ISSN 2219-1038

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И КОНСТРУКЦИИ

## Научно-технический журнал

Выпуск №2 (7), 2013

**Учредитель**
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Воронежский государственный архитектурно-строительный университет»

**Издатель**
Строительный факультет

**Главный редактор**
Сафронов В.С., д.т.н., проф.
**Зам. главного редактора**
Ефрюшин С.В., к.т.н., доц.

**Ответственный секретарь**
Габриелян Г.Е., к.т.н., доц.

**Технический секретарь**
Флавианов В.М., м.н.с.

**Члены редколлегии**

Борисов Ю.М., д.т.н., проф.
Шитикова М.В., д. ф.-м. н., проф.
Шапиро Д.М., д.т.н., проф.
Орлов А.С., д.т.н., проф.
Свентиков А.А., д.т.н., проф.
Иванов Ю.В., к.т.н., доц.
Андреев А.В., к.т.н., доц.
Рогатнев Ю.Ф., к.т.н., доц.

## СОДЕРЖАНИЕ

**СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ**

**Петреня Е.Н., Петранин А.А.**
Сравнительный анализ уравнений плоского изгиба балки по различным теориям, матриц конечных элементов и результатов тестовых расчетов — **5**

**Аверин А.Н., Шевченко Е.А.**
Анализ напряженно-деформированного состояния конечноэлементных моделей балки-стенки с прямоугольным вырезом — **32**

**Сафронов В.С., Антипов А.В.**
Колебания и прочность современных несущих конструкций зданий при проведении массовых развлекательных мероприятий — **44**

**Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.**
Определение НДС при разрушении внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бетона по результатам испытаний — **56**

**РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ**

**Ким М.С., Полищук Е.В., Шарова Е.В., Бражникова А.А., Ким М.В.**
Исследование эффективности применения технологии РИТ для закрепления глинистых и песчаных грунтов в котловане при строительстве торгово-гостиничного комплекса в г. Воронеже — **63**

**Леденев В.В., Тью Тхи Хоанг Ань**
Влияние нагрузки и глубины заложения на относительные координаты мгновенной оси вращения фундамента — **73**

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

**Леденев В.В., Тью Тхи Хоанг Ань**
Расчет болтовых соединений с учетом дополнительных сил **80**

**Еремин В.В.**
Анализ напряженно-деформированного состояния висячей комбинированной системы на основе ПВК ЛИРА **86**

## РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.**
Показатели условного предельного состояния при внецентренном сжатии призм из мелкозернистого бетона **94**

**Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А.**
Определение условных базовых нагрузок коротких сжатых бетонных элементов прямоугольного сечения при малых эксцентриситетах продольной силы **107**

**Адрес редакции:** 394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./ факс: +7(473) 2715230
По вопросам размещения статей просьба обращаться по адресу:
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
Тел./факс: +7 (473) 271-52-30

главному редактору, д-ру техн. наук, проф.
**Сафронову Владимиру Сергеевичу**,
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: vss22@mail.ru

зам. гл. редактора, канд. техн. наук, доц.
**Ефрюшину Сергею Владимировичу,**
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru

отв. секретарю, канд. техн. наук, доц.
**Габриеляну Грайру Егишеевичу**
тел./ факс: +7 (473) 2715230
E-mail: grayr2010@rambler
Тел./факс +7(473) 271-52-30

Редакторы Аграновская Н.Н., Акритова Е.В.
Подп. в печать 25.11. 2013. Формат 60x84 1/8. Усл.-печ. л. 15,1.
Уч.-изд. л. 15,0. Бумага писчая. Тираж 200 экз. Заказ № .
Отпечатано: отдел оперативной полиграфии
издательства учебной литературы и учебно-методических пособий
Воронежского ГАСУ
394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84

**Попечительский совет**

ООО «Предприятие Инвестстройиндустрия»
в лице директора
**Ушакова И.И.**

ООО «Предприятие по инженерному и научно-техническому обслуживанию строительного комплекса «СтройНаука»
в лице зам. директора
**Глушкова А.В.**

ОАО Воронежский филиал ГИПРОДОРНИИ
в лице ген. директора
**Мажарова А.В.**

© Воронежский ГАСУ, 2013

# STRUCTURAL MECHANICS AND CONSTRUCTIONS

## Scientific-Technical Journal

**Issue №2 (7), 2013**

**Founder**

State Educational Institute
of Higher Vocational Education

Voronezh State University
of Architecture
and Civil Engineering

**Editor**

Constructional Department



**Chief Editor**

Dr of Sc. Tech. Prof.
V.S. Safronov

**Deputy of Chief Editor**

PhD S.V. Efryushin

**Senior Secretary**

PhD G.E. Gabrielyan

**Technical Secretary**
Sc. associate V.M. Flavianov

**Members of editorial board**

Dr of Tech. Sc, Prof. Y.M. Borisov
Dr of Math Prof. M.V. Shitikova
Dr of Tech Sc D.M. Shapiro
Dr. of Tech Sc A.S. Orlov
Dr of Tech Sc A.A. Sventikov
PhD Y.V. Ivanov
PhD A.V. Andreev
PhD Y.F. Rogatnev


**CONTENTS**


**STRUCTURAL MECHANICS AND STRENGTH OF MATERIALS**

**Petrenya E.N., Petranin A.A.**
Comparative analysis of equations of beam simple bending according to different theories, final elements matrixes and test calculations results — **5**

**Averin A.N., Shevchenko E.A.**
Analysis of deflected mode of final elements models of beam – rib with square cut — **32**

**Safronov V.S., Antipov A.V.**
Fluctuation and strength of building modern bearing structures while carrying out mass entertainment events — **44**

**Sinozyorsky A.N., Muhtarov R.A.**
According to the test results definition of deflected mode of fine concrete prisms eccentrically -compressed with standard speed during their destruction — **56**

**CALCULATION AND DESIGN OF BASES AND FOUNDATIONS**

**Kim M.S., Polischuk E.V., Sharova E.V., Brazhnikova A.A., Kim M.V.**
Research of efficiency of application of discharge-impulse technology method for clay and sand soil solidification in ditch during the construction of commerce-hotel center in Voronezh — **63**

**Ledenev V.V., Chu Thi Hoang Anh**
Load and depth of foundation effect on relative coordinates of instantaneous axis of rotation — **73**

## CALCULATION AND DESIGN OF METAL STRUCTURES

**Ledenev V.V., Chu Thi Hoang Anh**
Load – carrying Capacity of Fibrous Concrete Wall Models under Biaxial Compression **80**

**Eremin V.V.**
Analysis of deflected mode of suspension combined system based on software computer system Lira **86**

## CALCULATION AND DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES

**Sinozyorsky A.N., Muhtarov R.A.**
Indexes of conditional limiting state during destruction eccentric-compressed fine concrete prisms **94**

**Sinozyorsky A.N., Muhtarov R.A.**
Definition of conditional base stresses of short concrete members of square section at small eccentricities of longitudinal force **107**

**Address :** 84, 20-letie Oktyabrya st.
394006 Voronezh, Russia
Tel./ fax..: +7 (473) 2715230

**Concerning articles publication one can address:**
84,20-letie Oktyabrya st. Voronezh 394006, Russia

Chief editor Dr Sc.Tech. Prof.
Vladimir Sergeevich Safronov
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: vss22@mail.ru

Concerning the article placing in the journal one can address:
Deputy of Chief editor PhD, Associate Professor
Sergei Vladimirovich Efryushin
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: ooo.stroynauka@mail.ru
Senior secretary:

PhD, Associate Professor
Gabrielyan Grayr Egisheevich
Tel./fax: +7 (473) 2715230
E-mail: grayr2010@rambler.ru

Editor N.N. Agranovskaya E.V. Akritova

Printed: office of operated polygraphy of Voronezhsky GASU
84, 20-letie Oktyabrya
394006 Voronezh Russia

**Board of Trustees**

Ltd. «Enterprise Investroyindustriya»
Director **I.I. Ushakov**

Ltd. «Enterprise on Engineering and Scientific Service of Building Complex StroyNauka»
Deputy Director
**A.V. Glushkov**

Ltd. «Voronezh department of Giprodornii»
Chief Executive Officer
**A.V. Mazharov**

© Voronezhsky GASU, 2013

УДК 539.3:624.074.5

*Воронежский государственный*
*архитектурно-строительный университет*
*Канд. техн. наук, доц.*
*кафедры строительной механики*
*Е.Н. Петреня*
*Канд. техн. наук, доц.*
*кафедры строительной механики*
*А.А. Петранин*
*Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30*
*e-mail: petranin.san@yandex.ru*

*Voronezh State University*
*of Architecture and Civil Engineering*
*PhD of Tech. Science, Associate Professor*
*Of Department of Structural Mechanics*
*E.N. Petrenya*
*PhD of Tech. Science, Associate Professor*
*Of Department of Structural Mechanics*
*A.A. Petranin*
*Voronezh, Russia, tel.: 8(473)2715230*
*e-mail: petranin.san@yandex.ru*

Е.Н. Петреня, А.А. Петранин

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ИЗГИБА БАЛКИ ПО РАЗЛИЧНЫМ ТЕОРИЯМ, МАТРИЦ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И РЕЗУЛЬТАТОВ ТЕСТОВЫХ РАСЧЕТОВ

Приведены исходные дифференциальные уравнения плоского изгиба балки по двум теориям – уточненной технической теории Тимошенко и теории изгиба с учетом депланации при сдвиге, являющейся частным случаем предложенной ранее теории пространственного стержня. По данным теориям построены матрицы конечных элементов и выполнены тестовые расчеты консольной и шарнирно опертой балки. Проведены сравнительные исследования путем сопоставления исходных уравнений, полученных матриц и результатов расчетов.

E.N. Petrenya, A.A. Petranin

# COMPARATIVE ANALYSIS OF EQUATIONS OF BEAM SIMPLE BENDING ACCORDING TO DIFFERENT THEORIES, FINAL ELEMENTS MATRIXES AND TEST CALCULATIONS RESULTS

There are given original differential equations of beam simple bending according to two theories – improved technical theory by Timoshenko and bending moment theory with account of warping while shifting. This is a special case of proposed before theory of dimensional bar. Based on these theories there were constructed matrixes of final elements and test designs of cantilever and pin-ended beam were calculated. There is also given the comparative researches with correlating the original equations, received matrixes and calculation results.

В работе [1] была сформирована система исходных дифференциальных уравнений пространственного стержня с учетом депланации при сдвигах и кручении. В работах [2, 3] на их основе был построен пространственный стержневой конечный элемент (КЭ) и начата апробация предложенной теории с рассмотрения простого частного случая – плоского изгиба балки с учетом депланации. Для данной задачи выполнен волновой анализ динамических уравнений с определением фазовых и групповых скоростей изгибно-сдвиговых волн и проведен частотный анализ свободных колебаний шарнирно опертой балки. Результаты исследований были сопоставлены с классическими балочными теориями и с точным решением плоской теории упругости (ТУ).

Настоящая статья продолжает данную тематику и посвящена исследованиям задачи плоского изгиба балки, которые будут проводиться путем сравнения исходных уравнений, матриц конечных элементов и результатов расчетов для двух следующих теорий:

1) теории Тимошенко изгиба балки, учитывающей сдвиговые деформации и инерцию вращений поперечных сечений;

© Петреня Е.Н., Петранин А.А., 2013

2) теории изгиба балки с учетом депланации при сдвиге (частный случай, предложенной в [1-3] теории).

Аналогичные исследования в рамках плоской теории упругости также важны для апробации предложенной теории, но в данной статье они не рассматриваются из-за ограниченности ее объема.

## 1. Плоский изгиб балки по теории Тимошенко
### 1.1. Исходные дифференциальные уравнения балки

Представим классические исходные уравнения изгиба балки с учетом сдвиговых деформаций в виде разрешающей системы дифференциальных уравнений.

1. Дифференциальные уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \rho J_z'' \ddot{\beta}_{z0} \qquad - M_z^x + Q_y = m_z ; \\ \qquad \rho F \ddot{u}_{y0} \qquad - Q_y^x = q_y . \end{cases} \tag{1}$$

2. Физические уравнения:

$$\begin{cases} M_z = EJ_z \mu_{z0} ; \\ Q_y = \kappa_y GF \gamma_{xy0} . \end{cases} \tag{2}$$

3. Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \mu_{z0} = \beta_{z0}^x ; \\ \gamma_{xy0} = \beta_{z0} + u_{y0}^x . \end{cases} \tag{3}$$

Разрешающая система в операторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \widetilde{M} \ddot{\widetilde{u}} + \widetilde{R} \widetilde{s} = \widetilde{q} ; \\ \widetilde{s} = \widetilde{C} \widetilde{e} ; \\ \widetilde{e} = \widetilde{G} \widetilde{u} , \end{cases} \tag{4}$$

где обозначены векторы, матрицы и матричные операторы:

$$\widetilde{u} = \begin{bmatrix} \beta_{z0} \\ u_{y0} \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{e} = \begin{bmatrix} \mu_{z0} \\ \gamma_{xy0} \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{s} = \begin{bmatrix} M_z \\ Q_y \end{bmatrix}; \qquad \widetilde{q} = \begin{bmatrix} m_z \\ q_y \end{bmatrix}; \tag{5}$$

$$\widetilde{M} = \rho \begin{bmatrix} J_z'' & \\ & F \end{bmatrix}; \quad \widetilde{C} = \begin{bmatrix} EJ_z & \\ & \kappa_y GF \end{bmatrix}; \quad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} -\partial^x & 1 \\ & -\partial^x \end{bmatrix}; \quad \widetilde{G} = \begin{bmatrix} \partial^x & \\ 1 & \partial^x \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Здесь $\kappa_y$ – коэффициент формы поперечного сечения, равный

$$\frac{1}{\kappa_y} = \frac{F}{J_z^2} \int_F \left( \frac{S_z^\omega}{b} \right)^2 dF . \tag{7}$$

Для прямоугольного сечения $\kappa_y = 5/6$.

Напряжения в произвольной точке:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{y M_z}{J_z} ; \\ \tau_{xy} = \dfrac{S_z^\omega Q_y}{J_z b} . \end{cases} \tag{8}$$

## 1.2. Построение матриц конечного элемента для задач статики методом прямого интегрирования исходных уравнений

Матрицы балочного КЭ по теории Тимошенко известны в литературе по методу конечных элементов (МКЭ) (см. [4]), однако приводимые в справочниках матрицы жесткости и инерции не всегда имеют максимальную точность из-за приближенности используемых при аппроксимации функций формы (ФФ) или неоправданного пренебрежения отдельными слагаемыми. При этом матрицы ФФ и приведения погонных нагрузок обычно не приводятся вовсе. Поэтому в данном разделе определяются точные матрицы КЭ для статических задач методом прямого интегрирования исходных уравнений по аналогии с построением КЭ пространственного стержня с учетом депланации в [2].

### 1.2.1. Аппроксимация погонных нагрузок

Зададим закон изменения погонных нагрузок в виде линейной функции:

$$\begin{cases} m_z = (1-\xi)\, m_{zN} + \xi m_{zK}\,; \\ q_y = (1-\xi)\, q_{yN} + \xi q_{yK}\,, \end{cases} \tag{9}$$

где $\xi = x/L$ – относительная координата; $L$ – длина КЭ; индексные символы $N, K$ соответствуют узлам начала и конца элемента балки, причем начало координат совмещено с узлом $N$.

Закон изменения погонных нагрузок (9) в матричной форме:

$$\tilde{q} = \tilde{\Omega}\bar{q}\,, \tag{10}$$

где матрица аппроксимации нагрузок и вектор интенсивностей нагрузок равны:

$$\tilde{\Omega} = \left[\tilde{\Omega}_N \;\vdots\; \tilde{\Omega}_K\right]; \quad \tilde{\Omega}_N = (1-\xi)\tilde{I}\,; \quad \tilde{\Omega}_K = \xi\tilde{I}\,; \tag{11}$$

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_N \\ \hdashline \tilde{q}_K \end{bmatrix}; \qquad \tilde{q}_N = \begin{bmatrix} m_{zN} \\ q_{yN} \end{bmatrix}; \qquad \tilde{q}_K = \begin{bmatrix} m_{zK} \\ q_{yK} \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Здесь $\tilde{I}$ – единичная матрица.

### 1.2.2. Определение функций усилий, деформаций и перемещений

Функции усилий находим путем интегрирования уравнений равновесия (1) при $\rho = 0$, учете (9) и граничных условий $M_z(\xi = 0) = M_{zN}$, $Q_y(\xi = 0) = Q_{yN}$:

$$\begin{cases} M_z = \int Q_y dx - \int m_z dx = M_{zN} + L\,\xi\, Q_{yN} - \\ \qquad - L(\xi - \dfrac{\xi^2}{2})\, m_{zN} - L^2(\dfrac{\xi^2}{2} - \dfrac{\xi^3}{6})\, q_{yN} - L\dfrac{\xi^2}{2} m_{zK} - L^2\dfrac{\xi^3}{6} q_{yK}\,; \\ Q_y = -\int q_y dx = Q_{yN} - L(\xi - \dfrac{\xi^2}{2})\, q_{yN} - L\dfrac{\xi^2}{2} q_{yK}\,. \end{cases} \tag{13}$$

Базовые деформации определим из физических уравнений (2) с учетом (13):

$$\begin{cases} \mu_{z0} = \dfrac{M_z}{EJ_z} = \dfrac{1}{EJ_z}[M_{zN} + L\,\xi\,Q_{yN} - L(\xi - \dfrac{\xi^2}{2})\,m_{zN} - \\ \quad - L^2(\dfrac{\xi^2}{2} - \dfrac{\xi^3}{6})\,q_{yN} - L\dfrac{\xi^2}{2}m_{zK} - L^2\dfrac{\xi^3}{6}q_{yK}]; \\ \gamma_{xy0} = \dfrac{Q_y}{\kappa_y GF} = \dfrac{1}{\kappa_y GF}[Q_{yN} - L(\xi - \dfrac{\xi^2}{2})\,q_{yN} - L\dfrac{\xi^2}{2}q_{yK}]. \end{cases} \tag{14}$$

Функции перемещений находим путем интегрирования геометрических уравнений (3) с учетом (14) и граничных условий $\beta_{z0}(\xi = 0) = \beta_{z0N}$, $u_y(\xi = 0) = u_{y0N}$:

$$\begin{cases} \beta_{z0} = \int \mu_{z0}dx = \beta_{z0N} + \dfrac{L}{EJ_z}[\xi M_{zN} + L\dfrac{\xi^2}{2}Q_{yN} - \\ \quad - L(\dfrac{\xi^2}{2} - \dfrac{\xi^3}{6})\,m_{zN} - L^2(\dfrac{\xi^3}{6} - \dfrac{\xi^4}{24})\,q_{yN} - L\dfrac{\xi^3}{6}m_{zK} - L^2\dfrac{\xi^4}{24}q_{yK}]; \\ u_{y0} = -\int \beta_{z0}dx + \int \gamma_{xy0}dx = \\ \quad = u_{y0N} - L\,\xi\,\beta_{z0N} - \dfrac{L^2}{EJ_z}\{\dfrac{\xi^2}{2}M_{zN} + L(\dfrac{\xi^3}{6} - \gamma\,\xi)Q_{yN} - L(\dfrac{\xi^3}{6} - \dfrac{\xi^4}{24})\,m_{zN} - \\ \quad - L^2[\dfrac{\xi^4}{24} - \dfrac{\xi^5}{120} - \gamma(\dfrac{\xi^2}{2} - \dfrac{\xi^3}{6})]\,q_{yN} - L\dfrac{\xi^4}{24}m_{zK} - L^2(\dfrac{\xi^5}{120} - \gamma\dfrac{\xi^3}{6})q_{yK}\}, \end{cases} \tag{15}$$

где обозначен безразмерный коэффициент

$$\gamma = \frac{EJ_z}{\kappa_y GFL^2}. \tag{16}$$

### 1.2.3. Определение усилий и перемещений в конечном узле элемента

Ставим граничные условия на усилия $M_z(\xi = 1) = M_{zK}$, $Q_y(\xi = 1) = Q_{yK}$ в функциях (13):

$$\begin{cases} M_{zK} = M_{zN} + L\,Q_{yN} - \dfrac{L}{2}m_{zN} - \dfrac{L^2}{3}q_{yN} - \dfrac{L}{2}m_{zK} - \dfrac{L^2}{6}q_{yK}; \\ Q_{yK} = Q_{yN} - \dfrac{L}{2}q_{yN} - \dfrac{L}{2}q_{yK}. \end{cases} \tag{17}$$

Из граничных условий на перемещения $\beta_{z0}(\xi = 1) = \beta_{z0K}$, $u_y(\xi = 1) = u_{y0K}$ в выражениях (15) следует:

$$\begin{cases} \beta_{z0K} = \beta_{z0N} + \dfrac{L}{EJ_z}(M_{zN} + \dfrac{L}{2}Q_{yN} - \dfrac{L}{3}m_{zN} - \dfrac{L^2}{8}q_{yN} - \dfrac{L}{6}m_{zK} - \dfrac{L^2}{24}q_{yK}); \\ u_{y0K} = u_{y0N} - L\beta_{z0N} - \dfrac{L^2}{EJ_z}[\dfrac{1}{2}M_{zN} + L(\dfrac{1}{6} - \gamma)Q_{yN} - \\ \quad -\dfrac{L}{8}m_{zN} - L^2(\dfrac{1}{30} - \dfrac{\gamma}{3})q_{yN} - \dfrac{L}{24}m_{zK} - L^2(\dfrac{1}{120} - \dfrac{\gamma}{6})q_{yK}]. \end{cases} \tag{18}$$

### 1.2.4. Построение матриц метода начальных параметров

Расчет по методу начальных параметров (МНП) исходит из известных силовых и кинематических факторов (параметров) в начальном узле дискретной схемы балки и сводится к рекуррентному вычислению данных параметров в последующих узлах. Таким образом, для расчета по МНП можно использовать выражения (17), (18) силовых и кинематических факторов в конечном узле элемента через аналогичные факторы в начальном узле.

По аналогии с (12) введем векторы усилий и перемещений для начального и конечного узлов элемента:

$$\widetilde{s}_N = \begin{bmatrix} M_{zN} \\ Q_{yN} \end{bmatrix}; \quad \widetilde{s}_K = \begin{bmatrix} M_{zK} \\ Q_{yK} \end{bmatrix}; \quad \widetilde{u}_N = \begin{bmatrix} \beta_{z0N} \\ u_{y0N} \end{bmatrix}; \quad \widetilde{u}_K = \begin{bmatrix} \beta_{z0K} \\ u_{y0K} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Тогда выражения (17), (18) представимы в матричном виде:

$$\begin{cases} \widetilde{s}_K = \widetilde{S}_s\widetilde{s}_N + \widetilde{S}_{qN}\widetilde{q}_N + \widetilde{S}_{qK}\widetilde{q}_K; \\ \widetilde{u}_K = \widetilde{U}_u\widetilde{u}_N + \widetilde{U}_s\widetilde{s}_N + \widetilde{U}_{qN}\widetilde{q}_N + \widetilde{U}_{qK}\widetilde{q}_K. \end{cases} \tag{20}$$

Матрицы в (20) равны:

$$\widetilde{S}_s = \begin{bmatrix} 1 & L \\ & 1 \end{bmatrix}; \quad \widetilde{U}_u = \begin{bmatrix} 1 & \\ -L & 1 \end{bmatrix}; \quad \widetilde{U}_s = \frac{L}{6EJ_z}\begin{bmatrix} 6 & 3L \\ -3L & -L^2(1-6\gamma) \end{bmatrix}; \tag{21}$$

$$\widetilde{S}_{qN} = -\frac{L}{6}\begin{bmatrix} 3 & 2L \\ & 3 \end{bmatrix}; \quad \widetilde{S}_{qK} = -\frac{L}{6}\begin{bmatrix} 3 & L \\ & 3 \end{bmatrix}; \tag{22}$$

$$\widetilde{U}_{qN} = \frac{L^2}{120EJ_z}\begin{bmatrix} -40 & -15L \\ 15L & L^2(4-40\gamma) \end{bmatrix}; \quad \widetilde{U}_{qK} = \frac{L^2}{120EJ_z}\begin{bmatrix} -20 & -5L \\ 5L & L^2(1-20\gamma) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

### 1.2.5. Построение матриц жесткости и приведения нагрузок конечного элемента

Матричное **уравнение статического равновесия конечного элемента** записывается в виде

$$\overline{C}\,\overline{u} = \overline{g} + \overline{Q}\,\overline{q}, \tag{24}$$

где векторы перемещений $\overline{u}$, граничных сил $\overline{g}$, погонных нагрузок $\overline{q}$ и матрицы жесткости $\overline{C}$ и приведения нагрузок $\overline{Q}$ для стержневого КЭ представляются в блочной форме:

$$\overline{u} = \begin{bmatrix} \widetilde{u}_N \\ \hline \widetilde{u}_K \end{bmatrix}; \qquad \overline{g} = \begin{bmatrix} -\widetilde{s}_N \\ \hline \widetilde{s}_K \end{bmatrix}; \qquad \overline{q} = \begin{bmatrix} \widetilde{q}_N \\ \hline \widetilde{q}_K \end{bmatrix}; \tag{25}$$

$$\overline{C} = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{C}_{NN} & \widetilde{C}_{NK} \\ \hline \widetilde{C}_{KN} & \widetilde{C}_{KK} \end{array}\right]; \quad \overline{Q} = \left[\begin{array}{c|c} \widetilde{Q}_{NN} & \widetilde{Q}_{NK} \\ \hline \widetilde{Q}_{KN} & \widetilde{Q}_{KK} \end{array}\right]. \tag{26}$$

Выразим из (20-2) вектор усилий $\widetilde{s}_N$, затем, подставив его в (20-1), определим вектор усилий $\widetilde{s}_K$:

$$\begin{cases} \widetilde{s}_N = \widetilde{U}_s^{-1}(-\widetilde{U}_u\widetilde{u}_N + \widetilde{u}_K - \widetilde{U}_{qN}\widetilde{q}_N - \widetilde{U}_{qK}\widetilde{q}_K)\,; \\ \widetilde{s}_K = \widetilde{S}_s\widetilde{U}_s^{-1}(-\widetilde{U}_u\widetilde{u}_N + \widetilde{u}_K - \widetilde{U}_{qN}\widetilde{q}_N - \widetilde{U}_{qK}\widetilde{q}_K) + \widetilde{S}_{qN}\widetilde{q}_N + \widetilde{S}_{qK}\widetilde{q}_K\,. \end{cases} \tag{27}$$

Составим из найденных усилий вектор граничных сил $\overline{g}$ по (25). Группируя полученные выражения при векторе перемещений $\overline{u}$, найдем блоки матрицы жесткости $\overline{C}$ в соответствии с (26-1) и с учетом (21):

$$\begin{cases} \widetilde{C}_{NN} = \widetilde{U}_s^{-1}\widetilde{U}_u = \dfrac{2EJ_z}{L^3(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} L^2(2+6\gamma) & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix}; \\ \widetilde{C}_{NK} = -\widetilde{U}_s^{-1} = \dfrac{2EJ_z}{L^3(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} L^2(1-6\gamma) & 3L \\ -3L & -6 \end{bmatrix}; \\ \widetilde{C}_{KN} = -\widetilde{S}_s\widetilde{U}_s^{-1}\widetilde{U}_u = \dfrac{2EJ_z}{L^3(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} L^2(1-6\gamma) & -3L \\ 3L & -6 \end{bmatrix} = \widetilde{C}_{NK}^T\,; \\ \widetilde{C}_{KK} = \widetilde{S}_s\widetilde{U}_s^{-1} = \dfrac{2EJ_z}{L^3(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} L^2(2+6\gamma) & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{28}$$

или, собирая воедино блоки (28) согласно (26-1), получим полную **матрицу жесткости конечного элемента,** которая известна в литературе и приведена в справочнике [4]:

$$\overline{C} = \frac{2EJ_z}{L^3(1+12\gamma)}\left[\begin{array}{cc|cc} L^2(2+6\gamma) & -3L & L^2(1-6\gamma) & 3L \\ -3L & 6 & -3L & -6 \\ \hline L^2(1-6\gamma) & -3L & L^2(2+6\gamma) & 3L \\ 3L & -6 & 3L & 6 \end{array}\right]. \tag{29}$$

Блоки матрицы приведения нагрузок $\overline{Q}$ по (26-2), полученные аналогично матрице жесткости путем группировки выражений при векторе погонных нагрузок $\overline{q}$, с учетом (21)-(23) равны:

$$\begin{cases} \widetilde{Q}_{NN} = -\widetilde{U}_s^{-1}\widetilde{U}_{qN} = \dfrac{1}{60(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} 5L(1+48\gamma) & -3L^2(1+10\gamma) \\ 30 & 3L(7+80\gamma) \end{bmatrix}; \\ \widetilde{Q}_{NK} = -\widetilde{U}_s^{-1}\widetilde{U}_{qK} = \dfrac{1}{60(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} -5L(1-24\gamma) & -2L^2(1+15\gamma) \\ 30 & 3L(3+40\gamma) \end{bmatrix}; \\ \widetilde{Q}_{KN} = -\widetilde{S}_{qN} + \widetilde{S}_s\widetilde{U}_s^{-1}\widetilde{U}_{qN} = \dfrac{1}{60(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} -5L(1-24\gamma) & 2L^2(1+15\gamma) \\ -30 & 3L(3+40\gamma) \end{bmatrix}; \\ \widetilde{Q}_{KK} = -\widetilde{S}_{qK} + \widetilde{S}_s\widetilde{U}_s^{-1}\widetilde{U}_{qK} = \dfrac{1}{60(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} 5L(1+48\gamma) & 3L^2(1+10\gamma) \\ -30 & 3L(7+80\gamma) \end{bmatrix}, \end{cases} \tag{30}$$

или, собирая воедино блоки (30) согласно (26-2), получим полную **матрицу приведения нагрузок конечного элемента**:

$$\overline{Q} = \frac{1}{60(1+12\gamma)}\left[\begin{array}{cc|cc} 5L(1+48\gamma) & -3L^2(1+10\gamma) & -5L(1-24\gamma) & -2L^2(1+15\gamma) \\ 30 & 3L(7+80\gamma) & 30 & 3L(3+40\gamma) \\ \hline -5L(1-24\gamma) & 2L^2(1+15\gamma) & 5L(1+48\gamma) & 3L^2(1+10\gamma) \\ -30 & 3L(3+40\gamma) & -30 & 3L(7+80\gamma) \end{array}\right]. \tag{31}$$

### 1.2.6. Матрицы функций формы конечного элемента

Точные функции формы элемента, задающие функции перемещений $\widetilde{u}$ в зависимости от векторов $\overline{u}$, $\overline{q}$, определяются по найденным в (15) перемещениям, которые представим в матричной форме:

$$\widetilde{u} = \widetilde{F}_u \widetilde{u}_N + \widetilde{F}_{sN} \widetilde{s}_N + \widetilde{F}_{qN} \widetilde{q}_N + \widetilde{F}_{qK} \widetilde{q}_K \ , \tag{32}$$

где обозначены следующие функциональные матрицы от аргумента $\xi$:

$$\begin{cases} \widetilde{F}_u = \begin{bmatrix} 1 & \\ -L\xi & 1 \end{bmatrix}; \\ \widetilde{F}_{sN} = \dfrac{L}{EJ_z} \begin{bmatrix} \xi & L\dfrac{\xi^2}{2} \\ -L\dfrac{\xi^2}{2} & -L^2(\dfrac{\xi^3}{6} - \gamma\,\xi) \end{bmatrix}; \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} \widetilde{F}_{qN} = \dfrac{L^2}{EJ_z} \begin{bmatrix} -(\dfrac{\xi^2}{2} - \dfrac{\xi^3}{6}) & -L(\dfrac{\xi^3}{6} - \dfrac{\xi^4}{24}) \\ L(\dfrac{\xi^3}{6} - \dfrac{\xi^4}{24}) & L^2[\dfrac{\xi^4}{24} - \dfrac{\xi^5}{120} - \gamma(\dfrac{\xi^2}{2} - \dfrac{\xi^3}{6})] \end{bmatrix}; \\ \widetilde{F}_{qK} = \dfrac{L^2}{EJ_z} \begin{bmatrix} -\dfrac{\xi^3}{6} & -L\dfrac{\xi^4}{24} \\ L\dfrac{\xi^4}{24} & L^2(\dfrac{\xi^5}{120} - \gamma\dfrac{\xi^3}{6}) \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{34}$$

Выражая вектор усилий $\widetilde{s}_N$ из уравнения равновесия КЭ (24) - (26)

$$\widetilde{s}_N = -\widetilde{C}_{NN}\widetilde{u}_N - \widetilde{C}_{NK}\widetilde{u}_K + \widetilde{Q}_{NN}\widetilde{q}_N + \widetilde{Q}_{NK}\widetilde{q}_K \ , \tag{35}$$

и подставляя его в (32), получим точные **функции перемещений**:

$$\widetilde{u} = \widetilde{\Phi}^T \overline{u} + \widetilde{\Theta}^T \overline{q} \ , \tag{36}$$

где векторы перемещений $\overline{u}$ и погонных нагрузок $\overline{q}$ заданы в (25), а **матрицы функций формы** $\widetilde{\Phi}^T$ от перемещений и $\widetilde{\Theta}^T$ от нагрузки представимы в блочном виде:

$$\widetilde{\Phi}^T = \left[\widetilde{\Phi}_N^T \ \vdots \ \widetilde{\Phi}_K^T\right] \ ; \qquad \widetilde{\Theta}^T = \left[\widetilde{\Theta}_N^T \ \vdots \ \widetilde{\Theta}_K^T\right] \ . \tag{37}$$

Блоки матриц функций формы с учетом выражений для матриц (28), (30), (33), (34) равны

$$\begin{cases} \widetilde{\Phi}_N^T = \widetilde{F}_u - \widetilde{F}_{sN}\widetilde{C}_{NN} = \dfrac{1}{L(1+12\gamma)} \begin{bmatrix} L(\xi_5 + 12\gamma\xi_1) & 6\xi_2 \\ -L^2\xi_2(\xi_1 + 6\gamma) & L(\xi_4 + 12\gamma\xi_1) \end{bmatrix}; \\ \widetilde{\Phi}_K^T = -\widetilde{F}_{sN}\widetilde{C}_{NK} \qquad = \dfrac{1}{L(1+12\gamma)} \begin{bmatrix} -L\xi(\xi_7 - 12\gamma) & -6\xi_2 \\ L^2\xi_2(\xi + 6\gamma) & L\xi(\xi_6 + 12\gamma) \end{bmatrix}; \end{cases} \tag{38}$$

$$\begin{cases} \widetilde{\Theta}_N^T = \widetilde{F}_{qN} + \widetilde{F}_{sN}\widetilde{Q}_{NN} = \\ = \dfrac{L^2}{120EJ_z(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} 10\xi(\xi_8 + 24\gamma\xi_{13}) & -L\xi(\xi_9 + 60\gamma\xi_{14}) \\ -5L\xi(\xi_3 - 12\gamma\xi_{14}) & L^2\xi(\xi_{10} + 6\gamma\xi_{15} + 240\gamma^2\xi_{13}) \end{bmatrix}; \\ \widetilde{\Theta}_K^T = \widetilde{F}_{qK} + \widetilde{F}_{sN}\widetilde{Q}_{NK} = \\ = \dfrac{L^2}{120EJ_z(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} -10\xi(\xi_8 - 24\gamma\xi_{18}) & -L\xi(\xi_{11} + 60\gamma\xi_{17}) \\ 5L\xi(\xi_3 + 12\gamma\xi_{17}) & L^2\xi(\xi_{12} + 6\gamma\xi_{16} + 240\gamma^2\xi_{18}) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (39)$$

где обозначены степенные полиномы:

$$\begin{cases} \xi_1 = 1 - \xi\,; \\ \xi_2 = \xi - \xi^2\,; \\ \xi_3 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3\,; \\ \xi_4 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3\,; \\ \xi_5 = 1 - 4\xi + 3\xi^2\,; \\ \xi_6 = 3\xi - 2\xi^2\,; \\ \xi_7 = 2 - 3\xi\,; \\ \xi_8 = 1 - 3\xi + 2\xi^2\,; \\ \xi_9 = 6 - 21\xi + 20\xi^2 - 5\xi^3\,; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_{10} = 3\xi - 7\xi^2 + 5\xi^3 - \xi^4\,; \\ \xi_{11} = 4 - 9\xi + 5\xi^3\,; \\ \xi_{12} = 2\xi - 3\xi^2 + \xi^4\,; \\ \xi_{13} = 2 - 3\xi + \xi^2\,; \\ \xi_{14} = 1 - 4\xi + 4\xi^2 - \xi^3\,; \\ \xi_{15} = 7 - 5\xi - 10\xi^2 + 10\xi^3 - 2\xi^4\,; \\ \xi_{16} = 3 + 5\xi - 10\xi^2 + 2\xi^4\,; \\ \xi_{17} = 1 - 2\xi + \xi^3\,; \\ \xi_{18} = 1 - \xi^2\,. \end{cases} \quad (40)$$

Полученные блоки матриц ФФ подчиняются следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} \widetilde{\Phi}_N^T\big|_{\xi=0} = \widetilde{\Phi}_K^T\big|_{\xi=1} = \widetilde{I}\,; \\ \widetilde{\Phi}_N^T\big|_{\xi=1} = \widetilde{\Phi}_K^T\big|_{\xi=0} = \widetilde{0}\,; \\ \widetilde{\Theta}_N^T\big|_{\xi=0} = \widetilde{\Theta}_N^T\big|_{\xi=1} = \widetilde{\Theta}_K^T\big|_{\xi=0} = \widetilde{\Theta}_K^T\big|_{\xi=1} = \widetilde{0}\,. \end{cases} \quad (41)$$

Из последней строки (41) очевидно, что функции $\widetilde{\Theta}^T$ описывают местные перемещения стержня от нагрузки, равные нулю на его торцах, т. е. перемещения от нагрузки полностью защемленного по торцам стержня с наложением линейных и угловых опорных связей.

### 1.3. Тестовые примеры статического расчета

Тестирование полученных матриц КЭ будем выполнять на простых примерах расчета балки, составленной из одного элемента, поскольку данные матрицы являются точными и дискретизация балки не обязательна. Компоненты граничных сил $\overline{g}$ в уравнении статического равновесия КЭ (24) обозначим в виде

$$\overline{g} = \left[M_N\ P_N \mid M_K\ P_K\right]^T \quad (42)$$

и интерпретируем их как опорные реакции, взятые с обратным знаком, или узловые нагрузки в зависимости от того, является конкретная степень свободы (СС) закрепленной или нет.

#### 1.3.1. Расчет консоли на действие сосредоточенной силы

Полагаем, что начальный узел КЭ защемлен, т.е. $\beta_{z0N} = u_{y0N} = 0$ и $M_N$, $P_N$ – неизвестные опорные реакции. Нагрузка в конечном узле $M_K = 0, P_K$ известна, а погонная нагрузка равна нулю. Тогда из (24) с учетом матрицы жесткости (29) после вычеркивания первых двух строк и столбцов, соответствующих опорным реакциям и перемещениям, имеем

$$\frac{2EJ_z}{L^3(1+12\gamma)}\begin{bmatrix} L^2(2+6\gamma) & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \beta_{z0K} \\ u_{y0K} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ P_K \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Решив систему уравнений (43), получим известные по справочникам перемещения конца консоли:

$$\beta_{z0K}=-\frac{P_K L^2}{2EJ_z}; \qquad u_{y0K}=\frac{P_K L^3}{3EJ_z}(1+3\gamma). \tag{44}$$

Коэффициент увеличения прогиба конца консоли за счет учета сдвиговых деформаций (см. (16)) для прямоугольного сечения размерами $b\times h$ и при отношении $E/G=2{,}5$ равен

$$\alpha_{s1}=1+3\gamma=1+\frac{3EJ_z}{\kappa_y GFL^2}=1+0{,}3\frac{Eh^2}{GL^2}=1+0{,}75\frac{h^2}{L^2}. \tag{45}$$

### 1.3.2. Расчет балки на действие вертикальной распределенной нагрузки

Полагаем, что закреплены линейные перемещения узлов КЭ, т.е. $u_{y0N}=u_{y0K}=0$ и $P_N, P_K$ – неизвестные опорные реакции. Сосредоточенная нагрузка в узлах отсутствует: $M_N=M_K=0$, а погонная нагрузка $q_{yN}, q_{yK}$ и $m_{zN}=m_{zK}=0$ известна. Тогда из (24) после вычеркивания второй и четвертой строк и столбцов имеем:

$$\frac{2EJ_z}{L}\left[\begin{array}{c|c} 2+6\gamma & 1-6\gamma \\ \hline 1-6\gamma & 2+6\gamma \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} \beta_{z0N} \\ \hline \beta_{z0K} \end{array}\right]=\frac{L^2}{60}\left[\begin{array}{c|c} -3(1+10\gamma) & -2(1+15\gamma) \\ \hline 2(1+15\gamma) & 3(1+10\gamma) \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} q_{yN} \\ \hline q_{yK} \end{array}\right]. \tag{46}$$

Решив систему уравнений (46), получим:

$$\begin{cases} \beta_{z0N}=-\dfrac{L^3}{360EJ_z}(8q_{yN}+7q_{yK}); \\ \beta_{z0K}=\dfrac{L^3}{360EJ_z}(7q_{yN}+8q_{yK}). \end{cases} \tag{47}$$

Функция прогибов балки на основании формул (36)-(39) равна:

$$\begin{aligned} u_{y0}=\frac{L}{1+12\gamma}\Bigg\{&\xi_2\left[-\xi_1-6\gamma \;\vdots\; \xi+6\gamma\right]\cdot\left[\begin{array}{c} \beta_{z0N} \\ \hline \beta_{z0K} \end{array}\right]+ \\ &+\frac{\xi L^3}{120EJ_z}\left[\xi_{10}+6\gamma\xi_{15}+240\gamma^2\xi_{13} \;\vdots\; \xi_{12}+6\gamma\xi_{16}+240\gamma^2\xi_{18}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} q_{yN} \\ \hline q_{yK} \end{array}\right]\Bigg\}, \end{aligned} \tag{48}$$

откуда с учетом (40), (47) найдем прогиб в середине пролета:

$$\begin{aligned} u_{y0S}=u_{y0}(\xi=1/2)&=\frac{L}{8}(-\beta_{z0N}+\beta_{z0K})+\frac{L^4(1+48\gamma)}{768EJ_z}(q_{yN}+q_{yK})= \\ &=\frac{5L^4(q_{yN}+q_{yK})}{768EJ_z}(1+9{,}6\gamma). \end{aligned} \tag{49}$$

Коэффициент увеличения прогиба балки за счет учета сдвиговых деформаций для прямоугольного сечения равен:

$$\alpha_{s2}=1+9{,}6\gamma=1+\frac{9{,}6EJ_z}{\kappa_y GFL^2}=1+0{,}96\frac{Eh^2}{GL^2}=1+2{,}4\frac{h^2}{L^2}. \tag{50}$$

Различие формул (45) и (50) показывает, что данный коэффициент зависит не только от отношения $h/L$, но и от расчетной схемы балки и нагрузки.

В частном случае для равномерно распределенной вертикальной нагрузки полагаем $q_{yN} = q_{yK} = q_{yC}$ и из (47), (49) получим известные по справочникам формулы:

$$\begin{cases} \beta_{z0N} = -\beta_{z0K} = -\dfrac{q_{yC}L^3}{24EJ_z}; \\ u_{y0S} = \dfrac{5q_{yC}L^4}{384EJ_z}(1+9{,}6\gamma). \end{cases} \tag{51}$$

### 1.4. Построение матрицы инерции конечного элемента методом Бубнова-Галеркина

Зададим аппроксимацию вектора перемещений $\tilde{u}$ по (36) с использованием по предложению В.В. Болотина точных статических ФФ $\tilde{\Phi}, \tilde{\Theta}$ по (37)-(39).

Метод Бубнова-Галеркина приводит к матричному **уравнению динамического равновесия конечного элемента** в виде (см. (98), (99) в [2]):

$$\overline{M}\,\ddot{\overline{u}} + \overline{C}\,\overline{u} = \overline{g} + \overline{P}\,\ddot{\overline{q}} + \overline{Q}\,\overline{q}\,, \tag{52}$$

где векторы КЭ оговорены в (25), а матрицы жесткости $\overline{C}$ и приведения нагрузок $\overline{Q}$, равные

$$\begin{cases} \overline{C} = \int\limits_L (\tilde{\Phi}\,\tilde{R}_s)\,\tilde{C}\,(\tilde{G}\,\tilde{\Phi}^T)dx\,; \\ \overline{Q} = \int\limits_L \tilde{\Phi}\,\tilde{\Omega}dx - \int\limits_L (\tilde{\Phi}\,\tilde{R}_s)\,\tilde{C}\,(\tilde{G}\,\tilde{\Theta}^T)dx\,, \end{cases} \tag{53}$$

при использовании точных статических ФФ совпадают с уже найденными матрицами по (29), (31). Матрицы инерции $\overline{M}$ и приведения ускорений нагрузок $\overline{P}$ определяются по формулам

$$\begin{cases} \overline{M} = \int\limits_L \tilde{\Phi}\,\tilde{M}\,\tilde{\Phi}^T dx\,; \\ \overline{P} = -\int\limits_L \tilde{\Phi}\,\tilde{M}\,\tilde{\Theta}^T dx\,. \end{cases} \tag{54}$$

Построенная по (54) с учетом (6), (37)-(39) **матрица инерции конечного элемента** суммируется из матриц, учитывающих инерцию поперечных перемещений и поворотов сечений, и в блочном виде равна

$$\overline{M} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{M}_{NN} & \tilde{M}_{NK} \\ \hline \tilde{M}_{KN} & \tilde{M}_{KK} \end{array}\right], \tag{55}$$

где

$$\tilde{M}_{NN} = \frac{\rho}{(1+12\gamma)^2}\Bigg\{FL\begin{bmatrix} L^2(\frac{1}{105}+\frac{\gamma}{5}+\frac{6\gamma^2}{5}) & -L(\frac{11}{210}+\frac{11\gamma}{10}+6\gamma^2) \\ -L(\frac{11}{210}+\frac{11\gamma}{10}+6\gamma^2) & \frac{13}{35}+\frac{42\gamma}{5}+48\gamma^2 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{J_z''}{L}\begin{bmatrix} L^2(\frac{2}{15}+2\gamma+48\gamma^2) & -L(\frac{1}{10}-6\gamma) \\ -L(\frac{1}{10}-6\gamma) & \frac{6}{5} \end{bmatrix}\Bigg\};$$

$$\widetilde{M}_{NK} = \frac{\rho}{(1+12\gamma)^2}\{FL\begin{bmatrix} -L^2(\frac{1}{140}+\frac{\gamma}{5}+\frac{6\gamma^2}{5}) & -L(\frac{13}{420}+\frac{9\gamma}{10}+6\gamma^2) \\ L(\frac{13}{420}+\frac{9\gamma}{10}+6\gamma^2) & \frac{9}{70}+\frac{18\gamma}{5}+24\gamma^2 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{J_z''}{L}\begin{bmatrix} L^2(-\frac{1}{30}-2\gamma+24\gamma^2) & L(\frac{1}{10}-6\gamma) \\ -L(\frac{1}{10}-6\gamma) & -\frac{6}{5} \end{bmatrix}\} = \widetilde{M}_{KN}^T ; \qquad (56)$$

$$\widetilde{M}_{KK} = \frac{\rho}{(1+12\gamma)^2}\{FL\begin{bmatrix} L^2(\frac{1}{105}+\frac{\gamma}{5}+\frac{6\gamma^2}{5}) & L(\frac{11}{210}+\frac{11\gamma}{10}+6\gamma^2) \\ L(\frac{11}{210}+\frac{11\gamma}{10}+6\gamma^2) & \frac{13}{35}+\frac{42\gamma}{5}+48\gamma^2 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{J_z''}{L}\begin{bmatrix} L^2(\frac{2}{15}+2\gamma+48\gamma^2) & L(\frac{1}{10}-6\gamma) \\ L(\frac{1}{10}-6\gamma) & \frac{6}{5} \end{bmatrix}\} .$$

Отметим, что в матрице инерции, приведенной в справочнике [4], нет слагаемых, учитывающих инерцию поворотов сечений, а в слагаемых, соответствующих инерции поперечных перемещений, отброшены существенные для коротких конечных элементов члены, содержащие $\gamma^2$.

Из представленных выше матриц КЭ изгиба по теории Тимошенко можно как частный случай получить матрицы элементов для других классических балочных теорий. Задание коэффициента $\gamma = 0$ позволяет перейти к теории Релея, не учитывающей сдвиговые деформации, а дополнительное задание момента инерции $J_z'' = 0$ – к теории Бернулли-Эйлера, не учитывающей также и инерцию поворотов сечений.

Матрицу приведения $\overline{P}$ рационально использовать только при больших ускорениях нагрузок, и поэтому она в данной статье не приводится.

### 1.5. Тестовые примеры динамического расчета

Динамический расчет по МКЭ всегда является приближенным, поскольку дискретная схема конструкции не может точно описать формы колебаний высших частот. В связи с этим практически важно оценить достаточность степени дискретизации расчетной схемы для описания конкретной формы колебаний и погрешность определения соответствующей данной форме частоты.

Рассмотрим шарнирно опертую балку пролетом $\ell$, свободно колеблющуюся по форме с номером $n = 2$, которой соответствует одна волна синусоиды. Частота колебаний $\omega_i$ балки по теории Тимошенко в зависимости от типа $i = 1,2$ формы колебаний (преимущественно сдвиговой или изгибной) определяется по формуле (см. (52г), (57) в [2] при тождестве $J_z'' = J_z$ для балки, состоящей из одного материала):

$$\omega_i = \sqrt{\frac{[\kappa_y G(F + J_z k^2) + EJ_z k^2] \mp \sqrt{[\kappa_y G(F + J_z k^2) + EJ_z k^2]^2 - 4\kappa_y GEJ_z^2 k^4}}{2\rho J_z}}, \qquad (57)$$

где волновое число равно

$$k = \frac{2\pi}{\ell}\,. \tag{58}$$

Дискретизацию данной балки осуществим в трех вариантах: состоящей из четырех, двух и одного КЭ, и для каждого варианта найдем частоту колебаний.

**Вариант дискретизации 1:** $L = \ell / 4$.

Все четыре элемента в деформированном состоянии, моделирующие форму колебаний балки в виде волны синусоиды, симметричны друг другу относительно оси $x$ или $y$. Поэтому достаточно рассмотреть один КЭ при граничных условиях: $u_{y0N} = 0$ и $\beta_{z0K} = 0$. Тогда из (52) при отсутствии нагрузок и с учетом матриц (29), (56) после вычеркивания второй и третьей строк и столбцов имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho}{(1+12\gamma)^2}\left\{FL\left[\begin{array}{c|c} L^2\left(\frac{1}{105}+\frac{\gamma}{5}+\frac{6\gamma^2}{5}\right) & -L\left(\frac{13}{420}+\frac{9\gamma}{10}+6\gamma^2\right) \\ \hline -L\left(\frac{13}{420}+\frac{9\gamma}{10}+6\gamma^2\right) & \frac{13}{35}+\frac{42\gamma}{5}+48\gamma^2 \end{array}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{J_z}{L}\left[\begin{array}{c|c} L^2\left(\frac{2}{15}+2\gamma+48\gamma^2\right) & L\left(\frac{1}{10}-6\gamma\right) \\ \hline L\left(\frac{1}{10}-6\gamma\right) & \frac{6}{5} \end{array}\right]\right\}\cdot\left[\begin{array}{c} \ddot{\beta}_{z0N} \\ \hline \ddot{u}_{y0K} \end{array}\right]+ \\
&+\frac{2EJ_z}{L^3(1+12\gamma)}\left[\begin{array}{c|c} L^2(2+6\gamma) & 3L \\ \hline 3L & 6 \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} \beta_{z0N} \\ \hline u_{y0K} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right].
\end{aligned} \tag{59}$$

Представление уравнений (59) в матричном виде

$$\overline{M}\,\ddot{\overline{u}} + \overline{C}\,\overline{u} = \overline{0} \tag{60}$$

и задание гармонического закона изменения вектора перемещений $\overline{u}$

$$\overline{u} = \overline{a}\sin\omega\, t \tag{61}$$

приводит к классической обобщенной задаче на собственные значения:

$$\overline{C}\,\overline{a} = \omega^2\overline{M}\,\overline{a}\,. \tag{62}$$

Решением задачи (62) является частотное уравнение

$$\det(\overline{C} - \omega^2\overline{M}) = 0\,, \tag{63}$$

представляющее собой биквадратное степенное уравнение и имеющее два корня, аналогичные теоретическим частотам балки Тимошенко по (57). Ввиду громоздкости выражений данные корни в статье не приводятся.

