. [1] применимы в основном для пластинок в виде прямоугольника и правильного треугольника; они достаточно сложны и трудоемки, когда заданы комбинированные граничные условия по контуру пластинок.

Метод R-функций Рвачёва, метод коллокаций, метод компенсирующих нагрузок и др. в некоторых случаях являются более предпочтительными по сравнению с вариационными и численными. Однако они также достаточно трудоемки и в большинстве случаев неприменимы к задачам, связанным со сложными формами пластинок и комбинированными граничными условиями.

Численные методы (метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ) и др. [2]) для обеспечения высокой точности решений требуют привлечения мощных ЭВМ. При их использовании производится однократный расчет, при котором нет возможности отследить поведение искомого решения при изменении геометрических параметров и форм пластинок. Тем не менее в настоящее время эти методы (преимущественно МКЭ) являются наиболее распространенными и реализуются в современных программных комплексах ANSYS, SCAD, APM Civil Engineering и др.

В тех случаях, когда необходимо оперативно получить оценку некоторой интегральной физико-механической характеристики (ФМХ) или не требуется высокая точность решения, что особенно актуально на начальной стадии проектирования, часто применяют геометрические методы. Такие методы позволяют избежать решения сложных дифференциальных уравнений, не требуют мощных ЭВМ и сводятся к геометрическому моделированию формы плоской области (пластинки). При этом выбирается геометрическая характеристика формы области, выступающая в роли основного аргумента, по которому оцениваются искомые решения. Среди геометрических методов следует отметить изопериметрический метод (ИЗПМ), примененный впервые всемирно известными математиками Г. Полия и Г. Сеге [3] для решения некоторых задач математической физики, а для решения двумерных задач строительной механики и теории упругости – одним из авторов настоящей статьи [4]. Более перспективным является метод интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [5], разработанный профессором А.В. Коробко, который стал логическим развитием ИЗПМ. В этих методах в качестве геометрического аргумента для определения интегральных ФМХ пластинок используется интегральная характеристика формы плоской области – коэффициент формы K_f . Эта геометрическая характеристика использовалась в математической физике Г. Полия и Г. Сеге [3], а термин «коэффициент формы» введен В.И. Коробко. Подробнее с этой характеристикой, ее изопериметрическими свойствами и закономерностями изменения при различных геометрических преобразованиях области можно познакомиться в работах [3 - 5].

В настоящей статье для решения задач технической теории пластинок предлагается использовать новый геометрический аргумент – безразмерную геометрическую характеристику формы плоской области в виде отношения внутреннего к внешнему конформных радиусов \bar{r}/\bar{r} . Говоря о внутреннем конформном радиусе, здесь и далее подразумеваем его максимальное значение. Этот аргумент аналогичен коэффициенту формы. Конформные радиусы по отдельности широко используются при решении многих прикладных задач математической физики, гидро- и аэродинамики, магнитогидродинамики и др. [3, 6], а как отношение в теории пластинок впервые были использованы в 1994 году при исследовании задач устойчивости [7].

Двумерные задачи теории упругости, решаемые геометрическими методами

Рассмотрим известные дифференциальные уравнения двумерных задач теории упругости, сгруппированные по признаку общности структуры:

– группа дифференциальных уравнений эллиптического типа четвертого порядка (1), включающая задачи поперечного изгиба, свободных колебаний и устойчивости пластинок;

– группа дифференциальных уравнений эллиптического типа второго порядка (уравнения Пуассона) (2), включающая задачи поперечного изгиба растянутых мембран, свободных колебаний мембран и задачу кручения упругого призматического бруса:

$$\begin{cases} D\Delta^2\Delta^2w - q = 0, \\ D\Delta^2\Delta^2w - \beta^2w = 0, \\ D\Delta^2\Delta^2w - q_0\Delta^2w = 0, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta^2w + q/p = 0, \\ \Delta^2w + \lambda^2w = 0, \\ \Delta^2w + 2 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

В выражениях (1) и (2) приняты следующие обозначения:

$D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость пластинки (E – модуль упругости материала первого рода; h – толщина пластинки; ν – коэффициент Пуассона); Δ – оператор Лапласа; $\beta^2 = \omega_1^2 m/D$ – собственное значение дифференциального уравнения колебаний пластинок; $\lambda^2 = \omega_1^2 m/p$ – собственные значения дифференциального уравнения колебаний мембран; w – для пластинки и мембраны функция прогибов, для бруса – функция напряжений; q – интенсивность равномерно распределенной поперечной нагрузки на пластинку или мембрану; q_0 – интенсивность усилия равномерного сжатия пластинки; p – интенсивность усилия равномерного растяжения мембраны; ω_m – частота свободных колебаний мембраны; m – масса единицы площади пластинки или мембраны.

Представим функцию прогибов (и напряжений) в виде произведения максимального прогиба w_0 на единичную функцию $f(x, y)$, удовлетворяющую условию $1 \geq f(x, y) \geq 0$:

$$w = w(x, y) = w_0 f(x, y). \quad (3)$$

Подставив ее в дифференциальные уравнения и проинтегрировав их по площади области A (площади пластинки, мембраны или поперечного сечения бруса) получим следующие выражения для определения соответствующих интегральных ФМХ в рассматриваемых задачах [4, с. 231]:

$$\begin{cases} (w_0)_i = \frac{qA}{D} / \iint \Delta^2 \Delta^2 f dA, \\ (\omega_0)_i^2 = \frac{D}{m} \iint \Delta^2 \Delta^2 f dA / \iint f dA, \\ q_{0, \text{кр}} = D \iint \Delta^2 \Delta^2 f dA / \iint \Delta^2 f dA; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} (w_0)_i = -\frac{qA}{p} / \iint \Delta^2 f dA, \\ (\omega_0)_i^2 = -\frac{p}{m} \iint \Delta^2 f dA / \iint f dA, \\ (w_0)_a = -2A / \iint \Delta^2 f dA, \end{cases} \quad (5)$$

где $(w_0)_п$ – максимальный прогиб пластинки (мембраны); $(w_0)_м$ – максимальный прогиб мембраны; $q_{0, \text{кр}}$ – критическое усилие при потере устойчивости пластинки; $(w_0)_б$ – максимальное значение функций напряжений бруса.

Физико-математическая аналогия в двумерных задачах теории упругости с отношением конформных радиусов

Приведем вывод функциональной зависимости критического усилия при потере устойчивости пластинок $q_{0, \text{кр}}$ от величины отношения конформных радиусов, подсчитанных для

областей, ограниченных их контуром, полученный в работе [7]. В работе [3, с. 139] с помощью вариационного представления собственного значения дифференциального уравнения свободных колебаний мембраны λ^2 и конформного представления внутренности ее области при отображении на единичный круг получено следующее неравенство:

$$\lambda^2 \leq \frac{j^2}{|c_1|^2 + \gamma_2 |c_2|^2 + \gamma_3 |c_3|^2 + \dots}, \quad (6)$$

где $j = 2,4048\dots$ – первый положительный корень бесселевой функции $J_0(x)$; c_k – коэффициенты разложения в степенной ряд функции, осуществляющей взаимно-однозначное конформное отображение области мембраны на единичный круг $|\zeta| < 1$;

$$\omega = f(z) = c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + c_3 \zeta^3 + \dots; \quad (7)$$

γ_k – отношение интегралов, вычисляемых через квадраты бесселевых функций:

$$\gamma_k = k^2 \int_0^1 [J_0(j\rho)]^2 \rho^{2k-1} d\rho / \int_0^1 [J_0(j\rho)]^2 \rho d\rho, \quad (8)$$

где $\rho = t/r(\varphi)$ – переменная функция прогибов $f = g(\rho)$ с линиями уровня, подобными контуру мембраны; $t = r(\varphi)$ – полярное уравнение контура мембраны. В выражении (6) равенство достигается для круглой мембраны. При $k \rightarrow \infty$ λ^2 в этом выражении стремится к своему действительному значению. При этом скорость сходимости ряда в знаменателе существенно зависит от степени «правильности» (в смысле близости формы мембраны к круглой): чем «правильнее» форма мембраны, тем быстрее сходится этот ряд.

С учетом известной мембранной аналогии, согласно которой собственное значение дифференциального уравнения свободных колебаний мембраны λ^2 , с точностью до размерного множителя, равно собственному значению дифференциального уравнения устойчивости пластинки полигональной формы с шарнирно опертым контуром β^2 от действия усилия равномерного сжатия, форма которой совпадает с формой мембраны, неравенство (6) можно переписать применительно к задаче устойчивости пластинки [7, с. 88]:

$$q_{0, \text{сб}} \leq \frac{j^2 D}{\dot{r}^2 \cdot \left(1 + \sum_1^k \gamma_k c_k^2\right)}, \quad (9)$$

где \dot{r} – внутренний конформный радиус области, равный модулю первого коэффициента разложения (7): $\dot{r} = |c_1|$. Выражение (9) позволяет находить значения критического усилия шарнирно опертых полигональных пластинок, равномерно сжатых по контуру, с высокой точностью при удержании большого числа членов в разложениях (7) (порядка 5...8). Определение коэффициентов c_i является крайне сложным и трудоемким процессом, в особенности для пластинок сложных форм, что существенно снижает эффективность использования выражения (9). Однако этот недостаток можно преодолеть.

Для правильных n -угольных, произвольных треугольных и ромбических областей справедливо равенство [3, с. 330]

$$A = \pi \dot{r} \bar{r}, \quad (10)$$

где A – площадь области; \dot{r} и \bar{r} – соответственно внутренний и внешний конформные радиусы областей. Преобразовав выражение (9) с учётом (10) [7, с. 96-97], получим

$$q_{0, \text{сб}} \leq \frac{kD}{\dot{r}^2 \cdot \left(1 + \sum_1^k \gamma_k c_k^2\right)} = \frac{\bar{r}}{\dot{r}} \cdot \frac{\pi k}{\left(1 + \sum_1^k \gamma_k c_k^2\right)} \cdot \frac{D}{A}, \quad (11)$$

где k – некоторая числовая константа, обращающая это выражение в равенство для круглых пластинок (в случае шарнирного опирания $k = j^2 = 5,783$, в случае жесткого защемления $k = 14,790$). Неравенство (11) дает асимптотически точные значения. Удерживая в разложении отображающей функции лишь первый член ряда и записывая для удобства дальнейшего анализа отношение конформных радиусов в обратном виде, получаем менее строгое выражение [7, с. 97]:

$$q_{0, \text{крит}} \leq \pi k \left(\frac{\dot{r}}{\bar{r}} \right)^{-1} \cdot \frac{D}{A}. \quad (12)$$

Выражение (12) устанавливает закономерность в задаче устойчивости равномерно сжатых по контуру пластинок: *отношение конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} , подсчитанное для области, ограниченной контуром пластинки, является единственным аргументом, определяющим величину критического усилия при потере устойчивости $q_{0, \text{крит}}$ (цилиндрическую жесткость D и площадь A пластинки считаем заданными)*. Эта закономерность позволяет, не решая дифференциального уравнения продольного изгиба пластинок, а рассматривая лишь элементарную геометрическую задачу, связанную с анализом изменения отношения конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} оценивать как качественную, так и количественную стороны рассматриваемой задачи.

Следует отметить, что выражение (12) является предпочтительнее выражения (9), поскольку в нём имеется безразмерный параметр \dot{r}/\bar{r} , в то время как в (9) имеется размерная величина \dot{r} . При использовании формулы (12) необходимо анализировать лишь форму пластинки, а при использовании (9) требуется ещё учитывать и масштаб пластинки.

Анализ результатов решения задач устойчивости пластинок численными методами показал, что их отклонения от решений, получаемых с помощью неравенства (12), носят монотонный характер и увеличиваются до 10...15 % для весьма вытянутых пластинок. Причём эти отклонения пропорциональны отношению конформных радиусов. Поэтому в общем случае неравенство (12) можно представить в виде равенства

$$q_{0, \text{крит}} = k_q \cdot \frac{D}{A}, \quad (13)$$

где $k_q = f(\dot{r}/\bar{r})$ – коэффициент пропорциональности, зависящий от граничных условий пластинки и ее формы, представляющей собой безразмерное значение критического усилия.

Ввиду математической аналогии уравнений (2) и (1) с учетом (13) их можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_0)_i = (k_w)_i \cdot \frac{qA^2}{D}, \\ (\omega_0)_i = (k_\omega)_i \cdot \frac{\sqrt{D/m}}{A}; \end{array} \right. \quad (14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (w_0)_i = (k_w)_i \cdot \frac{qA}{P}, \\ (\omega_0)_i = (k_\omega)_i \cdot \frac{P}{mA}, \\ (w_0)_d = k_d \cdot M, \end{array} \right. \quad (15)$$

где $k_i = f_i(\dot{r}/\bar{r})$ – численные значения ФМХ, зависящие от граничных условий пластинки, мембраны или сечения бруса и их формы.

Изопериметрические свойства и закономерности изменения отношения конформных радиусов при геометрических преобразованиях

Приведем известные из научной и справочной литературы по теории конформного отображения и математической физике формулы для нахождения внутреннего \dot{r} и внешнего

\bar{r} конформных радиусов для ряда односвязных областей с выпуклым контуром [3, с. 314, 330]:

– для круга радиуса a :

$$\dot{r} = a, \quad \bar{r} = a; \quad (16)$$

– для правильных n -угольных:

$$\dot{r} = \frac{\Gamma(1-1/n)}{2^{1-\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{\Gamma(1+1/n)}{2^{1+\frac{2}{n}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)} L, \quad (17)$$

где n – число сторон правильной многоугольной области; L – её периметр; $\tilde{A}(x)$ – Γ -функция (Гамма-функция);

– для произвольных треугольников с углами $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$:

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f(\alpha)f(\beta)f(\gamma) \cdot \rho, \quad (18)$$

где $f(x) = \frac{1}{\tilde{A}(x)} \left\{ \frac{x^x}{(1-x)^{1-x}} \right\}^{1/2}$; ρ – радиус описанного круга;

– для равнобедренных треугольников с $\alpha = \beta$ выражение (18) примет вид

$$\dot{r} = 4\pi \cdot f^2(\alpha)f(\gamma) \cdot \rho. \quad (19)$$

Значение внешнего конформного радиуса \bar{r} для треугольных областей получим из выражения (10):

$$\bar{r} = A/\pi\dot{r}; \quad (20)$$

– для равнобедренных треугольников из выражения (20) с учетом (18) после некоторых преобразований получим

$$\bar{r} = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot h^2}{\pi\dot{r}}, \quad (21)$$

где α – равный угол при основании равнобедренной треугольной области; h – её высота;

– для прямоугольных треугольников:

$$\bar{r} = \frac{\sin 2\alpha \cdot c^2}{4\pi\dot{r}}, \quad (22)$$

где α – угол при гипотенузе треугольника; c – её гипотенуза;

– для ромбов с углом $\pi\alpha$:

$$\dot{r} = \frac{\pi^{1/2}}{\tilde{A}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} L, \quad \bar{r} = \frac{\pi^{1/2}}{8\tilde{A}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\tilde{A}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} L, \quad (23)$$

– для эллипсов с полуосями a и b ($a \geq b$):

$$\dot{r} = \bar{r} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \right\}^{-1} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right\}^{-1}, \quad \bar{r} = \frac{a+b}{2}, \quad (24)$$

где $q = (a-b)^2/(a+b)^2$;

Формула для определения внутреннего конформного радиуса \dot{r} для прямоугольников с полуосями a и b ($a \geq b$) имеет вид

$$\dot{r} = \frac{2}{\pi} b \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \right)^{-2}, \quad (25)$$

где $q = e^{-\pi a/b}$.

Для определения внешнего конформного радиуса \bar{r} для прямоугольников представим систему разрешающих уравнений относительно \bar{r} и α , полученных с помощью формулы Кристоффеля–Шварца в статье [8]:

$$\begin{cases} \frac{a}{\bar{r}} = \pi \cos^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)!k!} \cos^{2k} \alpha; \\ \frac{b}{\bar{r}} = \pi \sin^2 \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{((2k-1)!!)^2}{2^{2k} (k+1)!k!} \sin^{2k} \alpha, \end{cases} \quad (26)$$

где a и b – стороны прямоугольника, параллельные соответственно осям x и y ; α – аргумент комплексных чисел – точек окружности, образами которых при конформном отображении служат вершины прямоугольника; при этом центр прямоугольника совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям; принято $(-1)!! = 1$.

По формулам (16)...(26) были подсчитаны значения конформных радиусов и их отношения \dot{r}/\bar{r} . На основании полученных результатов были построены графики изменения отношения конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} в зависимости от характерного для каждой области геометрического параметра (рис. 1-7).

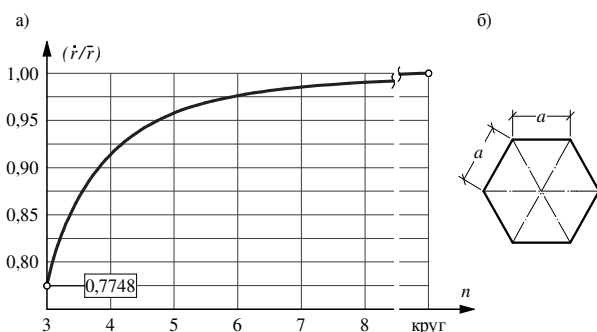


Рис. 1. Правильные области:

а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(n)$; б) общий вид

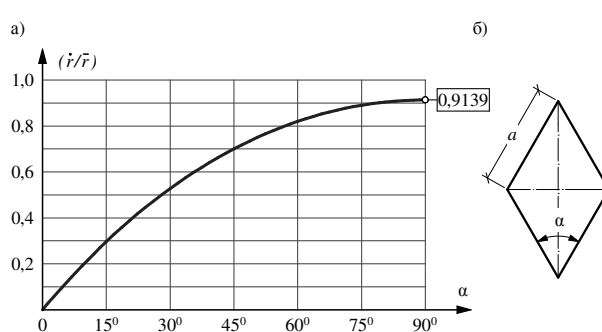


Рис. 2. Ромбические области:

а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$; б) общий вид

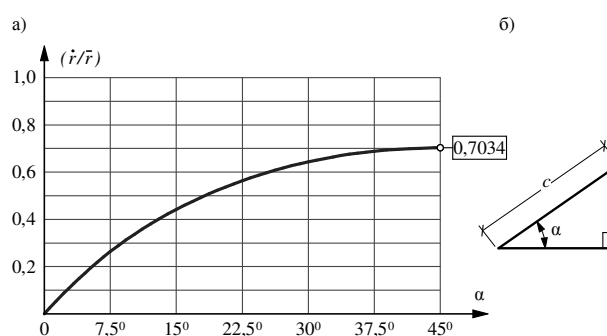
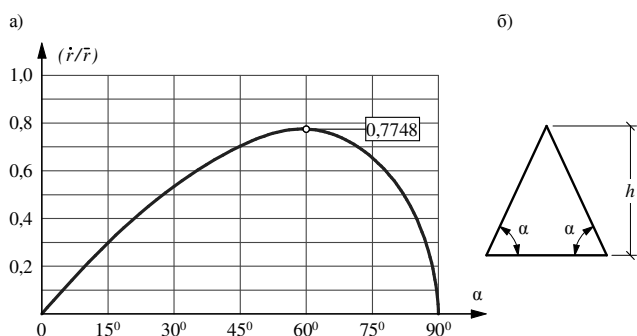


Рис. 3. Равнобедренные треугольные области: а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$; б) общий вид

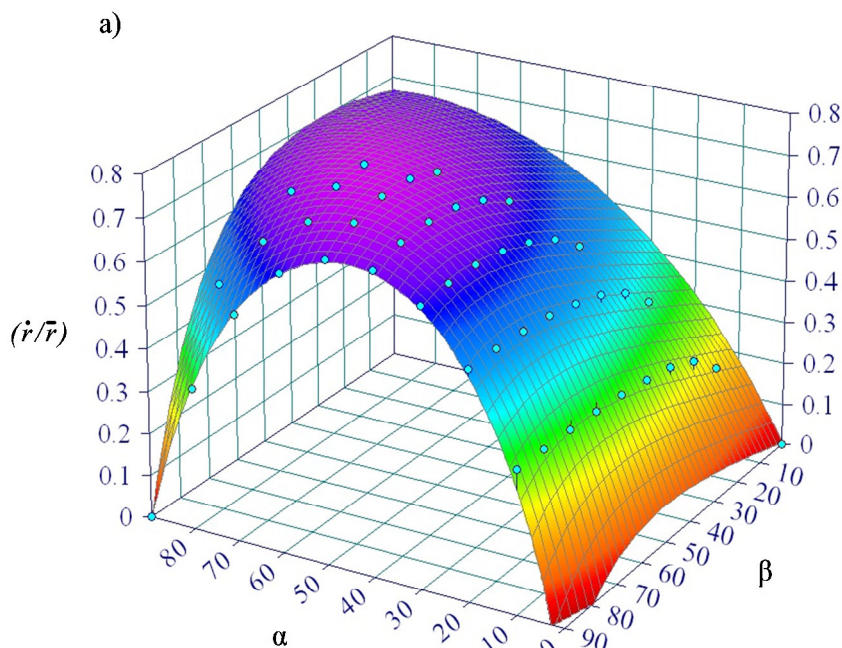


Рис. 4. Прямоугольные треугольные области: а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha)$; б) общий вид

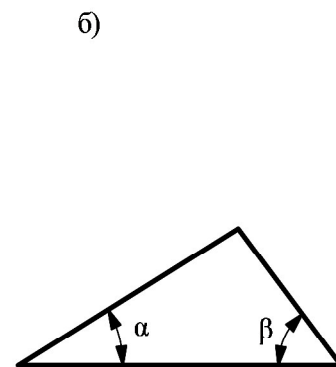


Рис. 5. Произвольные треугольные области:

а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(\alpha; \beta)$; б) общий вид

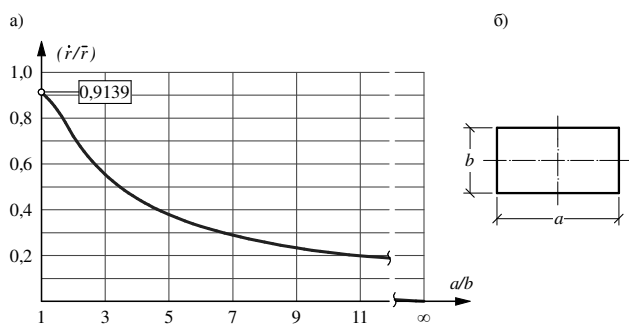


Рис. 6. Прямоугольные области:

а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(a/b)$; б) общий вид

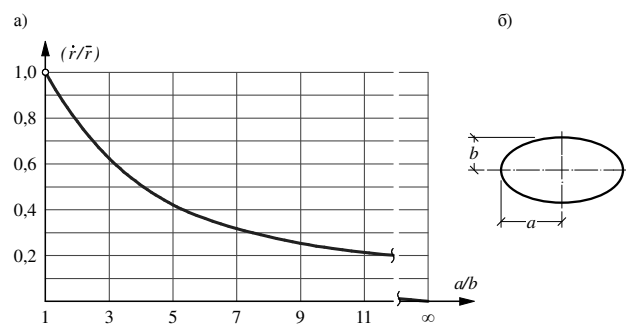


Рис. 7. Эллиптические области:

а) график $\dot{r}/\bar{r} = f(a/b)$; б) общий вид

В первых работах авторов по рассматриваемой проблеме [7, с. 105; 10, с. 36] была установлена графическая взаимосвязь отношения конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} с коэффициентом формы K_f , которая иллюстрируется на рис. 8. На этом рисунке точки 3, 4, 6, 8 и 0 соответствуют правильной 3-угольной, 4-угольной (квадратной), 6-угольной, 8-угольной и круглой

областям. Кривая I–II помимо указанных областей включает произвольные полигональные области, все стороны которых касаются вписанной окружности (в их числе дуги окружности).

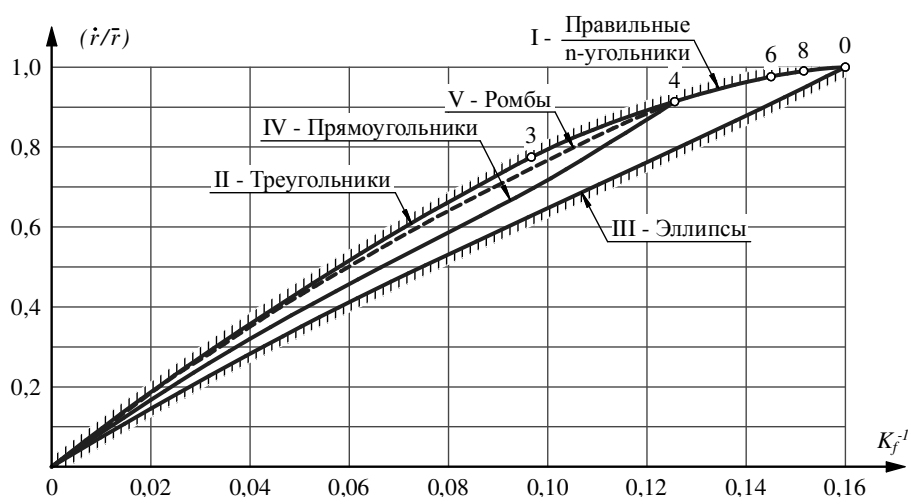


Рис. 8. Графики «отношение конформных радиусов \dot{i}/\bar{r} – коэффициент формы K_f »

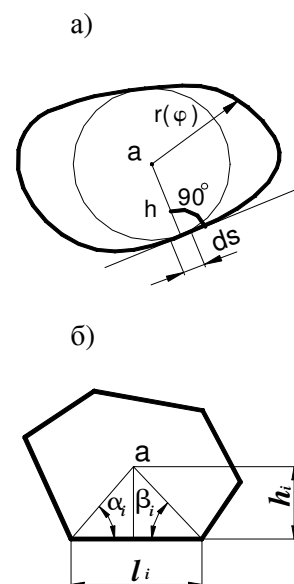


Рис. 9. К определению коэффициента формы

Коэффициент формы плоской области относительно некоторой точки a , лежащей внутри области K_{fa} , представляет собой контурный интеграл [4, с. 64, 65]:

$$K_f = \min \oint_L \frac{ds}{h}, \quad (27)$$

где ds – линейный элемент контура области, h – перпендикуляр, опущенный из точки « a » к середине элемента ds (рис. 9, а). В случае многоугольной

$$K_f = \min \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{h_i} = \sum_{i=1}^n (\text{ctg}\alpha_i + \text{ctg}\beta_i), \quad (28)$$

где n – число сторон многоугольника, а остальные обозначения указаны на рис. 9, б.

В монографии [4, с. 117–119] подробно исследованы свойства коэффициента формы. Графический анализ зависимостей $\dot{i}/\bar{r} - K_f$ позволил доказать и сформулировать аналогичные свойства и относительно отношения \dot{i}/\bar{r} . Сформулируем основное из этих свойств – свойство двусторонней ограниченности всего множества значений \dot{i}/\bar{r} : *все множество значений отношения \dot{i}/\bar{r} , представленное в координатных осях $\dot{i}/\bar{r} - K_f$, для односвязных областей с выпуклым контуром ограничено с двух сторон: верхнюю границу образуют многоугольники, все стороны которой касаются вписанной окружности, а нижнюю – эллипсы; для четырехугольных областей нижнюю границу образуют прямоугольники.*

Используя это свойство, на основании зависимости (13) можно сформулировать аналогичные свойства о двусторонней ограниченности всего множества значений интегральных ФМХ в рассматриваемых задачах теории упругости: *все множество значений интегральных*

ФМХ в рассматриваемых двумерных задачах теории упругости, представленные в координатных осях $F - \dot{r}/\bar{r}$, ограничено с двух сторон: одну из границ (верхнюю или нижнюю) образуют значения интегральных ФМХ для областей в форме n -угольников, все стороны которых касаются вписанной окружности, а другую (нижнюю или верхнюю) образуют значения ФМХ для областей в форме эллипсов; для задач, связанных с областями в форме произвольных четырехугольников одну из границ (нижнюю или верхнюю) образуют значения ФМХ для областей в форме прямоугольников.

На рис. 10, а эта закономерность иллюстрируется для основной частоты колебаний жестко заземленных пластинок. На рис. 10, б для сравнения аналогичная закономерность показана для зависимости «основная частота свободных колебаний $(\omega_0)_п$ – коэффициент формы». Из рисунка хорошо видно, что область возможных значений основной частоты свободных колебаний пластинок, представленной в зависимости от отношения конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} , оказалась значительно уже, чем при использовании коэффициента формы. Следовательно, стоит ожидать, что с использованием аргумента \dot{r}/\bar{r} точность решений, получаемых с помощью методики МИКФ для пластинок произвольной формы с выпуклым контуром, будет существенно выше.

