



ISSN 2219-1038

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

Научно-технический журнал

Выпуск №1 (12), 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

### Учредитель

Федеральное государственное  
бюджетное образовательное  
учреждение высшего  
образования  
«Воронежский  
государственный  
архитектурно-строительный  
университет»

### Издатель

Строительный институт

### Главный редактор

Сафронов В.С., д.т.н., проф.

### Зам. главного редактора

Ефрюшин С.В., к.т.н., доц.

### Ответственный секретарь

Габриелян Г.Е., к.т.н., доц.

### Технический секретарь

Флавианов В.М., м.н.с.

### Члены редколлегии

Шитикова М.В., д. ф.-м. н., проф.

Шапиро Д.М., д.т.н., проф.

Орлов А.С., д.т.н., проф.

Свентиков А.А., д.т.н., проф.

Иванов Ю.В., к.т.н., доц.

Андреев А.В., к.т.н., доц.

Рогатнев Ю.Ф., к.т.н., доц.

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### Петреня Е.Н., Петранин А.А.

Технология поэтапного расчета строительных кон-  
струкций методом суперэлементов в смешанной фор-  
мулировке 5

### Кирсанов М.Н.

Формулы для расчета плоской балочной фермы с про-  
извольным числом панелей 19

### Черняев А.А.

Определение основной частоты собственных изгибных  
колебаний правильных N-угольных, треугольных и  
ромбических шарнирно опертых пластин с использо-  
ванием конформных радиусов 25

### Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А., Козлова А.В.

Оценка напряженно-деформированного состояния вне-  
центренно сжимаемых со стандартной скоростью  
призм из мелкозернистого бетона 29

### Игнатъев А.В., Ефремова Н.С.

Расчет косоугольной пластины по методу конечных  
элементов в форме классического смешанного метода 39

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

### Струков С.Ю., Муравьев И.И., Ефрюшин С.В.

Численное моделирование эволюции деформированного  
состояния стального элемента таврового сечения  
в процессе сварки 45

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

**Шапиро Д.М., Агарков А.В.**

Анализ упругопластических расчетных моделей теории пластического течения грунтов 57

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**Катембо А.Л., Сафронов В.С.**

Расчет несущей способности внецентренно сжатого стержня из железобетона с использованием деформационной модели 64

### Попечительский совет

ООО «Предприятие  
Инвестстройиндустрия»  
в лице директора  
**Ушакова И.И.**

ООО «Предприятие  
по инженерному и научно-  
техническому обслуживанию  
строительного комплекса  
«СтройНаука»  
в лице зам. директора  
**Глушкова А.В.**

ОАО Воронежский филиал  
ГИПРОДОРНИИ  
в лице ген. директора  
**Мажарова А.В.**

© Воронежский ГАСУ, 2016

**Адрес редакции:** 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

Тел./ факс: +7(473) 2715230

**По вопросам размещения статей просьба обращаться  
по адресу:**

394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

Тел./факс: +7 (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф. **Сафронову Владимиру Сергеевичу**,

тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц. **Ефрюшину Сергею Владимировичу**,

тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: [ooo.stroynauka@mail.ru](mailto:ooo.stroynauka@mail.ru)

отв. секретарю, канд. техн. наук, доц. **Габриеляну Грайру Егисеевичу**

тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: [grayr2010@rambler.ru](mailto:grayr2010@rambler.ru)



### Founder

State Educational Institute  
of Higher Vocational Education

Voronezh State University  
of Architecture  
and Civil Engineering

### Editor

Constructional Department

### Chief Editor

Dr of Sc. Tech. Prof.  
V.S. Safronov

### Deputy of Chief Editor

PhD S.V. Efryushin

### Senior Secretary

PhD G.E. Gabrielyan

### Technical Secretary

Sc. associate V.M. Flavianov

### Members of editorial board

Shitikova M.V., Dr of Math Prof.  
Shapiro D.M., Dr of Tech Sc. Prof  
Orlov A.S., Dr of Tech Sc. Prof.  
Sventikov A.A., Dr of Tech Prof.  
Ivanov Y.V., PhD, Ass. Prof.  
Andreev A.V., PhD Ass. Prof.  
Rogatnev Y.F., PhD Ass.Prof.

ISSN 2219-1038

# STRUCTURAL MECHANICS AND STRUCTURES

Scientific-Technical Journal

Issue №1 (12), 2016

## CONTENT

### STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS

#### **Petrenya E.H., Petranin A.A.**

Technology of construction structures step-by- step  
calculation by the method of super elements in mixed as-  
sertions 5

#### **Kirsanov M.N.**

Formulars for design of plane beam girder with arbitrary  
number of planes 19

#### **Chernyaev A.A.**

Definition of basic frequency of natural bending vibrations  
of regular n-angled, three-angled and rhombic hinged half-  
beams with application of conformal radiuses 25

#### **Sinozersky A.N., Mukhtarov R.A., Kozlova A. V**

Assessment of deflected mode of eccentrically compressed  
with standard velocity prisms from fine concrete. 29

#### **Ignatjev A.V., Efremova N.S.**

Calculation of oblique half-beam by the finite elements  
method in the form of classic mixed method 39

### CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

#### **Strukov S..Yu., Muravjov I.I., Efryushin S.V.**

Numerical simulation of T-section steel element evolution  
during welding 45

## CALCULATION AND DESIGN OF BASIS AND FOUNDATIONS

**Shapiro D.M., Agarkov A.V.**

Analysis of grounds plastic flow elastic-plastic design models

57

## CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

**Katembo A.L., Safronov V.S.**

Calculation of bearing capacity of eccentrically compressed bar from reinforced concrete with deformation model application

64

### Board of Trustees

Ltd. «Enterprise Investroyndustriya»  
Director **I.I. Ushakov**

Ltd. «Enterprise on Engineering and Scientific Service of Building Complex StroyNauka»  
Deputy Director  
**A.V. Glushkov**

Ltd. «Voronezh department of GIPRODORNII»  
Chief Executive Officer  
**A.V. Mazharov**

©Voronezhsky GASU, 2016

Address : 84, 20-letie Oktyabrya st. 394006 Voronezh, Russia  
Tel/ fax...: +7 (473) 2715230

Concerning the articles publication one can address:  
84, 20-letie Oktyabrya st., Voronezh 394006, Russia

Chief editor Dr Sc.Tech., Prof.Vladimir Sergeevich Safronov  
Tel./fax: +7 (473) 2715230 E-mail: [vss22@mail.ru](mailto:vss22@mail.ru)

Deputy of chief editor, PhD of Tech. Sc., associate professor Sergei Vladimirovich Efrushin  
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: [ooo.stroynauka@mail.ru](mailto:ooo.stroynauka@mail.ru)

Senior secretary, PhD of Tech.Sc., associate professor Grayr Egisheevich  
тел./ факс: +7 (473) 2715230, E-mail: [grayr2010@rambler.ru](mailto:grayr2010@rambler.ru)

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

УДК 539.3:624.074.5

*Воронежский государственный  
архитектурно-строительный университет*

*Канд. техн. наук, доц. кафедры  
строительной механики*

*Е.Н. Петреня*

*Канд. техн. наук, доц. кафедры  
строительной механики*

*А.А. Петранин*

*Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30*

*e-mail: petranin.san@yandex.ru*

*Voronezh State University*

*of Architecture and Civil Engineering*

*PhD of Tech. Sc., Associate Professor  
of department of Structural Mechanics*

*E.N. Petrenya*

*PhD of Tech. Sc., Associate Professor  
of department of Structural Mechanics*

*A.A. Petranin*

*Voronezh, Russia, tel.: 8(473)2715230*

*e-mail: petranin.san@yandex.ru*

Е.Н. Петреня, А.А. Петранин

## ТЕХНОЛОГИЯ ПОЭТАПНОГО РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ МЕТОДОМ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ В СМЕШАННОЙ ФОРМУЛИРОВКЕ

Приведены исходные дифференциальные уравнения строительной механики в матричной форме, уравнение динамического равновесия по методам конечных элементов и суперэлементов, формулы пошагового интегрирования по времени модифицированным методом Ньюмарка, система уравнений смешанного метода. Дана краткая характеристика программного комплекса SERIA, реализующего перечисленные методы, и технология работы с ним пользователя. Приведен демонстрационный пример поэтапного расчета многопролетного балочного моста по данному комплексу.

E.N. Petrenya, A.A. Petranin

## TECHNOLOGY OF CONSTRUCTION STRUCTURES STEP-BY-STEP CALCULATION BY THE METHOD OF SUPER ELEMENTS IN MIXED ASSERTIONS

There are given the source differential equations of structural mechanics in matrix form, equation of dynamic balance according to finite elements method and super elements, formulas of step-by-step integration in time by modified Newmark method, system of mixed method equation. There is also presented the performance of software package SERIA, realizing the above mentioned methods, and user's operation technology. The demonstration example of step-by-step calculation of multispan beam bridge is provided.

Строительство новых или реконструкция существующих инженерных сооружений выполняется путем поэтапного монтажа отдельных элементов, которые включаются в совместное деформирование с существующими частями, уже находящимися в напряженном состоянии. Последовательное наращивание и замена частей конструкции и соответствующее им ступенчатое изменение нагрузки приводит к необходимости выполнения поэтапного расчета, учитывающего несовместность полных деформаций в местах стыковки элементов. Учет нелинейных свойств материалов делает невозможным суперпозицию результатов расчета по отдельным этапам и требует учитывать историю нагружения и последовательность монтажа. В связи с этим разработка программных комплексов для поэтапного расчета сложных строительных конструкций является актуальной.

©Петреня Е.Н., Петранин А.А., 2016

Основной особенностью такого программного обеспечения является необходимость изменения топологии конструкции от этапа к этапу, позволяющего учитывать добавление, удаление, ослабление или разрушение части конструкции, введение дополнительных связей для моделирования взаимодействия отдельных элементов в виде заданных силовых воздействий или относительных кинематических смещений, характерных при создании предварительного натяжения арматуры, поддомкрачивания конструкции и т. п.

В современных программных комплексах, предназначенных для расчета строительных конструкций, обычно используется метод конечных элементов (МКЭ) или его усовершенствованная модификация – метод суперэлементов (МСЭ), позволяющий строить многоуровневые элементы сложной формы из более простых элементов. Достоинствами МСЭ являются технологичность построения расчетной схемы конструкции, экономичность в случае большой повторяемости ее отдельных частей, снижение порядка системы разрешающих уравнений. Однако введение в расчетную схему связей с неизвестными усилиями значительно усложняет топологию конструкции и требует разработки и совершенствования алгоритмов МСЭ с учетом смешанной формулировки.

### 1. Основные уравнения МКЭ, МСЭ и смешанного метода

Одной из самых трудоемких процедур МКЭ является построение матриц конечных элементов (КЭ). Автоматизировать процесс построения матриц КЭ для различных задач строительной механики (сплошные среды, стержни, плиты, оболочки) можно на основе единообразного математического описания этих задач. Запишем исходные дифференциальные уравнения строительной механики в матричной форме:

$$\begin{cases} \tilde{M} \ddot{\tilde{u}} + \tilde{R} \tilde{s} = \tilde{q} ; \\ \tilde{s} = \tilde{C} \tilde{e} ; \\ \tilde{e} = \tilde{G} \tilde{u} , \end{cases} \quad (1)$$

где  $\tilde{s}, \tilde{e}, \tilde{u}, \tilde{q}$  – векторы внутренних усилий, деформаций, перемещений и внешней нагрузки;  $\tilde{M}, \tilde{C}, \tilde{R}, \tilde{G}$  – матрицы инерции и жесткости, дифференциальный оператор равновесия и геометрический оператор. Операторы  $\tilde{R}$  и  $\tilde{G}$  представим в виде сумм:

$$\tilde{R} = \sum_{n=0}^p (-1)^n \tilde{R}^{(n)} ; \quad \tilde{G} = \sum_{n=0}^p \tilde{G}^{(n)} , \quad (2)$$

где  $n$  – порядок производных в составляющих операторах;  $p$  – максимальный порядок производных. Составляющие операторы в (2) подчиняются условиям статико-геометрической аналогии

$$\tilde{R}^{(n)} = \tilde{G}^{(n)T} , \quad n = 0, \dots, p , \quad (3)$$

или в суммарном виде

$$\tilde{R}_s = \sum_{n=0}^p \tilde{R}^{(n)} = \tilde{G}^T . \quad (4)$$

Аппроксимация поля перемещений в методе конечных элементов осуществляется по выражению

$$\tilde{u} = \hat{O}^T \hat{u} , \quad (5)$$

где  $\hat{O}$  – матрица, составленная из функций формы (ФФ) конечного элемента;  $\hat{u}$  – вектор перемещений по направлениям степеней свободы (СС).

Уравнение динамического равновесия элемента по МКЭ получается путем интегрирования системы исходных дифференциальных уравнений (1) методом Бубнова-Галеркина:

$$\hat{M}\ddot{\hat{u}} + \hat{D}\dot{\hat{u}} + \hat{C}\hat{u} - \hat{g} = \hat{q}, \quad (6)$$

$$\text{где } \hat{M} = \int_V \hat{O}\hat{M}\hat{O}^T dV; \quad \hat{C} = \int_V (\hat{O}\hat{R}_s)\hat{C}(\hat{G}\hat{O}^T) dV; \quad \hat{D} = \alpha\hat{M} + \beta\hat{C}; \quad \hat{q} = \int_V \hat{O}\hat{q} dV \quad (7)$$

– матрицы инерции, жесткости и демпфирования КЭ, вектор внешней нагрузки на элемент,  $\hat{g}$  – вектор внешних усилий, действующих на КЭ по направлениям СС со стороны примыкающих элементов,  $\alpha, \beta$  – коэффициенты внешнего и внутреннего вязкого сопротивления.

Симметричность матрицы  $\hat{C}$  в (7) обеспечивается условием статико-геометрической аналогии (4). Методы автоматического построения матриц (7) для различных КЭ сложной формы с высоким порядком аппроксимации и заданным набором СС изложены в [1].

Интегрирование дифференциального уравнения (6) по времени осуществим пошаговым методом Ньюмарка, который в модифицированном виде состоит из последовательности следующих операций, выполняемых на каждом шаге:

1) вычисление эффективного вектора правой части:

$$\hat{p}^{t+\delta/2} = \hat{q}^{t+\delta/2} + (\hat{A} - \hat{C})\hat{u}^t + \frac{2}{\delta}\hat{M}\dot{\hat{u}}^t; \quad (8)$$

2) вычисление вектора средних перемещений и внешних усилий на временном шаге из решения системы алгебраических уравнений:

$$\hat{A}\hat{u}^{t+\delta/2} - \hat{g}^{t+\delta/2} = \hat{p}^{t+\delta/2}; \quad (9)$$

3) вычисление векторов перемещений и скоростей на следующем временном слое:

$$\hat{u}^{t+\delta} = 2\hat{u}^{t+\delta/2} - \hat{u}^t; \quad (10)$$

$$\dot{\hat{u}}^{t+\delta} = \dot{\hat{u}}^t + \frac{2}{\delta}(\hat{u}^{t+\delta} - \hat{u}^t). \quad (11)$$

Здесь верхние индексы векторов показывают соответствующий момент времени,

$\delta$  – шаг интегрирования по времени,  $\hat{A}$  – разрешающий оператор, равный

$$\hat{A} = \frac{4}{\delta^2}\hat{M} + \frac{2}{\delta}\hat{D} + \hat{C}. \quad (12)$$

Обычно метод Ньюмарка применяется при интегрировании уравнения типа (6), для которого сформированы глобальные матрицы конструкции, при этом вектор усилий  $\hat{g}$  равен нулю вследствие равновесия узлов и уравнение (9) решается на шаге относительно вектора перемещений  $\hat{u}$ . При решении задачи методом суперэлементов глобальные матрицы строятся только для СЭ последнего уровня, поэтому на предыдущих уровнях вектор усилий отличен от нуля. Это требует составления в МСЭ дополнительных уравнений для усилий, характерных для смешанной формулировки. В случае выполнения статического расчета на этапе достаточно решить уравнение типа (9), в котором разрешающей матрицей является матрица жесткости.

Суммируя разрешающие уравнения (9) для отдельных КЭ, составляющих суперэлемент (СЭ), перейдем к уравнению для СЭ, решаемом на каждом временном шаге. Опуская верхние индексы, соответствующие единому моменту времени, запишем

$$\bar{A}\bar{u} - \bar{g} = \bar{p}, \quad (13)$$

где  $\bar{A} = \sum_e \hat{A}_e$  – матрица СЭ, получаемая из матриц КЭ суммированием по методу сложения жесткостей,  $e$  – номер КЭ в составе СЭ. Заметим, что для внутренних узлов СЭ, к которым не присоединяются другие суперэлементы, компоненты вектора  $\bar{g}$ , как правило, равны ну-

лю. В случае введения в узел между отдельными парами степеней свободы жестких или упругих связей с неизвестными усилиями  $\bar{s}$  соответствующие компоненты вектора  $\bar{g}$  будут отличны от нуля и удовлетворят уравнению равновесия для связей

$$\bar{g} = -\bar{J}\bar{s}, \quad (14)$$

где  $\bar{J}$  – топологическая прямоугольная матрица связей, в которой началам связей соответствуют минус единицы, концам – плюс единицы.

Для полноты системы разрешающих уравнений СЭ необходимо добавить уравнение совместности деформаций в связях

$$\bar{J}^T \bar{u} - \bar{F}\bar{s} = \bar{d}, \quad (15)$$

где  $\bar{F}$  – диагональная матрица податливости связей, в которой нулевые элементы на диагонали соответствуют абсолютно жестким связям;  $\bar{d}$  – вектор начальных длин связей. Задавая значение  $\bar{d}$  отличное от нуля, можно моделировать процессы поддомкрачивания и предварительного натяжения арматуры. Уравнения (15) и (13) с учетом (14) составляют полную систему уравнений смешанного типа

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{J} \\ \bar{J}^T & -\bar{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{d} \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Методика решения уравнения типа (16) приведена в [2]. Отметим, что разрешающая матрица в (16) является знакопеременной, поэтому для решения такой системы обычно применяют метод исключения неизвестных с выбором главного элемента, который обеспечивает вычислительную устойчивость.

По изложенным алгоритмам написан программный комплекс (ПК) SERIA, по которому выполнены численные исследования строительных конструкций с применением многоуровневой суперэлементной дискретизации.

## 2. Краткая характеристика программного комплекса SERIA и файловая система исходных данных

Программный комплекс SERIA предназначен для поэтапного расчета конструкций методом суперэлементов с реализацией возможностей не только изменять и добавлять нагрузку или смещения опор на каждом этапе, но и существенным образом изменять расчетную схему конструкции. В отличие от аналогичных ПК данный комплекс имеет ряд особенностей и возможностей.

1. Предоставление пользователю программы возможности самостоятельно разрабатывать различные КЭ сложной формы с заданным порядком аппроксимации и соответствующим набором СС (см. [1]) на основе автоматизированного применения методов независимой аппроксимации (МНА) и совместных КЭ (МСКЭ).

Суть МНА заключается в задании поля перемещений легко интегрируемыми степенными, тригонометрическими и показательными ФФ, не связанными с формой КЭ, в получении путем точного интегрирования по объему элемента произвольной формы матриц жесткости и инерции, соответствующих исходному набору СС, и в переходе с помощью специальных процедур преобразования, конденсации и редукции к требуемому набору СС.

Дальнейшим развитием МНА является МСКЭ, позволяющий строить общий КЭ с учетом армирования из нескольких конечных элементов в одном габаритном параллелепипеде с единым полем перемещений. Суммарные матрицы КЭ получаются методом сложения жесткостей с циклическим повторением процедур интегрирования для всех элементов. Поскольку все КЭ строятся в едином поле перемещений, то они заведомо являются совместными, т.е. автоматически решается проблема стыковки КЭ различных типов и аппроксимаций.



2. Использование в разрабатываемых КЭ сложных типов степеней свободы, которые в общем случае можно представить в виде многократной смешанной производной от функции перемещений  $u_n$ ,  $n=x, y, z$  в заданном узле:

$$u_n^{ix,jy,kz} = \frac{\partial^{i+j+k} u_n}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}, \quad (17)$$

где  $i, j, k$  – порядки дифференцирования по координатам  $x, y, z$ .

Возможность использования таких СС при разработке КЭ предоставляет пользователю программы полезную альтернативу: либо ограничиться минимальным количеством узлов для стыковки с другими элементами, но увеличить число СС в узлах за счет введения в них сложных типов степеней свободы, либо ограничиться простыми типами СС (например, линейными и угловыми перемещениями), но соответственно увеличить число узлов КЭ.

3. Расширение типов СС в узлах суперэлементов путем введения специальной метки  $m$ , которая позволяет различать степени свободы с одинаковыми наборами параметров  $n, i, j, k$ , но относящиеся к разным элементам, примыкающим к данному узлу. Совокупность параметров  $m, n, i, j, k$  полностью описывает тип СС и в программе упаковывается в целую переменную длиной 2 байта, что позволяет легко сравнивать СС в топологических процедурах. При этом стыковка степеней свободы, принадлежащих одному узлу СЭ, автоматически производится программой только при совпадении указанных типов.

Введение меток в описании СС позволяет в расчетной схеме конструкции делать разрывы между конечными элементами по заданным СС, вводить между элементами упругие или жесткие вставки для моделирования предварительного натяжения арматуры, поддомкрачивание частей конструкции и т.п.

4. Использование коэффициентов ослабления  $Ko$  жесткости элементов для учета дефектов и признаков состояния для КЭ при построении расчетной схемы конструкции, которые могут иметь значения: -1 – выключен, 0 – разрушен, 1 – включен. Данные признаки позволяют поэтапно наращивать конструкцию в процессе возведения или усиления, а также удалять часть элементов при их разрушении или демонтаже при реконструкции.

5. Отсутствие процедур нумерации узлов и элементов в суперэлементе, обычно осуществляемых пользователем. При этом сборка суперэлементов производится в соответствии с задаваемыми координатами КЭ, и узлы различных КЭ автоматически объединяются в один узел только при совпадении их координат. Все воздействия на конструкцию (внешние нагрузки, смещения опор, метка СС, ослабления и изменения состояний КЭ) задаются с помощью координат узлов параллелепипеда, определяющего области этих воздействий.

6. Возможность выбора длины мантиссы вещественных переменных, описывающих векторы неизвестных перемещений и усилий и разрешающие матрицы системы уравнений. Минимальная длина мантиссы соответствует стандартному типу `double`, выбранная длина мантиссы может превышать минимальную в два и более раз.

Данная возможность позволяет выполнять расчеты повышенной точности и контролировать расчеты с обычной точностью при решении задач с плохо обусловленной разрешающей матрицей.

Файловая система исходных данных программного комплекса SERIA состоит из текстовых файлов трех типов, имеющих имена `name1.iss`, `name2.tri`, `name3.trn`. При этом тип файла определяется его расширением, а условные имена `name1`, `name2`, `name3` в частном случае могут совпадать.

Файл `name1.iss` предназначен для описания этапов расчета, на каждом из которых вводятся следующие внешние воздействия на конструкцию или изменения ее расчетной схемы в задаваемых областях:

1) ослабления элементов и (или) изменения их состояния (выключение, разрушение, включение);

- 2) признаки исключения узлов, которые должны быть сконденсированы при формировании матрицы суперэлемента;
- 3) метки для конкретных степеней свободы в КЭ, которые будут учитываться при стыковке областей конструкции;
- 4) метки для конкретных степеней свободы в узлах, попадающих в заданную плоскость, что позволяет моделировать разрывы в конструкции, вводить упругие и абсолютно жесткие вставки и добавлять усилия в этих вставках к вектору неизвестных;
- 5) опорные степени свободы в узлах с назначением метки и признака включения-выключения опор;
- 6) внешние нагрузки в узлах для конкретных степеней свободы;
- 7) смещения опор;
- 8) парные нагрузки в узлах для двух конкретных степеней свободы, позволяющие моделировать натяжение арматуры и поддомкрачивание силовым воздействием;
- 9) длины связей в узлах между двумя конкретными степенями свободы, позволяющие моделировать натяжение арматуры и поддомкрачивание кинематическим воздействием.

В первой строке файла name1.iss указывается имя файла name2.tri, который предназначен для описания исходных данных главного суперэлемента для всей конструкции, включающих в себя размеры конструкции и поперечных сечений ее элементов, характеристики материала, расположение и типы опор, начальные ослабления элементов конструкции, признаки исключения внутренних узлов подчиненных суперэлементов и т.д.

В первой строке файла name2.tri указывается имя файла name3.trn, который представляет собой исходный модуль программы, написанной на упрощенной версии языка Си. Транслятор с этого упрощенного языка встроен в программу SERIA и при чтении файла name2.tri работает в режиме интерпретатора с пошаговой обработкой операторов. Модуль программы файла name3.trn выполняет следующие операции:

- 1) чтение исходных данных для главного суперэлемента из файла name2.tri;
- 2) заполнение массивов, описывающих топологию главного суперэлемента и подчиненных ему СЭ (перечень массивов приведен в комментариях файлов-шаблонов);
- 3) подготовку и запись исходных данных для подчиненных СЭ во внутренние файлы оперативной памяти и имеющие тип, аналогичный name2.tri;
- 4) аналогичную подготовку и запись данных для конечных элементов, если они находятся в прямом подчинении главного суперэлемента.

В процессе чтения исходных данных из начального файла name2.tri и создаваемых в оперативной памяти новых файлов того же типа программа SERIA формирует для них специальные структуры данных, содержащие внутри массивы аналогичных структур для подчиненных суперэлементов. В результате данного процесса создается сложная структура данных, аналогичная строению дерева, в котором «ствол» соответствует суперэлементу всей конструкции, «ветки» – СЭ отдельных частей конструкции, «листья» – простым конечным элементам. Программа SERIA при работе с этими структурами использует рекурсивные вызовы функций, благодаря чему уровень вложенности этих структур ограничен только ресурсами компьютера. При этом движение по дереву СЭ от «ствола» к «листьям» можно назвать «прямым ходом» при обработке данных, от «листьев» к «стволу» – «обратным ходом».

Работа программных комплексов по МКЭ обычно связана с вводом большого объема исходных данных, многие из которых для сложных конструкций приходится многократно повторять. Используемая в программе SERIA система файлов исходных данных позволяет минимизировать объем вводной информации в начальном файле name2.tri, поскольку в процессе чтения и создания описанной выше структуры данных эта информация автоматически повторяется, преобразовывается и генерируется, достигая в конце уровня простых конечных элементов.

Таким образом, файловая система исходных данных программного комплекса SERIA, состоящая из трех типов файлов с расширениями имен iss, tri, trn, предполагает выполнение пользователем трех видов работ.

1. Разработка конечных элементов различной сложности и назначения, составление из них личной библиотеки КЭ.

2. Построение суперэлементов из конечных элементов и подчиненных СЭ, составление из них личной библиотеки СЭ.

3. Подготовка исходных данных для конкретной конструкции, ее расчет и оценка полученных результатов.

Каждый из перечисленных видов работ требует от пользователя соответствующей квалификации, поэтому при работе с программным комплексом SERIA целесообразно разделение труда между специалистами различного профиля.

### **3. Пример поэтапного расчета многопролетного балочного моста по программному комплексу SERIA**

В качестве демонстрационного примера рассчитывалась конструкция автодорожного железобетонного многопролетного неразрезного моста с опорами стоечного типа. Отдельные КЭ и СЭ показаны на рис. 1–5 в перспективной проекции, при этом для большей наглядности изображений элементов они окрашены цветовой гаммой, согласованной с расстоянием до наблюдателя: ближние точки элементов – цветами теплых тонов, дальние точки – цветами холодных тонов.

Конечными элементами расчетной схемы («листьями» дерева суперэлементов) являются стержневые пространственные КЭ с 6-ю СС 4-х типов для дискретизации балок (см. рис. 1) и диафрагм пролетных строений, ригелей и стоек опор. На части изображения элемента балки показана принятая для КЭ продольная и поперечная арматура.

Суперэлементами («ветками» дерева суперэлементов), состоящими только из конечных элементов, являются балки с диафрагмами (см. рис. 2) и крайние (без стоек) и промежуточные опоры (см. рис. 4). Из СЭ балок составляются следующие по старшинству суперэлементы крайних и среднего пролетных строений (см. рис. 3).

Наконец, из СЭ пролетных строений и опор собирается суперэлемент конструкции моста в целом («ствол» дерева суперэлементов) (см. рис. 5).

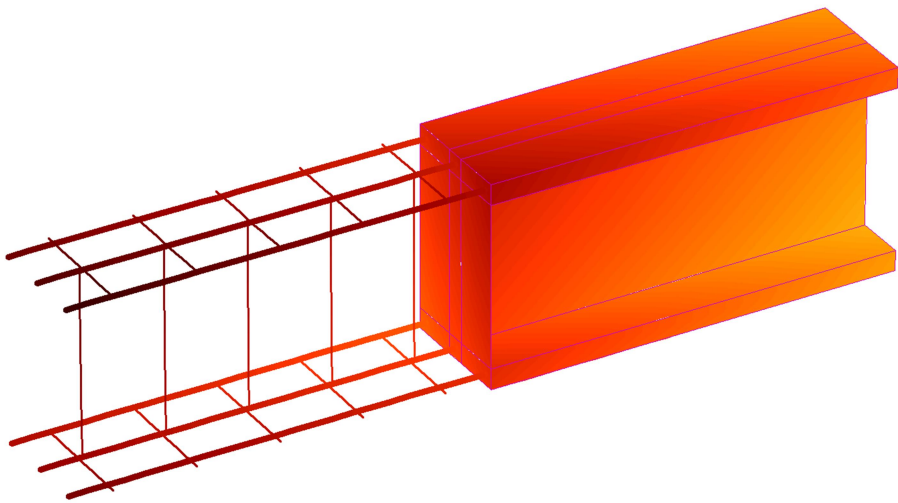
Расчеты выполнялись по четырем этапам и их результаты представлены на рис. 6–12 в виде перспективных изображений моста в деформированном состоянии, при этом элементы окрашены цветовой гаммой, согласованной с их продольными деформациями: растянутые волокна – цветами теплых тонов, сжатые волокна – цветами холодных тонов. На рис. 6, 7, 9, 11 приведены результаты расчета текущего этапа без учета предыдущих этапов, на рис. 8, 10, 12 – то же, с учетом предыдущих этапов.

Были рассчитаны следующие этапы:

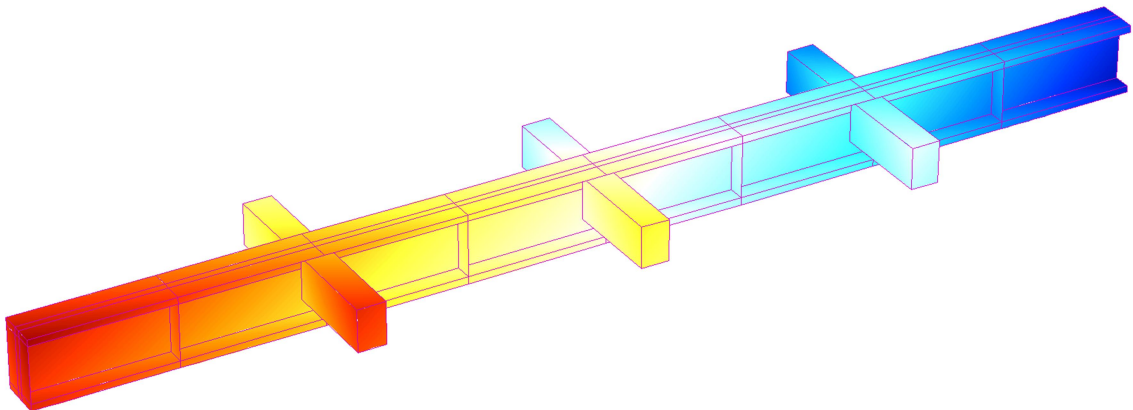
1) приложение вертикальной нагрузки на балки 3, 4 в середине пролета 2;  
2) разрушение поперечных балок по оси моста в пролете 2, которое моделировалось вводом меток для всех степеней свободы в узлах, попадающих в плоскость разреза диафрагм (см. пункт 4 описания разделов файла name1.iss);

3) поддомкрачивание балок 1, 2 над опорой 2, которое осуществлялось путем отделения балок от ригеля в опорных узлах с помощью меток и ввода вертикальных связей (см. пункт 4 файла name1.iss) и задания длин введенных связей на величину поддомкрачивания (см. пункт 9 файла name1.iss);

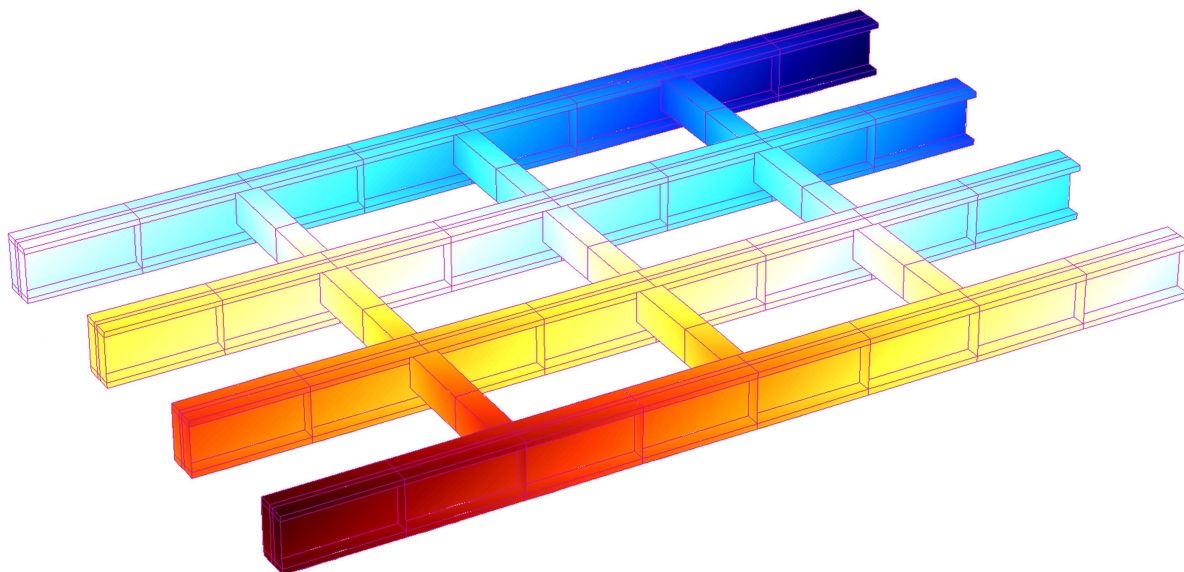
4) разрушение стойки 3 опоры 2 путем полного ослабления одного из КЭ стойки (см. пункт 1 файла name1.iss).