**Вариант дискретизации 2:** $L = \ell / 2$.

Каждый из двух элементов в деформированном состоянии моделирует половину волны синусоиды, описывающей форму колебаний, и имеет нулевые вертикальные перемещения по концам: $u_{y0N} = u_{y0K} = 0$. Тогда из (52) после вычеркивания второй и четвертой строк и столбцов имеем:

$$\frac{\rho}{(1+12\gamma)^2}\{FL^3\left[\begin{array}{c|c} \frac{1}{105}+\frac{\gamma}{5}+\frac{6\gamma^2}{5} & -\frac{1}{140}-\frac{\gamma}{5}-\frac{6\gamma^2}{5} \\ \hline -\frac{1}{140}-\frac{\gamma}{5}-\frac{6\gamma^2}{5} & \frac{1}{105}+\frac{\gamma}{5}+\frac{6\gamma^2}{5} \end{array}\right]+$$

$$+J_zL\left[\begin{array}{c|c} \frac{2}{15}+2\gamma+48\gamma^2 & -\frac{1}{30}-2\gamma+24\gamma^2 \\ \hline -\frac{1}{30}-2\gamma+24\gamma^2 & \frac{2}{15}+2\gamma+48\gamma^2 \end{array}\right]\}\cdot\left[\begin{array}{c} \ddot{\beta}_{z0N} \\ \hline \ddot{\beta}_{z0K} \end{array}\right]+ \tag{64}$$

$$+\frac{2EJ_z}{L(1+12\gamma)}\left[\begin{array}{c|c} 2+6\gamma & 1-6\gamma \\ \hline 1-6\gamma & 2+6\gamma \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} \beta_{z0N} \\ \hline \beta_{z0K} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \end{array}\right].$$

В силу симметрии полуволны синусоиды угловые перемещения торцов КЭ равны и противоположно направлены:

$$\beta_{z0N} = -\beta_{z0K}\ , \tag{65}$$

что приводит матричное уравнение (64) к простому уравнению

$$\rho(\frac{FL^3}{60}+\frac{J_zL}{6})\ddot{\beta}_{z0N}+\frac{2EJ_z}{L}\beta_{z0N}=0\ , \tag{66}$$

из которого после решения задачи на собственное значение по аналогии с (61)-(63) получим выражение для частоты колебаний

$$\omega=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{120EJ_z}{\rho(FL^2+10J_z)}}\ . \tag{67}$$

**Вариант дискретизации 3:** $L = \ell$.

Один элемент моделирует полную волну синусоиды в деформированном состоянии и имеет те же граничные условия, что и в предыдущем варианте. При этом угловые перемещения торцов КЭ равны как по величине, так и по направлению:

$$\beta_{z0N} = \beta_{z0K}\ , \tag{68}$$

что приводит (64) к уравнению

$$\rho[\frac{FL^3}{420}+\frac{J_zL}{10}(1+720\gamma^2)]\ddot{\beta}_{z0N}+\frac{6EJ_z}{L}(1+12\gamma)\beta_{z0N}=0\ . \tag{69}$$

Из (69) аналогично находится выражение для частоты колебаний

$$\omega=\frac{1}{L}\sqrt{\frac{2520EJ_z(1+12\gamma)}{\rho[FL^2+42J_z(1+720\gamma^2)]}}\ . \tag{70}$$

На рис. 1 приведены построенные по формулам (57), (63), (67), (70) графики относительных частот $\zeta = \omega / \omega_1$ колебаний балки прямоугольного поперечного сечения, отнесенных к теоретической частоте $\omega_1$ при колебаниях по форме первого типа. На рисунке по оси абсцисс отложена относительная высота балки $\eta = h / \ell$; красный цвет соответствует теоретическим частотам по (57), синий, циановый и зеленый – частотам для первого, второго и

третьего вариантов дискретизации балки по порядку. Сплошными линиями показаны графики частот колебаний по форме первого типа, штрихпунктиром – второго типа.

Как видно из приведенных графиков, дискретная модель из четырех элементов описывает колебания балки по формам обоих типов, соответствующим преимущественно сдвиговым и изгибным колебаниям. При этом частоты для длинных балок ($\eta \le 0{,}1$) практически равны теоретическим значениям, а для коротких балок ($\eta \ge 1$) определяются с инженерной точностью и завышены по отношению к теоретическим частотам примерно на 10 %.

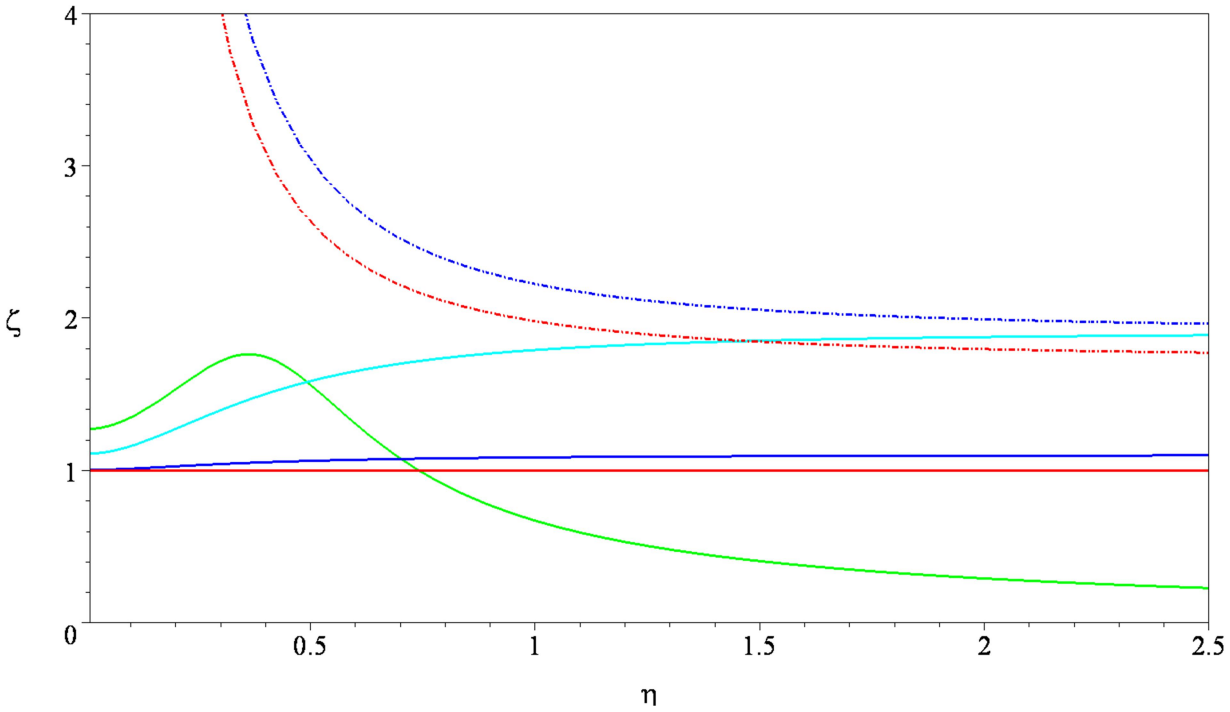



**Рис. 1.** Относительные частоты балки

Остальные дискретные модели из двух и одного элементов описывают колебания балки без разделения по типам форм, однако их частоты для длинных балок близки к частоте колебаний по форме первого типа, а для коротких балок – к частоте по форме второго типа. В последнем случае погрешность определения частоты по третьему варианту дискретизации резко возрастает.

Таким образом, при динамических расчетах балочных и стержневых конструкций целесообразно оценивать принятую степень дискретизации расчетной схемы конечными элементами путем определения минимального количества элементов, приходящихся на волну формы высокочастотных колебаний, проявившихся в результатах расчета. Если данное количество меньше четырех, а вклад формы колебаний в перемещения и усилия значителен, то можно рекомендовать увеличить принятую степень дискретизации конструкции.

## 2. Плоский изгиб балки с учетом депланации

Рассмотрение данной теории как частного случая разработанной в [1,2] общей теории пространственного стержня с учетом депланации начато в статье [3], из которой для удобства сопоставления с теорией Тимошенко перенесены следующие далее исходные уравнения.

### 2.1. Исходные дифференциальные уравнения балки

1. Дифференциальные уравнения равновесия (см. (32)-(36) в [3]):

$$\begin{cases} \rho J_z'' \ddot{\beta}_{z0} - M_z^x + Q_y = m_z ; \\ \rho F \ddot{u}_{yk} - Q_y^x = q_y ; \\ \rho I_{\psi yy}'' \ddot{\gamma}_{xyk} - L_{xy}^x = Q_y'' . \end{cases} \tag{71}$$

2. Физические уравнения:

$$\begin{cases} M_z = EJ_z \mu_{z0} ; \\ Q_y' = GF_y \gamma_{xyk} ; \\ L_{xy} = EI_{\psi yy} \lambda_{xyk} . \end{cases} \tag{72}$$

3. Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \mu_{z0} = \beta_{z0}^x ; \\ \gamma_{xyk} = \beta_{z0} + u_{yk}^x ; \\ \lambda_{xyk} = \gamma_{xyk}^x . \end{cases} \tag{73}$$

Разрешающая система в операторно-матричной форме:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{M}} \ddot{\tilde{\tilde{u}}} + \tilde{\tilde{R}} \tilde{s} = \tilde{\tilde{q}} ; \\ \tilde{s}' = \tilde{C} \tilde{e} ; \\ \tilde{e} = \tilde{\tilde{G}} \tilde{\tilde{u}} , \end{cases} \tag{74}$$

где обозначены векторы, матрицы и матричные операторы:

$$\tilde{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} \beta_{z0} \\ u_{yk} \\ \hline \gamma_{xyk} \end{bmatrix}; \quad \tilde{e} = \begin{bmatrix} \mu_{z0} \\ \gamma_{xzk} \\ \lambda_{xyk} \end{bmatrix}; \quad \tilde{s} = \tilde{s}' + \tilde{s}'' = \begin{bmatrix} M_z \\ Q_y \\ L_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_z \\ Q_y' \\ L_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_y'' \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\tilde{q}} = \begin{bmatrix} m_z \\ q_y \\ \hline Q_y'' \end{bmatrix}; \tag{75}$$

$$\tilde{\tilde{M}} = \rho \left[\begin{array}{cc|c} J_z'' & & \\ & F & \\ \hline & & I_{\psi yy}'' \end{array}\right]; \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} EJ_z & & \\ & GF_y & \\ & & EI_{\psi yy} \end{bmatrix}; \tag{76}$$

$$\tilde{\tilde{R}} = \left[\begin{array}{cc} -\partial^x & 1 \\ & -\partial^x \\ \hline & -\partial^x \end{array}\right]; \qquad \tilde{\tilde{G}} = \left[\begin{array}{cc|c} \partial^x & & \\ 1 & \partial^x & \\ & & \partial^x \end{array}\right]. \tag{77}$$

Напряжения в произвольной точке:

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{yM_z}{J_z} + \dfrac{\psi_y L_{xy}}{I_{\psi yy}} ; \\ \tau_{xy} = \dfrac{(1+\psi_y^y) Q_y}{F_y} . \end{cases} \tag{78}$$

Сопоставление исходных уравнений по теории Тимошенко (1)-(6) и с учетом депланации (71)-(77) показывает, что основным отличием последней теории является введение дополнительной деформации $\lambda_{xyk}$ и соответствующего ей усилия – депланационного момента при сдвиге $L_{xy}$, в результате чего порядок всех векторов, матриц и операторов возрос с двух до трех.

Также существенное отличие данных теорий заключается в формулах (8) и (78) для вычисления нормальных и касательных напряжений. По теории с учетом депланации в формуле для нормальных напряжений появляется дополнительное слагаемое, делающее закон изменения этих напряжений по высоте балки нелинейным.

Заметим, что в обозначениях $u_{yk}$ и $\gamma_{xyk}$ в последней теории символ «$k$» в нижних индексах был унаследован от общей теории стержня, где он обозначал принадлежность перемещений и деформаций к центру кручения. В приведенных выше формулах теории Тимошенко, не имеющей отношения к кручению, данный индекс был заменен символом «0», обозначающим принадлежность к центру тяжести.

### 2.2. Матрицы конечного элемента для задач статики

Исходные уравнения (71)-(77) можно, подобно уравнениям (1)-(6) теории Тимошенко, непосредственно применить для построения матриц балочного КЭ с учетом депланации. Чтобы не повторять громоздкие выкладки, используем уже полученные в [2] матрицы КЭ пространственного стержня с учетом депланации, осуществив переход к рассматриваемому частному случаю плоского изгиба с помощью формул:

$$\begin{cases}\widetilde{u}_1 \to \beta_{z0}\,; \\ \widetilde{u}_2 \to u_{yk}\,; \\ \widetilde{u}_3 \to \gamma_{xyk}\,;\end{cases} \quad \begin{cases}\widetilde{e}_1 \to \mu_{z0}\,; \\ \widetilde{e}_2 \to \gamma_{xyk}\,; \\ \widetilde{e}_3 \to \lambda_{xyk}\,;\end{cases} \quad \begin{cases}\widetilde{s}_1 \to M_z\,; \\ \widetilde{s}_2 \to Q_y\,; \\ \widetilde{s}_3 \to L_{xy}\,;\end{cases} \quad \begin{cases}\widetilde{C}_{11} \to EJ_z\,; \\ \widetilde{C}_{22}, \widetilde{J} \to J = GF_y\,; \\ \widetilde{C}_{33} \to EI_{\psi yy}\,;\end{cases} \tag{79}$$

$$\begin{cases}\widetilde{G}_{21}, \widetilde{R}_{12}, \widetilde{N} \to 1\,; \\ \widetilde{\Lambda} \to \lambda = L\sqrt{\dfrac{GF_y}{EI_{\psi yy}}}\,;\end{cases} \quad \begin{cases}\widetilde{D} \to D = \dfrac{L^3\gamma_2}{12EJ_z}\,; \\ \widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \widetilde{D}_3 \to 1/D\,;\end{cases} \quad \begin{cases}\widetilde{\Lambda}_c \to \Lambda_c = \cosh\lambda\,; \\ \widetilde{\Lambda}_s \to \Lambda_s = \sinh\lambda\,; \\ \widetilde{\Lambda}_t \to \Lambda_t = \tanh\lambda\,;\end{cases} \tag{80}$$

$$\begin{cases}\widetilde{\Lambda}_{c\xi} \to \Lambda_{c\xi} = \cosh\lambda\xi\,; \\ \widetilde{\Lambda}_{s\xi} \to \Lambda_{s\xi} = \sinh\lambda\xi\,; \\ \widetilde{\Lambda}_1 \to \Lambda_1 = 1/(\Lambda_s\lambda)\,; \\ \widetilde{\Lambda}_2 \to \Lambda_2 = \Lambda_c\Lambda_1\,; \\ \widetilde{\Lambda}_3 \to \Lambda_3 = \Lambda_2 - \Lambda_1\,;\end{cases} \quad \begin{cases}\widetilde{\Lambda}_4 \to \Lambda_4 = 1 - 12\Lambda_3 + \dfrac{60(1-2\Lambda_3)}{\lambda^2}\,; \\ \widetilde{\Lambda}_5 \to \Lambda_5 = 3\Lambda_1 + 7\Lambda_2 - \dfrac{20(1-\Lambda_3)}{\lambda^2}\,; \\ \widetilde{\Lambda}_6 \to \Lambda_6 = 7\Lambda_1 + 3\Lambda_2 - \dfrac{20\Lambda_3}{\lambda^2}\,;\end{cases} \tag{81}$$

где обозначены по аналогии с коэффициентом $\gamma$ по (16) новые безразмерные коэффициенты:

$$\gamma' = \frac{EJ_z}{GF_yL^2}\,; \qquad \gamma_1 = \gamma'(1-2\Lambda_3)\,; \qquad \gamma_2 = 1 + 12\gamma_1\,. \tag{82}$$

Осуществив замену (79)-(81) в формулах (65), (67) в [2], получим аналогичные (26), (28), (30) выражения для блоков **матрицы жесткости** $\overline{C}$:

$$\widetilde{C}_{NN} = \frac{2EJ_z}{L^3\gamma_2}\begin{bmatrix} L^2(2+6\gamma_1) & -3L & -3L^2\Lambda_3 \\ -3L & 6 & 6L\Lambda_3 \\ -3L^2\Lambda_3 & 6L\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2 + \dfrac{\gamma_2\Lambda_2}{12\gamma'}) \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{C}_{NK} = \frac{2EJ_z}{L^3\gamma_2}\begin{bmatrix} L^2(1-6\gamma_1) & 3L & -3L^2\Lambda_3 \\ -3L & -6 & 6L\Lambda_3 \\ -3L^2\Lambda_3 & -6L\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2 - \frac{\gamma_2\Lambda_1}{12\gamma'}) \end{bmatrix} = \widetilde{C}_{KN}^T \; ; \tag{83}$$

$$\widetilde{C}_{KK} = \frac{2EJ_z}{L^3\gamma_2}\begin{bmatrix} L^2(2+6\gamma_1) & 3L & -3L^2\Lambda_3 \\ 3L & 6 & -6L\Lambda_3 \\ -3L^2\Lambda_3 & -6L\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2 + \frac{\gamma_2\Lambda_2}{12\gamma'}) \end{bmatrix},$$

и **матрицы приведения нагрузок** $\overline{Q}$ :

$$\widetilde{Q}_{NN} = \frac{1}{60\gamma_2}\begin{bmatrix} 5L(1+48\gamma_1) & -3L^2(\gamma_2 - 2\gamma'\Lambda_4) \\ 30 & 3L(7+84\gamma_1 - 4\gamma'\Lambda_4) \\ 30L\Lambda_3 & L^2(3\gamma_2\Lambda_5 - \gamma'\Lambda_3\Lambda_4) \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{Q}_{NK} = \frac{1}{60\gamma_2}\begin{bmatrix} -5L(1-24\gamma_1) & -2L^2(\gamma_2 + 3\gamma'\Lambda_4) \\ 30 & 3L(3\gamma_2 + 4\gamma'\Lambda_4) \\ 30L\Lambda_3 & L^2(3\gamma_2\Lambda_6 + \gamma'\Lambda_3\Lambda_4) \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{Q}_{KN} = \frac{1}{60\gamma_2}\begin{bmatrix} -5L(1-24\gamma_1) & 2L^2(\gamma_2 + 3\gamma'\Lambda_4) \\ -30 & 3L(3\gamma_2 + 4\gamma'\Lambda_4) \\ 30L\Lambda_3 & -L^2(3\gamma_2\Lambda_6 + \gamma'\Lambda_3\Lambda_4) \end{bmatrix}; \tag{84}$$

$$\widetilde{Q}_{KK} = \frac{1}{60\gamma_2}\begin{bmatrix} 5L(1+48\gamma_1) & 3L^2(\gamma_2 - 2\gamma'\Lambda_4) \\ -30 & 3L(7+84\gamma_1 - 4\gamma'\Lambda_4) \\ 30L\Lambda_3 & -L^2(3\gamma_2\Lambda_5 - \gamma'\Lambda_3\Lambda_4) \end{bmatrix}.$$

Отметим, что при соотношениях $\gamma' = \gamma_1 = \gamma$, $\Lambda_4 = 1$ и вычеркивании третьих строк и столбцов из блоков матриц (83), (84) получаются соответствующие блоки матриц (28), (30) для КЭ балки Тимошенко. Это свидетельствует о том, что теорию изгиба Тимошенко можно рассматривать как частный случай предложенной теории изгиба с учетом депланации, и подтверждает корректность приведенных выше матриц КЭ.

Выполнив замену (79)-(81) в формулах (75) в [2], получим аналогичные (37)-(39) выражения для блоков **матриц функций формы** $\widetilde{\Phi}^T$ от перемещений и $\widetilde{\Theta}^T$ от нагрузки:

$$\widetilde{\widetilde{\Phi}}_N^T = \frac{1}{L\gamma_2}\left[\begin{array}{ccc} L(\gamma_2\xi_1 - 3\xi_2) & 6\xi_2 & 6L\xi_2 \\ L^2(6\gamma'K_{1\xi} - \gamma_2\xi_3) & L(\gamma_2\xi_4 - 12\gamma'K_{1\xi}) & L^2(\gamma_2K_{2\xi} - 12\gamma'K_{1\xi}\Lambda_3) \\ \hline 6L\gamma'K_{3\xi} & -12\gamma'K_{3\xi} & L(\gamma_2K_{4\xi} - 12\gamma'K_{3\xi}\Lambda_3) \end{array}\right];$$

$$\widetilde{\widetilde{\Phi}}_K^T = \frac{1}{L\gamma_2}\left[\begin{array}{ccc} L(\gamma_2\xi - 3\xi_2) & -6\xi_2 & 6L\xi_2 \\ L^2(6\gamma'K_{1\xi} + \gamma_2\xi_5) & L(\gamma_2\xi_6 + 12\gamma'K_{1\xi}) & L^2(\gamma_2K_{5\xi} - 12\gamma'K_{1\xi}\Lambda_3) \\ \hline 6L\gamma'K_{3\xi} & 12\gamma'K_{3\xi} & L(\gamma_2K_{6\xi} - 12\gamma'K_{3\xi}\Lambda_3) \end{array}\right]; \tag{85}$$

$$\widetilde{\widetilde{\Theta}}_N^T = \frac{L^2}{120EJ_z\gamma_2}\left[\begin{array}{cc} 20\gamma_2\xi_7 - 30\xi_2 & L(-\gamma_2\xi_8 + 12\gamma'\xi_2\Lambda_4) \\ L(-5\gamma_2\xi_9 + 60\gamma' K_{1\xi}) & L^2(\gamma_2^2\xi_{10} + 2\gamma'\gamma_2 K_{7\xi} - 24\gamma'^2 K_{1\xi}\Lambda_4) \\ \hline 60\gamma' K_{3\xi} & L(6\gamma'\gamma_2 K_{8\xi} - 24\gamma'^2 K_{3\xi}\Lambda_4) \end{array}\right];$$

$$\widetilde{\widetilde{\Theta}}_K^T = \frac{L^2}{120EJ_z\gamma_2}\left[\begin{array}{cc} 20\gamma_2\xi_{11} - 30\xi_2 & -L(\gamma_2\xi_{12} + 12\gamma'\xi_2\Lambda_4) \\ L(5\gamma_2\xi_9 + 60\gamma' K_{1\xi}) & L^2(\gamma_2^2\xi_{13} + 2\gamma'\gamma_2 K_{9\xi} + 24\gamma'^2 K_{1\xi}\Lambda_4) \\ \hline 60\gamma' K_{3\xi} & L(6\gamma'\gamma_2 K_{10\xi} + 24\gamma'^2 K_{3\xi}\Lambda_4) \end{array}\right].$$

Здесь вспомогательные функции $K_{i\xi}$, $J_{i\xi}$ и полиномы $\xi_i$ от аргумента $\xi$, определенные после соответствующих замен в формулах (76), (72), (77) в [2], равны:

$$\begin{cases} K_{1\xi} = -3\xi^2 + J_{1\xi} + (6\xi^2 + J_{2\xi} - J_{4\xi})\Lambda_3 ; \\ K_{2\xi} = -\xi_6\Lambda_3 - J_{2\xi}\Lambda_2 - J_{4\xi}\Lambda_1 ; \\ K_{3\xi} = 1 + (J_{3\xi} - J_{5\xi})\Lambda_3 ; \\ K_{4\xi} = -J_{3\xi}\Lambda_2 - J_{5\xi}\Lambda_1 ; \\ K_{5\xi} = -\xi_6\Lambda_3 + J_{2\xi}\Lambda_1 + J_{4\xi}\Lambda_2 ; \\ K_{6\xi} = J_{3\xi}\Lambda_1 + J_{5\xi}\Lambda_2 ; \\ K_{7\xi} = -18\xi^2 + 21J_{1\xi} + 36\xi^2\Lambda_3 - \xi_6\Lambda_4 + 2J_{6\xi} + 3J_{2\xi}\Lambda_5 + 3J_{4\xi}\Lambda_6 ; \\ K_{8\xi} = 7 + 10J_{7\xi} + J_{3\xi}\Lambda_5 + J_{5\xi}\Lambda_6 ; \\ K_{9\xi} = -12\xi^2 + 9J_{1\xi} + 24\xi^2\Lambda_3 + \xi_6\Lambda_4 + 2J_{8\xi} + 3J_{2\xi}\Lambda_6 + 3J_{4\xi}\Lambda_5 ; \\ K_{10\xi} = 3 + 10J_{9\xi} + J_{3\xi}\Lambda_6 + J_{5\xi}\Lambda_5 ; \end{cases}$$

(86)

$$\begin{cases} J_{1\xi} = \xi + 2\xi^3 - 4\xi^3\Lambda_3 ; \\ J_{2\xi} = \Lambda_{c\xi} - \Lambda_{s\xi}\Lambda_t^{-1} - 1 ; \\ J_{3\xi} = (\Lambda_{s\xi} - \Lambda_{c\xi}\Lambda_t^{-1})\lambda ; \\ J_{4\xi} = \Lambda_{s\xi}\Lambda_s^{-1} ; \\ J_{5\xi} = \Lambda_{c\xi}\Lambda_s^{-1}\lambda ; \\ J_{6\xi} = 30(J_{2\xi} + \xi)\lambda^{-2} - 15\xi^2 + 5\xi^3 - 15\xi^4 + 3\xi^5 + 6(5\xi^4 - \xi^5)\Lambda_3 ; \\ J_{7\xi} = 2(J_{3\xi} + 1)\lambda^{-2} - 2\xi + \xi^2 ; \\ J_{8\xi} = 30(J_{4\xi} - \xi)\lambda^{-2} - 5\xi^3 - 3\xi^5 + 6\xi^5\Lambda_3 ; \\ J_{9\xi} = 2(J_{5\xi} - 1)\lambda^{-2} - \xi^2 ; \end{cases} \qquad (87)$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 1-\xi\,; \\ \xi_2 = \xi-\xi^2\,; \\ \xi_3 = \xi-2\xi^2+\xi^3\,; \\ \xi_4 = 1-3\xi^2+2\xi^3\,; \\ \xi_5 = \xi^2-\xi^3\,; \\ \xi_6 = 3\xi^2-2\xi^3\,; \\ \xi_7 = 2\xi-3\xi^2+\xi^3\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} \xi_8 = 6\xi-21\xi^2+20\xi^3-5\xi^4\,; \\ \xi_9 = \xi^2-2\xi^3+\xi^4\,; \\ \xi_{10} = 3\xi^2-7\xi^3+5\xi^4-\xi^5\,; \\ \xi_{11} = \xi-\xi^3\,; \\ \xi_{12} = 4\xi-9\xi^2+5\xi^4\,; \\ \xi_{13} = 2\xi^2-3\xi^3+\xi^5\,. \end{cases} \tag{88}$$

Отметим, что в функциях $K_{i\xi}$ по (86) в отличие от соответствующих им функциональных матриц $\widetilde{K}_{i\xi}$ в формулах (76) в [2] исключены жесткостные коэффициенты $J^{-1}$ по (79) для придания этим функциям безразмерного вида.

### 2.3. Тестовые примеры статического расчета

Полученные матрицы балочного КЭ с учетом депланации используем в тех же примерах расчета балки, которые были решены в первом разделе в рамках теории Тимошенко. В компонентах граничных сил $\overline{g}$ по (42) из уравнения статического равновесия КЭ (24) дополнительно учтем депланационные моменты:

$$\overline{g} = \left[M_N\ P_N\ L_N \mid M_K\ P_K\ L_K\right]^T. \tag{89}$$

#### 2.3.1. Расчет консоли на действие сосредоточенной силы

Полагаем, что начальный узел КЭ защемлен, причем закреплены не только степени свободы $\beta_{z0N} = u_{ykN} = 0$, как в разделе 1.3.1, но и дополнительная степень $\gamma_{xykN} = 0$, являющаяся мерой депланации. Последнее закрепление соответствует привариванию к торцу балки в опорном узле жесткой плиты, препятствующей деформациям депланации. Неизвестными опорными реакциями консоли будут взятые с обратным знаком усилия $M_N$, $P_N$, $L_N$. Нагрузку в конечном узле $M_K = L_K = 0$, $P_K$ считаем известной, а погонную нагрузку – равной нулю. Тогда из (24) с учетом матрицы жесткости (83) после вычеркивания первых трех столбцов, соответствующих опорным перемещениям, имеем две системы уравнений:

$$\frac{2EJ_z}{L^3\gamma_2}\begin{bmatrix} L^2(1-6\gamma_1) & 3L & -3L^2\Lambda_3 \\ -3L & -6 & 6L\Lambda_3 \\ -3L^2\Lambda_3 & -6L\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2-\dfrac{\gamma_2\Lambda_1}{12\gamma'}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \beta_{z0K} \\ u_{ykK} \\ \gamma_{xykK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_N \\ P_N \\ L_N \end{bmatrix}; \tag{90}$$

$$\frac{2EJ_z}{L^3\gamma_2}\begin{bmatrix} L^2(2+6\gamma_1) & 3L & -3L^2\Lambda_3 \\ 3L & 6 & -6L\Lambda_3 \\ -3L^2\Lambda_3 & -6L\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2+\dfrac{\gamma_2\Lambda_2}{12\gamma'}) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \beta_{z0K} \\ u_{ykK} \\ \gamma_{xykK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_K \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{91}$$

Последовательно решив системы уравнений (91), (90), получим перемещения конца консоли и усилия в защемлении, которые после подстановки (80), (81) и преобразований принимают вид:

$$\begin{cases} \beta_{z0K} = -\dfrac{P_K L^2}{2EJ_z}; \\ u_{ykK} = \dfrac{P_K L^3}{3EJ_z}[1 + 3\gamma'(1 - \dfrac{\Lambda_t}{\lambda})]; \\ \gamma_{xykK} = \dfrac{P_K}{GF_y}(1 - \dfrac{1}{\Lambda_c}). \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{zN} = -M_N = -P_K L; \\ Q_{yN} = -P_N = P_K; \\ L_{xyN} = -L_N = P_K L \dfrac{\Lambda_t}{\lambda}. \end{cases} \tag{92}$$

Приведенные в (82), (80) и фигурирующие в формулах (92) безразмерные коэффициенты $\gamma'$ и $\lambda$ для прямоугольного сечения размерами $b \times h$, имеющего характеристики

$$J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad F_y = \frac{5}{6}bh, \quad I_{\psi yy} = \frac{bh^3}{1008}, \tag{93}$$

и при соотношении $E / G = 2{,}5$ будут равны

$$\begin{cases} \gamma' = \dfrac{EJ_z}{GF_y L^2} = 0{,}25\dfrac{h^2}{L^2}; \\ \lambda = L\sqrt{\dfrac{GF_y}{EI_{\psi yy}}} = \sqrt{336}\dfrac{L}{h} \approx 18{,}33\dfrac{L}{h}. \end{cases} \tag{94}$$

**Коэффициент увеличения прогиба конца консоли за счет учета сдвиговых и депланационных деформаций** согласно формулам (45), (92), (94) для прямоугольного сечения равен

$$\alpha_{d1} = 1 + 3\gamma'(1 - \frac{\Lambda_t}{\lambda}) = 1 + 0{,}75\frac{h^2}{L^2}(1 - \frac{\Lambda_t}{\lambda}). \tag{95}$$

Для максимальных фибровых напряжений в балке прямоугольного поперечного сечения при $y = -h/2$, $\psi_y(-h/2) = h/12$ из (78), (92), (93) получим

$$\sigma_{xN} = \frac{yM_{zN}}{J_z} + \frac{\psi_y L_{xyN}}{I_{\psi yy}} = \frac{6P_K L}{bh^2}(1 + 14\frac{\Lambda_t}{\lambda}), \tag{96}$$

где выражение в скобках является **коэффициентом увеличения фибровых напряжений при учете депланации** по сравнению с напряжением по (8) для технических теорий:

$$\beta_{d1} = 1 + 14\frac{\Lambda_t}{\lambda}. \tag{97}$$

Графики коэффициентов увеличения прогибов $\alpha$ и фибровых напряжений $\beta$ в зависимости от относительной высоты поперечного сечения консоли $\eta = h / L$ приведены на рис. 2, 3. На них красным цветом показаны горизонтальные линии с единичной ординатой, соответствующие технической теории изгиба балки, по отношению к которой определялись данные ко-

эффициенты. Синий цвет соответствует теории изгиба с учетом депланации и формулам (95), (97), зеленый цвет на рис. 2 – теории Тимошенко и формуле (45).

Из представленных графиков видно, что учет сдвиговых деформаций практически не влияет на прогибы для длинных балок ($\eta \le 0{,}1$), но заметно увеличивает прогибы для средних ($0{,}1 < \eta \le 1$) и коротких балок ($\eta \ge 1$). Учет деформаций депланации незначительно снижает прогибы по сравнению с теорией Тимошенко независимо от относительной высоты сечения $\eta$, что свидетельствует о небольшом увеличении жесткости конечного элемента.

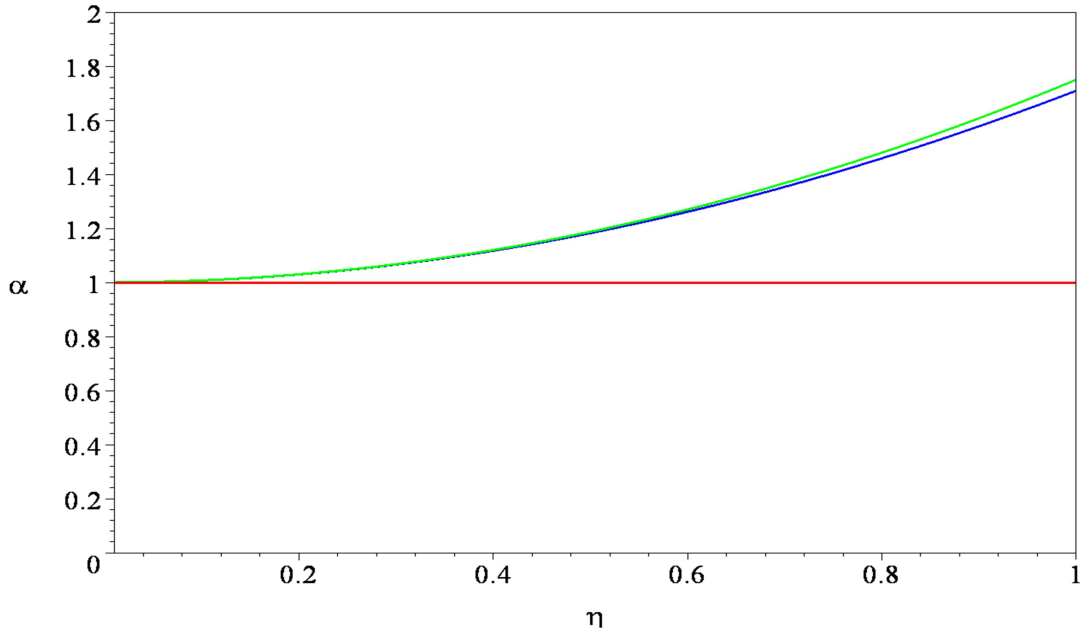



**Рис. 2.** Коэффициент увеличения прогиба конца консоли
за счет учета сдвиговых и депланационных деформаций

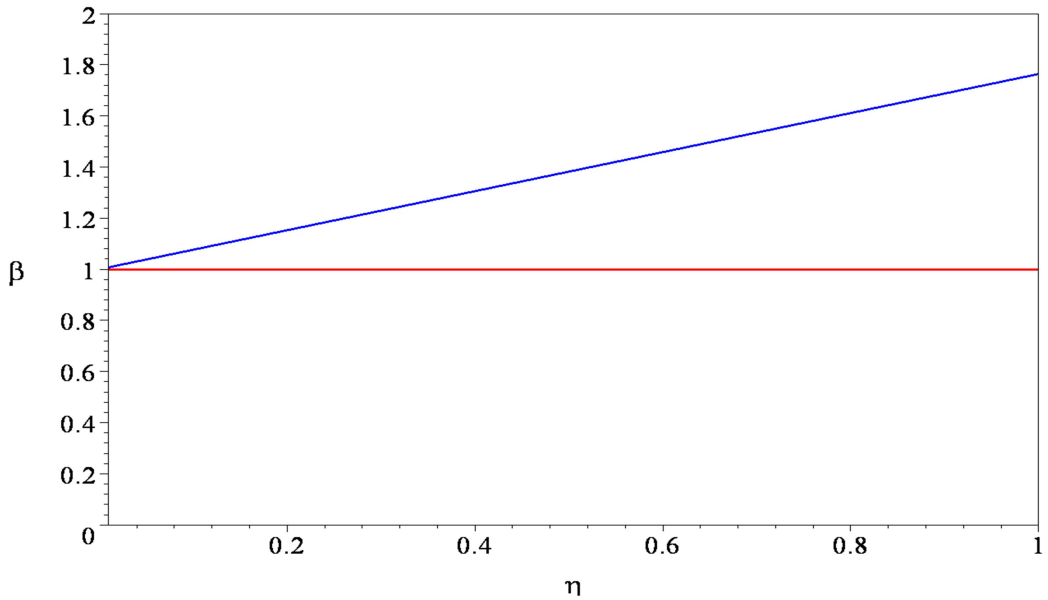



**Рис. 3.** Коэффициент увеличения фибровых напряжений при учете депланации

Влияние учета деформаций депланации на фибровые напряжения более заметно, чем на прогибы, и в условном интервале $0{,}1 < \eta \le 1$ для средних балок коэффициент $\beta$ изменяется в пределах 1,10–1,75 .

### 2.3.2. Расчет балки на действие вертикальной распределенной нагрузки

Полагаем, что закреплены линейные перемещения узлов КЭ, т.е. $u_{y0N} = u_{y0K} = 0$ и $P_N, P_K$ – неизвестные опорные реакции. Сосредоточенная нагрузка в узлах отсутствует: $M_N = L_N = M_K = L_K = 0$, а погонная нагрузка $q_{yN}, q_{yK}$ и $m_{zN} = m_{zK} = 0$ известна. Тогда из (24) с учетом (83), (84) после вычеркивания второй и пятой строк и столбцов в матрице жесткости имеем:

$$\frac{2EJ_z}{L^3\gamma_2}\left[\begin{array}{cc|cc} L^2(2+6\gamma_1) & -3L^2\Lambda_3 & L^2(1-6\gamma_1) & -3L^2\Lambda_3 \\ -3L^2\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2+\frac{\gamma_2\Lambda_2}{12\gamma'}) & -3L^2\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2-\frac{\gamma_2\Lambda_1}{12\gamma'}) \\ \hline L^2(1-6\gamma_1) & -3L^2\Lambda_3 & L^2(2+6\gamma_1) & -3L^2\Lambda_3 \\ -3L^2\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2-\frac{\gamma_2\Lambda_1}{12\gamma'}) & -3L^2\Lambda_3 & 6L^2(\Lambda_3^2+\frac{\gamma_2\Lambda_2}{12\gamma'}) \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} \beta_{z0N} \\ \gamma_{xykN} \\ \hline \beta_{z0K} \\ \gamma_{xykK} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{60\gamma_2}\left[\begin{array}{c|c} -3L^2(\gamma_2-2\gamma'\Lambda_4) & -2L^2(\gamma_2+3\gamma'\Lambda_4) \\ L^2(3\gamma_2\Lambda_5-\gamma'\Lambda_3\Lambda_4) & L^2(3\gamma_2\Lambda_6+\gamma'\Lambda_3\Lambda_4) \\ \hline 2L^2(\gamma_2+3\gamma'\Lambda_4) & 3L^2(\gamma_2-2\gamma'\Lambda_4) \\ -L^2(3\gamma_2\Lambda_6+\gamma'\Lambda_3\Lambda_4) & -L^2(3\gamma_2\Lambda_5-\gamma'\Lambda_3\Lambda_4) \end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c} q_{yN} \\ \hline q_{yK} \end{array}\right]. \tag{98}$$

Решив систему уравнений (98), получим

$$\begin{cases} \beta_{z0N} = -\dfrac{L^3}{360EJ_z\lambda^3[\lambda+12\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]}\{\lambda^3[8\lambda+96\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]q_{yN} + \\ +\lambda^3[7\lambda+84\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]q_{yK} + 132\gamma'^2\Lambda_{t2}[\lambda(\lambda^2+60)-12\Lambda_{t2}(\lambda^2+10)]q_{yR}\}; \\ \beta_{z0K} = \dfrac{L^3}{360EJ_z\lambda^3[\lambda+12\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]}\{\lambda^3[7\lambda+84\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]q_{yN} + \\ +\lambda^3[8\lambda+96\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]q_{yK} - 132\gamma'^2\Lambda_{t2}[\lambda(\lambda^2+60)-12\Lambda_{t2}(\lambda^2+10)]q_{yR}\}; \end{cases} \tag{99}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xykN} = \dfrac{L}{60GF_y\lambda^2\Lambda_{t2}[\lambda+12\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]}\Big\langle q_{yN}\{10\lambda[\Lambda_{t2}(2\lambda^2+6)-3\lambda(1+\Lambda_{t2}^2)+ \\ +\gamma'[251\lambda^3\Lambda_{t2}-36\lambda^2(10+27\Lambda_{t2}^2)+60\lambda\Lambda_{t2}(35+12\Lambda_{t2}^2)-2760\Lambda_{t2}^2]\}+ \\ +q_{yK}\{10\lambda[\Lambda_{t2}(\lambda^2-6)+3\lambda(1-\Lambda_{t2}^2)+\gamma'[109\lambda^3\Lambda_{t2}+36\lambda^2(10-13\Lambda_{t2}^2)- \\ -60\lambda\Lambda_{t2}(35-12\Lambda_{t2}^2)+2760\Lambda_{t2}^2]\}\Big\rangle; \\ \gamma_{xykK} = -\dfrac{L}{60GF_y\lambda^2\Lambda_{t2}[\lambda+12\gamma'(\lambda-2\Lambda_{t2})]}\Big\langle q_{yN}\{10\lambda[\Lambda_{t2}(\lambda^2-6)+3\lambda(1-\Lambda_{t2}^2)+ \\ +\gamma'[109\lambda^3\Lambda_{t2}+36\lambda^2(10-13\Lambda_{t2}^2)-60\lambda\Lambda_{t2}(35-12\Lambda_{t2}^2)+2760\Lambda_{t2}^2]\}+ \\ +q_{yK}\{10\lambda[\Lambda_{t2}(2\lambda^2+6)-3\lambda(1+\Lambda_{t2}^2)+\gamma'[251\lambda^3\Lambda_{t2}-36\lambda^2(10+27\Lambda_{t2}^2)+ \\ +60\lambda\Lambda_{t2}(35+12\Lambda_{t2}^2)-2760\Lambda_{t2}^2]\}\Big\rangle, \end{cases} \tag{100}$$

где обозначено:

$$q_{yR} = q_{yK} - q_{yN}\,; \qquad \Lambda_{t2} = \tanh(\lambda/2)\,; \qquad \Lambda_{t4} = \tanh(\lambda/4)\,. \tag{101}$$

Функции перемещений балки на основании формул (36), (37), (85) равны

$$\beta_{z0} = \frac{1}{\gamma_2}\left\{\left[\gamma_2\xi_1 - 3\xi_2 \;\vdots\; \gamma_2\xi - 3\xi_2\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\beta_{z0N}\\ \hdashline \beta_{z0K}\end{array}\right] + 6\xi_2\left[\begin{array}{c}\gamma_{xykN}\\ \hdashline \gamma_{xykK}\end{array}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{L^3}{120EJ_z}\cdot\left[-\gamma_2\xi_8 + 12\gamma'\xi_2\Lambda_4 \;\vdots\; -\gamma_2\xi_{12} - 12\gamma'\xi_2\Lambda_4\right]\cdot\left[\begin{array}{c}q_{yN}\\ \hdashline q_{yK}\end{array}\right]\right\};$$

$$u_{yk} = \frac{L}{\gamma_2}\left\{\left[6\gamma'K_{1\xi} - \gamma_2\xi_3 \;\vdots\; 6\gamma'K_{1\xi} + \gamma_2\xi_5\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\beta_{z0N}\\ \hdashline \beta_{z0K}\end{array}\right] + \right.$$

$$+ \left[\gamma_2K_{2\xi} - 12\gamma'K_{1\xi}\Lambda_3 \;\vdots\; \gamma_2K_{5\xi} - 12\gamma'K_{1\xi}\Lambda_3\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\gamma_{xykN}\\ \hdashline \gamma_{xykK}\end{array}\right] + \frac{L^3}{120EJ_z}\cdot \tag{102}$$

$$\left.\cdot\left[\gamma_2^2\xi_{10} + 2\gamma'\gamma_2K_{7\xi} - 24\gamma'^2K_{1\xi}\Lambda_4 \;\vdots\; \gamma_2^2\xi_{13} + 2\gamma'\gamma_2K_{9\xi} + 24\gamma'^2K_{1\xi}\Lambda_4\right]\cdot\left[\begin{array}{c}q_{yN}\\ \hdashline q_{yK}\end{array}\right]\right\};$$

$$\gamma_{xyk} = \frac{1}{\gamma_2}\left\{6\gamma'K_{3\xi}\left[\begin{array}{c}\beta_{z0N}\\ \hdashline \beta_{z0K}\end{array}\right] + \left[\gamma_2K_{4\xi} - 12\gamma'K_{3\xi}\Lambda_3 \;\vdots\; \gamma_2K_{6\xi} - 12\gamma'K_{3\xi}\Lambda_3\right]\cdot\left[\begin{array}{c}\gamma_{xykN}\\ \hdashline \gamma_{xykK}\end{array}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{L^3}{120EJ_z}\cdot\left[6\gamma'\gamma_2K_{8\xi} - 24\gamma'^2K_{3\xi}\Lambda_4 \;\vdots\; 6\gamma'\gamma_2K_{10\xi} + 24\gamma'^2K_{3\xi}\Lambda_4\right]\cdot\left[\begin{array}{c}q_{yN}\\ \hdashline q_{yK}\end{array}\right]\right\},$$

откуда с учетом (86)-(88), (99), (100) найдем прогиб в середине пролета:

$$u_{ykS} = u_{yk}(\xi = 1/2) = \frac{L}{8}[(-\beta_{z0N} + \beta_{z0K}) + \frac{\Lambda_{t4}}{\lambda/4}(\gamma_{xykN} - \gamma_{xykK})] +$$

$$+ \frac{L^4}{768EJ_z}[1 + 48\gamma'(1 - \frac{\Lambda_{t4}}{\lambda/4})](q_{yN} + q_{yK}) = \tag{103}$$

$$= \frac{5L^4(q_{yN} + q_{yK})}{768EJ_z}[1 + 9.6\gamma'(1 - \frac{\Lambda_{t2}\Lambda_{t4}}{\lambda^2/8})]\,.$$

Отсюда и согласно (50) **коэффициент увеличения прогиба балки за счет учета сдвиговых и депланационных деформаций** для прямоугольного сечения равен

$$\alpha_{d2} = 1 + 9{,}6\gamma'(1 - \frac{\Lambda_{t2}\Lambda_{t4}}{\lambda^2/8}) = 1 + 2{,}4\frac{h^2}{L^2}(1 - \frac{\Lambda_{t2}\Lambda_{t4}}{\lambda^2/8})\,. \tag{104}$$

Функции усилий найдем из исходных уравнений (71)-(73) по формулам:

$$\begin{cases} M_z = EJ_z\beta_{z0}^x\,; \\ Q_y' = GF_y\gamma_{xyk}\,; \\ L_{xy} = EI_{\psi yy}\gamma_{xyk}^x\,; \\ Q_y'' = -L_{xy}^x\,; \\ Q_y = Q_y' + Q_y''\,, \end{cases} \tag{105}$$

откуда с учетом функций перемещений (100) при аргументе $\xi = 1/2$ получим усилия в середине пролета:

$$\begin{cases} M_{zS} = \dfrac{L^2}{16}(q_{yN} + q_{yK}); \\ Q_{yS} = \dfrac{L}{24}(-q_{yN} + q_{yK}); \\ L_{xyS} = -\dfrac{L^2}{16} \cdot \dfrac{\Lambda_{t2}\Lambda_{t4}}{\lambda^2/8}(q_{yN} + q_{yK}). \end{cases} \tag{106}$$

Для максимальных фибровых напряжений в балке прямоугольного поперечного сечения при $y = h/2$, $\psi_y(h/2) = -h/12$ из (78) с учетом (104), (93) получим

$$\sigma_{xS} = \frac{yM_{zS}}{J_z} + \frac{\psi_y L_{xyS}}{I_{\psi yy}} = \frac{3L^2(q_{yN} + q_{yK})}{8bh^2}(1 + 84\frac{\Lambda_{t2}\Lambda_{t4}}{\lambda^2/8}), \tag{107}$$

где **коэффициент увеличения фибровых напряжений при учете депланации** получен в правых скобках и равен

$$\beta_{d2} = 1 + 84\frac{\Lambda_{t2}\Lambda_{t4}}{\lambda^2/8}. \tag{108}$$

Отметим, что коэффициенты (104), (108) отличаются от своих аналогов в предыдущем примере по (95), (97), что означает зависимость данных коэффициентов не только от параметра $\lambda$, но и от расчетной схемы балки и нагрузки.

На рис. 4, 5 полностью аналогично рис. 2, 3 представлены графики коэффициентов увеличения прогибов и фибровых напряжений, определяемых формулами (104), (108) и (50).

Выводы, сделанные по графикам предыдущего тестового расчета, остаются справедливыми и в данном примере. При этом можно отметить увеличение примерно в два раза обоих коэффициентов и более криволинейный характер изменения коэффициента $\beta$, достигающего трехкратной величины при $\eta = 1$.

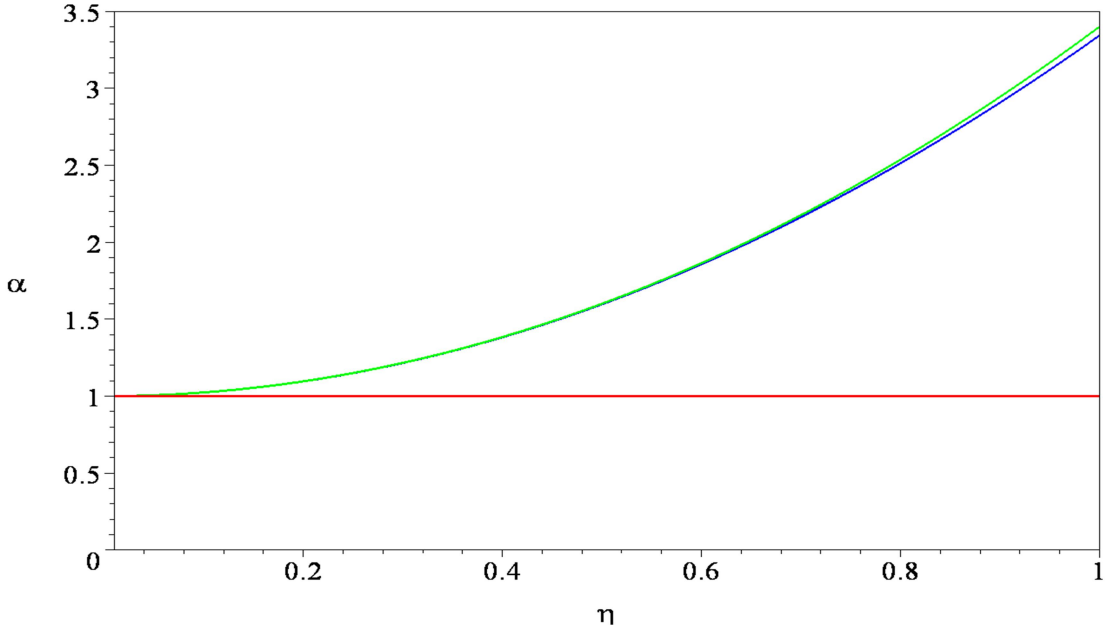



**Рис. 4**. Коэффициент увеличения прогиба балки за счет учета сдвиговых и депланационных деформаций

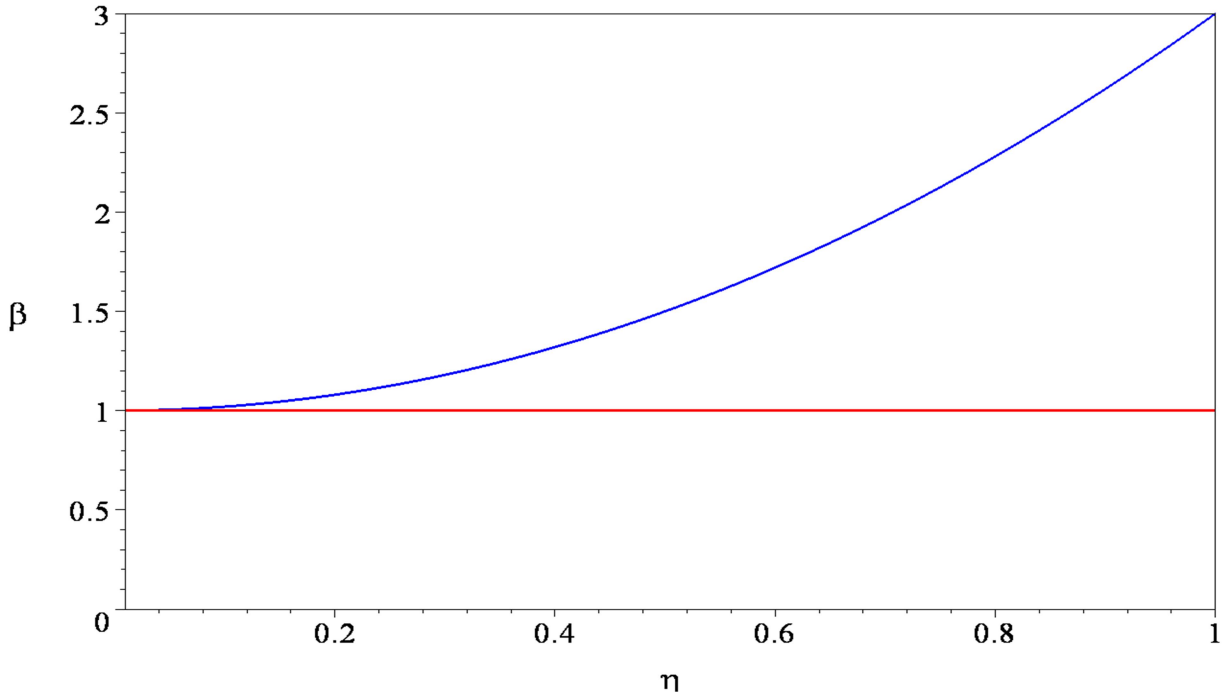



**Рис. 5.** Коэффициент увеличения фибровых напряжений при учете депланации

В заключение к рассмотренным тестовым расчетам на рис. 6-8 приведены эпюры поперечных сил и депланационных моментов при отношении $\eta = 0{,}5$.