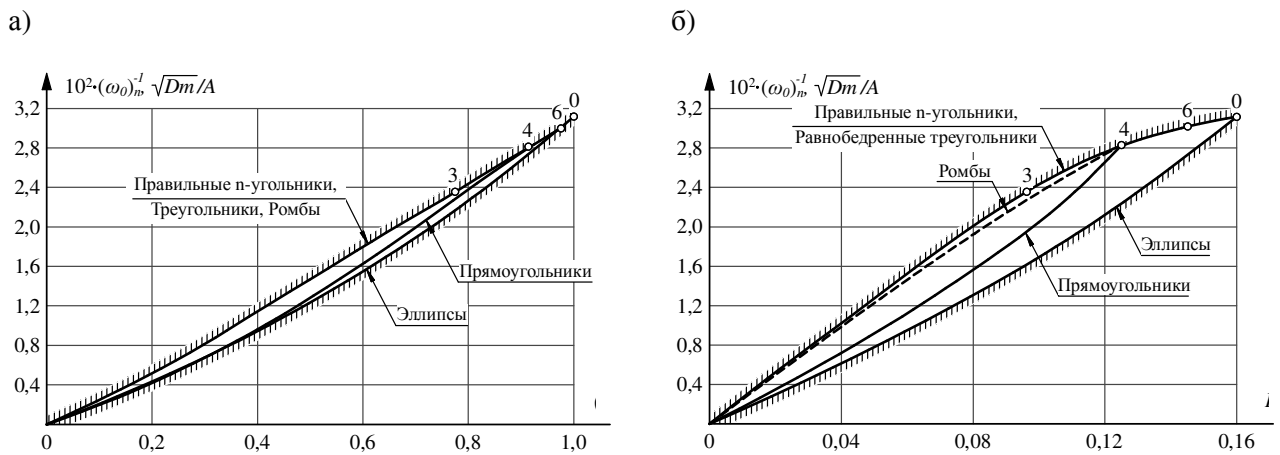


Рис. 10. Граничные кривые для жестко заземленных пластинок:

а) «основная частота свободных колебаний $(\omega_0)_п$ – отношение конформных радиусов \dot{r}/\bar{r} »;

б) «основная частота свободных колебаний $(\omega_0)_п$ – коэффициент формы K_f »

С использованием методики МИКФ получены зависимости для определения коэффициентов k_w в выражениях (13)-(15):

– при линейной интерполяции –

$$k_w = k_{w1} + \frac{\dot{r}/\bar{r} - (\dot{r}/\bar{r})_1}{(\dot{r}/\bar{r})_2 - (\dot{r}/\bar{r})_1} \cdot (k_{w2} - k_{w1}), \quad (29)$$

– при степенной интерполяции –

$$k_w = k_{w1} \left(\frac{\dot{r}/\bar{r}}{(\dot{r}/\bar{r})_1} \right)^n, \quad n = \frac{\ln(k_{w2}/k_{w1})}{\ln((\dot{r}/\bar{r})_2/(\dot{r}/\bar{r})_1)}, \quad (30)$$

где k_{w1} и k_{w2} – значения коэффициента k_w для первой и второй «опорных» пластинок, которые определяются по аппроксимирующим функциям $k_w = f(\dot{r}/\bar{r})$; \dot{r}/\bar{r} – отношение конформных радиусов для заданной пластинки; $(\dot{r}/\bar{r})_1$ и $(\dot{r}/\bar{r})_2$ – то же, для «опорных» пластинок.

Графически линейная и степенная интерполяции опорных решений показаны на рис. 8. На нем точками 1 и 2 обозначены «опорные» решения, кривая I принадлежит действительным значениям k_w , кривая II – приближенным значениям, получаемым по формулам (29) и (30).

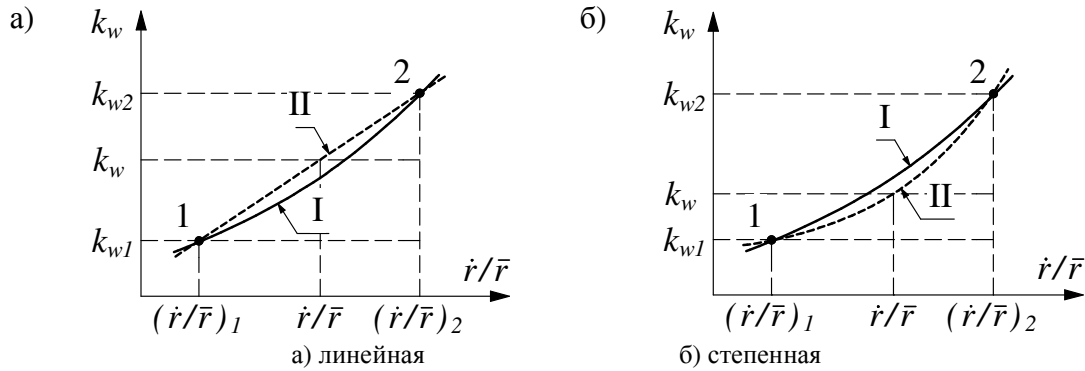


Рис. 11. Линейная и степенная интерполяции «опорных» решений по отношению конформных радиусов

Пример. Требуется определить максимальный прогиб жестко защемленной параллелограммной пластинки от действия равномерно распределенной по всей площади нагрузки при следующих исходных данных: основание $a = 1$ м, высота $h = 0,5$ м, угол $\alpha = 60^\circ$ (рис. 12), толщина пластинки $t = 5$ мм. Материал пластинки – сталь: модуль упругости $E = 2,06 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. Интенсивность нагрузки $q = 15$ кН/м².

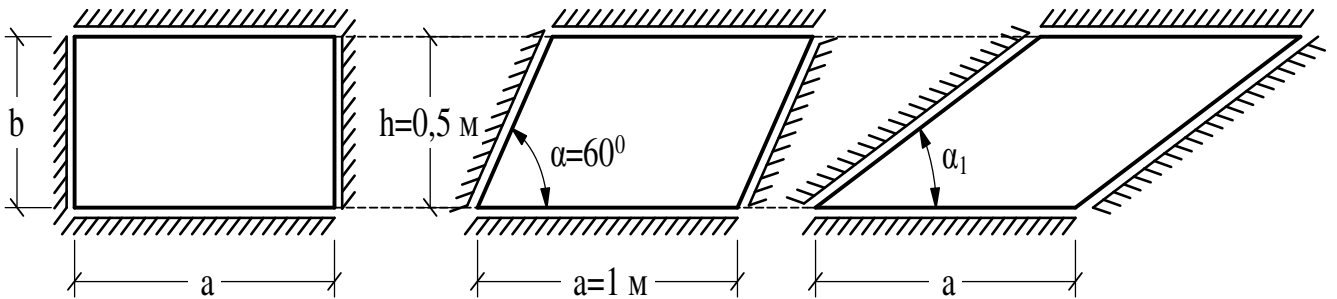


Рис. 12. К примеру расчета параллелограммной пластинки

Определяем угол ромбической пластинки

$$\alpha = \arcsin(h/a) = \arcsin(1/\lambda) = \arcsin(0.5) = 30^\circ$$

и отношение сторон прямоугольной пластинки

$$a/b = a/h = \lambda = 2.$$

Отношение конформных радиусов: для заданной пластинки $\dot{r}/\bar{r} = 0,7007$; для «опорных» пластинок $(\dot{r}/\bar{r})_1 = 0,7222$ и $(\dot{r}/\bar{r})_2 = 0,5277$. «Опорные» решения взяты из справочника [4] в виде: $k_{w1} = 0,635$ и $k_{w2} = 0,423$.

Определяем искомое решение:

– с помощью линейной интерполяции (29)

$$k_w = k_{w1} + \frac{\dot{r}/\bar{r} - (\dot{r}/\bar{r})_1}{(\dot{r}/\bar{r})_2 - (\dot{r}/\bar{r})_1} \cdot (k_{w2} - k_{w1}) = 0,635 + \frac{0,7007 - 0,7222}{0,5277 - 0,7222} \cdot (0,423 - 0,635) = 0,612,$$

– с помощью степенной интерполяции (30)

$$k_w = k_{w1} \left(\frac{\dot{r}/\bar{r}}{(\dot{r}/\bar{r})_1} \right)^n = 0,635 \left(\frac{0,7007}{0,7222} \right)^{1,2947} = 0,611,$$

где $n = \frac{\ln(k_{w2}/k_{w1})}{\ln((\dot{r}/\bar{r})_2/(\dot{r}/\bar{r})_1)} = \frac{\ln(0,423/0,635)}{\ln(0,5277/0,7222)} = 1,2947.$

Определяем площадь заданной пластинки – $A = 0,5 \text{ м}^2$ и ее цилиндрическую жесткость:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2,06 \cdot 10^{11} \cdot 0,005^3}{12(1-0,3^2)} = 2358,1 \text{ Ё} \cdot \text{м}.$$

Определяем абсолютное значение максимального прогиба:

– в случае линейной интерполяции

$$w_0 = k_w \frac{qA^2}{D} = 0,612 \cdot \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{2358,1} = 0,973 \text{ мм},$$

что отличается от полученного результата с помощью МКЭ $w_0 = 0,981 \text{ мм}$ на $-0,82 \%$;

– в случае степенной интерполяции

$$w_0 = k_w \frac{qA^2}{D} = 0,611 \cdot \frac{15 \cdot 10^3 \cdot 0,5^2}{2358,1} = 0,972 \text{ мм},$$

что отличается от результата, полученного с помощью МКЭ, $w_0 = 0,981 \text{ мм}$ на $-0,92 \%$.

Приведенный пример показывает, что решения, получаемые с помощью линейной и степенной интерполяций, по отношению практически не отличаются. Ввиду большей простоты и естественности линейной интерполяции рекомендуется использовать именно ее.

Было проведено сопоставление значений максимального прогиба шарнирно опертых и жестко заземленных параллелограммных пластинок с различными геометрическими параметрами, которые были получены с помощью интерполяции по отношению конформных радиусов, интерполяции по коэффициенту формы (МИКФ) [132] и МКЭ. Анализ результатов показал, что при интерполяции по отношению конформных радиусов погрешность решений в 1,5...2 раза меньше, чем при интерполяции по коэффициенту формы. При этом отклонения результатов, полученных с помощью интерполяции по отношению конформных радиусов, от полученных с помощью МКЭ и других известных решений, не превышает $\pm 2...3 \%$.

Выводы

При использовании методики МИКФ с интерполяцией «опорных» решений по отношению конформных радиусов получают решения с погрешностью меньше в 1,5...2 раза, чем с интерполяцией по коэффициенту формы.

Библиографический список

1. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы / В.И. Сливкер. – М.: АСВ, 2005. – 736 с.
2. Ильин В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – Минск: Высшая школа, 1990. – 349 с.
3. Полия Г. Изопериметрические неравенства в математической физике / Г. Полия, Г. Сеге. – 2-е изд., стереотипное – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.
4. Коробко В.И. Изопериметрический метод в строительной механике: В 3 т. Т. 1. Теоретические основы изопериметрического метода / В.И. Коробко. – М.: АСВ, 1997. – 390 с.
5. Коробко А.В. Геометрическое моделирование формы области в двумерных задачах теории упругости / А.В. Коробко. – М.: Изд-во АСВ, 1999. – 320 с.

6. Иванов В.И. Конформные отображения и их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 324 с.
7. Коробко В.И. Изопериметрический метод в задачах устойчивости пластинок / В.И. Коробко, А.Н. Хусточкин. – Ростов-на-Дону: Изд-во Северо-Кавказского научного центра высшей школы, 1994. – 148 с.
8. Казанцев В.П. Электростатика на плоскости. Нормировка потенциала. Емкости уединенного проводника и линии относительно точки. Конформные радиусы / В.П. Казанцев, О.А. Золотов, М.В. Долгополова // Вестник КрасГУ. Серия физ.-мат. науки. – 2005. – №1. – С. 32-38.
9. Коробко В.И. Количественная оценка симметрии / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: АСВ, 2008. – 128 с.
10. Коробко А.В. Расчёт пластин на устойчивость с использованием отношения конформных радиусов / А.В. Коробко, А.А. Черняев // Строительство и реконструкция. – 2010. – №6. – С. 31-38.
11. Коробко А.В. Определение основной частоты свободных колебаний пластинок с использованием конформных радиусов / А.В. Коробко, А.А. Черняев // Строительство и реконструкция. – 2011. – №1. – С. 12-18.
12. Лаврентьев М.А. Методы теорий функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
13. Коробко В.И. Решение задач поперечного изгиба пластинок с использованием конформных радиусов / В.И. Коробко, А.А. Черняев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011. – №6. – С. 16-22.

References

1. Slivker, V. I. Construction Mechanics. Variation bases. M.: DIA, 2005. – 736 p.
2. Ilyin, V.P. V. V. Karpov, A.M. Maslennikov. Numerical methods of the solution of problems of construction mechanics. Accusative II-in,– Minsk: The higher school, 1990. – 349 p.
3. G.Polya. G. Sege. Isoperimetric inequalities in math physics . – 2nd prod., stereotypic – M.: Komkniga, 2006. – 336 p.
4. V.I. Korobko Isometric method in structural mechanics. 3 V. V. 1. Theoretical basis of isometric method. – M.: АСВ, 1997. –390 p.
5. A.V. Korobko, Geometrical modeling of a area form in bi- variate problems of the theory of elasticity /– M.: DIA publishing house, 1999. – 320 p.
6. Ivanov V. I., V. Yu. Popov Conformal displays and their appendices M.: Editorial of URSS, 2002. – 324 p.
7. Korobko V.I., Korobko A.V., Hustochkin A.N. Numerical assessment of symmetry M.: АСВ, 2008. – 128 p.
8. Kazantsev V.P., O. A. Zolotov, M. V. Dolgopolova. Electrostatics on the. Potential normalization. Capacities of secluded conductor and the line concerning a point. Conformal radiuses Bulletin of Krasgu. Series physical. - matt. sciences. – 2005. – No. 1. – P 32-38.
9. Korobko A.V., Korobko V. I. Quantitative assessment of symmetry /. – M.: DIA, 2008. – 128 p.
10. Korobko A.V., Chernyaev A.A. Calculation of the free oscillations of plates with the application of conformal radiuses //Construction and reconstruction. – 2010. – No. 6. – P 31-38.
11. Korobko A.V. Determination of the main frequency of free fluctuations of plates with use of conformal radiuses / A.V. Korobko, A.A. Chernyaev//Construction and reconstruction. – 2011. – No. 1. – P 12-18.
12. Lavrentyev, M. A., Shabat B. V. Methods of theories of complex variable function. M. M.: Science, 1987. – 688 p.
13. Korobko A.V. Solution of the problem of transverse bending of plates with application of conformal radiuses / A.V. Korobko, A.A., Chernyaev //Structural mechanics and calculation of structures. – 2011. - №6. – P. 16-22.

УДК 620.10:620.17

Воронежский государственный
технический университет

Канд. техн. наук, проф. кафедры
строительной механики

А.Н. Синозерский

Ст. преподаватель кафедры
строительной механики

Р.А. Мухтаров

Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-52-30

e-mail: rinat19611 @rambler.ru

Voronezh State Technical University

PhD of Tech. Sc., prof. of the department of
Structural Mechanics

A. N. Sinozersky

Lecturer of the department of
Structural Mechanics

R. A. Mukhtarov

Voronezh, Russia tel.: +7(473)2715230

e-mail:rinat19611 @rambler.ru

А.Н. Синозерский, А.В. Козлова, А.В. Резунов, Р.А. Мухтаров

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯДРОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ПРИ ОЦЕНКЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ СО СТАНДАРТНОЙ СКОРОСТЬЮ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА

Выполняется расчет напряженно деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренных нагружениях с различными эксцентриситетами. Установленные при этом равнодействующие внутренних сил располагаются в границах доверительных интервалов средних разрушающих нагрузок.

Ключевые слова: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон.

A.N. Sinozersky, A.V Kozlova., A.V. Rezunov, R.A. Muhtarov

APPLICATION OF CORE INDEXES AT THE ASSESSMENT OF LIMITING STATE OF EC-CENTRICALLY COMPRESSED WITH STANDARD VELOCITY PRISMS FROM FINE GRAINED CONCRETE

Deflected mode of the prisms from fine grained concrete at eccentric load with different eccentricities is calculated. The defined equal internal forces are in interfaces of fiducial intervals of the average destroyed loads.

Keywords: eccentric compression, fine grained concrete.

Введение

По результатам испытаний элементов квадратного поперечного сечения $b = h = 0,1$ м и длиной $l = 0,4$ м из мелкозернистого бетона в возрасте 28 суток установлены при центральном сжатии с постоянными относительными скоростями нагружения $\dot{\theta}$ [1]:

зависимость напряжений σ от деформации ε

$$\sigma(\dot{\theta}) = E \cdot \varepsilon - \alpha(\dot{\theta}) \cdot \varepsilon^{\beta(\dot{\theta})} \quad (1)$$

с экстремальными – призмным пределом прочности

$$\sigma_u(\dot{\theta}) = 28,38 - \frac{7,758}{1 + \lg(1 + 895,6 \cdot \dot{\theta})} \quad (2)$$

и деформацией

$$\varepsilon_u(\dot{\theta}) = 904 \cdot 10^{-6} + \frac{1982 \cdot 10^{-6}}{1 + 2,225 \cdot (\dot{\theta})^{0,20}}, \quad (3)$$

© Синозерский А.Н., Козлова А.В., Резунов А.В., Мухтаров Р.А., 2017

модулем упругости материала - $E = 31390 \text{ МПа}$; (4)
 параметрами –

$$\beta(\dot{\theta}) = \frac{E \cdot \varepsilon_u(\dot{\theta})}{E \cdot \varepsilon_u(\dot{\theta}) - \sigma_u(\dot{\theta})} \quad (5)$$

$$\alpha(\dot{\theta}) = \frac{E}{\beta(\dot{\theta}) \cdot (\varepsilon_u(\dot{\theta}))^{\beta(\dot{\theta})-1}} \quad (6)$$

Для рассматриваемой в дальнейшем стандартной скорости [2] $\dot{F} = \frac{F}{t} = 3923 \text{ Н} \cdot \text{с}^{-1}$
 или относительной $\dot{\theta} = F/b \cdot h \cdot t \cdot \dot{\sigma}_{1,00} = 0,3923 \text{ с} \cdot \dot{\sigma}_{1,00} = 1 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$ будем иметь:

$$\text{no} \quad (2) - \sigma_u = 26,19 \text{ МПа}, \quad (7)$$

$$(3) - \varepsilon_u = 1601 \cdot 10^{-6};$$

$$\text{no} \quad (5) - \beta = 2,0883, \quad (8)$$

$$(6) \quad \alpha = 16575200 \text{ МПа};$$

зависимость (1) в виде

$$- \sigma = 31390 \cdot \varepsilon - 16575200 \cdot (\varepsilon)^{2,0883}, \quad (9)$$

см. сплошную линию кривой (9) на рис. 1.

С помощью (9) установлены [3]:

ядровой эксцентриситет

$$e_{\text{яс}} = 0,1074, \quad (10)$$

экстремальная равнодействующая внутренних сил $N_{\text{Б}}(e_{\text{яс}}) = 190,527 \text{ кН}$, называемая **базовой**.

В [4] показано, что $N_{\text{Б}}(e)$ меньше опытных разрушающих нагрузок $\bar{F}_u(e)$. Поэтому предельное ядровое состояние определялось [3]:

при функциях - напряжений

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha_{\mu}(e) \cdot (\varepsilon)^{\beta_{\mu}(e)}, \quad (11)$$

- деформаций

$$\varepsilon = B_{\mu}(e) \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r_{\mu}}(e); \quad (12)$$

$$\text{экстремальных } \sigma_{\mu}(e) = \sigma_u \cdot K_{\mu}(e) \quad (13)$$

$$\text{и } \varepsilon_{\mu}(e) = \varepsilon_u \cdot K_{\mu}(e); \quad (14)$$

$$\text{параметрах } \beta_{\mu}(e) = \beta = 2,0883 \quad (15)$$

и

$$\alpha_{\mu}(e) = \frac{E}{\beta_{\mu}(e) \cdot (\varepsilon_{\mu}(e))^{\beta_{\mu}(e)-1}}; \quad (16)$$

характеристике $B_{\mu}(e)$ эпюры ε ;

$$\text{наибольшей деформации в сечении } \varepsilon_{r_{\mu}}(e) = \varepsilon_{\mu}(e) \cdot r_{\mu}(e); \quad (17)$$

коэффициенте $r_{\mu}(e) > 1$ увеличения $\varepsilon_{\mu}(e)$;

эпюрах напряжений σ_{μ} и деформаций ε_{μ} , представленных на рис. 2;

$$\text{показателе } K_{\mu}(e_{\text{яс}}) = \frac{\beta - 1}{r_{\text{Б}}(e_{\text{яс}}) \cdot \{\beta - (r_{\text{Б}}(e_{\text{яс}}))^{\beta_{\mu}(e)-1}\}} = 1,0793, \quad (18)$$

где β по (15); $r_{\text{Б}}(e_{\text{яс}}) = 1,2643$ – базовый ядровый коэффициент увеличения ε_u .

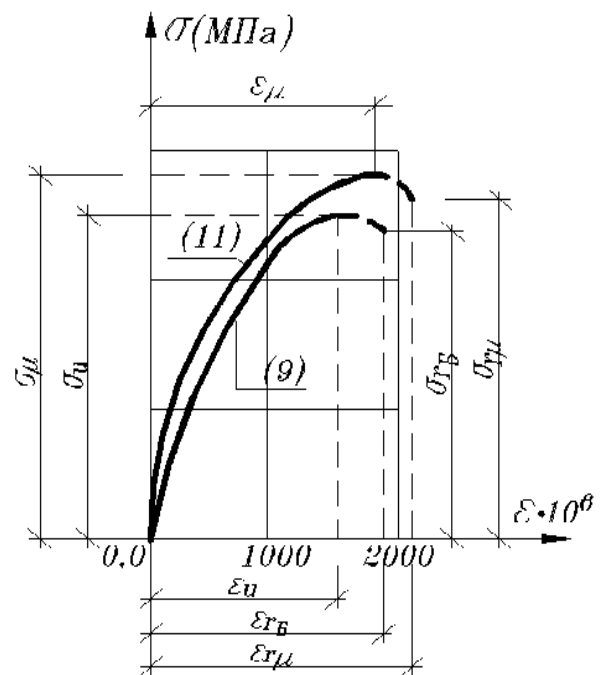


Рис. 1. График « $\sigma - \varepsilon$ »

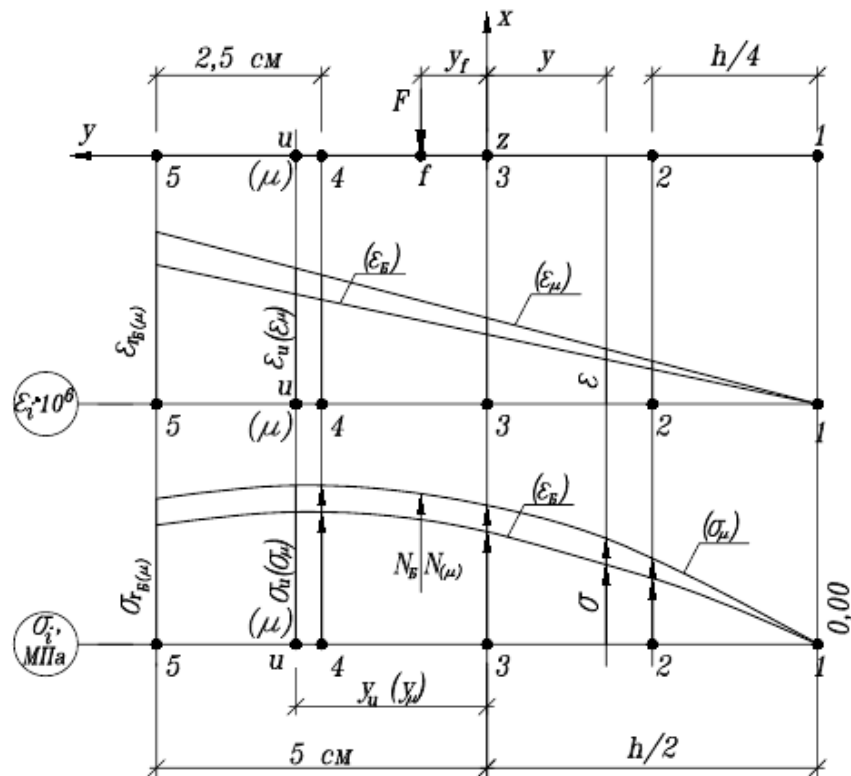


Рис. 2. Эпюры деформаций и напряжений при $e_{яс} = 0,10744$

Зарегистрированные в опытах на внецентренное сжатие призм из мелкозернистого бетона средние разрушающие нагрузки $\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u$ при вероятности $p=0,95$ из [4] представлены в табл. 1. В столбце 5 приведены коэффициенты \bar{K}_μ , установленные по методике [5] для случаев равенства равнодействующих внутренних $N_\mu(e)$ и внешних разрушающих $\bar{F}_u(e)$ сил.

Таблица 1

Скорость нагружения $\dot{\theta} \cdot 10^3$	Координата y_f , мм, точки f при $z_f = 0$	Относительный эксцентриситет $e = y_f/h$	Разрушающая сила $\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u$	Показатели увеличения $\bar{K}_\mu(e)$
1	2	3	4	5
392,3	5,0	0,05	236,9±17,7	1,0632
	10,0	0,10	207,9±14,7	1,0745
	15,0	0,15	185,3±13,7	1,0825

1. Зависимость показателя $\bar{K}_\mu(e)$ от эксцентриситета

Полагаем, что (рис. 3) в интервале:

➤ $[e = 0, e_{яс} = 0,10744]$ подобно [3] или [6] коэффициенты увеличения σ_u, ε_u представлены функциями $K_\mu(e) = 1 + \alpha_\mu \cdot e \cdot (e_n)^{c_\mu e}$ (19)

или $K_u(e) = 1 + \alpha_u \cdot e + c_u \cdot e^2$; (20)

➤ $[e_{яс} = 0,10744, e = 0,150]$ - показатель $K_\mu(e) = K_u(e) = K_\mu(e_{яс}) = 1,0793 = const$, (21)

где $e_n = 2,71828 \dots$ - основание натуральных логарифмов.

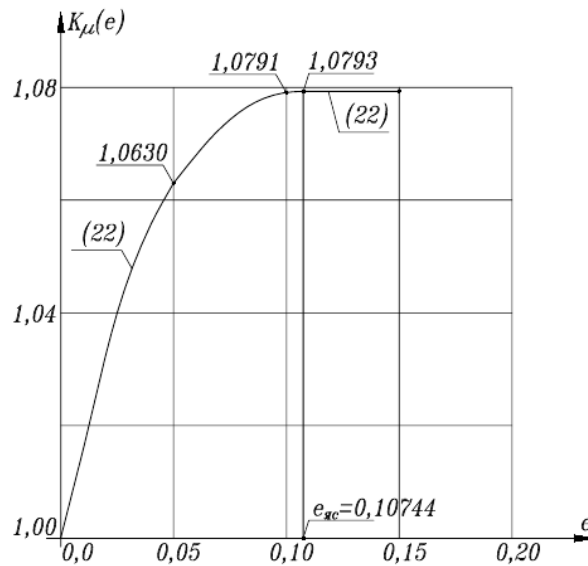


Рис. 3. Зависимость показателя $\bar{K}_\mu(e)$ от эксцентриситета

Из условий существования экстремума (19) и (20) при $e = e_{яс}$ и равенства $K_\mu(e_{яс}) = K_u(e_{яс}) = 1,0793$ получим соответствующие зависимости:

$$K_\mu(e) = 1 + 2,006 \cdot e \cdot (e_n)^{e/0,10744} \quad (22)$$

и
$$K_u(e) = 1 + 1,476 \cdot e \cdot 6,870 \cdot e^2 \quad (23)$$

с коэффициентами $K_\mu(e)$ и $K_u(e)$, невязками $\Delta_\mu(e) = K_\mu(e) - \bar{K}_\mu(e)$ и $\Delta_u = K_u(e) - \bar{K}_\mu(e)$, суммами $\sum[\Delta_\mu(e)]^2 = [\Delta_\mu(e = 0,05)]^2 + [\Delta_\mu(e = 0,10)]^2$ и $\sum[\Delta_u(e)]^2 = [\Delta_u(e = 0,05)]^2 + [\Delta_u(e = 0,10)]^2$ в табл. 2.

Таблица 2

Функция	Эксцентриситет $e = 0,05$				Эксцентриситет $e = 0,10$				$\sum[\Delta_\mu(e)]^2$
	$K_\mu(e)$	$\bar{K}_\mu(e)$	$\Delta_\mu(e)$	$[\Delta_\mu(e)]^2$	$K_\mu(e)$	$\bar{K}_\mu(e)$	$\Delta_\mu(e)$	$[\Delta_\mu(e)]^2$	
(22)	1,0630	1,0632	$-2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-8}$	1,0791	1,0745	$46 \cdot 10^{-4}$	$-2,12 \cdot 10^{-5}$	$2,124 \cdot 10^{-5}$
Функция	Эксцентриситет $e = 0,05$				Эксцентриситет $e = 0,10$				$\sum[\Delta_u(e)]^2$
	$K_u(e)$	$\bar{K}_\mu(e)$	$\Delta_u(e)$	$[\Delta_u(e)]^2$	$K_u(e)$	$\bar{K}_\mu(e)$	$\Delta_u(e)$	$[\Delta_u(e)]^2$	
(23)	1,0566	1,0632	$-66 \cdot 10^{-4}$	$4,356 \cdot 10^{-5}$	1,0789	1,0745	$44 \cdot 10^{-4}$	$1,849 \cdot 10^{-5}$	$6,292 \cdot 10^{-5}$

В дальнейших исследованиях привлекаются функция (22) и показатели $K_\mu(e = 0,05) = 1,0630$, $K_\mu(e = 0,10) = 1,0791$, сумма квадратов отклонений которых от установленных по результатам опытов $\bar{K}_\mu(e)$ наименьшая.

2. Определение характеристик предельных состояний

Для выполнения расчета условных НДС в момент разрушения призм из мелкозернистого бетона при внецентренных нагружениях с относительными эксцентриситетами $e = 0,05, 0,10, 0,15$.

Зададимся:

зависимостями (11) и (12);

коэффициентами $K_\mu(0,05) = 1,0630$, $K_\mu(0,10) = 1,0791$, $K_\mu(0,15) = 1,0793$. (24)

Все компоненты тензора напряжений кроме $\sigma_x = \sigma$ считаем равными нулю. Исключаем влияние сил инерции и гибкости на результаты расчета.

Сжимающие σ , ε , внешние F и внутренние N усилия принимаем по модулю. Вводим допущение, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. При этом коэффициенты $\beta^+ = \beta$, $\alpha^+(e) = -\alpha(e)$, деформации ε – отрицательные ($\varepsilon < 0$), но берутся по модулю в выражениях $(\varepsilon)^\beta$, $(\varepsilon)^{\beta+1}$, $(\varepsilon)^{\beta+2}$.

Вычисляем:

экстремальные напряжения (13) и деформации (14);

параметр (16) при (4), (14), (15).

Интегральные уравнения

$$N_\mu(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy \quad (25)$$

и момента

$$M_{z\mu}(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy \cdot y \quad (26)$$

$$\text{внутренних сил, включая разность } M_{z\mu}(e) - N_\mu(e) \cdot y_f = \Phi_\mu(e), \quad (27)$$

содержат неизвестные показатели $B_\mu(e)$ и $\varepsilon_{r_\mu}(e)$ функции деформации (12).