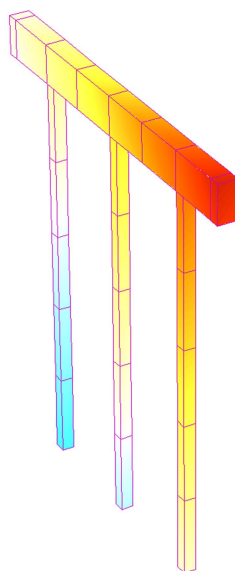
**Рис. 1.** Конечный элемент продольной балки двутаврового поперечного сечения с продольной и поперечной арматурой



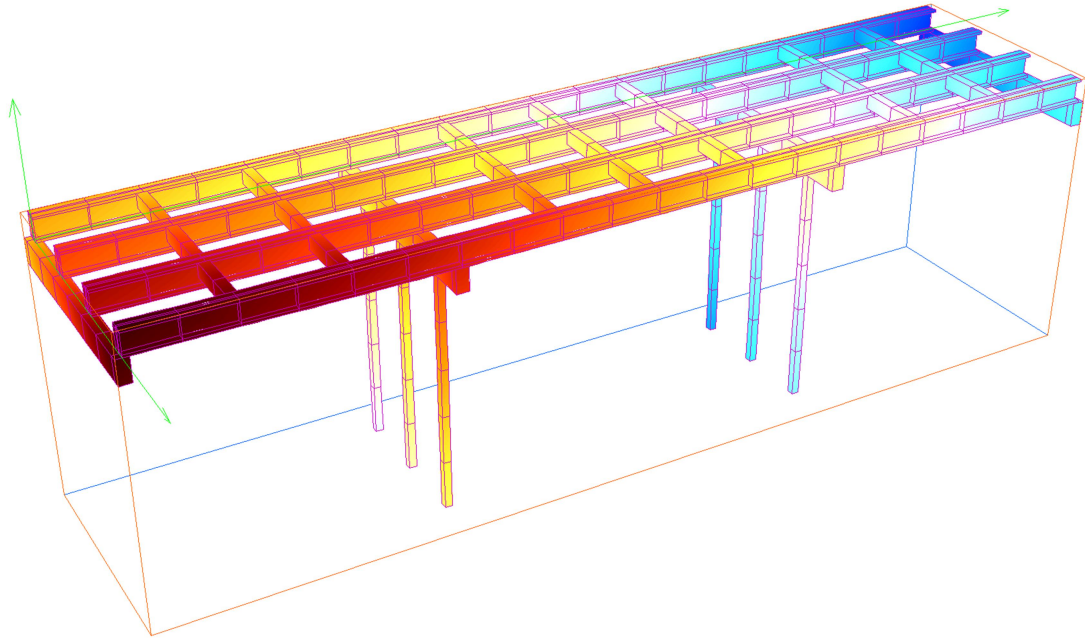
**Рис. 2.** Суперэлемент продольной средней балки с примыкающими элементами поперечных балок



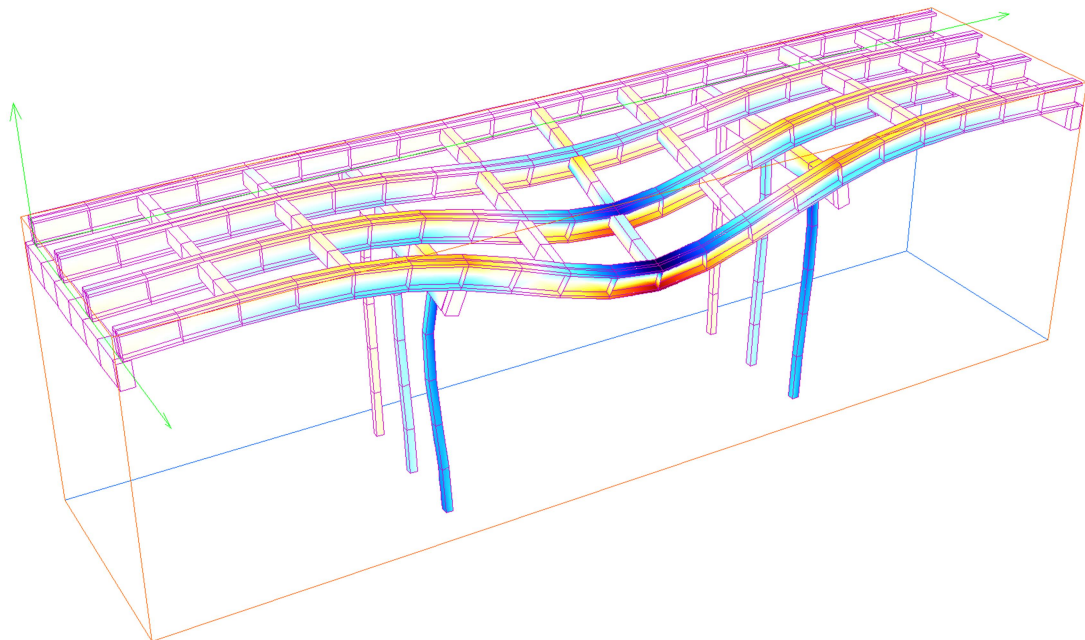
**Рис. 3.** Суперэлемент пролетного строения для пролета 2



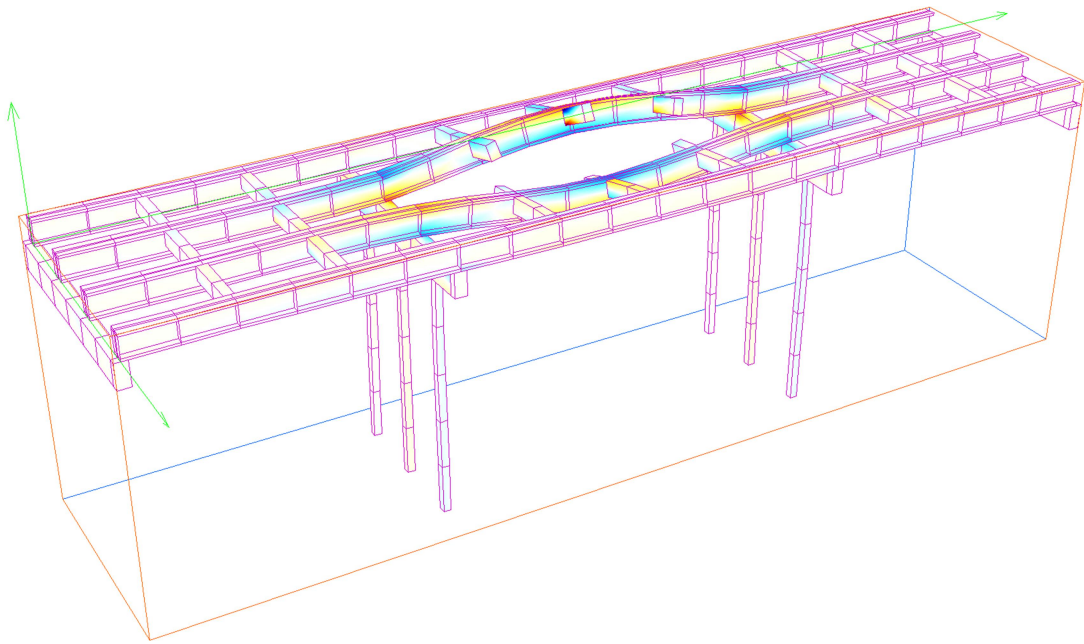
**Рис. 4.** Суперэлемент промежуточной опоры



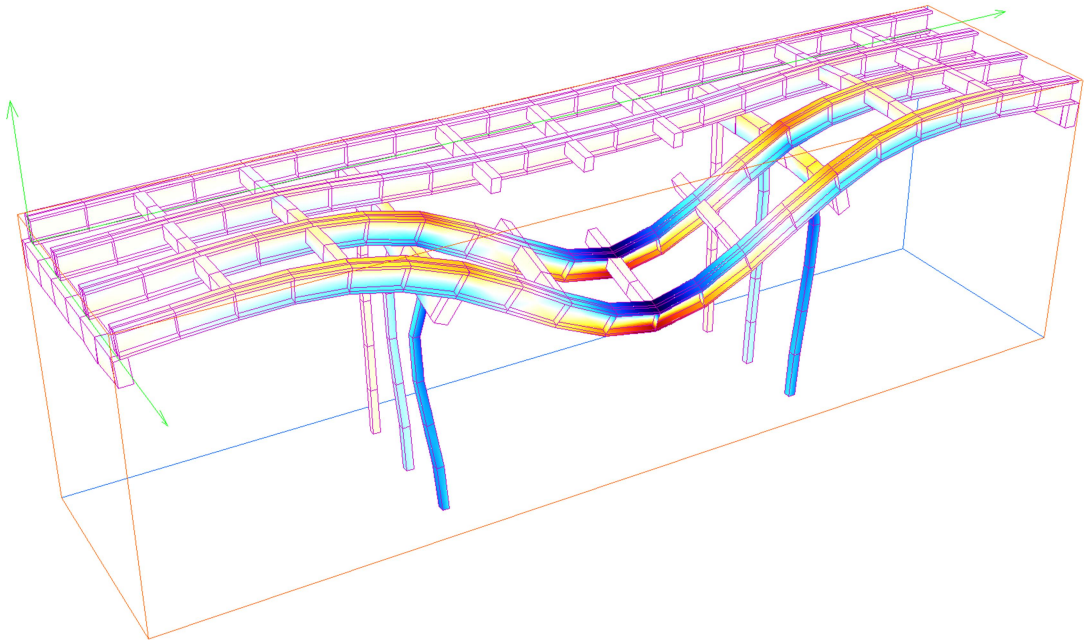
**Рис. 5.** Суперэлемент моста («ствол» дерева суперэлементов)



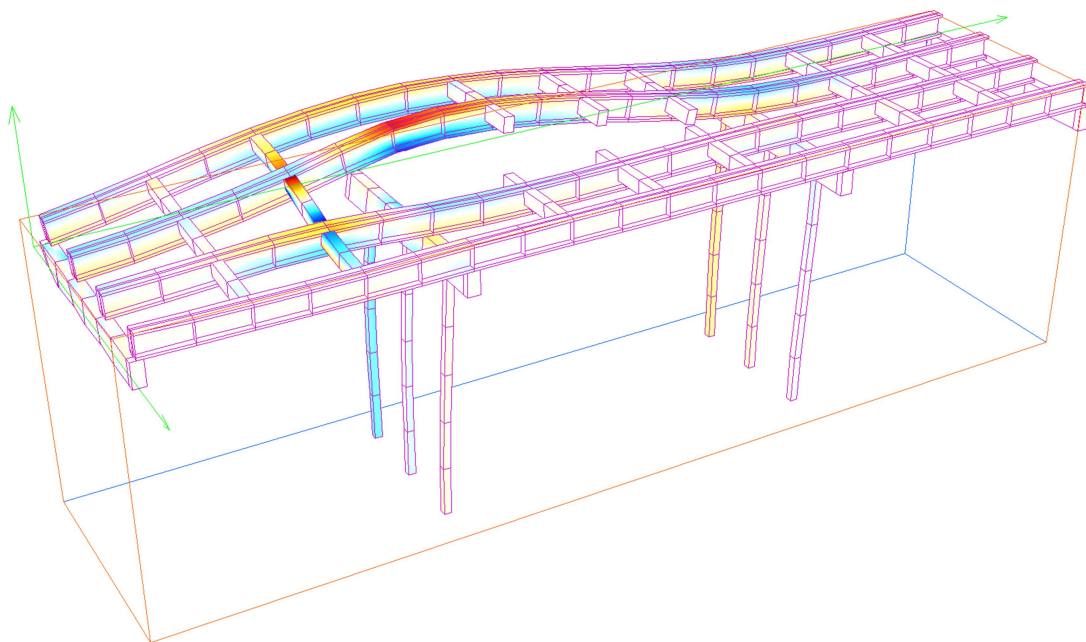
**Рис. 6.** Деформированное состояние моста на этапе 1.  
Этап 1 – вертикальная нагрузка на балки 3, 4 в середине пролета 2



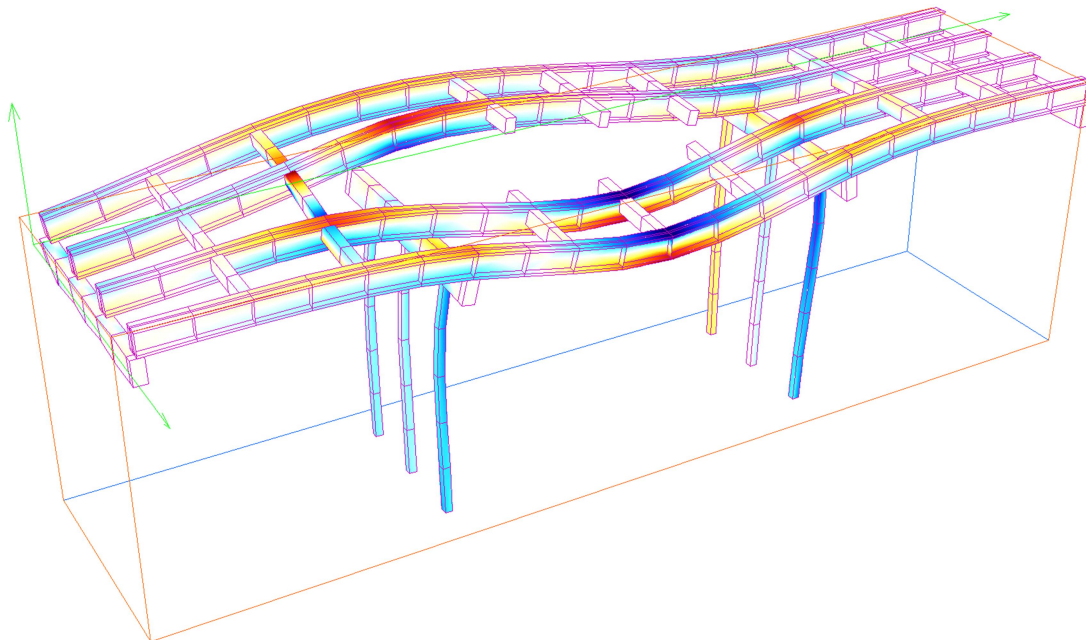
**Рис. 7.** Деформированное состояние моста на этапе 2 без учета предыдущего этапа.  
Этап 2 – разрушение поперечных балок по оси моста в пролете 2



**Рис. 8.** Деформированное состояние моста на этапе 2 с учетом предыдущего этапа

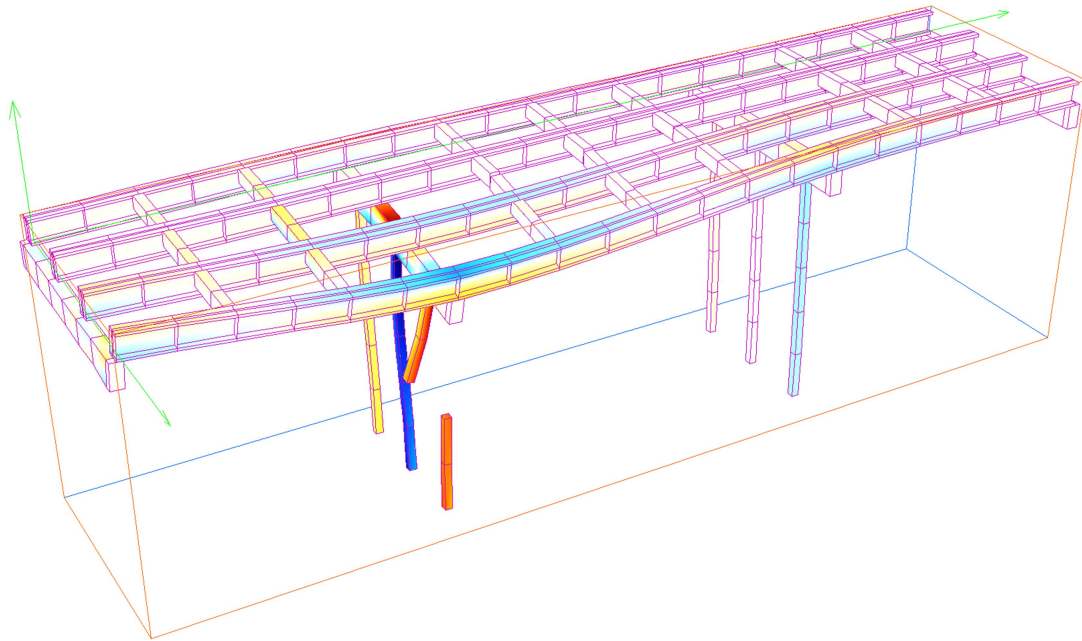


**Рис. 9.** Деформированное состояние моста на этапе 3 без учета предыдущих этапов.  
Этап 3 – поддомкрачивание балок 1, 2 над опорой 2

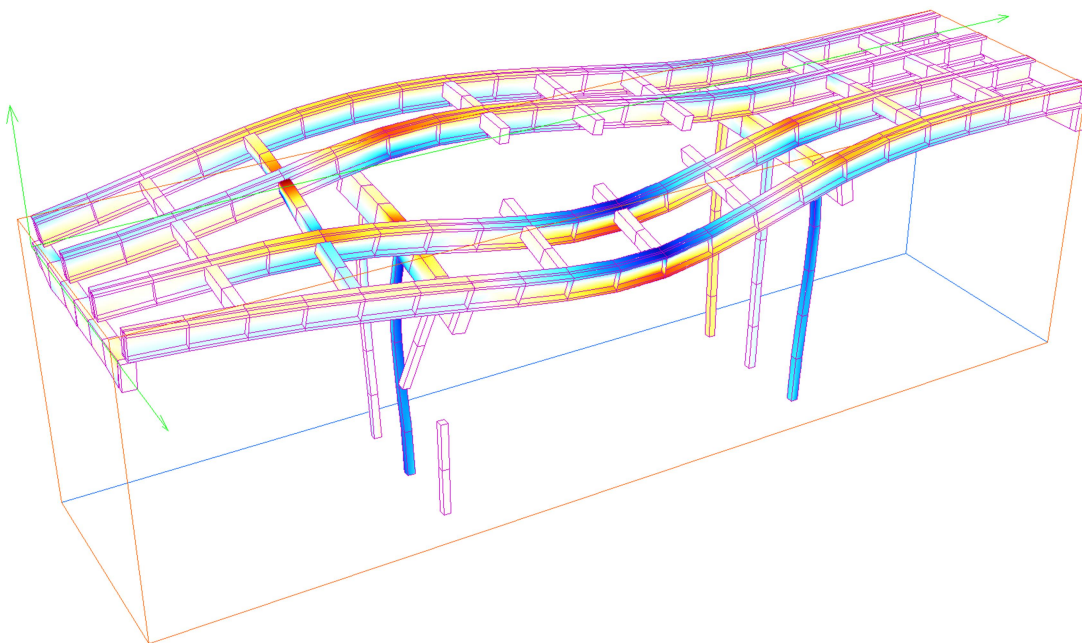


**Рис. 10.** Деформированное состояние моста на этапе 3 с учетом предыдущих этапов





**Рис. 11.** Деформированное состояние моста на этапе 4 без учета предыдущих этапов.  
Этап 4 – разрушение стойки 3 опоры 2



**Рис. 12.** Деформированное состояние моста на этапе 4 с учетом предыдущих этапов

Поскольку рассмотренный пример является демонстрационным и предназначен для иллюстрации различных возможностей программного комплекса SERIA, то численные значения параметров исходных данных задачи и результатов расчета не приводятся.

## Выводы

Разработанный на основе метода суперэлементов в смешанной формулировке программный комплекс SERIA позволяет выполнять поэтапные расчеты строительных конструкций, изменять на каждом этапе топологию конструкции, учитывая при этом добавление, удаление, ослабление или разрушение части конструкции, введение дополнительных связей для моделирования взаимодействия отдельных элементов в виде заданных силовых воздействий или относительных кинематических смещений, характерных при создании предварительного натяжения арматуры, локального поддомкрачивания конструкции и т. д.

Используемая в комплексе специальная файловая система исходных данных предоставляет пользователю возможность разрабатывать собственные конечные элементы нужной формы с заданным порядком аппроксимации и соответствующим набором степеней свободы, создавать из этих элементов свою библиотеку суперэлементов для дальнейшего построения из них более сложных структур.

Перечисленные возможности программного комплекса продемонстрированы на примере поэтапного расчета железобетонного многопролетного неразрезного моста с опорами стоечного типа. Расчеты выполнялись по следующим этапам: приложение вертикальной нагрузки, разрушение стыков отдельных диафрагм, поддомкрачивание части балок над промежуточной опорой, разрушение одной из стоек опор.

## Библиографический список

1. Петреня, Е.Н. Построение конечных элементов сложной формы для дискретизации строительных конструкций / Е.Н. Петреня, А.А. Петранин. // Изв. Вузов. Строительство.- 2004. – №11. – С. 9-16.
2. Сафронов, В.С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных балочных мостов, имеющих дефекты и повреждения / В.С. Сафронов, Е.Н. Петреня, А.А. Петранин. // Изв. Вузов. Строительство. – 1996. – №6. – С. 103-109.

## References

1. Petrenya, E.N. Construction of compound form finite elements for construction structures discretization/ E.N. Petrenya, A.A. Petranin. // Pub. of Institutes. Construction. .- 2004. – №11. – P. 9-16.
2. Safronov, V.S. Super elements calculation in mixed statement of reinforced-concrete beam bridges having defects and damages / V.S. Safronov, E.N. Petrenya, A.A. Petranin // Pub. of Institutes. Construction. – 1996. – №6. – P. 103-109.

**Ключевые слова:** программный комплекс, метод конечных элементов, метод суперэлементов, смешанный метод.

**Key words:** software package, finite elements method, super – elements method, complex method.

УДК 624.04

*Национальный исследовательский университет  
"МЭИ"*

*Д-р физ.-мат. наук, проф.*

*М. Н. Кирсанов*

*Россия, г. Москва, тел.: +7(495)362-73-14*

*e-mail: c216@ya.ru*

*National Research University "MPEI",  
Dr of Math, Professor.*

*M. N. Kirsanov*

*Moscow, Russia, tel.: +7(495)3627314*

*e-mail: [c216@ya.ru](mailto:c216@ya.ru)*

М.Н. Кирсанов

## **ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ БАЛОЧНОЙ ФЕРМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПАНЕЛЕЙ**

Методом индукции в системе компьютерной математики Maple выводится формула для прогиба упругой фермы под действием равномерной и сосредоточенной нагрузки, определяется зависимость смещения подвижной опоры от числа панелей, размеров фермы и нагрузки. Получены формулы для усилий в наиболее сжатом и растянутом стержнях. Находятся предельные и экстремальные характеристики решения.

M. N. Kirsanov

## **FORMULARS FOR DESIGN OF PLANE BEAM GIRDER WITH ARBITRARY NUMBER OF PLANES**

The formula for elastic truss deflection under the affect of even and concentrated load is deduced, displacement of movable support dependence on the number of panels, truss size and load is determined. There were deduced the formulas for stresses in the most compressed and expended bar. The extreme and limit characteristics for decision are found.

На заре развития компьютерной техники численные методы расчета строительных конструкций и, в частности, ферм получили большое развитие. До этого времени усилия в стержнях фермы определялись либо с помощью метода вырезания узлов, либо методом сечений Риттера, а также графически (диаграмма Максвелла - Кремоны). Менее известен метод замены стержней Геннеберга [1]. К сожалению, несмотря на бурное развитие символьной математики и соответствующих пакетов, и в настоящее время еще можно встретить учебники, в которых рекомендуются эти графические методы и расчеты "вручную". Полностью, конечно, отказываться от изучения наследия прошлых веков не стоит, знания простых методов не помешают и в некоторых случаях могут пригодиться просто для проверки каких-либо сложных решений и в учебных целях для уяснения особенностей работы и расчета конструкции. Однако время идет, и с помощью систем компьютерной математики (Maple, Matematica, Maxima, Derive, Axiom, Reduce, Sage и др.) достаточно легко получить не только численное решение, но и формулу. Преимущества формул неоспоримы, однако универсальной формулы для всех ферм не существует, для каждой фермы требуется своя формула. Изменилось число панелей – необходимо получить новую формулу. Вывести формулу для конкретной фермы (пусть и с большим числом стержней), в которой параметрами являются размеры фермы и величина нагрузки, несложно. Такое упражнение можно предложить студенту 1-2 курсов, но получить решение для целого класса подобных ферм, различающихся числом стержней, можно только методом индукции. Метод этот разработан и опробован на ряде конструкций [2-5]. В настоящей работе решена задача о достаточно распространенной ферме с некоторым усложнением – нижний пояс не прямолинейный, введен еще один линейный параметр – высота подъема четных узлов нижнего пояса.

© Кирсанов М.Н., 2016

## 1. Схема и расчет

Рассмотрим балочную ферму на рис. 1. Для расчета усилий в стержнях методом вырезания узлов составим систему уравнений равновесия всех узлов в проекциях на оси координат.

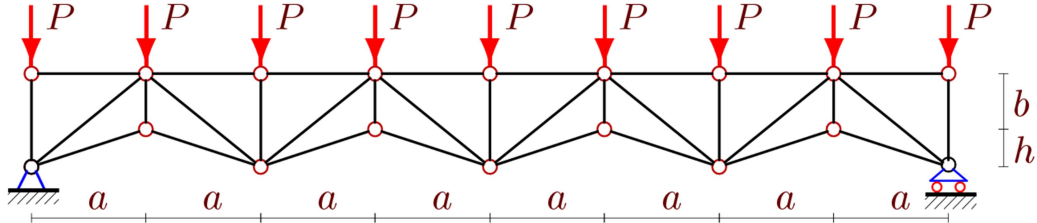


Рис. 1. Ферма при  $n=4$

Начало координат выберем в левой неподвижной опоре. Программа расчета составляется на языке Maple [1]. Для  $n$  панелей число стержней –  $n_s = 8n + 4$ , включая три опорные стержня. Число шарниров вместе с тремя шарнирами, закрепленными на основании,  $m = 4n + 5$ . Зададим координаты узлов, по которым можно будет определить направляющие косинусы усилий, входящие в уравнения равновесия:

$$x_i = a(i - 1), y_i = h(1 + (-1)^i) / 2,$$

$$x_{i+2n+1} = x_i, y_{i+2n+1} = b + h, i = 1, \dots, 2n + 1,$$

Координаты опорных точек:

$$x_{m-2} = -2, y_{m-2} = 0,$$

$$x_{m-1} = 0, y_{m-1} = -1,$$

$$x_m = x_{2n+1}, y_m = -1.$$

Структуру соединения узлов и стержней фермы зададим условными векторами  $\bar{V}_i, i = 1, \dots, n_s$ . Здесь первая компонента – номер шарнира фермы в начале соответствующего стержня, вторая – номер шарнира в его конце. Выбор направления условных векторов-стержней не связан со знаком усилий в них и на результат не влияет. Имеем следующие векторы:

$$\bar{V}_i = [i, i + 1], \bar{V}_{i+2n} = [i + 2n + 1, i + 2n + 2], i = 1, \dots, 2n,$$

$$\bar{V}_{i+4n} = [i, i + 2n + 1], i = 1, \dots, 2n + 1,$$

$$\bar{V}_{i+6n+1} = [2i - 1, 2(i + n) + 1],$$

$$\bar{V}_{i+7n+1} = [2i + 1, 2(i + n) + 1], i = 1, \dots, n,$$

Опорным стержням соответствуют векторы:

$$\bar{V}_{n_s-2} = [1, m - 2], \bar{V}_{n_s-1} = [1, m - 1], \bar{V}_{n_s} = [2n + 1, m].$$

Длины стержней и проекции векторных представлений этих стержней необходимы для вычисления направляющих косинусов:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, l_{1,i} = x_{V_{2,i}} - x_{V_{1,i}}, l_{2,i} = y_{V_{2,i}} - y_{V_{1,i}}, i = 1, \dots, n_s.$$

Первый индекс в номере  $V_{j,i}$  принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора  $\bar{V}_i$ , второй – номеру стержня. Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{G}$  имеет следующие элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,2} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2V_{i,1} - 2 + j, \quad k \leq n_s, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, n_s.$$

Усилия находим из решения системы уравнений

$$\mathbf{G}\bar{S} = \bar{B},$$

(1)

где  $\bar{S} = \{S_1, \dots, S_{n_s}\}$  – вектор усилий в стержнях,  $\bar{B} = \{P_{x,1}, P_{y,1}, \dots, P_{x,n_s}, P_{y,n_s}\}$  – вектор правых частей (внешних нагрузок, приложенных к узлам). Для расчета прогиба фермы используем формулу Максвелла – Мора, выделив составляющую  $\Delta_1$  прогиба за счет деформации стержней нижнего пояса,  $\Delta_2$  – верхнего пояса,  $\Delta_3$  – стоек и  $\Delta_4$  – раскосов решетки. Соответствующие номера имеют и площади сечений стержней:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 =$$

$$= P \sum_{i=1}^{2n} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_1) + \sum_{i=2n+1}^{4n} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_2) + \sum_{i=4n+1}^{6n+1} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_3) + \sum_{i=6n+2}^{n_s-3} S_i^{(P)} S_i^{(1)} l_i / (EF_4).$$

Здесь использованы стандартные обозначения  $S_i^{(1)}$  для усилий от единичной силы, приложенной к середине нижнего пояса (узел  $n+1$ , рис. 2),  $S_i^{(P)}$  – усилия в стержнях от заданной нагрузки и длины стержней  $l_i$ . Жесткости стержней  $EF$  в общем случае разные.