На первом из данных рисунков показаны эпюры для консоли (тестовый пример 1), на остальных дух – эпюры для шарнирно опертой балки, нагруженной постоянной ($q_{yN} = q_{yK}$) и переменной ($q_{yK} = 0$) нагрузками (тестовый пример 2). Ординаты эпюр даны в относительном виде: для поперечных сил – по отношению к опорной реакции в начальном узле, для депланационных моментов – к взятому по модулю изгибающему моменту в защемлении для консоли и в середине пролета для балки. Здесь эпюры изгибающих моментов не приводятся как общеизвестные. Эпюры поперечных сил также тривиальны, но в теории изгиба с учетом депланации нас интересует разделение полного усилия $Q_y$ (красный цвет) на составляющие $Q'_y$ (синий цвет) и $Q''_y$ (зеленый цвет).

На рис. 6 полное усилие $Q_y$ постоянно по длине балки, на рис. 7 – изменяется по линейному закону, на рис. 8 – по квадратичному закону. Составляющая $Q''_y$ отлична от нуля только в приопорных зонах и особенно сильно возрастает в зоне защемления консоли, достигая значения полного усилия. Этим зонам на эпюрах депланационных моментов соответствуют участки больших градиентов, что объясняется дифференциальной зависимостью между данными усилиями в формулах (105). Вне этих участков величины депланационных моментов зависят от наличия сплошной нагрузки, поскольку она входит в дифференциальное уравнение депланационных моментов (см. [1, 3]). Действительно, как видно из рисунков, все эпюры $L_{xy}$ вне приопорных зон практически подобны соответствующим эпюрам сплошной нагрузки.

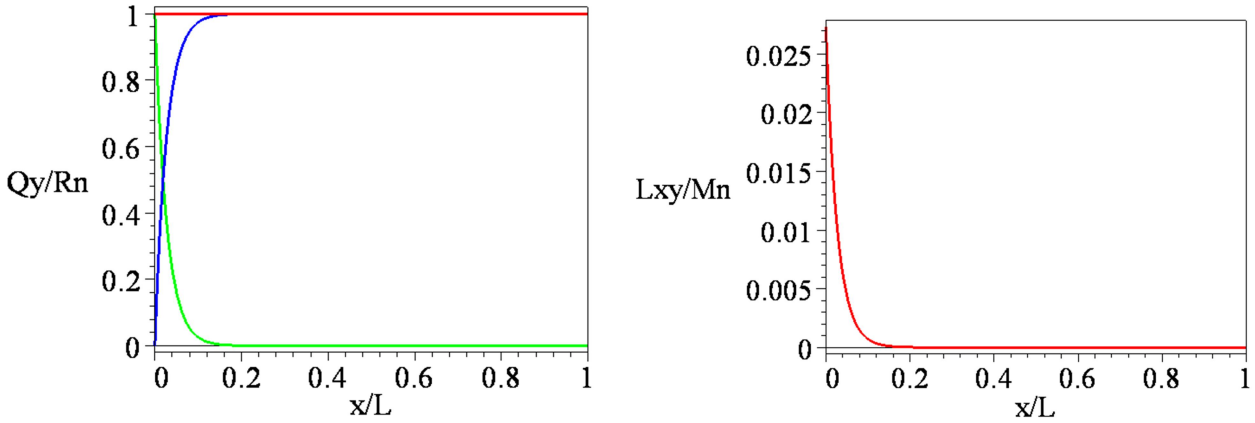



**Рис. 6.** Эпюры усилий $Q_y, Q'_y, Q''_y$ и $L_{xy}$ для консоли

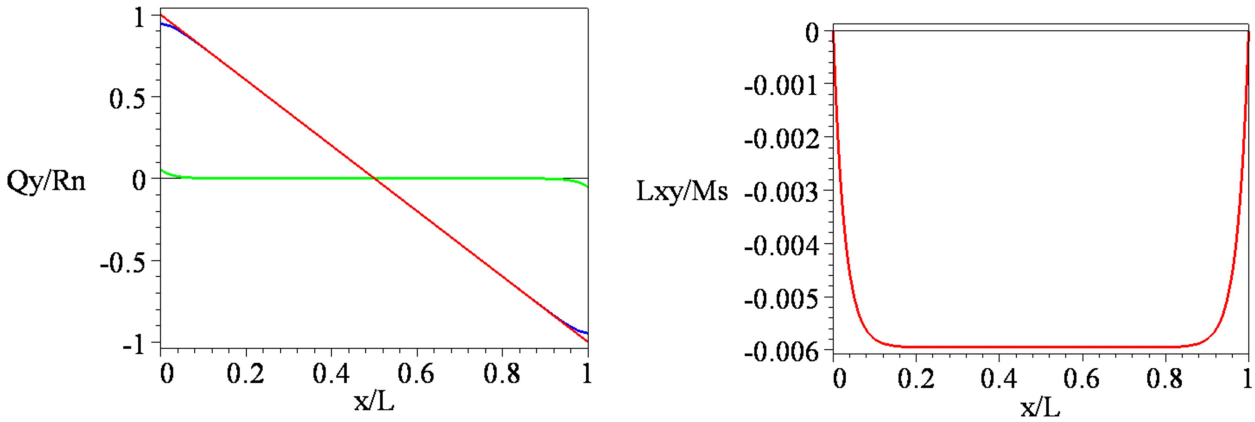



**Рис. 7.** Эпюры усилий $Q_y, Q'_y, Q''_y$ и $L_{xy}$ для балки с постоянной нагрузкой

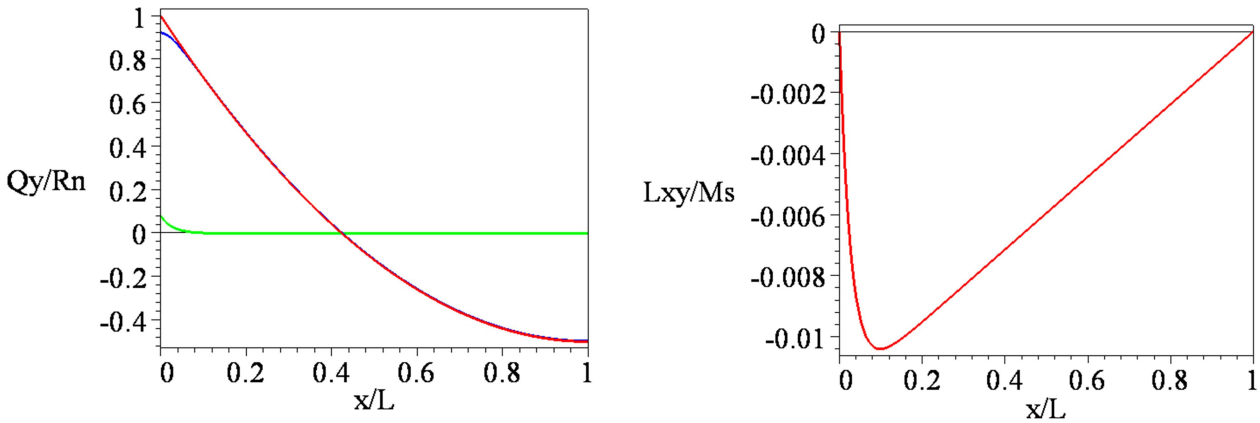



**Рис. 8.** Эпюры усилий $Q_y, Q'_y, Q''_y$ и $L_{xy}$ для балки с переменной нагрузкой

## Выводы

Таким образом, в данной работе продолжена апробация предложенной ранее теории плоского изгиба балки с учетом депланации при сдвиге путем сравнения ее с классической теорией Тимошенко. С этой целью в рамках обеих теорий были приведены системы исходных дифференциальных уравнений, построены матрицы конечных элементов и выполнены тестовые расчеты консольной и шарнирно опертой балки. В ходе этих расчетов получены аналитические выражения для коэффициентов увеличения прогибов балки и фибровых напряжений за счет учета деформаций депланации, а также построены графики зависимости этих коэффициентов от относительной высоты поперечного сечения $\eta = h / L$.

Сравнительный анализ данных графиков показал, что прогибы балок, определенные по обеим теориям, различаются незначительно, причем учет депланации приводит к увеличению жесткости КЭ. Напротив, фибровые напряжения при учете депланации существенно увеличиваются с ростом $\eta$ и для коротких балок при $\eta = 1$ коэффициент увеличения в рассмотренных примерах достигает значений 1,8 и 3,0. Поскольку при проверке прочности влияние этого эффекта происходит в худшую сторону, его необходимо учитывать в инженерных расчетах жестких балочных и стержневых систем.

Библиографический список


1. Петреня, Е.Н. Исходные дифференциальные уравнения пространственного стержня с многоконтурным поперечным сечением произвольной формы/ Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. - Воронеж. - №2. - 2011. – С. 7-28.
2. Петреня, Е.Н. Построение конечного элемента пространственного стержня с учетом депланации для решения статических и динамических задач / Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. - Воронеж. - №2. - 2012. – С. 7-30.
3. Петреня, Е.Н. Построение матрицы инерции конечного элемента пространственного стержня с учетом депланации и исследования динамических уравнений плоского изгиба балки по различным теориям / Е.Н. Петреня, А.А. Петранин // Строительная механика и конструкции. - Воронеж. - №1. - 2013. – С. 5-33.
4. Справочник по строительной механике корабля: в 3 т. - Т. 3. Динамика и устойчивость корпусных конструкций / под ред. О.М. Палия, В.С. Чувиковского. – Л.: Судостроение, 1982. – С. 78.


References


1. Petrenya E.N. Initial differential equations of special bar multiloop cross section of free shape/ E.N Petrenya, A.A. Petranin // Structural mechanics and structures. - Voronezh. - №2. - 2011. – P. 7-28.
2. Petrenya E.N. Consruction of finite element of spatial bar with account of deplanation to solve static and dynamic problems / E.N Petrenya, A.A. Petranin // Structural mechanics and structures.-Voronezh. - №2. - 2012. – P. 7-30.
3. Petrenya E.N. Consruction of finite element matrix of spatial bar with account of deplanation and investigation of dynamic equations of plane deflaction of beam according to different theories/ E.N. Petrenya, A.A. Petranin // Structural mechanics and structures.-Voronezh. - №1.- 2013. – P. 5-33.
4. Ship Structural Mechanics handbook: in 3 v. - V. 3. Dynamic and stability of frame structures / under reduction of O.M. Paliya, V.S. Chuvikovskogo. – L.: Shipbuilding, 1982. – P. 78.



**Ключевые слова:** стержневая теория, теория упругости, депланация, дифференциальные уравнения, характеристики поперечного сечения, конечный элемент, функция формы.

**Keywords:** theory of bar, theory of elasticity, warping, differential equations, parameters of cross-section, finite element, functions of form.

УДК 624.072

*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
*Канд. техн. наук, доц. кафедры строительной механики*
*А.Н. Аверин*
*Магистрант кафедры строительной механики*
*Е.А. Шевченко*
*Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30*
*e-mail:an_averin@mail.ru*

*Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering*
*PhD of Tech. Sc., Assosiate Professor of Department of Structural Mechanics*
*A.N. Averin*
*Master of Department of Structural Mechanics*
*E.A. Shevchenko*
*Russia, Voronezh, tel. 8(473)271-52-30*
*e-mail:an_averin@mail.ru*

А.Н. Аверин, Е.А. Шевченко

# АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ БАЛКИ-СТЕНКИ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ ВЫРЕЗОМ

Для балки-стенки с прямоугольным вырезом выполнен анализ НДС с использованием различных типов конечных элементов. Исследована сходимость решений по напряжениям вблизи точек их концентрации. На последовательности вложенных сеток решение уточнялось с помощью экстраполяции Ричардсона. Обоснованность применения КЭ плоского напряженного состояния подтверждена сравнением расчетов с использованием объемных конечных элементов. Исследовано влияния податливых опор на напряженное состояние точек в зоне опирания.

A.N. Averin, E.A. Shevchenko

# ANALYSIS OF DEFLECTED MODE OF FINAL ELEMENTS MODELS OF BEAM – RIB WITH SQUARE CUT

There was analyzed a deflected mode of beam – rid with square cut using different types of final elements. The convergence of decisions on stress near the points of their concentration was investigated. For the sequence of nested grid the decision was specified with the help of Richardson extrapolation. The reason of application of final element deflected mode is acknowledged by comparison of calculations with application of three-dimensional final elements. The foil bearings effect on stress of state in the beam seat zone.

## Введение

Стремительное развитие персональной вычислительной техники в настоящее время приводит к аналогичному развитию программных вычислительных комплексов (ПВК) для строительства, в частности проектирования. Наиболее распространенные расчетные программные комплексы основаны на методе конечных элементов (МКЭ).

В настоящее время наблюдается постоянный рост размерности решаемых задач с использованием ПВК на основе МКЭ. Увеличение размерности задач приводит к резкому росту трудозатрат на подготовку исходной информации и на анализ результатов. Важно уметь на начальном этапе определить необходимую величину конечных элементов (КЭ) для получения результатов с заданной точностью исследуемого фактора. Такое умение в руках современного инженера-расчетчика дает возможность совершать качественные расчеты с ожидаемой точностью.

Довольно легко провести проверку расчета стержневой системы. При этом пластинчатые системы требуют более ёмких расчетов для оценки точности результатов. Представление пластинчатых систем в ПВК происходит в виде плоских КЭ, к которым довольно часто прибегают на практике при расчете плитных конструкций.

Из этого следует, что задача разработки методики, которая обеспечивает выбор оптимальных размеров конечных элементов вблизи мест концентрации напряжений (вырезов, проемов, отверстий), является актуальной. Такой подход позволяет получить результаты с

© Аверин А.Н., Шевченко Е.А., 2013

ожидаемой точностью при минимуме затраченного собственного времени инженера-расчетчика.

Целью работы является**:** 1) разработка рекомендаций по выбору типа конечных элементов для расчета пластинчатых систем, ослабленных отверстиями; 2) выработка рекомендации по уточнению конечноэлементных моделей; 3) практическая оценка показателя скорости сходимости *по напряжениям* вблизи концентраторов напряжений.

Результаты численных расчетов конечноэлементных моделей пластинчатых систем проверены сопоставлением с известными аналитическими решениями, а при отсутствии таковых - с экстраполированными по Ричардсону значениями или экспериментальными данными других авторов.

## 1. Балка-стенка

Для балки-стенки с прямоугольным вырезом (отверстием) был произведен ряд расчетов на нескольких сериях плоских конечноэлементных сеток. Конечноэлементные схемы различались величиной и типами КЭ. Для поверки обоснованности применения плоского напряженного состояния был выполнен расчет с использованием **объемных конечных элементов.**

Также был выполнен анализ НДС и исследованы вопросы сходимости и точности расчетов на **вложенных конечноэлементных сетках** с использование различных типов плоских КЭ. Обоснованность применения плоских КЭ подтверждена расчетом балки стенки с использованием объемных КЭ.

### Исходные данные задачи

Основная расчетная схема была образована из реальной конструкции гражданского здания. Конструкция представлена монолитной наружной стеной (рис. 1). Исходными данными рассматриваемой стеновой панели были приняты: габаритные размеры 3 х 4 м толщиной $\delta = 0{,}2\ м$ с проемом 1,6 х 1,5 м; опирание на пилоны шириной равной 1/10 пролета балки-стенки, что равно 0,4 м; материал конструкции - бетон В15 со следующими физическими характеристиками: модуль упругости E = 2,30535e+007 кН/м²; коэффициент Пуассона ν=0,2. Эквивалентная нагрузка от вышележащих этажей распределена по верхнему торцу и равна $q = 2500\ \ кН\ /\ м^2$ (равнодействующая $2500 \cdot 0{,}2 \cdot 4 = 2000\ кН$ ). Интенсивность поверхностных сил - опорных реакций $q_{оп}$=12500 кН/м$^2$ (равнодействующая $12500 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 1000\ кН$ ).

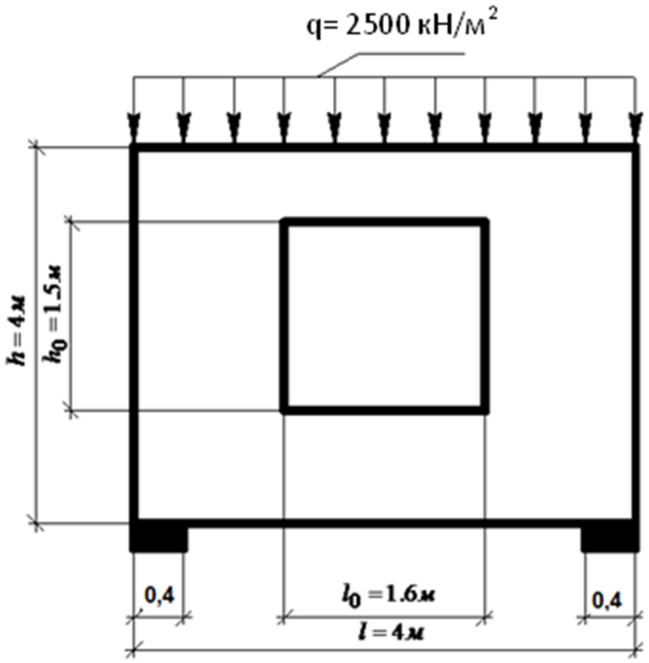



**Рис. 1.** Балка-стенка с прямоугольным отверстием

## 2. Расчетная конечноэлементная схема в ПВК SCAD

Поставленная задача решена с помощью ПВК SCAD [3] на четырех вложенных сетках с двукратным уменьшением максимального размера сторон КЭ от расчета к расчету (число КЭ вдоль стороны балки-стеки: 10, 20, 40,80) [1, 4, 5]. Опирание балки на пилоны моделировалось введением вертикальных связей конечной жесткости (по направлению оси z, жесткость $3*10^6$ кН/м) [1, 6]. В крайних узлах наложены дополнительные связи по направлению оси x, чтобы обеспечить геометрическую неизменяемость системы.

Для создания конечноэлементных моделей использовались прямоугольные КЭ плоской задачи теории упругости (ПЗТУ) [1,2]. Данные типы КЭ имеют две степени свободы в узле по направлению осей X и Z и предназначены для решения задач плоского напряженного состояния или плоской деформации. Выбраны три типа основных конечных элементов: треугольный с тремя узлами, прямоугольный четырехузловой КЭ и прямоугольный восьмиузловой КЭ (рис. 2).

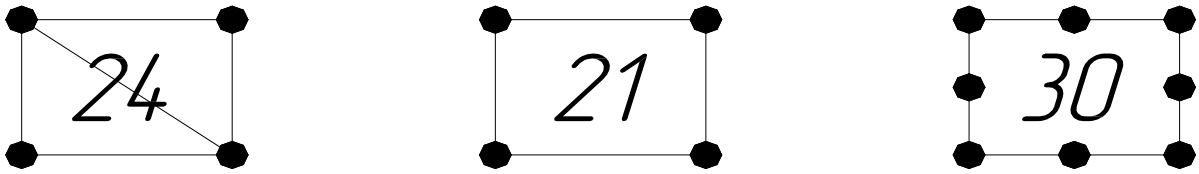



**Рис. 2.** Типы КЭ (нумерация типов по SCAD)

Поле перемещений треугольного конечного элемента задается полиномом (линейная функция координат x,z) [7]:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot z \quad , v = \alpha_4 + \alpha_5 \cdot x + \alpha_6 \cdot z. \tag{1}$$

Следовательно, поля деформаций (напряжений) в пределах элемента постоянны, а при переходе от элемента к элементу **разрывные**.

Четырехугольные конечные элементы описываются функциями перемещений, включающими полиномы второй степени:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot z + \alpha_4 \cdot xz, \;\; v = \alpha_5 + \alpha_6 \cdot x + \alpha_7 \cdot z + \alpha_8 \cdot xz. \tag{2}$$

Поле перемещений КЭ с восемью узлами задается полиномами более высокой степени (полином $xz^2$):

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot z + \alpha_4 \cdot xz + \alpha_5 \cdot x^2 + \alpha_6 \cdot z^2 + \alpha_7 \cdot x^2 z + \alpha_8 \cdot xz^2, \\ v &= \alpha_9 + \alpha_{10} \cdot x + \alpha_{11} \cdot z + \alpha_{12} \cdot xz + \alpha_{13} \cdot x^2 + \alpha_{14} \cdot z^2 + \alpha_{15} \cdot x^2 z + \alpha_{16} \cdot xz^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Конечные элементы с номерами типов 24, 21, 30 в ПВК SCAD [7] соответствуют описанным выше. Элемент типа 21 - прямоугольный четырехузловой, элемент типа 24 – треугольный трехузловой конечный элемент, элемент типа 30 – четырехугольный восьмиузловой КЭ (см. рис. 2).

**В первой** серии расчетов использовались КЭ с размерами 0,3x0,4 м (1/10 габаритных размеров балки-стенки).

**Во второй** серии расчетов использовались КЭ с размерами 0,15x0,2 м (1/20 габаритных размеров балки-стенки).

**В третьей** серии расчетов использовались КЭ с размерами 0,075х0,1 м (1/40 габаритных размеров балки-стенки).

**В четвертой** серии расчетов использовались КЭ с размерами 0,0375х0,05 м (1/80 габаритных размеров балки-стенки).

Данные по расчетным схемам сведены в таблицу. Общий вид конечноэлементной схемы приведен на рис. 3.

Таблица

Сводная таблица характеристик расчетных схем

| Схема | Типы КЭ | Количество элементов | Количество узлов | Отношение величины КЭ к габаритам б-с, % |
|---|---|---|---|---|
| Первая схема (10х10) | 21 | 84 | 109 | 10 |
| | 24 | 164 | 109 | |
| | 30 | 86 | 298 | |
| Вторая схема (20х20) | 21 | 326 | 378 | 5 |
| | 24 | 646 | 378 | |
| | 30 | 330 | 1076 | |
| Третья схема (40х40) | 21 | 1290 | 1397 | 2,5 |
| | 24 | 2570 | 1397 | |
| | 30 | 1298 | 4073 | |
| Четвертая схема (80х80) | 21 | 5129 | 5353 | 1,25 |
| | 24 | 10258 | 5353 | |
| | 30 | 5154 | 15825 | |

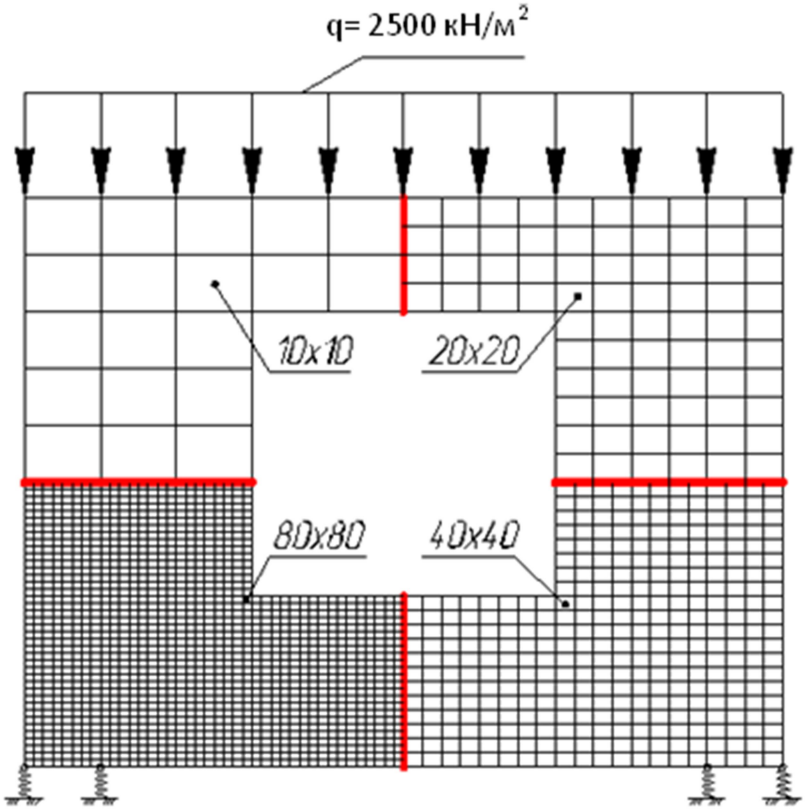



**Рис. 3.** Совмещенный вид четырех расчетных схем
(на выносках - шаг биения сторон балки-стенки)

### 3. Характерные точки на срединной поверхности балки-стенки

Для проведения анализа НС балки-стенки были выявлены характерные точки вблизи мест концентраций напряжений (рис. 4) [1,2,7]. Ввиду симметрии конструкции все исследуемые точки расположены по одну сторону от оси симметрии. Точка 1 (0,2; 2,85) расположена вблизи крайнего верхнего угла, который является концентратором. Точка 2 (2,0; 3,0) находится в середине верхней грани балки-стенки. Положение точки 2 обусловлено тем, что она расположена в верхнем волокне в середине пролета надпроемной «перемычки». Точка 3 (2,0; 2,4) лежит на нижнем волокне в середине пролета надпроемной «перемычки». Точка 4 (1,0; 2,55) расположена на диагонали от угла проема, который является наибольшим концентратором напряжений в конструкции. В верхнем углу проема происходит смена сечения, угол проема равен 90°, что и приводит к значительному росту внутренних напряжений. Для оценки точности анализа положение точки 5 (0,4; 1,5) выбрано на значительном удалении от концентраторов напряжений. Положение точки 6 (1,0; 0,75) симметрично точке 4 относительно середины проема и выбрано из тех же соображений, что и точки 4. Точка 7 (2,0; 0,0) расположена на нижней грани в середине пролета балки стенки. Точка 8 (0,6; 0,15) выбрана вблизи опоры, что, безусловно, является концентратором и для изучения влияния характера закрепления конструкции. *Положение точек 1, 4, 6, 8 выбрано на диагоналях при 5 % удалении от концентраторов по отношению к габаритам балки-стенки. Дальше будет показано, чем вызвано такое положение точек.*

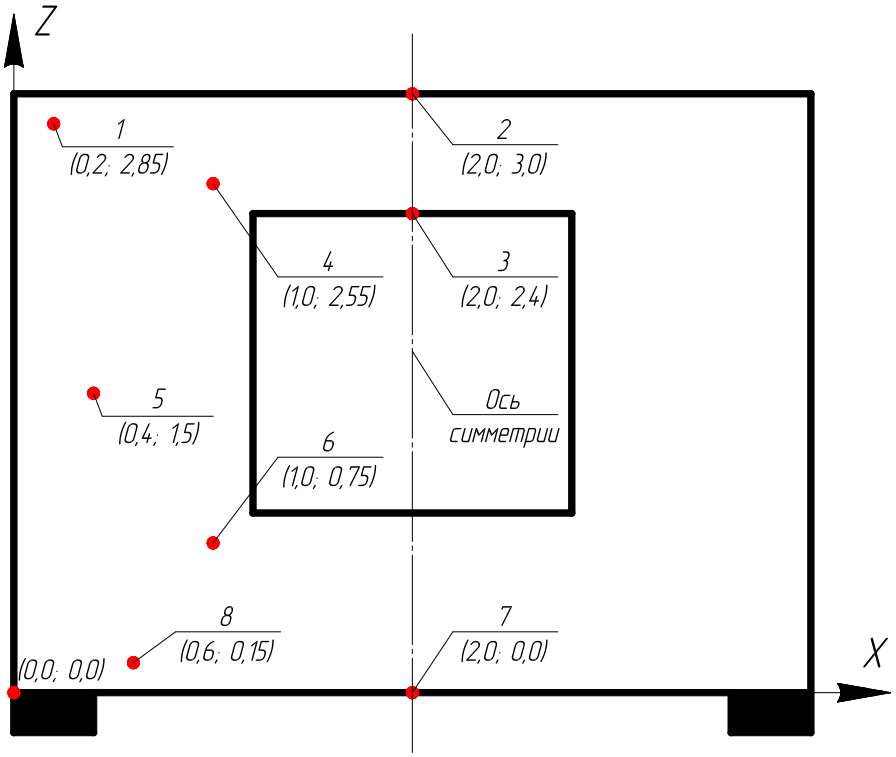



**Рис. 4.** Характерные точки балки-стенки вблизи мест концентраций напряжений (точка с координатами (0,0; 0,0) в анализе не задействована)

### 4. Сравнение результатов расчета на двух принципиальных типах КЭ

На начальном этапе была обоснована правомерность использования плоских КЭ для решения данного типа задач. Для сравнения был произведен расчет балки-стенки с использованием объемных КЭ, предназначенных для решения задач в объемном напряженном со-

стоянии. Балка-стенка была просчитана на соответствующих четырех вложенных сетках с разбиением на пять слоёв по толщине (рис. 5).

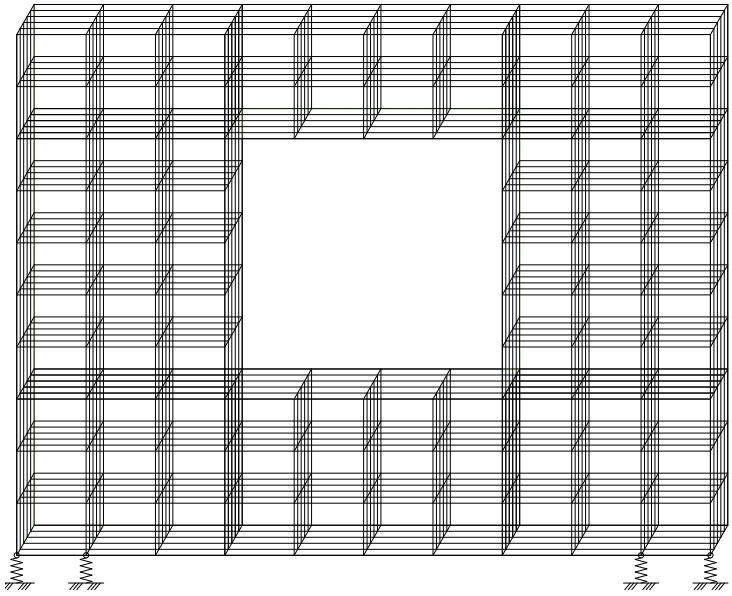


**Рис. 5.** Объемная конечноэлементная модель

На рис. 6 представлена картина напряженного состояния в окрестности характерных точек на уровне срединного слоя. В случае объемного напряженного состояния проверку прочности хрупкого материала необходимо проводить по первой или второй теориям прочности. Однако выбрать единую теорию прочности для всех характерных точек не представляется возможным.

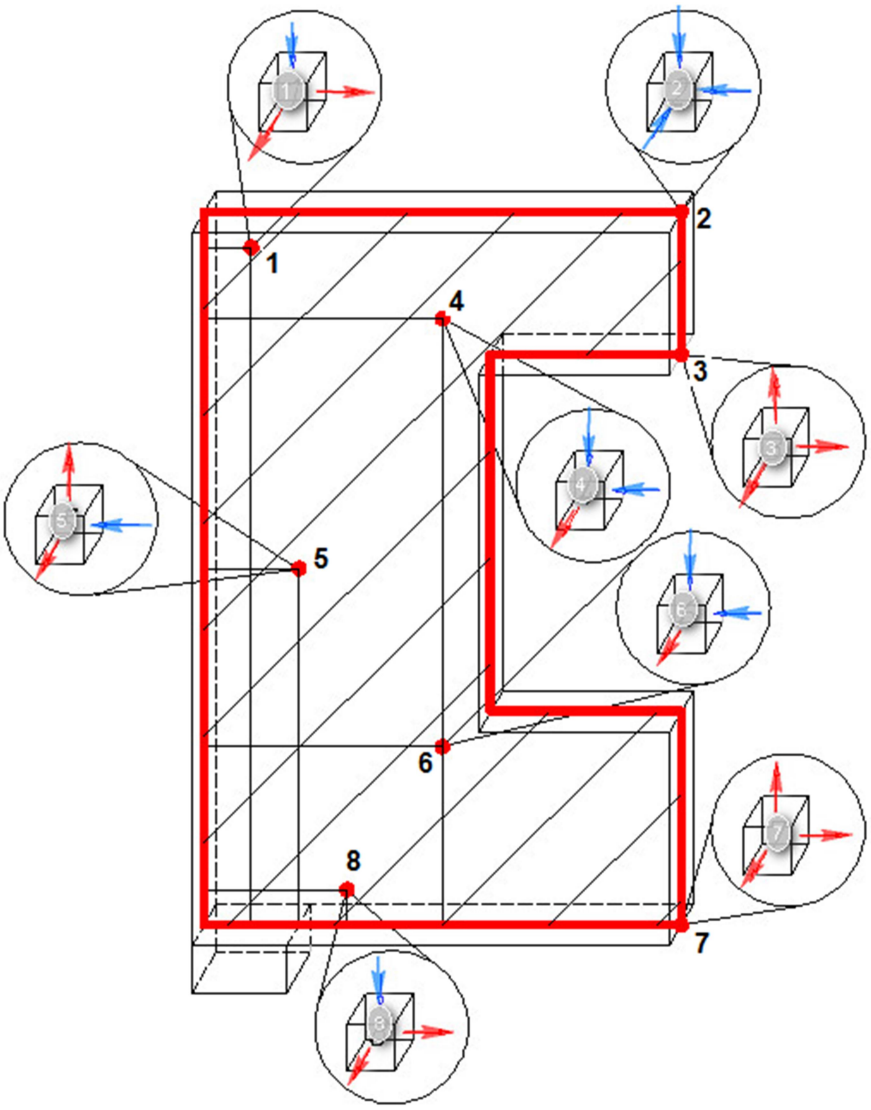



**Рис. 6**. Картина напряженного состояния в характерных точках (для половины балки-стенки)

Пусть в окрестности точек вычислены главные напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

В точках **3** и **7** имеет место **растяжение в трех взаимно перпендикулярных направлениях**, следовательно, все главные напряжения положительные и $\sigma_3$ **наименьшее по величине**. Тогда по 1-й теории прочности эквивалентное напряжение $\sigma_{i1} = \sigma_1$. По 2-й теории прочности эквивалентное напряжение $\sigma_{i2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$. Следовательно, $\sigma_{i1} > \sigma_{i2}$

В точке **2** имеет место **сжатие в трех взаимно перпендикулярных направлениях**, следовательно, все главные напряжения отрицательные и $\sigma_1$ **наименьшее по модулю**. Тогда по 1-й теории прочности эквивалентное напряжение $\sigma_{i1} = \sigma_3$. По 2-й теории прочности эквивалентное напряжение $\sigma_{i2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) > 0$, **т.е. получаем противоречивый результат: эквивалентное напряжение является растягивающим**.

В точках **4** и **6** наибольшие по абсолютной величине сжимающие напряжения, а $\sigma_1$ растягивающее напряжение **наименьшее по величине (**ситуация схожа с предыдущей).

В точках **1, 5, 8** по двум направлениям растяжение и в одном направлении сжатие. Растягивающее напряжения $\sigma_2$ **наименьшее по величине.** Тогда по 1-й теории прочности эквивалентное напряжение $\sigma_{i1} = \sigma_1$ или $\sigma_{i1} = \sigma_3$. По 2-й теории прочности эквивалентное напряжение $\sigma_{i2} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$. Получаем $\sigma_{i2} > \sigma_{i1}$.

Для балки-стенки отношение толщины к минимальному габаритному размеру $\varepsilon = \dfrac{\delta}{\min(l,h)} = \dfrac{1}{20}$. Когда $\varepsilon \to 0$ наименьшее по абсолютной величине главное напряжение (в характерных точках) стремится к нулю. Третий инвариант тензора напряжений $J_3 = \sigma_1^{об} \cdot \sigma_2^{об} \cdot \sigma_3^{об} \to 0$, кубическое уравнение вырождается в квадратное уравнение, и происходит переход к плоской задаче. Поэтому правомерность использования плоских КЭ для решения данного типа задач оценивалась величиной отношения инвариантов тензора напряжений плоской и пространственной задач (для плоской задачи всегда одно из главных напряжений равно нулю):

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1^{пл} + \sigma_2^{пл} + \sigma_3^{пл}}{\sigma_1^{об} + \sigma_2^{об} + \sigma_3^{об}} \cdot 100\,\%,$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_1^{пл} \cdot \sigma_2^{пл} + \sigma_1^{пл} \cdot \sigma_3^{пл} + \sigma_2^{пл} \cdot \sigma_3^{пл}}{\sigma_1^{об} \cdot \sigma_2^{об} + \sigma_1^{об} \cdot \sigma_3^{об} + \sigma_2^{об} \cdot \sigma_3^{об}}\,100\,\%. \qquad (4)$$

*Сравнение первого и второго инвариантов тензора напряжений для объемной и плоской задач показали расхождение 2 %* (в заданных точках). Максимальные значения погрешностей имели место в точках 3 и 7.

*Исходя из произведенных сравнительных расчетов можно сделать вывод о правомерности использования плоских КЭ при решении рассмотренной задачи.*

## 5. Анализ сходимости по напряжениям в характерных точках на последовательности вложенных конечноэлементных сеток

Рассмотрим вопрос сходимости результатов расчета балки-стенки с использованием плоских КЭ трех различных типов, на четырех вложенных сетках (10x10, 20x20, 40x40, 80x80) [5, 6, 13].

Ввиду отсутствия аналитического решения поставленной задачи для получения более точных решений был произведен расчет конструкции на последовательности вложенных сеток с дальнейшим использованием экстраполяции Ричардсона на трех вложенных сетках [4]. Идея Ричардсона заключается в том, чтобы из трех приближенных (сеточных) решений на геометрически подобных сетках с помощью линейных комбинаций попытаться сконструировать еще одно решение, которое по порядку было бы точнее каждого из исходных решений [4]. Для получения достаточно точных экстраполированных значений необходимо, чтобы три предыдущих значения представляли собой монотонную функцию, подчиненную экспоненциальному закону. Формулу экстраполяции Ричардсона можно представить следующим образом:

$$x_4 = \frac{2 \cdot K^2 \cdot x_3 - 3 \cdot K \cdot x_2 + x_1}{(K-1)(2K-1)}, \qquad K = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2}, \tag{5}$$

где $x_1$ - решение на сетке с шагом 2h; $x_2$ - решение на сетке с шагом h; $x_3$ - решение на сетке с шагом (1/2) h; $x_4$ - уточненное решение на сетке с шагом 2h; $K$ - параметр экстраполяции.

По результатам проведенных вычислений напряжений в характерных точках на вложенных сетках было установлено, что характер распределения напряжений при использовании прямоугольных элементов с восемью узлами (тип КЭ-30 SCAD) более остальных подходит для применения экстраполяции Ричарсона. Данные результаты монотонны и носят ярко выраженный сходящийся характер. Ввиду данных обоснований будем экстраполировать напряжения, основываясь на результатах расчета с восьмиузловыми КЭ на сетках с шагом 10x10, 20x20, 40x40, 80x80.

В характерных точках вычислены главные напряжения: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. На основании расчетных получены уточненные (экстраполированные по Ричардсону) напряжения. Посчитана погрешность для расчетных напряжений по отношению к экстраполированным значениям.

На рис. 7 представлены кривые сходимости напряжений $\sigma_1$ [т/м²] ($\sigma_3$ для точек 2, 4, 6) в зависимости от шага сетки. Синим цветом на графиках отмечены экстраполированные значения напряжений. Точка 2 расположена вблизи поверхности загружения. Экстраполированное значение напряжения в точке 2 равно интенсивности поверхностных сил ($\sigma_1 = -250 \frac{т}{м^2}$). Во всех точках кроме угловых (точки 4, 6) имеет место монотонная сходимость, и кривые сходимости асимптотически приближаются к экстраполированным значениям напряжений. В точках 3 и 7 значения напряжений можно уточнить на более мелкой сетке 50*50. Положение точек 6, 8 выбрано на диагоналях при 5%-м удалении от концентраторов напряжений по отношению к габаритам балки-стенки. При смещении точек 4, 6 в соответствующие угловые точки монотонная сходимость не наблюдалась даже на очень мелких сетках ($40 \times 40; 50 \times 50; 60 \times 60$).

Заметим, что напряженное состояние в точках 4 и 6 (двустороннее сжатие) для бетона является более благоприятным, чем двустороннее растяжение (точки 3; 7) или растяжение-сжатие (точки 1; 5; 8). Поэтому при заданной схеме закрепления и загружения балки-стенки неточности при вычислении напряжений в угловых точках не приводят к фатальным ошибкам (при проектировании).

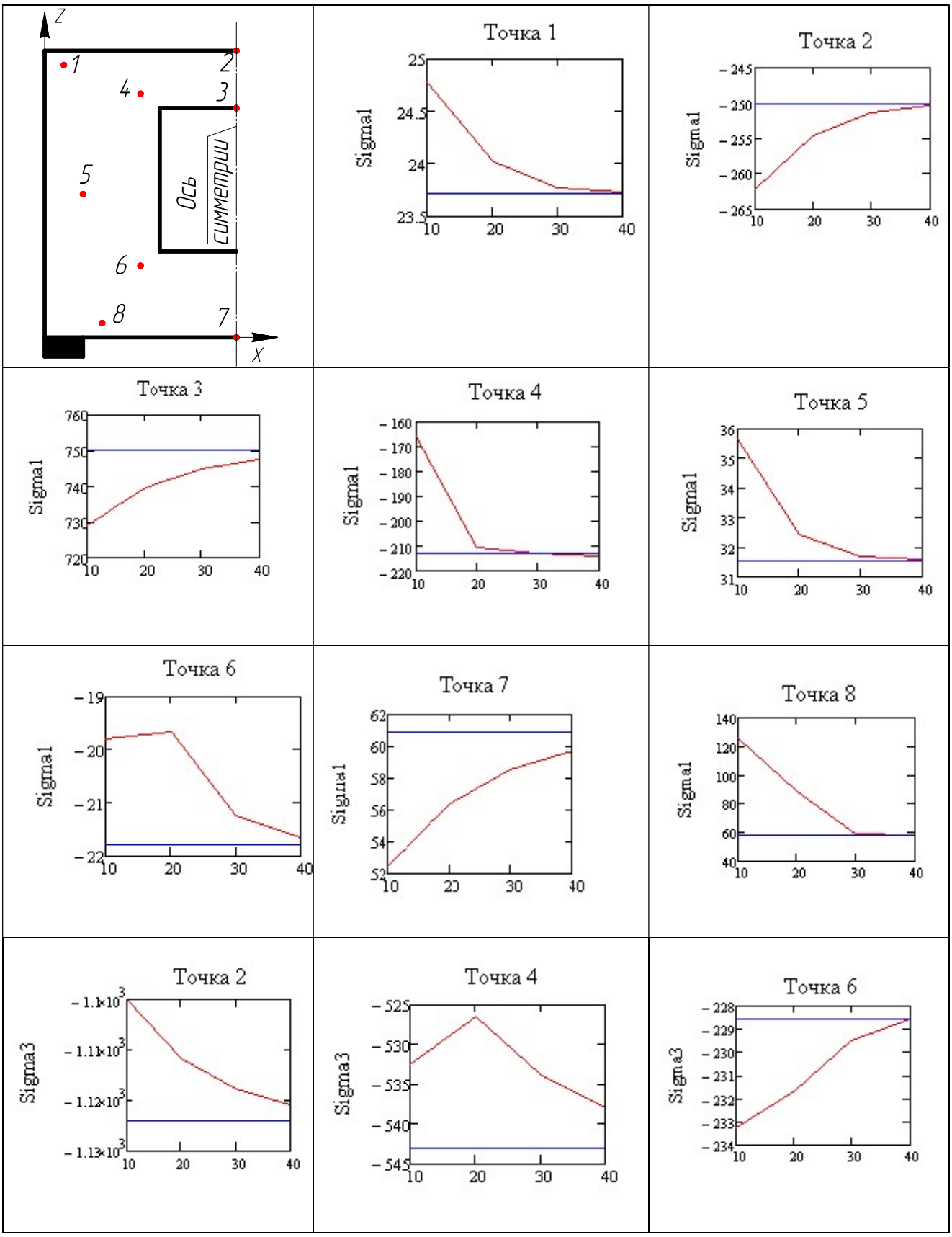



**Рис. 7.** Кривые сходимости напряжений $\sigma_1, \sigma_3$ в характерных точках и результаты экстраполяций

Анализ вышеприведенных результатов показал, что в точках, достаточно удаленных от мест концентрации напряжений (угловые точки отверстия, зоны опирания, сосредоточенные нагрузки), КЭ всех рассмотренных типов дают удовлетворительные результаты на достаточно грубых сетках [4, 5, 6]. В точках вблизи мест концентрации напряжений скорость сходимости существенно замедляется, а для отдельных типов КЭ при сгущении сетки наблюдается немонотонный рост напряжений.

Эффективным способом оценки точности приближенного решения (при отсутствии аналитического решения задачи) является экстраполяция Ричардсона на последовательности трех вложенных сеток. Важно отметить, что при оценке прочности конструкции расчетчика в первую очередь интересуют наибольшие напряжения в местах их концентрации. Поэтому расчетная схема сложной пластинчатой системы предполагает сгущение сетки вблизи места концентрации напряжений в соответствии с рекомендациями, предложенными в работе. В данной работе использовались мелкие, равномерные по всей области пластины сетки. Для сложных пластинчатых систем рационально формировать неравномерные сетки, сгущая их в месте концентрации напряжений.

## 6. Анализ напряженного состояния в приопорной зоне с учетом податливости опор

Анализ напряженного состояния в приопорной зоне был произведен вблизи точки 8 (0,6; 0,15). Координаты данной точки выбраны исходя из требований экстраполяции. В точке 8 при сгущении сетки наблюдается монотонный характер распределения главных напряжений.

Для исследования влияния податливых опор на напряженное состояние приопорных точек были рассмотрены два принципиально различных варианта закрепления балки-стенки. Первый вариант предусматривает бесконечно жесткое двустороннее опирание, при котором запрещены вертикальные перемещения в зоне опирания (рис. 8). Второй рассмотренный вариант в зонах опирания конструкции предполагает незначительные перемещения, т.е. упругоподатливые опоры, которые предусматривают растяжение-сжатие опорных устройств (рис. 9). Для последнего типа опорной конструкции, исходя из формы и материала, посчитана вертикальная жесткость конечных элементов типа 51 (SCAD), имитирующих податливые опоры. Жесткость 51 КЭ по направлению глобальной оси Z $3 \cdot 10^5$ т/м [3].

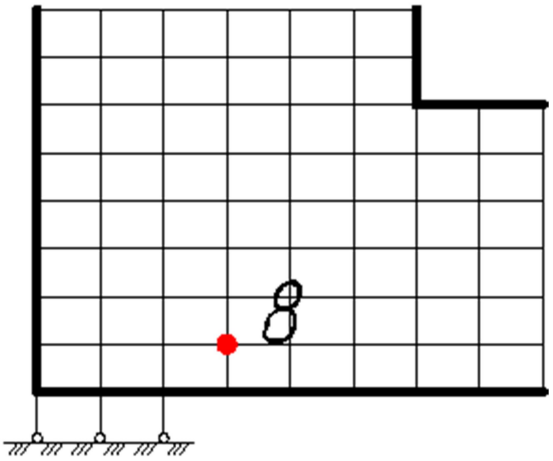



**Рис. 8.** Абсолютно жесткие опоры

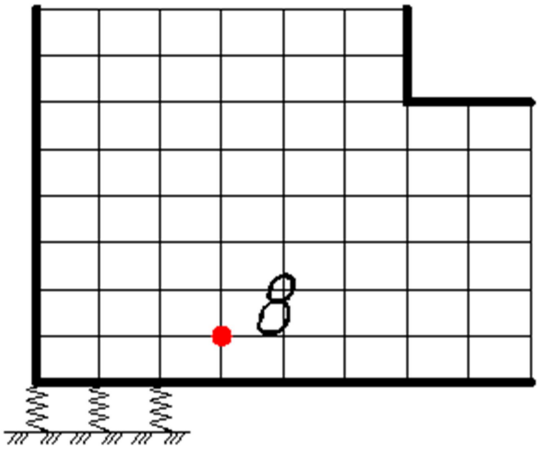



**Рис. 9.** Податливые опоры

Напряжения $\sigma_1, \sigma_3$ в точке 8, полученные в результате расчета на 4-х вложенных сетках при различных условиях опирания, представлены на рис. 10, 11. Синим цветом показаны кривые сходимости при абсолютно жестком опирании, а красным - при упругом.

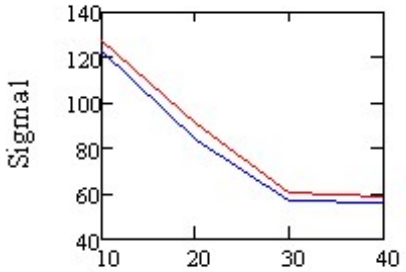



**Рис. 10.** Напряжения $\sigma_1$ в точке 8

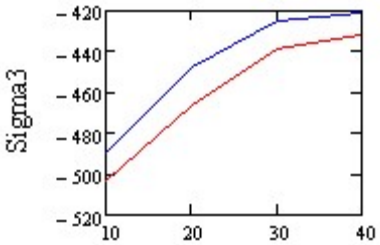



**Рис. 11.** Напряжения $\sigma 3$ в точке 8

Учет податливости опор позволяет уточнить расчетную схему. *Следует отметить, что использование абсолютно жестких опор приводит к перенапряжению приопорной части конструкции.* В практическом расчете использование таких опор на грубой сетке с отношением 1/10 сторон КЭ к габаритам балки-стенки не приведет к фатальным ошибкам, *т.к. сходимость происходит «сверху»*.

Жесткие связи, моделирующие опирание, можно использовать при сгущении сетки вблизи опорных устройств до 1,5 % габарита конструкции. В данном случае погрешность не превысит 5% по напряжениям $\sigma_1$ и 2,5 % по напряжениям $\sigma_3$.

Использование жестких связей при моделировании опирания приводит к большим погрешностям при анализе напряжения σ1. Наименьшую величину погрешности при жестком опирании оказали восьмиузловые КЭ при величине элементов, не превышающих 1,5 габарита балки-стенки.