Определение максимального усилия $N_\mu(e)$ и соответствующих характеристик $B_\mu(e)$, $\varepsilon_{r_\mu}(e)$ проводим численными способами, подробно изложенными в [3], [4].

Начинаем расчет, назначая:

входящие в выражение (17) коэффициенты увеличения

$$\left. \begin{array}{l} \text{шаг} \quad r_m = 1 + m \cdot \Delta, \\ \quad \quad \Delta = 0,05 \\ \text{и, например, показатели} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, k, k + 1. \end{array} \right\} \quad (28)$$

Решение уравнений:

$$N_m(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy; \quad (29)$$

$$M_{z\mu}(e) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy \cdot y; \quad (30)$$

$$\Phi_m(e) = M_{zm}(e) - N_m(e) \cdot y_f. \quad (31)$$

Выполняем на ПЭВМ с помощью пакета программ MathCAD. При заданном r_m , вычисленной по (17) деформации $\varepsilon_{r_m}(e)$, назначенных параметрах B_{mc} , $B_{mp=0}$ с $\Phi_{mc}(e) > 0$, $\Phi_{mp=0}(e) < 0$ методом хорд [7] уточняют $B_{mp=1}$, $B_{mp=2}$, ..., до B_m , при котором удовлетворяется требование:

$$|\Phi_m(e)| \leq 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}, \quad (32)$$

и из (29) определяется соответствующая $N_m(e)$.

$$\text{При } m = k \text{ и } N_{k-2}(e) < N_{k-1}(e) > N_k(e) \quad (33)$$

в интервале $[k - 2, k]$ имеет место экстремум функции $N_m(e) - r_m$. Для вычисления соответствующих этому состоянию характеристик привлекаем квадратичную интерполяцию [8].

Вводим независимую переменную $u = (r - r_{k-2})/\Delta$ с узловыми значениями $u = 0, 1, 2$, зависимостью $N_m(e) = A_0 + A_1 \cdot u + A_2 \cdot u^2$ и коэффициентами

$$A_0 = N_{k-2}, A_1 = 0,5 \cdot (-3 \cdot N_{k-2} + 2 \cdot N_{k-1} - N_k), A_2 = 0,5 \cdot (N_{k-2} - 2 \cdot N_{k-1} + N_k). \quad (34)$$

Далее находим:

$$\text{положение экстремума } u_3 = -A_1/(2 \cdot A_2); \quad (35)$$

$$\text{максимальное усилие } \max N(e) = A_0 + A_1 \cdot u_3 + A_2 \cdot [u_3]^2; \quad (36)$$

$$\text{коэффициент увеличения } r_\mu(e) = r_{k-2} + \Delta \cdot u_3; \quad (37)$$

$$\text{наибольшую деформацию } \varepsilon_{r_\mu}(e) = \varepsilon_\mu(e) \cdot r_\mu(e); \quad (38)$$

параметр $B_\mu(e)$ из уравнения (27);

равнодействующую $N_\mu(e)$ по формуле (25).

2.1. Расчет в случае $e = 0,05$ ($y_f = 0,005$ м) при $K_\mu(0,05) = 1,0630$

Определяем:

напряжение (13) - $\sigma_\mu(0,05) = 26,19 \cdot 1,0630 = 27,840$ МПа,

деформацию (14) - $\varepsilon_\mu(0,05) = 1601 \cdot 10^{-6} \cdot 1,0630 = 1701,86 \cdot 10^{-6}$,

параметры (15) - $\beta_\mu(0,05) = 2,0883$

и (16) - $\alpha_\mu(0,05) = \frac{31390}{2,0883 \cdot (1701,86 \cdot 10^{-6})^{1,0883}} = 15509000$ МПа;

при $m = 3, 4, 5$ и $\Delta = 0,05$ коэффициенты $r_m = 1 + m \cdot \Delta = 1,15, 1,20, 1,25$;

деформации $\varepsilon_m = \varepsilon_\mu(0,05) \cdot r_m = 1701,86 \cdot 10^{-6} \cdot 1,15 = 1957,14 \cdot 10^{-6}, 2042,23 \cdot 10^{-6}, 2127,32 \cdot 10^{-6}$.

При $m = 3$ $r_3 = 1,15$ в случае $B_{3c} = 1,485459 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ и

$B_{3p=0} = 1,485445 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ будем иметь из решения (31) $\Phi_{3c}(0,05) = 1,72 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} > 0$ и $\Phi_{3p=0}(0,05) = -1,56 \cdot 10^{-8} \text{ МН} \cdot \text{м} < 0$.

Теперь в приближении $p + 1 = 0 + 1 = 1$ методом хорд [7] уточняем параметр

$$B_{3p=1} = \frac{B_{3c} \cdot \Phi_{3p=0} - B_{3p=0} \cdot \Phi_{3c}}{\Phi_{3p=0} - \Phi_{3c}} =$$

$$= \frac{1,485459 \cdot 10^{-2} \cdot (-1,56 \cdot 10^{-8}) - 1,485445 \cdot 10^{-2} \cdot 1,72 \cdot 10^{-8}}{-1,56 \cdot 10^{-8} - 1,72 \cdot 10^{-8}} = 1,48545168 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1},$$

при котором по (31) получим $\Phi_{3p=1} = 0 \text{ МН} \cdot \text{м} < 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}$.

Так как условие (32) выполняется, то, подставляя $B_3 = B_{3p=1}$ в уравнение (29), находим усилие $N_{m=3}(0,05) = 236,884 \text{ кН}$.

Основные результаты полученных вычислений и расчетов при $m = 4, 5$ представлены в табл. 3.

Таблица 3

$\dot{\theta} \cdot 10^3$	e	$K_\mu(e)$	$\sigma_\mu(e)$, МПа	$\varepsilon_\mu(e) \cdot 10^6$	Параметр		m	r_m	$\varepsilon_m \cdot 10^6$	$B_m(e) \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$N_m(e)$, кН
					$\alpha_\mu(e)$, МПа	$\beta_\mu(e)$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
392,3	0,050	1,0630	27,840	1701,86	15509000	2,0883	3	1,15	1957,14	1,48545168	236,884
							4	1,20	2042,23	1,59202104	237,153
							5=k	1,25	2127,32	1,70254070	236,756
							μ	1,1952	2034,063	1,58161884	237,156

В интервале $[r_{m=3=k-2}, r_{m=5=k}]$ при $N_{k-2} = N_{m=3} = 236,884 \text{ кН} < N_{k-1} = N_{m=4} = 277,153 \text{ кН} > N_k = N_{m=5} = 236,756 \text{ кН}$

удовлетворяется условие (33) существования экстремума функции $N_m(0,05) - r_m$.

Далее определяем:

коэффициенты (34) - $A_0 = 236,884 \text{ кН}, A_1 = 0,602 \text{ кН}, A_2 = -0,333 \text{ кН}$;

положение экстремума - $u_3 = -0,602/2 \cdot (-0,333) = 0,90390$;

усилие (36) - $\max N(e = 0,05) = 236,884 + 0,602 \cdot 0,90390 + (-0,333) \cdot (0,90390)^2 = 237,156 \text{ кН}$;

показатель (37) - $r_\mu(e) = r_3 + \Delta \cdot u_3 = 1,15 + 0,05 \cdot 0,90390 = 1,1952$ (здесь и далее табл. 4);

деформацию (38) - $\varepsilon_{r_\mu}(e = 0,05) = 1701,86 \cdot 10^{-6} \cdot 1,1952 = 2034,063 \cdot 10^{-6}$, при которой из решения (27) получим параметр $B_\mu(0,05) = 1,58161884 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$, а по формуле (25) - равнодействующую $N_\mu(0,05) = 237,156 \text{ кН}$.

Изучаемое предельное состояние будет представлено функциями:

$$\text{деформаций } \varepsilon_{i\mu}(e = 0,05) = 1,58161884 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2034,063 \cdot 10^{-6}, \quad (39)$$

$$\text{напряжений } \sigma_{i\mu}(e = 0,05) = 31390 \cdot \varepsilon_{i\mu} - 15509000 \cdot (\varepsilon_{i\mu})^{2,0883} \quad (40)$$

с $\varepsilon_{i\mu}(e = 0,05)$, $\sigma_{i\mu}(e = 0,05)$ в табл. 4 и соответствующими эпюрами на рис. 4

Таблица 4

$\dot{\theta} \cdot 10^3$	e	Точки i	1	2	3	4	5	μ
		Координаты y_i , м	-0,050	-0,025	0,000	0,025	0,050	0,02900*
392,3	0,050	$\varepsilon_{i\mu}(e) \cdot 10^6$ по (39)	452,44	847,85	1243,23	1638,66	2034,06	1701,86
		$\sigma_{i\mu}(e)$, МПа по (40)	12,59	20,64	25,75	27,80	26,73	27,84

*координата y_μ вычислена по формуле $\varepsilon_\mu(e) = B_\mu(e) \cdot (y_\mu - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r_\mu}(e)$. (41)

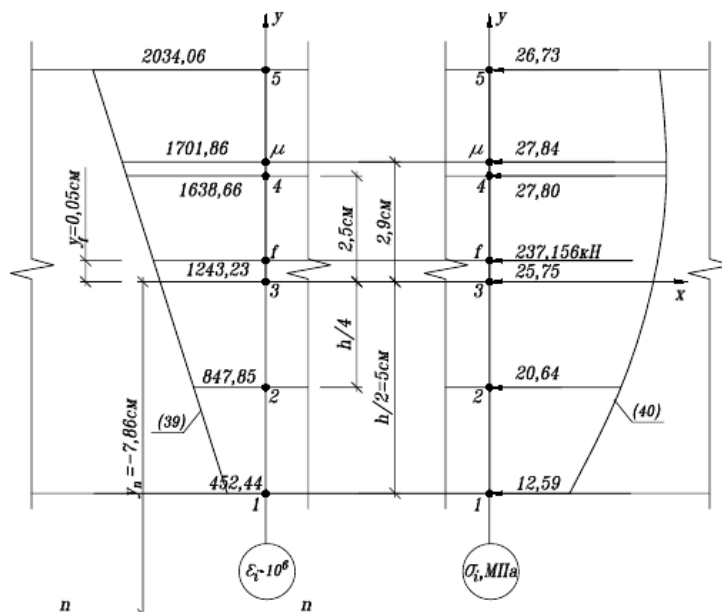


Рис. 4. Эпюры деформаций и напряжений при $e=0,050$

Положение нейтральной линии $y_n = -7,86$ см определялось из равенства нулю правой части зависимости (39) - $B_\mu(e) \cdot (y_\mu - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r_\mu}(e) = 0$, (42)

а $y_{ny} = -16,66$ см – для сечения с $b = h = 10$ см из линейно-упругого материала.

2.2. Расчет в случае $e = 0,10$ ($y_f = 0,10$ м) при $K_\mu(0,10) = 1,0791$

Результаты вычислений параметров $B_m(0,10)$ и усилий $N_m(0,10)$ при экстремальных напряжениях $\sigma_\mu(0,10)$ и деформациях $\varepsilon_\mu(0,10)$, параметрах $\alpha_\mu(0,10)$ и $\beta_\mu(0,10)$, коэффициентах $r_m = 1 + t \cdot \Delta$ и $t = 4, 5, 6$, шаге $\Delta = 0,05$, деформациях ε_m приведены в табл. 5.

Таблица 5

$\dot{\theta} \cdot 10^3$	e	$K_\mu(e)$	$\sigma_\mu(e)$, МПа	$\varepsilon_\mu(e) \cdot 10^6$	Параметр		t	r_m	$\varepsilon_m \cdot 10^6$	$B_m(e) \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$N_m(e)$, кН
					$\alpha_\mu e$, МПа	$\beta_\mu(e)$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
392,3	0,100	1,0791	28,262	1727,64	15257300	2,0883	4	1,20	2073,17	2,00150726	209,178
							5	1,25	2159,55	2,11009826	209,562
							$6 = k$	1,30	2245,93	2,22084611	209,355
							μ	1,25749	2172,49	2,12655079	209,569

Условие существования экстремума (33) функции $N_m(e) - r_m$ выполняется в интервале $[r_{m=4=k-2}, r_{m=6=k}]$. Здесь по (35) и (36) соответственно получены значения переменной $u_3 = 1,14975$ и усилия $\max N(0,10) = 209,569 \text{ кН}$. Остальные характеристики предельного состояния $(r_\mu, \varepsilon_{r_\mu}, B_\mu(0,10), N_\mu(0,10))$ представлены в табл. 6.

Таблица 6

$\dot{\theta} \cdot 10^3$	e	Точки i	1	2	3	4	5	μ
		Координаты y_i , м	-0,050	-0,025	0,000	0,025	0,050	0,02908*
392,3	0,100	$\varepsilon_{i\mu}(e) \cdot 10^6$ по (43)	45,94	577,58	1109,21	1640,85	2172,49	1727,64
		$\sigma_{i\mu}(e)$, МПа по (44)	1,43	15,50	24,52	28,19	26,29	28,262

* координата y_μ вычислена по формуле (41).

С помощью зависимостей

$$\varepsilon_{i\mu}(e = 0,10) = 2,12655079 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2172,49 \cdot 10^{-6}, \quad (43)$$

и

$$\sigma_{i\mu}(e = 0,10) = 31390 \cdot \varepsilon_{i\mu} - 15257300 \cdot (\varepsilon_{i\mu})^{2,0883} \quad (44)$$

определены и записаны в табл. 6 деформации $\varepsilon_{i\mu}(e)$ и напряжений $\sigma_{i\mu}(e)$, эпюры которых изображены на рис. 5.

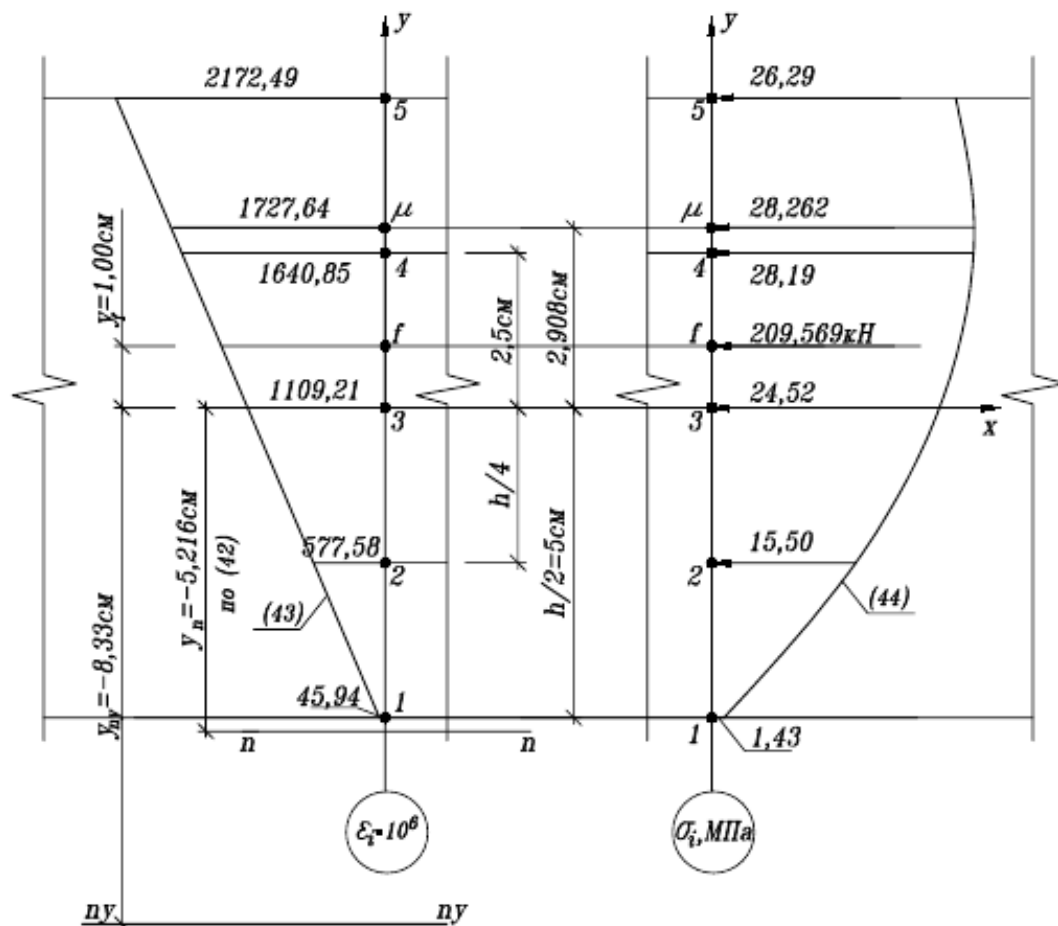


Рис. 5. Эпюры деформаций и напряжений при $e=0,100$

2.3. Расчет в случае $e = 0,15$ ($y_f = 0,015m$) при $K_\mu(0,15) = 1,0793$

Исходные данные и установленные по методике п. 2 характеристики представлены в табл. 7.

Таблица 7

$\dot{\theta} \cdot 10^3$	e	$K_\mu(e)$	$\sigma_\mu(e)$, МПа	$\varepsilon_\mu(e) \cdot 10^6$	Параметр		m	r_m	$\varepsilon_m \cdot 10^6$	$B_m(e) \cdot 10^2$, м ⁻¹	$N_m(e)$, кН
					$\alpha_\mu e$, МПа	$\beta_\mu(e)$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
392,3	0,150	1,0793	28,267	1727,96	15254200	2,0883	5	1,25	2159,95	2,35816417	185,211
							6	1,30	2246,35	2,46850817	185,427
							7 = k	1,35	2332,75	2,58026702	185,121
							μ	1,29565	2238,901	2,45893927	185,429

Замечание. При эксцентриситетах e больше ядрового $e_{яс}(\dot{\theta})$ имеем в сечениях деформации разных знаков ($\varepsilon > 0, \varepsilon < 0$ и из (12) – $\varepsilon_m < B_m \cdot h$), поэтому в расчетных уравнениях выражения $(\varepsilon_m - B_m \cdot h)^\beta$, $(\varepsilon_m - B_m \cdot h)^{\beta+1}$, $(\varepsilon_m - B_m \cdot h)^{\beta+2}$ заменяем на $(B_m \cdot h - \varepsilon_m)^\beta$, $(B_m \cdot h - \varepsilon_m)^{\beta+1}$, $(B_m \cdot h - \varepsilon_m)^{\beta+2}$.

В дополнение запишем сведения о:

положение экстремума (35) - $u_3 = 0,91379$;

усилие (36) - $\max N(e = 0,15) = 185,429$ кН;

функциях $\varepsilon_{i\mu}(e = 0,15) = 2,45893927 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2238,901 \cdot 10^{-6}$, (45)

и $\sigma_{i\mu}(e = 0,15) = 31390 \cdot \varepsilon_{i\mu} - 15254200 \cdot (\varepsilon_{i\mu})^{2,0883}$. (46)

В табл. 8 приведем результаты вычислений деформаций $\varepsilon_{i\mu}(e = 0,15)$ и напряжений $\sigma_{i\mu}(e = 0,15)$, на рис. 6 построим соответствующие эпюры.

Таблица 8

$\dot{\theta} \cdot 10^3$	e	Точки i	1	2	3	4	5	μ
		Координаты y_i , м	-0,050	-0,025	0,000	0,025	0,050	0,02922
392,3	0,150	$\varepsilon_{i\mu}(e) \cdot 10^6$ по (45)	-220,04	394,70	1009,43	1624,17	2238,901	1727,96
		$\sigma_{i\mu}(e)$, МПа по (46)	-6,56	11,20	23,23	28,16	25,67	28,267

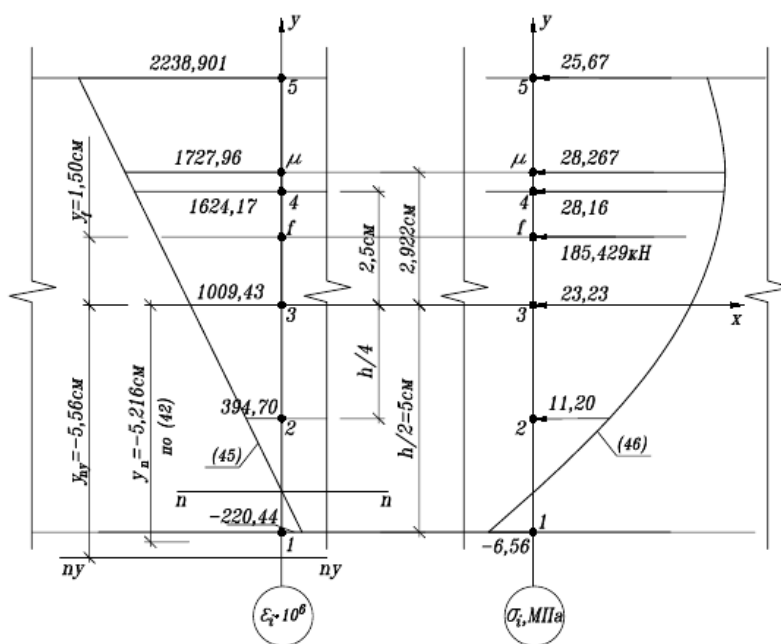


Рис. 6. Эпюра деформаций и напряжений при $e=0,150$, координате y_μ по (41), y_n по (42), y_{ny} для упругого материала

2.4. Сравнение полученных результатов

Сравнение равнодействующих $N_\mu(\dot{\theta}, e)$ с опытными разрушающими нагрузками $\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u$ выполнено в табл. 9 и на рис. 7.

Таблица 9

$\dot{\theta} \cdot 10^3$	$e = y_f/h$	Нагрузки, кН		Отклонения		
		Расчет четные $K_\mu(e)$	Опытные $\bar{F}_u(e) \pm \Delta\bar{F}_u$	$\Delta_\mu(e) = N_\mu(e) - \bar{F}_u(e)$	$\delta_\mu(e) = \left[\frac{\Delta_\mu}{\bar{F}_u(e)} \right] \cdot 100\%$	$(\Delta_\mu(e))^2$, кН
1	2	3	4	5	6	7
392,3	0,05	237,2	236,3±17,7	0,9	0,38	0,81
	0,10	209,6	207,9±14,7	1,7	0,82	2,89
	0,15	185,4	185,3±13,7	0,1	0,05	0,01
			$\Sigma =$	2,7		$\Sigma =$ 3,71

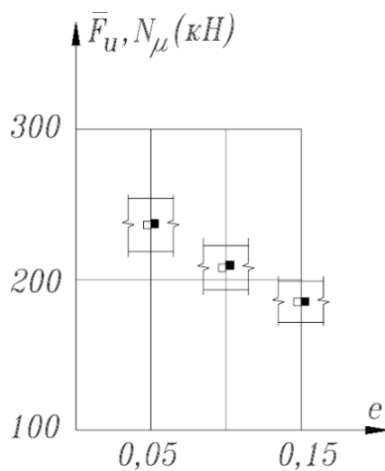


Рис. 7. Сравнение расчетных и опытных разрушающих усилий:

- - средние опытные силы $\bar{F}_u(e)$;
- - расчетные усилия $N_\mu(e)$;
- доверительные интервалы $\bar{F}_u(e)$

Нейтральные линии $n(e)$ при $e = 0,05, 0,10, e_{яс}, 0,15$ соответствующие $n_y(e)$ для внецентренно сжимаемых элементов из линейно-упругого материала представлены на рис. 8.

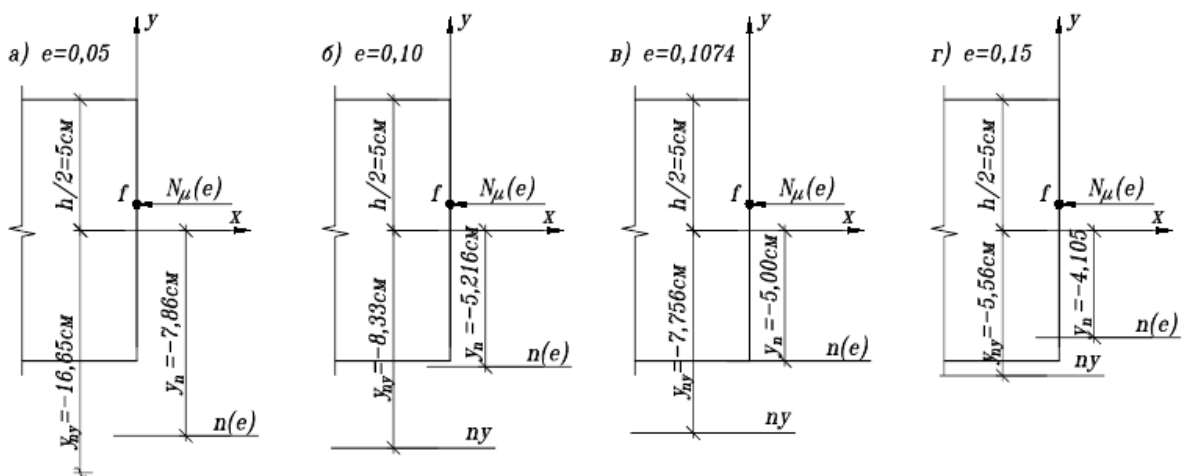


Рис. 8. Нейтральные линии при различных эксцентриситетах

Выводы

При внецентренных воздействиях с эксцентриситетом $e < e_{яс} = 0,10744$ предложено определять коэффициент увеличения экстремальных напряжений $\sigma_{\mu}(e)$ и деформаций $\varepsilon_{\mu}(e)$ зависимости " $\sigma - \varepsilon$ " по сравнению с призмным пределом прочности $\sigma_u(\theta)$ и соответствующей $\varepsilon_u(\theta)$ формуле

$$k_{\mu}(e) = 1 + 2,006 \cdot e \cdot (e_n)^{e/e_{яс}}, \quad (22)$$

а в пределах $e_{яс} = 0,10744 \leq e = 0,150$ принимать

$$k_{\mu}(e) = k_{\mu}(e_{яс}) = 1,0793 = const. \quad (21)$$

Установленные при этом равнодействующие внутренних сил $N_{\mu}(e)$ находятся (см. табл. 9 и рис. 7) в границах доверительных интервалов средних опытных интервалов разрушающих нагрузок $\bar{F}_u(e)$.

Нейтральные линии $n(e)$ располагаются (см. рис. 8) ближе к центру тяжести поперечного сечения по сравнению с $nu(e)$ элементов из линейно-упругого материала.

Библиографический список

1. Синозерский А. Н. Определение усилий, соответствующих началу микротрещинообразования, при внецентренных нагружениях призм из мелкозернистого бетона 28-дневного возраста по методике условных деформаций / А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. - Воронеж–2011. – Вып. №1(2). – С. 24-26.
2. ГОСТ 10180-90. Методы определения прочности по контрольным образцам/Госстрой СССР.-М., 1990.- С. 8-9.
3. Синозерский А. Н. Оценка напряжённо-деформированного состояния внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бетона/ А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров, А.В. Козлова // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. Воронеж– 2016. – Вып. №1(12). – С. 29-38.
4. Синозерский А. Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии / А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. Воронеж– 2012. – Вып. №1(4). – С. 72-83.
5. Синозерский А. Н. Определение НДС при разрушении внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бетона по результатам испытаний / А. Н. Синозерский Р. А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. Воронеж– 2013. – Вып. №2(7). – С. 56-62.
6. Синозерский, А. Н. Определение условных базовых нагрузок коротких сжатых бетонных элементов прямоугольного сечения при малых эксцентриситетах продольной силой/ А. Н. Синозерский Р. А. Мухтаров // Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. Воронеж– 2013. – Вып. №2(7). – С. 107-120.
7. Лапчик М. П. Численные методы : учеб. Пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчика. – М.: Изд. Центр «Академия», 2004. – 384 с.
8. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике/ П.Ф. Фильчаков. – Киев: Изд-во «Науково думка», 1973. – 744 с.

References

1. Sinizersky A.N., Mukhtarov P.A.. Definition of certain forces corresponding to the beginning of micro cracks formation at eccentric load of prisms from fine grained concrete of 28 days age by the method of conditional deformations. Scientific – technical journal of VGASU. Structural Mechanics and structures. - Voronezh– 2011. – Issue. №1(2). – P. 24-26.
2. Standard 10180-90. Methods of strength definition according to the control samples/Gosstroj of USSR.-M., 1990.- P. 8-9.
3. Sinizersky A.N. Mukhtarov R.A., Kozlova A.V. Assessment of deflected mode of compressed with standard velocity prisms from fine grained concrete concrete. Scientific – technical journal of VGASU. Structural Mechanics and structures. Voronezh – 2016. – Issue. №1(12). – P. 29-38.
4. Sinizersky A.N. Mukhtarov R.A. Assessment of deflected mode of compressed with standard velocity prisms from fine grained concrete at eccentric compression. Scientific – technical journal of VGASU. Structural Mechanics and structures. Voronezh – 2012. – Issue. №1(4). – P. 72-83.
5. Sinizersky A.N. Mukhtarov R.A. Definition of deflected mode at destruction of eccentrically compressed with standard velocity prisms from fine grained concrete according to the results of the tests. Scientific – technical journal of VGASU. Structural Mechanics and structures. Voronezh – 2013. – Issue. №2(70). – P. 56-62.
6. Sinizersky A.N. Mukhtarov R.A. Definition of the basic loads of short compressed concrete elements of rectangular section at small eccentricities of longitudinal force. Scientific – technical journal of VGASU. Structural Mechanics and structures. Voronezh – 2013. – Issue. №2(7). – P. 107-120.
7. Ragulina M.I., Henner E.K. Numerical methods : study book for the students; edited by M.P., Ларчик под ред. М. П. Лапчика. – М.: Pub. House Tzentr “Academiya”, 2004. – 384 p.
8. Filtchikov P.F. Reference book on Math. – Kiev: Pub. house «Naukovo dumka», 1973. – 744 p.