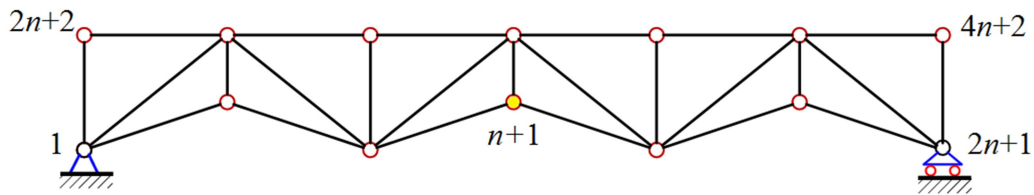


Рис. 2. Нумерация узлов фермы ( $n=3$ )

Методом индукции получаем следующие зависимости:

$$\Phi = (10n^4 + 2n^2(1 - 3(-1)^n) + 3(1 - (-1)^n)) / (24b),$$

$$\Delta_1 EF_1 / P = c^3 \Phi / (2b),$$

$$\Delta_2 EF_2 / P = c^3 (10n^4 + 2n^2(1 + 3(-1)^n) - 3(1 - (-1)^n)) / (48(b+h)^2),$$

$$\Delta_3 EF_3 / P = h^2 \Phi - n^2 h ((-1)^n - 1) / 2,$$

$$\Delta_4 EF_4 / P = g^3 (bh^2 \Phi + n^2 b^2 + bh(2n^2(2 - (-1)^n) - (-1)^n + 1)) / 4 / (2b^2(b+h)^2),$$

$$c = \sqrt{a^2 + h^2}, \quad g = \sqrt{a^2 + (b+h)^2}.$$

Индукция проводилась по 16 фермам с последовательно увеличивающимся числом панелей. Выявлены закономерности образования коэффициентов. Для этого сначала методами компьютерной математики получены рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют характерные коэффициенты. Например, при нахождении  $\Delta_2$  с помощью оператора `rgf_findrecur` было выявлено уравнение, которому удовлетворяет последовательность коэффициентов при  $c^3$  в числителе этой величины:

$$Z_n = 2Z_{n-1} + 2Z_{n-2} - 6Z_{n-3} + 6Z_{n-5} - 2Z_{n-6} - 2Z_{n-7} + Z_{n-8}.$$

Решение уравнения находим, используя оператор **rsolve**. Приведем соответствующий фрагмент программы на языке Maple:

```
> with(genfunc) :
> S:=seq(DELT2[i], i=1..16) ;
> N:=nops([S])/2 ;
> R:=rgf_findrecur(N, [S], Z, n) ;
> simplify(rsolve({R, seq(Z(i)=S[i], i=1..N)}, t)).
```

## 2. Анализ

На рис. 3 приведены кривые, построенные по решению (2) при одинаковых жесткостях стержней. Принята постоянная длина пролета  $L = 2an$  и заданная суммарная нагрузка  $P_s = (2n + 1)P$ . Введен безразмерный прогиб  $\tilde{\Delta} = \Delta EF / (P_s L)$ . Минимум на кривых приходится на 2-4 панели в половине пролета, что при длине пролета 30 м дает длину панели от 3,74 до 7,5 метров.

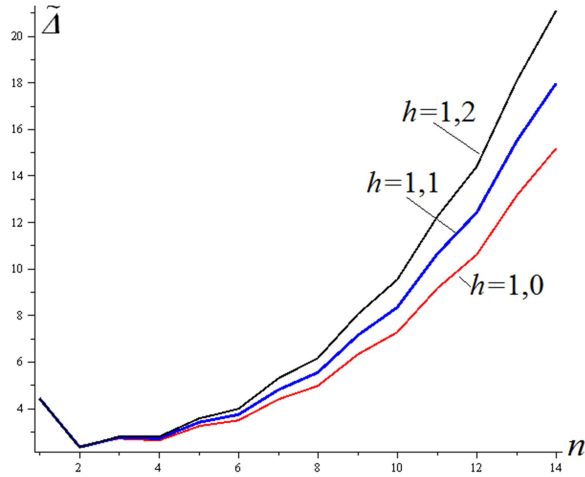


Рис. 3.  $L=30$  м,  $b=3$  м

,0 Если зафиксировать высоту  $H = b + h$  и менять значение  $h$ , то кривая прогиба обнаруживает минимум, приходящийся на отрицательные значения  $h$ . В этом случае нижний пояс прогибается (хотя и незначительно) вниз. Для большого числа панелей (длина пролета фиксирована) оптимальной оказывается ферма с прямолинейным нижним поясом (рис. 4).

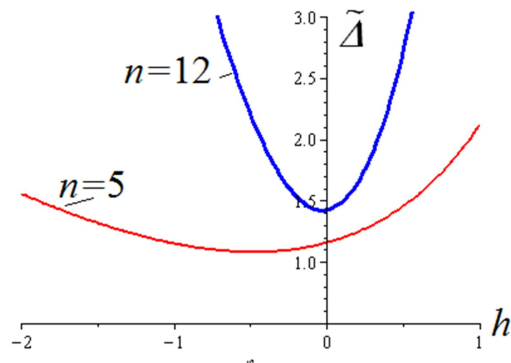


Рис. 4.  $L = 30$  м,  $H = b + h = 5$  м

Средствами Maple с помощью оператора **limit(Delta/n^3,n=infinity)** можно выполнить предельный анализ полученной формулы. Оказывается, что рост прогиба (с прежними предположениями о постоянстве длины пролета и суммарной нагрузке) имеет кубический характер  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\Delta} / n^3 = 5h^2(2h + 3b) / (48b^2L)$ . Эта оценка носит теоретический характер в основном для сравнения подобных характеристик с другими схемами ферм [2].

Для оценки устойчивости конструкции может потребоваться величина усилия в наиболее сжатом стержне. Очевидно, это стержень в середине верхнего пояса. Для вычисления этого значения не обязательно использовать расчет всей системы и метод индукции. Методом Риттера для рассмотренной равномерной нагрузки верхнего пояса получаем величину  $S_{3n} = -P(2n^2 - 1 + (-1)^n)a / (4(b + h))$ . Аналогично наиболее растянутый стержень нижнего пояса в середине пролета имеет усилие  $S_n = P(2n^2 - 1 - (-1)^n)c / (2b)$ .

Еще одной характеристикой работоспособности фермы является величина горизонтального смещения подвижной опоры. В случае  $h=0$  и равномерной нагрузки фермы по верхнему поясу получаем следующее простое выражение:

$$\delta_{horiz} = Pn(1 + 2n^2)a^2 / (3bEF_1).$$

Заметим, что эта величина определяется лишь жесткостью стержней нижнего пояса. Если ферма загружена одной силой, приложенной к среднему узлу нижнего пояса, то

$$\delta_{horiz} = Pn(1 + 2n^2 - (-1)^n)a^2 / (4bEF_1).$$

Вертикальный прогиб от действия одной силы, приложенной к среднему узлу верхнего пояса, вычисляется по формуле

$$\Delta EF / P = n(a^3(1 + 2n^2) / 3 + c^3) / (2b^2).$$

Последовательность, из которой можно выявить закономерность в случае действия одной силы, получается короче. Требуется проанализировать решения восьми ферм. Проверка решения выполняется при произвольном числе панелей в численной моде программы, которая работает существенно быстрее. Интересно заметить, что скорость нарастания прогиба здесь линейная

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta / n = b / (2L).$$

## Выводы

Метод индукции позволил получить точное решение для задачи о прогибе фермы с произвольным числом панелей. Искривленный нижний пояс фермы внес существенное усложнение в решение. В частности, по сравнению с большинством других подобных решений [2-5] потребовалось построить последовательность решений, которые приводят к усложнению расчетных выражений. Обнаружены экстремальные и предельные характеристики решения. В практике они могут быть использованы для оптимизации проектируемых систем.

## Библиографический список

1. Кирсанов, М.Н. Maple и Maplet. Решения задач механики / М.Н. Кирсанов. – СПб.: изд-во Лань, 2012. – 512 с.
2. Кирсанов, М.Н. Точные формулы для расчета прогиба и усилий в стержнях типовой фермы «Молодечно» с произвольным числом панелей / М.Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. - 2016.- №1(61). - С. 33–41.

3. Тиньков, Д.В. Анализ влияния условий закрепления на прогиб плоской балочной фермы с нисходящими раскосами / Д.В. Тиньков. // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М.: Инфра-М. - Т. 1. - 2015. - С. 52-56.
4. Тиньков, Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций / Д.В. Тиньков. // Инженерно-строительный журнал. - 2015.- №5(57). - С. 66–73.
5. Ахмедова, Е.Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой / Е.Р. Ахмедова. // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. – М.: Инфра-М. - Т. 1. - С. 62-65.

#### References

1. Kirsanov, M.N. Maple and Maplet. Solutions of mechanics problems./ M.N. Kirsanov - SPb.: Publishing house LAN, 2012. 512 p.
2. Kirsanov, M.N. The exact formulas for calculating of deflection and stresses in model truss "Molodechno" rods with an arbitrary number of panels/ M.N. Kirsanov // Civil Engineering.journal 2016. No. 1(61). P. 33-41.
3. Tin'kov, D.V. Analysis fixation conditions affect on deflection of plane beam truss with downward diagonals / D.V.Tinkov// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. Vol. 1. 2015. P. 52-56.
4. Tin'kov, D.V. Comparative analysis of analytical solutions of truss structures deflection problem // journal of civil Engineering. 2015. No. 5(57). P. 66-73.
5. Akhmedova, E.R. Analytical calculation of on deflection of plane beam truss with strut lace// Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. M: Infra-M. Vol. 1. P. 62-65.

**Ключевые слова:** плоская балочная ферма, прогиб фермы, горизонтальное смещение подвижной опоры фермы, метод индукции.

**Key words:** plane beam truss, truss deflection, horizontal travelling of truss movable support, method of induction.



УДК 539.3:624.04

Орловский государственный университет  
Канд. техн. наук, доц. кафедры  
строительных конструкций и материалов  
А.А. Черняев  
Россия, г. Орел, тел.: 8(4862)73-43-95  
email: Chernyev87@yandex.ru

Orel State University  
PhD of Tech. Sc., Associate Prof. of Department  
of Building Structures and Materials  
A. A. Chernyaev  
Orel, Russia, tel.:8(4862)734395  
email: Chernyev87@yandex.ru

А.А. Черняев

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРАВИЛЬНЫХ N-УГОЛЬНЫХ, ТРЕУГОЛЬНЫХ И РОМБИЧЕСКИХ ШАРНИРНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФОРМНЫХ РАДИУСОВ

Для определения основной частоты собственных изгибных колебаний правильных n-угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых упругих изотропных пластин предлагается использовать приближенную зависимость, единую для всех указанных пластин. Зависимость построена на основе некоторых частных точных и приближенных решений, представленных в зависимости от отношения внутреннего конформного радиуса к внешнему. Она основана на возможности представления площади указанных фигур через конформные радиусы, известные из теории конформного отображения.

A. A. Chernyaev

## DEFINITION OF BASIC FREQUENCY OF NATURAL BENDING VIBRATIONS OF REGULAR N-ANGLED, THREE-ANGLED AND RHOMBIC HINGED HALF-BEAMS WITH APPLICATION OF CONFORMAL RADIUS

For definition of basic frequency of natural bending vibrations of regular N-angled, three-angled and rhombic hinged elastic isotropic half-beams there is proposed to use an approximate dependence common for the mentioned half-beams. The dependence is constructed on the basis of some particular exact and approximate solutions presented in inner conformal radius ratio to external. It is based on the possibility of the mentioned figures presentation by conformal radius, known from the theory of conformal mapping.

### Введение

В работах [1, 2] рассматривалась задача поперечного изгиба круглых, правильных n-угольных, произвольных треугольных и ромбических упругих изотропных пластинок с шарнирным либо жестко защемленным контуром, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки. Задача исследовалась с позиции геометрических методов строительной механики, при этом использовался новый аргумент – безразмерная геометрическая характеристика формы плоской области (области пластинки) – отношение внутреннего конформного радиуса к внешнему [3]. В этих работах была установлена одна закономерность: максимальные прогибы для пластинок рассматриваемых форм, представленные в зависимости от отношения конформных радиусов, вырождаются в единые кривые. Эта закономерность основана на возможности представления площади  $A$  рассматриваемых форм пластинок через внутренний  $\bar{r}$  и внешний  $\bar{R}$  конформные радиусы [4]:

$$A = \pi \bar{r} \bar{R}. \quad (1)$$

На основе известной математической аналогии задач поперечного изгиба и свободных колебаний пластин [5] следует ожидать, что аналогичная закономерность может быть обнаружена и для задачи свободных колебаний пластин. В настоящей статье рассматривается случай шарнирного опирания по контуру.

## Исследование закономерности

Приведем в колонке 1 таблицы значения отношения конформных радиусов для рассматриваемых форм пластинок, взятых из работ [1, 2], а в колонке 2 – известные в справочной литературе значения основной частоты колебаний и полученные МКЭ (с числом КЭ не менее 500) в программе «SCAD». Значения частоты колебаний  $\omega_0$  приведем к общему виду:

$$\omega_0 = k_\omega \frac{\sqrt{D/m}}{A}, \quad (2)$$

где  $k_\omega$  – коэффициент пропорциональности (численное значение), зависящий от формы пластинки и ее граничных условий, представляет значение частоты в общем виде;  $A$  – площадь пластинки;  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $m$  – масса единицы площади пластинки.

На основании табличных данных (колонки 1, 2) отложим в координатной плоскости  $k_\omega - \dot{r}/\bar{r}$  значения основной частоты колебаний  $k_\omega$  на рисунке. Для удобства на рисунке приведены обратные значения  $k_\omega$ .

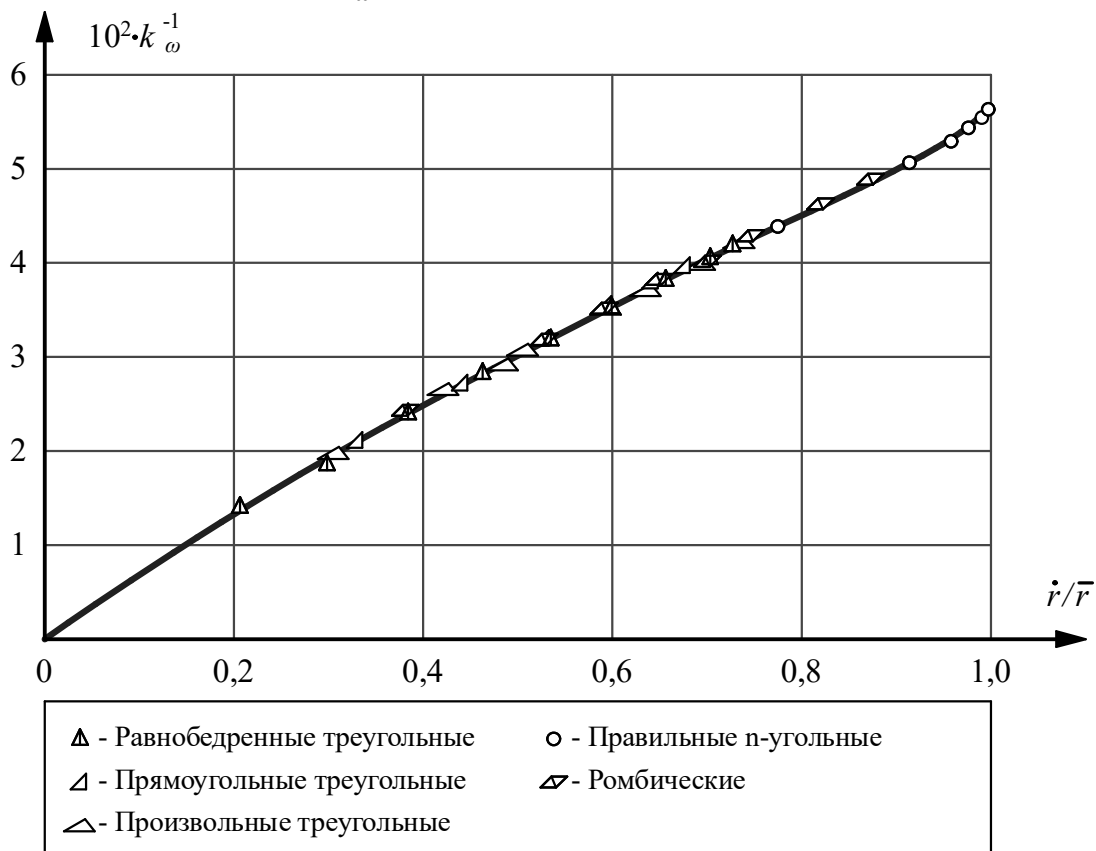


Рис. Единая кривая «основная частота колебаний  $k_\omega$  – отношение конформных радиусов  $\dot{r}/\bar{r}$ »

Из рисунка видно, что все множество значений  $k_\omega$  для рассматриваемого множества форм пластинок вырождаются в единую кривую. Воспользуемся аппроксимирующей программой «TableCurve» и получим по данным таблицы (колонки 1, 2) приближенное выражение:

$$k_\omega = \frac{1 + 10,52(\dot{r}/\bar{r})^2 - 0,25437(\dot{r}/\bar{r})^4}{0,38104(\dot{r}/\bar{r})^2 + 0,24668(\dot{r}/\bar{r})^4}. \quad (3)$$

Таблица

Сопоставление значений основной частоты колебаний шарнирно опертых пластинок со значениями, найденными по единой функции (3)

Геометрические параметры пластинок	Отношение конформных радиусов $\dot{r}/\bar{r}$	Известные значения основной частоты колебаний пластинок (2)			Значения, подч. по (3)	$\Delta$ , %
		$k_{\omega}$	$k_{\omega}^{-1}$	источник		
Правильные n-угольные пластинки						
20 - угольник	0,9994	17,952	0,05570	[МКЭ]	17,958	0,03
16 - угольник	0,9988	17,821	0,05813	[МКЭ]	17,969	0,83
10 - угольник	0,9951	17,922	0,05618	[МКЭ]	18,036	0,64
8 - угольник	0,9903	18,04	0,05543	[МКЭ]	18,124	0,46
6 - угольник	0,9762	18,394	0,05437	[5]	18,384	-0,05
5 - угольник	0,9579	18,895	0,05292	[МКЭ]	18,730	-0,87
4 - угольник	0,9139	19,739	0,05066	[5]	19,597	-0,72
3 - угольник	0,7748	22,792	0,04388	[5]	22,741	-0,22
Равнобедренные треугольные пластинки						
$\alpha = 80^{\circ}$	0,5308	31,153	0,03210	[МКЭ]	31,068	-0,27
$\alpha = 70^{\circ}$	0,7270	23,866	0,04190	[МКЭ]	24,007	0,59
$\alpha = 60^{\circ}$	0,7748	22,792	0,04388	[5]	22,741	-0,22
$\alpha = 50^{\circ}$	0,7411	23,585	0,04240	[МКЭ]	23,621	0,15
$\alpha = 40^{\circ}$	0,6556	26,178	0,03820	[МКЭ]	26,151	-0,10
$\alpha = 30^{\circ}$	0,5342	31,350	0,03190	[5]	30,905	-1,42
$\alpha = 20^{\circ}$	0,3837	41,667	0,02400	[МКЭ]	41,391	-0,66
Прямоугольные треугольные пластинки						
$\alpha = 45^{\circ}$	0,7034	24,674	0,04053	[5]	24,678	0,02
$\alpha = 40^{\circ}$	0,6970	24,752	0,04040	[МКЭ]	24,866	0,46
$\alpha = 30^{\circ}$	0,6436	26,589	0,03761	[5]	26,549	-0,15
$\alpha = 20^{\circ}$	0,5284	31,546	0,03170	[МКЭ]	31,185	-1,14
$\alpha = 10^{\circ}$	0,3309	48,031	0,02082	[МКЭ]	48,095	0,13
Произвольные треугольные пластинки						
$\alpha = 60^{\circ}, \beta = 45^{\circ}$	0,7459	23,502	0,04255	[МКЭ]	23,493	-0,04
$\alpha = 40^{\circ}, \beta = 80^{\circ}$	0,7196	23,892	0,041855	[МКЭ]	24,214	1,35
$\alpha = 30^{\circ}, \beta = 70^{\circ}$	0,6528	26,045	0,038395	[МКЭ]	26,243	0,76
$\alpha = 30^{\circ}, \beta = 45^{\circ}$	0,6087	27,414	0,036478	[МКЭ]	27,781	1,34
$\alpha = 20^{\circ}, \beta = 60^{\circ}$	0,5205	32,02	0,03123	[МКЭ]	31,577	-1,38
$\alpha = 20^{\circ}, \beta = 50^{\circ}$	0,5064	32,02	0,03123	[МКЭ]	32,308	0,90
$\alpha = 20^{\circ}, \beta = 30^{\circ}$	0,4462	36,21	0,027617	[МКЭ]	36,015	-0,54
$\alpha = 15^{\circ}, \beta = 45^{\circ}$	0,4215	38,025	0,026298	[МКЭ]	37,902	-0,32
$\alpha = 10^{\circ}, \beta = 50^{\circ}$	0,3204	50,236	0,019906	[МКЭ]	49,796	-0,88
Ромбические пластинки						
$\alpha = 90^{\circ}$	0,9139	19,739	0,05066	[5]	19,597	-0,72
$\alpha = 80^{\circ}$	0,9036	19,810	0,05048	[МКЭ]	19,808	-0,01
$\alpha = 70^{\circ}$	0,8724	20,329	0,04919	[МКЭ]	20,465	0,67
$\alpha = 60^{\circ}$	0,8199	21,626	0,04624	[5]	21,644	0,08
$\alpha = 50^{\circ}$	0,7457	23,358	0,04324	[МКЭ]	23,498	0,60
$\alpha = 40^{\circ}$	0,6487	26,268	0,03864	[МКЭ]	26,378	0,42
$\alpha = 30^{\circ}$	0,5277	30,972	0,03252	[МКЭ]	31,219	0,80
$\alpha = 20^{\circ}$	0,3807	41,289	0,02462	[МКЭ]	41,706	1,01

## Выводы

1. Значения основной частоты колебаний для правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок, представленные как функции отношения внутреннего конформного радиуса к внешнему, имеют погрешность, не превышающую 2 %.

2. Шарнирно опертые пластинки рассматриваемых форм, имеющие одинаковое значение отношения конформных радиусов, имеют и приближенно одинаковую величину основной частоты колебаний.

## Библиографический список

1. Коробко, В.И. Определение максимального прогиба при поперечном изгибе круглых, правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических жестко защемленных пластинок с использованием отношения конформных радиусов / В.И. Коробко, А.А. Черняев // Строительная механика и конструкции. – 2011. – №2. – С. 53-61.
2. Черняев, А.А. Определение максимального прогиба при поперечном изгибе правильных  $n$ -угольных, треугольных и ромбических шарнирно опертых пластинок с использованием отношения конформных радиусов / А.А. Черняев // Строительная механика и конструкции. – 2015. – Т.1. – №10. – С. 33-36.
3. Коробко, В.И. Отношение конформных радиусов – новый аргумент геометрических методов решения двумерных задач теории упругости / В.И. Коробко, А.А. Черняев // Вестник отделения строительных наук РААСН. – 2012. – Вып. 16. – Т. 1. – С. 149-161.
4. Поля, Г. Изопериметрические неравенства в математической физике [пер. с англ.] / Г. Поля, Г. Сеге. – 2-е изд., стереотипное. – М.: КомКнига, 2006. – 336 с.
5. Коробко, В.И. Строительная механика пластинок: Техническая теория / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: Спектр, 2010. – 410 с.

## References

1. Korobko, V.I. Definition of maximum deflection at a cross-section bend of circular, correct  $n$ -angled, triangular and rhombic rigidly restrained plates with use of conformal radiuses dependence / V.I. Korobko, A.A. Chernyaev // Structural Mechanic and structures. – 2011. – №2. – P. 53-61.
2. Chernyaev, A.A. Definition of maximum deflection at a cross-section bend of regular  $n$ -angled, triangular and rhombic hinged plates with use of conformal radiuses dependence / A.A. Chernyaev // Structural Mechanic and structures. – 2015. – №10. – P. 33-36.
3. Korobko, V.I. Conformal radiuses dependence – new argument of geometrical methods of theory of elasticity two-dimensional problems solution. / V.I. Korobko, A.A. Chernyaev // Bulletin construction sciences department RAASN. – 2012. – Iss. 16. – Vol. 1. – P. 149–161.
4. Polya, G. Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics [translation from English] / G.Polya, G.Sege. – 2 essue., stereotypic – M: KomKniga, 2006. – 336 p.
5. Korobko, V.I. Building mechanics of plates: Technical theory / V.I. Korobko, A.V. Korobko. – M.: Spectr, 2010. – 410 p.

**Ключевые слова:** пластинки, шарнирное опирание, свободные колебания, основная частота, конформные радиусы.

**Key words:** half-beam, hinged support, free vibrations, basic frequency, conformal radiuses.

..

УДК 620.10:620.17  
Воронежский государственный  
архитектурно-строительный университет  
Канд.техн.наук, проф. кафедры  
строительной механики  
А.Н. Синозерский  
Ст. преп. кафедры строительной механики  
Р.А. Мухтаров  
Студентка группы М11  
института магистратуры  
А.В. Козлова  
Россия, г. Воронеж, тел.: +7-910-245-16-18  
e-mail: sviryu\_93@mail.ru

Voronezh State University of Architecture and  
Civil Engineering  
PhD of Tech. Sc., Professor of department  
of Structural Mechanics  
A.N. Sinozersky  
Lecturer of department of Structural  
Mechanics R. A. Mukhtarov  
Undergraduate of group M11  
A.V. Kozlova  
Voronezh, Russia, tel.: +7-9102451618  
e-mail: sviryu\_93@mail.ru

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров, А.В. Козлова

### ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ СО СТАНДАРТНОЙ СКОРОСТЬЮ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА

Предложена методика определения условных деформаций, напряжений и разрушающих усилий внецентренно сжимаемых коротких стержней из мелкозернистого бетона при относительных эксцентриситетах, не превосходящих ядрового. Отклонение расчётной нагрузки от средней опытной составляет менее 1 %.

A.N. Sinozersky, R. A. Mukhtarov, A.V. Kozlova

### ASSESSMENT OF DEFLECTED MODE OF ECCENTRICALLY COMPRESSED WITH STANDARD VELOCITY PRISMS FROM FINE CONCRETE

The methodology of conditional deformation, tension and breaking strengths of eccentric-compressed bars from fine concrete at eccentricity, not exceeded core ones. Design load deviation from average trial load is less than 1 %.

#### Введение

По результатам испытаний элементов квадратного поперечного сечения  $b=h=0,10$  м длиной  $L=0,40$  м из мелкозернистого бетона в возрасте 28 суток установлены при центральном сжатии с постоянными относительными скоростями нагружения  $\dot{\theta}$  [1]:

зависимость напряжений  $\sigma$  от деформаций  $\varepsilon$  (сплошная линия на рис. 1)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha(\dot{\theta}) \cdot (\varepsilon)^{\beta(\dot{\theta})} \quad (1)$$

с экстремальными – призмическим пределом прочности

$$\sigma_u(\dot{\theta}) = 28,38 - \frac{7,758}{1 + \lg(1 + 895,6 \cdot \dot{\theta})} \quad (2)$$

и деформацией

$$\varepsilon_u(\dot{\theta}) \cdot 10^6 = 904 + \frac{1982}{1 + 2,225 \cdot (\dot{\theta})^{0,200}} ; \quad (3)$$

модулем упругости материала –  $E=31390$  МПа; (4)

параметрами –

$$\beta(\dot{\theta}) = \frac{E \cdot \varepsilon_u(\dot{\theta})}{E \cdot \varepsilon_u(\dot{\theta}) - \sigma_u(\dot{\theta})}, \quad (5)$$

$$\alpha(\dot{\theta}) = \frac{E}{\beta(\dot{\theta}) \cdot (\varepsilon_u(\dot{\theta}))^{\beta(\dot{\theta})-1}}. \quad (6)$$

Для рассматриваемой в дальнейшем стандартной скорости [2]

$$\dot{F} = F/t = 0,3923 \text{ МН} \cdot \text{с}^{-1} = \text{const}$$

или относительной

$$\dot{\theta} = F/b \cdot h \cdot t \cdot \dot{\sigma}_{1,00} = 0,392$$

с  $\dot{\sigma}_{1,00} = 1,00 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$  будем иметь:

по (2) -  $\sigma_u = 26,19 \text{ МПа}$ ;

по (3) -  $\varepsilon_u = 1601 \cdot 10^{-6}$ ; (7)

по (5) -  $\beta = 2,0883$ ;

по (6) -  $\alpha = 16575200 \text{ МПа}$  (8)

и зависимость (1) в виде –

$$\sigma = 31390 \cdot \varepsilon - 16575200 \cdot (\varepsilon)^{2,0883}. \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем все компоненты тензора напряжений кроме  $\sigma_x = \sigma$  принимаются равными нулю, а сжимающие  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ , усилия внешние  $F$  и внутренние  $N$  – по модулю.

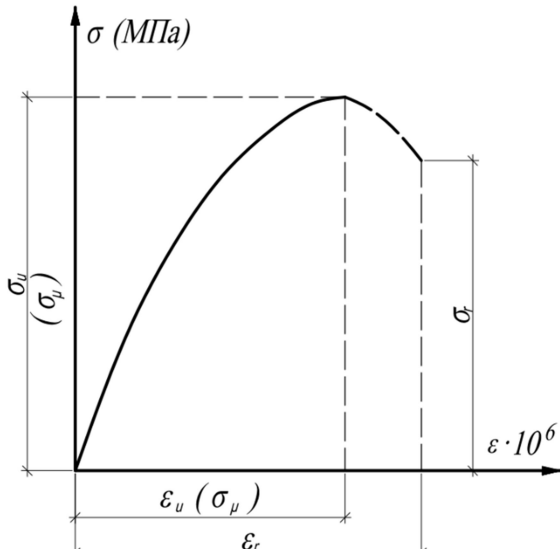


Рис. 1. График «σ-ε» при центральном сжатии

Влияние сил инерции и гибкости на результаты расчёта исключается.

При внецентренных воздействиях равнодействующая  $F$  задается в точке  $f$  (рис. 2) с координатами  $y_f, z_f = 0$ .

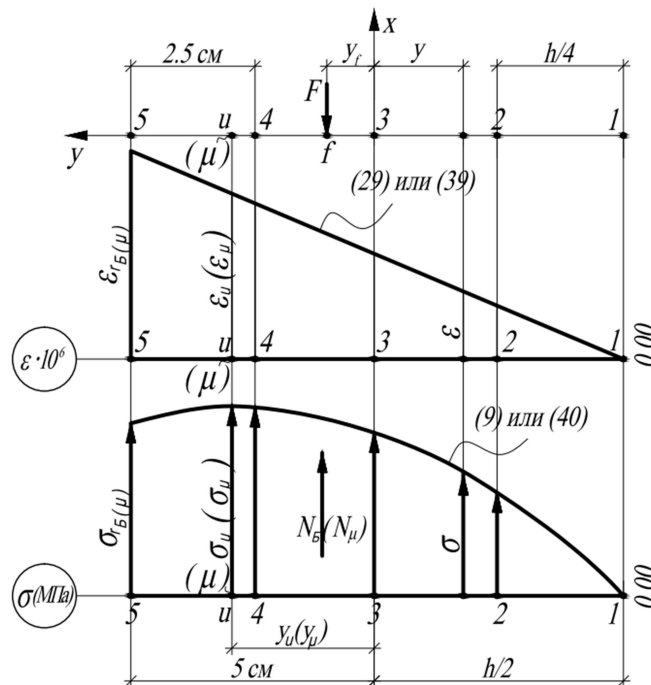


Рис. 2. НДС при внецентренных воздействиях

Предварительно для исследования НДС назначаем:

относительный эксцентриситет  $e_{(\pi)} = y_f(\pi)/h$  в приближении  $\pi = 1, 2, \dots, \text{яс}$ ;

напряжения (9) с деформациями на уровне “у”

$$\varepsilon(\pi) = B(\pi) \cdot (y - 0.5 \cdot h) + \varepsilon_r(\pi), \quad (10)$$

где  $B(\pi)$  – параметр функции (10),  $\text{м}^{-1}$ ;  $\varepsilon_r(\pi)$  – наибольшая деформация в сечении, определяемая по формуле

$$\varepsilon_r(\pi) = \varepsilon_u \cdot r(\pi); \quad (11)$$

$r(\pi) > 1$  – коэффициент увеличения  $\varepsilon_r(\pi)$  по сравнению с  $\varepsilon_u$  (см.(7)) по причине неоднородного напряженного состояния.

Считаем материал одинаково сопротивляющимся сжатию и растяжению. В последнем случае  $\varepsilon < 0$  и  $\sigma < 0$ , а в расчетных формулах выражения

$$(\varepsilon_r - B \cdot h)^\beta, (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+1}, (\varepsilon_r - B \cdot h)^{\beta+2} \quad (12)$$

заменяем соответственно на

$$(B \cdot h - \varepsilon_r)^\beta, (B \cdot h - \varepsilon_r)^{\beta+1}, (B \cdot h - \varepsilon_r)^{\beta+2}. \quad (13)$$

Интегральные уравнения равнодействующей  $N(\pi)$  и момента  $M_z(\pi)$  внутренних сил, включая разность  $M_z(\pi) - N(\pi) \cdot y_f = \Phi(\pi)$  [3], содержат показатели  $B(\pi)$ ,  $\varepsilon_r(\pi)$ . Вычисление максимального усилия  $N_B(\pi)$  и характеристик  $r_B(\pi)$ ,  $\varepsilon_{r_B}(\pi)$ ,  $B_B(\pi)$ , называемых **базовыми**, проводим численными способами.