Библиографический список


1. Дарков, А.В. Строительная механика: учебник / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. - 9-е изд., испр. – СПб.: «Лань», 2004. – 656 с.
2. Александров, А.В. Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учебник для строит. спец. вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – 2-е изд., испр. – М.: Высш. шк., 2002. – 400 с.
3. Константинов, И.А. Теория упругости. Применение программы SCAD для решения задач теории упругости: учеб. пособие / И.А. Константинов [и др.]. – СПб.: Сайт http://smitu.cef.spbstu.ru кафедры «Строительная механика и теория упругости», 2006, 71 с.
4. Перельмутер, А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.
5. Городецкий, А.С. Расчет и проектирование конструкций высотных зданий из монолитного железобетона (проблемы, опыт, возможные решения и рекомендации, компьютерные модели, информационные технологи) / А. С. Городецкий [и др.]. – Киев: «Факт», 2004. – 106 с.

6. Городецкий, А.С. Компьютерные модели конструкций / А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров. – Киев: «Факт», 2005. – 344 с.
7. Карпиловский, В.С. SCAD OFFICE. Вычислительный комплекс SCAD / В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.А. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. – М.: СКАД СОФТ, 2007. – 609 с.

Reference

1. Darkov, A.V. Structural mechanics text book / A.V. Darkov, N.N. Shaposhnikov. 9th issue., corr. – StPeterburg.: «Lan», 2004. – 656 p.
2. Alexandrov, A.V. Theory of strength of materials. The basis of theory of elasticity and plasticity: textbook for constr.institutes./ A.V. Alexandrov,V.D. Potapov. – 2nd issue, corr. – M.: High Scholl. 2002. – 400p.
3. Konstantinov, I.A/. Theory of elasticity. Application of SCAD program for solving the problems on theory elasticity.: Texbook / I. A. Konstantinov [and others]. –St Peterburg: http://smitu.cef.spbstu.ru Department of «Structural Mechanics and the theory of elasticity», 2006. - 71 p.
4. Perelmuter, A.V. Design models of structures and thei analysis possibility/ A.VB. Perelmuter, .V.I. Slivker. – M.: DMK Press, 2007. – 600 p.
5. Gorodetski, A.S. Design and calculation of high buildings and cast-in-situ reinforced concrete analysis (problems,experience, possible decisions and recomendations, computer models, information technology) / A. S. Gorodetski [and others.]. – K.: «Fact», 2004. – 106 p.
6. Gorodetski, A. S. Computer models of structures/ A. S. Gorodetski, I. D. Evzerov – K.: «Fact», 2005. – 344 p.
7. Karpilovski, V.S.. SCAD OFFICE. Computer system SCAD / V.S. Karpilovski, A. Z. Kriksunov, A.A. Malyarenko, A.V. Peremulter, M.A. Peremulter. – M.: SCAD SOFT, 2007. – 609 p.

**Ключевые слова**: балка-стенка с прямоугольными вырезом, напряженно-деформированное состояние, концентрация напряжений, метод конечного элемента, экстраполяция Ричардсона на вложенных конечноэлементных сетках.

**Keywords**: beam-rid with square cut, deflected mode, concentration of stresses, finite element method, Richardson’s extrapolation on nested finite - element grids.

УДК 624.04+624.6
*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
*Д-р техн. наук, проф. кафедры строительной механики*
*В.С. Сафронов*
*Аспирант кафедры строительной механики*
*А.В. Антипов*
*Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)263-07-57*
*e-mail: vss22@mail.ru*

*Voronezh Sate University of Architecture and Civil Engineering*
*Dr. of Tech. Sc., Professor of Department of Structural Mechanics*
*V.S. Safronov*
*Postgraduate of Department of Structural Mechanics A.V.Antipov*
*Russia, Voronezh, tel. 8(473)263-07-57*
*e-mail: vss22@mail.ru*

В.С. Сафронов, А.В. Антипов

# КОЛЕБАНИЯ И ПРОЧНОСТЬ СОВРЕМЕННЫХ НЕСУЩИХ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ МАССОВЫХ РАЗВЛЕКАТЕЛЬНЫХ МЕРОПРИЯТИЙ

На основе сложившегося в мировой практике опыта предлагается методика моделирования динамических воздействий на несущие конструкции зданий, в которых проводятся дискотеки с массовым привлечением ритмически двигающихся участников. Методика предназначена для выполнения прочностных расчетов с использованием динамических блоков современных конечно-элементных комплексов. Приводятся описание двух эксплуатируемых в г. Воронеже реальных объектов и результаты выполненных динамических расчетов.

V.S. Safronov, A.V Antipov

# FLUCTUATION AND STRENGTH OF BUILDING MODERN BEARING STRUCTURES WHILE CARRYING OUT MASS ENTERTAINMENT EVENTS

Based on existing world experience there is proposed the technique of simulation of dynamic effect on bearing structures of building, where there is taken place discotheques with participants' throbbing. The method is for strength calculation with application of modern final elements complexes. There are given the description of two objects exploited in Voronezh and the results of dynamic calculations.

## Введение

В последнее время в России наблюдается тенденция превращения старых торговых центров в торгово-развлекательные комплексы (ТРК) и строительство новых современных ТРК. Их специфика проявляется не только в гигантских площадях, но и в соединении торгового сектора, сектора общепита и мощнейшей развлекательной составляющей. Для привлечения большего количества посетителей в ТРК размещаются кинотеатры-мультиплексы, фитнес-центры, дискоклубы, рестораны, кафе, аттракционы, боулинги, ледовые катки и тому подобное. В проектах ТРК под развлечения отводят специализированные помещения, несущие конструкции которых должны быть рассчитаны и запроектированы с учетом особенностей всех эксплуатационных воздействий.

Из наиболее важных эксплуатационных нагрузок выделим динамическое воздействие на перекрытия зданий ТРК, обусловленное синхронными движениями большого количества

© Сафронов В.С., Антипов А.В., 2013

55 людей, двигающихся ритмично во время проведения различных концертов. Очевидно, что неправильный учет и недооценка влияния динамических воздействий при проведении массовых мероприятий может стать причиной разрушения или повреждений несущих конструкций здания и угрожать здоровью и жизни людей. Трагическим примером является «свадебная» трагедия, случившаяся в Израиле в 2001 году, потрясшая весь мир: во время свадебной церемонии в зале торжеств «Версаль» в иерусалимском районе Тальпиот рухнуло перекрытие между вторым и третьим этажами здания, в котором собрались около 650 человек; из руин были извлечены тела 26 погибших, более 400 гостей церемонии получили ранения разной степени тяжести.

В России основной действующий в настоящее время нормативный документ, устанавливающий требования по назначению нагрузок, воздействий и их сочетаний, учитываемых при расчетах зданий и сооружений по предельным состояниям первой и второй групп, – свод правил СП 20.13330.2011 «Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*» [1]. Согласно классификации СП 20.13330.2011 нагрузка от веса людей, находящихся на перекрытии концертного зала, относится к временной кратковременной и принимается при расчетах несущих конструкций перекрытия по 1-й группе предельных состояний равномерно распределенной с полным нормативным значением $P_t$=4,0 кПа с коэффициентом надежности $\gamma_f = 1{,}2$ без учета динамического воздействия. Нормативным документом СП 20.13330.2011 для предотвращения вредных воздействий и ощущений дискомфорта при колебаниях ограничиваются лишь перемещения несущих конструкций перекрытий танцевальных залов при расчетах по 2-й группе предельных состояний.

В разработанном в 2012 году ОАО «НИЦ «Строительство» (ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко) Национальном приложение к Еврокоду EN 1991-1-1 [2] по поводу учета при расчетах несущих конструкций динамического воздействия от танцующих людей отмечено: «В тех случаях, когда можно ожидать возникновения резонансных эффектов от синхронного ритмического движения людей, танцующих или прыгающих, а также в других случаях, при которых временные нагрузки на сооружение приводят к риску значимого динамического отклика конструкции, в расчетах следует учитывать динамическую модель нагружения, которая должна быть подготовлена для проведения специального динамического анализа».

Предварительный обзор отечественных нормативно-технических документов показал, что четко определенной методики учета динамического воздействия от синхронного ритмичного движения людей, танцующих или прыгающих на перекрытиях концертных залов, в настоящее время пока не существует. Таким образом, проблема разработки подобной динамической модели нагружения, адекватно отвечающей реальным воздействиям при эксплуатации несущих конструкций перекрытий концертных залов, остается открытой и, несомненно, представляет научный интерес для исследователей. Из публикаций по рассматриваемой проблеме отметим статью Ю. П. Назарова и В.Н. Симбиркина [3], посвященную результатам расчета параметров колебаний трибун проектируемого Центрального стадиона для проведения в 2014 г. Зимних олимпийских игр в г. Сочи.

В настоящей статье представлены результаты выполненных расчетов с целью определения несущей способности и долговечности несущих конструкций зданий ТРК Сити-парк «Град» в г. Воронеже от действия динамических нагрузок при проведении массовых мероприятий (дискотек). Численные исследования динамического отклика несущих конструкций зданий ТРК Сити-парк «Град» выполнялись по заказу администрации комплекса с целью определения наиболее подходящих мест для проведения массовых развлекательных мероприятий с участием большого количества людей.

## 1. Описание модели динамического воздействия от синхронно танцующих людей

Временная нагрузка от синхронного ритмичного движения людей во время танцев задавалась из расчета расположения 3-х человек на 1 м$^2$ площади перекрытия. Масса одного человека принималась равной 70 кг. В руководстве по стальным конструкциям американского института стальных конструкций (AISC) [6] приведена экспериментально полученная динамически изменяющаяся во времени функция нагрузки и соответствующий ей частотный спектр от синхронного воздействия 8-ми прыгающих человек с частотой 2,1 Гц (рис. 1).

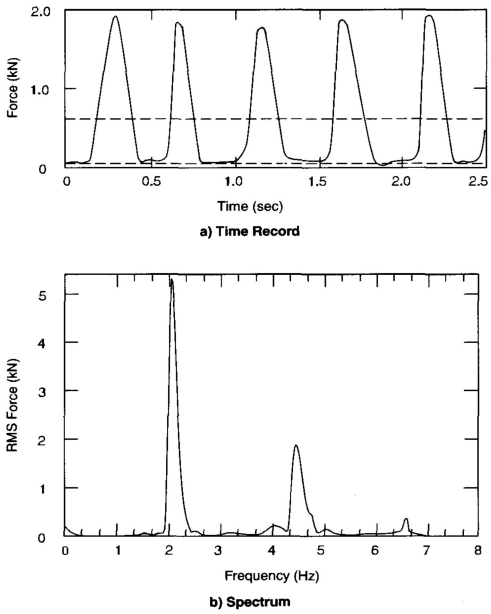



**Рис. 1.** Экспериментальные графики и частотный спектр от синхронного воздействия 8-ми прыгающих человек с частотой 2,1 Гц (пунктирная линия на графике – нагрузка величиной 0,7 кН от веса 1-го человека)

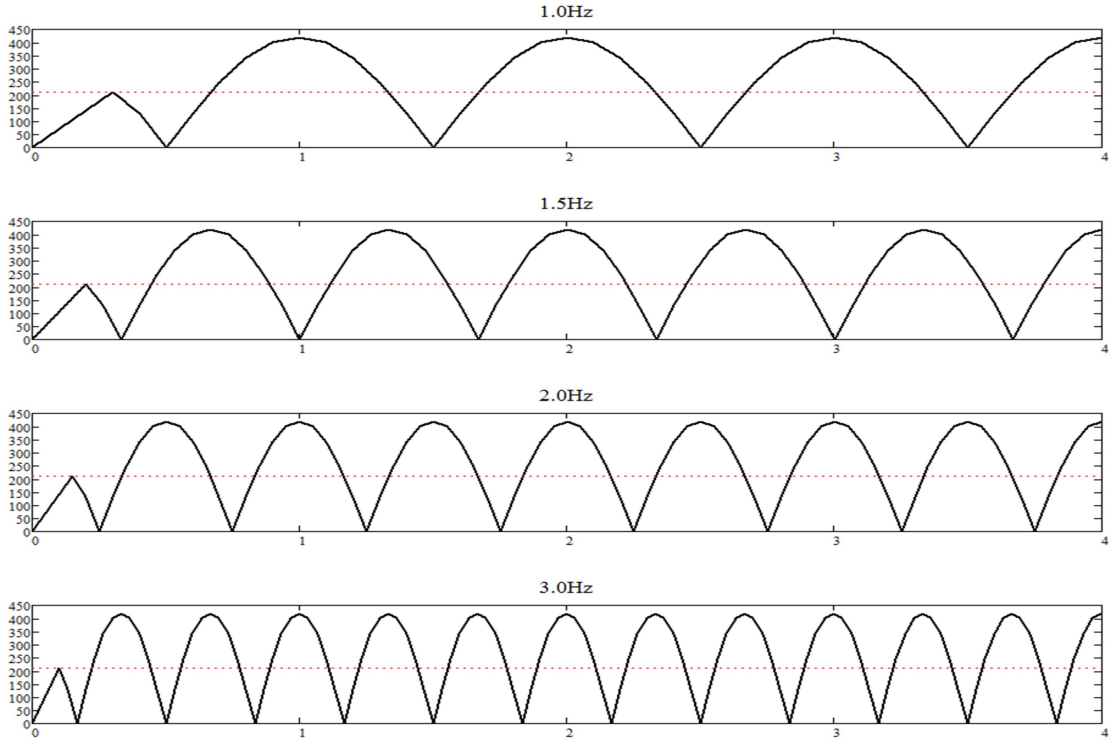



**Рис. 2.** Графики функций динамической нагрузки от танцующих людей на частотах 1,0; 1,5; 2,0 и 3,0 Гц

По аналогии с американским руководством [6] для аппроксимации динамической нагрузки от синхронного ритмичного движения людей во время танцев в расчете задавались гармонические функции.

Параметры этих функций приняты следующими:

- статическая составляющая равна 210 кгс/м$^2$;
- размах 2×210 кгс/м$^2$;
- длительность воздействия t=4 с;
- частоты танцев 1,0; 1,5; 2,0 и 3,0 Гц.

На рис. 2 представлены использованные в расчетах графики функций динамической нагрузки от танцующих людей на частотах 1,0; 1,5; 2,0 и 3,0 Гц. Отметим, что для устранения начального динамического воздействия во всех представленных моделях вначале вводится импульс уменьшенной вдвое амплитуды. Такая модель адекватно описывает динамические воздействия на конструкции при проведении дискотек, имеющих разные музыкальные ритмы.

## 2. Краткое описание объекта исследований

В качестве объекта для исследований принят расположенный в г. Воронеже торгово-развлекательный центр Сити-парк «Град», представляющий собой комплекс разделенных деформационными швами блоков, который построен в 2009 – 2010 годах.

Для выполнения численных исследований возможности проведения массовых развлекательных мероприятий администрацией ТРК Сити-парк «Град» были предложены участки перекрытий (рис. 3), расположенные в разных зданиях комплекса:

1) перекрытие над первым этажом блока № 6;

2) перекрытие со смонтированным поверху ледовым полем над первым этажом и перекрытие третьего, антресольного этажа блока № 9.

Блок № 6 ТРЦ Сити-парк «Град» представляет собой двухэтажное здание прямоугольной в плане формы размерами в плане 84х72 м. Отметка пола второго этажа - +6,600 м. Здание блока № 6 сблокировано с другими зданиями комплекса и отделено от них деформационными швами. Несущий каркас здания состоит из металлических колонн и металлического шатра. Шаг колонн каркаса на первом и втором этажах здания в продольном и поперечном направлениях равен 12,0 м. В центральной части перекрытие второго этажа здания выполнено с разрывом для расположения «второго света» (рис. 3, а). Перекрытие над вторым этажом выполнено в двух уровнях. Над местом расположения разрыва в перекрытии для устройства «второго света» покрытие находится на уровне + 17,60 м, в остальной части – на уровне + 12,60 м. Несущие колонны каркаса рассматриваемого блока выполнены из прокатных металлических колонных двутавров. Перекрытие над первым этажом выполнено из сборных железобетонных пустотных предварительно напряженных плит марки ПБ4,0-120.12-8 и монолитного армированного выравнивающего слоя бетона толщиной 8 см. Плиты в перекрытии над 1-м этажом опираются на металлические фермы и балки пролетом 12,0 м.

Блок № 9 ТРЦ Сити-парк «Град» представляет собой двухэтажное здание без подвала близкой к прямоугольной в плане формы. Отметка верха плиты перекрытия второго этажа +6,550 м. На втором этаже в нише перекрытия (верх плиты на отм. +6,260 м) располагается каток (рис. 3, б) с искусственным льдом на отметке +6,650 м.

Несущий каркас здания состоит из железобетонных монолитных колонн, монолитного ребристого перекрытия и металлического шатра, состоящего из стальных стропильных ферм. Перекрытие над первым этажом здания блока № 9 представляет собой монолитное железобетонное ребристое перекрытие с плитами, опертыми по контуру. Главные балки располагаются как вдоль, так и поперек здания по осям колонн. Балки перекрытия имеют прямоугольное поперечное сечение шириной 80 см (возле ДШ 60 см) и высотой 120 см без учета толщины плиты. Балки армированы стержневой арматурой класса AIII. Монолитная плита перекрытия толщиной 30 см. Опирание стропильных ферм покрытия блока на колонны шарнирное. Жесткость каркаса в поперечном направлении обеспечивается

изгибной жесткостью несущих колонн каркаса, защемленных в фундаментах стаканного типа. Кроме того, жесткость каркаса обеспечивается жестким диском междуэтажного ребристого перекрытия из монолитного железобетона.

**а)**

**б)**

**Рис. 3.** Объекты ТРЦ Сити-парк «Град», выбранные для исследований возможности проведения массовых развлекательных мероприятий: а - общий вид помещения кафе в блоке № 6; б - общий вид ледового поля на втором этаже блока № 9

## 3. Описание конечно-элементных расчетных схем несущих конструкций рассматриваемых зданий

В настоящее время современные мощные технические платформы, операционные среды и специализированные программные комплексы для расчета и проектирования конструкций позволяют составлять и исследовать подробные пространственные расчетные схемы сооружений, моделировать всевозможные силовые воздействия на конструкции на стадиях возведения и эксплуатации. При этом главной остается проблема построения компьютерных моделей, по возможности адекватно отражающих те или иные особенности работы конструкций сооружения.

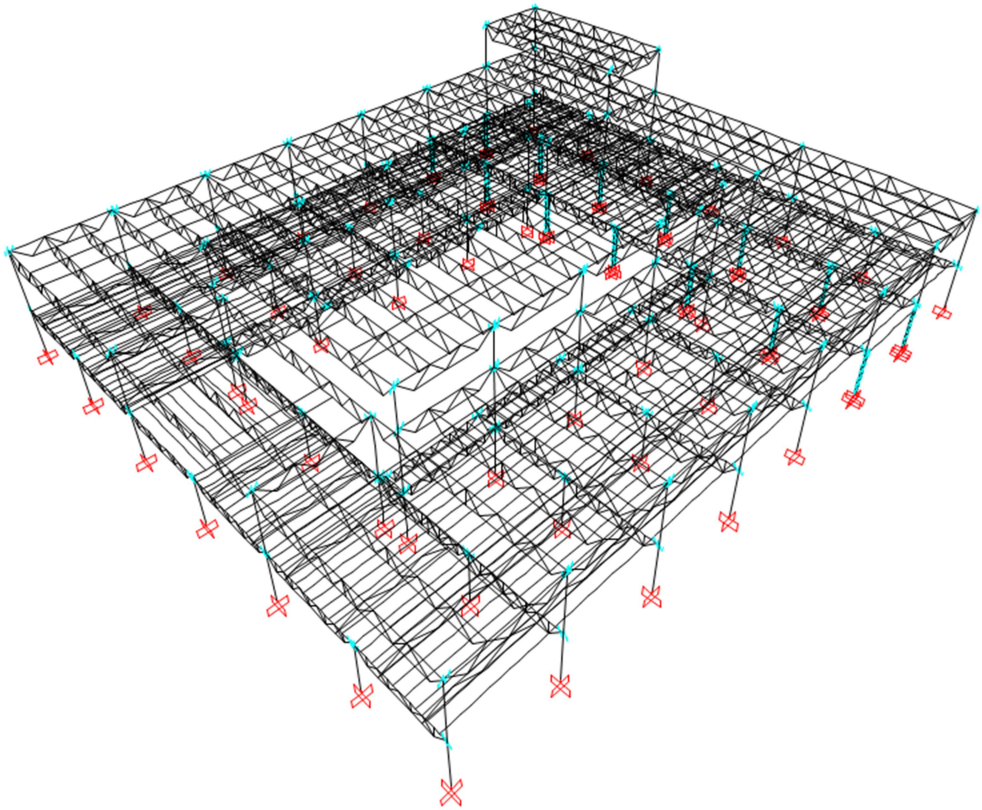
Авторы настоящей статьи по данным проектных материалов, выполненных контрольно-инструментальных измерений геометрических параметров и фактических прочностных характеристик материалов несущих конструкций постарались максимально подробно разработать применительно к библиотеке конечно-элементного вычислительного программного комплекса «**ЛИРА-САПР 2012 PRO**» [5] пространственные расчетные модели рассматриваемых каркасов зданий блоков № 6 и № 9 ТРЦ Сити-парк «Град», визуально представленные на рис. 4. При этом использовались следующие типы конечных элементов (КЭ):

- пространственный стержневой КЭ с учетом сдвиговых деформаций;
- плоский оболочечный КЭ;
- упругий (пружинный) элемент Link;
- элемент Plot Only (абстрактный двумерный элемент);
- элемент Rigid (твердое тело).

В КЭ-модели несущего каркаса блока № 6 металлические колонны, стропильные и подстропильные фермы покрытия, фермы и балки перекрытия, элементы связей покрытия и перекрытия, а также сборные железобетонные плиты перекрытия моделировались пространственными стержневыми КЭ. Оболочечными КЭ, представляющими собой комбинацию конечных элементов плоского и изгибного напряженных состояний, моделировались монолитные железобетонные участки перекрытия и покрытие из профилированного стального настила. Железобетонная стяжка пола перекрытия толщиной 8 см моделировалась элементами Plot Only, которые не добавляют жесткость в модель и позволяют передать собственный вес и распределенную по поверхности временную нагрузку на плиты перекрытия. Шарнирное и жесткое сопряжения металлических ферм и балок с колоннами моделировались с использованием упругих элементов Link. Упругий Link элемент представляет собой связь степеней свободы двух узлов заданной жесткостью независимо от их ориентации, используется для моделирования упругих свойств конструкции, которые не являются производными от её геометрических свойств и по этой причине не могут быть моделированы обычными конечными элементами. Опирание сборных плит перекрытия принималось шарнирным. В расчетной схеме фермы перекрытия жестко сопрягались с колоннами, фермы покрытия – шарнирно. Элементы Rigid использовались для задания участков перекрытий, абсолютно жестких в своей плоскости. В расчетной схеме считается, что колонны каркаса жестко защемлены в фундаменте.

В КЭ-модели несущего каркаса блока № 9 пространственный стержневой КЭ использовался для моделирования железобетонных колонн, главных балок ребристого перекрытия над первым этажом здания, металлических балок перекрытия антресольного этажа, элементов стропильных ферм, балок, прогонов, распорок и вертикальных связей покрытия. Изгибно-плосконапряженный КЭ (элемент плоской оболочки) использовался для моделирования монолитной железобетонной плиты ребристого перекрытия над первым этажом здания.

**а)**



**б)**

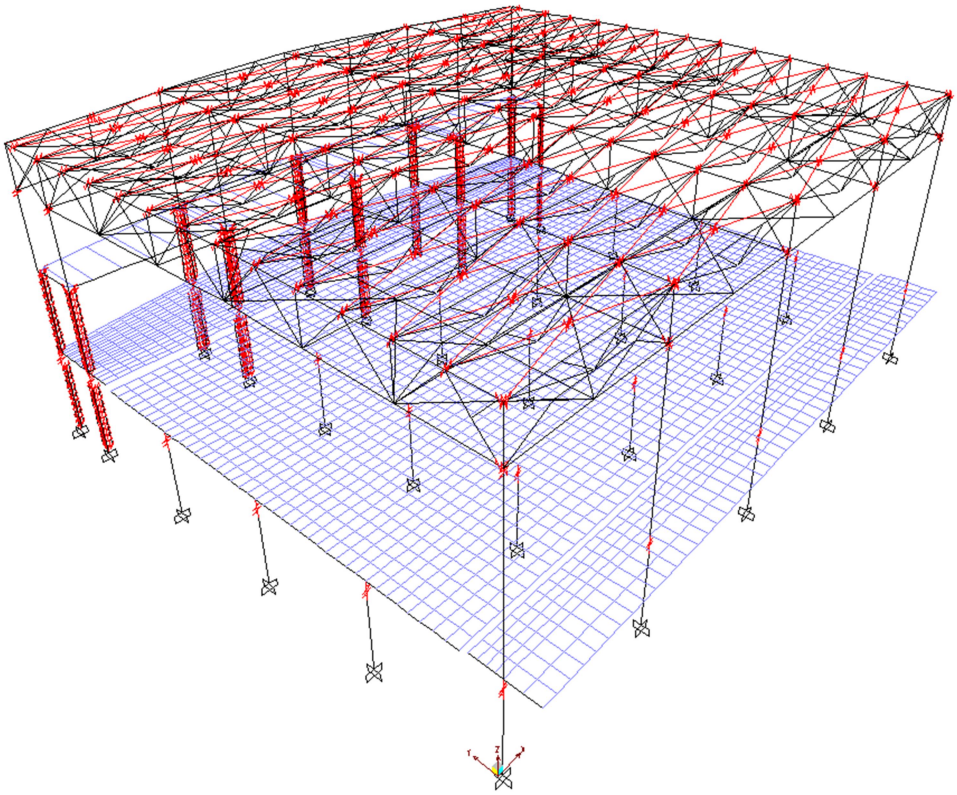


**Рис. 4.** Пространственные конечно-элементные расчетные схемы зданий блоков № 6 и № 9 ТРЦ Сити-парк «Град»:
а – несущий каркас блока № 6; б – несущий каркас блока № 9

В плите перекрытия предусмотрена ниша, в которой располагаются конструкции ледового поля. В КЭ-модели монолитного ребристого перекрытия над первым этажом здания для сопряжения элементов плиты, расположенных в разных уровнях, использовались твердые тела. Для моделирования металлической обоймы колонн, эксцентриситетов сопряжения различных элементов каркаса здания использовались упругие элементы большой жесткости (практически абсолютно жесткие). Абстрактный двумерный элемент использовался для моделирования монолитного железобетонного настила перекрытия антресольного этажа. В расчетах через эти элементы только передавалась поверхностная нагрузка на балки перекрытия антресольного этажа. Настил покрытия из профилированного настила по прогонам моделировался путем замены прямоугольных участков настила между несущими элементами прогонов крестовой решеткой из фиктивных растянутых стержней-связей.

## 4. Методика выполнения расчетов на воздействия от танцующих людей

Для оценки возможности безопасного проведения массовых развлекательных мероприятий в указанных местах зданий ТРК Сити-парк «Град» с использованием описанных выше расчетных схем несущего каркаса зданий и математических моделей воздействия от синхронного ритмичного движения танцующих людей выполнялся комплекс расчетов несущих конструкций:

- статический расчет на основное сочетание расчетных нагрузок, состоящее из постоянной (собственный вес конструкций) и временной равномерно распределенной нагрузки на перекрытие величиной $P_t$=4,0 кПа с коэффициентом надежности $\gamma_f = 1{,}2$, с целью выявления имеющихся резервов прочности несущих конструкций перекрытия;
- модальный анализ динамических параметров рассматриваемых зданий с определением спектра собственных частот и соответствующих им собственных форм для использования при последующих динамических расчетах;
- динамический расчет колебаний несущих конструкций зданий при воздействии нагрузки от синхронного ритмичного движения танцующих людей.

Динамический расчет колебаний заключался в определении реакции несущих элементов междуэтажного перекрытия на воздействие нагрузки от танцующих людей в заданные моменты времени. При этом исследовании поведения конструкции во времени использовалась следующая система дифференциальных уравнений:

$$M \cdot a(t) + C \cdot v(t) + K \cdot d(t) = F(t) \qquad (1)$$

при следующих начальных условиях: d(0) = d0 и v(0) = v0, где M – матрица масс; K – матрица жесткости; C = α * M + β * K – матрица затухания; α и β – константы релеевского демпфирования; d – вектор перемещений; v – вектор скоростей; a – вектор ускорений; F – вектор нагрузки.

Решение системы (1) при расчете методом конечных элементов выполнялось с использованием двух методов:

1) разложения по собственным формам;
2) прямого интегрирования по методу Ньюмарка.

Шаг интегрирования задавался равным:

0,02 с – при частоте танцевального ритма 1,0 Гц;

0,0333 с – при частоте танцевального ритма 1,5 Гц;

0,025 с – при частоте танцевального ритма 2,0 Гц;

0,0333 с – при частоте танцевального ритма 3,0 Гц.

При построении матрицы демпфирования использовался метод пропорционального демпфирования по Релею пропорционально элементам матрицы жесткости и элементам матрицы инертности.

При отсутствии экспериментальных данных о влиянии сил неупругого сопротивления колебаниям динамические расчеты для рассматриваемых сооружений выполнялись при четырех различных уровнях демпфирования: 1,6; 3,0; 6,0 и 12,0 % от возникающих при колебаниях упругих сил в несущих конструкциях.

## 5. Описание результатов прочностных расчетов несущих элементов блока № 6

Анализ результатов статических расчетов здания блока № 6 на основное сочетание расчетных нагрузок привел к следующим выводам.

1. Несущие металлические фермы над первым этажом имеют резервы прочности.

2. Железобетонные плиты перекрытия над первым этажом здания также имеют резервы прочности, достигающие 37 % от предельных значений.

Анализ собственных частот и соответствующих им собственных форм показал:

1. В диапазоне от 0,36 до 3,5 Гц здание имеет 40 собственных частот.

2. Формы свободных изгибных колебаний металложелезобетонного междуэтажного перекрытия над первым этажом имеют собственные частоты в диапазоне от 2,5 до 3,5 Гц. При этом деформируются сборные железобетонные плиты перекрытия и металлические несущие фермы; возникают продольные, поперечные волны и локальные изгибные колебания на отдельных участках перекрытия.

Динамические расчеты на действие синхронного ритмичного движения людей при проведении дискотеки на междуэтажном перекрытии второго этажа блока № 6 выполнены при расположении на одном квадратном метре перекрытия в танцевальной зоне:

1) одного человека общей массой 70 кг;
2) двух человек общей массой 140 кг;
3) трех человек общей массой 210 кг.

Динамические расчеты здания на действие нагрузок от синхронного ритмичного движения людей выполнены в четырех вариантах с различными частотами в диапазоне от 1,0 до 3,0 Гц.

Сопоставление максимальных усилий, возникающих при совместном действии постоянных, временных статических и динамических нагрузок в несущих элементах конструкций междуэтажного перекрытия, с соответствующими предельными по прочности и выносливости усилиями, привело к следующим выводам:

1. При танцевальных ритмах, частота которых приближается к 3,0 Гц, в здании возникают резонансные колебания с увеличивающимися во времени амплитудами. Это объясняется динамическими характеристиками здания, в котором на этой частоте имеется множество собственных форм, отвечающих изгибным колебаниям перекрытия.

2. Прочность и выносливость несущих ферм и железобетонных плит перекрытия на быстрых ритмических воздействиях, приближающихся к 3,0 Гц, не обеспечена.

3. Наиболее проблемными в обеспечении возможности проведения массовых мероприятий на перекрытии над первым этажом здания являются несущие металлические фермы. При этом если прочность наиболее нагруженных элементов: верхних, нижних поясов и опорных раскосов на частотах до 2,0 Гц и расположении до трех танцующих на одном квадратном метре танцзала – в основном обеспечена, то условие выносливости не выполняется даже при двух танцующих на одном квадратном метре танцзала. Амплитуды перемещений перекрытия в месте проведения дискотеки на частоте 2,0 Гц по данным динамических расчетов составляют:

- при интенсивности загружения 70 кг/м$^2$ - до 5 мм;
- при интенсивности загружения 140 кг/м$^2$ - до 9 мм;
- при интенсивности загружения 210 кг/м$^2$ - до 14 мм.

## 6. Описание результатов прочностных расчетов несущих элементов блока № 9

Анализ результатов статических расчетов на основное сочетание расчетных нагрузок привел к выводу, что несущие элементы перекрытия имеют значительные запасы прочности.

Модальный анализ КЭ-модели рассматриваемого участка здания блока № 9 выполнялся с удержанием 200 собственных форм.

Численные значения выделенных из всего рассмотренного спектра наиболее важных для эксплуатации рассматриваемого блока здания собственных частот и краткое описание соответствующих собственных форм приводится ниже в таблице.

Таблица

Краткие сведения о собственных частотах и формах свободных колебаний рассматриваемого деформационного отсека блока № 9 здания ТРК Сити-парк «Град»

| Количественные параметры | | | | Краткое описание собственной формы |
|---|---|---|---|---|
| Номер | Период, с | Техническая частота, Гц | Частота, рад/с | |
| 122 | 0,11 | 9,40 | 59,07 | Изгиб ребристого перекрытия над первым этажом |
| 128 | 0,10 | 9,76 | 61,32 | Изгиб ребристого перекрытия над первым этажом |

Наряду с исследованием изменений усилий в несущих конструкциях железобетонного перекрытия изучались вертикальные перемещения в характерных сечениях перекрытия. На рис. 5 представлен расчетный график вертикальных перемещений среднего участка расчетной ячейки плиты при синхронных движениях людей с частотой 3,0 Гц. Из него видно, что максимальные амплитуды перемещений в средних точках плиты не превышают 0,5-0,6 мм.

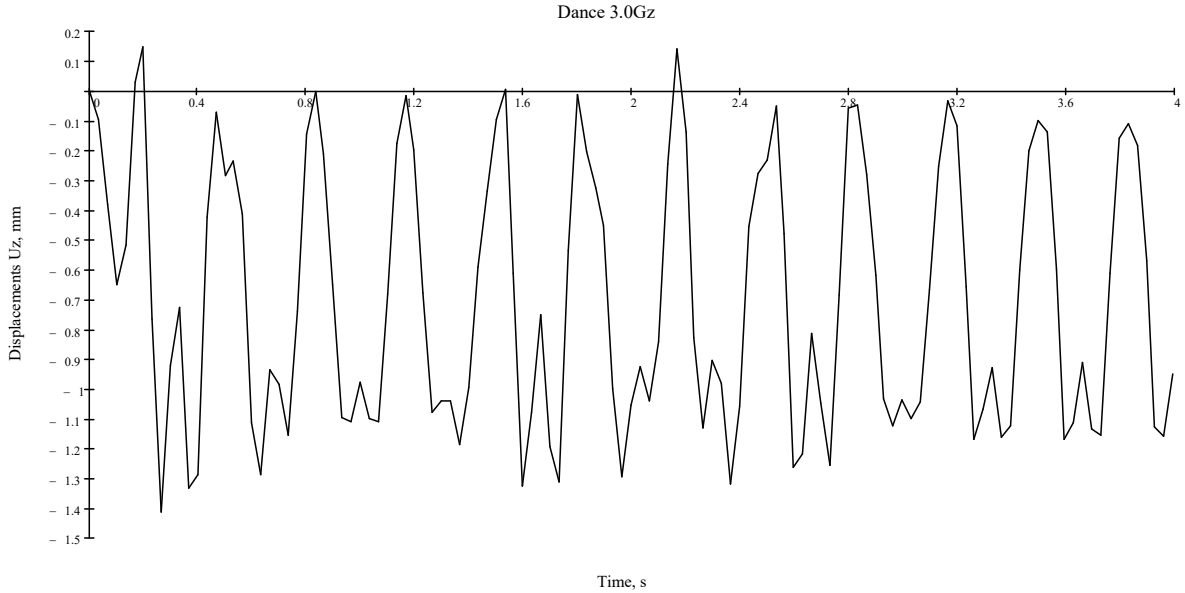



**Рис. 5.** Расчетный график вертикальных перемещений среднего участка расчетной ячейки плиты при синхронных движениях людей с частотой 3,0 Гц

Анализ колебаний при проведении дискотеки на перекрытии над первым этажом здания в зоне катка при различных уровнях демпфирования показал:

1) с ростом частоты ритма динамический эффект увеличивается как для изгибающих моментов в продольных сечениях плиты, так и в поперечных. Так, при частоте 1,0 Гц

динамический коэффициент для изгибающих моментов $M_x$ и $M_y$ составляет η=1,29, для частоты 3,0 Гц он равен η = 1,80;

2) постоянного роста амплитуд колебаний не происходит, что свидетельствует об отсутствии резонанса для всех вариантов учета сил трения. Это объясняется существенным различием частоты возмущения (1-3 Гц) и собственных частот колебаний перекрытия над первым этажом, находящихся в диапазоне от 9,4 до 10,0 Гц.

## Выводы

1. Проведение массовых мероприятий на втором этаже в здании блока № 6 небезопасно, поскольку при воздействиях с частотой 3,0 Гц и более от синхронно танцующих людей возникают резонансные колебания с увеличивающимися во времени амплитудами и происходит исчерпание заложенных при проектировании резервов несущей способности конструкций перекрытий. При этом наиболее слабыми являются более податливые металлические конструкции перекрытий. Усиление несущих конструкций в блоке № 6 было признано нецелесообразным.

2. Прочностные расчеты запроектированного под ледовое поле монолитного железобетонного ребристого перекрытия над первым этажом в здании блока №9 выявили запасы несущей способности, достаточные для безопасного проведения массовых мероприятий. Это объясняется существенным различием частоты возмущения (1,0-3,0 Гц) и собственных частот колебаний мощного перекрытия, находящихся в диапазоне от 9,4 до 10,0 Гц. Полученные по расчету максимальные амплитуды перемещений в средних точках плиты перекрытия не превышают 0,5-0,6 мм, поэтому колебания перекрытия при танцевальных высокочастотных воздействиях не вызовут вредных воздействий и ощущений дискомфорта у участников развлекательных мероприятий.

3. В соответствии с расчетами максимальное количество танцующих, которое может одновременно находиться в танцевальной зоне без риска нанесения вреда конструкциям здания рассматриваемого блока № 9 ТРК Сити-парк «Град», вычисленное из площади катка 1780 м$^2$ и максимальной плотности танцующих 3 чел/м$^2$, составляет 5340 чел. При средней расчетной массе танцующих, принятой равной 70 кг, полная масса находящихся в движении людей составляет не более 400 т.

## Библиографический список


1. СП 20.13330.2011. Нагрузки и воздействия. Актуализированная редакция СНиП 2.01.07-85*/ Министерство Регионального развития РФ. - М., 2011. – 96 с.
2. Национальное приложение к Еврокоду 1991. Воздействия на сооружения: в 2 ч. - Часть 1-1. Основные воздействия. Объемный вес, собственный вес и временные нагрузки на здания/ ОАО «НИЦ «Строительство». - М., 2012. – 14 с.
3. Назаров, Ю.П. Анализ и ограничение колебаний конструкций при воздействии людей/ Ю.П. Назаров, В.Н. Симбиркин // Вестник ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Исследования по теории сооружений. – 2009. – № 1 (XXVI). – С. 10-18.
4. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Дж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
5. ЛИРА-САПР 2012 PRO. Программный комплекс для расчета, исследований и проектирования конструкций различного назначения. ID: 758923367 (2D3C4067h).

6. Murray, T.M. Floor Vibrations Due to Human Activity/ T.M. Murray, D.E. Allen, E.E. Ungar// American Institute of Steel Construction (AISC) Steel Design Guide Series. - No. 11. - American Institute of Steel Construction (AISC), Chicago, Illinois, 1997.
7. Allen, D.E. Building Vibration from Human Activities/ D.E. Allen// Concrete International: Design and Construction. - 12(6). – 1990. - P. 66-73.

References

1. Building Regulations 20.13330.2011. Loading and effects. Updating wording Building norms and regulations 2.01.07-85*/ Ministry of Region Development of RF. - M., 2011. – 96 p.
2. National appendix to Eurocode 1991. Impact on structures 2 p. - Part 1-1. Main impacts. Volume-weight, proper weigh and tentative loading on buildings/ OAO «NIC «Construction». - M., 2012. – 14 p.
3. Nazarov, Y.P. Analysis and limiting of structures fluctuation under man's impact/ Y.P.Nazarov, V.N. Simbirkin // Bulletin TzNIISK by the name of V.A. Kucherenko. Researches according to the theory of structures. – 2009. – № 1 (XXVI). – P. 10-18.
4. Klaf, R. Dynamic of structures/ R. Klaf, J.Penzien. – M.: Stroiizdat, 1979. – 320 p.
5. LIRA-SAPR 2012 PRO. Software for calclation, investigation and design of structures of different functions. ID: 758923367 (2D3C4067h).
6. Murray, T.M. Floor Vibrations Due to Human Activity/ T.M. Murray, D.E. Allen, E.E. Ungar// American Institute of Steel Construction (AISC) Steel Design Guide Series. - No. 11. - American Institute of Steel Construction (AISC), Chicago, Illinois, 1997.
7. Allen, D.E. Building Vibration from Human Activities/ D.E. Allen// Concrete International: Design and Construction. - 12(6). – 1990. - P. 66-73.

**Ключевые слова**: колебания перекрытия, демпфирование, воздействие от человека, динамическая нагрузка, танцы, периодические прыжки, собственная частота, резонанс, прочность, выносливость, расчет.

**Keywords**: bridging vibrations, damping, man's impact, dynamic loading, dance, periodic jumping, natural frequency, resonance, strength, persistence, design.

УДК 620.10:620.17

*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
*Канд. техн. наук, проф. кафедры строительной механики*
*А.Н. Синозерский*
*Ст. преп. кафедры строительной механики*
*Р.А. Мухтаров*
*Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30*
*e-mail:rinat19611 @rambler.ru*

*Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering*
*Phd of Tech. Scence, Prof. of Department of Structural Mechanics*
*A. N. Senozyorsky*
*Lecturer of Department of Structural Mechanics*
*R. A. Muhtarov*
*Voronezh, Russia tel.: 8(473)271-52-30*
*e-mail:rinat19611 @rambler.ru*

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ НДС ПРИ РАЗРУШЕНИИ ВНЕЦЕНТРЕННО СЖИМАЕМЫХ СО СТАНДАРТНОЙ СКОРОСТЬЮ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

Рассматриваются внецентренно сжатые короткие элементы квадратного поперечного сечения из мелкозернистого бетона. Предлагается методика определения напряженно-деформированного состояния в момент разрушения.

A.N. Sinozyosky, R.A. Muhtarov

# ACCORDING TO THE TEST RESULTS DEFINITION OF DEFLECTED MODE OF FINE CONCRETE PRISMS ECCENTRICALLY -COMPRESSED WITH STANDARD SPEED DURING THEIR DESTRUCTION

Eccentrically compressed square cross section short elements from fine concrete are under analysis. The technique of definition of deflected mode during destruction is proposed.

## 1. Постановка задачи

В [1] выполнены исследования базовых состояний, соответствующих максимальным значениям равнодействующих $N_{Б}(\dot{\theta}, e)$ внутренних сил при заданных скорости нагружения $\dot{\theta}$, эксцентриситете $e$ и зависимости между напряжением $\sigma(\dot{\theta})$ и деформацией $\varepsilon$, установленной в опытах на центральное сжатие:

$$\sigma(\dot{\theta}) = E \cdot \varepsilon - \alpha(\dot{\theta}) \cdot (\varepsilon)^{\beta(\dot{\theta})}. \quad (1)$$

График (1) при модуле упругости материала $E = 31390$ МПа, стандартной [2] скорости $\dot{\theta}_s = 0{,}3923$ $(\sigma = 392{,}3$ кПа $\cdot$ с$^{-1})$, параметрах $\alpha(\dot{\theta}_s) = 1588500$ МПа и $\beta(\dot{\theta}_s) = 2{,}08100$, экстремальных $\tilde{\sigma}_u(\dot{\theta}_s) = 26{,}09$ МПа и $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_s) = 1600 \cdot 10^{-6}$ представлен на рис. 1.

© Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А., 2013

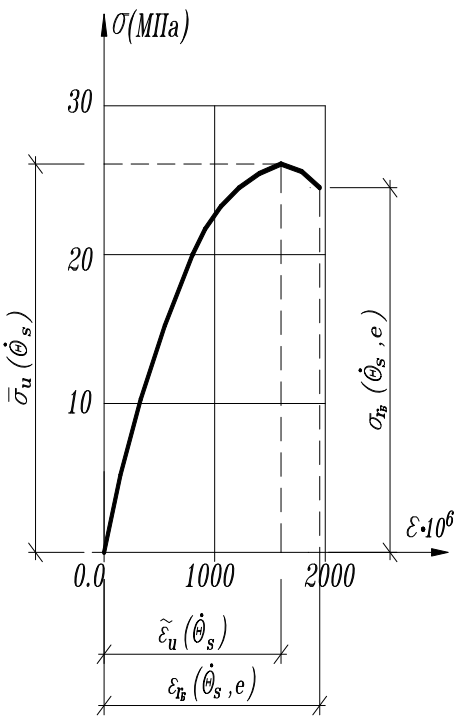



**Рис. 1.** График зависимости « $\sigma - \varepsilon$»

Базовые (табл. 1) усилия $N_{Б}(\dot{\theta}_s, e)$ составляют 0,94 … 0,92 опытных средних разрушающих $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e)$ нагрузок при вероятности 0,95. Наибольшие деформации $\varepsilon_{r_Б}(\dot{\theta}_s, e)$ превосходят $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_s)$ центрального нагружения.

Таблица 1

| $e = \frac{y_f}{h}$ | $r_Б(\dot{\theta}_s, e)$ | $\varepsilon_{r_Б}(\dot{\theta}_s, e) \cdot 10^6$ | $B_{r_Б}(\dot{\theta}_s, e) \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилия, кН | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $N_Б(\dot{\theta}_s, e)$ | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e) \pm \Delta\bar{F}_u$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0,050 | 1,1952 | 1912,3 | 1,4881064 | 222,2 | 236,3±17,7 |
| 0,100 | 1,2575 | 2012,0 | 1,9702780 | 193,4 | 207,9±14,7 |
| 0,150 | 1,2958 | 2073,3 | 2,2775228 | 171,1 | 185,3±13,7 |

Здесь и в дальнейшем все компоненты тензора напряжений кроме $\sigma_x = \sigma$ принимают равными нулю, а сжимающие $\varepsilon, \sigma, \bar{F}, N -$ по модулю.

Рассматриваются короткие элементы квадратного поперечного сечения шириной $b = 0{,}1$ м, высотой $h = b$ и длиной $L = 0{,}4$ м, что исключает влияние гибкости на результат расчёта. Равнодействующая $F$ внешних сил приложена в точке $f$ с координатами $y_f$, $z_f = 0$ и возрастает со скоростью

$$\dot{F} = \frac{F}{t} = const \text{ (или } \dot{\theta} = F/b \cdot h \cdot t \cdot \dot{\sigma}_{1,00} \text{ при } \dot{\sigma}_{1,00} = 1{,}00 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1})$$

от нуля до разрушающей нагрузки $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e)$.

В предельном состоянии приняты:

относительный эксцентриситет

$$e = y_f/h \; ; \tag{2}$$

функция

$$\sigma(e) = E \cdot \varepsilon - \alpha(e) \cdot (\varepsilon)^{\beta(e)} \tag{3}$$

с экстремальными $$\sigma_\mu(e) = K_\mu(e) \cdot \tilde{\sigma}_u(\dot{\theta}_s), \quad (4)$$
$$\varepsilon_\mu(e) = K_\mu(e) \cdot \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_s), \quad (5)$$
параметрами $$\beta(e) = \beta(\dot{\theta}_s), \quad (6)$$
$$\alpha(e) = \frac{E}{\beta(\dot{\theta}_s) \cdot \left(\varepsilon_\mu(e)\right)^{\beta(\dot{\theta}_s)-1}} \quad (7)$$
и показателем $K_\mu(e) > 1$;
на уровне координаты $y$ деформация
$$\varepsilon(e) = B_u(e) \cdot (y - 0{,}5 \cdot h) + \varepsilon_{ru}(e) \quad (8)$$
с наибольшей $$\varepsilon_{ru}(e) = \varepsilon_\mu(e) \cdot r_u(e), \quad (9)$$
параметром $B_u(e)$, м$^{-1}$, эпюры $\varepsilon$, коэффициентом $r_u(e) > 1$ увеличения $\varepsilon_\mu(e)$ по причине возникновения неоднородных $\sigma$ и $\varepsilon$ в отличие от центрального нагружения с $\sigma = const$ и $\varepsilon = const$ во всём сечении;
экстремальная равнодействующая внутренних сил $N_u(e)$.

Найдем характеристики предельного состояния $\sigma_\mu(e), K_\mu(e), \varepsilon_\mu(e), \alpha(e), r_u(e), \varepsilon_{ru}(e)$, $B_u(e), \sigma(e)$, $\varepsilon(e)$, при которых выполняется условие
$$N_u(e) = \bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e). \quad (10)$$

## 2. Расчётные формулы

Записываем уравнения равновесия внутренних сил:
$$\sum x = 0 \ldots N_u(e) = b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \delta \cdot dy,$$
$$\sum m_z = 0 \ldots N_u(e) \cdot y_{f=} b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \delta \cdot dy \cdot y$$
или с учётом (3), (8) и $\alpha(\mathrm{e}) = z$, $\beta(\mathrm{e}) = \tilde{\beta}$, $\varepsilon_{ru}(e) = \varepsilon_{ru}$, $B_u(e) = B_u$ (здесь и в дальнейшем) после преобразования получаем
$$N_u(e) = b \cdot h \cdot E \cdot (\varepsilon_{ru} - 0{,}5 \cdot B_u \cdot h) - \frac{b \cdot \tilde{\alpha}}{\tilde{\beta} + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+1} - (\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+1}}{B_u}, \quad (11)$$
$$N_u(e) \cdot y_{f=} \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{12} \cdot B_u - \frac{b \cdot \tilde{\alpha}}{\tilde{\beta} + 1} \cdot \frac{(\varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+1} - (\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+1}}{B_u} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_{ru}}{B_u}\right) - \frac{b \cdot \tilde{\alpha}}{\tilde{\beta} + 2} \cdot$$
$$\cdot \frac{(\varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+2} - (\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+2}}{(B_u)^2}. \quad (12)$$
Умножая (11) на $(-y_f)$ и складывая с (12), будем иметь
$$\Phi(B_u) = \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{12} \cdot B_u - \frac{b \cdot \tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}+1} \cdot \frac{(\varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+1} - (\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+1}}{B_u} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_{ru}}{B_u}\right) - \frac{b \cdot \tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}+2} \cdot \frac{(\varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+2} - (\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+2}}{(B_u)^2} +$$
$$+ y_f \cdot b \cdot \left[\frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\beta}+1} \cdot \frac{(\varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+1} - (\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+1}}{B_u} - h \cdot E\left(\varepsilon_{ru} - \frac{B_u \cdot h}{2}\right)\right] = 0. \quad (13)$$

Если $$B_u \cdot h > \varepsilon_{ru}, \quad (14)$$
то в сечении эпюра $\varepsilon$ двух знаков. В связи с этим вводим допущение, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Зависимость "$\sigma - \varepsilon$" в случае растяжения
$$\sigma(e) = E \cdot \varepsilon + \alpha(e) \cdot \varepsilon^{\beta(e)}, \quad (15)$$
где $\alpha(e), \beta(e)$ – коэффициенты те же, что и в (3); деформации – отрицательные ($\varepsilon < 0$) и при вычислении $(\varepsilon)^{\beta(\mathrm{e})}$ берутся по модулю.

Здесь в уравнениях (11), (12), (13) выражения

$$(\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+1} \text{ и } (\varepsilon_{ru} - B_u \cdot h)^{\tilde{\beta}+2} \quad (16)$$

следует заменить соответственно на

$$(B_u \cdot h - \varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+1} \text{ и } (B_u \cdot h - \varepsilon_{ru})^{\tilde{\beta}+2}. \quad (17)$$

Когда

$$B_u \cdot h = \varepsilon_{ru}, \quad (18)$$

вместо (16) и (17) вводятся нули.

Определение показателей $\sigma_\mu(\text{e}), K_\mu(\text{e}), \dots, B_u(\text{e})$ проводим численными способами.