Воронежский государственный технический университет
Канд. техн. наук, доц. кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов
В.П. Волокитин
Канд. техн. наук, доц. кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов
О.А. Волокитина
Канд. техн. наук, доц. кафедры проектирования автомобильных дорог и мостов
А.В. Еремин
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-52-02
e-mail: nova.vp@mail.ru

Voronezh State Technical University

PhD of Tech. Sc. associate professor of the department of roads and bridges designing
V.P. Volokitin,
PhD of Tech. Sc. associate professor of the department of roads and bridges designing
O.A. Volokitina,
PhD of Tech.Sc. associate professor of the department of roads and bridges designing
A.V. Eroymn
Russia, Voronezh, ph.: +7(473) 2715202
e-mail: nova.vp@mail.ru

В.П. Волокитин, О.А. Волокитина, А.В. Еремин

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ВДАВЛИВАНИЯ СФЕРИЧЕСКОГО ШТАМПА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕФОРМАЦИОННО-ПРОЧНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК АСФАЛЬТОБЕТОННЫХ ПОКРЫТИЙ НА МОСТОВЫХ СООРУЖЕНИЯХ

Предложен метод определения деформационно-прочностных характеристик асфальтобетонных покрытий автодорожных мостовых сооружений, основанный на вдавливании сферического штампа в упругое полупространство и позволяющий ускорить оперативность и повысить достоверность оценки качества их строительства.

Ключевые слова: сферический штамп; модуль упругости; угол внутреннего трения; коэффициент сцепления; мостовое сооружение, покрытие, деформация, прочность, слой, асфальтобетон.

V.P. Volokitin, O.A. Volokitina, A.V. Eremin

USE OF SPHERICAL STAMP PRESSING-IN METHOD FOR DEFINITION OF DEFORMATIVE - STRENGTH PROPERTIES OF ASPHALT CONCRETE BLANKET ON BRIDGE STRUCTURES.

Method of determination of the deformation-strength characteristics of asphalt concrete grouted asphalt revetment of bridge structures based on spherical stamp [pressing -in into elastic half -space, accelerating efficiency and rising the quality assessment trustworthiness of their construction.

Keywords: spherical stamp; elastic modulus; angle of internal friction; coefficient of adhesion; bridge construction, coating, deformation, strength, layer, asphalt concrete.

Мостовые сооружения на автомобильных дорогах являются важной составной частью дорожной сети. Настил большинства из них имеет асфальтобетонное покрытие. Проезжая часть мостов представляет собой совокупность конструктивных элементов, воспринимающих действие подвижных нагрузок и передающих их на несущую часть пролетного строения.

Основными функциями проезжей части и, в частности, ездогого полотна являются:

- восприятие внешних нагрузок от автотранспорта, распределение и передача их на несущую конструкцию мостового сооружения;

- защита нижележащих конструкций от механического воздействия в качестве слоя износа;
- защита нижележащих несущих конструкций от прямых атмосферных воздействий;
- обеспечение комфортности и безопасности движения за счёт ровности и шероховатости покрытия.

Работа покрытий в процессе эксплуатации осуществляется при крайне неблагоприятном воздействии как транспортных нагрузок, так и климатических факторов. Помимо воздействия автотранспорта, необходимо принимать во внимание напряжения, возникающие в покрытии в результате циклических колебаний температуры, а также напряжения, вызываемые давлением льда в порах при переменном замораживании и оттаивании, и, кроме того, гидравлические импульсы воды в порах при проезде автомобилей. Это значительно затрудняет оценку их влияния на эксплуатационно-прочностные показатели мостов.

В настоящее время большое внимание стало уделяться оценке деформационно-прочностных характеристик асфальтобетонных покрытий на мостовых сооружениях, на основании которых можно определить вероятность возникновения деформаций и разрушений и своевременно принять меры, предотвращающие их развитие [1].

На текущий момент в нормативной литературе отсутствует метод, позволяющий определить основные деформационно-прочностные характеристики без нарушения целостности покрытия в процессе контроля качества строительства мостовых сооружений.

В существующей нормативной базе требования, предъявляемые к асфальтобетону по ГОСТ 9128-2013, ПНСТ 184-2016, и согласно методике оценки основных показателей его свойств (ГОСТ 12801-98) повлекли за собой определенные несоответствия между показателями свойств, характеризующими асфальтобетон как дорожно-строительный материал, и теми необходимыми характеристиками, которые должны контролироваться в процессе строительства. Такие несоответствия заключаются в том, что асфальтобетон, рассматриваемый как дорожно-строительный материал, характеризуется температурой приготовления и укладки, крупностью зернового состава, плотностью, водонасыщением, набуханием и прочностью, определяемой при температурах 0°C , 20°C , и 50°C . Однако к основным характеристикам асфальтобетона также относятся: модуль упругости при статическом нагружении при различных температурах, прочность при изгибе, внутреннее трение и сцепление между частицами. И в том, и другом случае используемые схемы испытания образцов существенно отличаются от реальной работы асфальтобетона в дорожном покрытии [2,3].

Существующие методы не позволяют комплексно охарактеризовать реологические свойства асфальтобетона.

В связи с этим был проанализирован опыт определения прочностных характеристик асфальтобетона различными методами в полевых условиях. Исследования показали, что необходимо иметь сведения не только о величине максимального прогиба, но и об очертании чаши места нагружения. Эти данные позволяют установить значения максимального и минимального радиусов кривизны, а также растягивающих напряжений. В итоге, была предложена методика определения прочностных и деформационных характеристик асфальтобетонного покрытия на мостовых сооружениях с использованием вдавливания сферического штампа, которая основана на определении деформационно-прочностных свойств упругого полупространства [4,5].

Жесткий сферический штамп радиусом R нагружается под воздействием силы Q в упругое полупространство (рис. 1). Перемещение осуществляется по оси OZ , направленной внутрь полупространства. Упругое полупространство характеризуется модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν . При оценке равновесия штампа рассматривается область соприкосновения Ω , содержащая точки смещенной поверхности S после вдавливания.

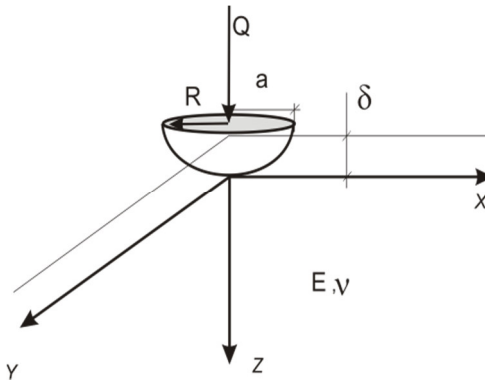


Рис. 1. Расчетная схема при вдавливании сферического штампа

При вдавливании штампа образуется круговая площадка. Радиус окружности, ограничивающий эту площадку, равен a (3).

Уравнение равновесия имеет вид

$$Q = \iint_{\Omega} p(x, y) dx, dy. \quad (1)$$

Перемещения точек поверхности S вдоль оси z описываются зависимостью

$$\omega = \delta - \varphi(x, y). \quad (2)$$

Радиус площадки опирания a (3) и перемещения сферического штампа δ (4) в зависимости от приложенной силы Q имеют вид

$$a = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{Q \cdot (1 - \nu^2)}{E} \cdot R \right]^{1/3}, \quad (3)$$

$$\delta = \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{Q(1 - \nu^2)}{E \cdot \sqrt{R}} \right]^{2/3}. \quad (4)$$

При известных значениях δ и Q решение (5) может быть использовано для оценки модуля упругости асфальтобетонных покрытий на мостовых сооружениях.

$$E = 0,75 \cdot \frac{Q \cdot (1 - \nu^2)}{\delta \cdot \sqrt{\delta \cdot R}}. \quad (5)$$

При циклическом нагружении штампа постоянной нагрузкой, в результате накопления остаточных деформаций и увеличения площади поверхности опирания под штампом формируется область установившихся напряжений $\sigma_{nz} = \sigma_{yz}$, которые не превосходят упругих характеристик конструктивного слоя покрытия и могут характеризовать его прочностные свойства [4, 5]. При неоднократном приложении нагрузки происходит накопление остаточных деформаций и область жесткости увеличивается с C_1BC до $C'_1B'C'$. Угол внутреннего трения - постоянный конус жесткости - будет определяться суммарной остаточной деформацией и соответственно радиусом a . При этом сформировавшаяся поверхность сводит к минимуму влияние неоднородности материала слоя, а практическое отсутствие остаточных деформаций позволяет рассматривать конструктивный слой при данных напряжениях как упругое полупространство. Метод циклического вдавливания сферического штампа был применен для определения угла внутреннего трения и силы сцепления в конструктивном слое покрытия мостового сооружения. При этом рассматривалась модель вдавливания сферического штампа в упругопластическую среду (рис. 2).

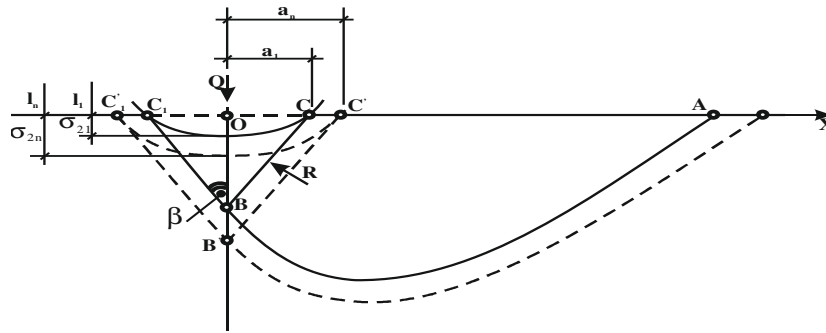


Рис. 2. Модель вдавливания штампа в полупространство

Рассматривая напряжения на образующей конуса BC , можно установить, что на данной поверхности наблюдаются простые силы сжатия, что позволяет в соответствии с теорией Мора составить два уравнения равновесия при установившемся напряжении и при первом нагружении:

$$\sigma_y \cdot \sin(45 - \varphi/2) = 2 \cdot C \cdot \operatorname{tg}(45 + \varphi/2), \quad (6)$$

$$\sigma_1 \cdot \sin(45 - \varphi/2) = 2 \cdot C \cdot \operatorname{tg}(45 + \varphi/2) + C \cdot l_j \cdot \sin(45 - \varphi/2), \quad (7)$$

где σ_1 и σ_y - соответственно напряжения при первом и после n - циклов нагружения;
 φ - угол внутреннего трения;

C - сцепление между частицами материала слоя;

l_j - суммарная деформация после n - циклов нагружения

$$l_j = \sum l_{oj} + \delta_n, \quad (8)$$

где l_{oj} - остаточные деформации;

δ_n - упругие деформации.

Решение системы тригонометрических уравнений позволяет определить угол внутреннего трения:

$$\operatorname{tg}(45 + \varphi/2) = \sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{\sigma_y \cdot l_j}{2 \cdot (\sigma_1 - \sigma_y)}\right)^2}}. \quad (9)$$

Показатель сцепления определяется из первого уравнения системы уравнений равновесия (6) при установившемся напряжении.

Учитывая время и количество нагружений, упругие и вязко - упругие свойства материалов и используя теорию наследственной ползучести и соотношение Больцмана - Вольтерры при моделировании упругопластических свойств материалов общая относительная деформация составит

$$\varepsilon^{n,t} = \frac{\sigma}{E_y} + \frac{\sigma^2}{E_d [R]} \cdot \frac{\lg n}{\lg N} \cdot (e^{t/t_p} - 1), \quad (10)$$

где R - предел прочности материала на сжатие;

E_y и E_d - модули упругости и деформации;

σ - напряжение сжатия;

N - число нагружений, которые должен выдержать материал до разрушения;

n - реализованное число нагружений;

t - время действия напряжения;

t_p - время релаксации напряжений.

Проанализировав полученные в результате испытаний асфальтобетонного покрытия характеристики, полученные данным методом, следует отметить, что, так как асфальтобетон в реальных условиях работает как упруго-вязко-пластичный материал, при вдавливании сферического штампа упруго-вязко-пластические свойства асфальтобетона будут отражаться в соотношении упругих δ и остаточных $\ell_{ост.}$ деформаций, а в местах воздействия штампа может быть различное соотношение частиц минеральной части асфальтобетона, поэтому при нагружении штампа статической нагрузкой значения показателей деформаций в различных точках покрытия будут значительно отличаться друг от друга. Этот недостаток сводится к минимуму циклическим нагружением сферического штампа ступенчатой нагрузкой в одной точке испытания. В случае неоднократного воздействия на полупространство жестким сферическим штампом с постоянной нагрузкой происходит накопление остаточных деформаций, в месте контакта происходит плотное прилегание штампа к поверхности асфальтобетона, а сформировавшаяся сфера сводит к минимуму влияние неоднородности материала на результаты испытания. Практическое отсутствие остаточных деформаций при последних циклах нагружения позволяет рассматривать асфальтобетон как упругое полупространство, т.е. наблюдается работа материала в упругой стадии.

Максимальное значение давления, согласно результатам проведенных испытаний методом вдавливания сферического штампа, равное $1,5 p_{cp}$, зафиксировано в центре площадки соприкосновения; на окружности контакта с поверхностью значение давления нулевое. Эпюра распределения давления представляет поверхность полусфер, что приближается к распределению напряжений от действия колеса автомобиля (рис. 3).

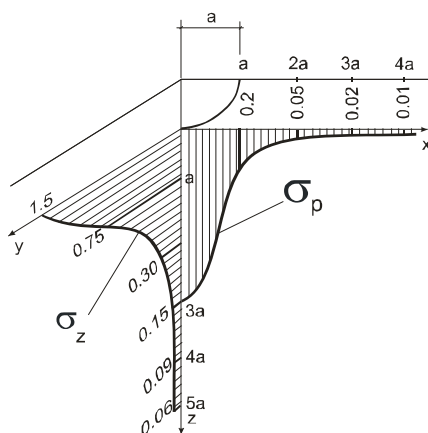


Рис. 3. Распределение напряжений в долях от P_{cp} под действием шарового штампа

Для определения деформационно-прочностных свойств асфальтобетона и асфальтобетонных покрытий использовался сферический штамп радиусом 63,5 мм с максимально прикладываемой нагрузкой величиной 200 кгс.

При определении деформационно-прочностных свойств в натуральных условиях для слоя покрытия величина погружения и среднее давление на поверхности штампа ограничивались активной зоной, т.е. не больше толщины слоя. В свою очередь глубина погружения

штампа, радиус отпечатка и активная зона будут зависеть от крупности фракции щебеночной составляющей смеси.

В лабораторных условиях определение деформационно-прочностных характеристик производилось на стандартных цилиндрических образцах. При этом активная зона не выходила за пределы образцов и результаты испытаний образцов в лабораторных и натуральных условиях характеризовались достаточно высокой сходимостью [3, 4].

Данный метод позволяет также определить установившиеся напряжения, угол внутреннего трения и сцепление для асфальтобетона как в лабораторных условиях, так непосредственно на покрытиях искусственных сооружений. При этом оценка будет производиться при различных температурах, не разрушая покрытия. В местах, где имеются сдвиговые деформации, можно будет оперативно определять, за счет каких факторов они происходят и какие меры необходимы для повышения сдвигоустойчивости.

ВЫВОДЫ

Предлагаемый метод для оценки прочностных и деформационных характеристик асфальтобетонных покрытий мостовых сооружений позволит:

1. Ускорить оперативность и повысить достоверность оценки качества строительства покрытий, так как предполагается производить сравнение показателей на разных этапах: при подборе смеси; по пробам, взятым из смесителя и непосредственно в натуральных условиях; при устройстве покрытия без его разрушения;
2. Принимать оперативные решения по внесению изменений в состав смесей, технологию укладки и уплотнения;
3. Эксплуатирующим организациям получать полную, объективную и достоверную информацию о транспортно-эксплуатационном состоянии и характеристиках, соответствующих требованиям безопасности движения, а также планировать распределение и использование средств, направляемых на содержание и ремонт дорожных сооружений.

Библиографический список

1. Овчинников И.Г. Дорожная одежда на мостовых сооружениях: отечественный и зарубежный опыт/ И.Г. Овчинников, И.И. Овчинников // Интернет-журнал «Науковедение». – 2014. – № 5 (24). – Сентябрь-октябрь. – С. 1- 30.
2. Волокитин В.П. Испытание асфальтобетона сферическим штампом / В.П. Волокитин, А.В. Еремин // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2010. – № 1. –С. 66-71.
3. Волокитина О.А. Использование метода вдавливания сферического штампа для определения расчетных характеристик различных конструктивных слоев нежестких дорожных одежд/ О.А. Волокитина // Строительство и реконструкция. – 2010. – № 6 (32). – С. 70-77.

4. Волокитина О.А. Особенности проектирования и расчета нежестких дорожных одежд на основе реальных расчетных характеристик конструктивных слоев/ О.А. Волокитина // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2010. – №4(20). – С. 100-106.
5. Волокитин В.П. Теоретическое обоснование метода определения деформационно-прочностных характеристик асфальтобетонных покрытий на мостовых сооружениях/ В.П. Волокитин, О.А. Волокитина, А.В. Еремин // Сборник ФАУ «РОСДОРНИИ». «Дороги и мосты» – 2017. – Выпуск 37/ 1. – С. 205-212.

References

1. Ovchinnikov I.G., Ovchinnikov I.I. Road base on bridge structures domestic and foreign experience. Internet journal “Naukovedenie”. – 2014. – № 5 (24). – September - October. – P. 1- 30.
2. Volokitin V.P., Eryomin A.V. Asphalt concrete testing by the spherical stamp. Scientific bulletin of VGASU. Construction and Architecture. – 2010. – № 1. –P. 66-71.
3. Volokitina O.A. Application of the method of spherical stamp damping for definition of design characteristics of different structural layers of non rigid road base. Construction and reconstruction. – 2010. – № 6 (32). – p. 70-77.
4. Volokitina O.A. Peculiarities of design and calculation of non rigid road base based on the real calculation characteristics of structural layers. Scientific bulletin of VGASU. Construction and Architecture. – 2010. – №4(20). – P. 100-106.
5. Volokitin V.P., Volokitina O.A. Eryomin A.V. Theoretical substantiation of the method of deformative strength characteristics of asphalt concrete blankets on bridge constructions. Collection of FAU “Rosdornii” “Roads and bridges” – 2017. – Issue 37/ 1. – P. 205-212.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МОСТОВ И ТРАНСПОРТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

УДК 624.042

Воронежский государственный технический университет

Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики

В.С. Сафронов

Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики

Н.А. Барченкова

Магистрант кафедры строительной механики

И.А. Попова

Россия, г. Воронеж, тел.: +7-951-872-07-85

e-mail: 7irina2308@rambler.ru

Voronezh State Technical University

Dr of Tech. Science, professor

of the Department of Structural Mechanics

V.S. Safronov

PhD of Tech. Sc., associate professor of the Department of Structural Mechanics

N. A. Barchenkova

undergraduate student of the Department of Structural Mechanics

I. A. Popova

Russia, Voronezh, ph.: +79518720785

e-mail: 7irina2308@rambler.ru

В.С. Сафронов, Н.А. Барченкова, И.А. Попова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И НАГРУЖЕННОСТИ ПЛИТЫ ПРОЕЗЖЕЙ ЧАСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО БАЛОЧНОГО МОСТА

На примере типового сооружения апробирована методика конечно-элементного (КЭ) моделирования напряженно-деформированного состояния мостовой плитной конструкции от действия постоянных и временных колесных нагрузок. На основе сопоставления полученных с помощью различных вариантов пространственных КЭ-х расчетных схем пролетных строений обоснована наиболее простая модель для описания нагруженности плиты проезжей части. С использованием поверхностей влияния изучено расположение по длине и ширине пролетного строения наиболее напряженных сечений плиты.

Ключевые слова: железобетонный без диафрагменный мост, плита проезжей части, напряженно деформированное состояние, усилия, прогибы, поверхность влияния, колесная нагрузка, линия движения, опасные сечения.

V.S. Safronov, N.A. Barchenkova, I.A. Popova

MODELING OF DEFORMATION AND LOADING OF THE CONCRETE BEAM BRIDGE ROAD WAY SLAB

The method of the finite – element modeling of slab bridge deflected mode under constant and temporal wheels loads was tested taking typical constructions as an example. Basing on the comparison of the received with the help of different variants of spans spatial finite- element calculation schemes the simplest model for description of road way slab was proved. The most stressed slab sections location along length and width s studied with application of influence surfaces

Keywords: reinforced concrete bridge without diaphragm, road way slab, deflected mode, forces, influence surface, wheel load, movement line, dangerous sections.

Введение

В железобетонных балочных автодорожных мостах плиты проезжей части являются весьма ответственными элементами, от надежности которых зависит безопасность пропуска по транспортным сооружениям автомобилей повышенной грузоподъемности [1].

© Сафронов В.С., Барченкова Н.А., Попова И.А., 2017

Напряженно-деформированное состояние плиты проезжей части в железобетонных балочных мостах определяется особенностями сопряжения несущих элементов пролетных строений, шага расположения главных балок, жесткостных параметров и т.п., которые не учитываются в рекомендуемых нормативных документах [2, 3], методиках для прочностных расчетов плиты. Влияние указанных особенностей наиболее полно может быть выполнено использованием в прочностных расчетах пространственных конечно-элементных моделей пролетных строений [4-5]. Такие расчетные схемы достаточно просто реализуются в современных вычислительных комплексах ЛИРА-САПР [15-16], MIDAS, SAP2000 и т. п. Этот подход позволяет изучать важные для практического применения проблемы учета ослаблений при появлении дефектов и повреждений [6], учитывать влияние накладной плиты при усилениях плиты проезжей части [7] и динамические эффекты при движении транспортных средств [8], включая нелинейности жесткостных характеристик и нивелирующую способность пневматических шин современных автомобилей [8].

В настоящей работе рассматриваются методические вопросы применения конечно-элементных комплексов при изучении напряженно-деформированного состояния плиты проезжей части, которые позволяют выполнить:

- обоснованный выбор расчетных моделей железобетонных балочных без диафрагменных мостов, позволяющих изучить распределение усилий в плите проезжей части по длине и ширине пролетных строений;
- построение поверхностей влияния усилий в плите проезжей части для различных характерных точек плиты;
- анализ распределения усилий в разных зонах пролетного строения от совместного действия постоянных и временных воздействий.

Описание объекта исследования

Рассматривается широко распространенное на автодорогах РФ пролётное строение автодорожного моста, выполненное в соответствии с типовым проектом Союздорпроекта серии 3.503.1-81[14] длиной 24 м с габаритами Г11,5+2х1,5 (рис. 1). Оно состоит из устанавливаемых с шагом 2,4 м шести одинаковых без диафрагменных балок таврового сечения высотой 123 см с предварительно напрягаемой арматурой, объединенных между собой по длине монолитными участками.

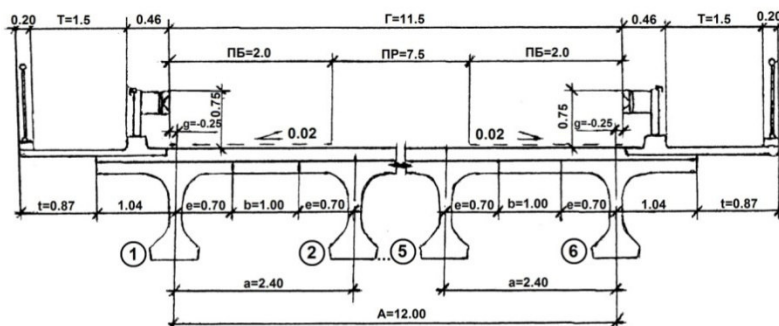


Рис. 1. Поперечник типового пролётного строения с габаритами Г11,5+2х1,5

По типовому проекту все пролетное строение разделяется на средний и концевые участки, на которых меняется толщина стенки балки: на среднем участке толщина стенки составляет 160 мм, на концевых – 260 мм.

В проекте предусмотрены балки двух типов – крайние и промежуточные, последние отличаются наличием односторонних выпусков арматуры из плиты проезжей части. Ширина плиты для крайних балок составляет 174 см, для промежуточных – 140 см.

В качестве постоянных нагрузок учтем вес пролетного строения, который состоит из собственного веса балок, монолитных участков и дорожного покрытия. При сборе постоянных нагрузок расчетное значение составило: для дорожного покрытия – $5,97 \text{ кН/м}^2$; для плиты – $4,86 \text{ кН/м}^2$; для главных балок – $8,47 \text{ кН/м}$. При этом вес верхней полки балки был отнесен к весу плиты конструкции для удобства создания расчетной схемы.

Обоснование расчетной модели пролетного строения

При разработке конечно-элементной модели [9-10] рассматриваемого бездиафрагменного пролетного строения учитывается условие близости к действительному напряженно-деформированному состоянию плиты проезжей части в зонах расположения балок и монолитных участков их сопряжения по длине и ширине.

Расчетная схема пролетного строения принята в виде плитно-стержневой системы с использованием двух стандартных типов конечных элементов (КЭ) из библиотеки ПК ЛИРА-САПР 2014 [15]:

- прямоугольные пластинчатые КЭ (оболочки с нулевой кривизной) с шестью степенями свободы в узле, располагаемые в горизонтальной плоскости и моделирующие плиту (КЭ 41);
- стержневые КЭ с шестью степенями свободы в узле (КЭ 10), моделирующие балку в целом и продольную жёсткость плиты при сжатии.

Для объединения КЭ оболочки и стержневого КЭ использована процедура «жёсткой вставки», учитывающая взаимное высотное положение центра тяжести балки и оси плиты (рис. 2).

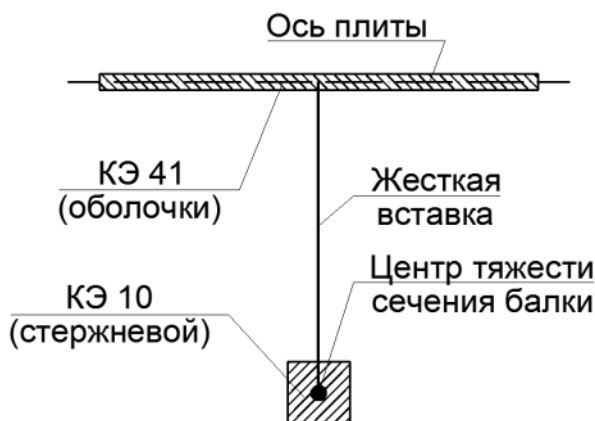


Рис. 2. Схема плитно-стержневой КЭ-й модели

Исходная конечно-элементная сетка принималась согласно приведенным в [16] рекомендациям следующих размеров: в продольном направлении выполнено разбиение на 20 частей ($23,6:20=1,18 \text{ м}$), в поперечном – с учетом границ консольных участков, половины полки балки и монолитных участков (т.е. $1,04 \text{ м}$; $0,7 \text{ м}$, $1,0 \text{ м}$; $0,7 \text{ м}$; $0,7 \text{ м}$; $1,0 \text{ м}$ и т.д.), для последующих сеток было выполнено сгущение исходной соответственно в 2, 4 и 8 раз.

С правой стороны моста заданы шарнирно-неподвижные граничные условия, которые запрещают все линейные перемещения (X , Y , Z), но разрешают все повороты (UX , UY , UZ); а с левой – шарнирно-подвижные, запрещающие только вертикальные перемещения (Z).

Для окончательного уточнения размеров конечно-элементной сетки произведены расчеты на постоянные нагрузки [11-12]. Собственный вес плиты и дорожного покрытия учитывался в виде равномерно распределенной по площади верхней поверхности плиты нагрузки, вес железобетонных балок – в виде равномерно распределенной нагрузки по их длине. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Сопоставление максимальных прогибов и усилий в плите при разных параметрах сетки

Размеры КЭ, м ²	W_{\max} , мм	$M_{x,\max}$, кН·м/м	$M_{y,\max}$, кН·м/м	Время вычисл., мин
Исходная, по рекомендациям [13] (1,18×1,04; 1,18×0,7; 1,18×1,0)	-31	8,23	2,57	0,23
Сгущение в 2 раза (0,59×0,52; 0,59×0,35; 0,59×0,5)	-31	8,64 (5,0 %)	4,50 (75,1 %)	0,50
Сгущение в 4 раза (0,295×0,26; 0,295×0,175; 0,295×0,25)	-31	8,71 (0,8 %)	4,84 (7,5 %)	1,50
Сгущение в 8 раз (0,1475×0,13; 0,1475×0,0875; 0,1475×0,125)	-31	8,73	4,92	5,92

Изгибающие моменты $M_{x,\max}$ при сгущении исходной сетки меняются не более чем на 5 %, что весьма незначительно, а прогибы W_{\max} практически остаются неизменными. При этом выявлено, что для получения стабильных значений $M_{y,\max}$, когда погрешность не превышает 7,5 %, необходимо сгустить сетку в 2 раза. Следовательно, при анализе только изгибающих моментов M_x и прогибов можно ограничиться исходной сеткой, а при необходимости учета изгибающего момента M_y нужно выполнить ее сгущение в 2 раза. Дополнительно установлено, что по мере сгущения сетки значительно увеличивается время расчета. Поэтому наиболее универсальным является вариант сгущения исходной КЭ сетки в 2 раза.

В процессе моделирования пролетного строения было рассмотрено 3 варианта описания поперечных сечений главных железобетонных балок:

- а) осредненное двутавровое сечение (рис. 3, а);
- б) осредненное двутавровое сечение с утолщенной верхней полкой на 2 см для учета предварительного напряжения в железобетонных балках по рекомендациям [16] (рис. 3, б);
- в) тавровое поперечное сечение балки по типовому проекту – с действительной формой пяты в нижней зоне ребра и закругленного сопряжения ребра с плитой (рис. 3, в).

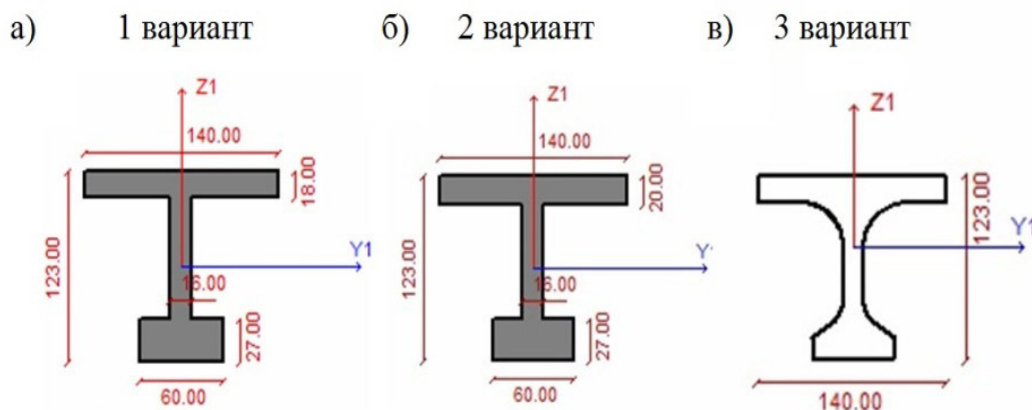


Рис. 3. Варианты описания поперечного сечения балки пролетного строения

Для указанных трех вариантов описания поперечных сечений балок были выполнены расчеты пролетного строения на действие постоянных нагрузок в ПК ЛИРА-САПР 2014. Результаты вычислений сведены в табл. 2.