Поставим задачу найти эксцентриситет ядрового состояния  $e(\text{яс})$ , для которого удовлетворяется условие

$$|\varepsilon_1(\text{яс})| \leq 5 \cdot 10^{-8}, \quad (14)$$

### 1. Базовое ядровое состояние

Выполняем расчет при  $e(\pi)$ , руководствуясь указаниями [3] и принимая:

$$\left. \begin{array}{l} \text{шаг} \quad \Delta = 0,05 \\ \text{коэффициенты увеличения} \quad r_m = 1 + m \cdot \Delta, \\ \text{где, например,} \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, k, k+1; \\ \text{или} \quad m = 0,2; 1,2; 2,2; \dots; k=6,2; k+1=7,2; \end{array} \right\} \quad (15)$$

и т.п.

Задаваясь  $r_m$ , определяем параметр  $B_m(\pi)$ , при котором удовлетворяется условие

$$\Phi[B_m(\pi)] = |M_{zm}(\pi) - N_m(\pi) \cdot y_f| \leq 1 \cdot 10^{-9} \text{ МН} \cdot \text{м}. \quad (16)$$

$$\text{В случае } m=k \quad N_{k-2}(\pi) < N_{k-1}(\pi) > N_k(\pi), \quad (17)$$

в интервале  $[k-2, k]$  имеет место экстремум функции  $N_m(e_\pi) - r_m$ , для вычисления соответствующих показателей которого привлекаем квадратичную интерполяцию [4], полагая

$$N_m(e_\pi) = A_0 + A_1 \cdot u + A_2 \cdot u^2, \quad (18)$$

при независимой безразмерной переменной

$$u = (r - r_{k-2})/\Delta \quad (19)$$

с узловыми значениями  $u=0, 1, 2$  и коэффициентами

$$A_0 = N_{k-2}, \quad A_1 = 0.5 \cdot (-3 \cdot N_{k-2} + 4 \cdot N_{k-1} - N_k), \quad A_2 = 0.5 \cdot (N_{k-2} - 2 \cdot N_{k-1} + N_k). \quad (20)$$

Далее находим:

$$\text{положение экстремума } u_3(e_\pi) = -\frac{A_1}{2 \cdot A_2}, \quad (21)$$

$$\text{максимальное усилие } \max N(e_\pi) = A_0 + A_1 \cdot u_3(e_\pi) + A_2 \cdot [u_3(e_\pi)]^2, \quad (22)$$

$$\text{коэффициент увеличения } r(\pi) = r_{k-2}(\pi) + \Delta \cdot u_3(e_\pi), \quad (23)$$

$$\text{деформацию } \varepsilon_r(\pi) = \varepsilon_u \cdot r(\pi). \quad (24)$$

Подставляя (24) в (16), определяют параметр  $B(e_\pi)$ , а затем равнодействующую

$$N(e_\pi) = \int_A \sigma \cdot b \cdot dy \quad (25)$$

$$\text{и наименьшую деформацию } \varepsilon_1 = B(e_\pi) \cdot (y_1 - 0.5 \cdot h) + \varepsilon_r(\pi). \quad (26)$$

$$\text{Если } \varepsilon_1(e_\pi) > 0 \text{ и } \varepsilon_1(e_{\pi+1}) < 0, \quad (27)$$

то методом хорд [5] уточняем эксцентриситет

$$e_{\pi+2} = \frac{e_\pi \cdot \varepsilon_1(e_{\pi+1}) - e_{\pi+1} \cdot \varepsilon_1(e_\pi)}{\varepsilon_1(e_{\pi+1}) - \varepsilon_1(e_\pi)}, \quad (28)$$

пока не будет удовлетворяться критерий (14).

Привлекая изложенную методику, получим для случаев  $e(\pi=1)=0,1073$  и  $e(\pi=2)=0,1080$  представленные в табл.1 сведения.

Таблица 1

$\theta \cdot 10^3$	$\sigma_u, \text{ МПа}$	$\mu \cdot 10^6$	Параметр		$\pi$	$e_\pi$	m	$r_m$	$\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$	$B_m(e_\pi) \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$N_m(e_\pi), \text{ кН}$	
			$\alpha, \text{ МПа}$	$\beta$								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
392,3	26,19	1601	16575200	2,088 3	1	0,1073	4	1,20	1921,20	1,8938100	190,151	
							5	1,25	2001,25	1,9943232	190,573	
							6	1,30	2081,30	2,0966836	190,457	
							$\pi=1$	1,26422	2024,016	2,0232459	190,595	
							$\varepsilon_1(e_{\pi=1})=2,0232459 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,1)+2024,016 \cdot 10^{-6}=7,701 \cdot 10^{-7}$					
							4	1,20	1921,20	1,8974274	189,804	
					2	0,1080	5	1,25	2001,25	1,9979316	190,232	
							6	1,30	2081,30	2,1002708	190,122	
							$\pi=2$	1,26478	2024,913	2,0279943	190,255	
							$\varepsilon_1(e_{\pi=2})=2,0279943 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,1)+2024,913 \cdot 10^{-6}=-3,0813 \cdot 10^{-6}$					
							4	1,20	1921,20	1,8946352	190,082	
							5	1,25	2001,25	1,9950464	190,505	
3	0,10744	6	1,30	2081,30	2,0974026	190,390						
		$\pi=3$	1,26431	2024,160	2,0241495	190,527						
		$\varepsilon_1(\text{ясб})=2,0241495 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,1)+2024,160 \cdot 10^{-6}=1,05 \cdot 10^{-8}$										
		яс										
		б										

Так как  $\varepsilon_1(e_{\pi=1})=0,7701 \cdot 10^{-6} > 0$  и  $\varepsilon_1(e_{\pi=2})=-3,0813 \cdot 10^{-6} < 0$ , то имеем случай (27). Поэтому, воспользовавшись формулой (28), уточняем эксцентриситет

$$e_{\pi=3} = \frac{0,1073 \cdot (-3,0813 \cdot 10^{-6}) - 0,1080 \cdot 0,7701 \cdot 10^{-6}}{-3,0813 \cdot 10^{-6} - 0,7701 \cdot 10^{-6}} = 0,10744$$



и результаты дальнейших вычислений приводим в табл. 1.

Функцию (10) для  $e_{\pi=3}$  записываем в виде

$$\varepsilon(\pi = 3) = 2,0241495 \cdot 10^{-2} \cdot (y - 0,5 \cdot h) + 2024,160 \cdot 10^{-6} \quad (29)$$

с наименьшей в точках с координатой  $y_1 = -0,5 \cdot h$  деформацией

$$\varepsilon_1(\pi = 3) = 1,05 \cdot 10^{-8},$$

при которой условие (14) удовлетворяется.

Принимаем ядровый базовый эксцентриситет  $e(\text{ясб}) = 0,10744$  и координату  $y_f(\text{ясб}) = e(\text{ясб}) \cdot h = 1,0744 \cdot 10^{-2}$  м.

Вычисленные по (29) и (9) в точках  $i = 1, 2, 3, 4, 5, u$  с координатами  $y_i = -0,5 \cdot h, -0,25 \cdot h, 0,00$  м,  $0,25 \cdot h, 0,5 \cdot h, y_u = 0,05 + (1601 - 2024,160) \cdot 10^{-4} / 2,0241495 = 0,029094$  м деформации  $\varepsilon_i(\text{ясб})$  и напряжения  $\sigma_i(\text{ясб})$  представлены в табл.2, а на рис.2 построены соответствующие эпюры.

Таблица 2

$\dot{\theta}_1 \cdot 10^3$	$e(\text{ясб})$	Точки $i$	1	2	3	4	5	u
		Координаты $y_i$ , м	-0,050	-0,025	0	0,025	0,050	0,029094
392,3	0,10744	Деформации $\varepsilon_i \cdot 10^6$ по (29)	0,0105	506,047	1012,085	1518,122	2024,160	1601
		Напряжения $\sigma_i$ , МПа по (9)	0,00033	13,713	22,534	26,117	24,266	26,190

## 2. Предельное ядровое состояние

Базовые усилия [3] составляют 0,94...0,92 от средних опытных разрушающих  $\bar{F}_u(\dot{\theta}_1, e)$ . Следовательно, с помощью зависимости центрального сжатия найти предельные нагрузки при внецентренных воздействиях не удаётся.

Для исследования НДС при ядровом эксцентриситете  $e(\text{ясп}) = e(\text{ясб}) = 0,10744$  и силах  $N_\mu(\text{ясп}) > N(\text{ясб})$  в приближениях  $\pi=1, 2, \dots, n$  задаемся:

$$\text{функцией (см. рис.1)} \quad \sigma(\pi) = E \cdot \varepsilon(\pi) - \alpha_\mu \cdot [\varepsilon(\pi)]^{\beta_\mu} \quad (30)$$

$$\text{с экстремальными} \quad \sigma_\mu(\pi) = k_\mu(\pi) \cdot \sigma_u, \quad (31)$$

$$\varepsilon_\mu(\pi) = k_\mu(\pi) \cdot \varepsilon_u, \quad (32)$$

$$\text{параметрами} \quad \beta_\mu = \beta = 2,0883, \quad (33)$$

$$\alpha_\mu(\pi) = \frac{E}{\beta \cdot [\varepsilon_\mu(\pi)]^{\beta-1}}; \quad (34)$$

$$\text{деформациями} \quad \varepsilon(\pi) = B_\mu(\pi) \cdot (y - 0,5 \cdot h) + \varepsilon_{r_\mu}(\pi) \quad (35)$$

$$\text{с наибольшей деформацией} \quad \varepsilon_{r_\mu}(\pi) = \varepsilon_\mu(\pi) \cdot r_\mu(\pi), \quad (36)$$

$$\text{характеристикой} \quad B_\mu(\pi), \text{ м}^{-1} \quad \text{эпюры } \varepsilon(\pi)$$

$$\text{и коэффициентом} \quad r_\mu(\pi) > 1 \quad \text{увеличения } \varepsilon_\mu(\pi).$$

Поставим задачу определить показатели ядрового предельного состояния, при которых в точках с  $\varepsilon_{r_\mu}(\pi) = \varepsilon_5(\pi)$  напряжения будут равны призматическому пределу прочности (см. [6], [7]), то есть

$$\sigma_5(\pi) = \sigma_u = 26,19 \text{ МПа}, \quad (37)$$

и выполняется условие (14).

Назначив  $k_{\mu}(\pi=1) = 1,080$  и  $k_{\mu}(\pi=2) = 1,075$ , получаем:

по (31)  $\sigma_{\mu}(\pi=1) = 28,285$  МПа и  $\sigma_{\mu}(\pi=2) = 28,154$  МПа,

по (32)  $\varepsilon_{\mu}(\pi=1) = 1729 \cdot 10^{-6}$  и  $\varepsilon_{\mu}(\pi=2) = 1721 \cdot 10^{-6}$ ;

по (33)  $\beta = 2,0883$ ,

по (34)  $\alpha_{\mu}(\pi=1) = \frac{31390}{2,0883 \cdot (1729 \cdot 10^{-6})^{1,0883}} = 15244200$  МПа и

$\alpha_{\mu}(\pi=2) = \frac{31390}{2,0883 \cdot (1721 \cdot 10^{-6})^{1,0883}} = 15321400$  МПа.

Теперь, привлекая методику п.1, найдем представленные в табл. 3 сведения.

Таблица 3

$\theta_1 \cdot 10^3$	$\epsilon_{яс}$	$\pi$	$k_{\mu}(\pi)$	$\sigma_{\mu}(\pi)$ , МПа	$\varepsilon_{\mu}(\pi)$ $\cdot 10^6$	Параметр		m	$r_m$	$\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$	$B_m(e_{\pi}) \cdot 10^2$ , м <sup>-1</sup>	$N_m(e_{\pi})$ , кН
						$\alpha$ , МПа	$\beta$					
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
392,3	0,10744	1	1,080	28,285	1729	15244200	2,0883	4	1,20	2074,80	2,0460009	205,279
								5	1,25	2161,25	2,1545478	205,737
								6	1,30	2247,76	2,2651695	205,611
								$\mu(1)$	1,26421	2185,819	2,1857590	205,760
								$\varepsilon_1(1) = 2,1857590 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,1) + 2185,819 \cdot 10^{-6} = 0,06 \cdot 10^{-6}$				
								$\sigma_5(1) = 26,208$ МПа, $\Delta\sigma_5(1) = 0,018$ МПа				
		2	1,075	28,154	1721	15321400	2,0883	4	1,20	2065,20	2,0365374	204,328
								5	1,25	2151,25	2,1445779	204,784
								6	1,30	2237,30	2,2546125	204,660
								$\mu(2)$	1,26431	2175,878	2,1758720	204,807
								$\varepsilon_1(2) = 2,1758720 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,1) + 2175,878 \cdot 10^{-6} = 0,006 \cdot 10^{-6}$				
								$\sigma_5(2) = 26,0845$ МПа, $\Delta\sigma_5(2) = 0,1055$ МПа				
		3	1,0793	28,267	1728	15254000	2,0883	4	1,20	2073,60	2,0448241	205,158
								5	1,25	2160,00	2,1533105	205,615
								6	1,30	2246,40	2,2637866	205,491
								$\mu(3)$	1,26433	2184,762	2,1847648	205,639
								$\varepsilon_1(3) = 2,1847648 \cdot 10^{-2} \cdot (-0,1) + 2184,762 \cdot 10^{-6} = -2,8 \cdot 10^{-9}$				
								$\sigma_5(3) = 26,1899$ МПа $\approx 26,19$ МПа, $\Delta\sigma_5(3) = -1 \cdot 10^{-4}$ МПа				

Имеем:

в приближении  $\pi=1$  – коэффициент  $k_{\mu}(1)=1,080$ ,

– деформацию  $\varepsilon_5(1) = \varepsilon_{r_{\mu}}(1) = 2185,819 \cdot 10^{-6}$ ,

– напряжение  $\sigma_5(1) = 31390 \cdot 2185,819 \cdot 10^{-6} - 15244200 \cdot$

$(2185,819 \cdot 10^{-6})^{2,0883} = 26,208$  МПа,

– невязку  $\Delta\sigma_5(1) = \sigma_5(1) - \sigma_u = 26,208 - 26,190 = 0,018$  МПа;

в приближении  $\pi=2$  –  $k_{\mu}(2)=1,075$ ,  $\varepsilon_5(2) = \varepsilon_{r_{\mu}}(2) = 2175,878 \cdot 10^{-6}$ ,  $\sigma_5(2) = 31390 \cdot 2175,878 \cdot 10^{-6} - 15321400 \cdot (2175,878 \cdot 10^{-6})^{2,0883} = 26,0845$  МПа и  $\Delta\sigma_5(2) = 26,0845 - 26,1900 = -0,1055$  МПа.

Уточняем показатель предельного ядрового состояния [5]

$$k_{\mu}(3) = \frac{k_{\mu}(1) \cdot \Delta\sigma_5(2) - k_{\mu}(1) \cdot \Delta\sigma_5(2)}{\Delta\sigma_5(2) - \Delta\sigma_5(1)} = \frac{1.080 \cdot (-0.1055) - 1.075 \cdot 0.0180}{-0.1055 - 0.0180} = 0,10793 \quad (38)$$

и полученные результаты дальнейшего расчета сводим в табл.3.

В точках  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ,  $\mu$  с координатами  $y_i = -0,50 \cdot h, -0,25 \cdot h, 0,00\text{м}, 0,25 \cdot h, 0,50 \cdot h$ ,  
 $y_{\mu} = 0,05 + (1728 - 2184,762) \cdot 10^{-4} / 2,1847648 = 0,029093$  м деформации

$$\varepsilon_i(\pi=3) = 2,1847648 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2184,762 \cdot 10^{-6} \quad (39)$$

$$\text{и напряжения} \quad \sigma_i(\pi=3) = 31390 \cdot \varepsilon_i(\pi=3) - 15254000 \cdot [\varepsilon_i(\pi=3)]^{2,0883} \quad (40)$$

записаны в табл. 4, а на рис. 2 изображены соответствующие эпюры.

Таблица 4

$\theta_1 \cdot 10^3$	$e(\text{яс})$	Точки $i$	1	2	3	4	5	$u$
		Координаты $y_i$ , м	-0,050	-0,025	0	0,025	0,050	0,029093
392,3	0,10744	Деформации $\varepsilon_i(\pi=3) \cdot 10^6$ по (39)	$-2,8 \cdot 10^{-9}$	546,188	1092,379	1638,570	2184,762	1728
		Напряжения $\sigma_i(\pi=3)$ , МПа по (40)	$\approx 0$	14,801	24,322	21,189	26,1899	28,267

Заметим, что:

удовлетворяются условия

$$(14) - \varepsilon_1(\pi=3) = |-2,8 \cdot 10^{-9}| < 5 \cdot 10^{-8}$$

и (37) -  $\sigma_1(\pi=3) = 26,1899$  МПа  $\approx \sigma_u = 26,19$  МПа;

можно назначить показатель увеличения экстремального напряжения по формуле [6]

$$k_{\mu}(\text{яс}) = \frac{\beta - 1}{r_{(\text{ясб})} \cdot \{\beta - [r_{(\text{ясб})}]^{\beta - 1}\}} = \frac{1.0883}{1.26431 \cdot [2.0883 - (1.26431)^{1.0883}]} = 1,0793; \quad (41)$$

$$\text{найти разрушающую нагрузку} \quad N_u(\text{яс}) = k_{\mu}(\text{яс}) \cdot N(\text{ясб}) = 1,0793 \cdot 190,527 = 205,636 \text{ кН}. \quad (42)$$

### 3. Предельные НДС и усилия

В момент разрушения внецентренно сжатых стержней из тяжелого бетона экстремальные  $\sigma_{\mu}(e)$  и  $\varepsilon_{\mu}(e)$  по сравнению с базовыми  $\sigma_u$  и  $\varepsilon_u$  характеризуются [6] максимальным коэффициентом  $k_{\mu}(\text{яс})$  при относительном эксцентриситете  $e(\text{яс})$ . Это позволяет найти параметр  $a_{\mu}$ , например, зависимости

$$k_{\mu}(e) = 1 + a_{\mu} \cdot e \cdot (e_n)^{-e/e(\text{яс})}, \quad (43)$$

где  $e_n = 2,71828$  – основание натуральных логарифмов;  $e = y_f/h \leq e(\text{яс})$ .

Тогда при  $e = e(\text{яс}) = 0,10744$  и  $k_{\mu}(\text{яс}) = 1,0793$  из (43) получаем

$$\text{показатель} \quad a_{\mu} = [k_{\mu}(\text{яс}) - 1] / e(\text{яс}) \cdot (e_n)^{-1} = (1,0793 - 1) / 0,10744 \cdot 0,36788 = 2,0063$$

$$\text{и функцию} \quad k_{\mu}(e) = 1 + 2,0063 \cdot e \cdot (e_n)^{-e/0,10744}. \quad (44)$$

Задаваясь  $e = 0.05$ , определяем представленные в табл. 5 показатели предельного состояния.

Таблица 5

$\theta_1 \cdot 10^3$	$e$	$k_\mu(\pi)$	$\sigma_\mu(\pi)$ , МПа	$\varepsilon_\mu(\pi) \cdot 10^6$	Параметр		m	$r_m$	$\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$	$B_m(e_\pi) \cdot 10^2, \text{ м}^{-1}$	$N_m(e_\pi), \text{ кН}$
					$\alpha$ , МПа	$\beta$					
1	2	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
392,3	0,05	1,063 0	27,840	1701,9	15508600	2,0883	3	1,15	1957,18	1,4854781	236,890
							4	1,20	2042,28	1,5920700	237,158
							5	1,25	2127,38	1,7025967	236,761
							$\mu$	1,19515	2034,026	1,5815489	237,162
		1,000 0	26,19	1601	16575200	2,0883	3	1,15	1841,15	1,3974258	222,845
							4	1,20	1921,20	1,4976791	223,098
							5	1,25	2001,25	1,6016579	222,724
							6	1,19518	1913,483	1,4878479	223,101

Расчетное усилие  $N_\mu(0,05)=237,162$  кН от среднего опытного разрушающего  $\bar{F}_u(0,05)=236,3$  кН имеет абсолютное  $\Delta_N = N_\mu - \bar{F}_u = 0,862$  кН и относительное  $\delta_N = \Delta_N / \bar{F}_u = 0,36\%$  отклонения.

$$\text{Деформации } \varepsilon_i(0,05) = 1,5815489 \cdot 10^{-2} \cdot (y_i - 0,5 \cdot h) + 2034,026 \cdot 10^{-6} \quad (45)$$

$$\text{и напряжения } \sigma_i(0,05) = 31390 \cdot \varepsilon_i(0,05) - 15508600 \cdot [\varepsilon_i(0,05)]^{2,0883} \quad (46)$$

приведены в табл. 6.

Таблица 6

$\theta_1 \cdot 10^3$	$e$	Точки $i$	1	2	3	4	5	u
		Координаты $y_i, \text{ м}$	-0,050	-0,025	0	0,025	0,050	0,029
392,3	0,05	Деформации $\varepsilon_i(0,05) \cdot 10^6$ по (45)	452,477	847,864	1243,252	1638,638	2034,026	1701,9
		Напряжения $\sigma_i(0,05)$ , МПа по (46)	12,595	20,644	25,747	27,801	26,728	27,84

Для проверки определены базовая сила  $N_B(e=0,05)=223,101$  кН (см. табл. 5) и по формуле (42) – разрушающая  $N_u(e=0,05) = k_\mu(0,05) \cdot N_B(e=0,05) = 1,063 \cdot 223,101 = 237,156$  кН, которая всего на 0,006 кН меньше расчётной  $N_\mu(0,05)=237,162$  кН. Напомним, что относительное отклонение усилия  $N_\mu(0,05)$  от среднего опытного разрушающего  $\bar{F}_u(0,05)=236,3$  кН [3] составляет 0,36 %.

## Выводы

Предложена методика вычисления условных базового и предельного ядровых состояний внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью коротких призм из мелкозернистого бетона.

Увеличение экстремальных напряжений  $\sigma_\mu(\text{яс})$ , деформаций  $\varepsilon_\mu(\text{яс})$  и усилий  $N_\mu(\text{яс})$  в момент разрушения по сравнению с базовыми  $\sigma_u$ ,  $\varepsilon_u$  и  $N(\text{ясб})$  характеризуется максимальным коэффициентом  $k_\mu(\text{яс})=1,0793$  при относительном эксцентриситете  $e(\text{яс})=0,10744$ .

Для решения практических задач можно назначать

$$k_\mu(\text{яс}) = \frac{\beta-1}{r_{(\text{ясб})} \cdot \{\beta - [r_{(\text{ясб})}]^{\beta-1}\}}, \quad (41)$$

что позволяет найти, например, параметр  $a_\mu$  зависимости

$$k_\mu(e) = 1 + a_\mu \cdot e \cdot (e_n)^{-e/e(\text{яс})} \quad (43)$$

и вычислять  $\sigma_\mu(e)$ ,  $\varepsilon_\mu(e)$ ,  $N_\mu(e)$  предельных состояний при  $e \leq e(\text{яс})$ .

## Библиографический список

1. Синозерский, А.Н. Определение усилий, соответствующих началу микротрещинообразования, при внецентренных нагружениях призм из МЗБ 28-дневного возраста по методике условных деформаций /А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров//Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2011.– Вып. №1(2). – С.24-26.
2. ГОСТ 10180-90. Методы определения прочности по контрольным образцам/Госстрой СССР. – М.,1990. – С.8-9.
3. Синозерский, А.Н. Определение базовых усилий и напряженно-деформируемого состояния призм из мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии/А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров//Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2012. – Вып.№1(4). – С.72-83.
4. Фильчаков, П.Ф. Справочник по высшей математике/П.Ф. Фильчаков. – Киев: Изд-во «Наукова думка», 1973. – 744 с.
5. Лапчик, М.П. Численные методы: учеб. пособие для студ. вузов/М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Изд. Центр «Академия», 2004. – 384 с.
6. Синозерский, А.Н. Базовые и предельные ядровые состояния внецентренно сжатых коротких бетонных элементов квадратного сечения/А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров//Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2014.– Вып.№2(9). – С.64-72.
7. Синозерский, А.Н. Ядровые НДС внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бетона//А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров//Научно-технический журнал ВГАСУ. Строительная механика и конструкции. – Воронеж, 2015.– Вып.№2(11). – С.27-34.

## References

1. Sinozersky, A.N. Definition of Forces Corresponding to Microcracks Forming, during Off-center Loading of Prisms from Fine Concrete of 28 – days age according to Method of De-

- flected Mode/ A.N. Sinosersky, R.A. Mukhtarov // Scientific-technical journal of VGASU. Structural Mechanics and Structures. – 2011. - Issue № 1(2). - P. 24-27.
2. Standard specification 10180-90. Methods of durability definition according to control samples /Gosstroj of USSR. – M.,1990. – P. 8-9.
  3. Sinozersky, A.N. Definition of basic stresses and deflected mode of prisms from fine concrete at eccentric compression, P.A. Mukhtarov//Scientific – Technical journal of VGASU. Mechanics and Structures. – Voronezh, 2012. - Issue № 1(4). - P. 72-83.
  4. Filchikov, P.F. Reference book on Math/ P.F. Filchikov - Kiev: Pub."Naukova Dumka". 1973. - 744 p.
  5. Lapchic, M.P. Numerical Methods: Teaching aid for students / M.P.Lapchic, M.I. Ragulina, E.K.Hecker, under reduction of M.P. Lapchic.-M.; Public Center "Academy", 2004.- 384 p.
  6. Sinozersky, A.N. Basic and limiting core states of eccentrically compressed short concrete elements of square section / A.N. Sinosersky, R.A. Mukhtarov // Scientific – Technical journal of VGASU. Structural Mechanics and Structures. – Voronezh, 2014. – Issue.№2(9). – P. 64-72.
  7. Sinozersky, A.N. Core deflected mode of eccentrically compressed with standard velocity prisms from fine concrete/ A.N. Sinosersky, R.A. Murhtarov // Scientific – Technical journal of VGASU. Structural Mechanics and Structures. – Voronezh, 2015.– Issue №2(11). – P. 27 - 34.

**Ключевые слова:** внецентренное сжатие, ядро сечения, напряженно-деформированное состояние.

**Key words:** eccentric compression, section core, deflected mode.

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет  
 Канд. техн. наук, доц. кафедры  
 строительной механики  
 А.В. Игнатъев  
 Аспирант кафедры  
 строительной механики Н.С. Ефремова  
 Россия, г.Волгоград, тел.: 8(905)659-68-54  
 e-mail: nsamyлина@yandex.ru

Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering  
 PhD of Tech. Sc., Associate Professor  
 of department of Structural Mechanics  
 A.V. Ignatiev  
 Postgraduate of department of Structural Mechanics  
 N.S. Efremova  
 Volgograd, Russia, tel.: 8(905)6596854  
 e-mail: nsamyлина@yandex.ru

А.В. Игнатъев, Н.С. Ефремова

### РАСЧЕТ КОСОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

Приведен алгоритм получения матрицы откликов и построение разрешающей системы уравнений для параллелограммного конечного элемента изгибаемой пластины, с учетом косоугольности границ контура.

**Ignatjev A.V., Efremova N.S.**

### CALCULATION OF OBLIQUE HALF-BEAM BY THE FINITE ELEMENTS METHOD IN THE FORM OF CLASSIC MIXED METHOD

The algorithm of obtaining matrix of reactions and constructions of resolving system of equations for parallel finite element of bending half-beam with account of contour limit obliquity.

Рассмотрим КЭ с 12 степенями свободы в виде параллелограммной пластинки с размерами, показанными на рис. 1, и началом координат в левом верхнем углу описанного прямоугольника.

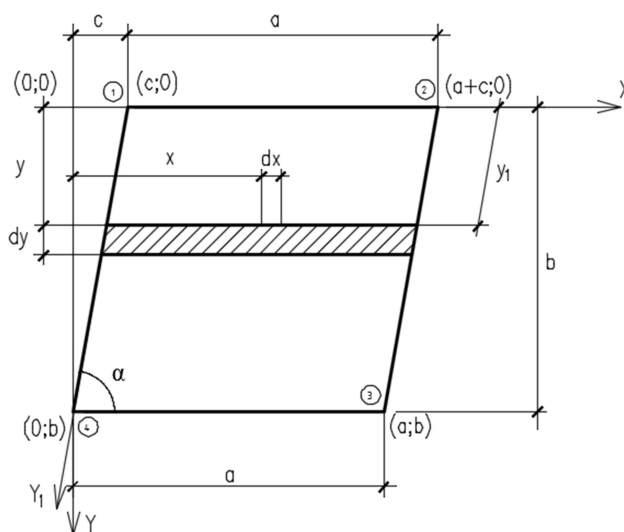


Рис. 1

Прямоугольная и косоугольная система координат связаны соотношениями:

$$x_1 = x, \quad y = y_1 \cdot \sin \alpha,$$

$$y_1 = \frac{y}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}}.$$

Как и в случае прямоугольного КЭ, функции его прогибов аппроксимируются неполным бикубическим полиномом:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 \quad (1)$$

Коэффициенты этого полинома для каждого из 12 видов единичных воздействий смешанных основных неизвестных находятся из условий в узлах основной системы.

На рис. 2 показаны для иллюстрации единичное воздействие  $q_1=1$  и условия для нахождения коэффициентов  $\alpha_i^{(1)}$  аппроксимирующей функции  $w^{(1)}(x, y)$ .

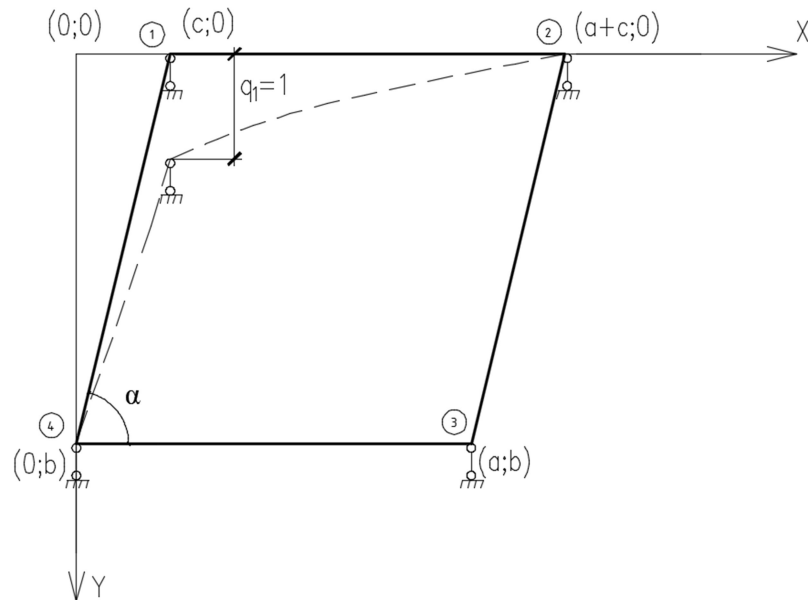


Рис. 2

$$\begin{aligned} w^{(1)}(c, 0) &= 1, & M_x^{(1)}(c, 0) &= 0, & M_y^{(1)}(c, 0) &= 0, \\ w^{(1)}(c+a, 0) &= 0, & M_x^{(1)}(c+a, 0) &= 0, & M_y^{(1)}(c+a, 0) &= 0, \\ w^{(1)}(a, b) &= 0, & M_x^{(1)}(a, b) &= 0, & M_y^{(1)}(a, b) &= 0, \\ w^{(1)}(0, b) &= 0, & M_x^{(1)}(0, b) &= 0, & M_y^{(1)}(0, b) &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

После решения системы уравнений (2) и нахождения коэффициентов  $\alpha_i^{(1)}$  функции  $w^{(1)}(x, y)$  находятся соответствующие функции изгибающих и крутящих моментов, кривизн:



$$\begin{aligned}
M_x^{(1)}(x, y) &= -D_x \left[ \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \mu_x \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} \right], \\
M_y^{(1)}(x, y) &= -D_y \left[ \mu_y \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} \right], \\
M_{xy}^{(1)}(x, y) &= -D_k \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично находятся функции прогибов и моментов для всех других единичных воздействий ( $q_2=1, q_3=1, \dots, \tilde{q}_{12}=1$ ).

Вычисление коэффициентов матрицы откликов производится по тому же алгоритму, что и для прямоугольного КЭ, т.е.