Назначаем напряжение $\sigma_{\mu 0}(\text{e}) > \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)$ и вычисляем:

коэффициент $K_{\mu 0}(\text{e}) = \frac{\sigma_{\mu 0}}{\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)}$;

деформацию $\varepsilon_{\mu(0)}(\text{e})$ по (5);

параметр $\tilde{\alpha}_0(\text{e})$ по (7);

характеристики $r_{u0}(\text{e})$, $\varepsilon_{r_{u0}}(\text{e})$, $B_{u0}(\text{e})$, $N_{u0}(\text{e})$ подобно базовым $r_b$, $\varepsilon_{r_b}$, $B_b$, $N_b$ в [1];

отклонение

$$\delta_0 = N_{u0}(\text{e}) - \bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e). \quad (19)$$

Повторяем расчет, задаваясь $\sigma_{\mu 1}(\text{e})$ и получая $K_{\mu 1}(\text{e})$, $\varepsilon_{\mu 1}(\text{e}), \alpha_1(\text{e}), r_{u1}(\text{e}), \dots, N_{u1}(\text{e})$:

$$\delta_1 = N_{u1}(\text{e}) - \bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e).$$

В случае $\delta_0 > 0$ и $\delta_1 < 0$ уточняем напряжение $\sigma_{\mu \text{p}+1}(\text{e})$ методом хорд [3]:

$$\sigma_{\mu \text{p}+1}(\text{e}) = \frac{\sigma_{\mu 0}(\text{e}) \cdot \delta_\text{p} - \sigma_{\mu \text{p}}(\text{e}) \cdot \delta_0}{\delta_\text{p} - \delta_0}, \quad (20)$$

где p = 1, 2, 3, … - приближения $\sigma_\mu(\text{e})$.

Процесс заканчиваем при абсолютной величине $|\delta_{\text{p}+1}| \le 5 \cdot 10^{-3}$кН. (21)

Принимая $\sigma_\mu(\text{e}) = \sigma_{\mu \text{p}+1}(\text{e})$ с округлением до пятизначных цифр, определяем окончательные показатели условного предельного состояния $\sigma_\mu(\text{e}), \dots, B_u(\text{e}), N_u(\text{e})$, а по формулам (3) и (8) – напряжения $\sigma(\text{e})$ и деформации $\varepsilon(\text{e})$.

## 3. Вычисление напряженно-деформированного состояния (НДС)

Результаты выполненных по изложенной методике расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

| $\text{e} = \frac{y_f}{h}$ | p | $\sigma_{\mu\text{p}}$, МПа | $K_{\mu\text{p}}(\text{e}) = \frac{\sigma_{\mu\text{p}}}{\bar{\sigma}_u}$ | $\varepsilon_{\mu\text{p}} \cdot 10^6$ по (5) | Параметры | | m | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_{r_m}(\text{e}) \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | $N_m(\text{e})$, кН |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\alpha_{\mu\text{p}}(\text{e})$, МПа | $\beta_\mu$ | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0,050 | 0 | 27,8 | 1,0655 | 1704,8 | 14828000 | 2,08100 | 3 | 1,15 | 1960,5 | 1,4890246 | 236,536 |
| | | | | | | | 4 | 1,20 | 2045,75 | 1,5957538 | 236,807 |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2131,0 | 1,7064257 | 236,416 |
| | | | | | | | $\mu 0$ | 1,19547 | 2038,0 | 1,5858859 | 236,810 |
| | 1 | 27,7 | 1,0617 | 1698,7 | 14885500 | 2,08100 | 3 | 1,15 | 1953,5 | 1,4837071 | 235,691 |
| | | | | | | | 4 | 1,20 | 2038,45 | 1,5900608 | 235,961 |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2123,4 | 1,7003378 | 235,572 |
| | | | | | | | $\mu 1$ | 1,19549 | 2030,8 | 1,5803178 | 235,964 |
| | 2 | 27,740 | 1,0632 | 1701,1 | 14862800 | 2,08100 | 3 | 1,15 | 1956,25 | 1,4857890 | 236,024 |
| | | | | | | | 4 | 1,20 | 2041,3 | 1,5922647 | 236,294 |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2126,35 | 1,7026823 | 235,904 |
| | | | | | | | $\mu 2$ | 1,19545 | 2033,6 | 1,5824637 | 236,297 |

Окончание табл. 2

| $e = \frac{y_f}{h}$ | p | $\sigma_{\mu p}$, МПа | $K_{\mu p}(e) = \frac{\sigma_{\mu p}}{\bar{\sigma}_u}$ | $\varepsilon_{\mu p} \cdot 10^6$ по (5) | Параметры | | m | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_{r_m}(e) \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | $N_m(e)$, кН |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\alpha_{\mu p}(e)$, МПа | $\beta_\mu$ | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0,100 | 0 | 28,1 | 1,0770 | 1723,2 | 14656800 | 2,08100 | 4 | 1,20 | 2067,85 | 1,9971409 | 207,991 |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2154,0 | 2,1053975 | 208,377 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2240,15 | 2,2157914 | 208,176 |
| | | | | | | | $\mu 0$ | 1,25788 | 2167,6 | 2,1226820 | 208,384 |
| | 1 | 28,0 | 1,0732 | 1717,1 | 14713100 | 2,08100 | 4 | 1,20 | 2060,5 | 1,9900383 | 207,254 |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2146,35 | 2,0979188 | 207,639 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2232,2 | 2,2079211 | 207,439 |
| | | | | | | | $\mu 1$ | 1,25793 | 2160,0 | 2,1152626 | 207,646 |
| | 2 | 28,035 | 1,0745 | 1719,2 | 14693700 | 2,08100 | 4 | 1,20 | 2063,05 | 1,9925123 | 207,508 |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2149,0 | 2,1005109 | 207,893 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2234,95 | 2,2106554 | 207,692 |
| | | | | | | | $\mu 2$ | 1,25785 | 2162,5 | 2,1202199 | 207,899 |
| 0,150 | 0 | 28,3 | 1,0847 | 1735,5 | 14544600 | 2,08100 | 5 | 1,25 | 2169,4 | 2,3688814 | 185,456 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2256,15 | 2,4796223 | 185,676 |
| | | | | | | | 7 | 1,35 | 2342,9 | 2,5917791 | 185,375 |
| | | | | | | | $\mu 0$ | 1,29611 | 2249,4 | 2,4709531 | 185,678 |
| | 1 | 28,2 | 1,0809 | 1729,4 | 14600000 | 2,08100 | 5 | 1,25 | 2161,75 | 2,3605162 | 184,805 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2248,2 | 2,4708807 | 185,024 |
| | | | | | | | 7 | 1,35 | 2334,65 | 2,5826442 | 184,725 |
| | | | | | | | $\mu 1$ | 1,29614 | 2241,5 | 2,4622759 | 185,026 |
| | 2 | 28,242 | 1,0825 | 1732,0 | 14576400 | 2,08100 | 5 | 1,25 | 2165,0 | 2,3640701 | 185,082 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2251,6 | 2,4746222 | 185,302 |
| | | | | | | | 7 | 1,35 | 2338,2 | 2,5855809 | 185,002 |
| | | | | | | | $\mu 2$ | 1,29615 | 2244,9 | 2,4660185 | 185,303 |

## 4. Анализ полученных результатов

Таким образом, имели при относительном эксцентриситете:

$e = 0{,}050$ – $\sigma_{\mu 0} = 27{,}8$ МПа, $\delta_0 = 236{,}810 - 236{,}3 = 0{,}510$ кН и $\sigma_{\mu 1} = 27{,}7$ МПа, $\delta_1 = 235{,}964 - 236{,}3 = -0{,}336$ кН, $\sigma_{\mu 2} = \frac{27{,}8\cdot(-0{,}336)-27{,}7\cdot 0{,}510}{-0{,}336-0{,}510} = 27{,}740$ МПа

с $\delta_2 = 236{,}297 - 236{,}3 = |-0{,}003 \text{ кН}| < 5 \cdot 10^{-3}$кН;

$e = 0{,}100$ – $\sigma_{\mu 0} = 28{,}1$ МПа, $\delta_0 = 208{,}384 - 207{,}9 = 0{,}484$ кН и $\sigma_{\mu 1} = 28{,}0$ МПа, $\delta_1 = 207{,}646 - 207{,}9 = -0{,}254$ кН, $\sigma_{\mu 2} = \frac{28{,}1\cdot(-0{,}254)-28{,}0\cdot 0{,}484}{-0{,}254-0{,}484} = 28{,}035$ МПа

с $\delta_2 = 207{,}899 - 207{,}9 = |-0{,}001 \text{ кН}| < 5 \cdot 10^{-3}$кН;

$e = 0{,}150$ – $\sigma_{\mu 0} = 28{,}3$ МПа, $\delta_0 = 185{,}678 - 185{,}3 = 0{,}378$кН и $\sigma_{\mu 1} = 28{,}2$ МПа, $\delta_1 = 185{,}026 - 185{,}3 = -0{,}274$ кН, $\sigma_{\mu 2} = \frac{28{,}3\cdot(-0{,}274)-28{,}2\cdot 0{,}378}{-0{,}274-0{,}378} = 28{,}242$ МПа

с $\delta_2 = 185{,}303 - 185{,}3 = 0{,}003$ кН $< 5 \cdot 10^{-3}$ кН.

Окончательные сведения принимаем по табл. 3, а

деформации
$$\begin{cases} \varepsilon(e = 0{,}05) = 1{,}5824637 \cdot 10^{-2} \cdot (y - 0{,}5 \cdot h) + 2033{,}6 \cdot 10^{-6}, \\ \varepsilon(e = 0{,}10) = 2{,}1202199 \cdot 10^{-2} \cdot (y - 0{,}5 \cdot h) + 2162{,}5 \cdot 10^{-6}, \\ \varepsilon(e = 0{,}15) = 2{,}4660185 \cdot 10^{-2} \cdot (y - 0{,}5 \cdot h) + 2244{,}9 \cdot 10^{-6}, \end{cases} \quad (22)$$

и напряжения
$$\begin{cases} \sigma(e = 0{,}05) = 31390 \cdot \varepsilon - 14862800 \cdot (\varepsilon)^{2{,}08100}, \\ \sigma(e = 0{,}10) = 31390 \cdot \varepsilon - 14693700 \cdot (\varepsilon)^{2{,}08100}, \\ \sigma(e = 0{,}15) = 31390 \cdot \varepsilon - 14676400 \cdot (\varepsilon)^{2{,}08100} \end{cases} \quad (23)$$

записываем в табл. 4. График $N_{um2}(0{,}10) - r_{m2}$ изображаем на рис. 2, *а* эпюры $\varepsilon_c(0{,}10)$ и $\sigma_c(0{,}10)$ –на рис. 2, *б* и *в*.

Таблица 3

| $\dot{\theta}_s \cdot 10^3$ | $e = \frac{y_f}{h}$ | $\sigma_\mu(e)$, МПа | $K_\mu(e) = \frac{\sigma_\mu(e)}{\bar{\sigma}_u}$ | $\varepsilon_\mu(e) \cdot 10^6$ | Параметры | | $\varepsilon_{r_u} \cdot 10^6$ | $B_u(e) \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | $N_u(e)$, кН |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\alpha(e)$, МПа | $\beta$ | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 392,3 | 0,05 | 27,746 | 1,0632 | 1701,1 | 14862800 | 2,08100 | 2033,6 | 1,5824637 | 236,3 |
| | 0,10 | 28,035 | 1,0745 | 1719,2 | 14693700 | 2,08100 | 2162,5 | 2,1202199 | 207,9 |
| | 0,15 | 28,242 | 1,0825 | 1732,0 | 14576400 | 2,08100 | 2244,9 | 2,4660185 | 185,3 |

Таблица 4

| $\dot{\theta}_s \cdot 10^3$ | $e = \frac{y_f}{h}$ | Точки с | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Координаты $y_c$, м | −0,050 | −0,025 | 0 | 0,025 | 0,05 | $y_\mu(e)^*$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 392,3 | 0,05 | $\varepsilon_c(0{,}05) \cdot 10^6$ по (22) | 451,14 | 846,75 | 1242,37 | 1637,98 | 2033,6 | 1701,1 |
| | | $\sigma_c(0{,}05)$, МПа по (23) | 12,54 | 20,57 | 25,66 | 27,70 | 26,63 | 27,740 |
| | 0,10 | $\varepsilon_c(0{,}10) \cdot 10^6$ по (22) | 42,28 | 572,3 | 1102,39 | 1632,45 | 2162,5 | 1719,2 |
| | | $\sigma_c(0{,}10)$, МПа по (23) | 1,32 | 15,34 | 24,32 | 27,96 | 26,08 | 28,033 |
| | 0,15 | $\varepsilon_c(0{,}15) \cdot 10^6$ по (22) | -221,12 | 395,39 | 1011,89 | 1628,40 | 2244,9 | 1732,0 |
| | | $\sigma_c(0{,}15)$, МПа по (23) | -6,58 | 11,20 | 23,23 | 28,14 | 25,65 | 28,242 |

$*$ $y_\mu(0{,}05) = 2{,}899 \cdot 10^{-2}$м, $y_\mu(0{,}10) = 2{,}909 \cdot 10^{-2}$м, $y_\mu(0{,}15) = 2{,}920 \cdot 10^{-2}$м,

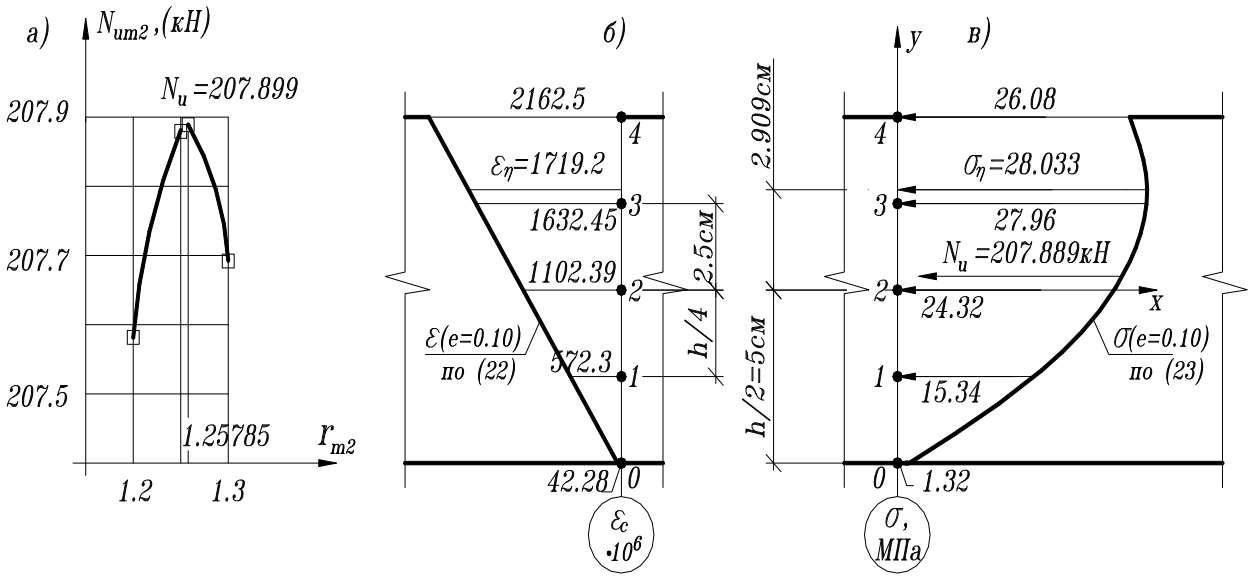



**Рис. 2.** $\dot{\theta}_s$, e = 0,10

Заметим, что $$N_Б(\dot{\theta}_s, e) \cdot K_\mu(e) \approx \bar{F}_u(\dot{\theta}_s, e). \quad (24)$$

Действительно,

$N_Б(\dot{\theta}_s, 0{,}05) \cdot K_\mu(0{,}05) = 222{,}196 \cdot 1{,}0632 = 236{,}239$ кН $\approx 236{,}2$ кН

при $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, 0{,}05) = 236{,}3$ кН,

$N_Б(\dot{\theta}_s, 0{,}10) \cdot K_\mu(0{,}10) = 193{,}434 \cdot 1{,}0745 = 207{,}845$ кН $\approx 207{,}8$ кН

при $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, 0{,}10) = 207{,}9$ кН,
$N_Б(\dot{\theta}_s, 0{,}15) \cdot K_\mu(0{,}15) = 171{,}137 \cdot 1{,}0825 = 185{,}256$ кН $\approx 185{,}3$ кН
при $\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, 0{,}15) = 185{,}3$ кН.

Следовательно, коэффициент $$K_\mu(\mathrm{e}) = \frac{\bar{F}_u(\dot{\theta}_s, \mathrm{e})}{N_Б(\dot{\theta}_s, \mathrm{e})}. \quad (25)$$

**Выводы**

Предложена методика определения условного напряжённо-деформированного состояния в момент разрушения внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бетона при вычисляемом по формуле (25) показателе $K_\mu(\mathrm{e})$.

Библиографический список


1. Синозерский, А.Н. Определение базовых усилий и напряженно-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона / А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – 2012. - Вып. №1 (4). – С. 72-83.
2. ГОСТ 10180-90. Методы определения прочности по контрольным образцам / Госстрой СССР. – М., 1990. – С. 8-9.
3. Лапчик, М.П. Численные методы : учеб. пособие для студентов вузов / М.П. Лапчик, М.И. Рагулина, Е.К. Хеннер; под ред. М.П. Лапчика. – М.: Изд. Центр «Академия», 2004. – 384 с.


Reference


1. Sinozyorsky, A.N. The definition of basic forces and deflected mode of prisms from fine concrete / A.N.Sinozyorsky, R.A. Muhtarov //. Structural Mechanics and Structures. – 2012. – Issue №1 (4). – P. 72-83.
2. State Standards 10180-90. Methods of definition of strength acoording to test samples / Gosstroi of USSR. - M., 1990. - P. 8-9.
3. Lapchik, M.P. Numeric methods: teaching aid for students / M.P. Lapchic, M.I. Ragulina, E.K. Henner; under reduction of M.P. Lapchic. – M.: Pub. House. Centr-Academiya, 2004. – 384 p.



**Ключевые слова**: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон.

**Keywords**: eccentric compression, fine concrete.

# РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОСНОВАНИЙ И ФУНДАМЕНТОВ

УДК 624.131(470.324)

*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
*Канд. техн.наук, доц. кафедры строительных конструкций оснований и фундаментов им. проф. Ю.М. Борисова (СКОиФ)*
*М.С. Ким*
*Магистрант кафедры СКОиФ*
*Е.В. Полищук*
*Магистрант кафедры СКОиФ*
*Е.В. Шарова*
*Магистрант кафедры СКОиФ*
*А.А. Бражникова*
*Магистрант кафедры СКОиФ*
*М.В. Ким*
*Россия, г. Воронеж, тел.: +7(473)271-53-84*
*e-mail: marskim@yandex.ru*

*Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering*
*M.S Kim PhD of tech. Sc.. Associate Professor.of Department of Building Structures, Bases and Foundations by the name of Prof. Yu. M. Borisov,*
*M.V. Kim*
*Master of Department of SCOiF,*
*E.V. Polishchuk*
*Master of Department of SCOiF,*
*E.V. Sharova*
*Master of Department of SCOiF,*
*A.A. Brazhnikova*
*Master of Department of SCOiF,*
*Voronezh, Russia, tel.: +7(473)271-53-82*
*e-mail: marskim@yandex.ru*

М.С. Ким, Е.В. Полищук, Е.В. Шарова, А.А. Бражникова, М.В. Ким

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕХНОЛОГИИ РИТ ДЛЯ ЗАКРЕПЛЕНИЯ ГЛИНИСТЫХ И ПЕСЧАНЫХ ГРУНТОВ В КОТЛОВАНЕ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ТОРГОВО-ГОСТИНИЧНОГО КОМПЛЕКСА В г. ВОРОНЕЖЕ

Описан метод уплотнения песчаных и глинистых грунтов с использованием разрядно-импульсной технологии (РИТ), определены физико-механические характеристики песчаных и глинистых грунтов, подвергнутых разрядно-импульсной обработке, доказана эффективность компенсационного уплотнения грунтов с помощью РИТ-технологии как одного из наиболее перспективных направлений искусственного улучшения свойств грунтов в строительстве.

M.S. Kim, E.V. Polischuk, E.V. Sharova, A.A. Brazhnikova, M.V. Kim

## RESEARCH OF EFFICIENCY OF APPLICATION OF DISCHARGE -IMPULSE TECHNOLOGY METHOD FOR CLAY AND SAND SOIL SOLIDIFICATION IN DITCH DURING THE CONSTRUCTION OF COMMERCE – HOTEL CENTER IN VORONEZH

Method of clay and sand soil consolidation with the application of discharge - impact technology is described, the physico-mechanic characteristics of sand and clay soils treated with discharge - impact technology are detected, and the efficiency of compensative soil compaction is proved with the use of discharge - impact technology as one of the most advanced direction of improvement of the artificial soil properties in construction.

© Ким М.С., Полищук Е.В., Шарова Е.В., Бражникова А.А., Ким М.В., 2013

## Введение

Развитие строительства в последнее время идет по пути увеличения нагрузок на грунты основания. Геотехника обязана решать возникающие при этом проблемы. Эффективными направлениями их решения являются: внедрение технологий, максимально использующих возможности грунтового основания; разработка эффективных конструкций фундаментов; а также совершенствование расчетного аппарата.

Ниже представлены результаты проведенных исследований, включающих: визуальное обследование состояния грунта и бетонных стволов, полученных в результате компенсационного уплотнения, в шурфах; отбор образцов грунтов нарушенной и ненарушенной структуры естественного сложения и уплотненного по разрядно-импульсной технологии (РИТ); лабораторные определения их физических и механических характеристик; анализ полученных данных, а также выявлено реальное влияние РИТ-обработки на физико-механические характеристики как песчаных, так и глинистых грунтов. Сделан вывод о том, что компенсационное уплотнение грунтов с помощью РИТ является перспективным направлением искусственного улучшения свойств грунтов в строительстве.

## 1. Краткое описание метода уплотнения грунтов с использованием РИТ

Сущность РИТ заключается в том, что скважину, заполненную твердеющим материалом, обрабатывают серией высоковольтных электрических разрядов. При этом возникает электрогидравлический эффект, в результате которого формируется ствол сваи или корень анкера и уплотняется окружающий грунт.

Сваи-РИТ применяются в строительстве с 1990 г. За прошедшее время разрядно-импульсная технология устройства свай использовалась при строительстве большого числа объектов. Проведены достаточно обширные исследования несущей способности свай-РИТ и напряженно-деформированного состояния окружающего грунта, которые показали, что несущая способность таких свай более чем в 2 раза превышает несущую способность свай, устроенных по традиционной технологии, а также зафиксировали уплотнение грунта вокруг сваи .

Кроме изготовления свай, разрядно-импульсная технология применяется для уплотнения грунтов преимущественно в откосах глубоких котлованов.

Компенсационное уплотнение (КУ) грунтов по РИТ осуществляется путем проведения серии электрических разрядов в скважине, заполненной водно-цементной суспензией. При этом улучшение физико-механических свойств грунта достигается в результате его уплотнения в околоскважинном пространстве. Кроме того, скважины, заполненные цементным раствором и пересекающие грунтовую толщу, образуют с упрочняемым грунтом единый массив.

Для обработки водно-цементной суспензии электрическими разрядами используют генератор импульсных токов (ГИТ), включающий трансформатор, выпрямитель, накопитель энергии, коммутатор и блок управления. Генератор соединяют с излучателем энергии, установленным в скважине, заполненной суспензией. Разряд создают следующим образом: электрическая энергия постоянного тока напряжением 220…380 В повышается до 10 кВ. Электрическая энергия постоянного тока и высокого напряжения аккумулируется в накопителе энергии, который представляет собой блок конденсаторных батарей. Эту энергию направляют к излучателю, погруженному в бетонную смесь. При подаче электроэнергии на электроды излучателя в межэлектродном промежутке создается высокая плотность энергии и происходит пробой с образованием плазменного канала разряда, где за $10^{-4}$ …$10^{-5}$с повышается температура и давление. При этом в окружающей среде образуются и распространяются волны

сжатия. На этой стадии происходит преобразование запасенной электрической энергии в энергию электродинамических возмущений, что приводит к расширению канала разряда в парогазовую полость.

Компенсационное уплотнение грунта на площадке строительства торгово-гостиничного комплекса в г. Воронеже проводилось для закрепления грунтов при устройстве крепления котлована в месте примыкания его к существующему зданию. Пробурено 200 скважин с разных отметок по глубине котлована. Диаметр скважин составлял 150 мм. Устройство скважин КУ осуществлялось в 4 этапа: с поверхности земли на отметке 149,34 после устройства шпунтового ограждения бурились скважины длиной $l$ = 20,4 м и $l$ = 15,4 м, после откопки грунта в котловане с отметки 146,100 бурились скважины длиной $l$ = 17,16 м и $l$ = 12,16 м; с отметки 143,540 – $l$ = 14,6 м; с отметки 140,53 – $l$ = 11,59 м. Схема расположения скважин компенсационного уплотнения показана на рис. 1.

Для компенсационного уплотнения грунта применяли цементное молоко с водоцементным отношением 0,5 с добавкой 5 % бентонита от веса цемента. Мощность разрядно-импульсной обработки (РИО) составляла 10-20 импульсов на уровень РИТ-обработки, шаг уровней 300-400 мм, то есть 2-3 уровня на 1 п. м. длины скважины.

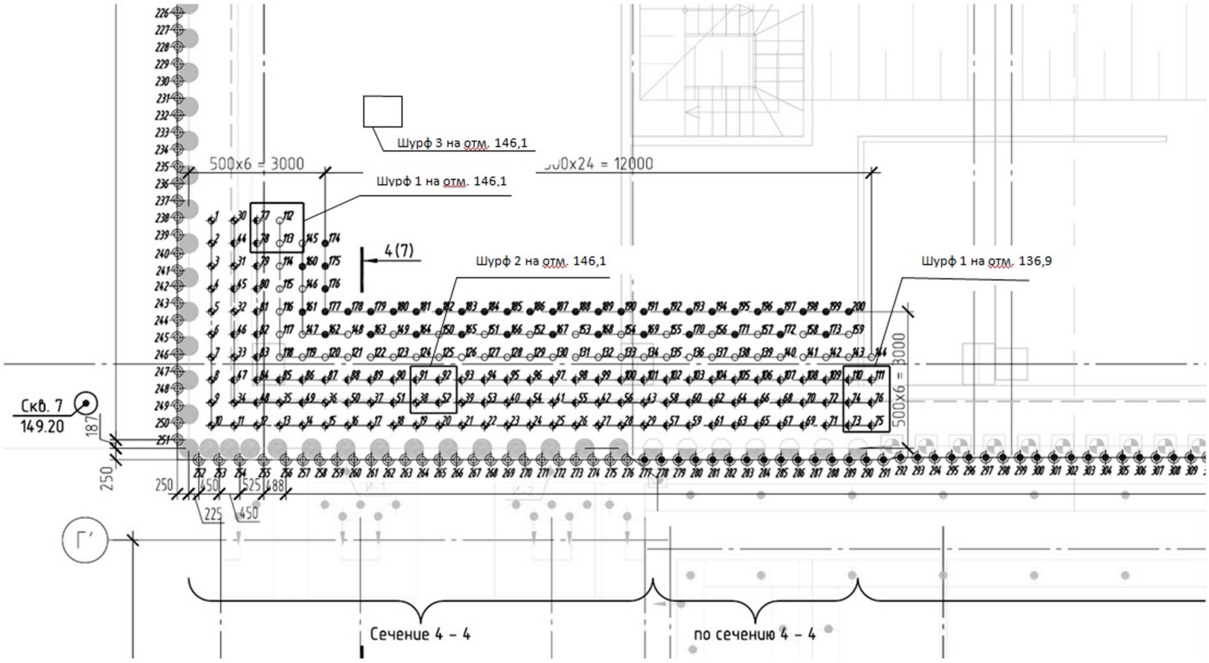



**Рис. 1.** План расположения скважин компенсационного уплотнения с обозначением шурфов

## 2. Инженерно-геологическое строение площадки строительства

Геологическое строение участка строительства до глубины 45,0 м характеризуется наличием среднечетвертичных аллювиальных песчано-глинистых отложений четвертой надпойменной террасы, повсеместно перекрытых техногенным слоем. В литолого-стратиграфическом разрезе участка с учётом генезиса и физико-механических свойств грунтов до глубины 45,0 м выделено 10 инженерно-геологических элементов (ИГЭ) [1].

Инженерно-геологическое строение площадки строительства в верхней части разреза очень неоднородное. Техногенный слой (ИГЭ № 1) - насыпные грунты, мощностью до 4,3 м, представлен механической смесью суглинка, песка, красного кирпича, чернозема и строительного мусора.

Средний слой (до абсолютной отметки 143,4) составляют суглинки светло-коричневого цвета, консистенции от твердой до мягкопластичной, общей мощностью до 9 м. На глубине 2,4-3 м встречаются суглинки твердые, просадочные (ИГЭ № 2), мощностью 3,1 - 3,2 м. На глубине 3-4,8 м – суглинки светло-коричневые полутвердые (ИГЭ № 3) и суглинки светло-коричневые тугопластичные (ИГЭ № 4). Распространение суглинков неравномерное, слои выклиниваются, и в разных скважинах на одной глубине встречаются грунты разной консистенции. Суглинки подстилаются песками желто-серого цвета, средней крупности, от средней плотности до плотных (ИГЭ № 6, 8, 10) неоднородными, малой степени водонасыщения. В песках средней крупности встречаются прослои песков мелких от средней плотности до плотных (ИГЭ № 7, 9). Геологическое строение и литологические особенности грунтов показаны на инженерно-геологическом разрезе (рис. 2).

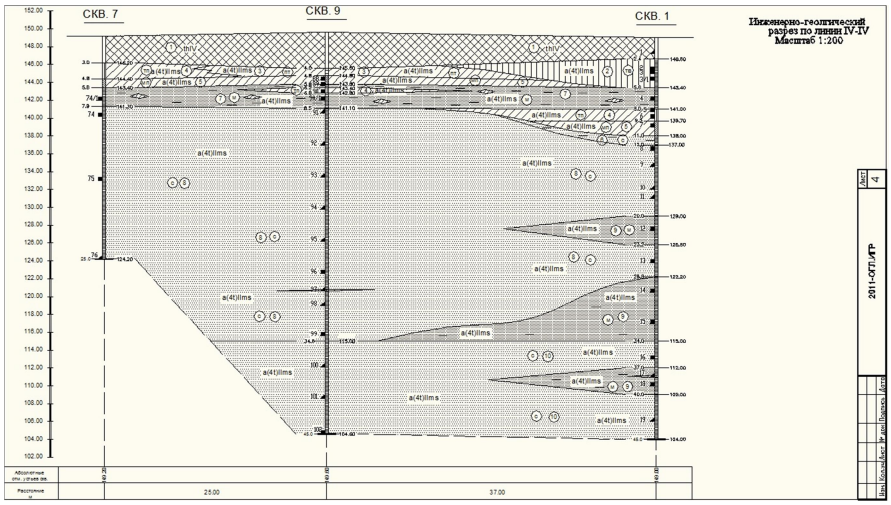



**Рис. 2.** Инженерно-геологическое строение участка по данным [1]

Неоднородность напластований грунтов видна на фото откоса котлована (рис. 3).

**Рис. 3.** Неоднородность напластований грунтов в откосе котлована

## 3. Методика обследования грунтов в котловане

Обследование грунтов выполнялось согласно СП 11-05-97 [2] при вскрытии шурфов на различных отметках откопки котлована в зоне расположения скважин КУ. Исследование свойств глинистых грунтов осуществлялось в котловане, окопанном до абсолютной отметки 146,1 м. Было отрыто 3 шурфа. Расположение шурфов показано на плане расположения скважин КУ (см. рис. 1). Глубина шурфов составляла 0,7 - 0,8 м от поверхности грунта в котловане. Шурф 3 располагался в стороне от скважин КУ на расстоянии около 2 м от крайней скважины. Глубина шурфа 3 - 1,5 м от поверхности грунта в котловане.

Пробы песчаного грунта отбирались из шурфа, вскрытого в котловане, окопанном до абсолютной отметки 136,9 м (см. рис. 1). Глубина шурфа составляла 1,8 м от поверхности грунта в котловане**.**

Для лабораторных исследований в шурфах были отобраны пробы грунтов нарушенной и ненарушенной структуры. Отбирались образцы грунта, подвергавшегося разрядно-импульсной обработке (РИО), и грунта естественной структуры.

Показатели физико-механических свойств отобранных образцов грунта определялись в лаборатории Воронежского ГАСУ.

Для глинистых грунтов, подвергавшихся РИО, и естественной структуры, не подвергавшихся РИО, определялись:

**физические свойства** (плотность, естественная влажность, влажность на границах текучести и раскатывания);

**деформационная характеристика (**модуль деформации) - компрессионными испытаниями, проводившимися при природной влажности с доведением общей нагрузки до 0,3 МПа, ступенями по 0,1 МПа;

**прочностные характеристики** (удельное сцепление и угол внутреннего трения) - методом консолидированного среза с предварительным уплотнением при естественной влажности под нагрузками, действующими при сдвиге, ступенями по 0,1 МПа с доведением общей нагрузки до 0,3 МПа.

Прочностные и деформационные характеристики отобранных глинистых грунтов определялись в приборах конструкции института «ГИДРОПРОЕКТ».

Для песчаных грунтов, подвергавшихся РИО, и естественной структуры, не подвергавшихся РИО, определялись:

**физические свойства** (плотность, естественная влажность, гранулометрический состав);

**деформационная характеристика** (модуль деформации) - компрессионными испытаниями, проводившимися при природной влажности с доведением общей нагрузки до 0,3 МПа, ступенями по 0,1 МПа в приборах ГТ 0.1.1 конструкции ООО "НПП "ГЕОТЕК".

## 4. Исследование свойств глинистых грунтов, уплотненных по технологии РИТ

В шурфах на отметке 146,1 был встречен глинистый грунт светло-коричневого цвета, карбонатный, в шурфах 1 и 3 - твердый, в шурфе 2 – полутвердый. В сравнении с данными [1] грунт в большей степени соответствует ИГЭ № 3 – суглинок полутвердый. Можно предположить, что ИГЭ № 2 и 3 представляют собой один и тот же грунт, но имеющий разную влажность и соответственно консистенцию в результате техногенных воздействий.

Визуальным обследованием шурфов установлено, что в скважинах, заполненных цементным молоком, после обработки электрическими разрядами и схватывания цемента образовались стволы уплотнения с уширением в местах осуществления разрядно-импульсной об-

работки. Диаметр скважины составлял 150 мм, диаметр получившегося ствола - 200 мм, диаметр уширения - от 230 мм до 280 мм (рис. 4).

**Рис. 4.** Вид ствола уплотнения с уширением, обнаруженного в глинистом грунте в шурфе 1 на отм. 146,1м

Физико-механические характеристики грунтов по шурфам приведены в табл. 1.

Таблица 1

Физико-механические характеристики глинистых грунтов

| Место отбора проб | Наименование грунта | W, %, | $W_L$, % | $W_P$, % | $I_p$, % | $I_L$ | ρ, г/см$^3$ | $ρ_d$, г/см$^3$ | e | $S_r$ | C, кПа | φ, град | E, МПа |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Шурф 1 (грунт из зоны РИО) | Супесь твердая | 16,3 | 22,7 | 16,4 | 6,4 | -0,01 | 1,84 | 1,58 | 0,71 | 0,62 | 38 | 25 | 9,6 |
| Шурф 2 (грунт из зоны РИО) | Супесь пластичная | 16,4 | 22,7 | 16,1 | 6,7 | 0,02 | 1,91 | 1,64 | 0,65 | 0,68 | 35 | 24 | 17,5 |
| Средние значения по грунту из зоны РИО | Супесь твердая | 16,4 | 22,7 | 16,3 | 6,55 | 0 | 1,88 | 1,61 | 0,68 | 0,65 | 36,5 | 24,5 | 13,6 |
| Шурф 3 (грунт в естественном состоянии) | Суглинок твердый | 16,1 | 28,4 | 16,7 | 11,7 | -0,04 | 1,81 | 1,56 | 0,74 | 0,59 | 30 | 26,5 | 11,8* |

** Модуль деформации принят по паспорту компрессионных испытаний для ИГЭ №3 [1].*

Как показали результаты лабораторных исследований, в грунте, находящемся возле свай и подвергшемся действию РИТ-обработки, произошли изменения физических и механических свойств по сравнению с грунтом, находящимся в естественном состоянии. Так, влажность грунта в непосредственной близости от свай увеличилась на 1,5 %, плотность – на 3,9 %, плотность скелета грунта – на 3,8 %, коэффициент пористости уменьшился на 8 %. Интересно, что у суглинка, подвергшегося действию РИТ-обработки, изменились границы пластичности: влажность на границе раскатывания практически осталась без изменений, а влажность на границе текучести снизилась на 20 %. Это снижение влажности на границе текучести зафиксировано в грунтах, отобранных в обоих шурфах. В результате этого число пластичности снизилось до 6,55 %, и по ГОСТ 25100-2011 грунт должен классифицироваться как супесь. Очевидно, такое снижение влажности на границе текучести является следствием физико-химических процессов, происходящих в грунте при воздействии электрических импульсов, и требует дальнейшего исследования.

Механические характеристики грунтов после РИТ-обработки также претерпели некоторые изменения. Так, удельное сцепление увеличилось на 22 %, а угол внутреннего трения снизился на 7,5 %, модуль деформации увеличился на 15 % по сравнению с данными инженерно-геологических изысканий [1].

## 5. Исследование свойств песчаных грунтов, уплотненных по технологии РИТ

Визуальным обследованием шурфа установлено, что в скважинах, заполненных цементным молоком, после обработки электрическими разрядами и схватывания цемента образовались стволы уплотнения диаметром 200 мм без уширений при первоначальном диаметре скважины 150 мм (рис. 5). Физико-механические характеристики грунтов по шурфам приведены в табл. 2.

**Рис. 5.** Вид ствола уплотнения в песчаном грунте в шурфе на отм. 136,9 м

Таблица 2

Физико-механические характеристики песчаных грунтов

| Место отбора проб | Наименование грунта | W, %, | ρ, г/см³ | $\rho_d$, г/см³ | e | $S_r$ | E, МПа | Гранулометрический состав, % | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | > 2 | 2-0,5 | 0,5-0,25 | 0,25-0,10 | < 0,10 |
| Шурф 1 (из зоны РИТ-обработки) | Песок средней крупности, средней плотности, однородный, малой степени водонасыщения | 4,11 | 1,68 | 1,61 | 0,64 | 0,17 | 27 | 0 | 5,86 | 44,20 | 47,82 | 2,22 |
| На расстоянии 80 см от ствола КУ - грунт в естественном состоянии | Песок средней крупности, средней плотности, однородный, малой степени водонасыщения | 4,4 | 1,64 | 1,57 | 0,69 | 0,17 | 14 | 0,12 | 28,02 | 45,54 | 23,91 | 2,41 |

Результаты лабораторных исследований показали, что в грунте, находящемся возле стволов уплотнения и подвергшемся РИО, произошли изменения физических и механических свойств по сравнению в грунтом, находящимся в естественном состоянии.

Так, влажность грунта в непосредственной близости от свай уменьшилась на 6,5 %, плотность увеличилась на 2,4 %, плотность скелета грунта - на 2,5 %, коэффициент пористости уменьшился на 7,2 %.

Зафиксированы изменения в гранулометрическом составе песка. После РИТ-обработки содержание крупных фракций (2 - 0,5) уменьшилось с 28 % до 6 %, а мелких фракций (0,25 - 0,1) увеличилось с 24 % до 48 %.

Деформационные характеристики уплотненного грунта после РИТ-обработки существенно улучшились. Модуль деформации увеличился почти в 2 раза по сравнению с определенным нами для грунта естественной структуры.

Следует отметить, что исследования влияния РИТ-обработки на свойства песчаных грунтов были ранее описаны в работе А.А. Буданова [3]. Отмечено, что важнейшими факторами, влияющими на прочностные свойства песка, являются:

-гранулометрический состав песков;

-особенности материала-заполнителя порового пространства песков;

-причины техногенного характера.

Исследованиями А.А. Буданова [3] установлено, что гранулометрический состав песков, взятых вне зоны воздействия и в пределах возможного влияния РИО, изменился в сторону более мелких фракций. После РИО содержание частиц размером 0,25-0,5 мм уменьшилось во всех пробах с 63 % до 40...43 %, содержание фракций 0,5-1,0 мм уменьшилось с 23 % до 6-12 %, одновременно содержание фракции 0,1- 0,25 мм возросло с 10 % до 33-46 %. Изменение фракционного состава было установлено во всех пробах, взятых вблизи

от сваи-РИТ. Это согласуется и с данными наших исследований. По мнению А.А Буданова. [3], смещение зернового состава в сторону более мелких фракций в пробах песка можно объяснить действием ударных волн, волн сжатия и разряжения.

**Выводы**

1. Впервые исследовано влияние РИТ-обработки на глинистые грунты. Установлено, что в скважинах компенсационного уплотнения диаметром 150 мм, пробуренных в глинистом грунте (суглинок твердый просадочный), после обработки электрическими разрядами и схватывания цемента образовались стволы уплотнения диаметром 200 мм с уширением в уровне разрядов диаметром от 230 мм до 280 мм.

2. Установлено, что после РИТ-обработки в глинистом грунте произошли изменения физических свойств по сравнению в грунтом, находящимся в естественном состоянии: влажность грунта увеличилась на 1,5 %, плотность – на 3,9 %, плотность скелета грунта – на 3,8 %, коэффициент пористости уменьшился на 8 %. Зафиксировано изменение границ пластичности: влажность на границе раскатывания практически осталась без изменений, а влажность на границе текучести снизилась на 20 % . В результате этого число пластичности снизилось до 6,55 %, и по ГОСТ 25100-2011 грунт должен классифицироваться как супесь.

3. Выявлены изменения механических характеристик глинистых грунтов после РИТ-обработки: удельное сцепление увеличилось на 22 %, а угол внутреннего трения снизился на 7,5 %, модуль деформации увеличился на 15 %.
4. Установлено, что в скважинах компенсационного уплотнения в песчаном грунте образовались стволы уплотнения диаметром 200 мм без уширений при первоначальном диаметре скважины 150 мм.

5. В песчаном грунте также выявлены изменения физических свойств по сравнению с грунтом, находящимся в естественном состоянии: влажность уменьшилась на 6,5 %, плотность увеличилась на 2,4 %, плотность скелета грунта – на 2,5 %, коэффициент пористости уменьшился на 7,2 %.

6. Зафиксированы изменения в гранулометрическом составе песка. После РИТ-обработки содержание крупных фракций (2 – 0,5) уменьшилось почти в четыре раза, а мелких фракций (0,25 – 0,1) увеличилось более чем в 2 раза, что согласуется с данными других исследователей.

7. Установлено, что деформационные характеристики уплотненного песчаного грунта после РИТ-обработки улучшились: модуль деформации увеличился почти в 2 раза по сравнению с определенным нами для грунта естественной структуры.

8. Проведенными исследованиями выявлено реальное влияние РИТ-обработки на физико-механические характеристики как песчаных, так и глинистых грунтов. Воздействие электрических разрядов способствует увеличению плотности грунтов, а также улучшению их прочностных и деформационных характеристик. Таким образом, ком-

пенсационное уплотнение грунтов с помощью РИТ-технологии является перспективным направлением искусственного улучшения свойств грунтов в строительстве.

Библиографический список


1. Технический отчет по материалам инженерно-геологических изысканий на участке реконструкции ЦУМ-Воронеж с пристройкой и газовой котельной (газовой энергетической установкой) в многофункциональный комплекс по адресу: г. Воронеж, пр. Революции 38. - Воронеж, 2011.
2. СП 11-05-97. Инженерно-геологические изыскания для строительства. – М., 1998.
3. Буданов, А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния маловлажного песчаного грунта вокруг свай-РИТ: автореф. дис. …канд. техн. наук /А.А. Буданов. - М., 2006. – 20 с.


Reference


1. Technical Report on materials of engineering and geological researches on the site of reconstruction CUM -Voronezh with an additional building and gas boiler (gas power plant) in the multifunctional complex in 38, Revolution prospect, Voronezh. -. Voronezh, 2011.
2. Building Regulations 11- 05-/97. Geological engineering surveys for construction. - M., 1998.
3. Budanov, AA. Investigation of deflected mode of not so wet sandy soil around the pile - RIT review by the author, thesis … PhD of Tech. Sc./ A.A. Budanov. - M., 2006. – 20 p.



**Ключевые слова:** разрядно-импульсная технология (РИТ), компенсационное уплотнение, электрический разряд, околоскважинное пространство, цементное молоко.

**Keywords:** discharge-impulse technology (RIT), compensating consolidation seal, electric discharge, borehole environment, laitance.

УДК 624.131.5

*Тамбовский государственный технический университет*
*Д-р техн. наук, проф. кафедры «Конструкции зданий и сооружений»*
*В.В. Леденев*
*Россия, г. Тамбов, тел.: 8(4752)63-03-80*
*e-mail: kzis@nnn.tstu.ru*
*Аспирантка кафедры «Конструкции зданий и сооружений», преподаватель Ханойского архитектурного университета, Вьетнам*
*Тью Тхи Хоанг Ань*
*e-mail: chuhoanganh2607@yahoo.com*

*Tambov State Technical University*
*D.Sc. in Engineering, Prof. of Building and Installations Constructions*
*V.V. Ledenev*
*Russia, Tambov, tel.: 8(4752)63-03-80*
*e-mail: kzis@nnn.tstu.ru*
*Postgraduate of Building and Installations Constructions*
*Chu Thi Hoang Anh*
*Lecturer of Hanoi Architectural University*
*e-mail: chuhoanganh2607@yahoo.com*

В.В. Леденёв, Тью Тхи Хоанг Ань

# ВЛИЯНИЕ НАГРУЗКИ И ГЛУБИНЫ ЗАЛОЖЕНИЯ НА ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ МГНОВЕННОЙ ОСИ ВРАЩЕНИЯ ФУНДАМЕНТА

Рассматривается перемещение жесткого фундамента как вращение вокруг мгновенных центров или осей, координаты которых зависят от многих параметров, в том числе от величины нагрузки и глубины заложения фундамента, а также рассмотрена зависимость координат мгновенной оси вращения от этих параметров. Установлены фунциональные зависимости относительных координат мгновенной оси вращения от величины нагрузки и эксцентриситета приложения силы. Показано влияние различных факторов на характер перемещения фундаментов. Результаты могут быть использованы при разработке практических методов расчета.

.

V.V. Ledenev, Chu Thi Hoang Anh

# LOAD AND DEPTH OF FOUNDATION EFFECT ON RELATIVE COORDINATES OF INSTANTANEOUS AXIS OF ROTATION

There is analysed the deplacement of rigid foundation as rotation round instantaneous centers or axis, which coordinates depend on variousparameters including load intensity and depth of foundation; the dependence on instantaneous rotation axis coordinates on these parameters is also under consideration/ Functional dependences of instantaneous rotation axis relative coordinates on load intensity and eccentricity of force application are detected. The effect of different factors on the nature of foundation displacement is shown. The results can be used during experience calculation method preparation.

## Введение

Перемещение жесткого фундамента рассматривается как вращение вокруг мгновенных центров или осей (случай плоской деформации). При действии плоской системы сил оси вращения расположены в одной плоскости, например xoz. Для различных комбинаций исследуемых переменных F, F*, d, h, e, δ, t, $\overline{x_c}$, $\overline{z_c}$ и др. можно построить поле координат осей вращения. Здесь обозначено: F – нагрузка; F*= F/ $F_u$ – уровень нагрузки; $F_u$ – разрушающая нагрузка; d – диаметр фундамента; h – глубина расположения подошвы фундамента; e,δ – эксцентриситет и угол наклона силы; t – время;

© Леденёв В.В., Тью Тхи Хоанг Ань, 2013

$$\overline{x_c} = x_c/R = s/(i.R)\ ;\ \overline{z_c} = z_c/h = u/(i.h),$$

где R – радиус фундамента; s,u – осадка и горизонтальное перемещение центра тяжести фундамента в уровне поверхности.

Анализ результатов экспериментов удобно рассматривать в относительных величинах, например, $\lambda = h/d$ – относительное заглубление фундамента; $e_0 = e/R$ – относительный эксцентриситет.

В [3] приведено поле координат осей вращения для случая плоской деформации и винклеровской модели основания с постоянной величиной коэффициента постели.

Фундаменты возводят на основании естественной или нарушенной структуры с набором начальных физико-механических характеристик (c, φ, E, ρ, w ...). В общей случае среда может быть анизотропная.

При возрастании нагрузки отдельные области основания проходят стадии уплотнения, разуплотнения, упрочнения, течения, выпора, формирования плоскостей скольжения и др. Все начальные величины параметров изменяются. Кроме того, с разной скоростью проходят реологические процессы. Некоторые принципы, например суперпозиции, неприменимы. Исследовать все это экспериментально чрезвычайно сложно. Известны лишь отдельные работы в этом направлении (изучение полей плотности грунтового основания Ю.Н. Мурзенко, 1970 и В. В. Леденёвым [5]).

Происходящие в основании процессы влияют на величины перемещений фундамента, распределения контактных напряжений, зон отрыва поверхности фундамента от основания, положения координат мгновенных осей вращения, величины параметров нагружения ($e_0$ и δ) и т.д. Учесть все это в расчетах на представляется возможным. К тому же влияющие параметры взаимосвязаны и взаимозависимы [1,2].

По материалам экспериментов В. В. Леденёва ранее выполнены обобщения [4] . Ниже приведены дополнительные сведения о положениях координат мгновенных осей вращения.

## 1. Влияние нагрузки на относительные координаты мгновенной оси вращения

Рассмотрим результаты экспериментов, описанные в [5, с. 97-99] и выполненные с тензомоделью d = 50 см; h = 180 см; $e_0 = 0{,}4$.

Вычисленные относительные координаты мгновенных осей вращения приведены в табл. 1. Для них получены аппроксимирующие функции $\overline{x_c} = \overline{x_c}$ (P) и $\overline{z_c} = \overline{z_c}$ (P).

Таблица 1

Значения относительных координат мгновенной оси вращения при разном значении нагрузки при d = 50 см; h = 180 см; $e_0 = 0{,}4$

| Нагрузки P , кН | Относительные координаты мгновенных осей вращения | |
|---|---|---|
| | $\overline{x_c}$ | $\overline{z_c}$ |
| 10 | 8,1 | 0,7 |
| 12 | 7,6 | 0,7 |
| 14 | 5,6 | 0,69 |
| 16 | 6,4 | 0,68 |
| 18 | 5,2 | 0,66 |
| 20 | 4,8 | 0,66 |

Зависимость между нагрузками и относительными координатами мгновенной оси вращения приведена на рис. 1.