Сопоставление максимальных прогибов и усилий в плите при разных вариантах описания поперечных сечений балок

Тип балки	W_{\max} , мм	$M_{x,\min}$, кН·м/м	$M_{x,\max}$, кН·м/м	$M_{y,\min}$, кН·м/м	$M_{y,\max}$, кН·м/м
1 вариант	31	-0,29	8,64	-4,01	4,50
2 вариант	30,3 (-2,3 %)	-0,30 (3,4 %)	8,47 (-2,0 %)	-3,99 (-0,5 %)	4,45 (-1,1 %)
3 вариант	31 (0 %)	-0,28 (-3,4 %)	8,67 (0,3 %)	-4,00 (-0,2 %)	4,58 (1,8 %)

В связи с тем, что вычисленные для разных расчетных моделей прогибы W_{\max} , и усилия $M_{x,\min}$, $M_{x,\max}$, $M_{y,\min}$, $M_{y,\max}$ отличаются не более чем на 3,4 %, целесообразно использовать первый из рассмотренных вариантов расчетного сечения балок как наиболее простой при реализации.

Распределения прогибов и усилий в плите от постоянных нагрузок

На рис. 4-8 представлены графические результаты расчета пролетного строения на действие постоянных нагрузок в виде изополей прогибов, изгибающих моментов M_x и M_y и соответствующие им эпюры в среднем поперечном сечении.

Из приведенных на рис. 4 графиков видно, что вертикальные перемещения $W(x,y)$ пролетного строения от постоянных нагрузок равномерно возрастают в продольном направлении и практически неизменны в поперечном.

Изгибающие моменты M_x (рис.5 и 6) принимают положительные значения, которые возрастают к середине пролетного строения в поперечном направлении, при этом они несколько уменьшаются вблизи балок. Это объясняется повышением жесткости плиты в зоне опирания на продольные балки.

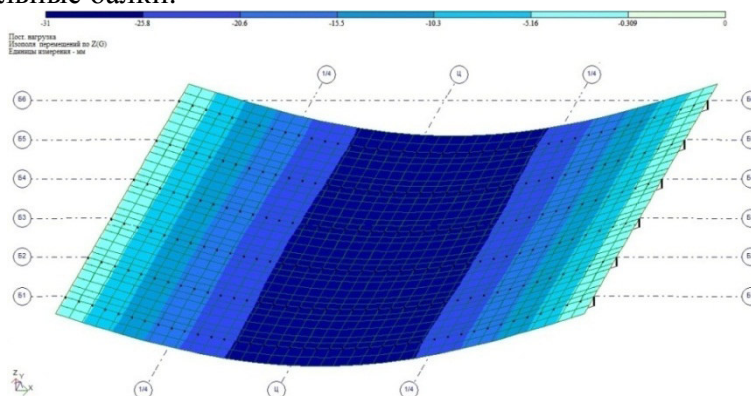


Рис. 4. Изополюса перемещений по Z ($W_{\max}=31$ мм)

В местах опирания плиты пролетного строения на продольные балки изгибающие моменты M_y (рис. 7) принимают отрицательные значения, а их эпюра в поперечном направлении (рис. 8) имеет пикообразную форму. При этом на консольных участках характер эпюры M_y соответствует очертанию эпюры моментов в консольной балке, а в центре плиты – как в балке с упругими промежуточными опорами.

Полученные очертания эпюр изгибающих моментов соответствуют общепринятым представлениям о характере НДС плиты пролетного строения под действием собственного веса. Это позволяет сделать вывод об адекватности принятой в расчетах конечно-элементной модели действительной нагруженности элементов пролетного строения.

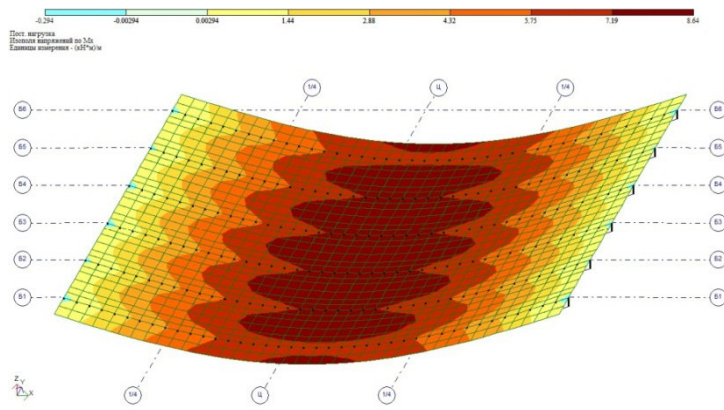


Рис. 5. Изополю изгибающих моментов M_x
 $(M_{x, \min} = -0,294 \text{ кН}\cdot\text{м/м}, M_{x, \max} = 8,64 \text{ кН}\cdot\text{м/м})$

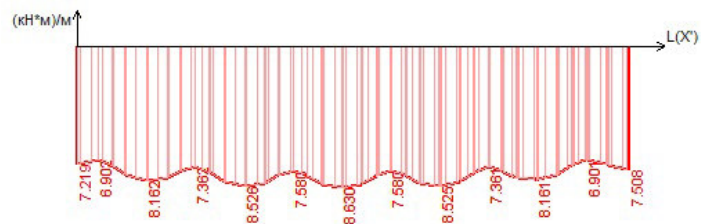


Рис. 6. Эпюра изгибающего момента M_x в среднем поперечном сечении

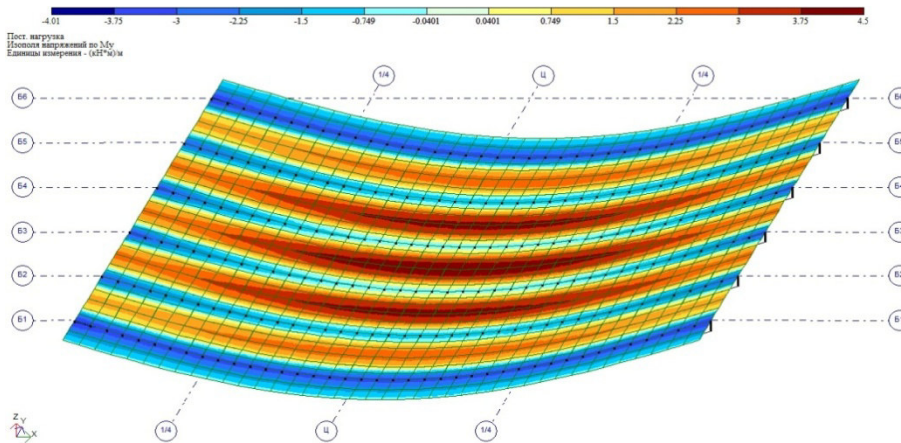


Рис.7. Изополю изгибающих моментов M_y
 $(M_{y, \min} = -4,01 \text{ кН}\cdot\text{м/м}, M_{y, \max} = 4,50 \text{ кН}\cdot\text{м/м})$

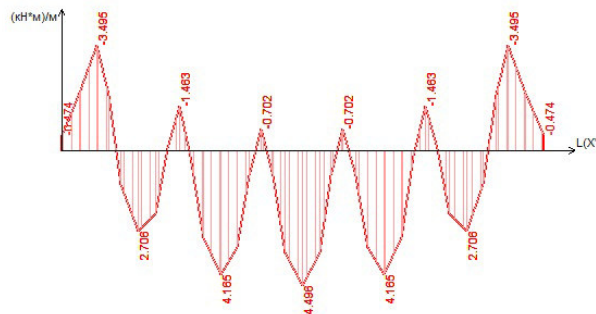


Рис. 8. Эпюра изгибающего момента M_y в среднем поперечном сечении

Распределения прогибов и усилий в плите от действия временных колесных нагрузок

В соответствии с рекомендациями СНиП 2.05.03-84* [4] в расчетах изучалось действие на пролетное строение нормативной временной вертикальной нагрузки в виде колесного четырехосного автомобиля НК-80 общим весом 80 тс, где воздействие каждого из 8-ми колес моделировалось сосредоточенной силой 98 кН (10 тс) [13].

При этом численный анализ НДС плиты выполнялся в ПК ЛИРА-САПР 2014 на основе описанной выше конечно-элементной расчетной схемы. В расчетах принимались следующими привязки линий перемещения центра расположения четырехосного автомобиля НК-80 к краю плиты пролетного строения (см. рис. 1):

I. Движение по краю полосы проезда на расстоянии 5,04 м по плите, расположенной между главными балками Б2 и Б3 пролетного строения.

II. Движение по полосе безопасности на расстоянии 3,44 м по плите, расположенной между главными балками Б1 и Б2 пролетного строения.

III. Движение вблизи продольной оси проезжей части на расстоянии 7,04 м по плите, расположенной между главными балками Б3 и Б4 пролетного строения.

По результатам выполненных расчетов выявлены зоны расположения наиболее напряженных участков плиты проезжей части балочного моста, в которых следует осуществлять проверку прочности при проведении испытаний транспортных сооружений.

Сопоставление максимальных изгибающих моментов в различных сечениях плиты проезжей части от действия одиночной колесной нагрузки НК-80 представлены в табл. 3.

Таблица 3

Сопоставление максимальных прогибов и усилий в плите
в зависимости от расположения центра колеи движения и центра четырехосного
автомобиля на проезжей части транспортного сооружения

Номер линии движения	Положение НК-80	W_{\max} , мм	$M_{x,\min}$, кН·м/м	$M_{x,\max}$, кН·м/м	$M_{y,\min}$, кН·м/м	$M_{y,\max}$, кН·м/м
I	у опоры	4,99	-1,71	6,71	-12,5	17,9
	в четверти пролета	11,2	-1,03	9,54	-7,91	24,2
	в середине пролета	16,0	-0,991	11,0	-7,70	29,2
II	у опоры	5,59	-4,40 (кэ №21)	8,69	-26,40 (кэ №21)	25,40
	в четверти пролета	12,5	-1,10	11,2	-8,67	26,6
	в середине пролета	18,3	-1,03	12,50 (кэ №731)	-9,34	29,90 (кэ №747)
III	у опоры	4,85	-0,706	4,00	-5,63	9,52
	в четверти пролета	11,0	-0,99	7,07	-7,74	17,7
	в середине пролета	15,6	-1,17	9,06	-8,44	23,50

Примечание. В приведенной таблице в скобках указаны номера конечных элементов расчетной пространственной модели пролетного строения, для которых зафиксированы максимальные изгибающие моменты.

Из данных, приведенных в табл. 3, следует, что наиболее неблагоприятной по изгибающим моментам является линия движения II, расположенная вблизи края проезжей части. При расположении одиночной четырехосной временной нагрузки НК-80 наибольшие отрицательные изгибающие моменты M_x и M_y возникают в месте расположения КЭ № 21 вблизи опорного сечения крайней балки Б1, а положительные изгибающие моменты M_x и M_y – в КЭ №731 и №747 КЭ, находящиеся в середине пролета плиты между балками Б1 и Б2, Б2 и Б3 соответственно. На рис. 9 и 10 представлены поверхности влияния изгибающих моментов для наиболее нагруженных характерных КЭ. Форма приведенных поверхностей влияния изгибающих моментов имеет локальный характер, поэтому для расчетов требуется сгущение конечно-элементной сетки.

При исследовании прогибов установлено, что линия движения II по краю проезжей части также является наиболее опасной, причем максимальные прогибы будут при расположение автомобиля НК-80 в средней части пролета моста. При этом выявлено, что максимальные изгибающие моменты в продольных сечениях плиты M_y существенно превышают максимальные изгибающие моменты в поперечных сечениях M_x . В связи с этим для оценки несущей способности плиты пролетного строения при локальных нагрузениях наибольший интерес представляет изгибающий момент в поперечных сечениях M_y .

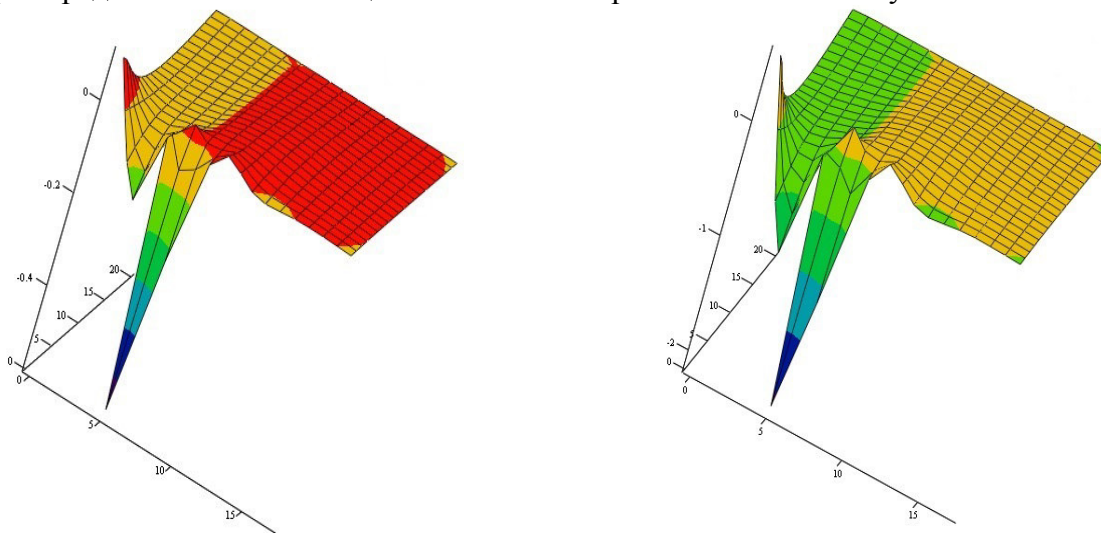


Рис. 9. Поверхности влияния M_x и M_y для КЭ №21

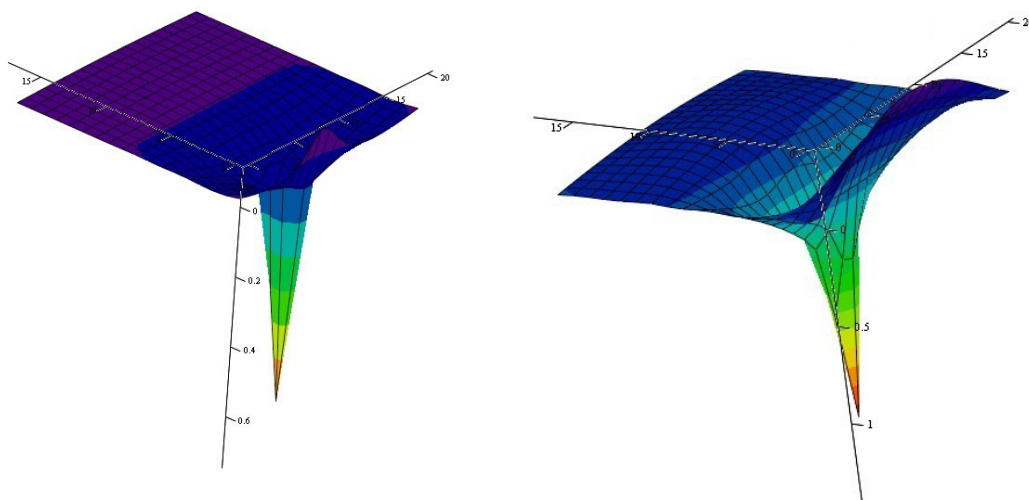


Рис. 10. Поверхности влияния M_x для КЭ №731 и M_y для КЭ №747

Выводы

1. При воздействии постоянных нагрузок на бездиафрагменное пролетное строение прогибы и усилия в плите проезжей части изменяются плавно, что позволяет существенно упростить конечно-элементную пространственную расчетную схему.

2. Распределение прогибов и усилий в плите проезжей части балочного моста от колесной временной нагрузки имеет локальный характер, поэтому для получения достоверных расчетных данных требуется сгущение конечно-элементной сетки.

3. Применение поверхностей влияния для определения расчетных усилий и прогибов в плите в связи с их импульсным характером требует учета увеличения зоны опирания пневматического колеса автомобиля при передаче давления колеса в зависимости от толщины дорожного покрытия.

4. Выявленные особенности расположения наиболее нагруженных зон плиты проезжей части от действия колесной нагрузки имеют общий характер для других размеров пролетных строений.

Библиографический список

1. СНиП 2.05.03-84* (СП 35.13330.2011) Мосты и трубы (Актуализированная редакция) / Минрегионразвития РФ. – М.: ОАО «ЦПП», 2011. – 339 с.
2. ОДМ 218.4.026-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Общая часть. Росавтодор. - М., 2016
3. ОДМ 218.4.026-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Бетонные и железобетонные конструкции; Росавтодор. - М., 2016
4. Соломахин П.М. Проектирование мостовых и строительных конструкций //П.М. Соломахин. – М. : КНОРУС, 2011, - 408 с.
5. Сафронов В.С. Современные конечно-элементные модели балочных бездиафрагменных пролетных строений автодорожных мостов/ В.С. Сафронов, А.В.Антипов// Строительная механика и конструкции. - 2013. - № 1. - С. 92-101.
6. Сафронов В.С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных мостов, имеющих дефекты и повреждения/ В.С. Сафронов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. - 1996. - № 6. - С. 103-109.
7. Сафронов В.С. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой/В.С. Сафронов, С.Д. Степанов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. - 1998. - № 11-12. - С. 31-35.
8. Барченков А.Г. Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций/А.Г Барченков [и др.] //Справочник проектировщика, - М.: Стройиздат, - 1986. - С. 327-348.
9. Ильиных И.А. Исследование точности нормативной методики расчета усилий в плитных конструкциях на действие колесной нагрузки/И.А. Ильиных, Н.А. Барченкова //Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Серия «Студент и наука» 2015. Вып.№2 (9). С. 5-9.
10. Барченкова Н.А. Исследование НДС ездового полотна мостовой плитной конструкции от одиночной колесной нагрузки/ Н.А. Барченкова., И.А.Ильиных// Строительная механика и конструкции. - 2016. - № 2. - С. 100-105.

11. Барченкова Н.А. Конечно-элементное моделирование плиты пролетного строения железобетонного моста (в ПК Лира-САПР 2014)/ Н.А. Барченкова, И.А. Ильиных// Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности: сб. мат-лов XVIII Междунар. науч.-техн. конф. (29-30 июня 2017г.). – Тула: Изд-во «ТулГУ», 2017. - С. 18-21.
12. Барченкова Н.А. Численный анализ НДС плиты типового балочного бездиафрагменного пролетного строения железобетонного моста на действие подвижной нагрузки. // Н.А Барченкова, И.А. Ильиных// Актуальные проблемы строительства, строительной индустрии и промышленности: сб. мат-лов XVIII Междунар. науч.-техн. конф. (29-30 июня 2017г.). – Тула: Изд-во «ТулГУ». - С. 21-23.
13. Кнороз В.И. Работа автомобильной шины//В.И. Кнороз, Кленников Е.В. и др. –М., Транспорт, 1976, 235с.
14. ТП, серия 3.503.1-81. Пролётные строения сборные железобетонные длиной 12, 15, 18, 21, 24, 33 м из балок двутаврового сечения с предварительно напрягаемой арматурой для мостов и путепроводов, расположенных на автомобильных дорогах общего пользования, на улицах и дорогах в городах. вып. 0-1÷7-1 / Союздорпроект. – М., 1988–1994.
15. Городецкий А.С. Компьютерные модели конструкций// А.С Городецкий, И.Д. Евзеров. – Киев, Изд-во «Факт», 2005, 344с.
16. Козлов А.В. Расчет мостовых конструкций с использованием ПК ЛИРА-САПР для начинающих пользователей: учеб. пособие / А.В. Козлов. - Воронеж, 2017.

References

1. Building Codes and Regulations 2.05.03-84* (Set of rules 35.13330.2011) Bridges and tubes (Updated version) / Minregionrazvitiya RF. – М.: ОАО «ЦПП», 2011. – 339 p.
2. ODM 218.4.026-2016. Recommendations on bridge structures vehicle capacity on the public roads. General part. Rosavtodor. - М., 2016
3. ODM 218.4.026-2016. Recommendations on bridge structures vehicle capacity on the public roads. Concrete and reinforced concrete structures. Rosavtodor. - М., 2016
4. Solomakhin P.M Bridge and building structures design. – М. : KNORUS, 2011, - 408 p.
5. Safronov V.S., AntipovA.V. Modern finite –element models of beam without diaphragm roadbridge spans. Structural Mechanics. - 2013. - № 1. - P. 92-101.
6. Safronov V.S., Petranin A.A., Petrenya E.N. Super elemental calculation in mixed variant of reinforced concrete bridges having defects and damages. News of universities. Construction. - 1996. - № 6. - P. 103-109.
7. Safronov V.S., Stepanov S.D., Petranin A.A., Petrenya E.N. Algorithm of calculation of reconstructed beam –slab structures reinforced by superimposed slab. News of universities. Construction. 1998. - № 11-12. - С. 31-35.
8. Barchenkov A.G. Dynamic calculation of special engineering structures and constructions. Manual of designer. М.: Stroiiizdat, - 1986. - P. 327-348.
9. Пjinykh I.A., Barchenkova N.A Reseach of standard method accuracy of calculation of in slab structures stresses on wheel load action. Scientific bulletin of VGASU, Voronezh. Series “Student and science” 2015.Issue№2 (9). P. 5-9.
10. Barchenkov A.G., Пjinykh I.A. Исследование НДС ездового полотна мостовой плитной конструкции от одиночной колесной нагрузки/ Н.А. Барченкова., И.А. Ильиных// Строительная механика и конструкции. - 2016. - № 2. - С. 100-105.
11. Barchenkova N.A., Пjinykh I.A. Finite-element modeling of reinforced concrete bridge slab (ПК Лира-САПР 2014). Updated problems of construction, construction industry:

- collection of XVIII International conference materials (29-30 June 2017.). – Tula: Pub. House «Tul-Gu» 2017. - С. 18-21.
12. Barchenkova N.A., Iljinykh I.A. Numerical analysis of deflected mode of the standard beam without diaphragm reinforced concrete bridge span on the travelling load action. Updated problems of construction industry: coll. of materials of XVIII International conference. (29-30 June, 2017г.). – Tula: Pub. House «Tul-Gu». - P. 21-23.
 13. Knoroz V.I., Klennikov E.V., Car tyre work//BM., Traffic 1976, 235p.
 14. TP, Series 3.503.1-81. Prefabricated reinforced concrete spans of 15, 18, 21, 24, 33 m length of I-beams with prestressed structure for bridges and viaducts on the municipal roads M., 1988–1994.
 15. Gorodetsky A.S., Evzerov I.D. Computer models of structures. – Kiev, Pub. House “Fact”, 2005, 344p.
 16. Kozlov A.V. Calculation of bridge constructions with application of ПК ЛИРА-САПР for beginners: study book. Voronezh, 2017.

Воронежский государственный технический университет
Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики
С.Ю. Гриднев
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)2714230
e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru
Магистрант кафедры строительной механики
И.С. Подлесных
Россия, г. Воронеж, тел.: +79038513595
e-mail: 94igor@mail.ru

Voronezh State Technical University
Dr. of Tech. Sc., professor of the Department of Structural Mechanics
S.Y. Gridnev
Voronezh, Russia, tel.: +7(473)2714230
e-mail: gridnev_s_y@rambler.ru
Undergraduate student of the Department Structural Mechanics
I.S. Podlesnykh
Voronezh, Russia, tel.: +79038513595
e-mail: 94igor@mail.ru

С.Ю. Гриднев, И.С. Подлесных

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОЛЕТНЫХ СТРОЕНИЙ С УЧЕТОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В СЛОЯХ ДОРОЖНОЙ ОДЕЖДЫ

Разработана конечно-элементная модель пролетного строения с покрытием ездового полотна, учитывающая их взаимодействие. Выполнен расчетный анализ напряженно-деформированного состояния сталежелезобетонного пролетного строения совместно с дорожной одеждой при учете изменения температуры по толщине покрытия. Исследуется характер изменения максимальных растягивающих напряжений в верхнем слое асфальтобетона с позиции сохранности. Используются современные типы конструкций покрытия, различные ее параметры и схемы загрузки. Выявлена одна из причин появления продольных трещин в верхнем слое покрытия над главными балками пролетных строений. Изучено взаимное влияние податливости главных балок на напряженно-деформированное состояние покрытия и влияние покрытия на деформации пролетного строения.

Ключевые слова: сталежелезобетонное пролетное строение, конечно-элементная модель, дорожная одежда, влияние температуры, прочность покрытия, продольные трещины

S.Y. Gridnev, I.S. Podlesnykh

CALCULATION OF DEFLECTED MODE OF STEEL REINFORCED CONCRETE SPANS WITH ACCOUNT OF TEMPERATURE EFFECT IN THE ROAD BASE LAYERS

A finite-element model of a span structure with a road surface was developed, taking into account their interaction. The calculated analysis of steel-reinforced concrete span deflected mode and road base with consideration of the temperature change on blanket thickness was fulfilled. The nature of change of the maximal tensile stresses in the upper layer of asphalt concrete from a point of safety is under investigation. The modern types of blanket structure design, its various parameters and schemes of loading are used. One of the reasons of longitudinal fracture appearance in blanket upper layer over the main span beams is revealed. Interaction of the main beams compliance on the blanket deflected mode and blanket influence of a span structure deformation is studied.

Keywords: steel-reinforced concrete span, finite element model, road base, temperature effect, blanket strength, longitudinal fracture

Введение. При эксплуатации сталежелезобетонных пролетных строений автодорожных мостов даже в течение гарантийного срока в верхнем слое покрытия нередко появляются продольные трещины над главными балками, и нарушается совместность работы дорожной одежды с накладной плитой. На рис. 1 изображена продольная трещина над главной балкой в верхнем слое асфальтобетона.



Рис. 1. Продольная трещина над главной балкой в верхнем слое асфальтобетона

При расчете слоев покрытия на пролетных сооружениях мостов не учитывают влияние податливости пролетного строения и распределение температуры по толщине слоя асфальтобетона. Дорожная одежда учитывается только в качестве нагрузки. При эксплуатации покрытие сталежелезобетонных пролетных строений разрушается быстрее накладной железобетонной плиты. Поэтому покрытие необходимо учитывать как конструктивный элемент пролетного строения. Также одежда ездового полотна в процессе эксплуатации находится в разных погодных условиях с большим диапазоном изменения температуры [1] и расчетная схема должна корректироваться для соответствующих условий эксплуатации. Ниже показано исследование влияния изменения температуры слоев дорожной одежды на напряженно-деформированное состояние (НДС) пролетного строения и сохранность верхнего слоя асфальтобетона с позиции предупреждения появления условий возникновения продольных трещин над главными балками.

Выполненная работа позволяет расширить область исследований И.Г. Овчинникова и М.А. Телегина для пролетных строений с ортотропной плитой [2-5] в направлении оценки влияния изменения температуры по высоте поперечного сечения на базе подходов. Для реализации численной модели и выполнения расчетного анализа был использован конечно-элементный комплекс «Scad».

Описание объекта исследования. В качестве объекта исследований выбрано достаточно распространенное в практике мостостроения сталежелезобетонное пролетное строение $L = 42,5$ м, разработанное на основе типового проекта серии 3.503-50-1 «Пролетные строения для автодорожных мостов, сталежелезобетонные разрезные и неразрезные с ездой поверху, пролетом 42,5 м под габарит Г-10». Поперечное сечение сталежелезобетонного пролетного строения с основными размерами показано на рис. 2. Несущие конструкции представляют собой две сварные сплошностенчатые двутавровые стальные балки высотой 2,48 м, объединенные с помощью жестких упоров с железобетонной плитой проезжей части. Главные балки, расстояние между которыми составляет 7,6 м, объединены между собой поперечными и продольными связями. Для усиления главных балок по всей их длине установлены ребра жесткости. Железобетонная плита проезжей части, толщиной в пролете 16 см, опирается на главные балки и прогон.

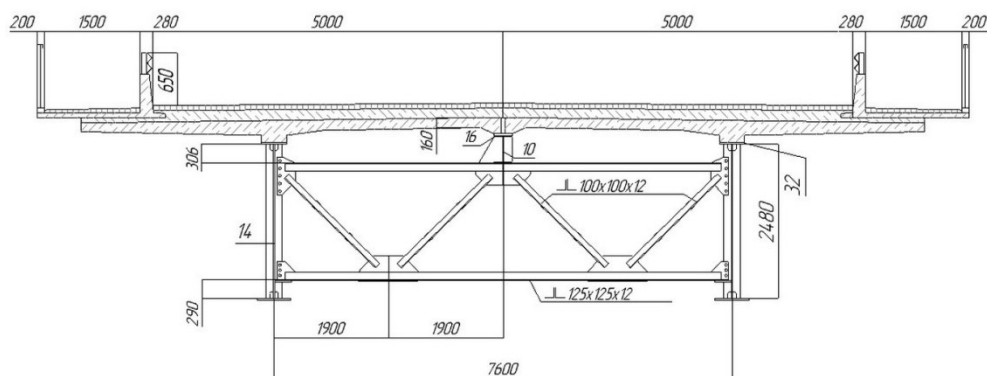


Рис. 2. Поперечное сечение сталежелезобетонного пролетного строения

Описание используемой КЭ модели. Для создания расчетной модели использовались следующие конечные элементы (КЭ):

- а) для главных балок, прогона, домкратных балок и ребер жесткости - КЭ оболочки;
- б) для моделирования железобетонной плиты и конструкции дорожной ды - объемный КЭ;

в) для моделирования продольных и поперечных связей - строжневой КЭ.