для блока  $r$ :

$$r_{ij} = \int_{\Omega} (M_x^{(i)} \chi_x^{(j)} + M_y^{(i)} \chi_y^{(j)} + 2M_{xy}^{(i)} \chi_{xy}^{(j)}) d\Omega, \tag{4}$$

( $i=1,2,3,4; j=1,2,3,4$ ),

для блока  $\delta$ :

$$\delta_{ij} = \int_{\Omega} M_x^{(i)} \chi_x^{(j)} + M_y^{(i)} \chi_y^{(j)} + 2M_{xy}^{(i)} \chi_{xy}^{(j)} d\Omega,$$

( $i=5,6,\dots,12; j=5,6,\dots,12$ ).

Рассмотрим подробнее процесс интегрирования функции  $\int_{\Omega} F(x, y) d\Omega$  в (4).

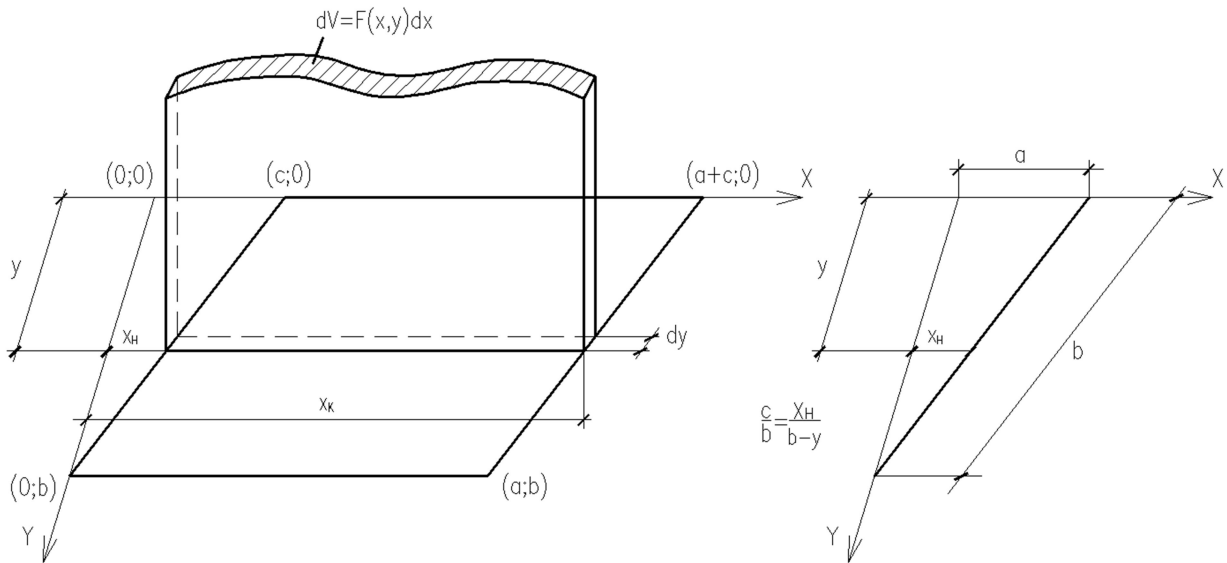


Рис. 3

Из рис. 2 и 3 видно, что интегрирование по области  $\Omega$  состоит из интегрирования по направлениям  $x$  и  $y$ . Координаты по оси  $x$  начала и конца элементарного объема  $dV$  зависят от его координаты по оси  $y$ :

$$\begin{aligned}
x_n &= c \frac{(b-y)}{b} = c \left(1 - \frac{y}{b}\right), & x_k &= c \left(1 - \frac{y}{b}\right) + a.
\end{aligned} \tag{5}$$

Следовательно,

$$V = \int_{\Omega} F(x, y) d\Omega = \int_{x=x_h}^{x=x_k} \int_{y=0}^b F(x, y) dx dy . \quad (6)$$

В результате интегрирования по  $x$  с переменными пределами получаем новую функцию  $F_1(y) = \int_{x_h}^{x_k} F(x, y) dx$ , которая интегрируется по переменной  $y$ :

$$V = \int_{y=0}^b F_1(y) dy . \quad (7)$$

Коэффициенты матрицы откликов КЭ, относящиеся к блоку  $[\tilde{r}_{ij}]$ , находятся, как и для прямоугольного КЭ [1], но с учетом косоугольной области интегрирования, как это показано выше:

$$\tilde{r}_{ij} = \int_{x=x_h}^{x=x_k} \int_{y=0}^b (M_x^{(i)} \chi_x^{(i)} + M_y^{(i)} \chi_y^{(j)} + 2M_{xy}^{(i)} \chi_{xy}^{(j)}) dx dy, \quad (8)$$

( $i = 1, 2, 3, 4; j = 5, 6, \dots, 12$ ).

На основании теоремы о взаимности перемещений и реакций:

$$[\tilde{\delta}] = -[\tilde{r}]^T .$$

Элементы вектора грузовых коэффициентов находятся, как и в случае прямоугольного КЭ, но с учетом косоугольности области интегрирования:

$$r_{ip} = -p \int_{x=x_h}^{x=x_k} \int_{y=0}^b w^{(i)}(x, y) dx dy, \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (9)$$

$$\delta_{ip} = -p \int_{x=x_h}^{x=x_k} \int_{y=0}^b w^{(i)}(x, y) dx dy, \quad (i = 5, 6, \dots, 12).$$

Ниже, ввиду громоздкости, приведены только некоторые коэффициенты матрицы откликов, относящиеся к блокам  $r$ ,  $\delta$  и  $\tilde{r}$  в формульном виде:

$$r_{1,1} = -r_{1,2} = r_{1,3} = -r_{1,4} = -r_{2,1} = r_{2,2} = -r_{2,3} = r_{2,4} = r_{3,1} = -r_{3,2} = r_{3,3} = -r_{3,4} = -r_{4,1} =$$

$$= r_{4,2} = -r_{4,3} = r_{4,4} = \frac{2D_k}{ab}$$

Коэффициенты матрицы откликов, относящиеся к блоку  $\delta$ , в формульном виде:

$$\delta_{1,1} = \delta_{3,5} = \frac{8D_k \mu_y^2 b^4 - 20D_x \mu_x \mu_y a^2 b^2 - 6D_x \mu_x \mu_y b^2 c^2 - 15D_x \mu_x \mu_y a b^2 c + 14D_k \mu_y b^2 c^2 + 15D_k \mu_y a b^2 c + 8D_k a^4 +$$

$$+ 18D_k c^4 + 45D_k a c^3 + 40D_k a^2 c^2 + 15D_k a^3 c + 20D_x a^2 b^2 + 6D_x b^2 c^2 + 15D_x a b^2 c}{180D_x^2 a b (1 - \mu_x \mu_y)^2}$$

$$\delta_{2,2} = \delta_{6,6} = \frac{8D_k\mu_x^2a^4 + 18D_k^2\mu_xc^4 + 45D_k\mu_x^2ac^3 + 40D_k\mu_x^2a^2c^2 + 15D_k\mu_x^2a^3c - 20D_y\mu_x\mu_ya^2b^2 - 6D_y\mu_x\mu_yb^2c^2 - 15D_y\mu_x\mu_yab^2c + 14D_k\mu_xb^2c^2 + 15D_k\mu_xab^2c + 8D_kb^4 + 20D_ya^2b^2 + 6D_yb^2c^2 + 15D_yab^2c}{180D_y^2ab(1-\mu_x\mu_y)^2}$$

$$\delta_{3,3} = \delta_{7,7} = \frac{8D_k\mu_y^2b^4 - 20D_x\mu_x\mu_ya^2b^2 - 6D_x\mu_x\mu_yb^2c^2 + 15D_x\mu_x\mu_yab^2c + 14D_k\mu_yb^2c^2 - 15D_k\mu_yab^2c + 8D_ka^4 + 18D_kc^4 - 45D_ka^3c + 40D_ka^2c^2 - 15D_ka^3c + 20D_xa^2b^2 + 6D_xb^2c^2 - 15D_xab^2c}{180D_x^2ab(1-\mu_x\mu_y)^2}$$

$$\delta_{4,4} = \delta_{8,8} = \frac{8D_k\mu_x^2a^4 + 18D_k\mu_x^2c^4 - 45D_k\mu_x^2ac^3 + 40D_k\mu_x^2a^2c^2 - 15D_k\mu_x^2a^3c - 20D_y\mu_x\mu_ya^2b^2 - 6D_y\mu_x\mu_yb^2c^2 + 15D_y\mu_x\mu_yab^2c + 14D_y\mu_xb^2c^2 - 15D_k\mu_xab^2c + 8D_kb^4 + 20D_ya^2b^2 + 6D_yb^2c^2 - 15D_yab^2c}{180D_y^2ab(1-\mu_x\mu_y)^2}$$

$$\delta_{1,2} = \delta_{2,1} = \delta_{5,6} = \delta_{6,5} = \frac{40D_x\mu_x^2\mu_ya^2b^2 + 12D_x\mu_x^2\mu_yb^2c^2 + 30D_x\mu_x^2\mu_yab^2c - 14D_k\mu_x\mu_yb^2c^2 - 15D_k\mu_x\mu_yab^2c - 16D_k\mu_xa^4 - 36D_k\mu_xc^4 - 16D_k\mu_yb^4 - 90D_k\mu_xac^3 - 80D_k\mu_xa^2c^2 - 30D_k\mu_xa^3c - 40D_x\mu_xa^2b^2 - 12D_x\mu_xb^2c^2 - 30D_x\mu_xab^2c - 14D_kb^2c^2 - 15D_kab^2c}{360D_xD_yab(1-\mu_x\mu_y)^2}$$

$$\tilde{r}_{1,1} = \tilde{r}_{3,5} = -\frac{D_kD_x\mu_xa^2b^2 - 2D_kD_x\mu_xb^2c^2 - D_kD_ya^4 - 11D_kD_ya^2c^2 - 30D_kD_yac^3 - 18D_kD_yc^4 + 10D_xD_y\mu_x\mu_ya^2b^2 + 15D_xD_y\mu_x\mu_yab^2c + 12D_xD_y\mu_x\mu_yb^2c^2 - 10D_xD_ya^2b^2 - 15D_xD_yab^2c - 12D_xD_yb^2c^2}{30D_xD_ya^3b(1-\mu_x\mu_y)}$$

$$\tilde{r}_{2,1} = \tilde{r}_{4,5} = -\frac{-D_kD_x\mu_xa^2b^2 + 2D_kD_x\mu_xb^2c^2 + D_kD_ya^4 + 11D_kD_ya^2c^2 + 30D_kD_yac^3 + 18D_kD_yc^4 - 10D_xD_y\mu_x\mu_ya^2b^2 - 15D_xD_y\mu_x\mu_yab^2c - 12D_xD_y\mu_x\mu_yb^2c^2 + 10D_xD_ya^2b^2 + 15D_xD_yab^2c + 12D_xD_yb^2c^2}{30D_xD_ya^3b(1-\mu_x\mu_y)}$$

$$\tilde{r}_{3,1} = \tilde{r}_{1,5} = -\frac{D_kD_x\mu_xa^2b^2 - 2D_kD_x\mu_xb^2c^2 - D_kD_ya^4 + 30D_kD_ya^3c + 19D_kD_ya^2c^2 - 30D_kD_yac^3 - 18D_kD_yc^4 - 5D_xD_y\mu_x\mu_ya^2b^2 + 15D_xD_y\mu_x\mu_yab^2c + 12D_xD_y\mu_x\mu_yb^2c^2 + 5D_xD_ya^2b^2 - 15D_xD_yab^2c - 12D_xD_yb^2c^2}{30D_xD_ya^3b(1-\mu_x\mu_y)}$$

$$\tilde{r}_{4,3} = \tilde{r}_{2,7} = -\frac{\dots}{30D_xD_ya^3b(1-\mu_x\mu_y)}$$

$$\tilde{r}_{4,3} = \tilde{r}_{2,7} = -\frac{D_kD_x\mu_xa^2b^2 - 2D_kD_x\mu_xb^2c^2 - D_kD_ya^4 - 30D_kD_ya^3c + 19D_kD_ya^2c^2 + 30D_kD_yac^3 - 18D_kD_yc^4 - 5D_xD_y\mu_x\mu_ya^2b^2 - 15D_xD_y\mu_x\mu_yab^2c + 12D_xD_y\mu_x\mu_yb^2c^2 + 5D_xD_ya^2b^2 + 15D_xD_yab^2c - 12D_xD_yb^2c^2}{30D_xD_ya^3b(1-\mu_x\mu_y)}$$

$$\tilde{r}_{4,8} = \tilde{r}_{2,4} = -\frac{-D_kD_xa^2b^2 + 2D_kD_xb^2c^2 + D_kD_y\mu_ya^4 + 11D_kD_y\mu_ya^2c^2 - 30D_kD_y\mu_yac^3 + 18D_kD_y\mu_yc^4 + 10D_xD_y\mu_x\mu_ya^4 + 2D_xD_y\mu_x\mu_ya^2c^2 - 15D_xD_y\mu_x\mu_yac^3 + 4D_xD_y\mu_x\mu_yc^4 - 10D_xD_ya^4 - 2D_xD_ya^2c^2 + 15D_xD_yac^3 - 4D_xD_yc^4}{30D_xD_ya^3b(1-\mu_x\mu_y)}$$

Грузовые коэффициенты в формульном виде:

$$r_{1,p} = r_{3,p} = p \frac{3ab + 2bc}{12},$$

$$r_{2,p} = r_{4,p} = p \frac{3ab - 2bc}{12},$$

$$\delta_{5,p} = \delta_{9,p} = p \frac{15\mu_y ab^3 + 14\mu_y b^3 c + 6bc^3 - 15a^3 b + 15abc^2}{720D_x(1 - \mu_x \mu_y)},$$

$$\delta_{6,p} = \delta_{10,p} = p \frac{15\mu_x a^3 b - 6\mu_x bc^3 - 15\mu_x abc^2 - 15ab^3 - 14b^3 c}{720D_y(1 - \mu_x \mu_y)},$$

$$\delta_{7,p} = \delta_{11,p} = p \frac{15\mu_y ab^3 - 14\mu_y b^3 c - 6bc^3 - 15a^3 b + 15abc^2}{720D_x(1 - \mu_x \mu_y)},$$

$$\delta_{8,p} = \delta_{12,p} = p \frac{15\mu_x a^3 b + 6\mu_x bc^3 - 15\mu_x abc^2 - 15ab^3 - 14b^3 c}{720D_y(1 - \mu_x \mu_y)}.$$

Построение разрешающей системы уравнений и постановка граничных условий на контуре пластинки выполняются по тому же алгоритму, что и для прямоугольного КЭ [1].

#### Библиографический список

1. Игнатьев, В.А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики: учеб. пособие / В.А. Игнатьев, А.В. Игнатьев, А.В. Жиделев ; Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет. – Волгоград: ВолГАСУ, 2006. – 172 с.

#### References

1. Ignatjev, V.A. Mixed form of finite elements method in structural mechanics problems: training aid / V.A. Ignatjev, A.V. Ignatjev, A.V. Zhidelev // Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. – Volgograd: VolgGASU, 2006. – 172 p.

**Ключевые слова:** метод конечных элементов в форме классического смешанного метода, матрица откликов косоугольного конечного элемента, изгиб косоугольной пластины.

**Key words:** finite elements method as classic mixed method, reaction matrix of oblique finite element, oblique half-beam bend.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.041

*Воронежский государственный  
архитектурно-строительный университет  
Магистрант кафедры  
строительной механики  
С. Ю. Струков  
Канд. техн. наук,  
директор ООО «СТРОЙИНПРОМТЕХ»  
И.И. Муравьев  
Канд. техн. наук, доц. кафедры  
строительной механики  
С.В. Ефрюшин  
Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30  
e-mail: ooo.stroyнаука@mail.ru  
e-mail: strukov.sy@mail.ru*

*Voronezh State University of Architecture  
and Civil Engineering  
Undergraduate of department  
of Structural Mechanics  
S. Y. Strukov  
PhD of Tech. Sc., Director of Limited Liability Cor-  
poration «STROYINPROMTECH»  
I.I. Muravyov  
PhD of Tech. Sc., Associate Professor of department  
of Structural Mechanics  
S.V. Efyushin  
Voronezh, Russia, ph.: 8(473)2715230  
e-mail: ooo.stroyнаука@mail.ru  
e-mail: strukov.sy@mail.ru*

С.Ю. Струков, И.И. Муравьев, С.В. Ефрюшин

## **ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТАЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА ТАВРОВОГО СЕЧЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ СВАРКИ**

Дано описание новой технологии изготовления стальной ребристой панели путём сварки в условиях преднапряжения ребер, предложенной И.И. Муравьевым. Проведено численное моделирование эволюции деформированного состояния в процессе сварки стального элемента таврового сечения по традиционной и новой технологиям. Численное моделирование выполнено с помощью метода конечных элементов с использованием программного комплекса SCAD.

Исследован характер деформирования образца при сварке по новой технологии в зависимости от уровня преднапряжения. Выполнено сопоставление данных эксперимента и результатов расчёта перемещений точек образца после завершения сварки.

Strukov S..Yu., Muravyov I.I., Efyushin S.V.

## **NUMERICAL SIMULATION OF T-SECTION STEEL ELEMENT EVOLUTION DURING WELDING**

There is given a new technology of steel ribbed slab production by welding under ribs prestress. The technology is proposed by I.I.Muravyov. Numerical simulation of deflected mode evolution during steel element of T-section welding process according to standard and new technology. Numerical simulation is done by finite elements method with software package SCAD application.

The nature of sample deformation during welding according to new technology in dependence of prestress level is analyzed. The comparison of experiment data and calculation results of sample points displacement after welding is completed.

В настоящее время в мостостроении и судостроении широкое распространение получили конструкции в виде металлических сварных ребристых панелей. Они состоят из толстого металлического листа больших размеров, к которому сверху привариваются продольные ребра. Все крупные предприятия, занимающиеся изготовлением данных конструкций,

© Струков С.Ю., Муравьев И.И., Ефрюшин С.В., 2016

используют технологию (впоследствии в статье данная технология будет называться «базовой»), которая включает в себя следующие этапы:

1. Укладка на стенде металлического листа и прикрепление его по контуру с помощью съемных прижимных приспособлений к опорной плите.
2. Разметка листа плиты.
3. Сборка и прихватка ребер к листу с помощью прихваток с предварительным прижатием (рис. 1).

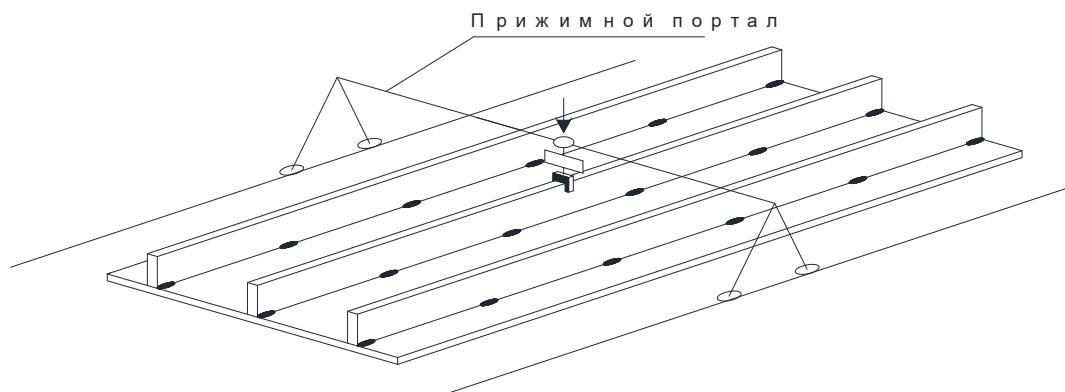


Рис. 1. Прихватка ребер к листу

4. Приварка ребер к листу с предварительным обратным прогибом (рис. 2).



Рис. 2. Приварка ребер к листу

5. Зачистка сварного шва по местам прихваток (рис. 3).



Рис. 3. Зачистка сварного шва

#### 6. Правка продольных и поперечных деформаций (рис. 4).

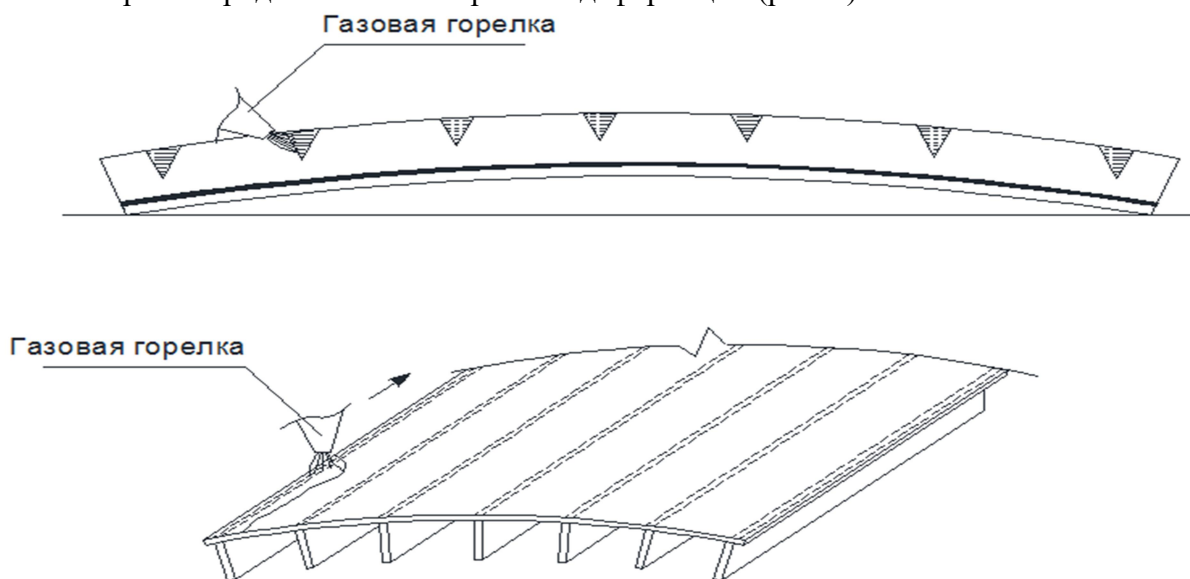


Рис. 4. Правка продольных и поперечных деформаций

В итоге после сваривания длинномерной конструкции в ней возникают значительные остаточные деформации и напряжения, которые вызывают отклонения от проектных размеров за пределы допустимых. Для устранения этого эффекта производят релаксацию продольных остаточных деформаций путем нагрева по линиям швов с обратной стороны. Этому способу присущи следующие недостатки. Он достаточно трудоемок, поскольку предварительная прихватка ребер жесткости к настильному листу требует дополнительного времени сварщика, а впоследствии ручной зачистки абразивным инструментом излишнего металла сварного шва в местах прихваток. Проводимая релаксация продольных остаточных напряжений в местах сварки путем газопламенного нагрева также связана с излишним расходом газов и, в целом, обуславливает необходимость дополнительных затрат труда, что повышает общую стоимость изготовления ребристой панели.

Наиболее близкой к заявляемому способу по решаемой задаче, технической сущности и достигаемому результату является технология изготовления ребристых панелей (ортотропных плит), предложенная Муравьевым И.И. и включающая в себя следующие этапы:

1. Укладка на стенде (рис. 5) металлического листа и прикрепление его по контуру с помощью съемных прижимных приспособлений к опорной плите.
2. Установка и закрепление на настильный лист с помощью приспособлений ребра жесткости.
3. Создание в ребрах жесткости растягивающих напряжений путем продольного приложения усилия.

#### 4. Сварка ребра жесткости и плиты.

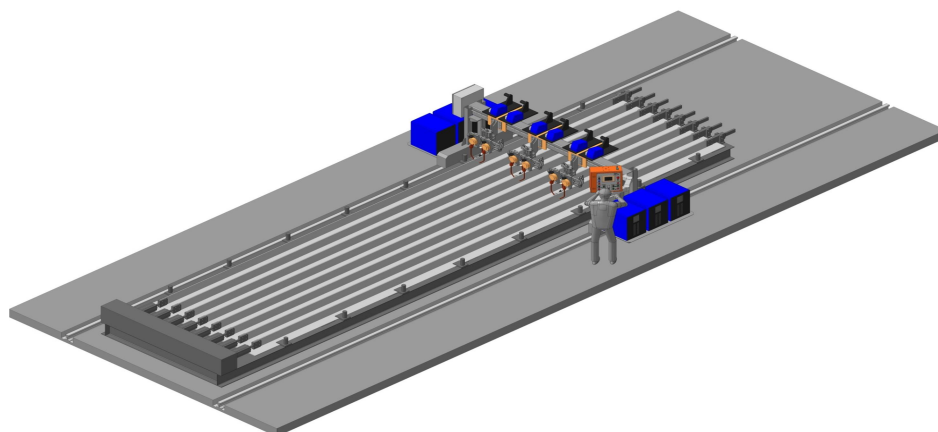


Рис. 5. Сборочный стенд

Данная технология (далее «новая технология») исключает необходимость прихватки ребра к настильному листу и обеспечивает снижение остаточных деформаций и трудоемкости изготовления ребристой панели.

Как показывают эксперименты применения данной технологии, в процессе сварки в ребрах жесткости образуется обратный выгиб с поднятием края ребра. Для его исключения к ребру прикладывают растягивающее усилие 3-10 тонн, которое не позволяет краю ребра деформироваться в вертикальной плоскости. В месте, где происходит сварка, верхний край ребра прижимается с помощью ролика, который не допускает появление зазора между нижней кромкой ребра и плитой (рис. 6).

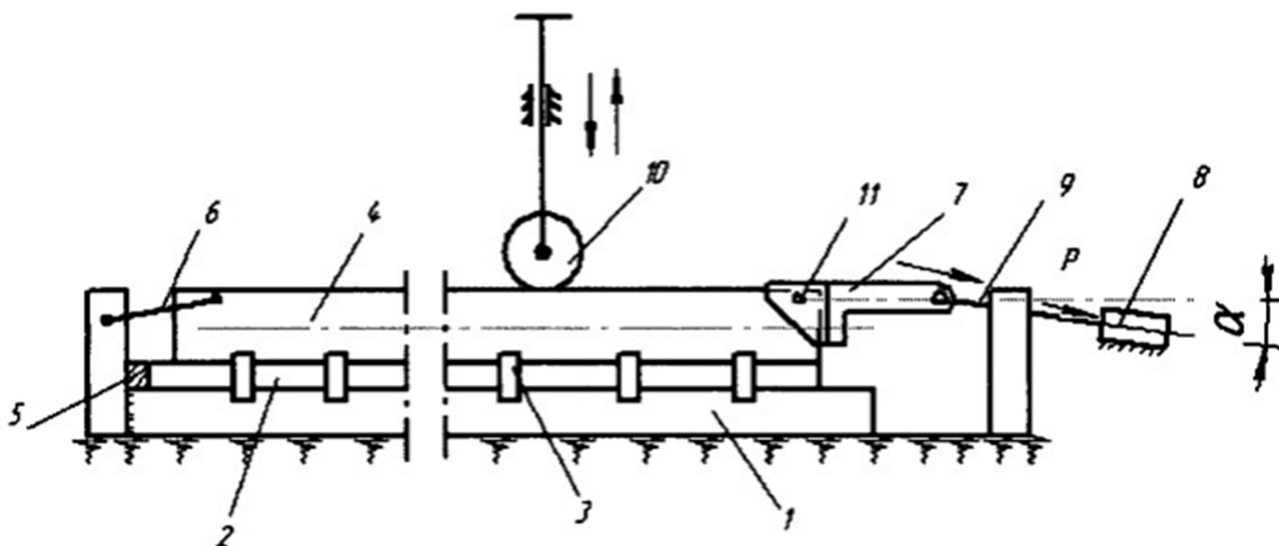


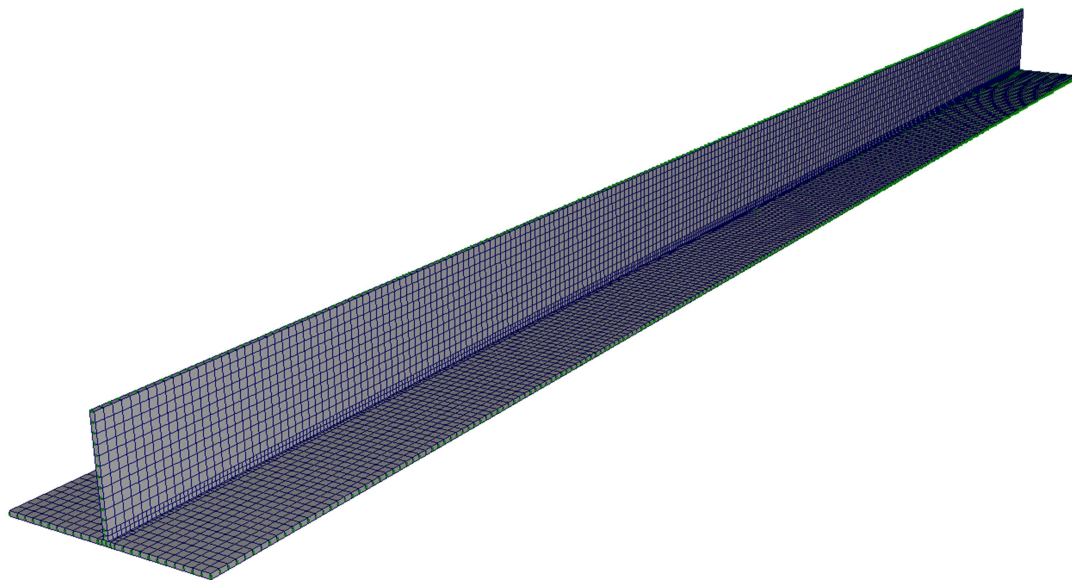
Рис. 6. Схема сборочного стенда (вид сбоку):

- 1 – опорная плита, 2 – настильный лист, 3 – прижим, 4 – ребро,
- 5 – базовый упор, 6, 7 – захваты, 8 – гидропривод (домкрат),
- 9 – штанга, 10 – прижимной ролик, 11 – захват



По данной технологии было изготовлено и внедрено в производство 96 образцов двутаврового сечения.

Численное моделирование сварки образца двутаврового сечения по базовой и новой технологиям было произведено в ПК SCAD Office. В качестве объекта исследования был выбран тавровый образец длиной 6 м (рис. 7).



**Рис. 7.** Общий вид вычислительной модели образца двутаврового сечения с сеткой конечных элементов

Образец имеет следующие размеры поперечного сечения: ширина полки – 600 мм, толщина полки – 14 мм, высота стенки (ребра) – 300 мм, толщина стенки (ребра) – 14 мм.

Шаг сетки разбиения плиты и ребра на конечные элементы – 2,5 см. В зоне сварного шва для получения наиболее полной картины НДС наведена сетка с шагом 1,25 см. Все конечные элементы имеют тип 41 (прямоугольный конечный элемент оболочки). На узлы полки тавра по контуру с шагом 1 м наложены связи, запрещающие вертикальное перемещение, которые моделируют закрепление плиты прижимными приспособлениями в процессе сварки.

В ПК SCAD Office для моделирования сварки использовался подключаемый модуль МОНТАЖ, который позволяет производить поэтапное изменение расчетной схемы, а именно: добавление/удаление элементов, установку/удаление связей, объединение перемещений узлов и т.д. В качестве одной стадии монтажа был взят участок сварного шва длиной 10 см. На этой стадии на образец оказывалось температурное воздействие, которое моделирует нагрев образца в месте сварки и прилегающей к этому участку зоне. При этом объединялись перемещения соответствующих узлов ребра и полки в месте сварки по всем степеням свободы.