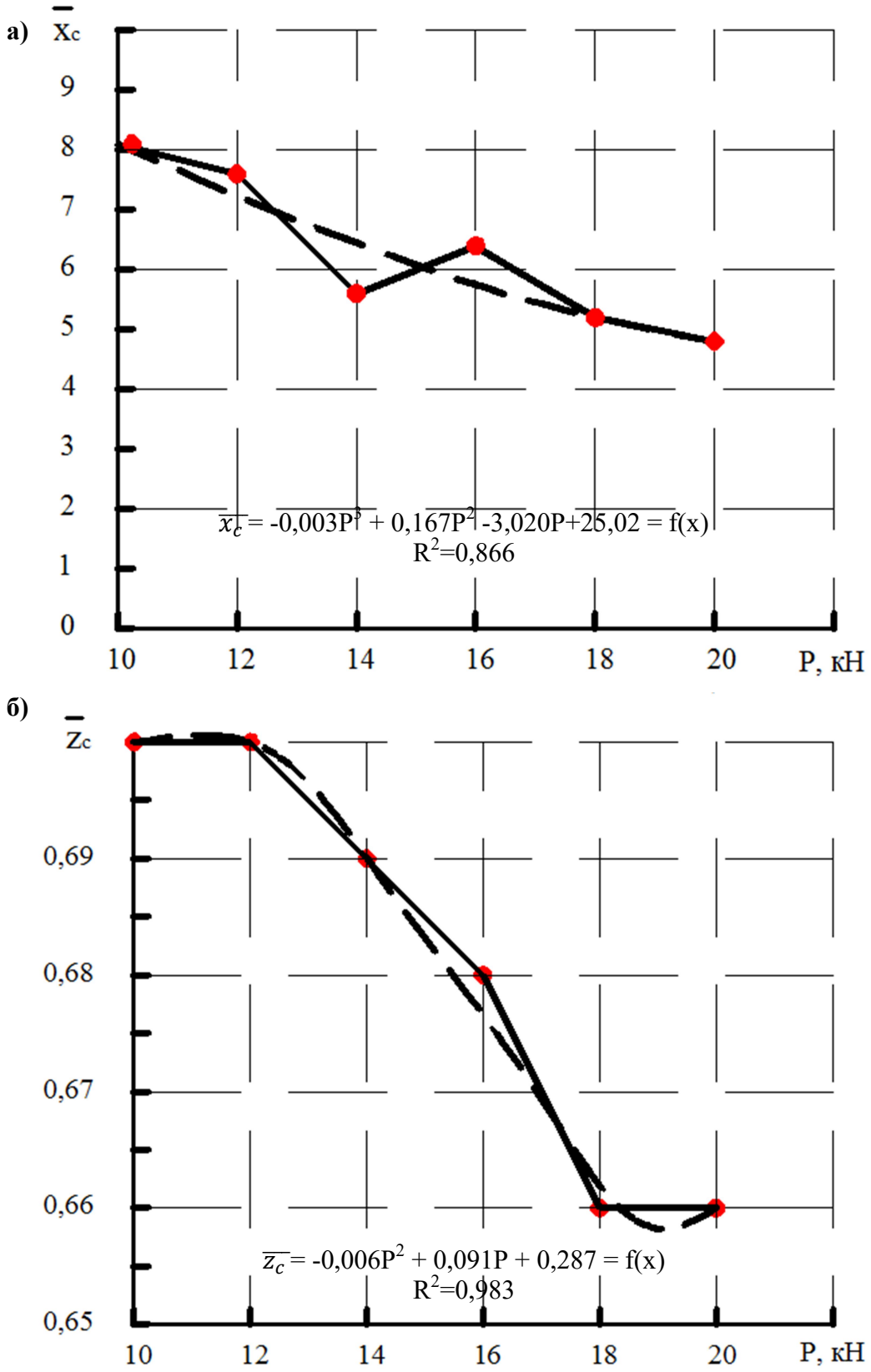



**Рис.1.** Графики зависимости между нагрузками и относительными координатами мгновенной оси вращения $\overline{x_c}$ (а) и $\overline{z_c}$ (б)

## 2. Влияние глубины заложения фундаментов на относительные координаты мгновенной оси вращения

В.В. Леденёвым проведена [5] серия испытаний тензомодели диаметром 80 см, высотой 80, 120, 160 и 240 см при относительном эксцентриситете вертикальной нагрузки $e_0$ = 0,5. Зависимости между глубинами заложения и относительными координатами мгновенной оси вращения приведены в табл. 2 и на рис. 2.

Таблица 2

Значения относительных координат мгновенной оси вращения при разной глубине заложения и d = 80 см; $e_0$ = 0,5

| Глубина заложения h,см | Нагрузки P, кН | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 16 | | 20 | | 24 | |
| | $\overline{x_c}$ | $\overline{z_c}$ | $\overline{x_c}$ | $\overline{z_c}$ | $\overline{x_c}$ | $\overline{z_c}$ |
| 80 | 4,61 | 1,1 | 4,39 | 1,05 | 4,04 | 0,94 |
| 120 | 5,73 | 0,92 | 5,51 | 0,9 | 5,07 | 0,89 |
| 160 | 7,53 | 0,72 | 6,81 | 0,71 | 6,19 | 0,7 |
| 240 | 10,1 | 0,66 | 9,43 | 0,68 | 8,14 | 0,64 |

Аппроксимирующие функции $\overline{x_c}$ =$\overline{x_c}$ (h) и $\overline{z_c}$ = $\overline{z_c}$ (h) имеют вид:

при P=16 кН

$$\overline{x_c} = -0{,}000002h^3 - 0{,}097h + 7{,}48;$$

$$\overline{z_c} = 0{,}0000003h^3 + 0{,}007h + 1;$$

при P=20 кН

$$\overline{x_c} = -0{,}0000003h^3 + 0{,}002h + 3{,}21;$$

$$\overline{z_c} = 0{,}0000003h^3 + 0{,}011h + 0{,}76;$$

при P=24 кН

$$\overline{x_c} = -0{,}0000004h^3 + 0{,}005h + 2{,}81;$$

$$\overline{z_c} = 0{,}0000005h^3 + 0{,}027h - 0{,}12.$$

В. В. Леденёвым и М. Е. Соболевским [3] исследовался характер перемещений плоского жесткого квадратного штампа при действии в общем случае внецентренной наклонной силы. Получили положение координат центров вращения (рис. 3) при разных положениях силы вдоль оси x: $r = M/F_y$ и разных наклонах силы: $c = F_x/F_y$, где M – момент реакций относительно центра штампа на уровне поверхности, $F_x$ и $F_y$ – сумма проекций реакций на ось x и y.

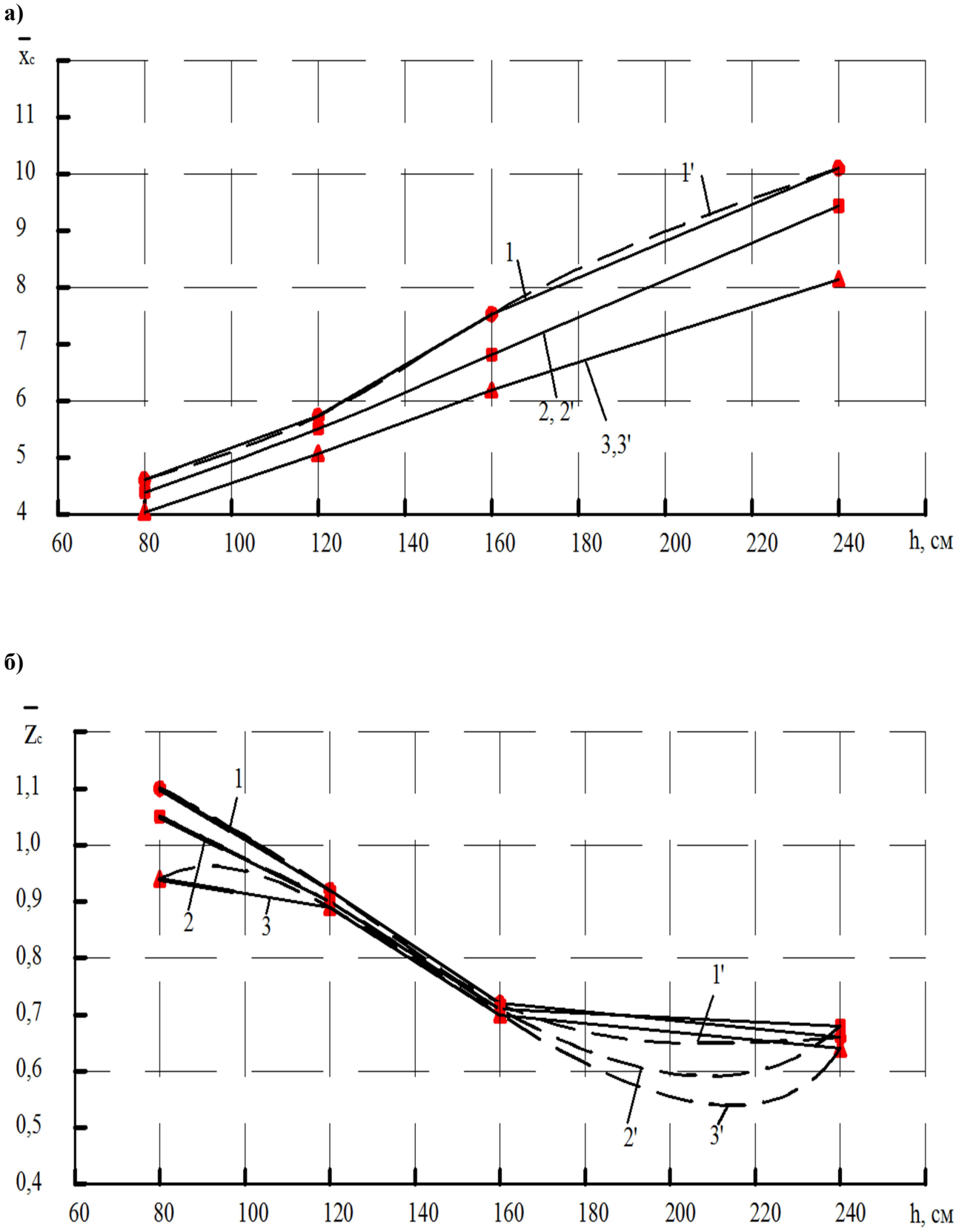



**Рис. 2.** Графики зависимости между глубинами заложения и относительными координатами мгновенной оси вращения $\overline{x_c}$ (а) и $\overline{z_c}$ (б) при P (kH): 16 (1,1$^{/}$), 20 (2,2$^{/}$), 24 (3, 3$^{/}$)

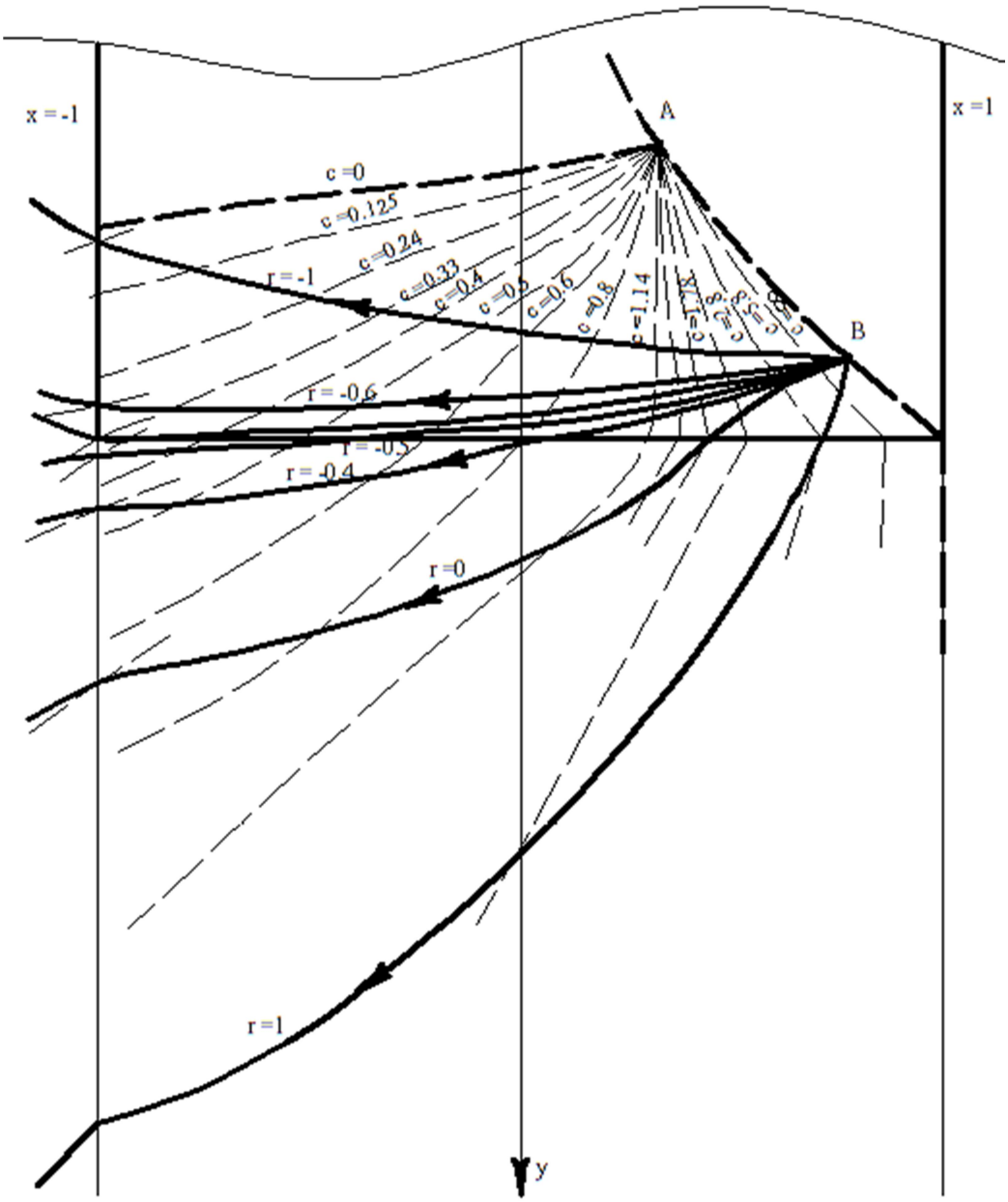



**Рис. 3.** Положение координат центров вращения
при разных соотношениях главных векторов

## Выводы

При увеличении нагрузки значения относительных координат мгновенной оси вращения уменьшаются;

при увеличении глубины заложения фундамента значения вертикальных относительных координат мгновенной оси вращения уменьшаются, а горизонтальных относительных координат увеличиваются;

полученные функциональные зависимости могут быть использованы при расчете и проектировании.

Ограничение перемещений фундаментов в местах сопряжения с расположенными выше конструкциями приводит к изменению положения осей вращения и сопутствующих параметров, например, эпюр контактных напряжений [6].

Библиографический список


1. Ильюшин, А.А. Механика сплошной среды: учебник /А.А. Ильюшин. – М.: МГУ, 1978. - 287 с.
2. Карасев, О.В. Исследования работы одиночных буронабивных свай при разном сочетании нагрузок/ О.В. Карасев, П.П. Таланов, С.Ф. Бенда // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1977. - № 3. - С. 19-21.
3. Леденёв, В.В. Исследование вращения плоского заглубленного фундамента при действии наклонной эксцентричной силы / В.В. Леденёв, М.Е. Соболебский // Рук. деп. в ВИНИТИ. - И1529-80. - С. 1-20.
4. Леденёв, В.В. Анализ лабораторных опытов с моделями фундаментов/ В.В. Леденёв, С.М. Алейников// Исследования свайных фундаментов. - Воронеж: ВГУ, 1988. - С. 126-129.
5. Леденёв, В.В. Экспериментальное исследование оснований заглубленных фундаментов: монография / В.В. Леденёв. - Воронеж: ВГУ, 1985. - 156 с.
6. Леденёв, В.В. Расчет несущей способности буронабивных фундаментов (с учетом касательных напряжений)/ В.В. Леденёв, Тью Тхи Хоанг Ань. - Воронеж-Липецк: РААСН, ЛГТУ. - 2008. - № 7. - С. 224-232.
7. Шапиро, Д.М. Теория и расчетные модели оснований и объектов геомеханики: монография / Д. М. Шапиро. - Воронеж: ИПЦ «Научная книга», 2012. - 164 с.


References


1. Ilyushin, A.A. Mechanics of continuous system: textbook /A.A. Ilyushin. -M.: MGU, 1978. - 287 p.
2. Kasaroyv, O.V. Studies of single drilled pile with a diverse mix of loads / O.V. Karasyov, P.P. Talanov, S.F. Benda // Basement, foundations and soil mechanics.-1977. - № 3. - P. 19-21.
3. Ledenev, V.V. The study of rotation of deep plane foundation under the action of an inclined eccentric force/ V.V. Ledenev, M.E. Sobolebsky // Head of Dep. In VINITI. - I1529-80. - P. 1-20.
4. Ledenev, V.V. Analysis of laboratory experiments with models of foundations / V.V. Ledenev, S.M. Aleinikov / / Study of pile foundations. - Voronezh, Voronezh State University, 1988. - P. 126-129.
5. Ledenev, V.V. Experimental study of deep foundations bases / study/ V.V. Ledenev, Voronezh. VGU, 1985. - 156 p.
6. Ledenev, V.V. Calculation of bearing capacity of pier foundations (taking into account the tangential stresses)/ V.V. Ledenev, Chu Thi Hoang Anh.-Voronezh-Lipestk: Journal of Russian Academy of Architecture and Building Sciences. - 2008. - № 7. – P. 224-232.
7. Shapiro, D.M. The theory and computational models of thefoundations and Geomechanics: objects: monograph / D.M. Shapiro. - Voronezh: IPZ"Science Book", 2012. – 164 p.



**Ключевые слова:** фундамент, основание, нагрузки, мгновенная ось вращения, глубина заложения.

**Keywords:** foundation, base, loads/ stresses, instantaneous axis of rotation, basement depth.

УДК 624.014.078

*Тамбовский государственный технический университет*
*Д-р техн. наук, проф.кафедры «Конструкции зданий и сооружений»*
*В.В. Леденев*
*Россия, г. Тамбов, тел.: 8(4752)63-03-80*
*e-mail: kzis@nnn.tstu.ru*
*Аспирантка кафедры «Конструкции зданий и сооружений» ,преподаватель Ханойского архитектурного университета, Вьетнам*
*Тью Тхи Хоанг Ань*
*e-mail: chuhoanganh2607@yahoo.com*

*Tambov State Technical University*
*Dr.of tech.sc.Sc., Prof. of Dep/ of Building and Sstructure Constructions*
*V.V. Ledenev*
*Tambov, Russia, tel.: 8(4752)63-03-80*
*e-mail: kzis@nnn.tstu.ru*
*Postgraduate of Dep/ of Building and Sstructure Constructions, Lecturer of Hanoi Architectural University*
*Chu Thi Hoang Anh*
*e-mail: chuhoanganh2607@yahoo.com*

В.В. Леденев, Тью Тхи Хоанг Ань

# РАСЧЕТ БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ С УЧЕТОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ СИЛ

Дополнительные силы Q в гибкой связи приводят к значительному увеличению нагрузки на болт по сравнению с относительно жестким соединением. Эти силы должны быть учтены при расчете болтовых соединений. В статье представлена наиболее широко используемая модель и метод расчета дополнительных сил для Т-образных болтовых соединений.

V.V. Ledenev, Chu Thi Hoang Anh

# DESIGN OF BOLT JUNCTIONS CONSIDERING SECONDARY FORCES

Secondary forces Q in flexible connector lead to significant stress increasing onto bolt in comparison with relatively rigid connection. These forces are to be considered while designing bolt connections. The most widely used models and methods of secondary forces analysis for T- shaped bolt connections are presented in the article.

.

## Введение

Болтовые соединения металлических конструкций широко применяют на практике. Жесткость соединяемых элементов не учитывают. Однако экспериментальные исследования европейских [2] и американских [1] ученых показали, что в случае гибких связей возникают дополнительные силы, получившие название «Prying action”.

Ниже рассмотрено их влияние на примере соединения таврового профиля к стенке колонны двумя болтами.

© Леденев В.В., Тью Тхи Хоанг Ань, 2013

**Концепция дополнительных сил.** Введем понятие приведенной ширины таврового профиля «p»:

$$p = 2W_T/n_b, \quad (1)$$

где $W_T$ – ширина полки тавра, присоединяемого к стенке колонны, параллельной стенке таврового профиля; $n_b$ – число болтов в соединении.

Дополнительная сила Q появляется при деформировании полки (рис. 1). Она добавляется к силе, действующей на болт, т.е. B = T + Q. Сила Q уменьшается с уменьшением расстояния между осями болтов $g_t$ или с увеличением толщины полки тавра $t_f$. Для недеформируемых тавровых профилей B = T. Экспериментальные и теоретические исследования [1, 2] показали, что использование модели Струка и Бэка [2] проводит к меньшим расхождениям между расчетными и экспериментальными данными.

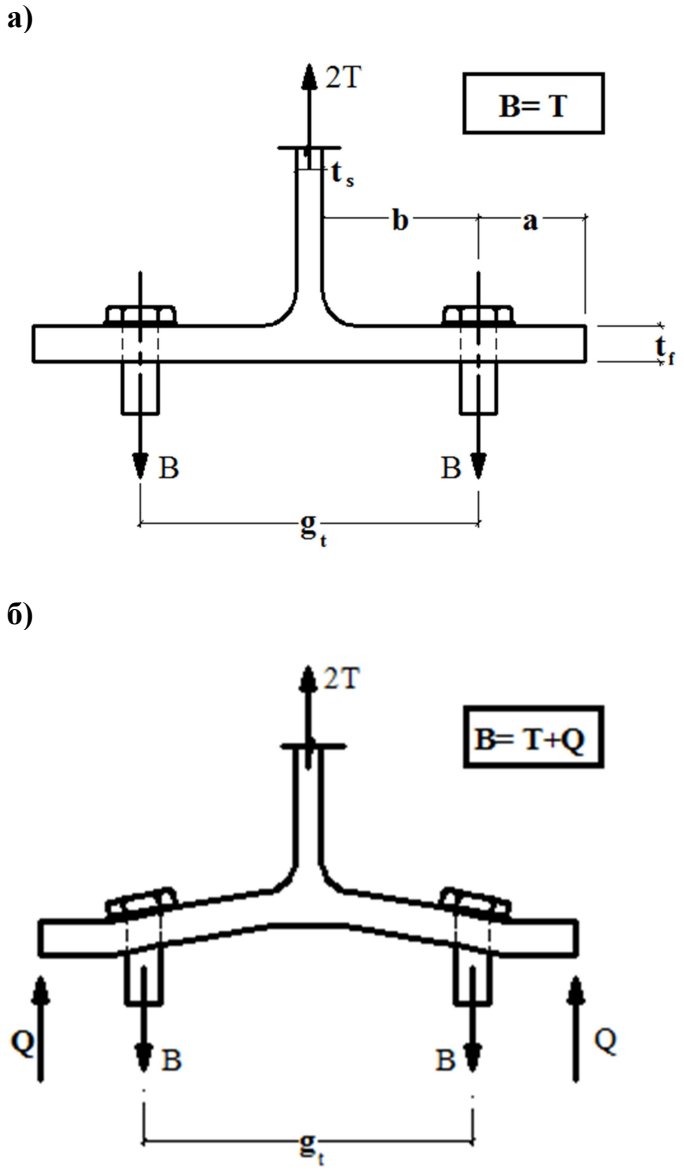



**Рис. 1.** Эскиз жесткого (а) и гибкого (б) соединений таврового профиля к металлическим листам двумя болтами:
2T – растягивающая сила, действующая на тавровый профиль (в общих случаях действует сила $T*n_b$); B – растягивающая сила, действующая на каждый болт; Q – дополнительная сила; $g_t$ – расстояние между осями болтов; a - расстояние от грани полки тавра до оси болта; b – расстояние от грани стенки тавра до оси болта

**Расчетная модель Струка и Бэка [2]**. Основа её разработана в 1969 году. Затем усовершенствована Кулаком, Фишером и Струком в 1987 году. В настоящее время она является наиболее общепринятой и используется в Американском Стандарте LRFD (AISC, 1993); Канадском (CISC, 1997); Европейском (EUROCODE 3), а также в различных институтах разных стран.

Применительно к тавровому сечению модель может быть представлена следующим образом (рис. 2).

Согласно этой модели растягивающая сила приложена к краю болта так, что

$$a' = a + d/2; b' = b - d/2 , \quad (2)$$

где d – диаметр болта.

Распределение нормальных контактных напряжений между гайкой и соединяемым элементом зависит от жесткости гайки, величины изгиба полки и диаметра болта. Оно неравномерно (рис. 3).

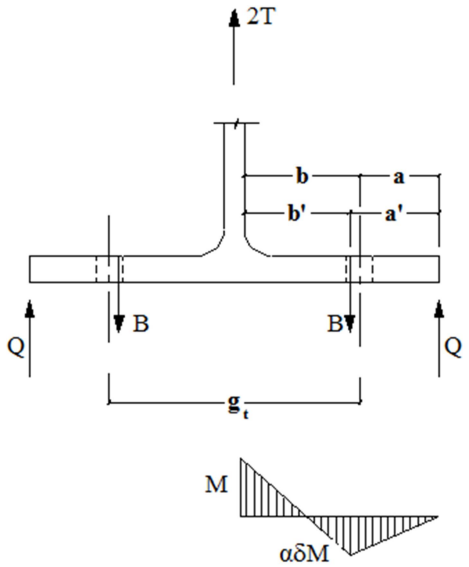



**Рис. 2.** Расчетная модель Струка и Бэка

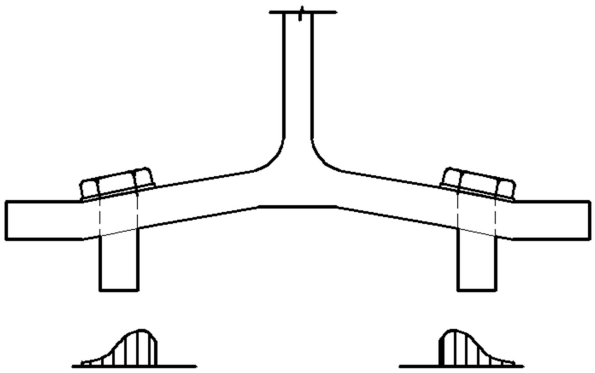


**Рис. 3.** Распределение контактных напряжений на гайке болта

В случаях, когда расстояние от грани полки тавра до оси болта «а» не превышает 1,25b, можно считать, что сила Q приложена на краю полки тавра.

Параметр «α» определяется соотношением момента по оси болта к моменту у стенки тавра и изменяется от 0 до 1. При $\alpha = 1$ имеет место жесткое соединение тавра к стенке колонны ; $\alpha = 0$ гибкое. При расчете значения параметра α не ограненны. Если $\alpha \geq 1$, полка тавра изгибается по кривой второй степени, а Q достигает максимума. В случае, когда $\alpha \leq 0$, полка тавра не изгибается, а Q=0. При $0 \leq \alpha \leq 1$ полка тавра изгибается с появлением дополнительной силы (Тхорнтон, 1985) [3].

Запишем уравнения равновесия моментов:

$$Tb' = (1 + \alpha\delta)M, \quad (3)$$

$$\delta = 1 - d_0/p, \quad (4)$$

где δ – отношение площади сечений с отверстием и без него; $d_0$ – диаметр отверстия под болт; M – момент в сечении стенки тавра.

Уравнения равновесия у края полки имеют вид:

для момента $$Qa' = \alpha\delta M. \quad (5)$$

для сил $$B = T + Q. \quad (6)$$

Из (3) получаем

$$\alpha = \frac{1}{\delta}\left(\frac{Tb'}{M} - 1\right). \quad (7)$$

Когда критическое состояние достигается, момент M является пластическим:

$$M_p = \frac{pt_f^2}{4} f_y, \quad (8)$$

где $f_y$ – расчетное сопротивление стали тавра растяжению; $t_f$ – толщина полки тавра.

Подставляя (8) в (7), получим

$$\alpha = \frac{1}{\delta}\left(\frac{4Tb'}{pt_f^2 f_y} - 1\right). \quad (9)$$

Из (5) и (4) получим

$$Q = T\left(\frac{\delta\alpha}{1+\delta\alpha}\right)\frac{b'}{a'}. \quad (10)$$

Расчетное усилие полки тавра принимается минимальным из значений:
критического усилия стали полки

$$T = \frac{(1+\delta)}{4b'}\left(pf_y t_f^2\right); \quad (11)$$

общего состояния потери равновесия

$$T = \frac{B_n a'}{a'+b'} + \frac{pf_y t_f^2}{4(a'+b')}; \quad (12)$$

отрыва болтов

$$T = B_n, \quad (13)$$

где $B_n$ – расчетное сопротивление болта растяжению.

Предельное состояние полки тавра с болтами с учётом дополнительной силы достигается, когда предельная толщина полки $t_c$ и предельная сила равновесия, действующая на стенки тавра $T_0$, определяются следующими зависимостями:

$$t_c = \sqrt{\frac{4B_n b'}{pf_y}}; \quad (14)$$

$$T_0 = \frac{B_n}{1 + \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)\left(\frac{b'}{a'}\right)}. \quad (15)$$

**Порядок расчета болтовых соединений с учётом дополнительной силы**

1. Определяем величины a’, b’ и p по формулам (2) и (1). При этом a’ ≤ 1,25b’.
2. Определяем величины параметров δ и α по формулам (4) и (7) при 0≤ α≤1 .
3. Определяем величину дополнительной силы по формуле (10).
4. Определяем усилие, действующее на каждый болт, по формуле (6).

**Пример расчета**

Проверить прочность болтового соединения стального тавра к колонне при следующих данных: 2T = 76 kN; d = 20 mm; $d_0$ = 22 mm; класс прочности 4.8, сталь $f_y$ = 210 N/mm$^2$ = 2100 daN/cm$^2$.

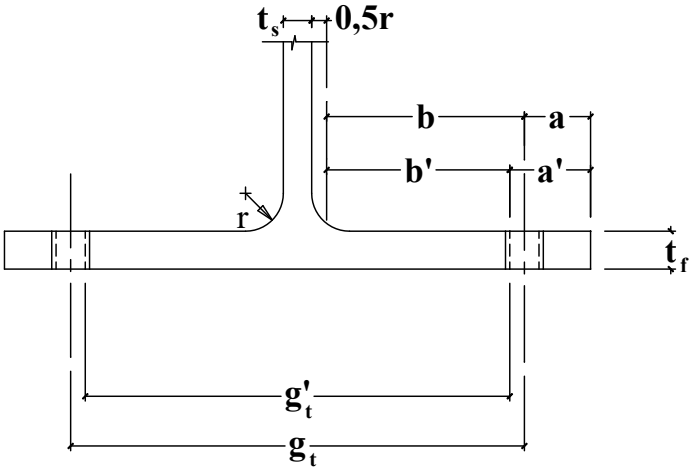



**Рис. 4.** Сечение тавра

Размеры тавра: $g_t$ = 300 mm; a = 50 mm; $t_s$ = 16,5 mm; $t_f$ = 27,1 mm; r = 30 mm; p = 100 mm.

**Решение задачи без учета дополнительной силы**

Сила, действующая на каждый болт: B = T= 38kN= 3800 daN.

Расчетное сопротивление болтовых соединений 4.8 класса на растяжение

$$f_{tb}= 160\ N/mm^2=1600\ daN/cm^2.$$

Площадь сечения болта нетто диаметром d=20 mm: $A_{bn}$=2,45 cm$^2$.

Расчетное усилие, воспринимаемое одним болтом из условия работы на растяжение:

$$B_n= A_{bn}f_{tb}= 2,45*1600=3920\ daN.$$

Условие B < $B_n$ выполняется.

**Решение с учётом дополнительной силы**

Исходные данные:

p = 10 cm;

$t_{s,eff}$ = 16,5+30 = 46,5 mm;

b = (300-46,5)/2 = 126,75 mm;

b'= b-d/2= 126,75 – 20/2= 116,75 mm; a = 50 mm;

a'= a + d/2= 50+20/2 = 60 mm< 1,25b'= 145,9 mm;

$$M = \frac{pt_f^2}{4} f_y = \frac{10*2,71^2}{4} 2100 = 38556\ daNcm;$$

$\delta$ = 1- $d_0$/p= 1- 2,2/10= 0,78;

$$\alpha = \frac{1}{\delta}\left(\frac{Tb'}{M} - 1\right) = \frac{1}{0,78}\left(\frac{3800*11,675}{38556} - 1\right) = 0,19 < 1\ .$$

Определяем дополнительную силу:

$$Q = T\left(\frac{\delta\alpha}{1+\delta\alpha}\right)\frac{b'}{a'} = 3800\left(\frac{0,78*0,19}{1+0,78*0,19}\right)\frac{11,675}{6} = 1145\ daN\ .$$

Действующая сила на каждый болт: B = Q+T = 3800+1145 = 4945 daN.

Расчетное сопротивление болтовых соединений 4.8 класса на растяжение:

$$f_{tb}= 160\ N/mm^2=1600\ daN/cm^2.$$

Расчетное усилие, воспринимаемое одним болтом из условия работы на растяжение:

$$B_n= A_{bn}f_{tb}= 2,45*1600=3920\ daN.$$

Условие $B_n < B$ не выполняется.

Перегрузка $\Delta = (4945- 3800)/3800*100\% = 30,1\ \%$.

**Выводы**

Стандартным проектированием металлических конструкций Вьетнама TCXDVN 338: 2005 [4] и России [5] при расчете болтового соединения между стальным тавром и колонной не учитываются дополнительные силы. Расчеты и эксперименты показывают, что этот эффект увеличивает усилие на болт [1]. Так, в примере расчета оно увеличивается на 30,1 %. Расчет без учета дополнительных усилий может привести к разрушению болтов из-за недостаточной несущей способности. В статье описана методика расчета болтовых соединений в соответствии со стандартом США (AISC) на основе более точной модели. Она может использоваться инженерами при проектировании болтовых соединений в металлических конструкциях рам.

Библиографический список


1. Джеймс, А. Свенсон. Предельное сопротивление болтовых Т-образных соединений при использовании «prying» модели/ А. Свенсон Джеймс// Инженерный журнал. – Вып. 3. - 2002. - С. 136-147.
2. Струк, Дж. Х.А. Испытания болтовых Т-образных соединений балки к колонне: Доклад 6-69-13, Стевин лаборатории/ Дж. Х.А. Струк, Дж. де Бэк/ Технологический университет Делфта. - Делфт, Нидерланды, 1969.
3. Тхорнтон, В.А. Основные принципы модели (prying action)/В.А. Тхорнтон// Инженерный журнал Американского института стальных конструкций. – Т. 22. - № 2. - 1985. С. 67-75.
4. Стальные конструкция: Вьетнамский Стандартный дизайн TCXDVN 338. – Вьетнам, 2005.
5. СНиП II- 23-81*. Стальные конструкции/ Госстрой России. - М.: ГУП ЦПП, 2003. - 90 с.


References


1. James A. Swenson . Limit strength of bolt T-shaped connections while using “prying” models/ A. Swenson James// Engineering journal, - Issue 3rd. - P. 136-147.
2. Struck, J. X. A. Testing on bolted T- shaped connections with column. Report 6-69-13, Stevin Laboratory/ J.X.A. Struck de back/, Delft University of Technology, Delft, the Netherlands. 1969.
3. Thornton, V.A., (1985). Main behavior of model (prying action) V.A Thornton// Engineering journal of American Institute of Metal Constructions, Vol.22 – No 2. - 1985. - P. 67-75.
4. Metal Constructions – Vietnam Standard Design TCXDVN 338. - Vietnam, 2005.
5. Duilding standards and regulations II-23-81.. Metal Constructions/ Gosstroi of Russia.- Moscow.-2003. – 90 p.



**Ключевые слова**: дополнительные силы, болтовые Т-образные соединения.

**Keywords**: prying force, bolted T-stub connections.

УДК 624.071.2:004

*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
*Аспирант кафедры металлических конструкций и сварки в строительстве*
*В.В. Еремин*
*Россия, г. Воронеж, тел.: 89601331312*
*e-mail: 1331312@mail.ru*

*The Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering*
*Postgraduate of Department of Metal Structures and Welding in Construction*
*V.V. Eremin*
*Russia, Voronezh, tel.: 89601331312*
*e-mail: 1331312@mail.ru*

В.В. Еремин

# АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВИСЯЧЕЙ КОМБИНИРОВАННОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ ПВК ЛИРА

С использованием проектно-вычислительного комплекса (ПВК) ЛИРА выполнен расчет напряженно-деформированного состояния висячей комбинированной системы производственного здания ремонтной мастерской с учетом геометрической нелинейности под действием сосредоточенной вертикальной нагрузки в четверти и середине пролетов. Установлены значения прогибов плоской рамы и пространственного каркаса, выполнено сравнение экспериментальных значений прогиба с теоретическими значениями прогибов по ПВК ЛИРА.

V.V. Eremin

# ANALYSIS OF DEFLECTED MODE OF SUSPENSION COMBINED SYSTEM BASED ON SOFTWARE COMPUTER SYSTEM LIRA

The design of deflected mode of suspension combined system of process building of repair shop is completed with account of geometric nonlinearity under the effect of concentrated vertical stress in span quater and midspan. it is done with application of software computer system Lira. Values of bending deflections of flat frame and space frame were found, and using of software computer system LIRA there were compared experimental and theoretical values of bending deflection.

Стремление обеспечить лучшее распределение местных нагрузок от кранов в производственных зданиях привело к необходимости использования в качестве несущих висячих схем комбинированные конструкции типа “балка-нить” путем объединения их продольными вертикально-жесткими элементами – связями или балками подвесных путей. Подобные схемы изучались на кафедре металлических конструкций Воронежского инженерно-строительного института Жандаровым М. А. [1], Сигаевым И. П. [2] и Колодежновым С.Н. [3]. Последними двумя авторами был разработан проект, по которому осуществлено строительство опытного висячего пространственного покрытия производственного здания для ремонта горной техники, которое располагается в поселке Стрелица в 25 км от областного центра – г. Воронежа (рис. 1).

Покрытие здания представляет собой перекрестную систему висячих комбинированных ригелей плоских поперечных рам с продольными стальными неразрезными фермами, в котором местные крановые нагрузки распределяются на большую группу элементов покрытия.

© Еремин В.В., 2013

**Рис. 1.** Общий вид производственного здания

При проектировании несущего каркаса авторами проекта было учтено, что изготовление конструкций должно производиться из имеющихся на заводе прокатных профилей [2]. Балка ригеля рамы, подкрепленная нитью, выполнена из двутавра №36м по ГОСТ 19425-74. Канат закрытого типа диаметром 30,5 мм по ГОСТ 3090-73. Стрела провеса кабеля f = 1,875 м. Узлы крепления подвесок расположены на кривой, описываемой квадратной параболой. Обеспечение заданного параболического очертания каната на завершающей стадии монтажа достигается путем регулирования длин подвесок, приведенных на рис. 2, с помощью резьбы на их концах. Девять подвесок из круглой стали по ГОСТ 2590-88 диаметром 25 мм расположены по длине пролета с шагом 1,5 м. План и разрез каркаса показаны на рис. 3. Продольные вертикальные связи расположены в четвертях пролета ригеля. В плоскости вертикальных связей смонтированы пути для продольного передвижения подвесного кранового оборудования из двутавра №30 м.

**Рис. 2.** Конструкция шатра производственного здания

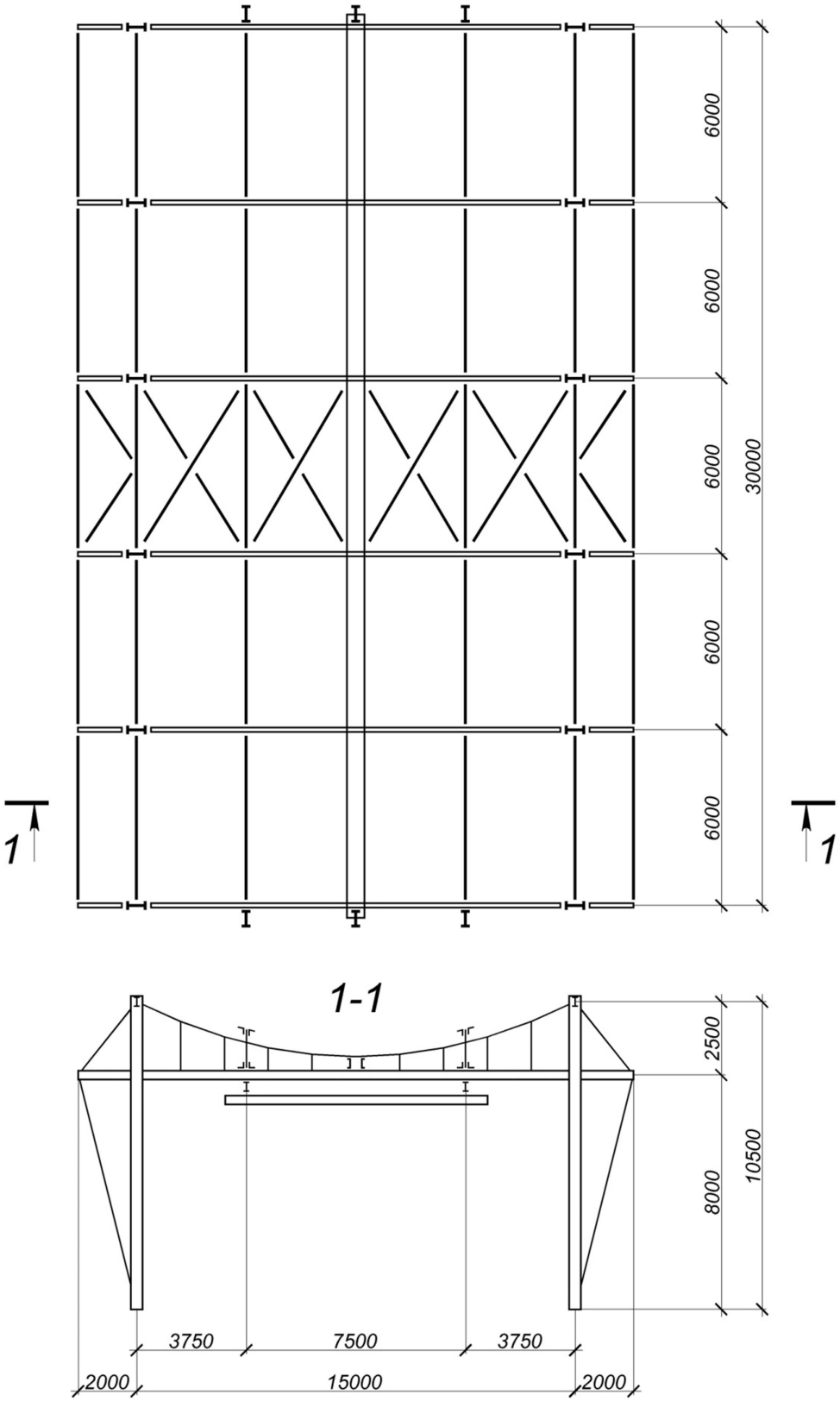



**Рис. 3.** План и разрез каркаса производственного здания

Расчет каркаса производился с применением одной из мощных систем компьютерного моделирования – программного комплекса ЛИРА версии 9.6. В работе производился расчет плоской рамы и пространственной схемы каркаса с висячими комбинированными ригелями на сосредоточенную вертикальную нагрузку, расположенную в четверти и середине пролета.

Наибольшую сложность составило задание предварительного напряжения ригеля рамы. Канат задавался конечным элементом 310 (КЭ) (геометрически нелинейный универсальный пространственный стержневой конечный элемент (нить)). Подвески задавались КЭ 308 (геометрически нелинейный специальный двухузловой конечный элемент для моделирования предварительного натяжения). Данный КЭ предназначен для моделирования предварительного натяжения, передаваемого в узлы расчетной схемы. Первое нагружение схемы представляло собой заданное натяжение (специальная нагрузка на элемент составляла 3,37 кН) для придания требуемой формы основным элементам конструкции. В программу подаются только величины натяжения без учета длины форкопфа. Для учета в дальнейшем полученной формы сооружения остальные нагружения добавлялись к первому. После задания нагрузок от предварительного натяжения нити и вертикальных временных нагрузок были смоделированы нелинейные загружения конструкций. В расчетах принимался автоматический выбор шага для геометрически и физически нелинейных задач. Минимальное число итераций принималось равным 300.

Колонны и балки задавались КЭ 10 (универсальный пространственный стержневой конечный элемент). Оттяжки шпренгеля задавались КЭ 4 (конечный элемент пространственной фермы). Продольная неразрезная балка задавалась КЭ 3 (конечный элемент балочного ростверка).

Жесткости задавались по базе металлических сечений или численным описанием элементов. Жесткости элементов конструкции приведены в таблице.

Таблица

Жесткости элементов конструкции

| Элемент конструкции | Описание | Параметры жесткости |
|---|---|---|
| Колонна | Двутавр Б1 | EF=1261,75 МН<br>EI=32,445 МН×м$^2$ |
| Балка | Двутавр 36м | EF=1522,34 МН<br>EI=31,6004 МН×м$^2$ |
| Канат | КЭ 310 численное | EF=96,1944 МН |
| Подвески | Сталь горячекатаная круглая Ø25 мм | EF=101,12 МН |
| Верхняя оттяжка | Два уголка 100×100×8 | EF=642,72 МН |
| Нижняя оттяжка | Два уголка 75×75×6 | EF=361,736 МН |
| Продольная балка | КЭ 3 численное | EI=328,717 МН×м$^2$ |

В опорных узлах балок жесткости вводились шарниры, разрешающие упругий поворот сечения Uy вокруг оси Y. Жесткое защемление колонн в фундаментах моделировалось путем наложения запрещающих перемещений в направлении осей глобальной системы координат X, Y, Z и запрета поворота Uy относительно оси Y.

Прогиб системы рассматривался как разность прогиба балки под действием груза и подъема ее подвесками. Прогиб балки под действием сосредоточенного груза моделировался в нелинейном загружении совместно с предварительным натяжением подвесок.

Экспериментальные исследования и теоретические расчеты пространственного каркаса на вертикальную сосредоточенную нагрузку выполнялись И.П. Сигаевым [2].

Значения прогибов плоской схемы рамы при расположении груза в четверти и середине пролета приведены на рис. 4 и 5 соответственно.

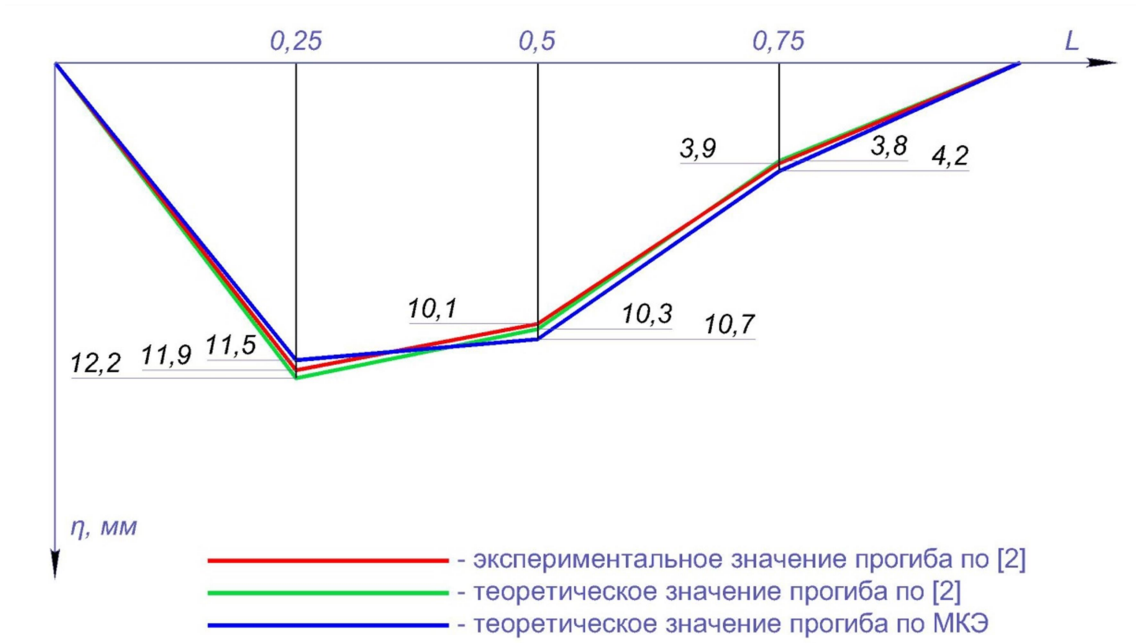



**Рис. 4.** График прогибов плоской схемы рамы при расположении груза в четверти пролета ξ = 0,25

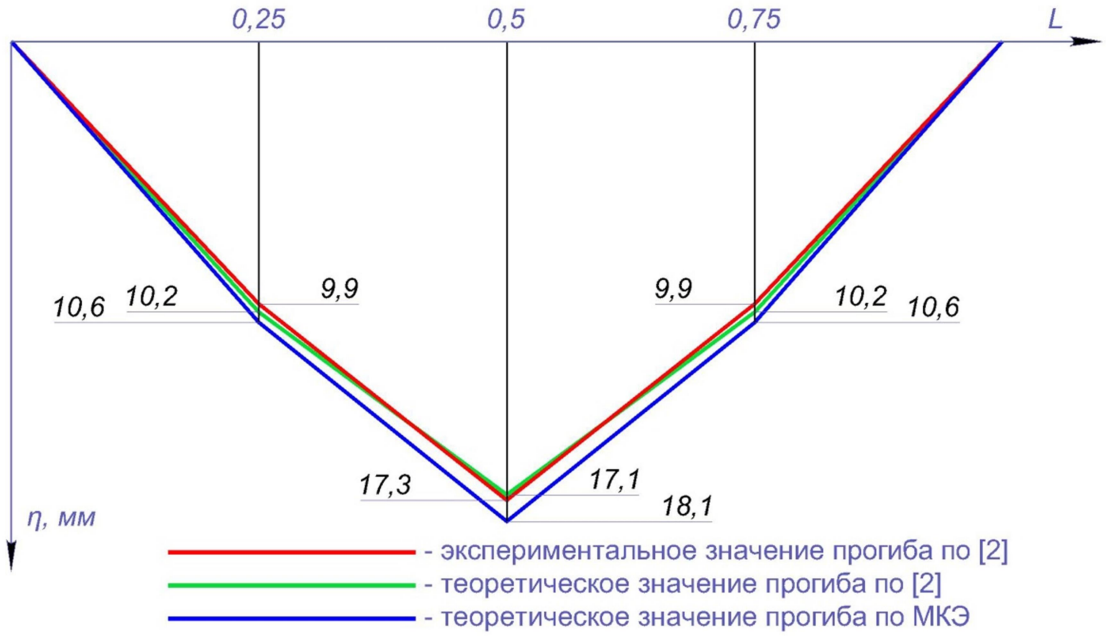



**Рис. 5.** График прогибов плоской схемы рамы при расположении груза в середине пролета ξ = 0,5

Из рис. 4-5 видно, что совпадение экспериментальных и теоретических значений прогибов по МКЭ для плоской схемы рамы хорошее. Отклонение теоретических значений по МКЭ от экспериментальных не превышает 7,7 %, а под грузом в четверти и середине пролета составляет 3,4 % и 4,6 % соответственно. что можно считать вполне удовлетворительным результатом.

Распределение прогибов вдоль здания при расположении груза на третьей раме в четверти и середине пролета изображено на рис. 6-7.

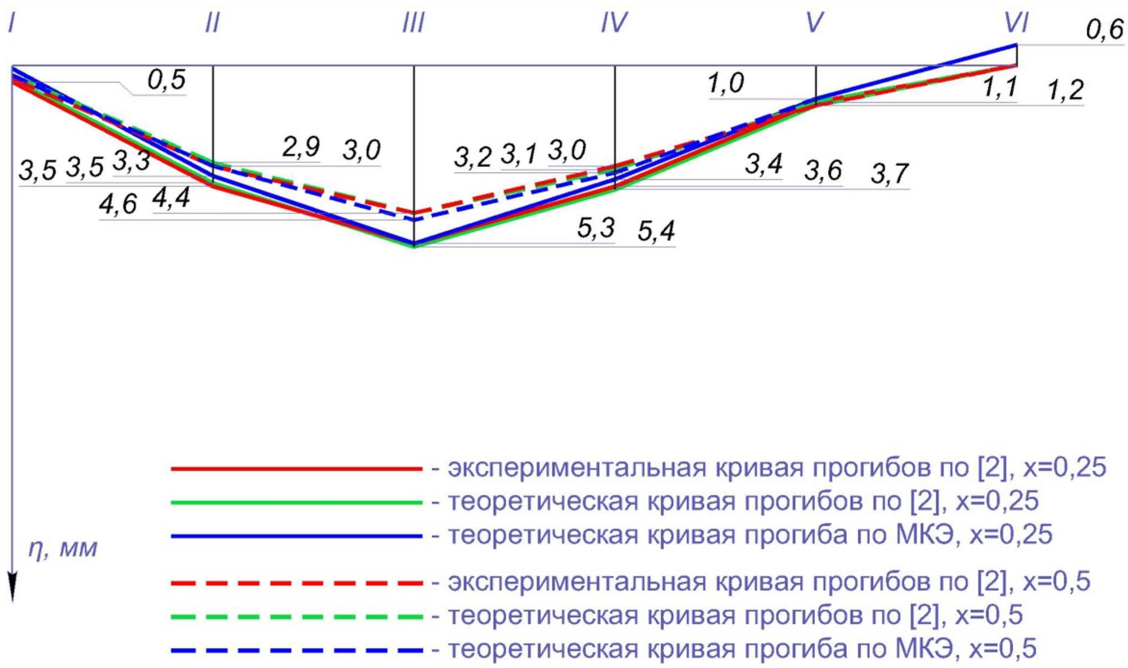



**Рис. 6.** График распределения прогибов при расположении груза на третьей раме в четверти пролета ξ = 0,25

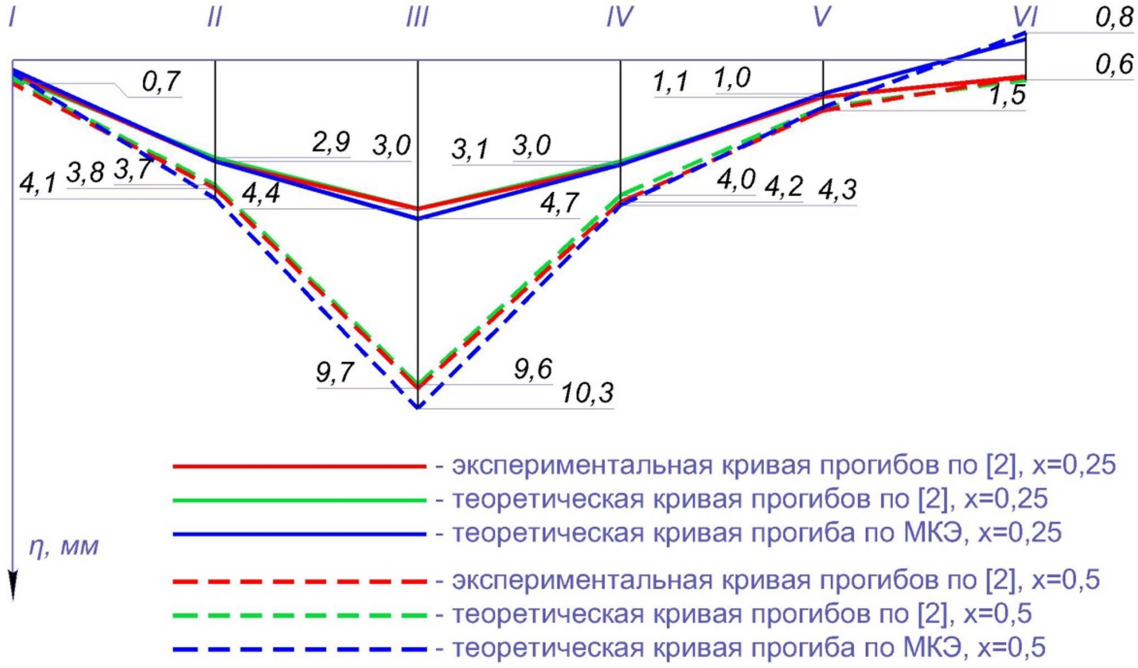



**Рис. 7.** График распределения прогибов при расположении груза на третьей раме в середине пролета ξ = 0,5

Распределение прогибов вдоль здания при расположении груза на первой раме в четверти и середине пролета изображено на рис. 8-9.