С целью получения наиболее точной картины НДС сетка КЭ слоев дорожной одежды над главными балками сгущалась. Разработанная в программном комплексе модель пролетного строения представлена на рис. 3.

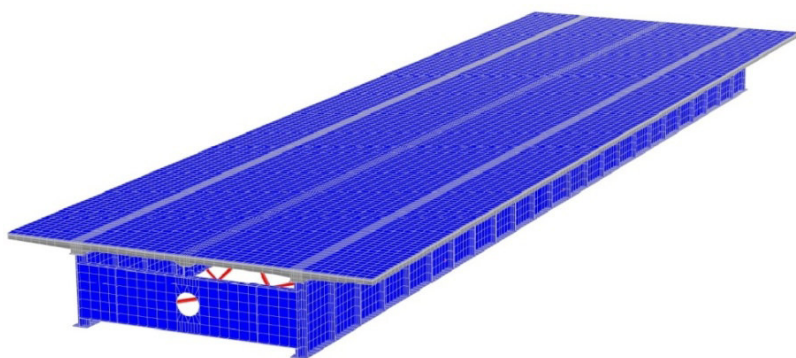


Рис. 3. КЭ модель пролетного строения

Основные исследуемые типы конструкций верхних слоев дорожного покрытия приведены в табл. 1 и 2 с основными характеристиками [6, 7]. При расчете асфальтобетона использовался

модуль упругости при растяжении, так как продольные трещины в верхнем слое покрытия возникают от поперечных растягивающих напряжений [8].

Таблица 1

Конструкция верхних слоев покрытия тип I

Слой	Толщина слоя, мм	Модуль упругости, кН/м ²	Коэффициент Пуассона	Объемный вес, т/м ³	Расчетная прочность на растяжение при изгибе при 0 ⁰ С, МПа (кН/м ²)
Асфальтобетон тип Б	50	4501534	0,22	2,3	0,8 (804,4)
Щебеночно-мастичный асфальтобетон	60	10703652	0,22	2,3	1,2 (1197);
Гидроизоляционный слой	10	686700	0,3	1,8	—

Конструкция верхних слоев покрытия тип II

Слой	Толщина слоя, мм	Модуль упругости, кН/м ²	Коэффициент Пуассона	Объемный вес, т/м ³	Расчетная прочность на растяжение при изгибе при 0 ⁰ С, МПа (кН/м ²)
Литой асфальтобетон	50	8502906	0,22	2,3	1,2 (1197)
Щебеночно-мастичный асфальтобетон	60	10703652	0,22	2,3	1,2 (1197);
Гидроизоляционный слой	10	686700	0,3	1,8	–

Учет изменения температуры. При выполнении расчетов в первом случае примем температуру дорожной одежды при 0⁰С, которая постоянна по толщине дорожной одежды.

Во втором случае считаем температуру изменяющейся по толщине дорожной одежды. Температуру в слоях дорожного покрытия в зависимости от температуры воздуха вычисляем по формуле Я. Н. Ковалева [9]:

$$T_{II} = 0,71T_{в}, \quad (1)$$

где T_{II} – температура покрытия; $T_{в}$ – температура воздуха.

При средней температуре для города Воронеж в зимнее время года $T_{в} = -6,5^{\circ}\text{C}$, температура покрытия $T_{II} = -4,62^{\circ}\text{C}$.

Для получения распределения температурных полей в асфальтобетонных слоях дорожной одежды температуры рассчитывают аналитически в соответствии с формулой [10]:

$$T_z = T_{II} \exp(-7,727z), \quad (2)$$

где T_z – температура покрытия, ⁰С, z – толщина слоя, м.

Распределение температуры по толщине слоев покрытия изображено на графике рис. 4.

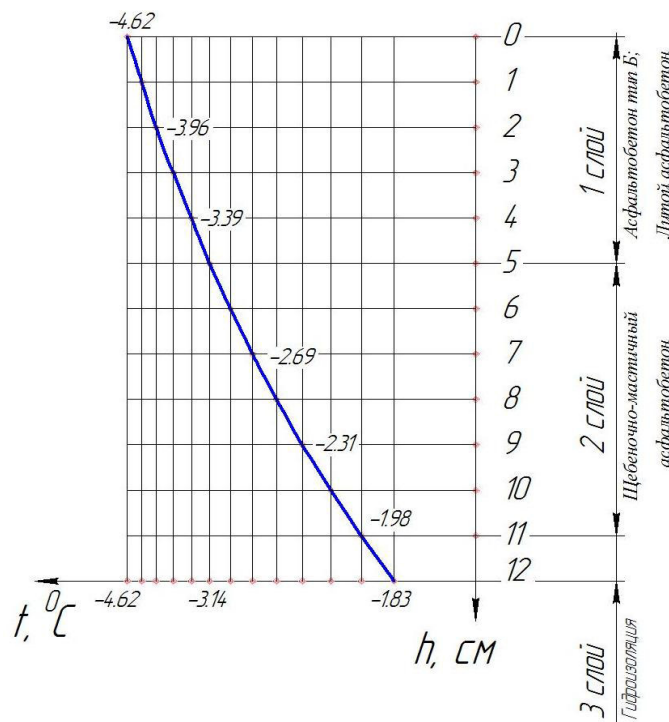


Рис. 4. Распределение температуры по толщине слоев покрытия

Данные с необходимыми характеристиками материалов, используемых для одежды ездового полотна на мостах, представлены в табл. 3-4 [11, 12].

Таблица 3

Модули упругости материалов для одежды ездового полотна

Материал	Модуль упругости (Мпа) при температуре			
	-10 ⁰ С	0 ⁰ С	+10 ⁰ С	+20 ⁰ С
Плотный а/б тип Б	8600	6000	3200	800
ЩМА	12800	10700	5400	2400
Литой асфальтобетон	10250	7500	4400	2500

Таблица 4

Прочности на растяжение при изгибе материалов для одежды ездового полотна

Материал	Прочность на растяжение при изгибе(Мпа) при температуре			
	-10 ⁰ С	0 ⁰ С	+10 ⁰ С	+20 ⁰ С
Плотный а/б тип Б	1,1	0,8	0,45	0,2
ЩМА	1,65	1,2	0,55	0,25
Литой асфальтобетон	1,55	1,2	0,50	0,30

Сцепление поверхности железобетонной плиты с конструкцией дорожной одежды обеспечивается посредством общих узлов покрытия и железобетонной плиты. Полученная КЭ модель дорожной одежды с учетом изменения температуры в слоях представлена на рис. 5.

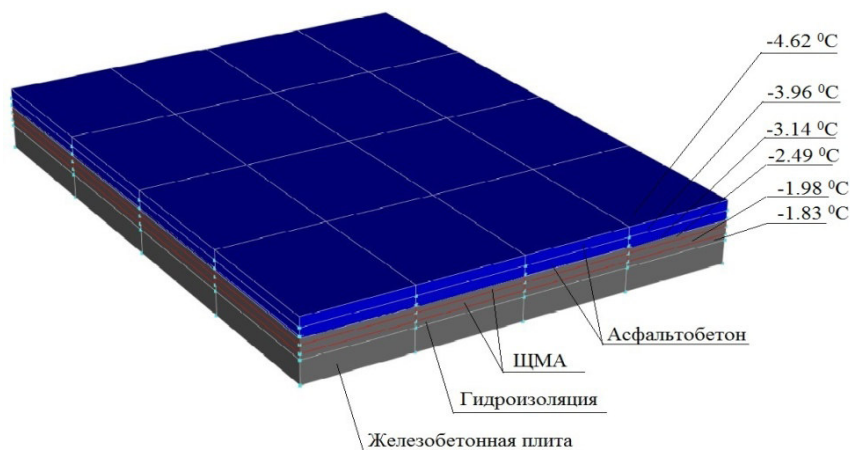


Рис. 5. КЭ модель дорожной одежды с учетом изменения температуры в слоях

Анализ результатов численных исследований

Выполнен анализ напряженного состояния одежды ездового полотна при воздействии нормативной нагрузки. Произведен расчет на действие нагрузок от автотранспортных средств, заданных в виде полос АК. На рис. 6 изображено расположение тележек нагрузки АК в поперечном сечении в середине пролета.

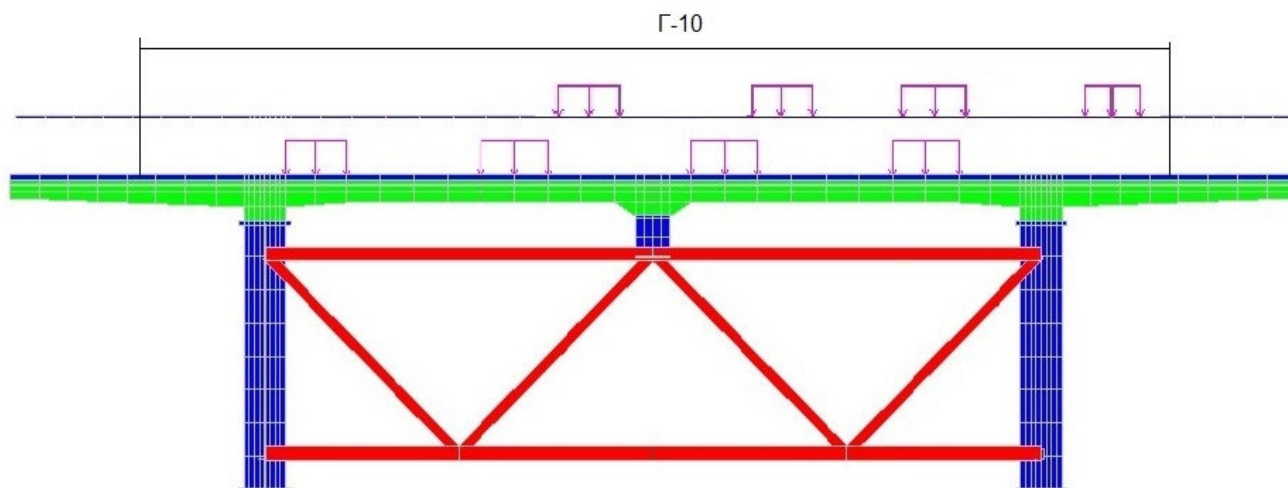


Рис. 6. Поперечное расположение тележек нагрузки АК в середине пролета

Сравнение деформаций поперечного сечения под действием тележек нагрузки АК без учета и при учете податливости главных балок пролетного строения представлено на рис. 7.

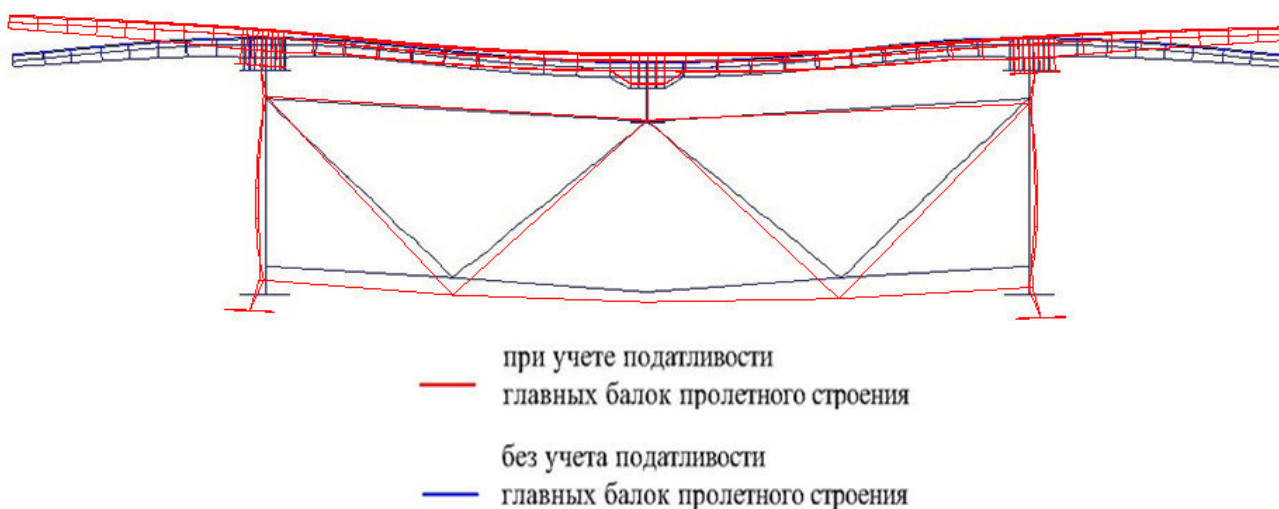


Рис. 7. Деформации поперечного сечения под действием тележек нагрузки АК

Влияние изменения температуры в слоях дорожной одежды не привело к существенному увеличению прогибов главных балок, однако учет их податливости сказывается на поперечных деформациях пролетного строения. Разница между максимальными растягивающими напряжениями в верхнем слое асфальтобетона составила 20 %. При учете слоев дорожной одежды наблюдается уменьшение прогибов пролетного строения.

Произведено сравнение полей напряжений в верхнем слое покрытия дорожного полотна при различных схемах загрузки и с учетом изменения температуры по высоте дорожной одежды. Поля напряжений в верхнем слое одежды ездового полотна тип II при среднем положении нагрузки АК (вблизи главной балки и прогона) изображены на рис. 8.

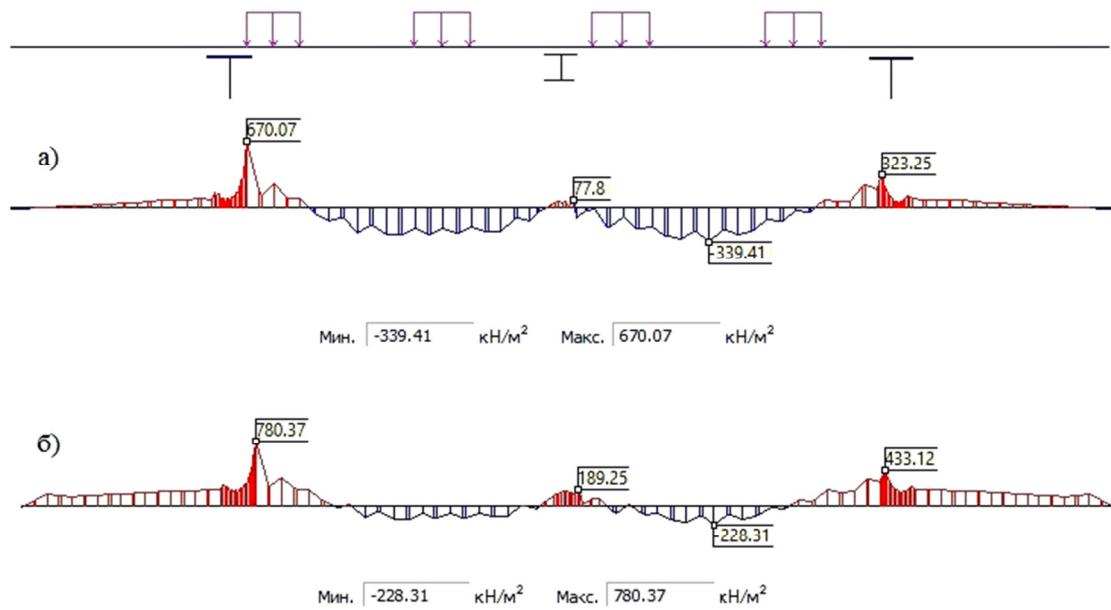


Рис. 8. Поля напряжений в одежде ездового полотна тип II при среднем положении нагрузки АК:
 а) без учета температуры; б) с учетом температуры

Максимальные растягивающие напряжения над главными балками составили: $670,07 \text{ кН/м}^2$ без учета температуры; $780,37 \text{ кН/м}^2$ при учете температуры. Разница между результатами составила около 14,13 %.

Поля напряжений в верхнем слое одежды ездового полотна тип II при крайнем правом положении нагрузки АК (над главной балкой и прогоном) изображены на рис. 9.

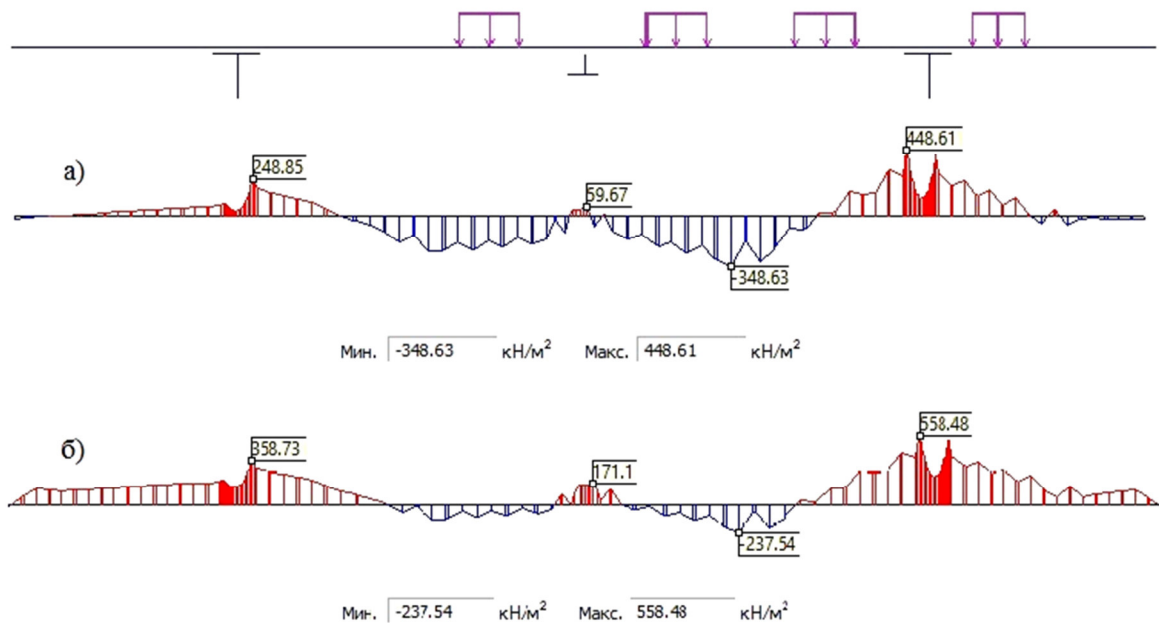


Рис. 9. Поля напряжений в одежде ездового полотна тип II при крайнем правом положении нагрузки АК:
 а) без учета температуры; б) с учетом температуры

Максимальные растягивающие напряжения над главными балками составили: 448,61 кН/м² без учета температуры; 558,48 кН/м² при учете температуры. Разница между результатами превысила 19 %.

Сравнение максимальных растягивающих напряжений в верхних слоях конструкций дорожной одежды при учете температурной нагрузки представлено на рис. 10.

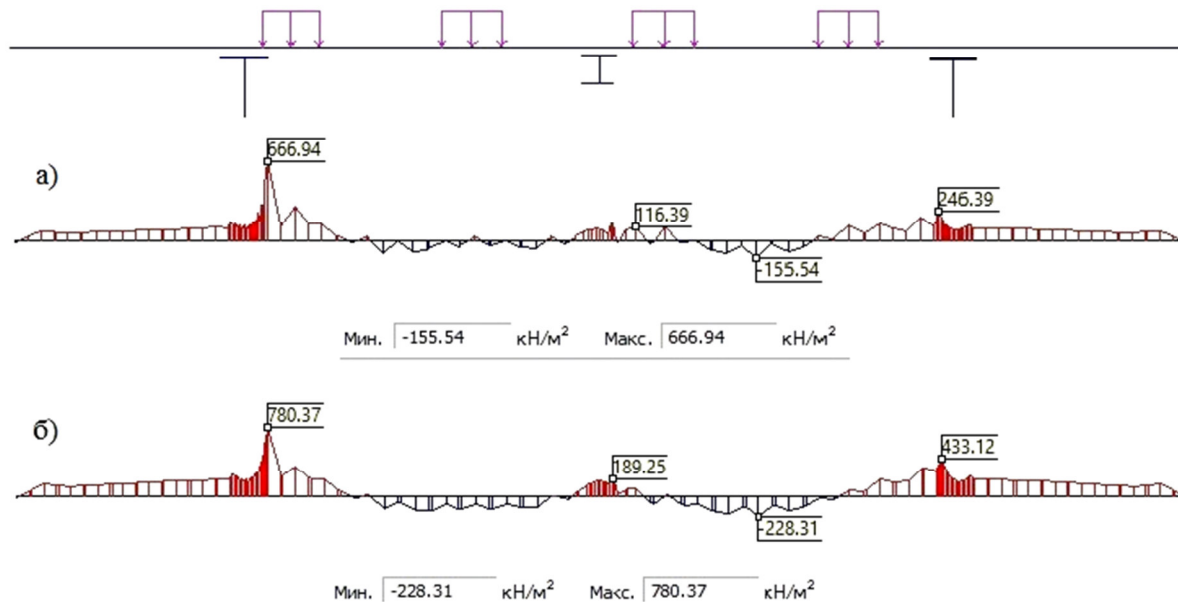


Рис. 10. Сравнение максимальных растягивающих напряжений в конструкциях дорожной одежды при учете температурной нагрузки:
а) тип I; б) тип II

Максимальные растягивающие напряжения над главными балками при учете температуры составили: 666,94 кН/м² для асфальтобетона типа Б (при допустимых 804,4 кН/м²); 780,37 кН/м² для литого асфальтобетона (при допустимых 1197 кН/м²). Разница между результатами оказалась 14,54 %. Результаты численных исследований приведены в табл. 5.

Таблица 5

Сравнение полученных результатов

Конструкция покрытия	Максимальные растягивающие напряжения от автомобильной нагрузки, кН/м ²				
	Собственный вес	Без учета температуры		При учете температуры	
		Среднее положение	Крайнее правое положение	Среднее положение	Крайнее правое положение
Тип I	52,8	607,36	285,59	666,94	349,51
Тип II	94,41	670,07	448,61	780,37	558,48

Выводы по результатам численных исследований

1. Напряженно-деформированное состояние верхних слоев одежды ездового полотна зависит от деформаций железобетонной плиты в составе пролетного строения

2. При учете изменения температуры в слоях дорожного покрытия максимальные растягивающие напряжения над главными балками увеличиваются на 14-20% в зависимости от положения нагрузки

3. Анализ напряженно-деформированного состояния дорожной одежды установил, что наибольшее приближение максимальных растягивающих напряжений к допустимому пределу прочности наблюдается в конструкции покрытия тип II в верхнем слое асфальтобетона Б при учете воздействия температуры ($666,94 \text{ кН/м}^2$ при допустимых $804,4 \text{ кН/м}^2$).

Заключение

Разработанная КЭ модель сталежелезобетонного пролетного строения с учетом совместной работы с дорожной одеждой позволяет исследовать изменение температуры слоев дорожной одежды на НДС пролетного строения в целом и оценивать влияние различных параметров на сохранность одежды ездового полотна. Учет в КЭ модели слоев дорожной одежды приводит к уменьшению прогибов пролетного строения. Показана необходимость учета изменения температуры в слоях дорожной одежды. Результаты численных исследований показали, что в верхнем слое дорожной одежды в зонах над главными балками возникают максимальные растягивающие напряжения, что может являться одной из причин возникновения продольных трещин.

Библиографический список

1. Щербаков А.Г. Особенности конструкции одежды ездового полотна на мостовых сооружениях в современных условиях / А.Г. Щербаков, И.Г. Овчинников, И.Д. Сахарова // Известия ВУЗов. Строительство. – 2003. – №10. – С. 86-92.
2. Телегин М.А. Работа дорожной одежды на стальной ортотропной плите пролетного строения моста в зоне главных балок / М.А. Телегин // Транспортное строительство. – 2012. – №2 – С. 12.
3. Телегин М.А. Моделирование работы дорожной одежды на стальной ортотропной плите моста / М.А. Телегин // Вестник СибАДИ. – 2012. - № 3 (25). – С.63.
4. Телегин М.А. Дорожная одежда на ортотропных плитах мостов / М.А. Телегин, И.Г. Овчинников // Дорожная держава. – 2011. – № 35. - С. 34-39.
5. Телегин М.А. Обоснование конечно-элементной расчетной схемы для расчета дорожной одежды на ортотропных плитах пролетных строений мостов / М.А. Телегин // Модернизация современного общества: проблемы, пути развития и перспективы. I международная научно-практическая конференция. – 2011. – С.88.
6. Овчинников И.Г. Анализ конструкций дорожной одежды (мостового полотна), применяемых в мостостроении / И.Г. Овчинников, Е.В. Зинченко, В.Н. Кужель // Дороги. Инновации в дорожном строительстве. – 2011. – №52. – С. 52-55.
7. Овчинников И.Г. Эффективные конструкции дорожных одежд с применением асфальтобетона на мостовых сооружениях / И.Г. Овчинников, И.И. Овчинников, М.А. Телегин, С.В. Хохлов // Интернет-журнал "Науковедение". – 2014. - № 1. - С. 1- 18.
8. Судомоин А.С. Пути повышения надежности полимербетонного покрытия на основе учета его совместной работы с ортотропной плитой автодорожных мостов / А.С. Судомоин. - Л.: 1987. - 245с.
9. Ковалев Я.Н. К вопросу определения зимней расчетной температуры асфальтобетонных покрытий / Я.Н. Ковалев, В.Д. Акельев // Известия вузов. Сер. Строительство и архитектура. – 1966. – № 5. – С. 145–147.

10. Мельникова И.С. Моделирование воздействия температуры и транспортных нагрузок на возникновение и развитие трещин в асфальтобетонных дорожных покрытиях/ И.С. Мельникова // Наука и техника. – 2012. – № 4. – С. 42–52.
11. Гезенцевей Л. Б. Дорожный асфальтобетон / Л. Б. Гезенцевей. – М.: Транспорт, 1985. – 350 с.
12. Богуславский А. М. Асфальтобетонные покрытия / А. М. Богуславский, Л. Г. Ефремов. – М.: МАДИ, 1981. – 145 с.

References

1. Scherbakov, A.G., Ovchinnikov, I.D. Sakharova Features of a design of road surface on bridge constructions in the modern. News of Higher Education Institutions. Building. – 2003. – №10. – P. 86-92.
2. Telegin, M.A. Work of road surface on a steel orthotropic plate of a bridge span in a zone of the main beams. Transport construction. – 2012. – №2 – P. 12.
3. Telegin, M.A. Model operation of work of road surface on a steel orthotropic plate of the bridge. Messenger of SibADI. – 2012. - № 3 (25). – P.63.
4. Telegin M.A., Ovchinnikov I.G.. Road surface on orthotropic plates of bridges. Road Power. – 2011. - № 35. - P. 34-39.
5. Telegin M.A. Justification of the finite element design model for calculation of road surface on orthotropic plates of span structures of bridges. Modernization of modern society: problems, ways of development and prospects. 1-st International Scientific and Practical Conference. – 2011. – P.88.
6. Ovchinnikov I.G. Zinchenko E.V., Kuzhel V.N The analysis of the designs of road surface applied in a bridge building. Roads. Innovations in road construction. – 2011. – №52. – P. 52-55.
7. Ovchinnikov I.G., Ovchinnikov, M.A., Telegin I.I., Khokhlov S.V Effective constructions of road surface with use of asphalt concrete on bridge structures. Online magazine "Naukovedeniye". – 2014. - № 1. - P. 1- 18.
8. Sudomoin A.S. Paths of increase in reliability of polymer concrete coating on the basis of accounting of its collaboration with an orthotropic plate of road bridges. L.: 1987. – 245 p.
9. Kovalev Ya.N., Akelev V.D. To a question of determination of winter calculated temperature of asphalt concrete coatings. News of Higher Education Institutions. Building and Architecture. – 1966. – № 5. – P. 145–147.
10. Melnikova, I.S. Modeling of the temperature effect and transport loads on the occurrence and development of fracture in asphalt concrete coatings. Science and Technology. – 2012. – № 4. – P. 42–52.
11. Gezentsvey L. B., Boguslavskiy A.M., Efremov L.G.. Road asphalt concrete. Gezentsvey. – М.: Транспорт, 1985. – 350 p.
12. Boguslavskiy A. M. Asphalt pavement /– М.: МАДИ, 1981. – 145 p.

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.26

*Воронежский государственный
технический университет*

*Д-р техн. наук, проф. кафедры
строительной механики*

В. С. Сафронов

Магистрант кафедры строительной механики

А. В. Черников

Гл. спец. ООО «Дортранспроект»

А.В. Антипов

Гл. инж. проекта ООО «Дортранспроект»

Н.В. Сафронов

Вед. инж. ООО «Дортранспроект»

А.С. Суханов

Россия, г. Воронеж, тел.: +7 (473) 2715230

e-mail: vss22@mail.ru

Voronezh State Technical University

*Doctor of Technical Sciences, Prof. of Dept.
of Structural mechanics*

V.S.Safronov

Undergrader of Dept. of Structural Mechanics

A.V. Chernikov

Advanced engineer «Dortransproekt» LTD.

A.V. Antipov

Leading specialist «Dortransproekt» LTD.

N.V. Safronov

Principal engineer «Dortransproekt» LTD.

A.S. Suchanov

Russia, Voronezh, Tel.: +7 (473) 2715230

e-mail: vss22@mail.ru

В.С. Сафронов, А.В. Черников, А.В. Антипов, Н.В. Сафронов., А.С. Суханов

НАДЁЖНОСТЬ УСИЛЕННОГО НАКЛАДНОЙ ПЛИТОЙ ПЛИТНОГО ПРОЛЁТНОГО СТРОЕНИЯ АВТОДОРОЖНОГО МОСТА

Описывается методика и результаты расчета надёжности пролетного строения плитного автодорожного моста с учётом влияния совместности сопротивления нагрузкам сборной и монолитной частей составного сечения, а также параметров разброса прочностных характеристик бетона и арматуры. Результаты расчетов сопоставляются с данными натурных статических испытаний мостового сооружения.

Ключевые слова: плитный железобетонный мост, сборно-монолитная конструкция, вероятностная оценка надёжности, логарифмический показатель надёжности, разброс прочности материалов и нагрузок ,

V.S. Safronov, A.V.Chernikov, A.V. Antipov, N.V. Safronov, A.S. Sukhanov

STRENGTH OF ROAD BRIDGE SLAB SPAN REINFORCED WITH FLOOR SLAB

The method and results of calculation of the road bridge slab span strength with account of the affect of resistance compatibility with loads of prefabricated and monolithic parts of composite section and also the parameters of concrete strength properties variation and reinforcement. The results of calculation compare with the data of natural static tests of bridge structure.