Отличия в расчетных схемах по базовой и новой технологиям:

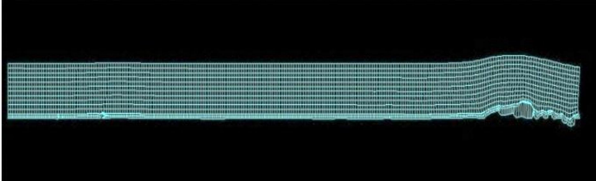
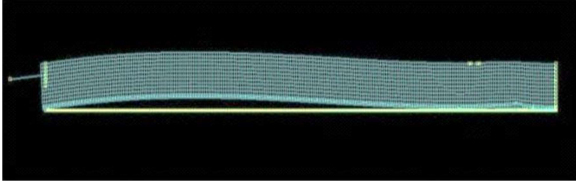
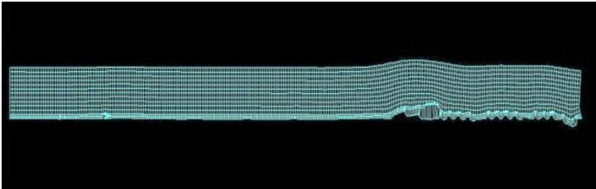
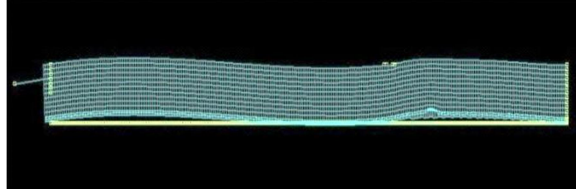
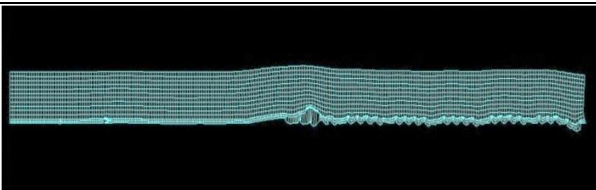
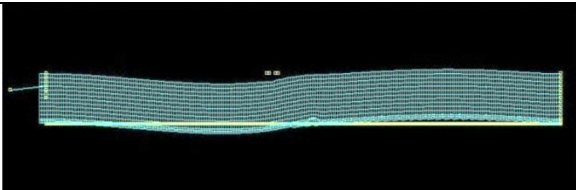
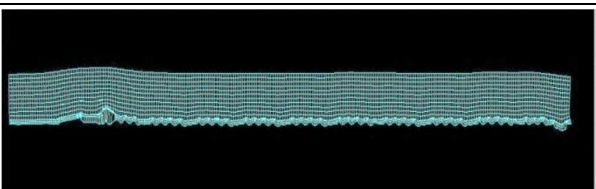
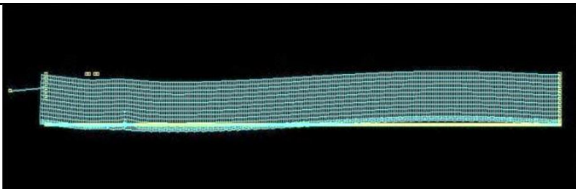
1. При расчете по базовой технологии присутствует стадия сварки прихваток с шагом 500 мм. При расчете по новой технологии эта стадия отсутствует.
2. При использовании новой технологии сварки по верху ребра движутся два прижимных ролика, расстояние от которых до места сварки 500 мм. В расчетной схеме данный механизм реализуется установкой на соответствующие узлы верхней части ребра связей, исключающих вертикальное смещение.

3. При расчете по новой технологии к ребру прикрепляется стержень, расположенный под углом  $3^\circ$  к горизонтали. На стержень прикладывается растягивающая сосредоточенная сила величиной 3-10 т, обеспечивающая натяжение ребра при сварке. На узлы ребра, расположенные на противоположном от стержня конце, накладываются связи, исключающие его линейное смещение.

После расчета в ПВК SCAD Office была произведена анализ НДС расчетной схемы по стадиям сварки. В табл. 1 представлены деформированные схемы ребра по четырем стадиям сварки по базовой и новой технологиям.

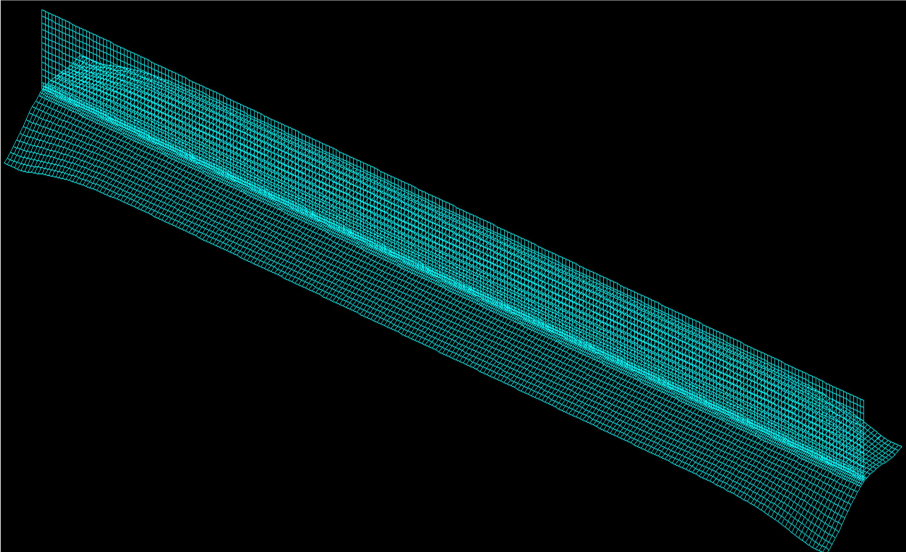
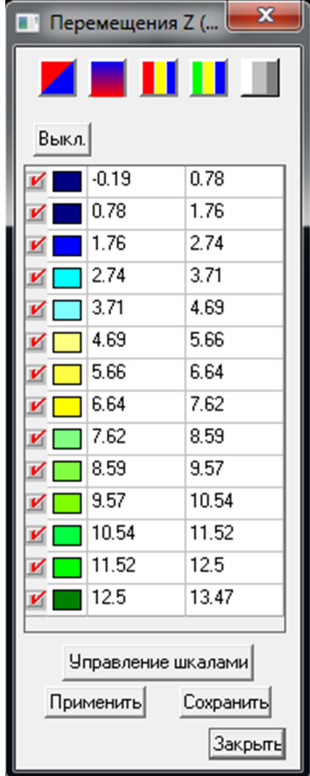
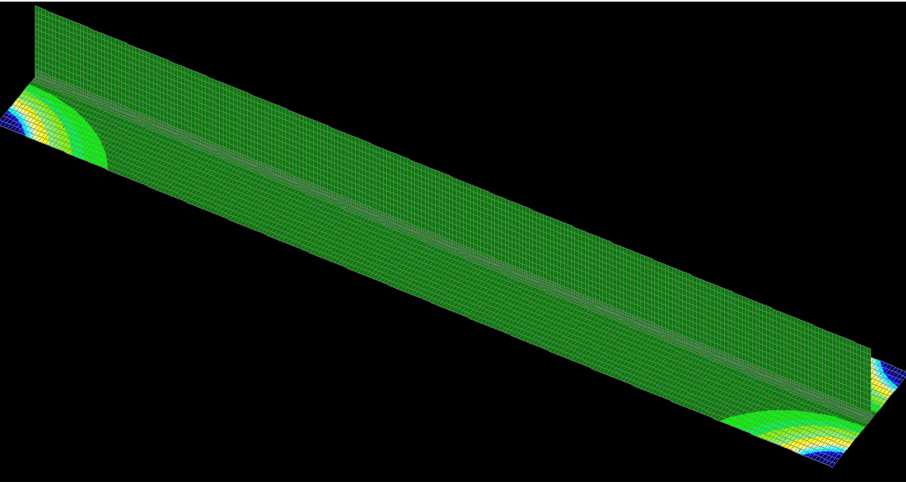
Таблица 1

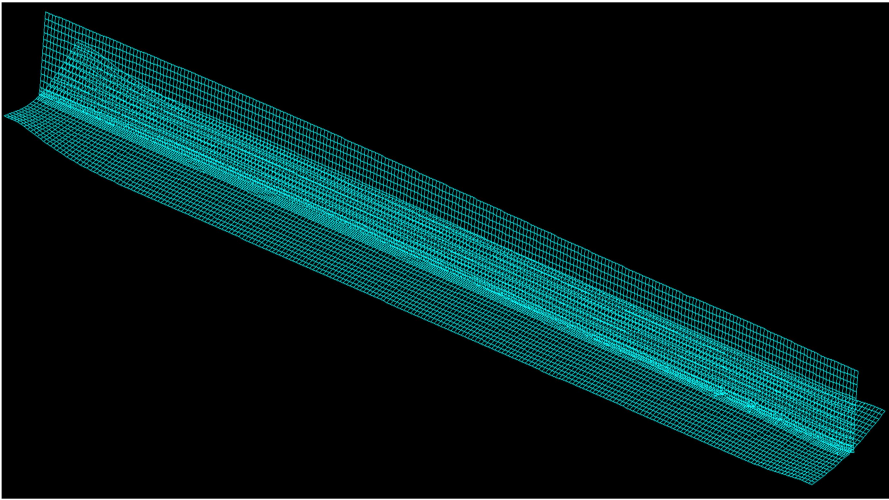
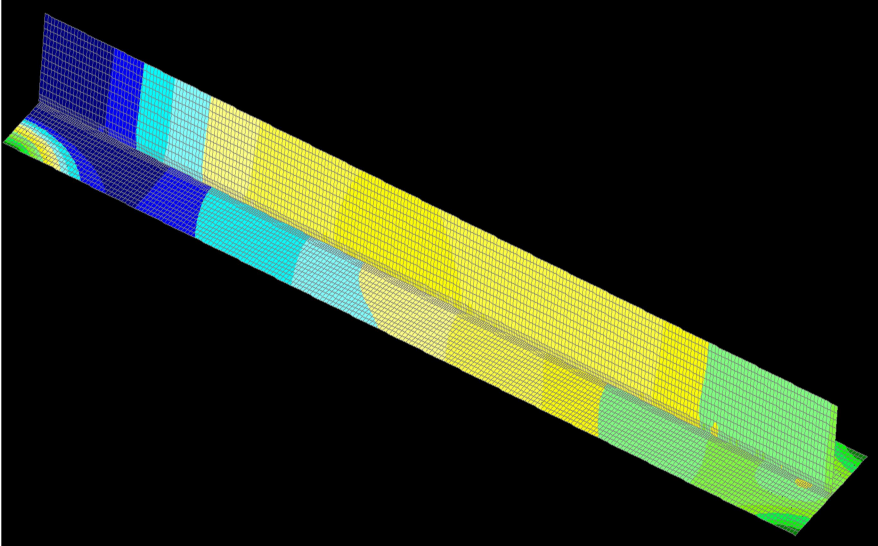
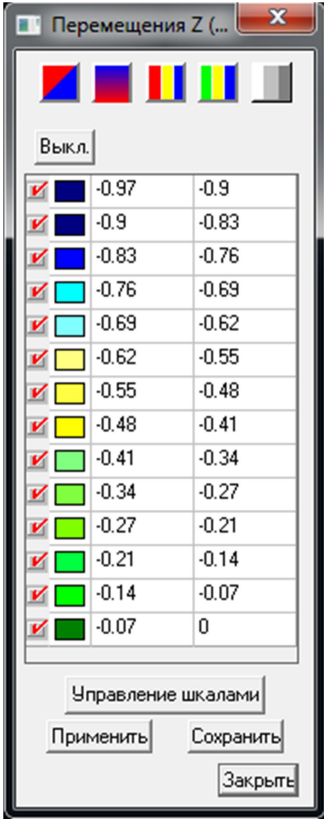
Деформированный вид ребра на различных стадиях сварки

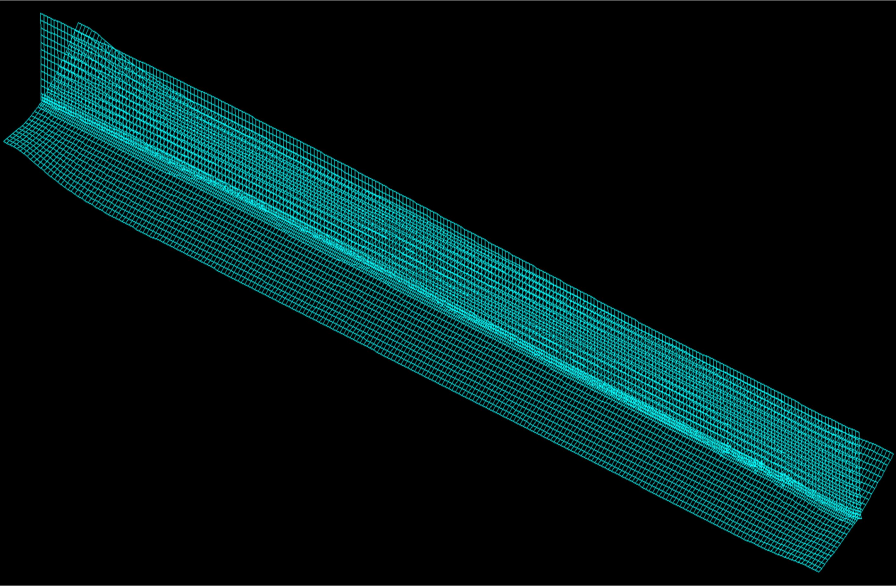
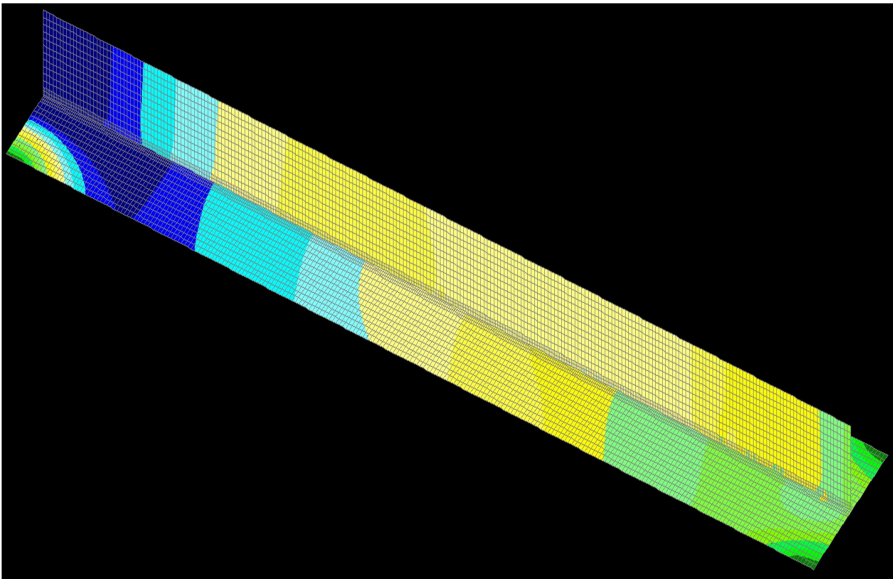
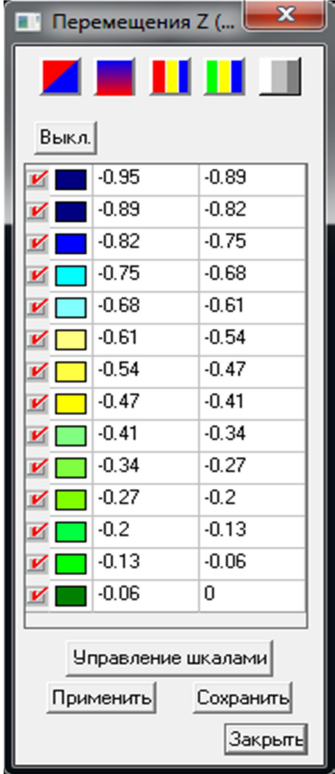
Но- мер ста- дии	Базовая технология	Новая технология
7		
17		
30		
51		

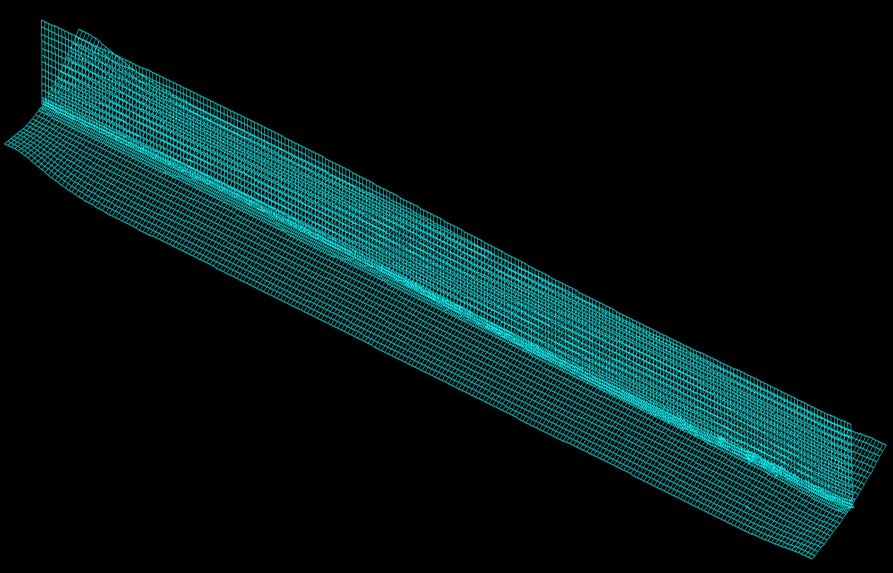
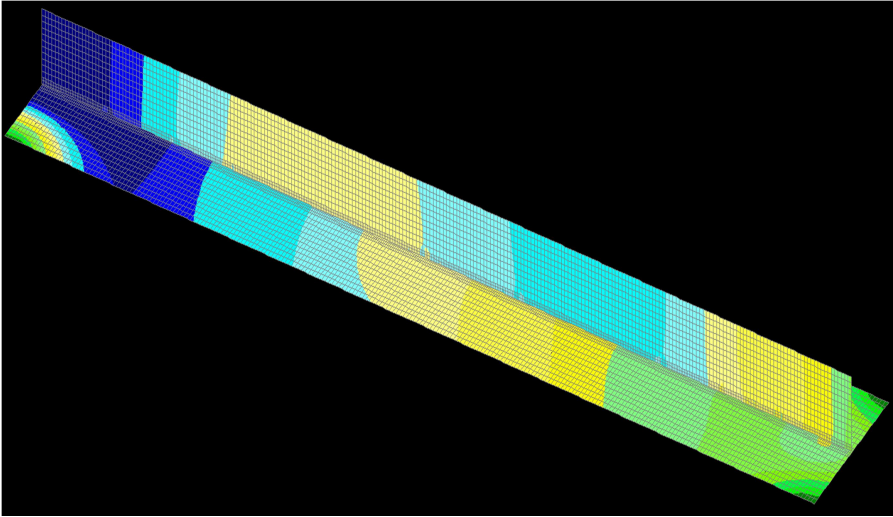
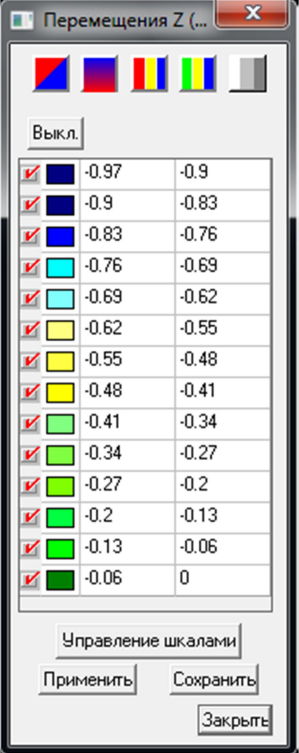
Также было проведено сравнение вертикальных перемещений точек таврового образца при сварке по базовой и новой технологиям. При этом к образцу при сварке по новой технологии прикладывалось различное по значению растягивающее усилие. В табл. 2 представлен анализ деформаций образца при различных параметрах сварки.

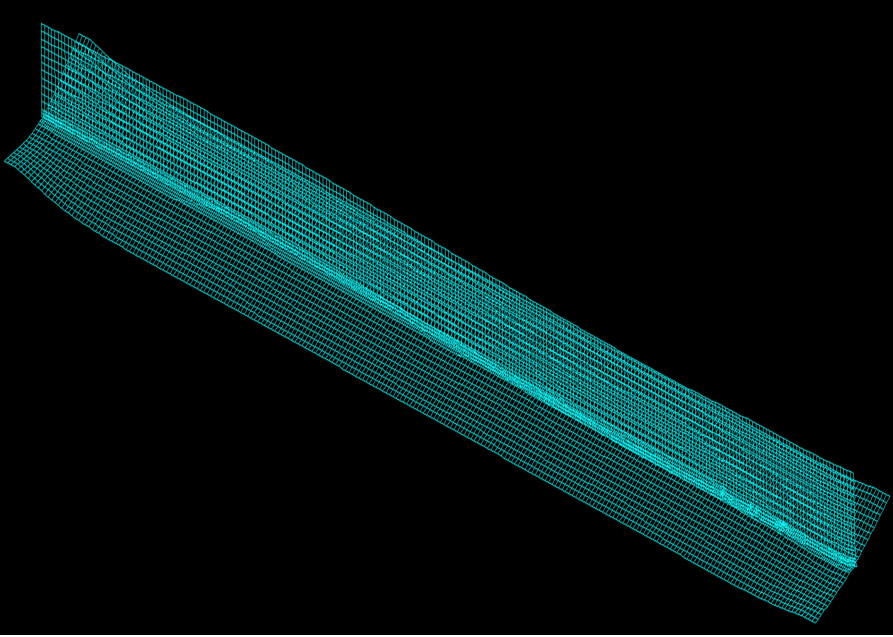
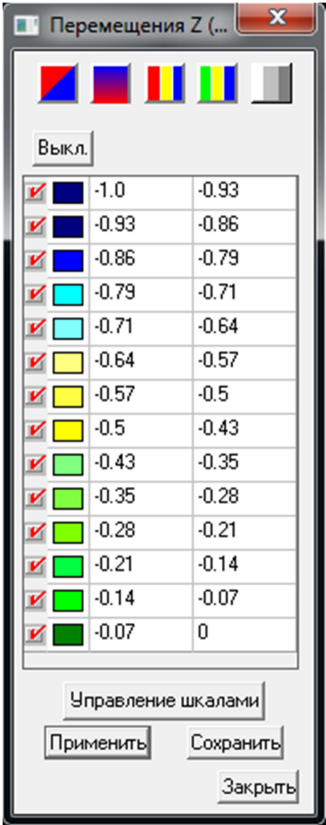
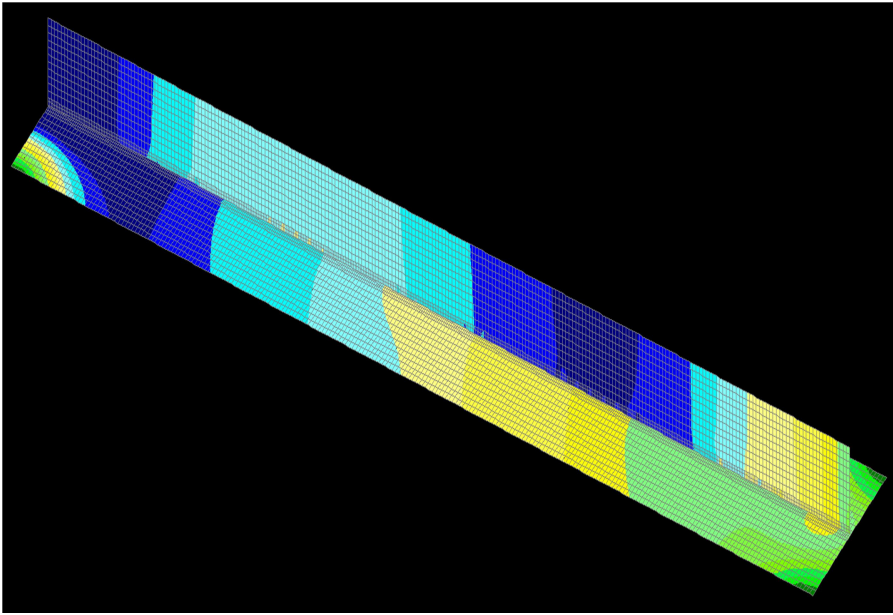
Сравнение деформаций таврового образца после сварки

<p>Схема в деформированном виде и изополю вертикальных перемещений</p>	<p>Значения вертикальных перемещений, мм</p>																																													
<p><b>Сварка по базовой технологии</b></p>																																														
	 <table border="1" data-bbox="1133 996 1404 1467"> <thead> <tr> <th colspan="3">Выкл.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.19</td><td>0.78</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>0.78</td><td>1.76</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>1.76</td><td>2.74</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>2.74</td><td>3.71</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>3.71</td><td>4.69</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>4.69</td><td>5.66</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>5.66</td><td>6.64</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>6.64</td><td>7.62</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>7.62</td><td>8.59</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>8.59</td><td>9.57</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>9.57</td><td>10.54</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>10.54</td><td>11.52</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>11.52</td><td>12.5</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>12.5</td><td>13.47</td></tr> </tbody> </table> <p>Управление шкалами</p> <p>Применить    Сохранить</p> <p>Закреть</p>	Выкл.			<input checked="" type="checkbox"/>	-0.19	0.78	<input checked="" type="checkbox"/>	0.78	1.76	<input checked="" type="checkbox"/>	1.76	2.74	<input checked="" type="checkbox"/>	2.74	3.71	<input checked="" type="checkbox"/>	3.71	4.69	<input checked="" type="checkbox"/>	4.69	5.66	<input checked="" type="checkbox"/>	5.66	6.64	<input checked="" type="checkbox"/>	6.64	7.62	<input checked="" type="checkbox"/>	7.62	8.59	<input checked="" type="checkbox"/>	8.59	9.57	<input checked="" type="checkbox"/>	9.57	10.54	<input checked="" type="checkbox"/>	10.54	11.52	<input checked="" type="checkbox"/>	11.52	12.5	<input checked="" type="checkbox"/>	12.5	13.47
Выкл.																																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.19	0.78																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	0.78	1.76																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	1.76	2.74																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	2.74	3.71																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	3.71	4.69																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	4.69	5.66																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	5.66	6.64																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	6.64	7.62																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	7.62	8.59																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	8.59	9.57																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	9.57	10.54																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	10.54	11.52																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	11.52	12.5																																												
<input checked="" type="checkbox"/>	12.5	13.47																																												
																																														

<p>Схема в деформированном виде и изополя вертикальных перемещений</p>	<p>Значения вертикальных перемещений, мм</p>																																																												
<p><b>Сварка по новой технологии с приложением растягивающей силы 10 т</b></p>																																																													
																																																													
	 <table border="1" data-bbox="1114 1041 1391 1529"> <thead> <tr> <th>Выкл.</th> <th>Color</th> <th>Value 1</th> <th>Value 2</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Dark Blue</td><td>-0.97</td><td>-0.9</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Blue</td><td>-0.9</td><td>-0.83</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Light Blue</td><td>-0.83</td><td>-0.76</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Cyan</td><td>-0.76</td><td>-0.69</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Light Cyan</td><td>-0.69</td><td>-0.62</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Yellow-Green</td><td>-0.62</td><td>-0.55</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Yellow</td><td>-0.55</td><td>-0.48</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Light Yellow</td><td>-0.48</td><td>-0.41</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Light Green</td><td>-0.41</td><td>-0.34</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Green</td><td>-0.34</td><td>-0.27</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Light Green</td><td>-0.27</td><td>-0.21</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Green</td><td>-0.21</td><td>-0.14</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Light Green</td><td>-0.14</td><td>-0.07</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>Dark Green</td><td>-0.07</td><td>0</td></tr> </tbody> </table> <p>Управление шкалами</p> <p>Применить    Сохранить</p> <p>Закреть</p>	Выкл.	Color	Value 1	Value 2	<input checked="" type="checkbox"/>	Dark Blue	-0.97	-0.9	<input checked="" type="checkbox"/>	Blue	-0.9	-0.83	<input checked="" type="checkbox"/>	Light Blue	-0.83	-0.76	<input checked="" type="checkbox"/>	Cyan	-0.76	-0.69	<input checked="" type="checkbox"/>	Light Cyan	-0.69	-0.62	<input checked="" type="checkbox"/>	Yellow-Green	-0.62	-0.55	<input checked="" type="checkbox"/>	Yellow	-0.55	-0.48	<input checked="" type="checkbox"/>	Light Yellow	-0.48	-0.41	<input checked="" type="checkbox"/>	Light Green	-0.41	-0.34	<input checked="" type="checkbox"/>	Green	-0.34	-0.27	<input checked="" type="checkbox"/>	Light Green	-0.27	-0.21	<input checked="" type="checkbox"/>	Green	-0.21	-0.14	<input checked="" type="checkbox"/>	Light Green	-0.14	-0.07	<input checked="" type="checkbox"/>	Dark Green	-0.07	0
Выкл.	Color	Value 1	Value 2																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Dark Blue	-0.97	-0.9																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Blue	-0.9	-0.83																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Light Blue	-0.83	-0.76																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Cyan	-0.76	-0.69																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Light Cyan	-0.69	-0.62																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Yellow-Green	-0.62	-0.55																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Yellow	-0.55	-0.48																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Light Yellow	-0.48	-0.41																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Light Green	-0.41	-0.34																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Green	-0.34	-0.27																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Light Green	-0.27	-0.21																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Green	-0.21	-0.14																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Light Green	-0.14	-0.07																																																										
<input checked="" type="checkbox"/>	Dark Green	-0.07	0																																																										

<p>Схема в деформированном виде и изополя вертикальных перемещений</p>	<p>Значения вертикальных перемещений, мм</p>																														
<p><b>Сварка по новой технологии с приложением растягивающей силы 8 т</b></p>																															
																															
	 <table border="1" data-bbox="1114 999 1401 1460"> <thead> <tr> <th colspan="2">Выкл.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.95 -0.89</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.89 -0.82</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.82 -0.75</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.75 -0.68</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.68 -0.61</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.61 -0.54</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.54 -0.47</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.47 -0.41</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.41 -0.34</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.34 -0.27</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.27 -0.2</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.2 -0.13</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.13 -0.06</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.06 0</td></tr> </tbody> </table> <p>Управление шкалами</p> <p>Применить    Сохранить</p> <p>Закреть</p>	Выкл.		<input checked="" type="checkbox"/>	-0.95 -0.89	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.89 -0.82	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.82 -0.75	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.75 -0.68	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.68 -0.61	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.61 -0.54	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.54 -0.47	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.47 -0.41	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.41 -0.34	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.34 -0.27	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.27 -0.2	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.2 -0.13	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.13 -0.06	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.06 0
Выкл.																															
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.95 -0.89																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.89 -0.82																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.82 -0.75																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.75 -0.68																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.68 -0.61																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.61 -0.54																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.54 -0.47																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.47 -0.41																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.41 -0.34																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.34 -0.27																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.27 -0.2																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.2 -0.13																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.13 -0.06																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.06 0																														

<p>Схема в деформированном виде и изополя вертикальных перемещений</p>	<p>Значения вертикальных перемещений, мм</p>																														
<p><b>Сварка по новой технологии с приложением растягивающей силы 6 т</b></p>																															
																															
	 <table border="1" data-bbox="1129 925 1385 1373"> <thead> <tr> <th colspan="2">Вкл.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.97 -0.9</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.9 -0.83</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.83 -0.76</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.76 -0.69</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.69 -0.62</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.62 -0.55</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.55 -0.48</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.48 -0.41</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.41 -0.34</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.34 -0.27</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.27 -0.2</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.2 -0.13</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.13 -0.06</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.06 0</td></tr> </tbody> </table> <p>Управление шкалами</p> <p>Применить Сохранить</p> <p>Закреть</p>	Вкл.		<input checked="" type="checkbox"/>	-0.97 -0.9	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.9 -0.83	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.83 -0.76	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.76 -0.69	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.69 -0.62	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.62 -0.55	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.55 -0.48	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.48 -0.41	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.41 -0.34	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.34 -0.27	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.27 -0.2	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.2 -0.13	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.13 -0.06	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.06 0
Вкл.																															
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.97 -0.9																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.9 -0.83																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.83 -0.76																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.76 -0.69																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.69 -0.62																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.62 -0.55																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.55 -0.48																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.48 -0.41																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.41 -0.34																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.34 -0.27																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.27 -0.2																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.2 -0.13																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.13 -0.06																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.06 0																														

<p>Схема в деформированном виде и изополя вертикальных перемещений</p>	<p>Значения вертикальных перемещений, мм</p>																														
<p><b>Сварка по новой технологии с приложением растягивающей силы 4 т</b></p>																															
	 <table border="1" data-bbox="1114 902 1396 1395"> <thead> <tr> <th colspan="2">Вкл.</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-1.0 -0.93</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.93 -0.86</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.86 -0.79</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.79 -0.71</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.71 -0.64</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.64 -0.57</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.57 -0.5</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.5 -0.43</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.43 -0.35</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.35 -0.28</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.28 -0.21</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.21 -0.14</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.14 -0.07</td></tr> <tr><td><input checked="" type="checkbox"/></td><td>-0.07 0</td></tr> </tbody> </table>	Вкл.		<input checked="" type="checkbox"/>	-1.0 -0.93	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.93 -0.86	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.86 -0.79	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.79 -0.71	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.71 -0.64	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.64 -0.57	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.57 -0.5	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.5 -0.43	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.43 -0.35	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.35 -0.28	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.28 -0.21	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.21 -0.14	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.14 -0.07	<input checked="" type="checkbox"/>	-0.07 0
Вкл.																															
<input checked="" type="checkbox"/>	-1.0 -0.93																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.93 -0.86																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.86 -0.79																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.79 -0.71																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.71 -0.64																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.64 -0.57																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.57 -0.5																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.5 -0.43																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.43 -0.35																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.35 -0.28																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.28 -0.21																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.21 -0.14																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.14 -0.07																														
<input checked="" type="checkbox"/>	-0.07 0																														
																															

При сравнении деформированных схем при сварке по базовой и новой технологиям можно сделать следующие выводы:

1. Различия в виде деформированных схем по стадиям монтажа можно объяснить тем, что при сварке по новой технологии к привариваемому ребру с эксцентриситетом прикладывается растягивающая нагрузка.
2. Деформируемые схемы, полученные с помощью моделирования процесса сварки в ПК SCAD Office, качественно согласуются с картиной деформаций образцов при экспериментальных исследованиях.
3. Максимальное экспериментальное значение перемещения при сварке по базовой технологии – 16 мм; при расчете в ПК SCAD Office – 13,47 мм и достигается в центре плиты.
4. Максимальное экспериментальное значение перемещения при сварке по новой технологии – 1,1 мм; при расчете в ПК SCAD Office – 1,0 мм и достигается в точках края ребра.