Keywords: slab reinforced bridge, prefabricated – monolithic structure, probabilistic assessment strength, logarithm of strength performance, variation of materials strength and loads.

Введение

Мосты – инженерные конструкции, обеспечивающие бесперебойную коммуникацию через различные природные и рукотворные препятствия. Выход из строя данных сооружений несёт вместе с собой серьёзные коммуникативные транспортные и, как следствие, серьёзные экономические проблемы.

© Сафронов В.С., Черников А.В., Антипов А.В., Сафронов Н.В., Суханов А.С., 2017

В современных нормативных документах [1-2] разброс прочностных характеристик материалов и действующих нагрузок учитывается косвенно с помощью коэффициентов надежности по материалу γ и по нагрузкам γ_f . Введенный в 2015 году ГОСТ 27751-2014[3] рекомендует также непосредственное использование вероятностных методик, учитывающих статистические характеристики прочности материалов и нагрузок, однако для этого необходимы апробированные методики. В настоящей статье сопоставляются между собой и с данными натурных статических испытаний для реконструированного железобетонного плитного пролетного строения автодорожного моста два подхода: детерминированный и вероятностный - на основе метода статистических испытаний.

1. Постановка и объект исследования

Объектом исследований является участок сборно-монолитного железобетонного плитного пролетного строения моста на монтажной площадке плотины Нижегородской ГЭС под современные временные нагрузки А14 и Н14. Продольный разрез и поперечное сечение одного из одинаковых пролетов моста представлены на рис. 1.

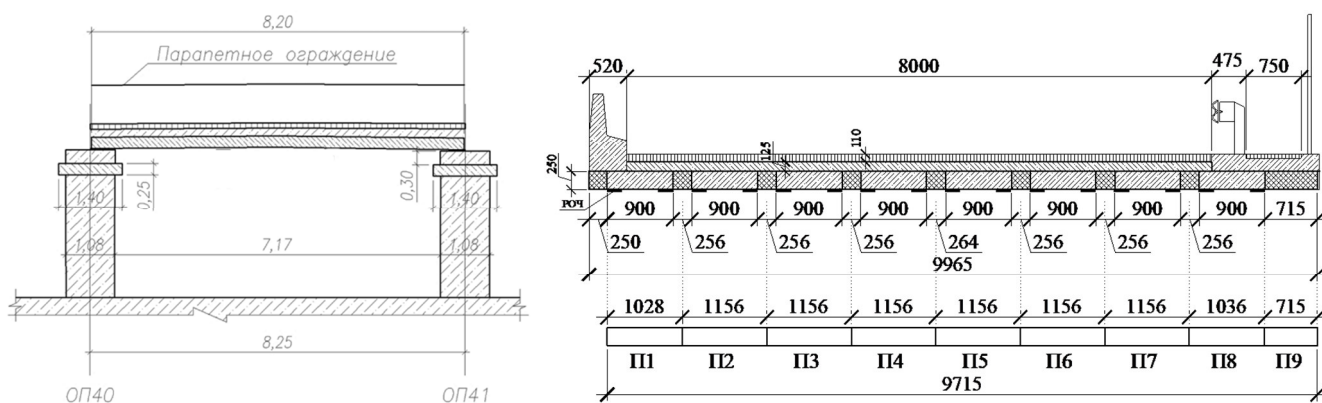


Рис. 1. Продольный и поперечный разрезы одного из пролётов моста

Несущие конструкции пролетного строения выполнены из восьми сборных железобетонных плит полной длиной 8,2 м и сечением 0,9x0,25 м. Над промежуточными опорами сборные плиты смонтированы по разрезной схеме. Между собой сборные плиты объединены монолитными железобетонными участками между плитами. Кроме того, поверх сборных плит предусмотрено устройство неразрезной над промежуточными опорами накладной железобетонной монолитной плиты толщиной 0,125 м. Армирование сборных плит, промежуточных участков между сборными плитами, а также консольной плиты с правой стороны показано на рис. 2.

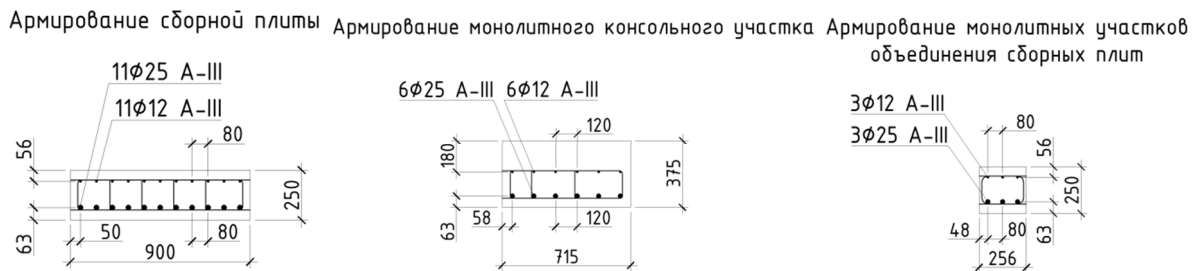


Рис. 2. Армирование конструкции

В выполняемом исследовании оценивалось влияние степени совместного сопротивления действующим нагрузкам сборной и монолитной частей составного сечения и параметров разброса прочностных характеристик бетона и арматуры на несущую способность сборно-монолитной конструкции.

Выполняемые исследования состоят из двух частей:

1. Оценка прочности мостового сооружения в детерминированной постановке для первой группы предельных состояний в соответствии с действующей нормативной документацией [1-2];
2. Определение параметров надёжности мостового сооружения в вероятностной постановке в соответствии с положениями теории надёжности и теории риска строительных конструкций [7-9].

В исследованиях при выборе расчетных схем не полностью объединенной в продольном направлении неразрезной конструкции используются данные натурных статических испытаний.

При определении рисков разрушения моста определяется вероятность отказа, соответствующего возникновению в несущей конструкции первого предельного состояния. Для построения методики вероятностных расчетов введены следующие гипотезы:

- прочностные характеристики бетона принимаются случайными, распределенными по нормальному закону в соответствии с измеренными при натурном обследовании в 2016 году перед приёмочными статическими испытаниями;
- прочностные характеристики арматуры считаются случайными, распределенными по нормальному закону;
- постоянные и временные нагрузки принимаются случайными с распределением, отвечающим закону Гаусса
- геометрические размеры конструкции и армирование считается заданным детерминированно.

2. Детерминированный расчёт прочности мостового сооружения

В соответствии с п. 8.1.8 СП 63.13330.2012 расчёт железобетонных изгибаемых элементов производят из следующего условия прочности $M < M_{ult}$, которое предусматривает использование соответствующих используемым материалам расчетных характеристик прочности материалов и расчетные постоянные и временные нагрузки. При этом флуктуации случайных значений прочности и нагрузок учитываются опосредованно через коэффициенты надёжности по материалу и нагрузкам.

Предельные изгибающие моменты M_{ult} находим по известной формуле:

$$M_{ult} = R_b \cdot b \cdot x \cdot \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) + R_{sc} \cdot A'_s \cdot (h_0 - a') \quad (1)$$

В расчетах учитывалась этапность восприятия прикладываемых постоянных нагрузок при устройстве сборно-монолитной конструкции пролетного строения:

- на 1-м этапе сборные плиты пролетного строения воспринимают 1 часть постоянной нагрузки: собственный вес и вес монолитной накладной плиты;
- после достижения бетоном накладной плиты проектной прочности изгибная жесткость плиты возрастает, далее монтируется новое мостовое полотно. Поэтому на 2-м этапе усиленная плита пролетного строения воспринимает вторую часть постоянной нагрузки – вес элементов мостового полотна и временные нагрузки.

Пространственный расчет пролетного строения выполнялся с использованием сертифицированного программного комплекса «ЛИРА-САПР 2013 PRO» со специализированной расчетно-графической системой ПК «ЛИРА-САПР 2013 Мост».

При моделировании несущих элементов рассчитываемого пролетного строения использовались следующие типы конечных элементов, входящих в КЭ библиотеку комплекса «ЛИРА-САПР»:

- универсальный стержневой КЭ с учетом сдвиговых деформаций (КЭ 10);
- универсальный прямоугольный плоский оболочечный КЭ (КЭ 41);
- одноузловой элемент связи конечной жесткости (КЭ 51).

В расчетной КЭ модели пролетного строения стержневые КЭ использовались для аппроксимации условно выделенных участков плиты П1-П9, а плоские оболочечные КЭ - для объединения их между собой в поперечном направлении.

В связи с неопределенностью при оценке совместного сопротивления сборной и монолитной частей пролетного строения выполнялись натурные статические испытания. В качестве испытательной нагрузки использовались загруженные самосвалы МАЗ – 551605 и КАМАЗ – 65115, которые устанавливались в середине пролета. Сопоставление измеренных при испытаниях и расчетных в предположении полного объединения ($K_0=1,0$) монолитной и сборной частей пролетного строения прогибов плит в среднем сечении приведено на рис 3. На том же рисунке показана схема установки применяемых для измерений прогибомеров Максимова. Некоторое различие может объясняться несовершенством объединения сборной и монолитной частей конструкции, включением в сопротивление твердых слоев дорожного покрытия и случайным разбросом прочностных характеристик материалов.

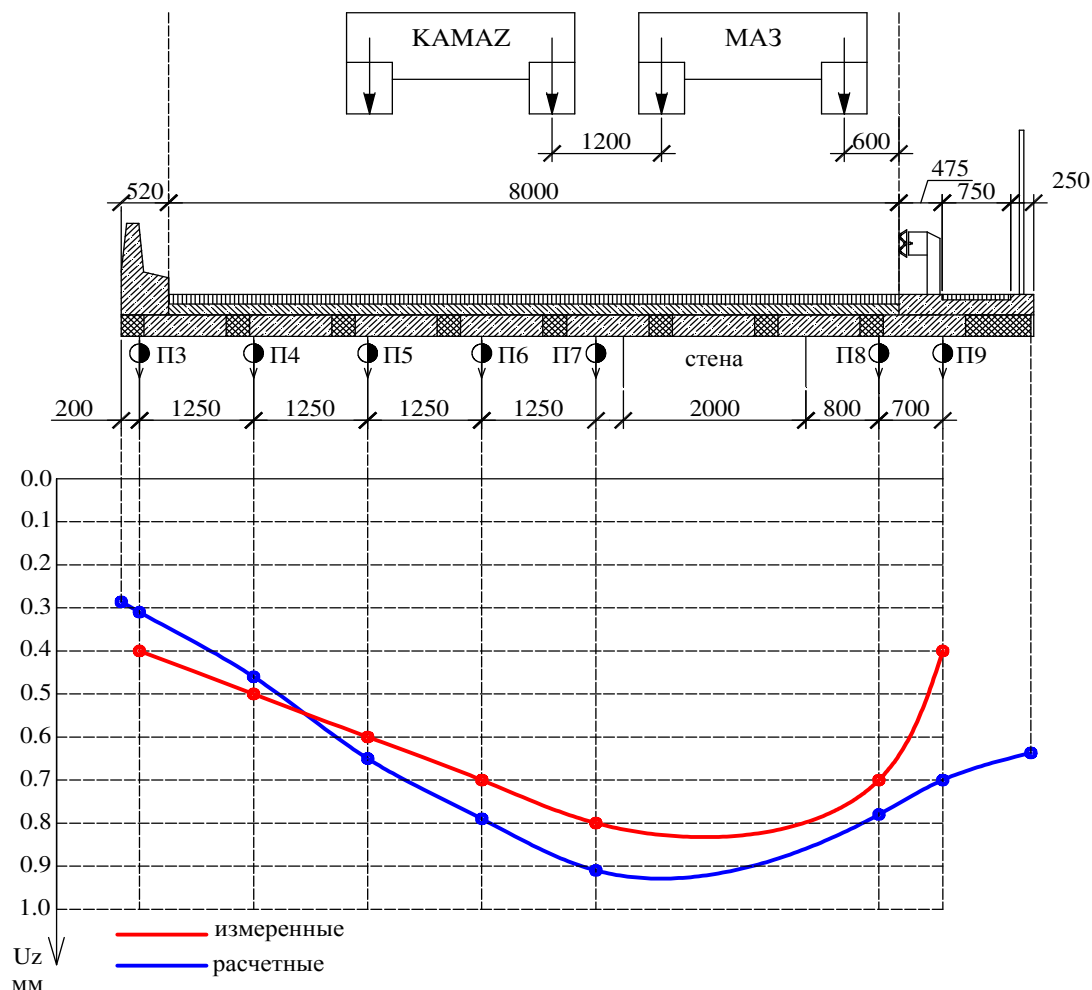


Рис. 3. Сопоставление измеренных и расчетных прогибов плит в среднем сечении пролетного строения при загрузении испытательной нагрузкой

Для прочностных оценок конструкции выполнялись по апробированной КЭ-й расчетной схеме пролетного строения расчет изгибающих моментов от действия постоянных и временных нагрузок для варианта полного объединения сборной и монолитной частей конструкции ($K_0=1.00$). Они представлены в табл. 1.

Таблица 1

Максимальные изгибающие моменты в средних сечениях плит пролетного строения

Номер плиты	Изгибающие моменты (кНм) в среднем сечении плиты от действия					Суммарные изгибающие моменты от постоянных и временных нагрузок	
	постоянных нагрузок			временных нагрузок			
	веса сборных плит	веса накладной плиты	веса мостового полотна	A14	H14	A14	H14
П1	49,4	22,0	37,7	240,0	211,2	349,1	320,3
П2	55,5	24,8	40,3	252,0	238,9	372,6	359,5
П3	55,5	24,7	38,4	242,4	221,5	361,0	340,1
П4	55,4	24,2	37,1	220,3	205,9	337,0	322,6
П5	55,4	23,4	36,7	210,7	195,0	326,2	310,5
П6	55,5	22,2	37,2	215,3	199,6	330,2	314,5
П7	55,6	20,7	38,3	213,3	195,0	327,9	309,6
П8	49,7	17,1	35,3	176,6	161,1	278,7	263,2
П9	36,1	11,7	26,3	123,8	110,6	197,9	184,7

Несущая способность по прочности нормальных сечений расчетных участков железобетонной плиты в середине пролетного строения моста составляет:

а) при полном объединении сборной и монолитной частей пролетного строения ($K_0=1,0$):

• П1, П8: $M_{пред}=520$ кНм; П2÷П7: $M_{пред}=599$ кНм; П9: $M_{пред}=292$ кНм;

б) при полном отсутствии объединения сборной и монолитной частей пролетного строения ($K_0=0$):

• П1, П8: $M_{пред}=220$ кНм; П2÷П7: $M_{пред}=239$ кНм; П9: $M_{пред}=292$ кНм.

Сопоставление приведенных в табл. 1 максимальных с предельными значениями приводит к выводу, что при полном объединении сборной и монолитной частей пролетного строения в конструкции имеются существенные запасы прочности, а при его отсутствии несущая способность недостаточна для восприятия действующих нагрузок. Для подробного анализа влияния совместности сопротивления нагрузкам сборной и монолитной частей составного сечения, а также параметров разброса прочностных характеристик бетона и арматуры используем вероятностные подходы к рассматриваемой задаче. Применяемые в исследованиях расчетные алгоритмы и результаты расчетов изложены в следующем разделе

3. Вероятностная оценка риска разрушения мостового сооружения

Принятые при построении вычислительного алгоритма определения вероятности отказа используем предположения, описанные в разделе 1 настоящей статьи. Ниже представлена последовательность вычислений и используемые расчетные формулы.

Сначала по данным статических расчетов, выполненных с использованием описанной выше конечно-элементной расчетной схемы конструкции и расчетных значений постоянных

и временных нагрузок, определяются математические ожидания и среднеквадратические отклонения изгибающих моментов в отдельных плитах по формулам:

$$m_{Mqi} = \frac{M_{qi}}{1+1.64 \cdot v_{qi}} ; \quad (2)$$

$$\sigma_{Mqi} = m_{Mqi} \cdot v_{qi} , \quad (3)$$

где M_{qi} – изгибающие моменты от действующих расчетных нагрузок, v_{qi} - коэффициент вариации, который вычисляется через нормативный коэффициент надежности γ_{fi} по формуле

$$v_{qi} = (\gamma_{fi} - 1)/1.64 . \quad (4)$$

Отметим, что вычисленные таким образом статистические характеристики усилий будут одинаковыми при изменении совместности сопротивления сборной и монолитной частей пролетного строения.

Далее определяются математические ожидания прочности бетона и арматуры через нормативные сопротивления прочности бетона и арматуры:

$$m_{Rb} = \frac{R_{bn}}{1-1.64 \cdot v_{Rb}} , \quad (5)$$

$$m_{RS} = \frac{R_{sn}}{1-1.64 \cdot v_{RS}} . \quad (6)$$

Среднеквадратические отклонения прочности бетона и арматуры вычисляются по данным сертификатов на используемую при строительстве арматуру и бетон через коэффициенты вариации из формул:

$$\sigma_b = m_{Rb} \cdot v_{Rb}; \quad (7)$$

$$\sigma_s = m_{RS} \cdot v_{RS}. \quad (8)$$

По вычисленным характеристикам прочности методом статистических испытаний, при котором сначала на ЭВМ массивы случайных значений бетона и арматуры, далее на основе описанного в работе [13] нелинейного деформационного алгоритма для каждого из сгенерированных величин прочности определяются случайные значения предельных изгибающих моментов с учетом несовершенства объединения сборной и монолитной частей конструкции. Затем по сформированным массивам предельных изгибающих моментов происходит вычисление математических ожиданий и среднеквадратические отклонения, которые используются в дальнейшем для оценок рисков разрушения влияния совместности сопротивления нагрузкам сборной и монолитной частей составного сечения, а также параметров разброса прочностных характеристик бетона и арматуры.

Параметры, оценивающие риск разрушения, вычисляются с помощью функции Лапласа из предположения нормальности распределения резерва прочности по формулам:

-вероятность разрушения:

$$Q = \frac{1}{2} - \Phi(\beta); \quad (9)$$

где β – характеристика безопасности, равная отношению математического ожидания к стандарту резерва прочности, которая равна:

$$\beta = \frac{m_M - m_{Mq}}{\sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_{Mq}^2}} ; \quad (10)$$

- вероятность безотказного функционирования (надежность):

$$H = 1 - Q; \quad (11)$$

- логарифмический показатель надежности:

$$\rho = \lg\left(\frac{1}{Q}\right). \quad (12)$$

4. Результаты вероятностного расчёта надёжности

На основе описанного выше алгоритма выполнена вероятностная оценка риска разрушения мостового сооружения на совместное действие постоянных и временных нагрузок. На рис. 4 представлен график зависимости логарифмического показателя надежности для наиболее нагруженной сборно-монолитной плиты П2 в зависимости от величины коэффициента K_0 , учитывающего степень совместного сопротивления действующим нагрузкам сборной и монолитной частей конструкции. В расчетах приняты рекомендуемые в действующих нормативных документах [1-2] значения коэффициентов вариации для бетона $v_b=0.135$ и стержневой арматуры $v_s=0.08$. По характеру представленного графика видно, что в логарифмическом виде параметры надежности линейно зависят от коэффициента совместности K_0 сопротивления сборной и монолитной частей конструкции.

Плита П2

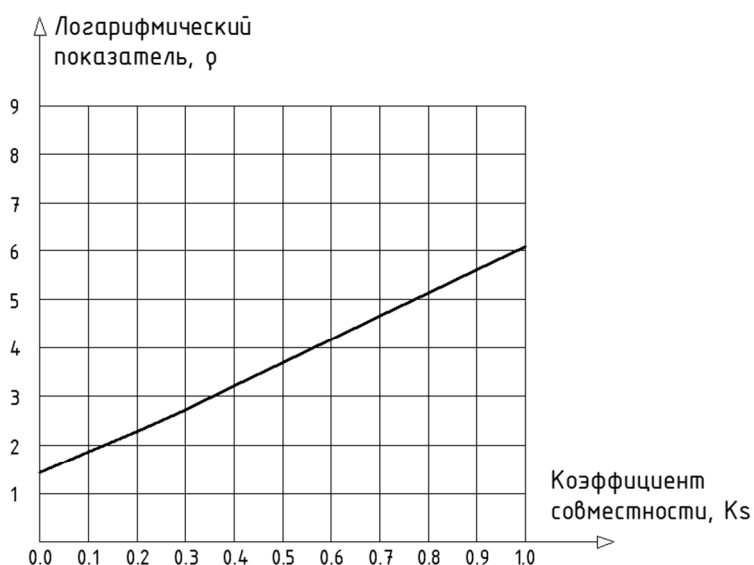


Рис. 4. Расчетная зависимость логарифмического показателя надежности от величины коэффициента K_0 , учитывающего степень совместного сопротивления действующим нагрузкам сборной и монолитной частей конструкции

Для анализа влияния разброса прочностных характеристик бетона и арматуры выполнены численные исследования зависимости параметров надежности при отклонении коэффициентов вариации от нормативных значений. На рис. 5 представлены полученные в вероятностных расчетах графики зависимости характеристики безопасности β для наиболее нагруженной плиты П2 пролетного строения для различных значений коэффициентов вариации бетона и арматуры. В расчетах принималось полное объединение сборной и монолитной

частей конструкции. Отметим, что при учете неполного объединения монолитной и сборной частей пролетного строения характер получаемых графиков сохраняется.

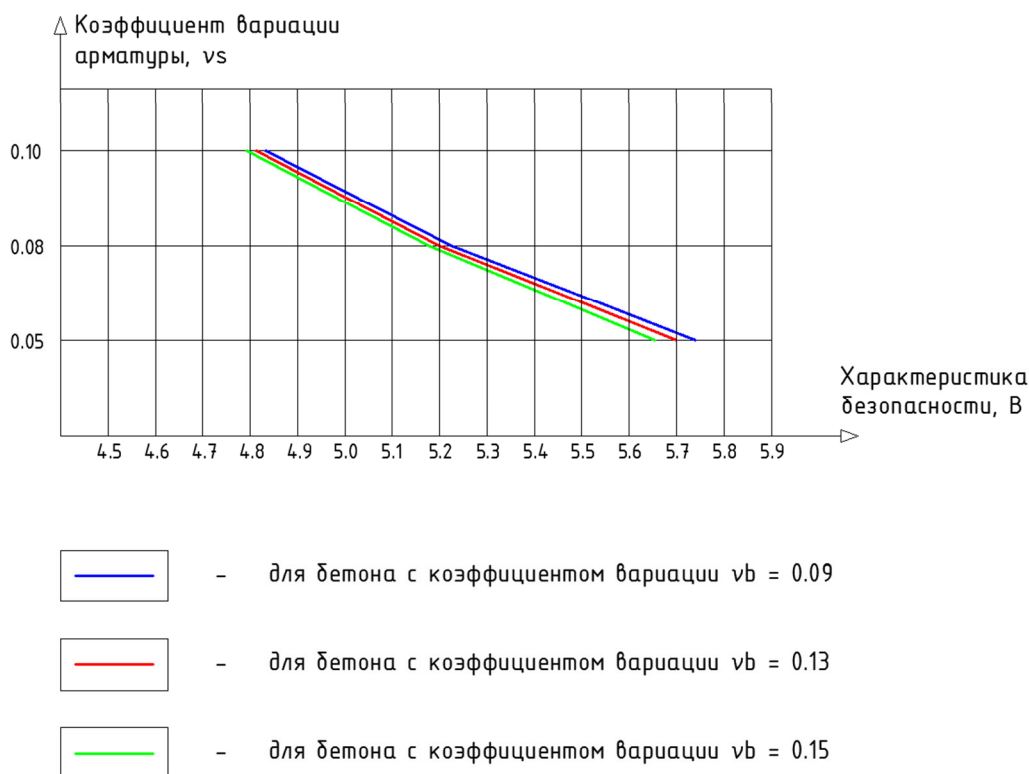


Рис. 5. График зависимости характеристики безопасности от коэффициентов вариации прочностных характеристик бетона и арматуры.

Выводы

- Предлагаемая методика вероятностного расчета надежности сборно-монолитного плитного пролётного строения автодорожного моста на совместное действие постоянных и временных нагрузок является универсальной, так как позволяет учесть этапность их приложения с учётом различной степени объединения сборной и монолитной частей, а также разброса прочностных характеристик бетона и арматуры.

- По результатам выполненных вероятностных расчетов получено, что надёжность сечения незначительно зависит от разброса прочностных характеристик бетона, но в значительной степени определяется расчетной коэффициентом вариации арматуры.

- Обобщенные показатели надежности составного сечения, к которым относятся характеристика безопасности и логарифмический показатель риска, растут по близким к линейным зависимостям по мере увеличения степени совместного сопротивления сборной и монолитной части составного сборно-монолитного сечения действующим постоянным и временным нагрузкам.

Библиографический список

1. СНиП 2.05.03-84* (СП 35.13330.2011) Мосты и трубы (Актуализированная редакция) / Минрегионразвития РФ. – М.: ОАО «ЦПП», 2011. – 339 с.
2. ОДМ 218.4.026-2016. Рекомендации по определению грузоподъемности эксплуатируемых мостовых сооружений на автомобильных дорогах общего пользования. Бетонные и железобетонные конструкции. Росавтодор, - М.: 2016
3. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2015. – 339 с.
4. Сафронов В.С.Современные конечно-элементные модели балочных без диафрагменных пролетных строений автодорожных мостов/ В.С. Сафронов, А.В.Антипов// Строительная механика и конструкции. 2013. № 1. С.92-101.
5. Сафронов В.С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных мостов, имеющих дефекты и повреждения / В.С. Сафронов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. 1996. № 6. С. 103-109.
6. Сафронов В.С. Алгоритм расчета реконструируемых плитно-балочных конструкций, усиленных накладной плитой/В.С. Сафронов, С.Д. Степанов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. 1998. № 11-12. С. 31-35.
7. Райзер В.Д. Теория надёжности сооружений/ В.Д. Райзер. - М.: Изд-во АСВ, 2010. - 384 с.
8. Шпете Г. Надежность несущих строительных конструкций/ Г. Шпете. - М.: Стройиздат, 1994. – 288 с.
9. Сеницын А.П. Расчет конструкций по теории риска/ А.П. Сеницын. - М.: Стройиздат, 1985. -304 с.
10. Сафронов В.С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок / В.С. Сафронов, Нгуен Динь Хоа // Научный вестник Воронеж. гос. арх.-строит. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. – Воронеж, 2010. – Вып. 1. – С. 157–166.
11. Сафронов В.С. Оценка влияния косины пролетных строений железобетонных мостов на риск разрушения нормальных сечений балок с ненапрягаемым армированием от изгибающего момента/В.С. Сафронов., Д. И. Доманов// Строительная механика и конструкции. - Воронеж, 2012. - Т. 2 - №4. - С. 85-91
12. Сафронов В.С. Расчетная оценка вероятности разрушения железобетонной балки по наклонному сечению/В.С. Сафронов., Ж.Д.Д. Нширимана// Строительная механика и конструкции. - Воронеж, 2016. - Т. 2, - №13(13).- С. 63-70
13. Сафронов В.С. Оценка риска разрушения нормальных сечений железобетонных балок произвольной формы/ В.С. Сафронов., Д.И. Доманов// Строительная механика и конструкции. - Воронеж, 2011. - №2. - С. 47-52.

Referenes

1. CN 2.05.03-84* (СП 35.13330.2011) Bridges and tube (Updated version)Minregionrazvitie RF. – М.: ОАО «TzPP», 2011. – 339p.

2. ODM 218.4.026-2016. Recommendations for determination of weight capacity of bridge structures on municipal roads. Concrete and reinforced structures. Rosavtodor, -M.: 2016
3. Standard 27751-2014. Building and bases strength. – M.: Standardinform 2015. – 339p.
4. Safronov V.S., Antipov A.V. Modern finite –element models of beam without diaphragms road bridge spans. Structural Mechanics and constructions. 2013. № 1. P.92-101.
5. Safronov V.S. , Petranin A.A., Petrenya E.N. Superelemental calculation in mix variation of concrete reinforced bridges with defects and damages. News of universities.Building. 1996. № P. 103-109.
6. Safronov V.S., Stepanov S.D. Petranin A.A., Petrenya E.N. Algorithm of reconstructed slab beam structures reinforced with floor slab. News of universities.Building. 1998. № 11-12. P. 31-35.
7. Raizer V.D. Theory of structures strength.-M.: Pub. House ASV, 2010, -384p.
8. Shpete G. Bearing capacity of building structures.-M.:Stroiizdat, 1994, -288p.
9. Sinitzin A.P. Design of th atructures according to the theory of risk. M.: Stroiizdat, 1985, -304p.
10. Savronov V.S., Nguen Ding Hoa. Probabilistic assessment of the risk of limiting state occurrence in bending reinforced beams sections. Scientific bulletin of VGASU. Series Building and Architecture. – Voronezh, 2010. – Issue. 1. – P. 157–166
11. Savronov V.S., Domanov D.I. Assessment of concrete reinforced bridge skew affect on the risk of destructions of beam normal sections with nontensional reinforcement from bending moment. Structural Mechanics and Constructions. Voronezh, 2012, v.2, №4, P.85-91
12. Savronov V.S., Nzhimiriman Zh.D.D. Design assessment of possible destruction of reinforced concrete oblique section. Structural Mechanics and Constructions. Voronezh, 2016, т.2, №13(13), С.63-70
13. Savronov V.S., Domanov D.I. Assessment of destruction risk of concrete reinforced beams normal sections of arbitrary form. Structural Mechanics and Constructions. Voronezh, 2011, №2, С.47-52

УДК 624.07

*Воронежский государственный
технический университет
Ассистент кафедры строительной механики
С. Ю. Струков
Канд. техн. наук, доц.кафедры
строительной механики
С. В. Ефрюшин
Ст. преподаватель кафедры строительной механики
А. В. Глушков
Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-52-30;
e-mail: ooo.stroynauka@mail.ru
e-mail: strukov.sy@mail.ru*

*Voronezh State technical University
Lecturer of the department of Structural Mechanics
S. Y. Strukov
PhD of Tech. Sc., associate professor
of the department of Structural Mechanics
S. V. Efyushin
Senior lecturer of the department
of Structural Mechanics
A.V. Glushkov
Russia, Voronezh, ph. +7(473)2715230
e-mail: ooo.stroynauka@mail.ru
e-mail: strukov.sy@mail.ru*

С. Ю. Струков, С. В. Ефрюшин, А. В. Глушков

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МОНОЛИТНОГО ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО КАРКАСА МНОГОЭТАЖНОГО ЗДАНИЯ С УЧЕТОМ ЭТАПОВ ЕГО ВОЗВЕДЕНИЯ

Рассматривается моделирование эволюции напряжённо-деформированного состояния силовых каркасов многоэтажных зданий в процессе возведения с помощью комплекса Исследовано напряженно-деформированное состояние и армирование элементов каркасов зданий с нерегулярной структурой при расчете по традиционной схеме и расчете с применением модуля «МОНТАЖ-ПЛЮС». Разработаны практические рекомендации для расчета монолитных зданий с нерегулярной структурой.