#### Библиографический список

1. Рыкалин, Н.Н. Тепловые основы сварки / Н.Н. Рыкалин. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. – 273 с.
2. Навроцкий, Д.И. Расчет сварных соединений с учетом концентрации напряжений / Д.И. Навроцкий. – Л.: Машиностроение, 1968. – 170 с.
3. Окерблом, Н.О. Сварочные напряжения и деформации / Н.О. Окерблом. – М.-Л.: МАШГИЗ, 1948. – 252 с.

#### References

1. Rykalin, N. N. Thermal fundamentals of welding / N. N. Rykalin. – M.: publishing house of the Academy of Sciences of the USSR, 1947. – 273 p.
2. Nawrocki, D.I. Calculation of welded joints subject to stress concentrations / D.I. Navrotskiy. – L.: Publishing House. Mechanical engineering, 1968. – 170 p.
3. Okerblom N.O. Welding stresses and deformation / N. O. Okerblom. - M.-L.: MASHGIZ, 1948. — 252 p.

**Ключевые слова:** сварной образец, напряженно-деформированное состояние, температурное воздействие, стадия монтажа, изополя изгибающих моментов.

**Key words:** welded sample, deflected mode, temperature impact, phase of installation, bending moment isofields.



# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

УДК 624.16:624.131.54

*Воронежский государственный архитек-  
турно-строительный университет*

*Д-р техн. наук, проф. кафедры  
строительной механики*

*Д. М. Шапиро,*

*Канд. техн. наук, доц. кафедры строи-  
тельной механики*

*А.В. Агарков*

*Россия, г.Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30*

*e-mail:davshap@mail.ru*

*Voronezh State University of Architecture and  
Civil Engineering*

*Dr of Tech. Sc., Professor of Department of  
Structural Mechanics*

*D.M. Shapiro*

*PhD of Techn. Sc, Associate Professor of De-  
partment of Structural Mechanics*

*A.V. Agarkov*

*Voronezh, Russia, tel.: 8(473)271-52-30*

*e-mail:davshap@mail.ru*

Д.М. Шапиро, А.В. Агарков

## АНАЛИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ

Содержатся математические преобразования, выполненные Д. Друккером и Б. Прагером в известной статье (1952), в изложении, доступном для практических инженеров – пользователей программ, реализующих расчётную модель грунта, предложенную этими авторами. Приводятся результаты численного исследования решений геотехнических задач в упругопластической постановке с использованием уравнений предельного напряжённого состояния грунта Мора-Кулона и Мизеса-Шлейхера-Боткина по версии, предложенной Д. Друккером и Б. Прагером. Показано, что для условий плоской деформации правильным является описание пластического деформирования грунта по уравнению Мора-Кулона.

Shapiro D.M., Agarkov A.V.

## ANALYSIS OF GROUNDS PLASTIC FLOW ELASTIC-PLASTIC DESIGN MODELS

There is given math conversion implemented by D. Drucker and B. Prager in the known article (1952) understandable for engineers – practitioners –program users, realizing design ground model proposed by these authors. There are presented the research results of geotechnical problem solving in elastic-plastic statement with use of More-Kulon's and Mizes-Shleycher- Botkin's ground deflected mode equations. It is shown that the description of ground plastic deformation according to More-Kulon equation is correct for plane deformation.

В современных программных комплексах, реализующих решения физически нелинейных геотехнических задач, представлены модули, в которых связи между напряжениями и деформациями грунтовой среды описываются диаграммой Прандтля. Наиболее употребительными для российских специалистов являются решения упругопластических задач, в постановках которых линейная (упругая) часть деформаций следует соотношениям закона Гука, а пластическая часть (после достижения предельного напряжённого состояния) – теории пластического течения с уравнениями предельного напряжённого состояния Мора-Кулона (1) и Мизеса-Шлейхера-Боткина (2):

© Шапиро Д.М., Агарков А.В., 2016

$$[1/4(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2]^{1/2} + 1/2(\sigma_x + \sigma_z)\sin\varphi - c\cos\varphi = 0, \quad (1)$$

$$I_2^{1/2} + \alpha I_1 - k = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$  – компоненты напряжений в точках грунтовой среды в плоскости  $XOZ$  в условиях плоской деформации;  $I_1, I_2$  – первый инвариант тензора и второй инвариант девиатора напряжений при пространственном напряжённом состоянии,

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad (3)$$

$$I_2 = 1/6 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 = \\ = 1/6 [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{xz}^2]; \quad (4)$$

$\varphi, c$  – прочностные характеристики грунта: угол внутреннего трения и удельное сцепление,  $\alpha, k$  – прочностные характеристики грунта, аналогичные  $\varphi, c$  в условиях пространственного или осесимметричного напряжённого состояния.

В руководствах известным российским специалистам зарубежных программных комплексов *PLAXIS, Midas GTS* и других упругопластическая модель с пределом текучести по уравнению (2) именуется моделью Друккера-Прагера. Реализованные в программах алгоритмы допускают возможность деформирования грунта на пластической стадии в соответствии с уравнениями неассоциированного (5) и ассоциированного (6) законов течения:

$$\varepsilon_{i,j} = \lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{i,j}}, \quad \varepsilon_{x,y,z} = \lambda \left( \Lambda + \frac{\sigma_{x,y,z} - \frac{I_1}{3}}{2I_2^{1/2}} \right), \quad (5)$$

$$\varepsilon_{i,j} = \lambda \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{i,j}}, \quad \varepsilon_{x,y,z} = \lambda \left( \alpha + \frac{\sigma_{x,y,z} - \frac{I_1}{3}}{2I_2^{1/2}} \right), \quad (6)$$

где  $\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{x,y,z}$  – компоненты относительных деформаций на пластической стадии,  $\sigma_{ij}$  – компоненты напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ ;  $\lambda$  – малая скалярная величина,  $F = I_2^{1/2} + \alpha I_1 - k$ ,  $F^p = I_2^{1/2} + \alpha I_1 - k$  – пластические потенциалы неассоциированного и ассоциированного законов течения,  $\Lambda$  – параметр дилатансии, вводимый в расчёт в качестве независимой константы.

По нашему мнению, терминология, используемая в указанных выше программах, не вполне верна. Решения, в которых используется уравнение (2), следует считать общим случаем модели Мизеса-Шлейхера-Боткина. В более поздней статье [1] Д. Друккера и Б. Прагера и её переводе на русский язык [2] исследуется версия модели Мизеса-Шлейхера-Боткина для условий плоской деформации. Получены соотношения между парами прочностных характеристик  $\alpha, k$  и  $\varphi, c$  при условии, что грунт на стадии пластического течения одновременно удовлетворяет уравнениям (1) и (2).

Ниже рассматриваются математические преобразования, выполненные авторами работы [1, 2], в более подробном изложении в форме, понятной и доступной для практических инженеров – пользователей программ.

Решается плоская задача (плоская деформация). В качестве условия текучести приняты уравнения (1) и (2), описание деформирования после достижения предела текучести в соответствии с ассоциированным законом течения по уравнению (6).

В условиях плоской деформации  $\tau_{xy}=\tau_{yz}=0$ . Требуется, чтобы третья (нормальная к расчётной плоскости) главная деформация  $\varepsilon_3=\varepsilon_y$  равнялась нулю.

Основываясь на этих соображениях, можно сделать следующие записи:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_y = \lambda \left( \alpha + \frac{\sigma_y - \frac{I_1}{3}}{2I_2^{1/2}} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\sigma_y = \sigma_3 = -2\alpha I_2^{1/2} + 1/3 I_1, \quad (8)$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_z - 2\alpha I_2^{1/2} + 1/3 I_1; \quad 2/3 I_1 = \sigma_x + \sigma_z - 2\alpha I_2^{1/2};$$

$$I_1 = 3/2(\sigma_x + \sigma_z) - 3I_2^{1/2}; \quad (9)$$

$$\sigma_y = \sigma_3 = -3\alpha I_2^{1/2} + 1/2(\sigma_x + \sigma_z). \quad (10)$$

Подстановка (8) в уравнение (4) после некоторых преобразований позволяет получить

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_z)^2 + \left( \sigma_z + 3\alpha I_2^{1/2} - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \right)^2 + \left( -3\alpha I_2^{1/2} + \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sigma_x \right)^2 \right] + \tau_{xz}^2 = \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{3}{2} (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 18\alpha^2 I_2 \right] + \tau_{xz}^2 = \left( \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2 + 3\alpha^2 I_2. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения следует:

$$I_2 = \frac{1/4(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2}{1 - 3\alpha^2}$$

или

$$I_2^{1/2} = \frac{\left[ 1/4(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2}}{(1 - 3\alpha^2)^{1/2}}. \quad (11)$$

Подстановка (9) в уравнение (2)  $F^p = I_2^{1/2} + \alpha I_1 - k = 0$  позволяет получить

$$F^p = \frac{3}{2} \alpha (\sigma_x + \sigma_z) + (1 - 3\alpha^2) I_2^{1/2} - k = 0. \quad (12)$$

Заменяя в последнем выражении  $I_2^{1/2}$  правой частью уравнения (11), получаем

$$\left[ 1/4(\sigma_x - \sigma_z)^2 + \tau_{xz}^2 \right]^{1/2} + 1/2(\sigma_x + \sigma_z) \frac{3\alpha}{(1 - 3\alpha^2)^{1/2}} - \frac{k}{(1 - 3\alpha^2)^{1/2}} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) является одновременно тождественной формой выражений (2) и (1) при условиях

$$\sin \varphi = \frac{3\alpha}{(1-3\alpha^2)^{1/2}}, \quad \cos \varphi = \frac{(1-12\alpha^2)^{1/2}}{(1-3\alpha^2)^{1/2}}, \quad c = \frac{k}{(1-12\alpha^2)^{1/2}}.$$

Если приближённо принять  $(1-3\alpha^2)^{1/2}=1.0$ , можно получить простые соотношения связи между парами прочностных характеристик  $\alpha$ ,  $k$  и  $\varphi$ ,  $c$ :

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{3}, \quad k = c \cos \varphi. \quad (14)$$

Авторы статьи [1, 2] так определили цель своего исследования: «Цель нашей работы состоит в обсуждении следствий из предположения о том, что грунт является идеально пластическим телом. Обоснованность этого предположения не является предметом обсуждения. Не рассматриваются также такие важные вопросы, как влияние воды в грунте или существенно разное поведение различных составных частей грунта, например глины и песка. Всё внимание уделяется попыткам найти теорию, согласующуюся с основным предположением. Указанием на степень идеализации послужит сравнение предсказаний этой теории с реальным поведением грунтов».

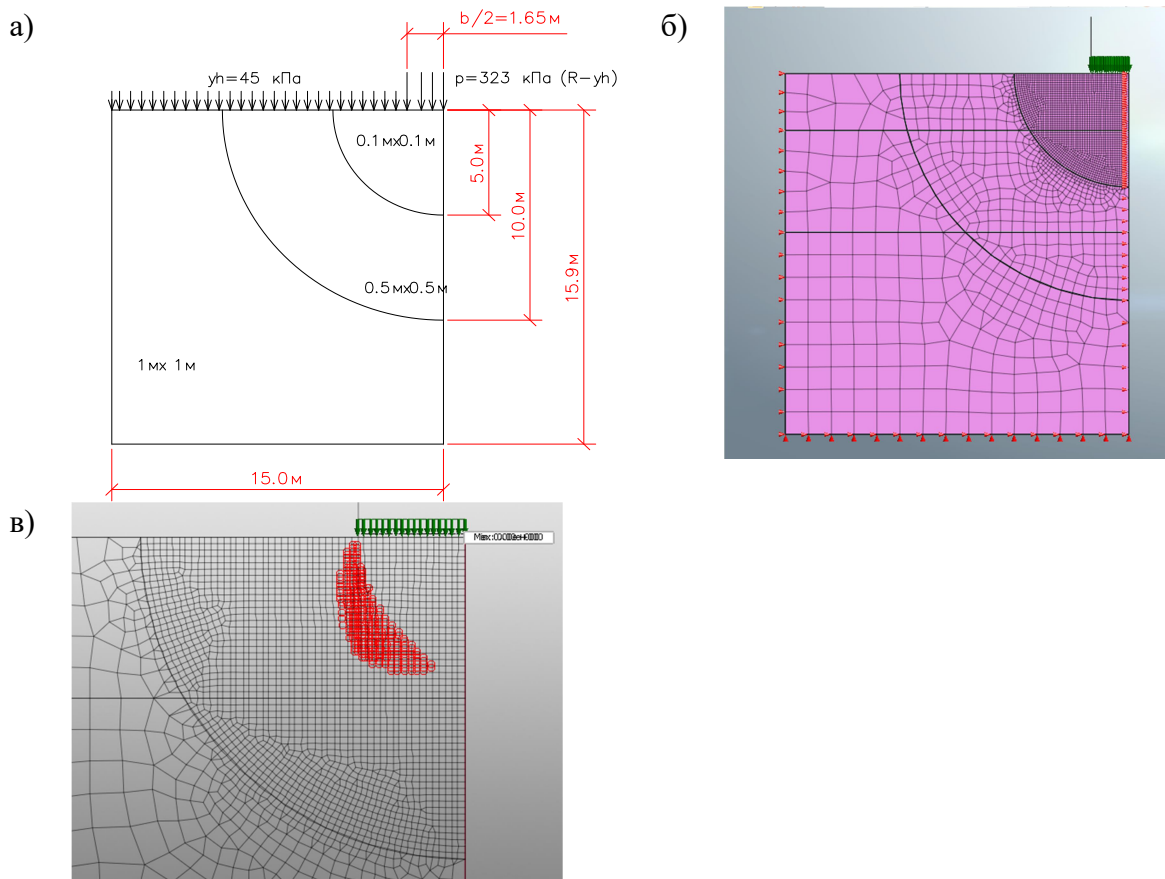
Покажем соотношение результатов решений двух групп плоских (плоская деформация) задач в упругопластической постановке с использованием уравнений предельного напряжённого состояния (1) и (2), (6). Расчёты выполнены по программе *Midas GTS*.

1. Задачи о полосовой нагрузке на основании, ограниченном горизонтальной плоскостью. Для численного исследования принята расчётная область на рис. 1, а, б с размерами  $30 \times 18,4$  м, ширина полосы нагрузки  $b=3,3$  м, глубина заложения  $h=2,5$  м, граничные условия описаны в подписи к рисунку. Природное давление в основании принято распределённым гидростатически:  $\sigma_{xg}=\sigma_{zg}=\gamma(h+z)$ , где  $\gamma$  – удельный вес грунта в основании,  $z$  – расстояние по вертикали центров конечных элементов от уровня приложения полосовой нагрузки. При численном исследовании рассмотрены три варианта грунтовых условий в основании:

- 1) полутвёрдая глина с  $\gamma=18,5$  кН/м<sup>3</sup>,  $\varphi=20^\circ$ ,  $c=54$  кПа, модулем деформации  $E=25$  МПа, коэффициентом Пуассона  $\nu=0,4$ ;
- 2) твёрдая супесь с  $\gamma=17$  кН/м<sup>3</sup>,  $\varphi=24^\circ$ ,  $c=13$  кПа,  $E=30$  МПа,  $\nu=0,32$ ;
- 3) мелкий песок с  $\gamma=17,8$  кН/м<sup>3</sup>,  $\varphi=32^\circ$ ,  $c=0$ ,  $E=34$  МПа,  $\nu=0,29$ .

Расчётные сопротивления  $R$  оснований по формуле (5.7) СП 22.13330.2011 и величины природного давления  $\gamma h$  составили: для полутвёрдой глины  $R=476$  кПа,  $\gamma h=46$  кПа, для твёрдой супеси  $R=288$  кПа,  $\gamma h=43$  кПа, для мелкого песка  $R=368$  кПа,  $\gamma h=45$  кПа.

В расчётах с использованием на стадии пластического деформирования по уравнению Мора-Кулона (1) принята интенсивность полосой нагрузки  $p=R$ . По результатам расчётов с тремя вариантами грунтовых условий при  $p=R$  получены пластические области, проникающие в основание на глубину  $z=1,9-2,4$  м, что соответствует  $(0,58-0,73)b$ . Осадки основания для трёх вариантов грунтовых условий составили соответственно 50, 41, 75 мм. Расчёты повторялись 3 раза, принимая параметр дилатансии  $\Lambda^*=0$ ;  $\frac{1}{2}\sin\varphi$ ;  $\sin\varphi$ , что на результаты расчётов не повлияло.



**Рис. 1.** К решению задач о полосовой нагрузке на основании, ограниченном горизонтальной плоскостью: *a* – расчётная область, граничные условия, *б* – членение основания на конечные элементы, *в* – пластическая область в основании по результатам расчёта по модели Мора-Кулона

В таких же расчётах по модели Друккера-Прагера с ассоциированным законом течения по уравнениям (2), (6) при  $p=R$  пластические области не были получены. После этого нагружение оснований было продолжено до получения размеров пластических областей  $z=2,0-2,2$  м,  $z/b=0,60-0,62$ . Достигнутая при этом интенсивность нагрузки составила от 360 до 645 кПа, что соответствует  $p=(1,1-1,4)R$ . Расчётные осадки, полученные после увеличения нагрузок, составили 86, 60, 113 мм.

На рис. 1, *в* выделены пластические области в основании, полученные по результатам численного исследования сравниваемых моделей для условий основания по варианту 1 (полутвёрдая глина). Расчётные формы и размеры пластических областей в основания по вариантам 2 и 3, а также по результатам расчётов по модели Друккера-Прагера (при увеличенных нагрузках) практически не отличаются от изображений на рис. 1, *в*.

2. *Задачи об устойчивости откосного грунтового массива.* Расчётная область показана на рис. 2. Расчёты выполнены с двумя вариантами механических характеристик грунтов, слагающих основание и откосную часть. Действующей нагрузкой является собственный вес грунта. Природное давление на части расчётной области ниже плоскости *AB* на рис. 2, *a* принято распределенным гидростатически. Все нагрузки приложены в одну стадию. Коэффициенты запаса устойчивости  $K_{уст.}$  грунтового массива определялись по процедуре метода редукции (Strength Reduction Method SRM) с одновременным понижением прочностных характеристик  $c$  и  $tg\varphi$ . Величины  $K_{уст.}$  определялись как отношение заданных расчётных значений  $c-tg\varphi$  и значений тех же параметров при исчерпании несущей способности, фиксируемом

несходящейся итерацией. Исходные данные и результаты расчётов представлены в таблице, из которой следует, что коэффициенты  $K_{уст}$  по расчёту в соответствии с моделью Друккера-Прагера [уравнения (2), (6)] на 21 и 28 % больше результатов расчёта по модели Мора-Кулона.

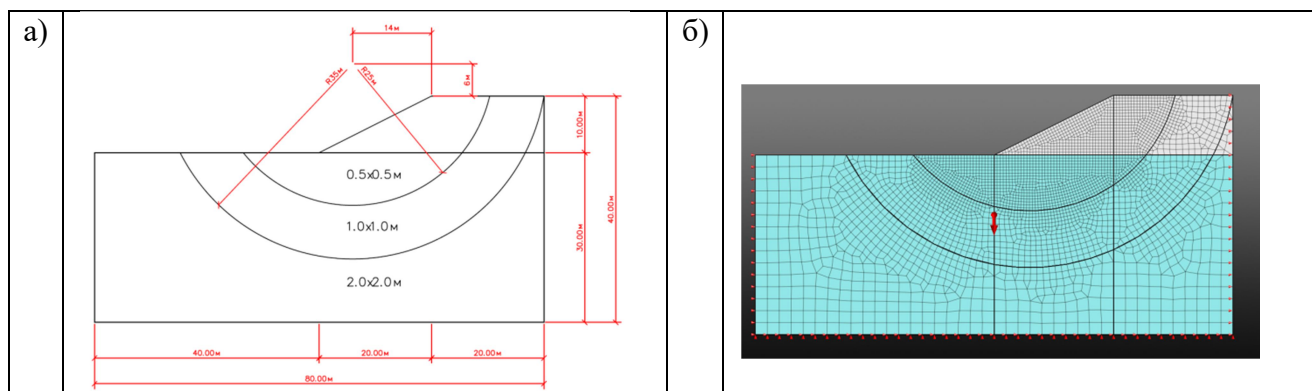


Рис. 2. Расчётная область задач об устойчивости откосного грунтового массива: а – общая схема, граничные условия; б – членение на конечные элементы

Таблица

Исходные данные и результаты расчётов к задачам об устойчивости грунтового откосного массива

Наименование грунта	$\gamma$ , кН/м <sup>3</sup>	$\varphi$	$c$ , кПа	$E$ , МПа	$\nu$	$K_{уст}$ по модели	
						Мора-Кулона	Друккера-Прагера
Песок мелкий	18	32 <sup>0</sup>	1	34	0,29	1,70	2,18
Супесь твёрдая	17	24 <sup>0</sup>	13	30	0,32	2,03	2,45

Размеры пластических областей и показатели несущей способности по результатам расчётов одних и тех же расчётных областей по двум моделям с условиями предельного напряжённого состояния (текучести) по уравнениям (1) и (2), (6) получены существенно различными. Показатели несущей способности оснований по модели Друккера-Прагера получены заметно более высокими.

Причина этого – преувеличенные значения напряжений по уравнению (8)  $\sigma_3 = \sigma_y = -3\alpha I_2^{1/2} + 1/2(\sigma_x + \sigma_z)$ , где  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$  являются сжимающими (отрицательными) напряжениями. Напряжения  $\sigma_3 = \sigma_y$  по формуле (8) получены в результате допущения о том, что деформации  $\varepsilon_3 = \varepsilon_y = 0$  и при этом являются пластическими. Авторы рассматриваемой модели допускают, что в условиях плоской деформации возможно пластическое течение в направлении продольной (нормальной к плоскости расчёта  $XOZ$ ) оси со скоростью, равной нулю. Напряжения  $\sigma_3 = \sigma_y$  по уравнению (8) существенно больше (по абсолютной величине), чем по обычному расчёту с использованием уравнения Мора-Кулона, где пластические деформации и векторы их скоростей лежат в плоскости  $XOZ$ ,  $\sigma_3 = \sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z)$ ,  $\nu$  всегда меньше  $1/2$ .

По нашему мнению, при решении плоских задач из двух рассмотренных моделей следует руководствоваться результатами расчётов по проверенному временем уравнению Мора-Кулона, основанному на лабораторных и полевых экспериментах. Определение прочностных характеристик грунта по уравнению (1) описывается в стандартах, существующих много лет. Решения плоских задач, полученные на основе этого постулата, могут служить эталоном при верификации других способов расчёта.

Модель Друккера-Прагера, основанная на эвристических идеях и математических преобразованиях, не проходит экспериментальную проверку в условиях плоской деформации. Модель Мизеса-Шлейхера-Боткина и её частный случай по версии ассоциированного закона течения правомерно использовать при решении пространственных и осесимметричных (но не плоских) задач. Уравнения (14) могут быть применены на практике как соотношения связи между парами прочностных характеристик  $\alpha$ ,  $k$  и  $\varphi$ ,  $c$ .

#### Библиографический список

1. Drucker, D.C., Prager W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, 10, № 2, 157–165 (1952).
2. Друккер, Д. Механика грунтов и пластический анализ или предельное проектирование / Д. Друккер, Б. Прагер; под ред. В. Н. Николаевского // Определяющие законы механики грунтов. – М., 1975. – С. 166–177.

#### References

1. Drucker, D.C. Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Quarterly of Applied Mathematics*, 10, № 2, 157–165 (1952).
2. Drucker, D. Soil mechanics and plastic analysis or limit design / D. Drucker, B. Prager; edited by V.N. Nikolaevsky // Basic regulations of soil mechanics. – М., 1975. – P. 166–177.

**Ключевые слова:** упругопластическая задача, теория пластического течения грунтов, уравнения Мора-Кулона, Друккера-Прагера.

**Key words:** elastic-plastic problems, theory of ground plastic flow, equations of More-Kulon, Drucker- Prager.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

УДК 624.26

*Воронежский государственный  
архитектурно-строительный университет  
Магистрант кафедры  
строительной механики  
Алекс Лунгили Катембо  
Россия, г. Воронеж,  
Тел: +7(951) 5-63-79-52  
e-mail: [alexis\\_katembo@yahoo.fr](mailto:alexis_katembo@yahoo.fr)  
Д-р техн.наук, проф. кафедры  
строительной механики  
В.С. Сафронов  
Россия, г. Воронеж, тел.: +7910-341-14-22  
e-mail: [yss22@mail.ru](mailto:yss22@mail.ru)*

*Voronezh State University of Architecture and Civil  
Engineering  
Undergraduater of department  
of Structural Mechanics  
Alex Lungili Katembo  
Voronezh, Russia, tel.: +7(951) 5637952  
e-mail: alexis\_katembo@yahoo.fr  
Dr of Tech. Sc. Professor of department.  
of Structural Mechanics  
V.S. Safronov  
Voronezh, Russia, tel.: +79103411422  
e-mail: [yss22@mail.ru](mailto:yss22@mail.ru)*

А.Л. Катембо, В.С. Сафронов

## РАСЧЕТ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖАТОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕФОРМАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

Описываются алгоритм и программа расчета несущей способности внецентренно сжатого стержня на основе нелинейного деформационного алгоритма, в котором используется гипотеза плоских сечений. Диаграммы деформирования материалов принимаются кусочно-линейными: для бетона – трехлинейными, для арматуры – двухлинейными. Результаты численных расчетов для стержня прямоугольного поперечного сечения сопоставляются с результатами вычислений по нормативной методике при различных эксцентриситетах приложения сжимающей силы.

A.L. Katembo, V.S. Safronov

## CALCULATION OF BEARING CAPACITY OF ECCENTRICALLY COMPRESSED BAR FROM REINFORCED CONCRETE WITH DEFORMATION MODEL APPLICATION

There is described the algorithm and the calculation system of eccentrically compressed bar bearing capacity based on nonlinear deformation algorithm with flat cross-section hypotheses application. Diagrams of materials deformation are taken as piecewise linear ones: for concrete - three-linear; for reinforcement – bilinear. Numerical work results are compared with the calculation results according to normative method at different eccentricity of compressed force application.

### Введение

При расчете несущей способности призматических стержней из железобетона с использованием действующего нормативного документа СП 52-101-2003 [1] эксцентриситет приложения сжимающей нагрузки учитывается косвенно, путем применения двух отвечающих случаям малых и больших эксцентриситетов априорных моделей, в которых принимаются различные предельные состояния. Для совершенствования расчетов применяются различные вычислительные схемы [2-3], однако они не учитывают действительные нелинейные диаграммы деформирования бетона и арматуры, а также имеющие место для применяемых

© Катембо А.Л., Сафронов В.С., 2016

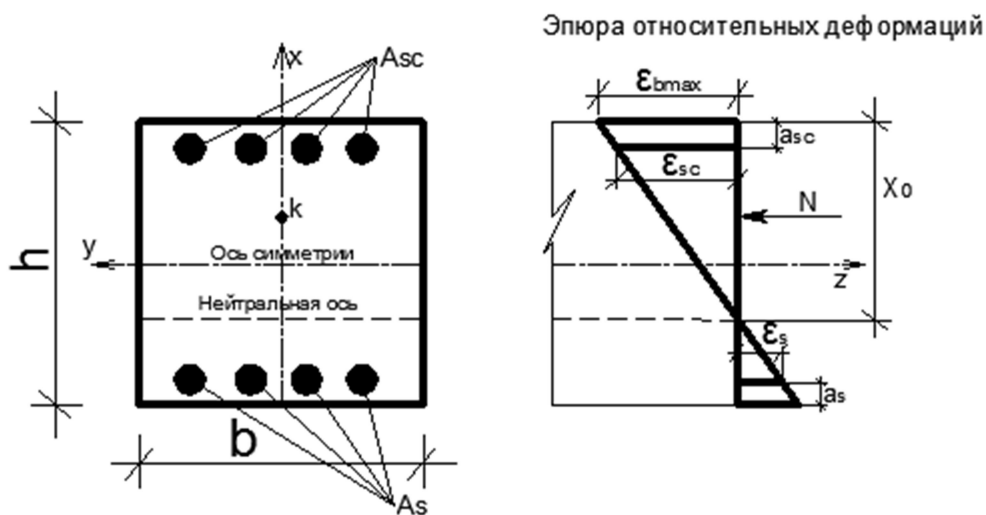


в инженерной практике флуктуации прочностных характеристик бетона и арматуры как для изгибаемых, так и внецентренно сжатых строительных конструкций из железобетона [4-6]. На их основе затруднительно учесть возникающие при эксплуатации дефекты и повреждения [7-8]. В вероятностной постановке несущая способность железобетонных колонн рассматривалась с использованием нормативной расчетной методики в работе [9]. Более совершенные расчетные модели, которые дают адекватную действительной оценке несущей способности внецентренно сжатых железобетонных стержневых конструкций, могут быть построены на основе нелинейных деформационных алгоритмов.

Цель настоящего исследования заключается в разработке эффективного алгоритма и программы численного расчета несущей способности внецентренно сжатого стержня на основе нелинейного деформационного алгоритма, в котором используется гипотеза плоских сечений. Результаты численных расчетов для стержня прямоугольного поперечного сечения сопоставляются с результатами вычислений по нормативной методике при различных эксцентриситетах приложения сжимающей силы.

### 1. Основные положения деформационного расчета

Рассматривается железобетонный брус прямоугольного поперечного сечения размерами  $b \times h$ , который подвергается внецентренному сжатию сосредоточенной силой  $N$  в точке, расположенной на оси симметрии поперечного сечения с эксцентриситетом  $e$  относительно центра тяжести приведенного поперечного сечения конструкции (рис. 1). Вблизи верхней и нижней граней бетонного сечения призматического бруса располагаются стержни соответственно сжимаемой арматуры общей площадью  $A_{sc}$  и испытывающей в зависимости от положения нейтральной линии растяжение или сжатие арматуры общей площадью  $A_s$ . Диаграммы деформирования бетона и арматуры примем в общем случае нелинейными, которые могут описываться отражающими фактические зависимости произвольными функциями.



**Рис. 1.** Поперечное сечение рассматриваемого бруса с расположением стержневой арматуры и принятая в расчетах в соответствии с гипотезой плоских сечений эпюра относительных деформаций в бетоне и арматуре по высоте сечения бруса

В настоящей работе для выполнения численных расчетов диаграммы зависимости напряжений от относительных деформаций бетона и арматуры приняты кусочно-линейными в соответствии с рекомендациями СП 52-101-2003[1]. Для бетона диаграмма

представлена на рис. 2 трехлинейной зависимостью, в которой не учитывается сопротивление материала при растяжении. Для арматуры при растяжении и при сжатии используется показанная на рис. 3 двухлинейная диаграмма упругопластического деформирования Прандтля. При выполнении расчетов с использованием принятых диаграмм применяются показанные на приведенных рисунках граничные значения деформаций линейных участков и модули упругости, которые в зависимости от класса бетона и арматуры можно найти в справочниках.

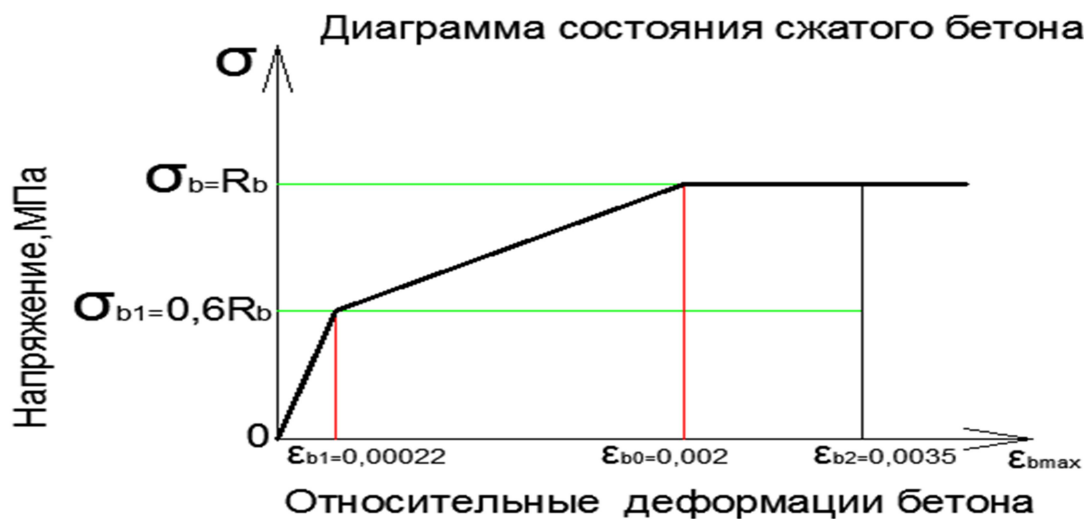


Рис. 2. Трехлинейная диаграмма деформирования сжатого бетона

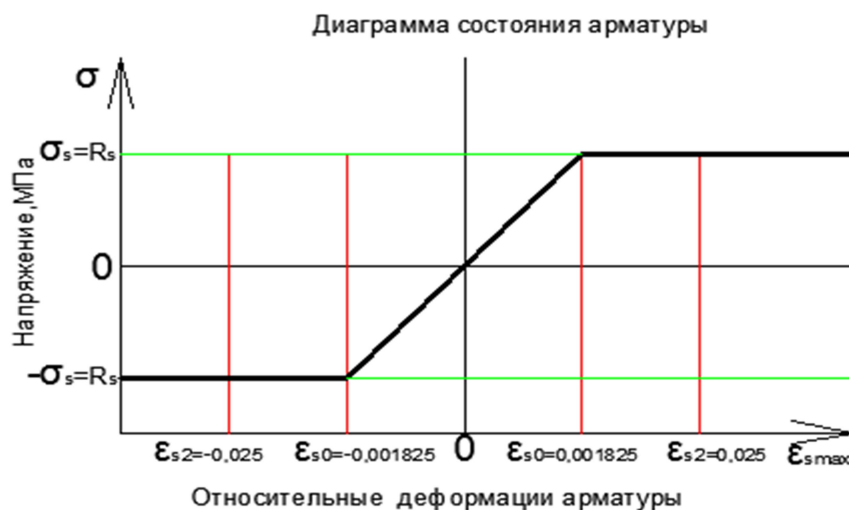


Рис. 3. Двухлинейная диаграмма деформирования при растяжении и сжатии арматуры

В соответствии с технической теорией деформирования стержневых конструкций при внецентренном сжатии справедливым является линейный закон распределения деформаций по высоте состоящего из различных материалов поперечного сечения (гипотеза плоских сечений), который изображен на правой части рис. 1. Для полного описания полученной схемы деформирования достаточно двух параметров. В их качестве примем следующие параметры (см. рис. 2):

- 1)  $\varepsilon_{b \max}$  – относительная деформация на верхнем фибровом волокне бетонного сечения;
- 2)  $X_0$  - высота сжатой части поперечного сечения.

Через принятые расчетные параметры вычислим деформации составляющих частей составного поперечного сечения:

- для произвольного волокна бетонной части с координатой  $x$ :

$$\varepsilon_{b\_x}(\varepsilon_{b \max}, X_0, x) = \varepsilon_{b \max} \cdot \frac{X_0 - x}{X_0}; \quad (1)$$

- для сжатой арматуры в верхней зоне сечения:

$$\varepsilon_{sc\_x}(\varepsilon_{b \max}, X_0) = \varepsilon_{b \max} \cdot \frac{X_0 - a_{sc}}{X_0}; \quad (2)$$

- для растянутой ( или сжатой) арматуры в нижней зоне сечения:

$$\varepsilon_{s\_x}(\varepsilon_{b \max}, X_0) = \varepsilon_{b \max} \cdot \frac{X_0 - (h - a_s)}{X_0}. \quad (3)$$

## 2. Определение напряжений в бетоне и арматуре для заданных нагрузок

Разрешающие уравнения деформационного расчета получим, составляя уравнения равновесия проекций внешних и внутренних сил на продольную ось бруса и изгибающих моментов тех же силовых факторов относительно центра тяжести приведенного железобетонного сечения. Они имеют следующий вид:

$$N(\varepsilon_{b \max}, X_0) = N_{inter}(\varepsilon_{b \max}, X_0) + N_{exter}; \quad (4)$$

$$M(\varepsilon_{b \max}, X_0) = M_{inter}(\varepsilon_{b \max}, X_0) + M_{exter}, \quad (5)$$

где введены следующие обозначения:

$N_{exter}, M_{exter}$  – равнодействующая и главный момент относительно центра тяжести сжимающей внешней силы,

$N_{inter}(\varepsilon_{b \max}, X_0) = N_b(\varepsilon_{b \max}, X_0) + N_{sc}(\varepsilon_{b \max}, X_0) + N_s(\varepsilon_{b \max}, X_0)$  - равнодействующая внутренних сил в бетоне и арматурных стержнях

$M_{inter}(\varepsilon_{b \max}, X_0) = M_b(\varepsilon_{b \max}, X_0) + M_{sc}(\varepsilon_{b \max}, X_0) + M_s(\varepsilon_{b \max}, X_0)$  - главный момент относительно центра тяжести внутренних сил в бетоне и арматурных стержнях.

Составляющие равнодействующих и главных моментов внутренних усилий в бетоне и во всех арматурных стержнях определяются выражениями:

$N_b(\varepsilon_{b \max}, X_0) = b \cdot \int_0^h \sigma(\varepsilon_{b\_x}(\varepsilon_{b \max}, X_0, x)) dx$  - равнодействующая внутренних сил в бетонной части поперечного сечения;

$M_b(\varepsilon_{b \max}, X_0) = b \cdot \int_0^h \sigma(\varepsilon_{b\_x}(\varepsilon_{b \max}, X_0, x)) \cdot \left(\frac{h}{2} - x\right) dx$  - главный момент внутренних сил в бетонной части поперечного сечения относительно центра тяжести;

$N_{sc}(\varepsilon_{b\max}, X_0) = \sigma_{sc}(\varepsilon_{sc\_x}(\varepsilon_{b\max}, X_0)) \cdot A_{sc}$  - равнодействующая внутренних усилий в арматуре, расположенной в верхней, сжатой зоне сечения;

$M_{sc}(\varepsilon_{b\max}, X_0) = \sigma_{sc}(\varepsilon_{sc\_x}(\varepsilon_{b\max}, X_0)) \cdot \left(\frac{h}{2} - a_{sc}\right) \cdot A_{sc}$  - главный момент внутренних усилий в арматуре, расположенной в верхней, сжатой зоне сечения относительно центра тяжести;

$N_s(\varepsilon_{b\max}, X_0) = \sigma_s(\varepsilon_{s\_x}(\varepsilon_{b\max}, X_0)) \cdot A_s$  - равнодействующая внутренних усилий в арматуре, расположенной в нижней, сжатой (или растянутой) зоне сечения;

$M_s(\varepsilon_{b\max}, X_0) = -\sigma_s(\varepsilon_{s\_x}(\varepsilon_{b\max}, X_0)) \cdot \left(\frac{h}{2} - a_s\right) \cdot A_s$  - главный момент внутренних усилий в арматуре, расположенной в верхней, сжатой зоне сечения относительно центра тяжести.

Система из двух разрешающих уравнений (4) и (5) является нелинейной, поэтому необходимо применение численных алгоритмов с помощью любых математических комплексов Matematika, Mathcad и т.п. При этом используется следующая последовательность вычислений:

- задаются начальные приближения неизвестных параметров для заданных  $N_{exter}$  и  $M_{exter}$ ;
- с использованием стандартных операторов выбранного вычислительного комплекса выполняется численное решение уравнений (4) и (5). В программе Mathcad используется оператор **Given – Find**;
- по найденным  $\varepsilon_{\max}$  и  $X_0$  строятся эпюры напряжений в бетоне  $\sigma_b$  и усилия в арматуре  $N_{sc}$  и  $N_s$  (рис. 4).

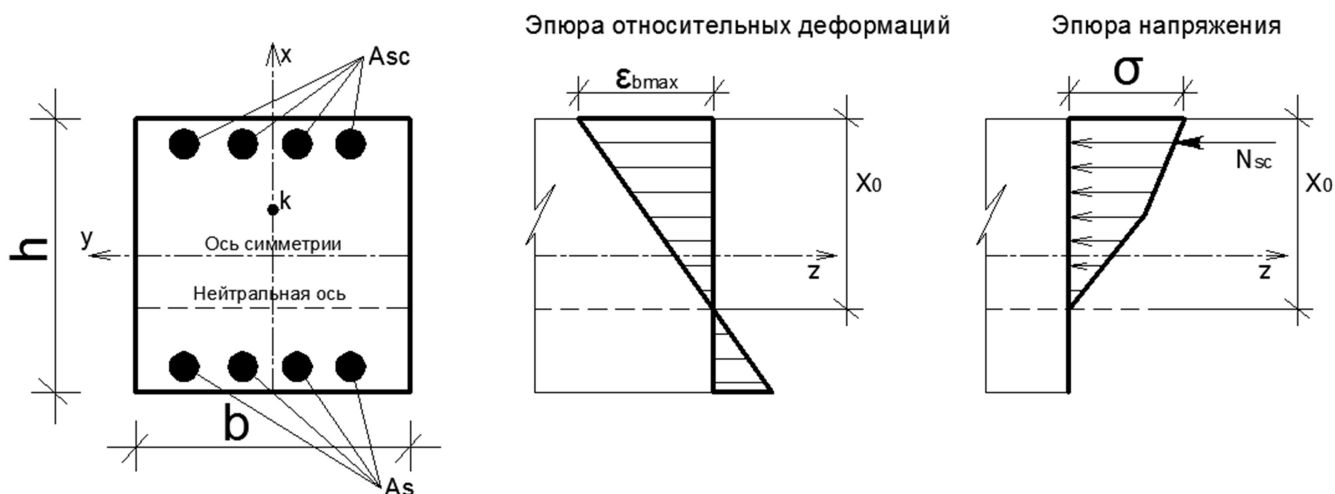


Рис. 4. Графическое представление результатов расчета напряжений и усилий

### 3. Вычислительный алгоритм определения несущей способности внецентренно сжатого железобетонного стержня

Определение несущей способности внецентренно сжатого стержня может осуществляться на основе различных методик. Наиболее эффективным является вариант последовательного деформационного расчета по описанному в разделе 3 настоящей статьи алгоритму при постоянном значении эксцентриситета  $e = M/N$  сжимающей силы и увеличивающегося на постоянную величину  $\Delta N$  текущего значение сжимающей силы.

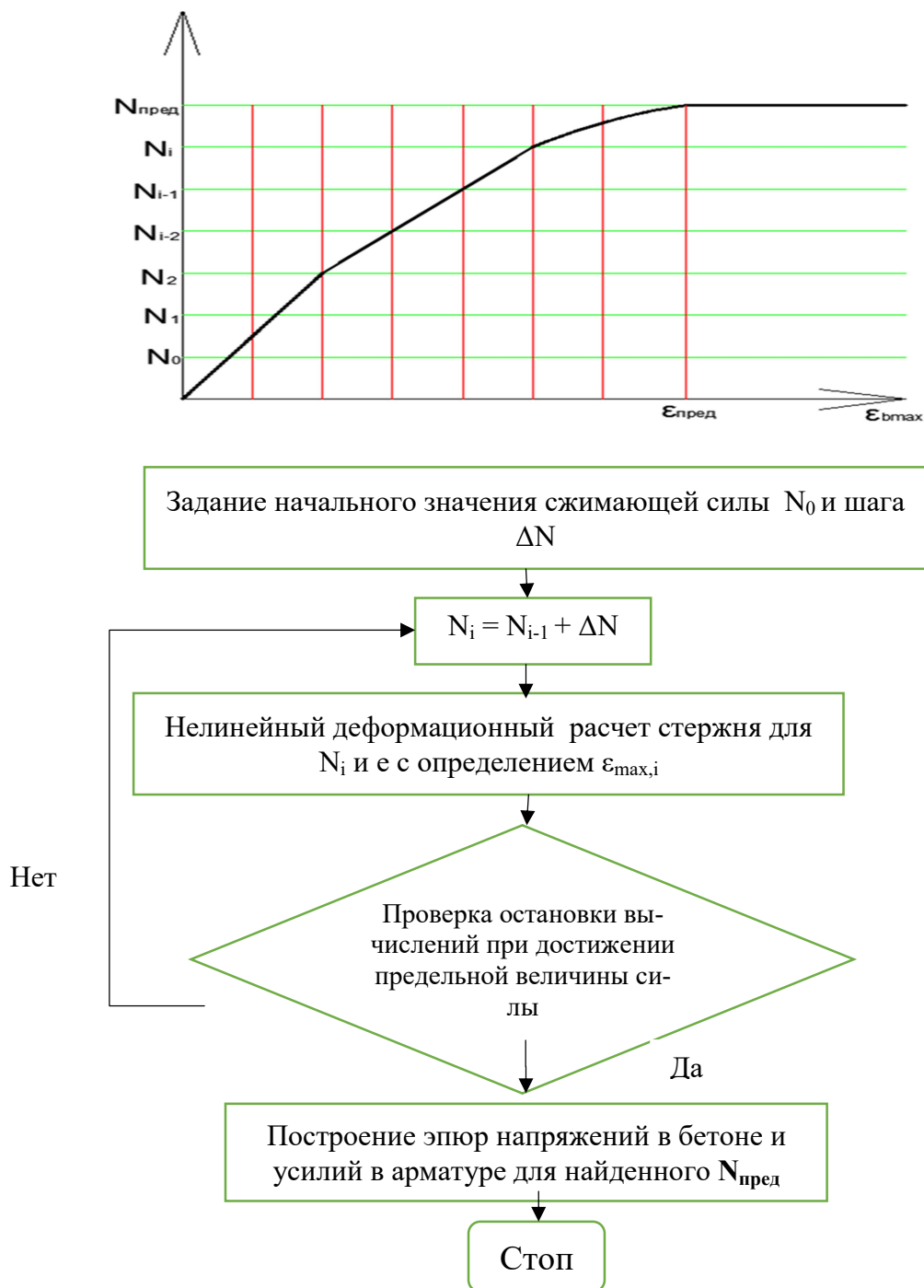


Рис. 5. Графическое представление вычислений и блок-схема определения несущей способности внецентренно сжатого железобетонного бруса для неизменного эксцентриситета приложения сжимающей силы

При реализации предложенных алгоритмов деформационного расчета внецентренно сжатых железобетонных элементов для остановки итерационных вычислений прежде всего следует использовать условия превышения в крайнем волокне бетонного сечения предельной величины пластической деформации бетона  $\varepsilon_{bmax}=0,0035$  и предельной величины пластической деформации в расположенной в сжатой и растянутой зонах поперечного сечения рабочей арматуры  $\varepsilon_s=0,025$ . В качестве основного условия прекращения итерационных вычислений в предлагаемом алгоритме деформационного расчета несущей способности конструкции при внецентренном сжатии следует использовать учет особенностей деформирования при приближении к предельному состоянию. В настоящей работе такое условие принимается в виде

$$(\varepsilon_{bmax}[i] - \varepsilon_{bmax}[i-1]) / \varepsilon_{bmax}[i] \leq \delta\varepsilon, \quad (6)$$

которое представляет собой проверку отклонения от линейного закона графика изменения приращения относительной деформации в крайнем волокне поперечного сечения.

#### 4. Апробация разработанных алгоритмов

Для реализации разработанного алгоритма деформационного расчета внецентренно сжатого стержневого элемента составлена вычислительная программа на языке математической программы Mathcad и выполнена апробация определения несущей способности колонны прямоугольного поперечного сечения размерами 40x70 см из бетона класса В15, армированной по каждой из наружных граней четырьмя арматурными стержнями из стали класса АII (рис. 6):

- в верхней сжатой зоне диаметром 32 мм;
- в нижней сжатой( или растянутой зоне) диаметром 12 мм.

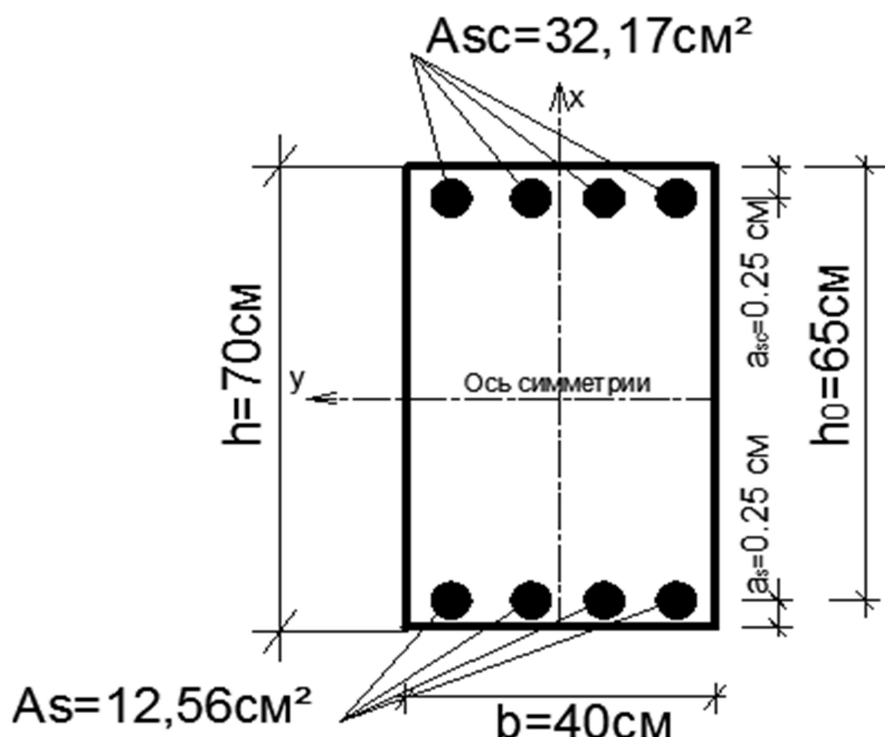


Рис. 6. Поперечное сечение железобетонной колонны и ее армирование

В расчетах приняты следующие расчетные прочностные и деформационные характеристики бетона и арматуры:

- прочностные характеристики:

$$R_b = 8.5 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; R_s = 365 \cdot 10^3 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2};$$

$$E_b = 23 \cdot 10^6 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; E_s = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{кН}}{\text{м}^2}; \sigma_{b1} = 0.6 R_b = 5.1 \cdot 10^3;$$

$$A_s = 12.56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; A_{sc} = 32.17 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2; h = 0.7 \text{ м}; h_0 = 0.65 \text{ м}; a_{sc} = a_s = 0.025 \text{ м}; b = 0.4 \text{ м};$$

- деформационные параметры бетона и арматуры:

$$\varepsilon_b = 0.0035; \varepsilon_{b0} = 0.002; \varepsilon_{b1} = \frac{\sigma_{b1}}{E_b} = 2.217 \cdot 10^{-4}; \varepsilon_{sc0} = \frac{R_{sc}}{E_{sc}} = 1.185 \cdot 10^{-3}; \varepsilon_{s2} = 0.025.$$

Результаты расчетов несущей способности колонны с использованием вычислительной программы деформационного расчета для рассматриваемого примера внецентренно сжатой железобетонной конструкции при различных эксцентриситетах приложения сжимающей силы сопоставлены в нижеприведенной таблице с данными, полученными по изложенной в СП 52-101-2003[1] методике.

Таблица

Сопоставление данных деформационного расчета несущей способности железобетонной колонны с результатами прочностных расчетов по нормативной методике

Эксцентриситет сжимающей силы $e$ , м	Расчетные параметры деформационного расчета				Расчетные параметры по СП 52-101-2003 [1]	
	$N_{\text{пред}}$ (кН)	$\varepsilon_{b\text{max}}$	$X_0$ (м)	$M_{\text{пред}}$ (кНм)	$M_{\text{пред}}$ (кНм)	$X$ (м)
<b>0,1</b>	<b>3580</b>	<b>0,0033</b>	<b>0,879</b>	<b>1522</b>	<b>1450</b>	<b>0,614</b>
<b>0,2</b>	<b>2810</b>	<b>0,0034</b>	<b>0,601</b>	<b>1475</b>	<b>1419</b>	<b>0,510</b>
<b>0,3</b>	<b>2260</b>	<b>0,0034</b>	<b>0,488</b>	<b>1413</b>	<b>1374</b>	<b>0,436</b>
<b>0,4</b>	<b>1820</b>	<b>0,0030</b>	<b>0,390</b>	<b>1320</b>	<b>1272</b>	<b>0,325</b>

Графическое представление результатов деформационных расчетов в виде эпюр распределения напряжений в бетоне и арматурных стержнях по высоте поперечного сечения колонны для четырех вариантов эксцентриситета приложения  $e = 0,1$  м;  $0,2$  м;  $0,3$  м;  $0,4$  м представлены соответственно на рис. 7-10.

Из анализа представленных в таблице и на приведенных рисунках расчетных данных видно, что оценочные величины несущей способности, полученные по нормативной методике и с помощью деформационного расчета, практически совпадают, однако размеры высоты сжатой зоны имеют существенное отличие. При этом различие увеличивается с уменьшением эксцентриситета сжимающей силы.

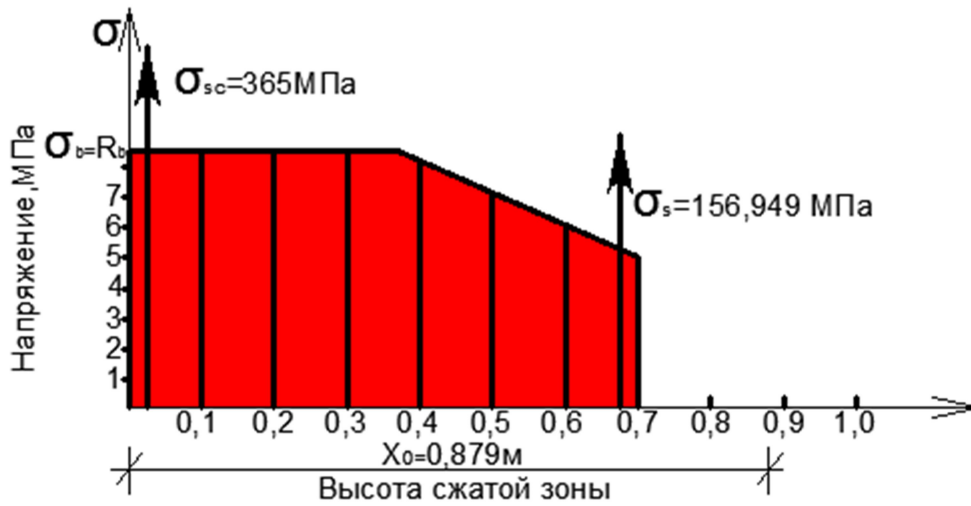


Рис. 7. Графическое представление распределения напряжений по поперечному сечению в предельном состоянии при эксцентриситете  $e=0,1$  м

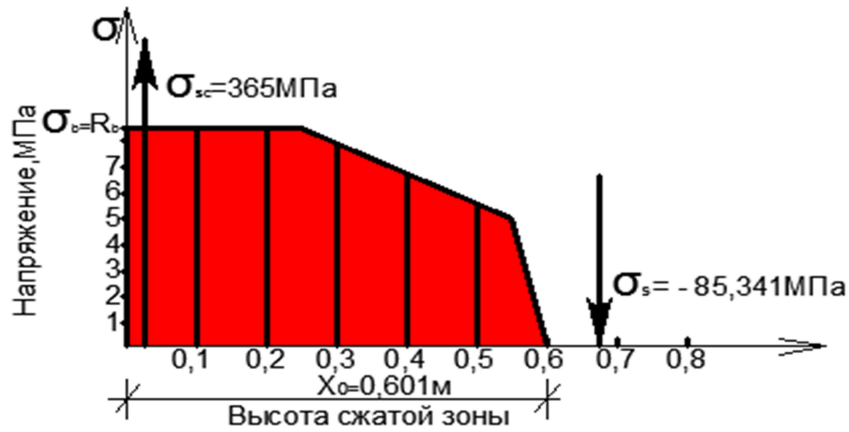


Рис. 8. Графическое представление распределения напряжений по поперечному сечению в предельном состоянии при эксцентриситете  $e=0,2$  м

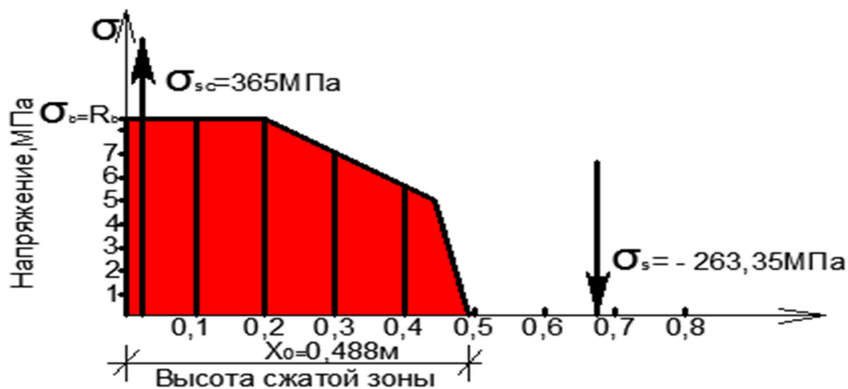


Рис. 9. Графическое представление распределения напряжений по поперечному сечению в предельном сечении при эксцентриситете  $e=0,3$  м



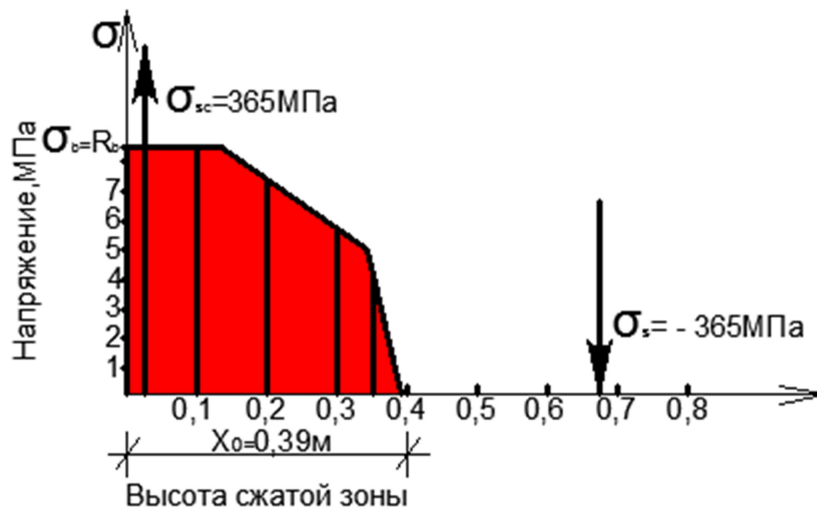


Рис. 10. Графическое представление распределения напряжений при эксцентриситете  $e=0,4$  м

## Выводы

1. Разработанные в ходе исследований алгоритм и программа деформационного расчета внецентренно сжатых железобетонных элементов апробированы и показали свою эффективность в численных исследованиях на ряде расчетных примеров. Результаты расчетов показали, что оценочные величины несущей способности, полученные по нормативной методике и с помощью деформационного расчета, практически совпадают, однако размеры высоты сжатой зоны имеют существенное отличие. При этом различие увеличивается с уменьшением эксцентриситета сжимающей силы

2. Разработанные методика деформационного расчета и вычислительная программа могут быть рекомендованы для практического использования для уточненных расчетов при проектировании железобетонных конструкций.

## Библиографический список

1. СП 52-101-2003. Бетонные и железобетонные конструкции без предварительного напряжения арматуры. – М.: ФГУП ЦПП, 2003.
2. Старишко, И.Н. Пути повышения надежности результатов расчета внецентренно сжатых элементов/ И.Н. Старишко// Бетон и железобетон. – М., 2012. – №2. – С. 15–18.
3. Старишко, И.Н. Методика расчета несущей способности внецентренно сжатых железобетонных элементов: анализ и предложения по ее совершенствованию/ И.Н. Старишко// Вестник МГСУ, 2014. – №3. – С. 107–116.
4. Райзер, В.Д. Теория надежности в строительном проектировании / В.Д. Райзер. - М.: изд-во АСВ, 1998. – 304 с.
5. Сафронов, В.С. Вероятностная оценка риска возникновения предельных состояний в сечениях изгибаемых железобетонных балок / В.С. Сафронов, Нгуен Динь Хоа // Научный вестник Воронежского ГАСУ, сер. «Строительство и архитектура». – Воронеж, 2010. – Вып. 1. – С. 157–166.
6. Сеницын, А.П. Расчет конструкций по теории риска / А.П. Сеницын. - М.: Стройиздат, 1985. – 304 с.

7. Сафронов, В.С. Суперэлементный расчет в смешанной постановке железобетонных мостов, имеющих дефекты и повреждения/ В.С.Сафронов, А.А. Петранин, Е.Н. Петреня// Известия высших учебных заведений. Строительство. 1996. - № 6. - С. 103-110.
8. Сафронов, В.С. Оценка влияния косины пролетных строений железобетонных мостов на риск разрушения нормальных сечений балок с ненапрягаемым армированием от изгибающего момента/ В.С.Сафронов., Д.И. Доманов// Строительная механика и конструкции. Воронеж, 2012. – Вып. 2(4). - С. 85-91.
9. Сафронов, В.С. Расчетная оценка вероятности разрушения внецентренно сжатой железобетонной колонны/ В.С. Сафронов, А.Л. Катембо// Научный вестник Воронежского ГАСУ, сер. «Студент и наука». - Вып. №8 - 2015. - С. 250-260.

#### References

1. Set of rules. 52-101-2003. Concrete and reinforced structures without prestressed reinforcement –М.: FGUP TzPP, 20
2. Starishko, I.N. Ways of reliability enhancement of eccentrically compressed elem 03. ents calculation results/ I.N. Starishko// Concrete and reinforced concrete. – М., 2012. – №2. – P. 15–18.
3. Starishko, I.N. Metodology of eccentrically compressed reinforced members bearing capacity calculation, analysis and proposals for its improvement /I.N. Starishko// MGSU Bulletin, 2014. – №3. – P. 107–116.
4. Raizer, V.D. Theory of reliability enhancement in construction design: / V.D. Raizer. – М.: pub. ASV, 1998/ -304 p.
5. Safronov, V.S. Probabilistic assessment of limiting state appearing risk in cross-section of flexural reinforced beams/ V.S. Safronov, Hguyen Dinh Hoa // Scientific bulletin of Voronezhsky GASU, Set. Construction and Architecture. – Voronezh, 2010. – Issue. 1. – P. 157–166.
6. Sinitsin, A.P. Structure design according to the risk theory/ A.P. Sinitsin. - М.: Stroiizdat , 1985. – 304 p.
7. Safronov, V.S. Superelement design in mix statement of reinforced concrete bridges having defects and demages/ V.S. Safronov, A.A.Petranin, E.N. Petrenya // News of higher education institutes. Construction.- 1996. - № 6. - P. 103-110.
8. Safronov, V.S. Assessment of reinforced-concrete bridge span bending effect on risk of destruction of normal sections of beams with nonprestressed reinforcement caused by bending moment. / V. S. Safronov, D.I. Domanov// Structural Mechanics and Structures. Voronezh, 2012, vol. 2 (4) - P. 85-91/
9. Safronov, V.S. Calculated assessment of reinforced concrete eccentrically compressed pillar / V.S. Safronov, A.L. Katembo// Scientific Bulletin of Voronezhsky GASU, set «Student I Nauka”. Issue. №8. - 2015. - P. 250-260.

**Ключевые слова:** призматический стержень из железобетона, прямоугольное поперечное сечение, внецентренное сжатие, нелинейное деформирование, гипотеза плоских сечений, несущая способность, деформационный расчет.

**Key words:** prizm bar from reinforced concrete, rectangular section, eccentric compression, non-linear deformation, flat cross-section hypothesis, bearing capacity, deformative calculation.

Научное издание

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА  
И КОНСТРУКЦИИ**

**Научно-технический журнал**

**Выпуск №1 (12), 2016**

Редакторы Аграновская Н.Н., Акритова Е.В.

Подп. в печать 06.06. 2016. Формат 60x84 1/8. Уч.-изд. л. 9,8. Усл.-печ. л. 9,9.  
Бумага писчая. Тираж 200 экз. Заказ № .

Отпечатано: отдел оперативной полиграфии  
издательства учебной литературы и учебно-методических пособий  
Воронежского ГАСУ  
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84