Ключевые слова: пространственный каркас, напряженно-деформированное состояние, монтажная стадия, расчет с учетом стадийности, армирование элементов каркаса.

S. Y. Strukov, S. V. Efyushin, A.V. Glushkov

INVESTIGATIONS OF DEFLECTED MODE OF MONOLITHIC REINFORCED CON- CRETE FRAME ELEMENTS OF MULTISTORIED BUILDING WITH ACCOUNT OF ITS CONSTRUCTION STAGES

The article deals with deflected mode of multistory buildings pressure frames during their construction by the ICR "LIRA-SAPR 2013". The deflected mode and reinforcement of buildings frames elements with irregular structure while designing according to the traditional scheme and application of module "MONTAGE PLUS" is researched. Practical recommendations for design of monolithic buildings with irregular structure are developed.

Keywords: spatial frame, deflected mode, assemblies stage, calculation with account of staging, reinforcement.

Для железобетонных зданий, в которых нагрузки от собственного веса несущих конструкций оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние элементов каркаса и составляют 60-65 % величины основного сочетания нагрузок и до 80-85 % суммы длительно действующих нагрузок, различие в расчетах по традиционной методике и с учетом стадийности возведения достаточно велико. Данный факт наиболее ярко представлен в многоэтажных каркасах с нерегулярной структурой, у которых перераспределение нагрузок и усилий между отдельными частями могут качественно меняться в зависимости от жесткости конструкций отдельных частей сооружения.

© Струков С.Ю., Ефрюшин С.В., Глушков А.В., 2017

Нерегулярность структуры несущих конструкций наиболее ярко представлена в зданиях повышенной этажности, что определяется не только объемно-планировочными решениями здания, но и требованиями по созданию зон с высокой огнестойкостью для размещения противопожарных укрытий. Зоны конструкций с высокой огнестойкостью располагаются между пожарными отсеками, выделяемыми по высоте здания (т.е. в средней части высотного здания), а также над верхним пожарным отсеком сооружения (этаж, расположенный под покрытием).

В качестве объектов исследования были выбраны 2 монолитных железобетонных каркаса различной этажности с нерегулярной структурой. Сравнение характеристик двух каркасов приведено в табл. 1.

Таблица 1

Основные характеристики исследуемых каркасов

№ п/п	Параметр сравнения	Каркас №1	Каркас №2
Геометрические характеристики каркасов			
1	Количество типовых секций	2	
2	Размеры каждой секции, м	18x30; 18x36	18x30; 18x36
3	Высота этажа, м	3	
4	Число этажей в подземной части	1	
5	Число этажей в надземной части здания (под жилые помещения)	25	29
6	Число технических этажей	1	
7	Высота технического этажа, м	2,1	
Характеристика несущих и ограждающих конструкций			
8	Вертикальные несущие конструкции	Железобетонные стены в продольном и поперечных направлениях	
9	Расстояние между стенами	Различное	
10	Толщина стен, мм	200	
11	Класс бетона стен	В25	
12	Толщина междуэтажных перекрытий, мм	200	
13	Класс бетона междуэтажных перекрытий	В25	
14	Тип фундамента	Фундаментная плита на упругом основании	
15	Толщина фундаментной плиты, мм	1500	
16	Класс бетона фундаментной плиты	В40	
17	Тип ограждающих конструкций	Трехслойная кладка: -газосиликат 300 мм; -минеральная вата 100 мм; -облицовочный кирпич 120 мм	
18	Материал внутриквартирных перегородок	Газосиликат	
19	Назначение технического этажа	Для размещения коммуникаций и оборудования	
20	Технический этаж является зоной с высокой огнестойкостью	нет	Да. Ограждающие конструкции выполнены из монолитного железобетона. Толщина наружных стен – 300 мм.

№ п/п	Параметр сравнения	Каркас №1	Каркас №2
Характеристики грунтовых условий площадки строительства			
21	Характеристика грунтов основания	<ol style="list-style-type: none"> 1. Суглинок полутвердый песчаный непросадочный ($c=41$ кПа, $\phi=21^\circ$; $\gamma=19$ кН/м³; $E=14$ МПа; $\nu=0,35$; $h=1,0$ м) 2. Песок мелкий плотный маловодонасыщенный ($c=3$ кПа, $\phi=36^\circ$; $\gamma=18,2$ кН/м³; $E=38$ МПа; $\nu=0,30$; $h=2,2$ м) 3. Песок средней крупности, плотный, насыщенный водой ($c=1$ кПа, $\phi=38^\circ$; $\gamma=20,2$ кН/м³; $E=51$ МПа; $\nu=0,30$; $h=7,4$ м) 	

Расчетные модели каркасов были созданы в системе архитектурного проектирования, формообразования и расчетов САПФИР-3D программного комплекса «ЛИРА-САПР 2013».

Для проведения расчета с учетом стадийности возведения каркаса был использован модуль «МОНТАЖ-плюс», который дает пользователю возможность моделировать поочередное появление элементов расчетной схемы. Данный способ расчета позволяет получить наиболее реальную картину напряженно-деформированного состояния элементов каркаса, т.к. каждому этапу возведения здания (далее: монтажной стадии) соответствуют свои значения основных параметров расчетной модели, которые приближены к условиям работы элементов каркаса в действительности.

Также при расчете каркаса с учетом стадийности возведения учитывалось изменения модуля деформации бетона, путем введения коэффициента, который увеличивается с учетом изменения прочности бетона во времени.

Процесс появления здания состоит из 61 монтажной стадии (для каркаса высотой 25 этажей) и 65 монтажных стадий (для каркаса высотой 30 этажей), которые появляются в следующей последовательности:

- возведение фундаментной плиты;
- возведение наружных стен цокольного этажа;
- возведение плиты перекрытия цокольного этажа;
- возведение стен 1 этажа (коэффициент к модулю деформаций бетона 0,5);
- возведение плиты перекрытия 1 этажа (коэффициент к модулю деформаций для бетона стен 1 этажа принимается равным 0,9; коэффициент к модулю деформаций бетона для плиты перекрытия принимается равным 0,5);
- возведение стен 2 этажа (коэффициент к модулю деформаций для бетона стен 1 этажа принимается равным 1,0; коэффициент к модулю деформаций бетона для плиты перекрытия 1 этажа принимается равным 0,9; коэффициент к модулю деформаций бетона для стен 2 этажа принимается равным 0,5);

Дальнейшее изменение коэффициента для модуля деформаций бетона несущих конструкций многоэтажного каркаса принимается по схеме, аналогичной описанной выше (для 1-го и 2-го этажей).

- При возведении несущих стен 6-го этажа начинается возведение ограждающих конструкций и внутриквартирных перегородок на 1-м этаже здания. В программном комплексе «ЛИРА-САПР» возведение ограждающих конструкций и перегородок модели-

руется приложением распределенной нагрузки от собственного веса монтируемого элемента в соответствующие места установки данных элементов. Возведение ограждающих конструкций на 1-м этаже заканчивается одновременно с монтажом плиты перекрытия на 6 этаже здания.

Дальнейшее возведение перегородок и ограждающих конструкций по высоте здания производится по схеме, аналогично той, что описано выше, т.е. возведение несущих конструкций на n-м этаже, ограждающие конструкции и перегородки появляются на (n-4) этаже здания.

- На стадиях, которые следуют за стадией возведения плиты перекрытия здания, на каркас прикладываются только лишь нагрузки от собственного веса ограждающих конструкций и перегородок на нижележащих этажах.
- После возведения всех несущих и ограждающих конструкций на исследуемый каркас прикладываются все дополнительные нагрузки: от собственного веса конструкций, пола, кровли, временные, снеговые и ветровые нагрузки)

При расчете каркаса грунтовое основание задавалось с моделью Пастернака со следующими коэффициентами постели: $C_1=5120 \text{ кН/м}^3$; $C_2=33693 \text{ кН/м}$.

Численное исследование напряженно-деформированного состояния элементов монолитных каркасов проводилось только на нагрузки от собственного веса несущих конструкций и собственного веса ограждающих конструкций каркаса, т.к. именно эти нагрузки вносят наиболее существенный вклад в напряженно-деформированное состояние элементов каркасов.

Анализ вертикальных перемещений точек каркасов

Анализ изополей вертикальных перемещений (по Z) при расчете по одномоментной теории показывает, что максимальные деформации сосредоточены на последних этажах каркасов. Вертикальные деформации каркасов, рассчитанных с использованием модуля «МОН-ТАЖ-плюс» показывают совершенно иную картину деформирования. Максимальные вертикальные перемещения сосредоточены в районе цокольного этажа вблизи жесткого ядра здания, которым является лестнично-лифтовой узел.

Результаты расчета каркасов показывают, что «традиционная» методика расчета дает завышенные максимальные значения вертикальных перемещений точек каркасов. Максимальная разница в вертикальных перемещениях составляет 11,4 % и наблюдается при сравнении результатов расчета для каркаса №2.

Анализ НДС плит междуэтажных перекрытий

Исследуемыми факторами при анализе напряженно-деформированного состояния плит междуэтажных перекрытий являлись изгибающие моменты M_x и M_y в плитах перекрытий. Результаты расчета по «традиционной» методике и с учетом стадий возведения показывают, что изгибающие моменты в плитах междуэтажных перекрытий имеют приблизительно одинаковые значения (разница в пределах 5 процентов), а зоны расположения данных моментов по площади плиты также имеют похожие размеры.

Анализ НДС несущих стен

Исследуемым фактором при анализе напряженно деформированного состояния несущих стен являются напряжения N_x (кН/м^2) и N_y (кН/м^2). Анализ проводился на примере двух самых загруженных стен: в продольном направлении по оси «М» (обозначена на схеме синим цветом) и в поперечном направлении по оси «13» (обозначена на схеме красным цветом). На рис. 1 представлена схема расположения исследуемых конструкций на плане типового этажа.

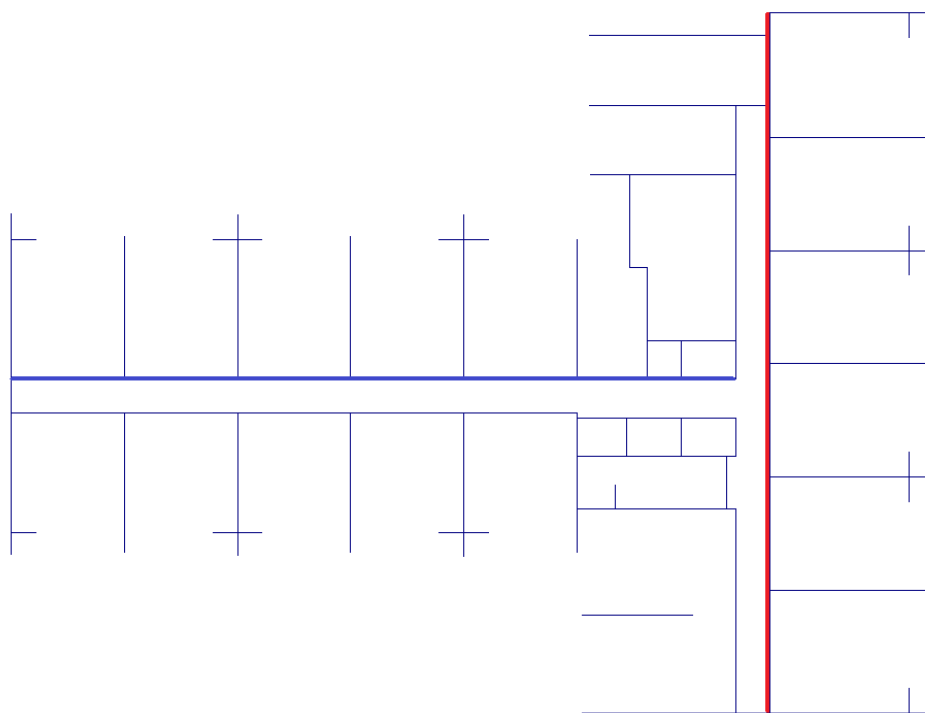


Рис. 1. Схема расположения исследуемых стен на плане типового этажа

По результатам расчета по двум методикам было произведено сравнение максимальных значений напряжений N_x и N_y по каждому этажу для стены по оси «М» и для стены по оси «13». На основании найденных значений напряжений в пределах каждого этажа была вычислена разница между напряжениями при «традиционном» расчете и расчете с учетом стадийности возведения. На рис. 2-3 представлены графики разницы между напряжениями в исследуемых стенах по двум методикам расчета для каркаса высотой 25 этажей.

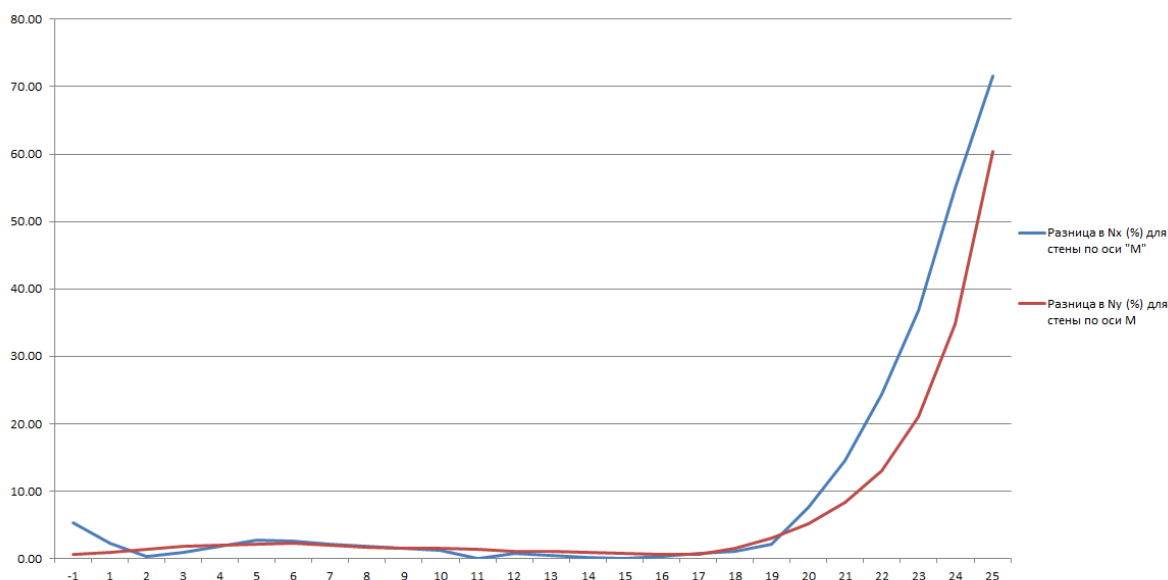


Рис. 2. Разница между напряжениями N_x , N_y (%) в стене по оси «М» каркаса №1 по двум методикам расчета

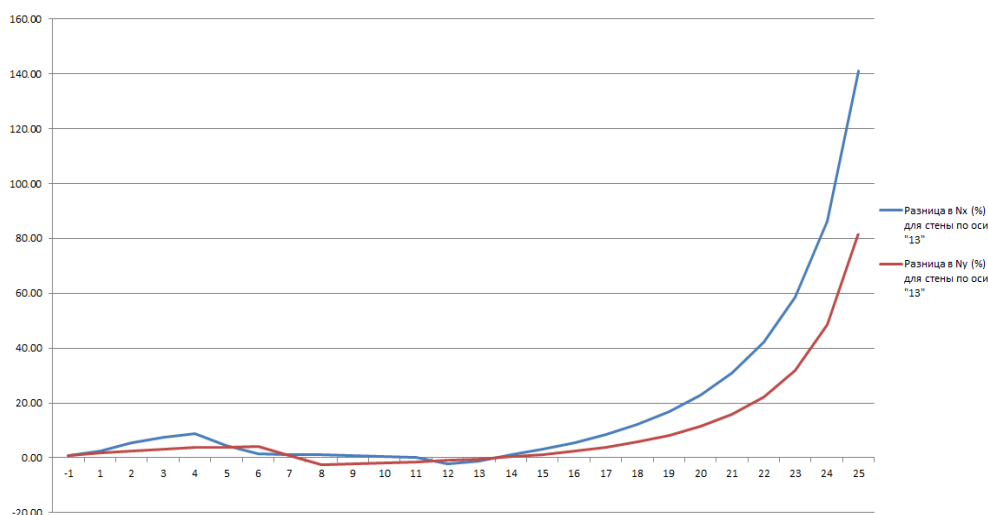


Рис. 3. Разница между напряжениями N_x , N_y (%) в стене по оси «13» каркаса №1 по двум методикам расчета

По данным результатам расчетов можно сделать вывод о том, что расчет с учетом стадийности возведения оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние стен каркаса высотой 25 этажей. Характер изменения напряжений N_x и N_y для стен, расположенных по осям «М» и «13» схож: до 19 этажа разница между напряжениями практически отсутствует, а на последующих этажах напряжения, полученные при расчете с учетом стадийности, становятся меньше по сравнению с напряжениями, вычисленными при «традиционном» расчете. Данная разница начинает увеличиваться к последним этажам здания и достигает своих максимальных значений на 25 этаже каркаса.

Аналогичный подход к анализу результатов расчета был применен и для монолитных стен каркаса высотой 30 этажей. Стоит отметить, что в качестве объектов исследования были выбраны те же самые стены, которые отображены на рис. 1. На рис. 4-5 представлены графики разницы между напряжениями в исследуемых стенах при двух методиках расчета для каркаса высотой 30 этажей с техническим этажом повышенной жесткости. Знак «минус» на данных графиках показывает, что напряжения при расчете с помощью модуля «МОНТАЖ» больше, чем при одномоментном расчете.

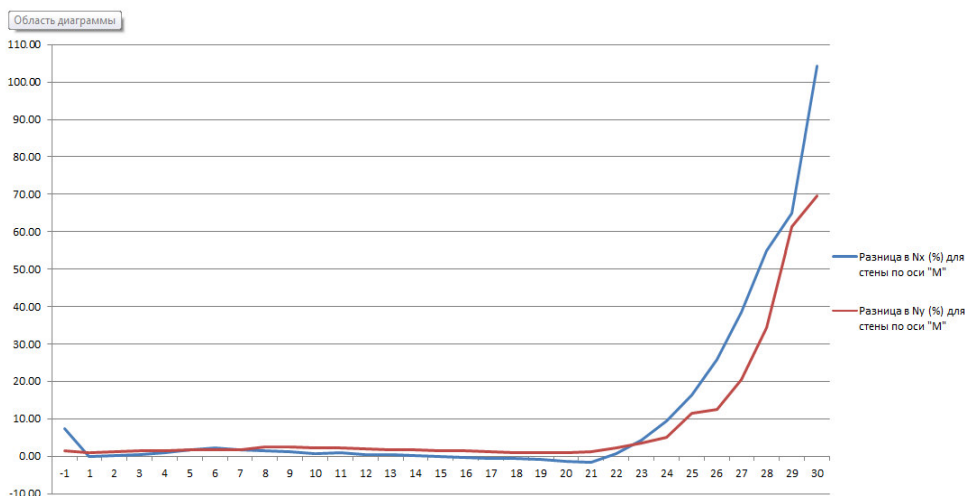


Рис. 4. Разница между напряжениями N_x , N_y (%) в стене по оси «М» каркаса №2 по двум методикам расчета

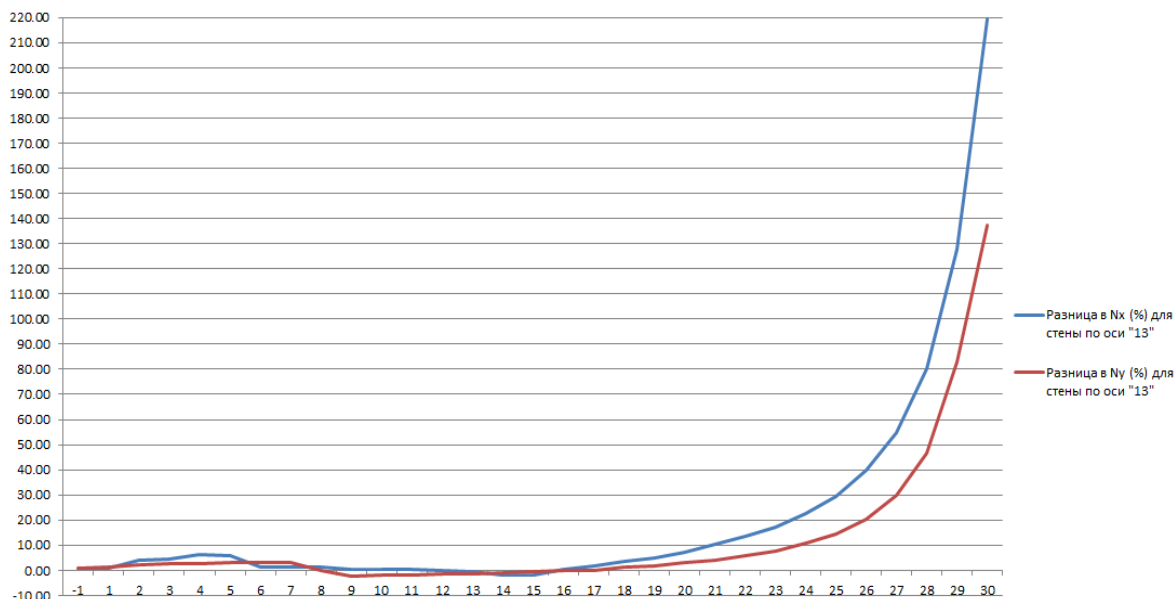


Рис. 5. Разница между напряжениями N_x , N_y (%) в стене по оси «13» каркаса №2 по двум методикам расчета

По данным результатов расчетов можно сделать вывод о том, что расчет с учетом стадийности возведения оказывает значительное влияние на напряженно-деформированное состояние стен каркаса высотой 30 этажей. Характер изменения напряжений N_x и N_y для стен, расположенных по осям «М» и «13», схож, как и для каркаса высотой 25 этажей. Различия заключается в номере этажа, с которого данная разница увеличивается. При расчете каркаса в 30 этажей с техническим этажом повышенной жесткости с учетом стадийности возведения напряжения в рассматриваемых стенах начинают уменьшаться начиная с 21-22 этажа в сравнении с одномоментной методикой расчета. Максимальная разница наблюдается также на техническом этаже рассматриваемого каркаса, но по сравнению с каркасом высотой в 25 этажей различия между напряжениями в рассматриваемых стенах становятся еще больше.

Данный факт можно объяснить большим количеством этажей (на 5 штук) и наличием технического этажа повышенной жесткости.

Анализ результатов подбора арматуры в элементах каркасов

По результатам расчета был также произведен подбор арматуры в элементах рассматриваемых каркасов. Для расчета армирования предварительно были созданы расчетные сочетания усилий в соответствии с требованиями [1, 2].

Результаты расчета требуемого армирования плит междуэтажных перекрытий и монолитных несущих стен для обоих каркасов при двух методиках расчета показывают, что подобранная в ПВК ЛИРА-САПР 2013 арматура не удовлетворяет технологическим требованиям. Таким образом, разница в напряженно-деформированном состоянии для вертикальных стен и плит междуэтажных перекрытий компенсируется установкой рабочей арматуры диаметром 12 мм (минимальный по конструктивным требованиям).

Совершенно иная картина наблюдается при анализе результатов подбора арматуры в фундаментных плитах каркасов №1 и №2. При использовании модуля «МОНТАЖ-плюс» наблюдается изменение размеров зон дополнительного армирования плит, а также смещение этих зон. Данный факт таит в себе риск недоармирования каких-либо участков фундаментной плиты (а следовательно, и переармирование других участков). В фундаментных плитах

наблюдается также уменьшение зон дополнительного армирования при расчете с учетом стадийности возведения.

По результатам подбора арматуры была вычислена разница в массе арматуры, которая применяется для дополнительного армирования фундаментных плит каркасов. Результаты расчетов представлены в табл. 2-3.

Таблица 2

Разница в массе дополнительной арматуры в фундаментной плите каркаса №1

Расположение дополнительной арматуры	Масса дополнительной арматуры, кг		Разница, %
	"Традиционный" метод расчета	Расчет с учетом стадийности	
Низ по X	1574,6	1439,4	8,59
Низ по У	1738,9	1366,2	21,43
Верх по X	2379,8	2295,3	3,55
Верх по У	1971,1	1869,1	5,17
Итого	7664,4	6970	9,06

Таблица 3

Разница в массе дополнительной арматуры в фундаментной плите каркаса №2

Расположение дополнительной арматуры	Масса дополнительной арматуры, кг		Разница, %
	"Традиционный" метод расчета	Расчет с учетом стадийности	
Низ по X	2071,7	1827,6	11,78
Низ по У	1796,9	1571	12,57
Верх по X	2856,4	1942,5	31,99
Верх по У	2121,5	1460,6	31,15
Итого	8846,5	6801,7	23,11

Выводы по результатам численных исследований напряженно-деформированного состояния элементов многоэтажных железобетонных каркасов с нерегулярной структурой

1. «Традиционная» методика расчета дает завышенные максимальные значения вертикальных перемещений точек каркасов. Максимальная разница в вертикальных перемещениях составляет 11,4 % и наблюдается при сравнении результатов расчета для каркаса №2.
2. «Традиционная» методика с учетом стадий возведения показывает, что изгибающие моменты в плитах междуэтажных перекрытий каркасов зданий с нерегулярной структурой имеют приблизительно одинаковые значения (разница в пределах 5 процентов), а зоны расположения данных моментов по площади плиты также имеют похожие размеры.
3. Характер изменения напряжений N_x и N_y для несущих стен для каркасов различной этажности сопоставим. Различие заключается в номере этажа, с которого разница между напряжениями в стене начинает увеличиваться. При расчете каркаса в 30 этажей с техническим этажом повышенной жесткости с учетом стадийности возведения напряжения в рассматриваемых стенах начинают уменьшаться начиная с 21-22 этажа в сравнении с одномоментной методикой расчета. Максимальная разница наблюдается также на техническом этаже рассматриваемого каркаса, но по сравнению с каркасом высотой в 25 этажей различия между напряжениями в рассматриваемых стенах

становятся еще больше. Данный факт можно объяснить большим количеством этажей (на 5 штук) и наличием технического этажа повышенной жесткости.

4. Разница в результатах подбора арматуры в плитах междуэтажных перекрытий и монолитных стенах, полученных по двум методикам расчета, полностью нивелируется в связи с необходимостью установки арматуры по технологическим требованиям.
5. При использовании «традиционной» методики расчета результаты армирования фундаментной плиты отличаются от результатов, полученных при расчете с учетом стадийности возведения: наблюдается как смещение зон дополнительного армирования, так и уменьшение количества арматуры при расчете с помощью модуля «МОНТАЖ-плюс».
6. С увеличением числа этажей в здании, а особенно при наличии этажей повышенной жесткости, использование «традиционной» технологии расчета ведет к расхождению в результатах расчета по сравнению с результатами, полученными с использованием модуля «МОНТАЖ». Поэтому для расчета таких каркасов применение данного модуля необходимо для получения реальной картины напряженно-деформированного состояния и корректного подбора арматуры в элементах каркаса.

Библиографический список

1. Свод правил: СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия. С картами. Актуализированная редакция». - М.: 2011.
2. Свод правил: СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция». – М., 2012.
3. Анпилов С. М. Технология возведения зданий из монолитного железобетона/ С. М. Анпилов. – М.: Изд-во АСВ, 2010.
4. Барабаш М.С. Методы компьютерного моделирования процессов возведения высотных зданий// International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2012, Vol. 8, Issue 3. – С. 58-67
5. Перельмутер А.В. Анализ конструкций с изменяющейся расчетной схемой/ А.В. Перельмутер, О.В. Кабанцев. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, Издательский дом АСВ, 2015. – 148 с.
6. Сапожников А.И., Григоршев С.М. Учет последовательности возведения зданий методом конечных элементов с поэтажным формированием расчетной модели/ А. И. Сапожников, С.М. Григоршев // Строительная механика и расчет сооружений, 2010. - №1. – С. 19-26.

References

1. RC 20.13330.2011 "Loads and impacts. With maps. Revised edition" - M.: 2011.
2. RC 63.13330.2012 "Concrete and reinforced Concrete structures. The main provisions. Revised edition". - M:2012.
3. Anpilov S. M. Technology of construction of buildings of reinforced concrete.M.: Publishing house Association building universities, 2010.
4. Barabash M. S. computer simulation of processes of high-rise construction. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 2012, Vol.8, Issue 3. – S. 58-67
5. Perelmuter A.V., Kabantsev O. V. Analysis of designs with varying design scheme. – M.: Publishing house of the SCAD SOFT, Publishing house ASV, 2015. – 148 p.
6. Sapozhnikov A. I., Grigorev S. M. Accounting of the sequence of buildings construction by finite element method with floor formation analysis model. Structural Mechanics and calculation of structures, 2010. - No.1. – S. 19-26.

Научное издание

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА
И КОНСТРУКЦИИ**

Научно-технический журнал

Выпуск №2 (15), 2017

Редактор Аграновская Н.Н.

Подп. в печать 30.11. 2017. Формат 60x84 1/8. Уч.-изд. л. 13,0. Усл.-печ. л. 14,0.
Бумага писчая. Тираж 200 экз. Заказ № 334.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Воронежский государственный технический университет»

394026 г. Воронеж, Московский просп., 14

Отдел оперативной печати Воронежского государственного технического университета

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84