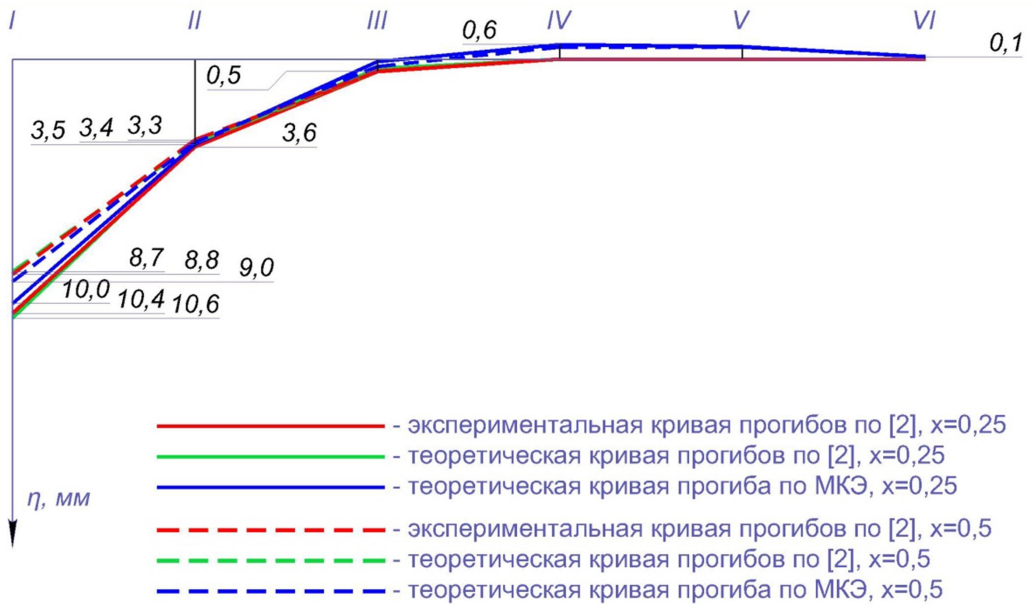



**Рис. 8.** График распределения прогибов при расположении груза на первой раме в четверти пролета ξ = 0,25

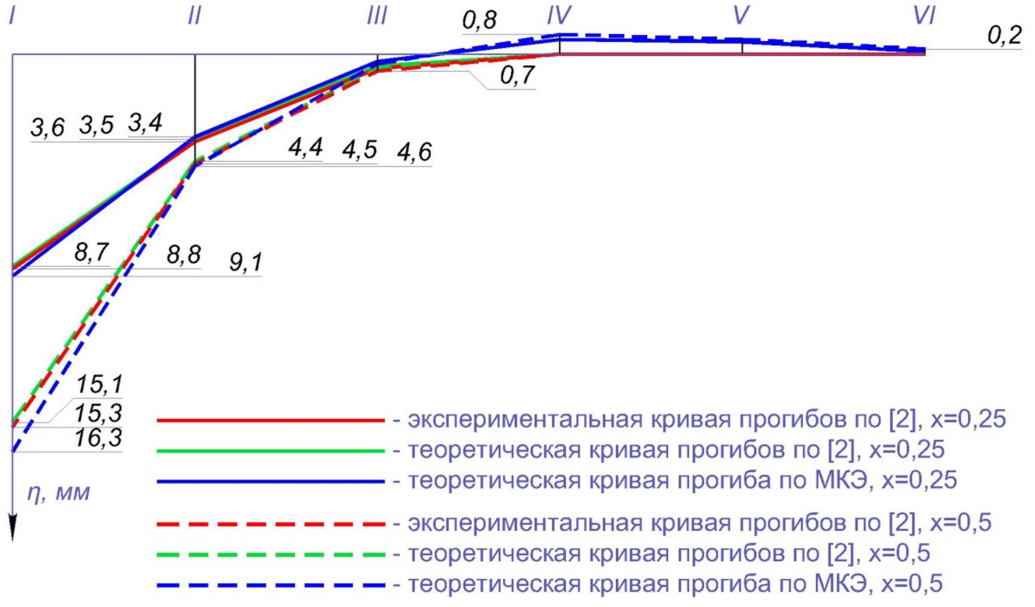



**Рис. 9.** График распределения прогибов при расположении груза на первой раме в середине пролета ξ = 0,5

Из рис. 6 - 9 видно, что совпадение теоретических значений прогибов по МКЭ и экспериментальных значений прогибов под грузом хорошее. Отклонение МКЭ от экспериментальных значений не превышает 6,5 % и 6,8 %, когда груз располагается на первой и третьей раме соответственно, что можно считать вполне удовлетворительным результатом для расчета конструкций.

Из рис. 6-9 следует, что основные экспериментальные и теоретические данные (прогибы под грузами и вблизи действия груза) хорошо согласуются между собой. Однако, как и следовало ожидать, экспериментальные и теоретические прогибы в сечениях, отдаленных от

места положения груза, могут значительно отличаться в ту или другую сторону друг от друга. Это объясняется тем, что в отдаленных от груза сечениях величина прогибов весьма мала – составляет около 5 % от максимальных значений под грузом.

Следует отметить, что расчетными сечениями всегда являются сечения с большими прогибами и изгибающими моментами, т.е. под грузом, а точки пролета, удаленные от этих сечений, в основных расчетах не фигурируют, поэтому можно считать, что теоретические прогибы по МКЭ соответствуют реальным прогибам сооружения, а точность расчета метода конечных элементов для рассматриваемого производственного здания является вполне удовлетворительной.

## Выводы

Для висячей комбинированной системы производственного здания ремонтной мастерской выполнен расчет напряженно-деформированного состояния с учетом геометрической нелинейности под действием вертикальной нагрузки в четверти и середине пролетов с использованием метода конечных элементов в ПВК ЛИРА.

При сравнении теоретических результатов расчета по МКЭ с экспериментальными данными было установлено хорошее совпадение прогибов в расчетных сечениях каркаса производственного здания ремонтной мастерской. Построены графики распределения экспериментальных и теоретических значений прогиба для плоской схемы и пространственного каркаса при расположении груза в четверти и середине пролета.

## Библиографический список


1. Жандаров, М.А. Исследование пространственных висячих комбинированных покрытий промышленных зданий с подвесным крановым оборудованием: автореф. дис…. канд. техн. наук.– Воронеж, 1974. – 20 с.
2. Сигаев, И.П. Каркас большепролетного промышленного здания в виде рам с висячими комбинированными ригелями и несущими продольными связями: автореф. дис. … канд. техн. наук. – Воронеж, 1985. – 20 с.
3. Сигаев, И.П. Модель висячего покрытия промышленного здания и ее испытания /И.П. Сигаев, С.Н. Колодежнов //Исследования висячих конструкций покрытий и мостов: сб. науч. тр. – Воронеж, 1982. - С. 121-126.


## References


1. Zhandarov, M.A. Study of space suspension combined roofs of industrial buildings with underslung crane equipment Thesis. for the degree of PhD. Tehn. Science. - Voronezh: Voronezh Institution of Building and Engineering, 1974. - 20 p.
2. Sigayev, I.P. Frame of the large-span industrial building in the form of frames with combined hanging girders and bearing longitudinal braces Thesis for the degree of PhD. Tech. Science. - Voronezh, 1985 . - 20 p.
3. Sigayev, I. P. The model of suspension roof of industrial building and its testing/ I.P. Sigaev, S.N. Kolodezhnov//Testing of suspension roof and bridge structures: Collected scientific. – Voronezh, 1982. - P. 121-126.



**Ключевые слова:** висячая комбинированная система, напряженно-деформированное состояние, геометрическая нелинейность, конечные элементы.

**Keywords:** suspension combined system, deflected mode, geometric nonlinearity, finite elements.

УДК 620.10:620.17

*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
*Канд. техн. наук, проф. кафедры строительной механики*
*А.Н. Синозерский*
*Ст. преп. кафедры строительной механики*
*Р.А. Мухтаров*
*Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30*
*e-mail:rinat19611 @rambler.ru*

*Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering*
*Phd of Tech. Scince, Prof. of Department of Structural Mechanics*
*A. N. Sinozyorsky*
*Lecturer of Department of Structural Mechanics*
*R. A. Muhtarov*
*Voronezh, Russia tel.: 8(473)271-52-30*
*e-mail:rinat19611 @rambler.ru*

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров

# ПОКАЗАТЕЛИ УСЛОВНОГО ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ВНЕЦЕНТРЕННОМ СЖАТИИ ПРИЗМ ИЗ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО БЕТОНА

Исследуется напряженно-деформированное состояние внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона с помощью зависимости (1), определяется расчетная нагрузка $\widetilde{N}_u(\dot{\theta}_j, e)$ и характеристики предельного напряжённо-деформированного состояния.

A.N. Sinozyorsky, R.A. Muhtarov

# INDEXES OF CONDITIONAL LIMITING STATE DURING DESTRUCTION ECCENTRIC-COMPRESSED FINE CONCRETE PRISMS

Deflected mode of eccentrically compressed prisms from fine concrete is analyzed with the help of dependency (1), specified load $\widetilde{N}_u(\dot{\theta}_j, e)$and its behaviors of deflected mode of limiting state is also determined.

## 1. Исходные данные

Зависимость напряжения $\sigma$ – деформация $\varepsilon$ в момент разрушения внецентренно сжимаемых с заданными скоростью $\dot{\theta}$ и эксцентриситетом $e$ коротких элементов прямоугольного сечения $b = h = 0{,}1$ м из мелкозернистого бетона можно представить функцией [1]

$$\sigma(\dot{\theta}, e) = E \cdot e - \alpha(\dot{\theta}, e) \cdot (\varepsilon)^{\beta(\dot{\theta}, e)} \quad (1)$$

с модулем упругости $E = 31300$ МПа;

экстремальными
$$\sigma_\mu(\dot{\theta}, e) = \widetilde{K}_\mu(\dot{\theta}, e) \cdot \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}), \quad (2)$$

$$\varepsilon_\mu(\dot{\theta}, e) = \widetilde{K}_\mu(\dot{\theta}, e) \cdot \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}), \quad (3)$$

призменным пределом прочности $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta})$ и соответствующей деформацией $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta})$

параметрами
$$\beta(\dot{\theta}, e) = \beta(\dot{\theta}), \quad (4)$$

© Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А., 2013

$$\alpha(\dot{\theta}, e) = \frac{E}{\beta(\dot{\theta})\cdot\left(\varepsilon_\mu(\dot{\theta},e)\right)^{\beta(\dot{\theta})-1}} \quad (5)$$

и коэффициентом
$$\widetilde{K}_\mu(\dot{\theta}, e) = \frac{\bar{F}_u(\dot{\theta},e)}{\widetilde{N}_Б(\dot{\theta},e)}, \quad (6)$$

где [2] – $\bar{F}_u(\dot{\theta}, e)$ – средние опытные разрушающие нагрузки; $\widetilde{N}_Б(\dot{\theta}, e)$ – базовые усилия.

Полученные по результатам испытаний и расчетов сведения представлены в табл.1

Таблица 1

| $\dot{\theta}_j \cdot 10^3 = \frac{\bar{F}_u}{b \cdot h \cdot t \cdot \dot{\sigma}_{1.00}}$ | Центральное сжатие | | | Внецентренное сжатие | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)$, МПа | $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_j) \cdot 10^6$ | $\beta(\dot{\theta}_j)$ | $e = \frac{y_f}{h}$ | Усилие, кН | | $\widetilde{K}_\mu(\dot{\theta}_j, e)$ по (6) |
| | | | | | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e) \pm \Delta\bar{F}_u$ | $\widetilde{N}_Б(\dot{\theta}_j, e)$ | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 392,3 | 26,09 | 1600 | 2,08100 | 0,050 | 236,3±17,7 | 222,2 | 1,063 |
| | | | | 0,100 | 207,9±14,7 | 193,4 | 1,075 |
| | | | | 0,150 | 185,3±13,7 | 171,1 | 1,083 |
| 39,23 | 25,51 | 1824 | 1,80358 | 0,050 | 234,4±18,6 | 217,7 | 1,077 |
| | | | | 0,100 | 207,9±10,8 | 190,2 | 1,093 |
| | | | | 0,150 | 180,4±10,8 | 168,9 | 1,068 |
| 3,923 | 23,64 | 2045 | 1,58300 | 0,045 | 222,6±15,7 | 205,1 | 1,085 |
| | | | | 0,090 | 204,0±13,7 | 181,6 | 1,123 |
| | | | | 0,135 | 186,3±7,8 | 163,2 | 1,142 |

*Примечания:* $\dot{\sigma}_{1.00} = 1.00$ *МПа*$\cdot$ с$^{-1}$; $e = \frac{y_f}{h}$; $f$ – *точка приложения сил* $\bar{F}$; $y_f, z_f = 0$; $\pm\Delta\bar{F}_u$ - *доверительные интегралы* $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$ *при вероятности* $p = 0.95$, *здесь и в дальнейшем сжимающие* $\varepsilon, \sigma, \bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e), \widetilde{N}_Б(\dot{\theta}_j, e)$ *принимаются по модулю.*

Примем
$$K_\mu(\dot{\theta}_j, e) = 1 + a_\mu(\dot{\theta}_j) \cdot e + c_\mu(\dot{\theta}_j) \cdot e^2 , \quad (7)$$
$$\frac{\partial K_\mu(\dot{\theta}_j,e)}{\partial e} = a_\mu(\dot{\theta}_j) + 2 \cdot c_\mu(\dot{\theta}_j) \cdot e_\mu = 0, \quad (8)$$

где $a_\mu(\dot{\theta}_j)$ и $c_\mu(\dot{\theta}_j)$ – параметры, зависящие от скорости нагружения $\dot{\theta}_j$ ; $e_\mu$ – эксцентриситет, при котором выполняется условие (8).

## 2. Выбор относительного эксцентриситета, соответствующего экстремуму функции (7)

Из равенства (8) получим
$$a_\mu(\dot{\theta}_j) = -2 \cdot e_\mu \cdot c_\mu(\dot{\theta}_j) \quad (9)$$
и, подставляя этот параметр в уравнение (7), будем иметь
$$c_\mu(\dot{\theta}_j) \cdot X(\dot{\theta}_j, e) = Y(\dot{\theta}_j, e), \quad (10)$$
где
$$X(\dot{\theta}_j, e) = e \cdot (e - 2 \cdot e_\mu) , \quad (11)$$
$$Y(\dot{\theta}_j, e) = K_\mu(\dot{\theta}_j, e) - 1. \quad (12)$$

Если задаваться $e_{\mu p} = e_{\mu 0} + p \cdot \Delta$ с $p = 0, 1, 2, \dots, \Delta = 0{,}005, \widetilde{K}_\mu(\dot{\theta}_j, e)$ из табл.1, то методом наименьших квадратов [3] можно найти:
$$c_{\mu p}(\dot{\theta}_j) = \frac{\sum X_p(\dot{\theta}_j,e)\cdot Y_p(\dot{\theta}_j,e)}{\sum\left[X_p(\dot{\theta}_j,e)\right]^2}, \quad (13)$$
а затем

— $a_{\mu p}(\dot{\theta}_j)$ по (9);

— $K_{\mu p}(\dot{\theta}_j, e)$ из (7);

— предельное усилие $\widetilde{N}_{up}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) = K_{\mu p}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) \cdot \widetilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$; (14)

— отклонения абсолютное $\Delta_p = \widetilde{N}_{up}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) - \bar{F}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$; (15)

и относительное $\delta_p = \Delta_p \cdot 100\% / \bar{F}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$; (16)

— квадрат отклонения $(\Delta_p)^2$ и сумму $\sum(\Delta_p)^2$.

Продолжаем процесс до достижения условия

$$\sum(\Delta_p)^2 > \sum(\Delta_{p+1})^2 < (\Delta_{p+1})^2. \quad (17)$$

Для определения $\min\sum(\Delta)^2$ и соответствующего $e_\mu$ применяем квадратичную интерполяцию [4]. Значение $e_\mu$ округляем до ближайшего кратного шагу $\Delta = 0{,}005$.

Результаты выполненных расчетов приводятся в табл. 2, 3, 4.

При $p = 1$ будет удовлетворяться условие (17), так как

$$\sum(\Delta_0)^2 = 27{,}50 \text{ кН}^2 > \sum(\Delta_1)^2 = 23{,}12 \text{ кН}^2 < \sum(\Delta_2)^2 = 26{,}11 \text{ кН}^2$$

с $min\sum\Delta^2$ в случае $e = 0{,}1106$. Поэтому в дальнейших исследованиях принимаем $e_\mu = 0{,}110$.

## 3. Выбор коэффициента $K_\mu(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)$

Для решения практических задач назначим

$$K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu) = \frac{N_{ud}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)}{\widetilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)}, \quad (18)$$

где условное предельное $N_{ud}(\dot{\theta}_i, e_\mu) = \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_i) \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e_\mu) \cdot p_d$ (19)

и базовое $\widetilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_i, e_\mu)$ усилия при $e_\mu = 0{,}110$, показателе напряжённого состояния

$$p_d = \frac{1 + d \cdot [\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)/\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_{\text{j}})]}{d+1}, \quad (20)$$

уровне $d = 0, 1, 2, 3, \ldots$, призменных пределах прочности $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)$, $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_{\text{j}})$ со стандартной [5] $\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 = 0{,}3923$ и заданной $\dot{\theta}_i$ скоростях нагружения (здесь $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}) \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e_\mu)$ - аналог расчётной продольной силы с расчётным сопротивлением $R_b$ [6] вместо $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_{\text{j}})$).

По методике [2] определяем (табл. 5) базовые усилия $\widetilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)$.

Назначаем уровень $d$ и находим по формулам:

(20) – показатель $p_d$;

(19) – силу $N_{ud}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)$;

(18) – коэффициент $K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)$ .

Подставляя эксцентриситет $e = e_\mu$, параметры $a = a_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}) = -2 \cdot e_\mu \cdot c_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}})$ (21)
и $K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)$ в уравнение (7), будем иметь

$$c_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}) = -\frac{c_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}) - 1}{(e_\mu)^2}, \quad (22)$$

а с учетом (21) и (7) –

$$a_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}) = \frac{2}{e_\mu} \cdot \left[K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu) - 1\right] \tag{23}$$

и $K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) = 1 + 2 \cdot \left[K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu) - 1\right] \cdot \frac{e}{e_\mu} - \left[K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu) - 1\right] \cdot \frac{e^2}{{e_\mu}^2} = 1 + \left[K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu) - 1\right] \cdot \left(2 - \frac{e}{e_\mu}\right) \cdot \frac{e}{e_\mu}$. (24)

В заключение вычисляем:

— расчетное предельное усилие $N_{ud}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) = K_{\mu d}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) \cdot N_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$; (25)

— отклонение абсолютное $\Delta d = N_{ud}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) - \bar{F}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ (26)

и относительное $\delta_d = \Delta d \cdot 100\ \%/\bar{F}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$; (27)

— квадрат отклонения $(\Delta d)^2$ и сумму $\sum(\Delta d)^2$ .

Если $\sum(\Delta d)^2 > \sum(\Delta_2)^2 \sum(\Delta_3)^2$ , (28)

то по квадратичной интерполяции [4] находим $\min\sum(\Delta)^2$ и $\tilde{d}$ $\min\sum$. Последний округляем до ближайшего целого $\tilde{d}$.

Полученные по изложенной методике сведения представлены в табл. 6- 8.

Имеем $\sum(\Delta_1)^2 = 46{,}22$ кН$^2$ $> \sum(\Delta_2)^2 = 29{,}35$кН$^2$ $< \sum(\Delta_3)^2 = 42{,}71$кН$^2$ с $min\sum(\Delta)^2 = 29{,}30$ кН$^2$ при

— уровне $d = 2{,}06 \approx 2{,}00$;

— показателе напряжённого состояния $p = \frac{1+2[\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)/\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j)]}{3}$; (29)

— эксцентриситете $e_\mu = 0{,}11$;

— условном предельном усилии $N_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu) = 0.26 \cdot \left[\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) + 2 \cdot \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)\right] \cdot b \cdot h$; (30)

— коэффициенте $K_\mu(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu) = \frac{0.26 \cdot [\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_j) + 2 \cdot \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_s)] \cdot b \cdot h}{\tilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e_\mu)}$. (31)

## 4. Определение характеристик предельных состояний

Найдем н.д.с. в момент внецентренного разрушения призм $b = h = 0{,}10$ м, $L = 0{,}40$ м из мелкозернистого бетона, приняв:

— зависимость между $\sigma$ и $\varepsilon$ по (1);

— экстремальные $\sigma_\mu(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ и $\varepsilon_\mu(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (2) и (3) с коэффициентом $K_\mu(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (24);

— параметры $\beta(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) = \beta(\dot{\theta}_{\text{j}})$ и $\alpha(\dot{\theta}_{\text{j}})$ соответственно по табл. 1 и формуле (5);

— деформации на уровне координаты $y$

$$\varepsilon(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) = B_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) \cdot (y - 0{,}5 \cdot h) + r_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e), \tag{32}$$

с наибольшей $\varepsilon_{r_u}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) = \varepsilon_\mu(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) \cdot r_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$, (33)

параметром $B_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$, м$^{-1}$ эпюры $\varepsilon$

и коэффициентом $r_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) > 1$ увеличения $\varepsilon_\mu(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по причине возникновения неоднородных $\sigma$ и $\varepsilon$.

Вычисление показателей $r_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e), \varepsilon_{r_u}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e), B_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e), \tilde{N}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ выполняем по методике [1] и помещаем в табл. 9. При выполнении расчётов привлекаем сведения о $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}), \tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}), K_{\mu 2}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по табл. 1 и 7.

Таблица 2

| $e_{\mu 0}$ | $\dot{\theta}_{\text{j}} \cdot 10^3$ | Параметры | | $e$ | $K_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (7) | Усилия, кН | | | Отклонения | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}})$ по (31) | $a_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}})$ по (9) | | | $\widetilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по табл.1 | $\widetilde{N}_{u0}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (14) | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по табл.1 | $\Delta_0$, кН | $\delta_0$, % | $(\Delta_0)^2$, кН |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0,105 | 392,3 | −7,8045 | 1,6389 | 0,050 | 1,062 | 222,2 | 236,0 | 236,3 | −0,3 | −0,13 | 0,09 |
| | | | | 0,100 | 1,086 | 193,4 | 210,0 | 207,9 | 2,1 | 1,01 | 4,41 |
| | | | | 0,150 | 1,070 | 171,1 | 183,1 | 185,3 | −2,2 | −1,19 | 4,84 |
| | 39,23 | −8,4624 | 1,7771 | 0,050 | 1,068 | 217,7 | 232,5 | 234,4 | −1,9 | −0,81 | 3,61 |
| | | | | 0,100 | 1,093 | 190,2 | 207,9 | 207,9 | 0,0 | 0,00 | 0,00 |
| | | | | 0,150 | 1,076 | 168,9 | 181,7 | 180,4 | 1,3 | 0,72 | 1,69 |
| | 3,923 | −12,386 | 2,6010 | 0,045 | 1,092 | 205,1 | 224,0 | 222,6 | 1,4 | 0,63 | 1,96 |
| | | | | 0,090 | 1,134 | 181,6 | 205,9 | 204,0 | 1,9 | 0,93 | 3,61 |
| | | | | 0,135 | 1,125 | 163,2 | 183,6 | 186,3 | −2,7 | −1,45 | 7,29 |
| | | | | | | | | | | | $\sum$ =27,50 |

Таблица 3

| $e_{\mu 0}$ | $\dot{\theta}_{\text{j}} \cdot 10^3$ | Параметры | | $e$ | $K_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (7) | Усилия, кН | | | Отклонения | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}})$ по (31) | $a_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}})$ по (9) | | | $\widetilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по табл.1 | $\widetilde{N}_{u0}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (14) | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по табл.1 | $\Delta_0$, кН | $\delta_0$, % | $(\Delta_0)^2$, кН |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0,110 | 392,3 | −7,0658 | 1,5545 | 0,050 | 1,060 | 222,2 | 235,5 | 236,3 | −0,8 | −0,34 | 0,64 |
| | | | | 0,100 | 1,085 | 193,4 | 209,8 | 207,9 | 1,9 | 0,91 | 3,61 |
| | | | | 0,150 | 1,074 | 171,1 | 183,8 | 185,3 | −1,5 | −0,81 | 2,25 |
| | 39,23 | −7,6095 | 1,6741 | 0,050 | 1,065 | 217,7 | 231,9 | 234,4 | −2,5 | −1,07 | 6,25 |
| | | | | 0,100 | 1,091 | 190,2 | 207,5 | 207,9 | −0,4 | −0,19 | 0,16 |
| | | | | 0,150 | 1,080 | 168,9 | 182,4 | 180,4 | 2,0 | 1,11 | 4,00 |
| | 3,923 | −11,307 | 2,4876 | 0,045 | 1,089 | 205,1 | 223,4 | 222,6 | 0,8 | 0,36 | 0,64 |
| | | | | 0,090 | 1,132 | 181,6 | 205,6 | 204,0 | 1,6 | 0,78 | 2,56 |
| | | | | 0,135 | 1,130 | 163,2 | 184,4 | 186,3 | −1,9 | −1,02 | 3,61 |
| | | | | | | | | | | | $\sum$ =23,72 |

Таблица 4

| $e_{\mu 0}$ | $\dot{\theta}_{\text{j}} \cdot 10^3$ | Параметры | | $e$ | $K_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (7) | Усилия, кН | | | Отклонения | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $c_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}})$ по (31) | $a_{\mu 0}(\dot{\theta}_{\text{j}})$ по (9) | | | $\widetilde{N}_{\text{Б}}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по табл.1 | $\widetilde{N}_{u0}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по (14) | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ по табл.1 | $\Delta_0$, кН | $\delta_0$, % | $(\Delta_0)^2$, кН |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0,115 | 392,3 | −6,4416 | 1,4816 | 0,050 | 1,058 | 222,2 | 235,1 | 236,3 | −1,2 | −0,51 | 1,44 |
| | | | | 0,100 | 1,084 | 193,4 | 209,6 | 207,9 | 1,7 | 0,82 | 2,89 |
| | | | | 0,150 | 1,077 | 171,1 | 184,3 | 185,3 | −1,0 | −0,54 | 1,00 |
| | 39,23 | −6,8985 | 1,5866 | 0,050 | 1,062 | 217,7 | 231,2 | 234,4 | −3,2 | −1,37 | 10,24 |
| | | | | 0,100 | 1,090 | 190,2 | 207,3 | 207,9 | −0,6 | −0,29 | 0,36 |
| | | | | 0,150 | 1,083 | 168,9 | 182,9 | 180,4 | 2,5 | 1,39 | 6,25 |
| | 3,923 | −10,390 | 2,3897 | 0,045 | 1,086 | 205,1 | 222,7 | 222,6 | 0,1 | 0,04 | 0,01 |
| | | | | 0,090 | 1,131 | 181,6 | 205,4 | 204,0 | 1,4 | 0,69 | 1,96 |
| | | | | 0,135 | 1,133 | 163,2 | 184,9 | 186,3 | −1,4 | −0,75 | 1,96 |
| | | | | | | | | | | | $\sum$ =26,11 |

Таблица 5

| $e_\mu$ | $i$ | $\dot{\theta}_i \cdot 10^3$ | $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_i)$, МПа | $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_i) \cdot 10^6$ | Параметр | | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\alpha(\dot{\theta}_i)$, МПа | $\beta(\dot{\theta}_i)$ | | | | | $N_m$ | $N_{\text{Б}}(\dot{\theta}_i, e_\mu)$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 0,110 | 1 | 392,3 | 26,9 | 1600 | 15885000 | 2,08100 | 4,2 | 1,21 | 1936 | 1,9271661 | 189,202 | 188,5 |
| | | | | | | | 5,2 | 1,26 | 2016 | 2,0279089 | 188,539 | |
| | | | | | | | 6,2 | 1,31 | 2096 | 2,1304483 | 188,344 | |
| | | | | | | | Б | 1,2667 | 2026,7 | 2,0415204 | 188,534 | |
| | 2 | 39,23 | 25,51 | 1824 | 2764700 | 1,80358 | 4,4 | 1,22 | 2225,3 | 2,2491835 | 185,151 | 185,5 |
| | | | | | | | 5,4 | 1,27 | 2316,5 | 2,3622619 | 185,510 | |
| | | | | | | | 6,4 | 1,32 | 2407,7 | 2,4769318 | 185,424 | |
| | | | | | | | Б | 1,28534 | 2344,5 | 2,3973004 | 185,531 | |
| | 3 | 3,923 | 23,64 | 2045 | 733160 | 1,58300 | 5 | 1,25 | 2556,25 | 2,6257050 | 172,718 | 172,9 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2658,5 | 2,7512500 | 172,918 | |
| | | | | | | | 7 | 1,35 | 2760,75 | 2,8782018 | 172,762 | |
| | | | | | | | Б | 1, 30309 | 2664,8 | 2,7590331 | 172,918 | |

Таблица 6

| $e_\mu$ | $\tilde{d}$ | j | $\dot{\theta}_j \cdot 10^3$ | $p_d(\dot{\theta}_j)$ по (20) | Усилие, кН | | $K_{\mu d}(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по (18) | $e$ | $K_{\mu d}(\dot{\theta}_j, e)$ по (24) | Усилие, кН | | Отклонение | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $N_{ud}(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по (19) | $N_Б(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по табл.5 | | | | $N_{ud}(\dot{\theta}_j, e)$ по (25) | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$ по табл. 1 | $\Delta d$, кН по (26) | $\delta_d$, % по (27) | $(\Delta d)^2$ кН$^2$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0,110 | 1 | 1 | 392,3 | 1,000 | 203,5 | 188,5 | 1,080 | 0,050 | 1,056 | 234,6 | 236,3 | −1,7 | −0,72 | 2,89 |
| | | | | | | | | 0,100 | 1,079 | 208,7 | 207,9 | 0,8 | 0,38 | 0,64 |
| | | | | | | | | 0,150 | 1,069 | 182,9 | 185,3 | −2,4 | −1,30 | 5,76 |
| | | 2 | 39,23 | 1,011 | 201,2 | 185,5 | 1,085 | 0,050 | 1,060 | 230,8 | 234,4 | −3,6 | −1,54 | 12,96 |
| | | | | | | | | 0,100 | 1,084 | 206,2 | 207,9 | −1,7 | −0,82 | 2,89 |
| | | | | | | | | 0,150 | 1,074 | 181,4 | 180,4 | 1,0 | 0,55 | 1,00 |
| | | 3 | 3,923 | 1,052 | 194,0 | 172,9 | 1,122 | 0,045 | 1,079 | 221,4 | 222,6 | −1,2 | −0,54 | 1,44 |
| | | | | | | | | 0,090 | 1,118 | 203,0 | 204,0 | −1,0 | −0,49 | 1,00 |
| | | | | | | | | 0,135 | 1,116 | 182,1 | 186,3 | −4,2 | −2,25 | 17,64 |

Таблица 7

| $e_\mu$ | $\tilde{d}$ | j | $\dot{\theta}_j \cdot 10^3$ | $p_d(\dot{\theta}_j)$ по (20) | Усилие, кН | | $K_{\mu d}(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по (18) | $e$ | $K_{\mu d}(\dot{\theta}_j, e)$ по (24) | Усилие, кН | | Отклонение | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $N_{ud}(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по (19) | $N_Б(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по табл.5 | | | | $N_{ud}(\dot{\theta}_j, e)$ по (25) | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$ По табл. 1 | $\Delta d$, кН по (26) | $\delta_d$, % по (27) | $(\Delta d)^2$ кН$^2$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0,110 | 2 | 1 | 392,3 | 1,000 | 203,5 | 188,5 | 1,080 | 0,050 | 1,056 | 234,6 | 236,3 | −1,7 | −0,72 | 2,89 |
| | | | | | | | | 0,100 | 1,079 | 208,7 | 207,9 | 0,8 | 0,38 | 0,64 |
| | | | | | | | | 0,150 | 1,069 | 182,9 | 185,3 | −2,4 | −1,30 | 5,76 |
| | | 2 | 39,23 | 1,015 | 202,0 | 185,5 | 1,089 | 0,050 | 1,063 | 231,4 | 234,4 | −3,0 | −1,28 | 9,00 |
| | | | | | | | | 0,100 | 1,088 | 206,9 | 207,9 | −1,0 | −0,48 | 1,00 |
| | | | | | | | | 0,150 | 1,077 | 181,9 | 180,4 | 1,5 | 0,83 | 2,25 |
| | | 3 | 3,923 | 1,069 | 197,1 | 172,9 | 1,140 | 0,045 | 1,091 | 223,8 | 222,6 | 1,2 | 0,54 | 1,44 |
| | | | | | | | | 0,090 | 1,135 | 206,1 | 204,0 | 2,1 | 1,03 | 4,41 |
| | | | | | | | | 0,135 | 1,133 | 184,9 | 186,3 | −1,4 | −0,75 | 1,96 |

Таблица 8

| $e_\mu$ | $\tilde{d}$ | j | $\dot{\theta}_j \cdot 10^3$ | $p_d(\dot{\theta}_j)$ по (20) | Усилие, кН | | $K_{\mu d}(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по (18) | $e$ | $K_{\mu d}(\dot{\theta}_j, e)$ по (24) | Усилие, кН | | Отклонение | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $N_{ud}(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по (19) | $N_Б(\dot{\theta}_j, e_\mu)$ по табл.5 | | | | $N_{ud}(\dot{\theta}_j, e)$ по (25) | $\bar{F}_u(\dot{\theta}_j, e)$ по табл. 1 | $\Delta d$, кН по (26) | $\delta_d$, % по (27) | $(\Delta d)^2$ кН$^2$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 0,110 | 3 | 1 | 392,3 | 1,000 | 203,5 | 188,5 | 1,080 | 0,050 | 1,056 | 234,6 | 236,3 | −1,7 | −0,72 | 2,89 |
| | | | | | | | | 0,100 | 1,079 | 208,7 | 207,9 | 0,8 | 0,38 | 0,64 |
| | | | | | | | | 0,150 | 1,069 | 182,9 | 185,3 | −2,4 | −1,30 | 5,76 |
| | | 2 | 39,23 | 1,017 | 202,4 | 185,5 | 1,091 | 0,050 | 1,064 | 231,6 | 234,4 | −2,8 | −1,19 | 7,84 |
| | | | | | | | | 0,100 | 1,090 | 207,3 | 207,9 | −0,6 | −0,29 | 0,36 |
| | | | | | | | | 0,150 | 1,079 | 182,2 | 180,4 | 1,8 | 1,00 | 3,24 |
| | | 3 | 3,923 | 1,078 | 198,8 | 172,9 | 1,150 | 0,045 | 1,098 | 225,2 | 222,6 | 2,6 | 1,17 | 6,76 |
| | | | | | | | | 0,090 | 1,145 | 207,9 | 204,0 | 3,9 | 1,91 | 15,21 |
| | | | | | | | | 0,135 | 1,142 | 186,4 | 186,3 | 0,1 | 0,05 | 0,01 |

Таблица 9

| j | $\dot{\theta}_j \cdot 10^3$ | $e$ | $\sigma_\mu(\dot{\theta}_j, e)$, МПа | $\varepsilon_\mu(\dot{\theta}_j, e) \cdot 10^{-6}$ | Параметр | | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\alpha(\dot{\theta}_j, e)$, МПа | $\beta(\dot{\theta}_j, e)$ | | | | | $N_m$ | $\widetilde{N}_u(\dot{\theta}_j, e$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 1 | 392,3 | 0,05 | 27,55 | 1689,6 | 14972200 | 2,08100 | 3 | 1,15 | 1943,0 | 1,4757170 | 234,428 | 234,7 |
| | | | | | | | 4 | 1,20 | 2027,5 | 1,5814976 | 234,697 | |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2112,0 | 1,6911975 | 234,310 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,19550 | 2019,9 | 1,5718323 | 234,699 | |
| | | 0,10 | 28,15 | 1726,4 | 14627400 | 2,08100 | 4 | 1,20 | 2071,7 | 2,0008692 | 208,377 | 208,8 |
| | | | | | | | 5 | 1,25 | 2158,0 | 2,1093117 | 208,764 | |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2244,3 | 2,2198948 | 208,563 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,25791 | 2171,7 | 2,1267229 | 208,771 | |
| | | 0,150 | 27,89 | 1710,4 | 14775400 | 2,08100 | 5 | 1,25 | 2138,0 | 2,3345861 | 182,774 | 183,0 |
| | | | | | | | 6 | 1,30 | 2223,5 | 2,4437340 | 182,992 | |
| | | | | | | | 7 | 1,35 | 2309,0 | 2,5542742 | 182,695 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,29617 | 2217,0 | 2,4353865 | 182,998 | |
| | | | | | | | 4,2 | 1,21 | 2346,05 | 1,8857997 | 231,470 | |
| | | | | | | | 5,2 | 1,26 | 2443,0 | 2,0098784 | 231,187 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,20927 | 2344,7 | 1,8840959 | 231,471 | |
| | | 0,100 | 28,75 | 1984,5 | 2583500 | 1,80358 | 4,6 | 1,23 | 2440,9 | 2,4096794 | 206,731 | 206,9 |
| | | | | | | | 5,6 | 1,28 | 2540,15 | 2,5333998 | 206,936 | |
| | | | | | | | 6,6 | 1,33 | 2639,4 | 2,6589553 | 206,650 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,27588 | 2532,0 | 2,5231688 | 206,938 | |
| | | 0,150 | 27,47 | 1964,4 | 2604700 | 1,80358 | 5,4 | 1,27 | 2494,8 | 2,7477980 | 181,741 | 181,9 |
| | | | | | | | 6,4 | 1,32 | 2593,0 | 2,8714850 | 181,924 | |
| | | | | | | | 7,4 | 1,37 | 2691,2 | 2,9963946 | 181,677 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,31628 | 2585,7 | 2,8622488 | 181,925 | |

Окончание табл. 9

| j | $\dot{\theta}_j \cdot 10^3$ | $e$ | $\sigma_\mu(\dot{\theta}_j, e)$, МПа | $\varepsilon_\mu(\dot{\theta}_j, e) \cdot 10^{-6}$ | Параметр | | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | $\alpha(\dot{\theta}_j, e)$, МПа | $\beta(\dot{\theta}_j, e)$ | | | | | $N_m$ | $\widetilde{N}_u(\dot{\theta}_j, e)$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| 3 | 3,923 | 0,045 | 25,79 | 2231,0 | 696825 | 1,58300 | 3,2 | 1,16 | 2588,0 | 2,0157813 | 223,510 | 223,8 |
| | | | | | | | 4,2 | 1,21 | 2699,5 | 2,1531245 | 223,768 | |
| | | | | | | | 5,2 | 1,26 | 2811,0 | 2,2944152 | 223,563 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,21286 | 2705,9 | 2,1611468 | 223,768 | |
| | | 0,090 | 26,83 | 2321,1 | 680940 | 1,58300 | 4,6 | 1,23 | 2855,0 | 2,7804885 | 205,889 | 206,1 |
| | | | | | | | 5,6 | 1,28 | 2971,0 | 2,9231945 | 206,117 | |
| | | | | | | | 6,6 | 1,33 | 3087,0 | 3,0577573 | 205,922 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,28195 | 2975,5 | 2,9287700 | 206,117 | |
| | | 0,135 | 26,78 | 2317,0 | 681650 | 1,58300 | 5,4 | 1,27 | 2942,6 | 3,1790157 | 184,724 | 185,0 |
| | | | | | | | 6,4 | 1,32 | 3058,45 | 3,3221798 | 184,949 | |
| | | | | | | | 7,4 | 1,37 | 3174,3 | 3,4666236 | 184,798 | |
| | | | | | | | $\mu$ | 1,32492 | 3069,8 | 3,3362750 | 184,951 | |

Установленные по предложенной методике предельные нагрузки $\widetilde{N}_u(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$ (см. столбец 13 табл. 9) отличаются не более чем на 0,1 кН от вычисленных по формуле (25) усилий $N_{u2}(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)$, представленных в табл. 7. Сумма квадратов отклонений от опытных средних разрушающих при этом составляет 27,86 кН$^2$, что меньше $\sum(\Delta d = 2)^2 = 29{,}35$ кН$^2$ из табл.7.

Для примера в случае $\dot{\theta}_{1,}e = 0{,}100$ находим и записываем в табл. 10 деформации

$$\varepsilon(\dot{\theta}_{1,}e = 0{,}100\,) = 2{,}1267229 \cdot 10^{-2} \cdot (y - 0{,}5 \cdot h) + 2171{,}7 \cdot 10^{-6} \qquad (34)$$

и напряжения $\sigma(\dot{\theta}_{1,}e = 0{,}100\,) = 31390 \cdot \varepsilon - 14627400 \cdot (\varepsilon)^{2{,}081}$, (35)

а на рис. изображаем эпюры $\varepsilon_c = \varepsilon(\dot{\theta}_{1,}e = 0{,}100\,)$ и $\sigma_c = \sigma(\dot{\theta}_{1,}e = 0{,}100\,)$.

Таблица 10

| $\dot{\theta}_1 \cdot 10^{-3}$ | $e = \frac{y_f}{h}$ | Точки $c$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Координаты $y_c$, м | −0,050 | −0,025 | 0 | 0,025 | 0,050 | 0,02906 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 392,3 | 0,100 | $\varepsilon_c \cdot 10^6$ по (34) | 44,98 | 576,66 | 1108,3 | 1640,0 | 2171,7 | 1726,4 |
| | | $\sigma_c$, МПа по (35) | 1,40 | 15,44 | 24,44 | 28,08 | 26,19 | 28,18 |
| | | $\tilde{\varepsilon}_c \cdot 10^6$ из [1] от $\bar{F}_u(\dot{\theta}_1, 0{,}1)$ | 42,28 | 572,3 | 1102,4 | 1632,5 | 2162,5 | 1719,2* |
| | | $\tilde{\sigma}_c$, Мпа из [1] от $\bar{F}_u(\dot{\theta}_1, 0{,}1)$ | 1,32 | 15,34 | 24,32 | 27,96 | 26,08 | 28,04* |

**При $y_\mu = 2{,}909 \cdot 10^{-2}$м от разрушающей нагрузки $\bar{F}_u(\dot{\theta}_1, e = 0{,}10) = 207{,}9$ кН.*

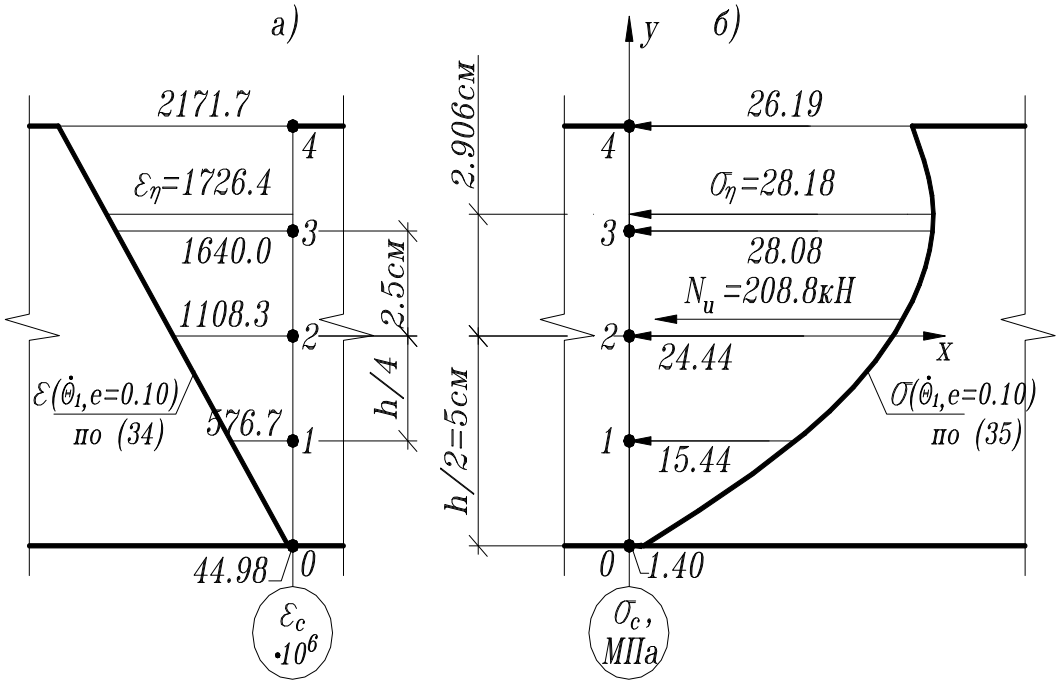



**Рисунок.** Эпюры $\varepsilon_c = \varepsilon(\dot{\theta}_{1,}e = 0{,}100\,)$ и $\sigma_c = \sigma(\dot{\theta}_{1,}e = 0{,}100\,)$

## Выводы

1. Предлагается исследовать напряжённо-деформированное состояние внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона с помощью зависимости

$$\sigma(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) = E \cdot e - \alpha(\dot{\theta}_{\text{j}}, e) \cdot (\varepsilon)^{\beta(\dot{\theta}_{\text{j}}, e)}\,. \qquad (1)$$

2. Установлено, что коэффициенты увеличения $K_\mu(\dot{\theta}_\text{j}, e)$ экстремальных $\sigma_\mu(\dot{\theta}_\text{j}, e)$ и $\varepsilon_\mu(\dot{\theta}_\text{j}, e)$по сравнению с соответствующими $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_\text{j})$ и $\tilde{\varepsilon}_u(\dot{\theta}_\text{j})$ центрального сжатия изменяются по закону

$$K_\mu(\dot{\theta}_\text{j}, e) = 1 + a(\dot{\theta}_\text{j}) \cdot e + c(\dot{\theta}_\text{j}) \cdot e^2 \tag{7}$$

с max $K_\mu = K_\mu(\dot{\theta}_\text{j}, e_\mu)$ при относительном эксцентриситете $e_\mu = 0.110$.

3. Для решения практических задач предложено назначать

$$K_\mu(\dot{\theta}_\text{j}, e_\mu) = N_{ud}(\dot{\theta}_\text{j}, e_\mu)/\widetilde{N}_\text{Б}(\dot{\theta}_\text{j}, e_\mu) \tag{18}$$

с условным предельным $N_{ud}(\dot{\theta}_\text{j}, e_\mu) = \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_\text{j}) \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e_\mu) \cdot p_d$ (19)

и базовым $\widetilde{N}_\text{Б}(\dot{\theta}_\text{j}, e_\mu)$ усилиями, $e_\mu = 0.110$, показателем напряженного состояния (НС)

$$p_d = \frac{1 + d \cdot [\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_\text{s})/\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_\text{j})]}{d+1}; \tag{20}$$

уровнем НС $d = 2$; призменными пределами прочности $\bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_\text{s}), \bar{\sigma}_u(\dot{\theta}_\text{j})$ для стандартной $\dot{\theta}_\text{s} = \dot{\theta}_1 = 0{,}3923$ и заданной $(\dot{\theta}_\text{j})$ скоростей.

При этих условиях функция (7) приводится к виду

$$K_{\mu d}(\dot{\theta}_\text{j}, e) = 1 + [K_\mu(\dot{\theta}_\text{j}, e_\mu) - 1] \cdot \left(2 - \frac{e}{e_\mu}\right) \cdot \frac{e}{e_\mu}. \tag{24}$$

4. Предельное усилие предложено определять:
   — по формуле $N_{ud}(\dot{\theta}_\text{j}, e) = K_{\mu d}(\dot{\theta}_\text{j}, e) \cdot N_\text{Б}(\dot{\theta}_\text{j}, e)$, (25)

   предварительно вычислив $N_\text{Б}(\dot{\theta}_\text{j}, e)$;
   — по методике п. 4, получая не только расчётную нагрузку $\widetilde{N}_u(\dot{\theta}_\text{j}, e)$, но и характеристики н.д.с. предельного состояния.
5. Установлено, что в пределах рассмотренных скоростей $\dot{\theta}_\text{j} \cdot 10^3 = 392{,}3$, $39{,}23$, $3{,}923$ и эксцентриситетов $e = 0{,}045 \ldots 0.1$ расчётные нагружающие силы располагаются в границах доверительных интервалов средних опытных $\bar{F}_u(\dot{\theta}_\text{j}, e)$ при вероятности 0,95, а сумма квадратов отклонений $\widetilde{N}_u(\dot{\theta}_\text{j}, e) - \bar{F}_u(\dot{\theta}_\text{j}, e)$ - наименьшая из предложенных, например в [7, 8, 9].
6. Вычисленные относительные невязки $\delta_\varepsilon = (\varepsilon_c - \tilde{\varepsilon}_c) \cdot 100\%/\tilde{\varepsilon}_c$ и $\delta_\sigma = (\sigma_c - \tilde{\sigma}_c) \cdot 100\,\%/\tilde{\sigma}_c$ при деформациях $\varepsilon_c$, $\tilde{\varepsilon}_c$ и напряжениях $\sigma_c$, $\tilde{\sigma}_c$ из табл.10 составляют для точек $c = 2, 3, 4, 4, \mu$ соответственно 0,4% ... 0,8% и 0,4% ... 0,7%.

Библиографический список


1. Синозерский, А.Н. Определение НДС при разрушении внецентренно сжимаемых со стандартной скоростью призм из мелкозернистого бетона по результатам испытаний / А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // см. настоящий научно-технический журнал.
2. Синозерский, А. Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм из мелкозернистого бетона / А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции – 2012. - Вып. №1 (4). – С. 72-83.
3. Лапчик, М.П. Численные методы : учеб. пособие для студ. вузов/ М.П. Лапчик, М.И. Рагулин, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчика. – М. : Изд. Центр «Академия», 2004. - 384 с.
4. Фильчаков, П.Ф. Справочник по высшей математике / П.Ф. Фильчаков. – Киев: Изд-во «Наукова думка», 1973. – 744 с.
5. ГОСТ 10180-90. Методы определения прочности по контрольным образцам / Госстрой СССР. – М., 1990. – С. 8-9.

6. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой России. М.: ГУП ЦПП, 2000. – 76 с.
7. Синозерский, А.Н. Зависимость предельных нагрузок внецентренно сжимаемых элементов из мелкозернистого бетона от призменных пределов прочности при заданных скоростях нагружения / А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – 2012. - Вып. № 2 (5). – С. 43-48.
8. Синозерский, А.Н. Комбинированный способ расчета разрушающих усилий внецентренно сжимаемых призм из мелкозернистого бетона / А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – 2012. - Вып.№ 2 (5). – С. 49-51.
9. Синозерский, А.Н. Экспериментально-теоретический расчёт разрушающих усилий внецентренно сжимаемых с постоянной скоростью призм из мелкозернистого бетона / А. Н. Синозерский Р. А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – 2012. Вып. № 2 (5). – С. 85-89.

Reference

**1.** Sinozyorsky, A.N. Definition of deflected mode definition of deflected mode of fine concrete prisms eccentrically -compressed with standard speed during their destruction according to the tests/ A. N. Sinozyorsky, R. A. Muhtarov // see present scientific journal.
2. Sinozyorsky, A.N. Definition of base forces and deflected mode of prisms from fine concrete / A.N. Sinozyorsky, R.A. Muhtarov // Structural Mechanics and structures. – 2012. - Issue. №1 (4). – P. 72-83.
3. .Lapchik, M.P. Numeric methods : teaching aid for students / M.P. Lapchic, M.I. Ragulina, E.K. Henner; under reduction of M.P. Lapchic. – M.: Pub. House. Centr-AcademiyaЦентр «Академия», 2004.-384p. Filchikov, P.F. Reference book on High Maths / P. F. Filchikov. – Kiev: Public House «Naukova Dumka », 1973. – 744 p.
4. State Standards 10180-90. Methods of definition of strength acoording to test samples / Gosstroi of USSR.-M., 1990.-P.8-9.
5. Building norms and regulations 2.03.01-84*. Concrete and reinforced concrete structures / Gosstroi of Russia. - M.: GUP TzPP, 2000. – 76 p.
6. Sinozyorsky, A.N. Dependence of limiting loads of eccentrically compressed elements from fine concrete on prizm strength limits at given stress rate / A.N Sinozyorsky., R. A. Muhtarov // Structural Mechanics and structures. – 2012. – Public House 2 (5). – P. UZ-UV.
7. Sinozyorsky, A.N. Complex method ofcalculation of destructive forces of eccentrically compressed p risms from fine concrete / A.N. Sinozyorsky, R.A. Muhtarov // Structural Mechanics and structures. – 2012. – Issue № 2 (5). – P. 49-51.
8. Sinozyorsky, A.N. Experimental – theoretical calculation of destructive forces eccentrically compressed with constant rate prisms from fine concrete / AN. Sinozyorsky, R.A. Muhtarov // Structural Mechanics and structures. – 2012. – Issue № 2 (5). – P. 85-89.

**Ключевые слова**: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон, предельное состояние.

**Keywords:** eccentric compression, fine concrete.

УДК 620.10:620.17
*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет*
*Канд. техн. наук, проф. кафедры строительной механики*
*А.Н. Синозерский*
*Ст. преп. кафедры строительной механики*
*Р.А. Мухтаров*
*Россия, г. Воронеж, тел.: 8(473)271-52-30*
*e-mail:rinat19611 @rambler.ru*

*Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering*
*Phd of Tech. Scince, Prof. of Department of Structural Mechanics*
*A.N. Sinozyorsky*
*Lecturer of Department of Structural Mechanics*
*R.A. Muhtarov*
*Voronezh, Russia tel.: 8(473)271-52-30*
*e-mail:rinat19611 @rambler.ru*

А.Н. Синозерский, Р.А. Мухтаров

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВНЫХ БАЗОВЫХ НАГРУЗОК КОРОТКИХ СЖАТЫХ БЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТАХ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ

Определяются показатели базовых состояний при относительном эксцентриситете $e$ и классе бетона В.

A.N. Sinozyorsky, P.A. Muhtarov

# DEFINITION OF CONDITIONAL BASE STRESSES OF SHORT CONCRETE MEMBERS OF SQUARE SECTION AT SMALL ECCENTRICITIES OF LONGITUDINAL FORCE

There are specified the indexes of base states during eccentricity and concrete class B.

## 1. Постановка задачи

Исходные данные:

стержни прямоугольного сечения шириной $b$, высотой $h$, радиусом инерции $i_z = h/\sqrt{12}$ и длиной $l \leq 14 \cdot i_z$; материал [1] из тяжёлого бетона естественного твердения класса по прочности на сжатие $B$ 3,5 ... $B60$ с нормативными (призменной прочностью) $R_{bn}$ и расчетным $R_b$ сопротивлением , начальным модулем упругости при сжатии и растяжении $E_b = E$; координаты ( в пределах ядра сечения для упругого материала ) $y_f, z_f = 0$ точки $f$ приложения равнодействующей $F$ внешних сил.

Полагаем, что при центральном и внецентренном сжатии зависимость напряжений $\sigma$ от деформаций представлена функцией (рис. 1)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha \cdot \varepsilon^2 \tag{1}$$

с экстремальными

$$\sigma_u = R_{bn}\,, \tag{2}$$

$$\varepsilon_u = 2 \cdot \sigma_u / E \tag{3}$$

и параметром

$$\alpha = \frac{E}{2} \cdot \varepsilon_u = \frac{E^2}{4} \cdot \sigma_u; \tag{4}$$

относительный эксцентриситет

$$e = \frac{y_f}{h}; \tag{5}$$

© Синозерский А.Н., Мухтаров Р.А., 2013

базовые состояния характеризуются [2]:

— максимальным значением равнодействующей внутренних сил $N_b(e)$;

— на уровне координаты *y* деформацией

$$\varepsilon = B_Б(e) \cdot (y - 0{,}5 \cdot h) + \varepsilon_{r_Б} \tag{6}$$

с наибольшей $$\varepsilon_{r_Б}(e) = \varepsilon_u \cdot r_Б(e); \tag{7}$$

параметром $B_Б(e)$, м$^{-1}$ эпюры $\varepsilon$; коэффициентом $r_Б(e) > 1$ увеличения $\varepsilon_u$ по причине возникновения неоднородных $\sigma$ и $\varepsilon$ в отличие от центрального нагружения при $\sigma = const$ и $\varepsilon = const$ во всём сечении.

Здесь и в дальнейшем все компоненты тензора напряжений, кроме $\sigma_x = \sigma$, принимаются равными нулю, а сжимающие деформации $\varepsilon$, напряжения $\sigma$, усилия $F$ и $N$ – по модулю; $b = h = 0{,}1$ м.

Расчетная нагрузка определяется по формуле [1]

$$F = R_b \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2e), \tag{8}$$

разрушающая – $$F_u = R_{bn} \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2e). \tag{9}$$

Найдем показатели базовых состояний, задаваясь классом бетона *B* и относительным эксцентриситетом *e*.

## 1. Расчетные формулы

Назначаем [1] нормативное сопротивление $R_{bn} = \sigma_u$ и модуль $E_b = E$.

Вычисляем экстремальную деформацию $\varepsilon_u$ и параметр $\alpha$ по (3) и (4).

Определение параметра $B_Б(e)$ и силы $N_b(e)$ проводим численными способами по методике [2].

Приняв, например, шаг $\Delta = 0{,}05$ и показатели $m = 0, 1, 2, 3 \ldots$ (могут быть и произвольные $m = 0{,}2,\ 1{,}2,\ 2{,}2,\ 2{,}3 \ldots$ ), задаёмся коэффициентами $r_m = 1 + m \cdot \Delta$, при которых из уравнений равновесий внутренних сил будет иметь соответствующие [2]
функцию

$$\Phi(B_m) = \frac{b \cdot h^3 \cdot E}{12} \cdot B_m - \frac{b \cdot \alpha}{3} \cdot \frac{(\varepsilon_{r_m})^3 - (\varepsilon_{r_m} - B_m \cdot h)^3}{B_m} \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{\varepsilon_{r_m}}{B_m}\right) - \frac{b \cdot \alpha}{4} \cdot$$
$$\cdot \frac{(\varepsilon_{r_m})^4 - (\varepsilon_{r_m} - B_m \cdot h)^4}{(B_m)^2} + y_f \cdot b \cdot \left[\frac{\alpha}{3} \cdot \frac{(\varepsilon_{r_m})^3 - (\varepsilon_{r_m} - B_m \cdot h)^3}{B_m} - \right.$$
$$\left. -h \cdot E \cdot (\varepsilon_{r_m} - 0{,}5 \cdot B_m \cdot h)\right] = 0 \tag{10}$$

и равнодействующую $$N_m = b \cdot h \cdot E \cdot (\varepsilon_{r_m} - 0{,}5 \cdot B_m \cdot h) - \frac{b \cdot \alpha}{3} \cdot \frac{(\varepsilon_{r_m})^3 - (\varepsilon_{r_m} - B_m \cdot h)^3}{B_m}. \tag{11}$$

Если $$B_m \cdot h > \varepsilon_{r_m}, \tag{12}$$

то в сечении эпюра $\varepsilon$ двух знаков, в связи с этим вводим допущение, что материал одинаково сопротивляется растяжению и сжатию. Зависимость «$\sigma - \varepsilon$» в случае растяжения

$$\sigma(e) = E \cdot \varepsilon + \alpha \cdot \varepsilon^2, \tag{13}$$

где $\alpha$ – коэффициент тот же, что и в (1), деформации $\varepsilon$ – отрицательные ($\varepsilon < 0$).

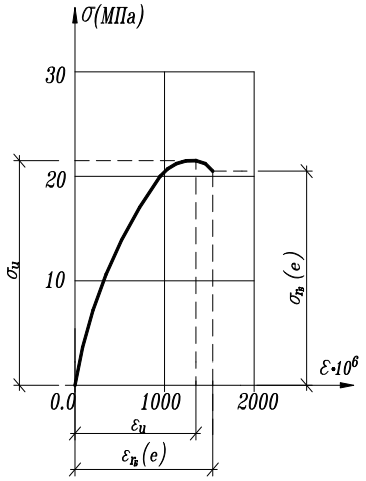



**Рис. 1.** График зависимости «$\sigma - \varepsilon$»

Здесь в уравнениях (10), (11) выражения

$$\left(\varepsilon_{r_m} - B_m \cdot h\right)^3 \text{ и } \left(\varepsilon_{r_m} - B_m\right)^4 \tag{14}$$

следует заменить соответственно на

$$\left(B_m \cdot h - \varepsilon_{r_m}\right)^3 \text{ и } \left(B_m \cdot h - \varepsilon_{r_m}\right)^4. \tag{15}$$

Когда

$$B_m \cdot h = \varepsilon_{r_m}\ , \tag{16}$$

вместо (14) и (15) вводятся нули.

Вычисление $B_m$ начинаем с отделения корня уравнения (10). Например, имея при $B_{m\,c}$ и $B_{m\,p} = 0$,

$$\Phi(B_{m\,c}) > 0 \quad \text{и} \quad \Phi\left(B_{m\,p}\right) < 0. \tag{17}$$

Находим методом хорд [3] с точностью до 6−7-значащих цифр:

$$B_{m\,p+1} = \frac{B_{m\,c} \cdot \left(\Phi\left(B_{m\,p}\right)\right) - B_{m\,p} \cdot \left(\Phi(B_{m\,c})\right)}{\Phi\left(B_{m\,p}\right) - \Phi(B_{m\,c})}\ , \tag{18}$$

где $p$ и $p+1$ −приближения параметра $B_m$ .

Затем из выражения (11) находим усилие $N_m$. Продолжаем до достижения усилия

$$N_m < N_{m+1} > N_{m+2}. \tag{19}$$

После чего для определения $maxN = N_Б(e)$ применяем квадратную интерполяцию [4], полагая

$$N_r = A_0 + A_1 \cdot u + A_2 \cdot u^2, \tag{20}$$

$$u = \frac{r - r_m}{\Delta}. \tag{21}$$

Узловыми значениями $u = 0,\ u = 1,\ u = 2$ и коэффициентами $A_0 = N_m$,

$$\begin{cases} A_1 = 0{,}5 \cdot (-3N_m + 4N_{m+1} - N_{m+2}), \\ A_2 = 0{,}5 \cdot (N_m - 2N_{m+1} + N_{m+2}). \end{cases} \tag{22}$$

Далее устанавливаем:

положение экстремума $\quad u_\mu = -A_1/2 \cdot A_2 \quad (23)$

и соответствующие

— условное наибольшее усилие $\quad N = N_Б(e) = A_0 + A_1 \cdot u_\mu + A_2 \cdot u^2{}_\mu, \quad (24)$

— коэффициент увеличения $\quad r_Б(e) = r_m + \Delta \cdot u_\mu, \quad (25)$

— деформацию $\varepsilon_{r_Б}(e)$ по (7).

В случае $\varepsilon_r = \varepsilon_{r_Б}(e)$ можно найти $B_{r_Б}(e)$ и усилие $N_{r_Б}(e) \approx N_b(e)$.

## 3. Исследования для бетона класса В30

Имеем:

расчётное $R_b = 17{,}0$ МПа и нормативное $R_{bn} = \sigma_u = 22{,}0$ МПа сопротивления при модуле упругости $E_b = E = 32500$ Мпа (см.[1]);

экстремальную деформацию (3) $- \varepsilon_u = 2 \cdot \frac{22}{32500} = 1353{,}8 \cdot 10^6$

и параметр (4) $- \alpha = \frac{32500^2}{4} \cdot 22 = 12002840$ МПа;

зависимость (1) в виде $\sigma = 32500 \cdot \varepsilon - 12002840 \cdot \varepsilon^2$;

представленные в табл.1 результаты расчётов базовых состояний.

Таблица 1

| Класс бетона | $e$ по (5) | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | | Коэффициент | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | $N_m$ | $F(e)$ по (8) | $F_u(e)$ по (9) | $K_Б(e) = N_Б(e)/F(e)$ | $K_u(e) = F_u(e)/N_b(e)$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| В30 | 0,025 | 2 | 1,10 | 1489,2 | 0,85910486 | 202,229 | 161,5 | 209,0 | 1,254 | 1,032 |
| | | 3 | 1,15 | 1556,9 | 0,94283352 | 202,464 | | | | |
| | | 4 | 1,20 | 1624,6 | 1,0314050 | 202,158 | | | | |
| | | Б($e$) | 1,14672 | 1552,4 | 0,93712802 | 202,465 | | | | |
| | 0,05 | 3 | 1,15 | 1556,9 | 1,1916878 | 187,277 | 153,0 | 198,0 | 1,225 | 1,056 |
| | | 4 | 1,20 | 1624,6 | 1,2760851 | 187,520 | | | | |
| | | 5 | 1,25 | 1692,3 | 1,3634652 | 187,261 | | | | |
| | | Б($e$) | 1,19920 | 1623,5 | 1,2746982 | 187,520 | | | | |
| | 0,075 | 3,6 | 1,18 | 1597,5 | 1,4126863 | 174,343 | 144,5 | 187,0 | 1,208 | 1,071 |
| | | 4,6 | 1,23 | 1665,2 | 1,4972473 | 174,627 | | | | |
| | | 5,6 | 1,28 | 1732,9 | 1,5839155 | 174,443 | | | | |
| | | Б($e$) | 1,23534 | 1672,4 | 1,5063665 | 174,630 | | | | |
| | 0,100 | 4 | 1,20 | 1624,6 | 1,5759131 | 163,052 | 136,0 | 176,0 | 1,201 | 1,077 |
| | | 5 | 1,25 | 1692,3 | 1,6605762 | 163,383 | | | | |
| | | 6 | 1,30 | 1760,0 | 1,7468015 | 163,275 | | | | |
| | | Б($e$) | 1,2627 | 1709,4 | 1,6822078 | 163,397 | | | | |
| | 0,125 | 4,6 | 1,23 | 1665,2 | 1,7301425 | 153,271 | 127,5 | 165,0 | 1,204 | 1,075 |
| | | 5,6 | 1,28 | 1732,9 | 1,8154530 | 153,511 | | | | |
| | | 6,6 | 1,33 | 1800,6 | 1,9020260 | 153,338 | | | | |
| | | Б($e$) | 1,28406 | 1738,4 | 1,8224403 | 153,512 | | | | |
| | 0,150 | 5 | 1,25 | 1692,3 | 1,8613307 | 144,504 | 119,0 | 154,0 | 1,216 | 1,064 |
| | | 6 | 1,30 | 1760,0 | 1,9373315 | 144,710 | | | | |
| | | 7 | 1,35 | 1827,7 | 2,024354 | 144,528 | | | | |
| | | Б($e$) | 1,30155 | 1762,0 | 1,9398868 | 144,710 | | | | |
| | 0,167 | 5,4 | 1,27 | 1719,3 | 1,9381058 | 139,131 | 113,2 | 146,5 | 1,231 | 1,052 |
| | | 6,4 | 1,32 | 1787,0 | 2,0247062 | 139,261 | | | | |
| | | 7,4 | 1,37 | 1854,7 | 2,1121830 | 139,020 | | | | |
| | | Б($e$) | 1,31252 | 1776,9 | 2,0117290 | 139,265 | | | | |

Вычислены

расчётные $F(e)$ и предельные $F_u(e)$ нагрузки по формулам (8) и (9)(см. столбцы 8 и 9 табл. 1);

коэффициенты
$$K_Б(e) = \frac{N_Б(e)}{F(e)}, \tag{26}$$
$$K_u(e) = F_u(e)/N_b(e), \tag{27}$$

которые представлены в столбцах 10 и 11 табл. 1.

На рис. 2, *а* и *б* построены графики «$K(e) - e$» и «$K_u(e) - e$».

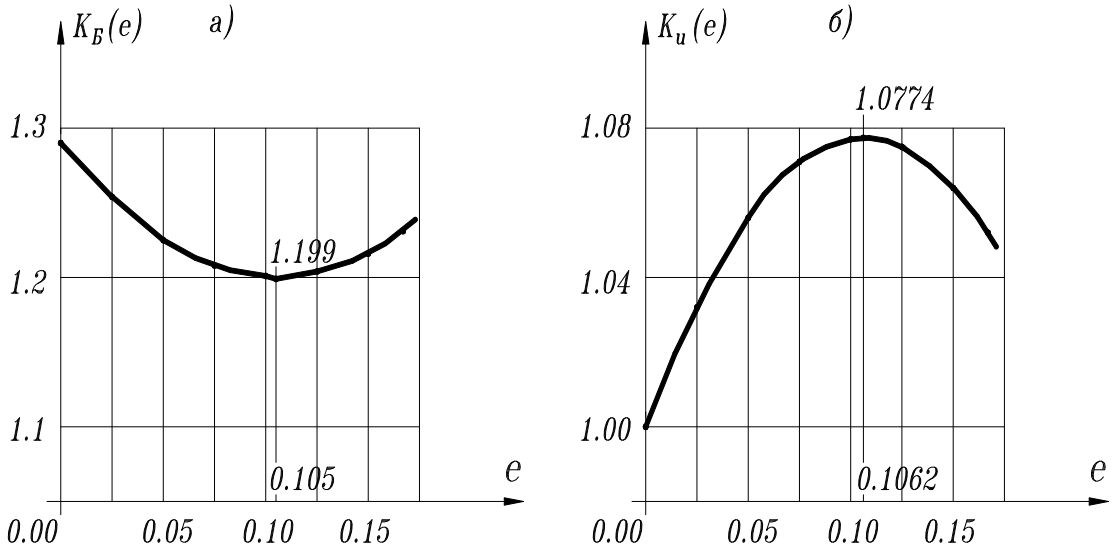



**Рис. 2.** Графики зависимости «$K(e) - e$» и «$K_u(e) - e$»

Приняв $K_Б(e) = (R_{bn}/\ R_b) + a_Б e + c_Б e^2,$ (28)

$K_Б(e) = 1 + a_u e + c_u e^2$ (29)

при $\frac{R_{bn}}{R_b} = \frac{22}{17} = 1{,}294$ и сведениях о коэффициентах $K_b(e), K_u(e)$ из табл. 1, методом наименьших квадратов [3] найдем параметры

$$a_Б = -1{,}803, \qquad c_Б = 8{,}586,$$
$$a_u = 1{,}458, \qquad c_u = -6{,}863.$$

Таким образом, получены функции

$$K_Б(\text{B30}, e) = 1{,}294 - 1{,}803 \cdot e + 8{,}586 \cdot e^2, \tag{30}$$

$$K_Б(\text{B30}, e) = 1 + 1{,}458 \cdot e - 6{,}863 e^2, \tag{31}$$

$min\ K_Б(\text{B30}, e) = 1{,}199$ в случае $e = 0{,}105,$

$min\ K_Б(\text{B30}, e) = 1{,}0774$ для $e = 0{,}1062$

и с коэффициентами $K_Б(\text{B30}, e), K_u(\text{B30}, e)$ в табл. 2.

Таблица 2

| $e = \frac{y_f}{h}$ | 0,025 | 0,050 | 0,075 | 0,100 | 0,125 | 0,150 | 0,167 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_Б(e)$ по табл. 1 | 1,254 | 1,225 | 1,208 | 1,201 | 1,204 | 1,216 | 1,231 |
| $K_Б(\text{B30}, e)$ по (30) | 1,254 | 1,225 | 1,207 | 1,200 | 1,203 | 1,217 | 1,232 |
| $K_u(e)$ по табл. 1 | 1,032 | 1,056 | 1,071 | 1,077 | 1,075 | 1,064 | 1,052 |
| $K_u(\text{B30}, e)$ по (30) | 1,032 | 1,056 | 1,071 | 1,077 | 1,075 | 1,064 | 1,052 |

Проверка применимости формул (30) и (31) выполнена в табл. 3.

Базовые усилия $N_Б(e) = F_u(e)/K_u(e)$, вычисленные при $F_u(e)$ и $K_u(e)$ по (9) и (31), близки к расчетным, установленным по методике п.п. 1, 2. (см. столбцы 9 и 11 табл. 3).

Таблица 3

| Класс бетона | $e$ по (5) | Коэффициент и усилие | | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $K_Б(e)$ по (30) и $F(e)$ по (8) | $K_u(e)$ по (30) и $F_u(e)$ по (8) | | | | | $N_m$ | $N_Б(e) = K_Б(e) \cdot F(e)$ | $N_Б(e) = F_u(e)/K_u(e)$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| В30 | 0,040 | 1,236 и 156,4 кН | 1,047 и 202,4 кН | 2,6 | 1,13 | 1529,8 | 1,0718397 | 192,956 | 193,3 | 193,3 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 1597,5 | 1,1558505 | 193,225 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 1665,2 | 1,2433817 | 192,977 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18102 | 1598,9 | 1,1576344 | 193,225 | | |
| | 0,080 | 1,205 и 142,8 кН | 1,073 и 184,8 кН | 3,8 | 1,19 | 1611,0 | 1,4579698 | 172,017 | 172,1 | 172,2 |
| | | | | 4,8 | 1,24 | 1678,7 | 1,5427644 | 172,261 | | |
| | | | | 5,8 | 1,29 | 1746,4 | 1,6295328 | 172,043 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24141 | 1680,6 | 1,5451742 | 172,261 | | |
| | 0,120 | 1,201 и 129,2 кН | 1,076 и 167,2 кН | 4,8 | 1,24 | 1678,7 | 1,7278818 | 155,261 | 155,2 | 155,4 |
| | | | | 5,8 | 1,29 | 1746,4 | 1,8134431 | 155,388 | | |
| | | | | 6,8 | 1,34 | 1814,1 | 1,9003236 | 155,098 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28023 | 1733,2 | 1,7966594 | 155,396 | | |
| | 0,160 | 1,225 и 115,6 кН | 1,058 и 149,6 кН | 5,4 | 1,27 | 1719,3 | 1,9170295 | 141,347 | 141,6 | 141,6 |
| | | | | 6,4 | 1,32 | 1787,0 | 2,0035427 | 141,446 | | |
| | | | | 7,4 | 1,37 | 1854,7 | 2,0909913 | 141,168 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30813 | 1770,9 | 1,9828824 | 141,457 | | |

## 4. Базовые нагрузки при внецентренных воздействиях на элементы прямоугольных сечений из тяжелого бетона естественного твердения классов по СНиП 2.03.01-84*

Показатели материала принимаются из табл. 4.

Таблица 4

| Класс бетона | $R_{bn} = \sigma_u$, МПа | $E_b = E$, МПа | $\varepsilon_u \cdot 10^6$ по (3) | $\alpha$, МПа | Зависимость $\sigma = E \cdot \varepsilon - \alpha \cdot \varepsilon^2$ (1) | $R_b$, МПа |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| В3,5 | 2,7 | 9500 | 568,4 | 8346480 | $9500 \cdot \varepsilon - 8346480 \cdot \varepsilon^2$ | 2,1 |
| В5 | 3,5 | 13000 | 538,5 | 12071400 | $13000 \cdot \varepsilon - 12071400 \cdot \varepsilon^2$ | 2,8 |
| В7,5 | 5,5 | 16000 | 687,5 | 11636400 | $16000 \cdot \varepsilon - 11636400 \cdot \varepsilon^2$ | 4,5 |
| В10 | 7,5 | 18000 | 833,3 | 10800000 | $18000 \cdot \varepsilon - 10800000 \cdot \varepsilon^2$ | 6,0 |
| В12,5 | 9,5 | 21000 | 904,8 | 11605300 | $21000 \cdot \varepsilon - 11605300 \cdot \varepsilon^2$ | 7,5 |
| В15 | 11,0 | 23000 | 956,5 | 12022700 | $23000 \cdot \varepsilon - 12022700 \cdot \varepsilon^2$ | 8,5 |
| В20 | 15,0 | 27000 | 1111,1 | 12150000 | $27000 \cdot \varepsilon - 12150000 \cdot \varepsilon^2$ | 11,5 |
| В25 | 18,5 | 30000 | 1233,3 | 12162200 | $30000 \cdot \varepsilon - 12162200 \cdot \varepsilon^2$ | 14,5 |
| В35 | 25,5 | 34500 | 1478,3 | 11669100 | $34500 \cdot \varepsilon - 11669100 \cdot \varepsilon^2$ | 19,5 |
| В40 | 29,0 | 36000 | 1611,1 | 11172400 | $36000 \cdot \varepsilon - 11172400 \cdot \varepsilon^2$ | 22,0 |
| В45 | 32,0 | 37500 | 1706,7 | 10986300 | $37500 \cdot \varepsilon - 10986300 \cdot \varepsilon^2$ | 25,0 |
| В50 | 36,0 | 39000 | 1846,2 | 10562500 | $39000 \cdot \varepsilon - 10562500 \cdot \varepsilon^2$ | 27,5 |
| В55 | 39,5 | 39500 | 2000,0 | 9875000 | $39500 \cdot \varepsilon - 9875000 \cdot \varepsilon^2$ | 30,0 |
| В60 | 43,0 | 40000 | 2150,0 | 9302330 | $40000 \cdot \varepsilon - 9302330 \cdot \varepsilon^2$ | 33,0 |

*Примечание:* класс В30 приводится в п. 3.

Вычисление базовых усилий в соответствии с рекомендациями п.п. 1, 2 и по формуле (32) при $F_u(e)$ и $K_u(e)$ по (9) и (31) сведено в табл. 5.

Таблица 5

| Класс бетона | $e$ по (5) | Усилие $F_u(e)$ по (9) | $K_u(e)$ по (31) | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | $K_u(e)$ по (27) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $N_m$ | $N_Б(e)$ по (31) | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| В3,5 | 0,040 | 24,84 | 1,047 | 2,6 | 1,13 | 642,3 | 0,44962793 | 23,708 | 23,72 | 24,84/23,74=1,046 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 670,7 | 0,48483050 | 23,742 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 699,1 | 0,52150630 | 23,714 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18102 | 672,1 | 0,48660354 | 23,742 | | |
| | 0,080 | 22,68 | 1,073 | 3,6 | 1,18 | 670,7 | 0,60484889 | 21,122 | 21,14 | 22,68/21,17=1,071 |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 699,1 | 0,64022759 | 21,165 | | |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 727,5 | 0,67644066 | 21,151 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24272 | 706,4 | 0,64945558 | 21,167(21,17) | | |
| | 0,120 | 20,52 | 1,076 | 4,6 | 1,23 | 699,1 | 0,71812168 | 19,067 | 19,07 | 20,52/19,09=1,075 |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 727,55 | 0,75395232 | 19,094 | | |
| | | | | 6,6 | 1,33 | 756,0 | 0,79033472 | 19,070 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28147 | 728,4 | 0,75503063 | 19,094 | | |
| | 0,160 | 18,36 | 1,058 | 5 | 1,25 | 710,5 | 0,79034119 | 17,348 | 17,35 | 18,36/17,38=1,056 |
| | | | | 6 | 1,30 | 738,9 | 0,82646425 | 17,381 | | |
| | | | | 7 | 1,35 | 767,3 | 0,86297822 | 17,366 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30938 | 744,25 | 0,83331342 | 17,382 | | |
| В7,5 | 0,040 | 50,6 | 1,047 | 2,6 | 1,13 | 776,9 | 0,54435610 | 48,239 | 48,33 | 50,6/48,31 =1,047 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 811,25 | 0,58697814 | 48,306 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 845,6 | 0,63139330 | 48,244 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18097 | 811,9 | 0,58779855 | 48,306 | | |
| | 0,080 | 46,2 | 1,073 | 3,6 | 1,18 | 811,25 | 0,73193249 | 42,978 | 43,06 | 46,2/43,07 =1,073 |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 845,6 | 0,77475504 | 43,062 | | |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 880,0 | 0,81864861 | 43,031 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24152 | 853,4 | 0,78462100 | 43,065 | | |
| | 0,120 | 41,8 | 1,076 | 4,6 | 1,23 | 845,6 | 0,86884305 | 38,796 | 38,85 | 41,8/38,85 =1,076 |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 880,0 | 0,91218781 | 38,849 | | |
| | | | | 6,6 | 1,33 | 914,4 | 0,95620034 | 38,797 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28024 | 880,2 | 0,91244297 | 38,649 | | |

Продолжение табл. 5

| Класс бетона | $e$ по (5) | Усилие $F_u(e)$ по (9) | $K_u(e)$ по (31) | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | $K_u(e)$ по (27) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $N_m$ | $N_Б(e)$ по (31) | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| В7,5 | 0,160 | 37,4 | 1,058 | 5 | 1,25 | 859,4 | 0,95613982 | 35,300 | 35,35 | 37,4/35,36 =1,058 |
| | | | | 6 | 1,30 | 893,75 | 0,99984739 | 35,363 | | |
| | | | | 7 | 1,35 | 928,1 | 1,0440274 | 35,331 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30816 | 899,4 | 1,0070807 | 35,364 | | |
| В12,5 | 0,040 | 87,4 | 1,047 | 2,6 | 1,13 | 1022,4 | 0,71636769 | 83,322 | 83,48 | 87,4/83,44 =1,047 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 1067,65 | 0,77251440 | 83,438 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 1112,9 | 0,83102464 | 83,330 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18098 | 1068,5 | 0,77360062 | 83,438 | | |
| | 0,080 | 79,8 | 1,073 | 3,6 | 1,18 | 1067,65 | 0,96327473 | 74,235 | 74,37 | 79,8/74,39 =1,073 |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 1112,9 | 1,0196868 | 74,380 | | |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 1158,15 | 1,0774282 | 74,325 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24125 | 1123,1 | 1,0325878 | 74,385 | | |
| | 0,120 | 72,2 | 1,076 | 4,6 | 1,23 | 1112,9 | 1,1435073 | 67,012 | 67,10 | 72,2/67,10 =1,076 |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 1158,15 | 1,2005256 | 67,103 | | |
| | | | | 6,6 | 1,33 | 1203,4 | 1,2584195 | 67,013 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28014 | 1158,3 | 1,2007168 | 67,103 | | |
| | 0,160 | 64,6 | 1,058 | 5 | 1,25 | 1131,0 | 1,2583159 | 60,974 | 61,06 | 64,6/61,08 =1,058 |
| | | | | 6 | 1,30 | 1176,25 | 1,3158916 | 61,081 | | |
| | | | | 7 | 1,35 | 1221,5 | 1,3740913 | 61,026 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30802 | 1183,7 | 1,3254306 | 61,083 | | |
| В20 | 0,040 | 138,0 | 1,047 | 2,6 | 1,13 | 1255,5 | 0,87964602 | 131,561 | 131,8 | 138,0/131,7 =1,048 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 1311,1 | 0,94863201 | 131,745 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 1366,7 | 1,0205286 | 131,575 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18099 | 1312,2 | 0,95004118 | 131,745 | | |
| | 0,080 | 126,0 | 1,073 | 3,6 | 1,18 | 1311,1 | 1,1829051 | 117,213 | 117,4 | 126,0/117,5 =1,072 |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 1366,7 | 1,2522212 | 117,443 | | |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 1422,2 | 1,3230385 | 117,357 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24139 | 1379,3 | 1,2681569 | 117,451 | | |

Продолжение табл. 5

| Класс бетона | $e$ по (5) | Усилие $F_u(e)$ по (9) | $K_u(e)$ по (31) | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | $K_u(e)$ по (27) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $N_m$ | $N_Б(e)$ по (31) | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| B20 | 0,120 | 114,0 | 1,076 | 4,6 | 1,23 | 1366,7 | 1,4042822 | 105,808 | 105,9 | 114,0/106,0 =1,075 |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 1422,2 | 1,4742135 | 105,952 | | |
| | | | | 6,6 | 1,33 | 1477,7 | 1,5452239 | 105,811 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28026 | 1422,5 | 1,4745941 | 105,952 | | |
| | 0,160 | 102,0 | 1,058 | 5 | 1,25 | 1388,9 | 1,5452316 | 96,214 | 96,41 | 102,0/96,45 =1,058 |
| | | | | 6 | 1,30 | 1444,45 | 1,6159180 | 96,445 | | |
| | | | | 7 | 1,35 | 1500,0 | 1,6873663 | 96,357 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30801 | 1453,3 | 1,6272529 | 96,448 | | |
| B40 | 0,040 | 266,8 | 1,047 | 2,6 | 1,13 | 1820,55 | 1,2755798 | 254,352 | 254,8 | 266,8/254,7 =1,048 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 1901,1 | 1,3755272 | 254,707 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 1981,65 | 1,4796824 | 254,378 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18095 | 1902,6 | 1,3774274 | 254,707 | | |
| | 0,080 | 243,6 | 1,073 | 3,6 | 1,18 | 1917,2 | 1,7351014 | 226,751 | 227,0 | 243,6/227,1 =1,073 |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 1997,75 | 1,8359942 | 227,072 | | |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 2078,3 | 1,9392455 | 226,783 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24131 | 1999,9 | 1,8387171 | 227,072 | | |
| | 0,120 | 220,4 | 1,076 | 4,6 | 1,23 | 1981,65 | 2,0361278 | 204,563 | 204,8 | 220,4/204,8 =1,076 |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 2062,2 | 2,1376198 | 204,841 | | |
| | | | | 6,6 | 1,33 | 2142,75 | 2,2406839 | 204,567 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28018 | 2062,5 | 2,1380032 | 204,841 | | |
| | 0,160 | 197,2 | 1,058 | 5 | 1,25 | 2013,9 | 2,2405899 | 186,130 | 186,4 | 197,2/186,5 =1,057 |
| | | | | 6 | 1,30 | 2094,45 | 2,3430785 | 186,460 | | |
| | | | | 7 | 1,35 | 2175,0 | 2,4466801 | 186,291 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30807 | 2107,4 | 2,3596590 | 186,466 | | |
| B50 | 0,040 | 331,2 | 1,047 | 2,6 | 1,13 | 2086,2 | 1,4617274 | 315,748 | 316,3 | 331,2/316,2 =1,047 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 2178,5 | 1,5762777 | 316,187 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 2270,8 | 1,6956158 | 315,779 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18092 | 2180,2 | 1,5784327 | 316,187 | | |

Окончание табл. 5

| Класс бетона | $e$ по (5) | Усилие $F_u(e)$ по (9) | $K_u(e)$ по (31) | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | $K_u(e)$ по (27) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | $N_m$ | $N_Б(e)$ по (31) | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| B50 | 0,080 | 302,4 | 1,073 | 3,6 | 1,18 | 2179,0 | 1,9883654 | 281,484 | 281,8 | 302,4/281,9 =1,073 |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 2289,3 | 2,1039736 | 281,882 | | |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 2381,6 | 2,222286 | 281,523 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24129 | 2291,7 | 2,1070117 | 281,883 | | |
| | 0,120 | 273,6 | 1,076 | 4,6 | 1,23 | 2270,8 | 2,3332381 | 253,940 | 254,3 | 273,6/254,3 =1,076 |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 2363,1 | 2,4495411 | 254,284 | | |
| | | | | 6,6 | 1,33 | 2455,4 | 2,5676286 | 253,945 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28018 | 2363,5 | 2,4500487 | 254,284 | | |
| | 0,160 | 244,8 | 1,058 | 5 | 1,25 | 2307,8 | 2,5675862 | 231,059 | 231,4 | 244,8/231,5 =1,057 |
| | | | | 6 | 1,30 | 2400,1 | 2,6850308 | 231,467 | | |
| | | | | 7 | 1,35 | 2492,4 | 2,8037434 | 231,256 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30796 | 2414,8 | 2,7038509 | 231,475 | | |
| B60 | 0,040 | 395,6 | 1,047 | 2,6 | 1,13 | 2429,5 | 1,022410 | 377,142 | 377,8 | 395,6/377,7 =1,043 |
| | | | | 3,6 | 1,18 | 2537,0 | 1,8356349 | 377,668 | | |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 2644,5 | 1,9746497 | 377,180 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,18094 | 2539,0 | 1,8381749 | 377,668 | | |
| | 0,080 | 361,2 | 1,073 | 3,6 | 1,18 | 2558,5 | 2,3155013 | 336,217 | 336,6 | 126,0/117,5 =1,072 |
| | | | | 4,6 | 1,23 | 2666,0 | 2,4501501 | 336,692 | | |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 2773,5 | 2,5879416 | 336,265 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,24133 | 2668,9 | 2,4538334 | 336,692 | | |
| | 0,120 | 326,8 | 1,076 | 4,6 | 1,23 | 2644,5 | 2,7172085 | 303,316 | 303,7 | 114,0/106,0 =1,075 |
| | | | | 5,6 | 1,28 | 2752,0 | 2,8526601 | 303,728 | | |
| | | | | 6,6 | 1,33 | 2859,5 | 2,9901995 | 303,323 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,28021 | 2752,5 | 2,8532955 | 303,728 | | |
| | 0,160 | 292,4 | 1,058 | 5 | 1,25 | 2687,5 | 2,9900081 | 275,986 | 276,4 | 292,4/96,45 =1,058 |
| | | | | 6 | 1,30 | 2795,0 | 3,1267935 | 276,474 | | |
| | | | | 7 | 1,35 | 2902,5 | 3,2650540 | 276,223 | | |
| | | | | Б($e$) | 1,30802 | 2812,2 | 3,1488123 | 276,484 | | |

Представленные результаты позволяют сделать вывод, что формулой (31) можно пользоваться во всём диапазоне тяжёлых бетонов классов В3,5 … В60 по СНиП 2.03.01-84*, получая нагрузки, характеризующие с вероятностью 0,95 нижнюю границу разрушения.

Определим теперь (табл. 6) базовые усилия $\overline{N}_b$ для случаев $e = 0{,}105$ и найдем соответствующие коэффициенты $\overline{K}_b$(В, 0,105) по (26).

Таблица 6

| Класс бетона | $e$ по (5) | $R_Б$, МПа | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | $\overline{K}_b(e)$ по (26) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $N_m$ | $F(e)$ по (8) | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| В3,5 | 0,105 | 2,1 | 4,4 | 1,22 | 693,45 | 0,68499113 | 19,797 | 16,59 | 19,82/16,59 =1,195 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 721,87 | 0,72072922 | 19,822 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 750,29 | 0,75708503 | 19,795 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26904 | 721,32 | 0,72003151 | 19,822 | | |
| В5 | 0,105 | 2,8 | 4,4 | 1,22 | 656,97 | 0,64917819 | 25,634 | 22,12 | 25,67/22,12 =1,160 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 683,895 | 0,68305512 | 25,665 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 710,82 | 0,71751808 | 25,627 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26746 | 682,51 | 0,68129671 | 25,665 | | |
| В7,5 | 0,105 | 4,5 | 4,4 | 1,22 | 838,75 | 0,82878531 | 40,282 | 35,55 | 40,33/35,55 =1,1345 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 873,125 | 0,87203733 | 40,330 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 907,50 | 0,91603458 | 40,271 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26743 | 871,35 | 0,86978582 | 40,330 | | |
| В10 | 0,105 | 6,0 | 4,4 | 1,22 | 1016ю6 | 1,0045066 | 54,929 | 47,40 | 55,00/47,40 =1,160 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 1058,3 | 1,0569736 | 54,996 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 1100,0 | 1,1103445 | 54,915 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26764 | 1056,3 | 1,0544354 | 54,996 | | |
| В12,5 | 0,105 | 7,5 | 4,4 | 1,22 | 1103,9 | 1,0908092 | 69,578 | 59,25 | 69,66/59,25 =1,176 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 1149,1 | 1,1476840 | 69,661 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 1194,3 | 1,2055352 | 69,559 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26743 | 1146,8 | 1,1447647 | 69,662 | | |
| В15 | 0,105 | 8,5 | 4,4 | 1,22 | 1166,9 | 1,1530223 | 80,564 | 67,15 | 80,66/67,15 =1,201 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 1214,75 | 1,2132255 | 80,661 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 1262,6 | 1,2744722 | 80,542 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26745 | 1212,4 | 1,2102451 | 80,661 | | |
| В20 | 0,105 | 11,5 | 4,4 | 1,22 | 1355,5 | 1,3393807 | 109,859 | 90,85 | 110,0/90,85 =1,211 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 1411,1 | 1,4093390 | 109,992 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 1466,7 | 1,4804989 | 109,830 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26754 | 1408,4 | 1,4059144 | 109,992 | | |
| В25 | 0,105 | 14,5 | 4,4 | 1,22 | 1504,6 | 1,4867112 | 135,492 | 114,6 | 135,7/114,6 =1,185 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 1566,3 | 1,5643390 | 135,656 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 1628,0 | 1,6433103 | 135,456 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26753 | 1563,2 | 1,5604093 | 135,657 | | |
| В30 | 0,105 | 17 | 4,4 | 1,22 | 1665,2 | 1,6489471 | 161,201 | 134,7 | 161,3/134,7 =1,197 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 1732,9 | 1,7344205 | 161,308 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 1800,6 | 1,8213636 | 160,985 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26744 | 1715,9 | 1,7128245 | 161,322 | | |
| В35 | 0,105 | 19,5 | 4,4 | 1,22 | 1803,5 | 1,7820790 | 186,761 | 154,1 | 187,0/154,1 =1,213 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 1877,45 | 1,8751257 | 186,986 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 1951,4 | 1,9697796 | 186,710 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26746 | 1873,7 | 1,8703698 | 186,987 | | |
| В40 | 0,105 | 22 | 4,4 | 1,22 | 1965,55 | 1,9421992 | 212,395 | 173,8 | 212,7/173,8 =1,224 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 2046,1 | 2,0435459 | 212,651 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 2126,65 | 2,1466394 | 212,338 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26750 | 2042,1 | 2,0384684 | 212,652 | | |

Окончание табл. 6

| Класс бетона | $e$ по (5) | $R_Б$, МПа | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | Усилие, кН | | $\bar{K}_b(e)$ по (26) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $N_m$ | $F(e)$ по (8) | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| В45 | 0,105 | 25,0 | 4,4 | 1,22 | 2082,2 | 2,0574787 | 234,368 | 197,5 | 234,7/197,5 =1,188 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 2167,5 | 2,1648071 | 234,650 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 2252,8 | 2,2739856 | 234,304 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26745 | 2163,2 | 2,1593493 | 234,651 | | |
| В50 | 0,105 | 27,5 | 4,4 | 1,22 | 2252,4 | 2,2256696 | 263,663 | 217,25 | 264,0/217,25 =1,215 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 2344,7 | 2,3417964 | 263,981 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 2437,0 | 2,4599438 | 263,590 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26743 | 2339,9 | 2,3357078 | 263,982 | | |
| В55 | 0,105 | 30,0 | 4,4 | 1,22 | 2440,0 | 2,4110156 | 289,296 | 237,0 | 289,6/237,0 =1,222 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 2540,0 | 2,5368320 | 289,645 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 2640,0 | 2,6648236 | 289,219 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26752 | 2535,0 | 2,5304878 | 289,647 | | |
| В60 | 0,105 | 33,0 | 4,4 | 1,22 | 2623,0 | 2,5918429 | 315,930 | 260,7 | 315,3/260,7 =1,209 |
| | | | 5,4 | 1,27 | 2730,5 | 2,7270962 | 315,310 | | |
| | | | 6,4 | 1,32 | 2838,0 | 2,8646872 | 315,845 | | |
| | | | Б($e$) | 1,26749 | 2725,1 | 2,7202448 | 315,311 | | |

Установленные нагрузки $\bar{N}_Б(В, e = 0{,}105)$ и показатели $\bar{K}_b(В, e = 0{,}105)$ в пределах точности выполненных вычислений совпадают с усилиями $N_Б(В, e = 0{,}105)$ и коэффициентами $K_Б(В, e = 0{,}105)$, полученными по формулам (32) и (26) при $K_u(e)$ по (31) и представленными в табл. 7. Функцию (31) можно применять для бетонов В3,5 … В60. Величина характеристики $K_Б(В, e)$ зависит от класса материала В и от относительного эксцентриситета $e$.

Таблица 7

| $e = \frac{y_f}{h}$ | 0,105 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_u(e)$ по (31) | 1,077 | | | | | | | |
| Класс бетона | В3,5 | В5 | В7,5 | В10 | В12,5 | В15 | В20 | В25 |
| $F(В, e)$, кН по (8) | 16,59 | 22,12 | 35,55 | 47,40 | 59,25 | 67,15 | 90,85 | 114,6 |
| $F_u(В, e)$, кН по (9) | 21,33 | 27,65 | 43,45 | 59,25 | 75,05 | 86,90 | 118,5 | 146,2 |
| $\bar{N}_Б(В, e)$, кН - табл.6 | 19,82 | 25,67 | 40,33 | 55,00 | 69,66 | 80,66 | 110,0 | 135,7 |
| $N_Б(В, e)$, кН – (32) | 19,81 | 25,67 | 40,34 | 55,01 | 69,68 | 80,69 | 110,0 | 135,7 |
| $K_Б(В, e)$ по табл.6 | 1,195 | 1,160 | 1,135 | 1,160 | 1,176 | 1,201 | 1,211 | 118,4 |
| $K_Б(В, e)$ по (26) | 1,194 | 1,160 | 1,135 | 1,161 | 1,176 | 1,201 | 1,211 | 118,4 |

Окончание табл. 7

| $e = \frac{y_f}{h}$ | 0,105 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K_u(e)$ по (31) | 1,077 | | | | | | |
| Класс бетона | В30 | В35 | В40 | В45 | В50 | В55 | В60 |
| $F(В, e)$, кН по (8) | 134,7 | 154,1 | 173,8 | 197,5 | 217,3 | 237,0 | 260,7 |
| $F_u(В, e)$, кН по (9) | 173,8 | 201,5 | 229,1 | 252,8 | 284,4 | 312,1 | 339,7 |
| $\bar{N}_Б(В, e)$, кН - табл.6 | 161,3 | 187,0 | 212,7 | 234,7 | 264,0 | 289,6 | 315,3 |
| $N_Б(В, e)$, кН – (32) | 161,4 | 187,1 | 212,7 | 234,7 | 264,1 | 289,7 | 315,4 |
| $K_Б(В, e)$ по табл.6 | 1,197 | 1,213 | 1,224 | 1,188 | 1,215 | 1,222 | 1,209 |
| $K_Б(В, e)$ по (26) | 1,198 | 1,214 | 1,224 | 1,188 | 1,215 | 1,222 | 1,210 |

Таблица 8

| $e$ при классе бетона | $K_u(\text{В}, e)$ | Усилие, кН | | | $K_{\text{Б}}(\text{В}, e)$ по (33) | $m$ | $r_m$ | $\varepsilon_{r_m} \cdot 10^6$ | $B_m \cdot 10^2$, м$^{-1}$ | $\bar{N}_m$, кН | $\bar{K}_{\text{Б}}(\text{В}, e)$ по (33) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $F(\text{В}, e)$ по (8) | $F_u(\text{В}, e)$ по (9) | $N_{\text{Б}}(\text{В}, e)$ по (32) | | | | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 0,023 при В5 | 1,030 | 26,71 | 33,39 | 32,42 | 1,214 | 2 | 1,10 | 592,4 | 0,33136925 | 32,39 | 1,21 |
| | | | | | | 3 | 1,15 | 619,3 | 0,36483229 | 32,42 | |
| | | | | | | 4 | 1,20 | 646,2 | 0,40029750 | 32,36 | |
| | | | | | | Б($e$) | 1,14167 | 614,8 | 0,35909214 | 32,42 | |
| 0,046 при В10 | 1,053 | 54,48 | 68,10 | 64,67 | 1,187 | 3 | 1,15 | 958,4 | 0,71325901 | 64,63 | 1,187 |
| | | | | | | 4 | 1,20 | 1000,0 | 0,76534965 | 64,69 | |
| | | | | | | 5 | 1,25 | 1041,6 | 0,81935993 | 64,58 | |
| | | | | | | Б($e$) | 1,19265 | 993,8 | 0,75746405 | 64,69 | |
| 0,069 при В15 | 1,068 | 73,27 | 94,82 | 88,78 | 1,212 | 3,6 | 1,18 | 1128,7 | 0,97238491 | 88,67 | 1,212 |
| | | | | | | 4,6 | 1,23 | 1176,5 | 1,0322652 | 88,78 | |
| | | | | | | 5,6 | 1,28 | 1224,3 | 1,0937519 | 88,65 | |
| | | | | | | Б($e$) | 1,22792 | 1174,5 | 1,0297304 | 88,78 | |
| 0,092 при В25 | 1,076 | 151,0 | 118,3 | 140,3 | 1,186 | 4 | 1,20 | 1479,95 | 1,4008467 | 140,064 | 1,186 |
| | | | | | | 5 | 1,25 | 1541,6 | 1,4780874 | 140,288 | |
| | | | | | | 6 | 1,30 | 1603,25 | 1,5568883 | 140,135 | |
| | | | | | | Б($e$) | 1,25471 | 1547,4 | 1,4854379 | 140,269 | |
| 0,115 при В35 | 1,077 | 196,4 | 150,2 | 182,4 | 1,214 | 4,6 | 1,23 | 1818,3 | 1,8465992 | 182,145 | 1,214 |
| | | | | | | 5,6 | 1,28 | 1892,2 | 1,9397374 | 182,352 | |
| | | | | | | 6,6 | 1,33 | 1966,1 | 2,0343686 | 182,070 | |
| | | | | | | Б($e$) | 1,27617 | 1886,6 | 1,9326304 | 182,353 | |
| 0,138 при В45 | 1,071 | 231,7 | 181,0 | 216,3 | 1,195 | 4,8 | 1,24 | 2116,3 | 2,2617084 | 216,121 | 1,196 |
| | | | | | | 5,8 | 1,29 | 2201,65 | 2,3696906 | 216,451 | |
| | | | | | | 6,8 | 1,34 | 2287,0 | 2,4790929 | 216,200 | |
| | | | | | | Б($e$) | 1,29340 | 2207,4 | 2,3770153 | 216,453 | |
| 0,161 при В55 | 1,057 | 267,8 | 203,4 | 253,4 | 1,246 | 5 | 1,25 | 2500,0 | 2,7859158 | 252,942 | 1,246 |
| | | | | | | 6 | 1,30 | 2600,0 | 2,9131754 | 253,400 | |
| | | | | | | 7 | 1,35 | 2700,0 | 3,0418055 | 253,178 | |
| | | | | | | Б($e$) | 1,30868 | 2617,4 | 2,9354581 | 253,410 | |

Таким образом, базовые усилия $N_Б(В, e) = F_u(В, e) / K_u(e)$ (32)
и коэффициент запаса прочности при вероятности разрушения $p = 0{,}05$

$$K(В, e) = N_Б(В, e) / F(В, e), \quad (33)$$

$$F_u(В, e) = R_{bn} \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e); \quad (9)$$

$$K_u(e) = 1 + 1{,}46 \cdot e - 6.86 \cdot e^2; \quad (34)$$

$$F(В, e) = R_b \cdot b \cdot h \cdot (1 - 2 \cdot e). \quad (8)$$

Примеры расчётов по формулам (32), (33) и проверка результатов выполнены в табл. 8 с показателями материала по табл. 4.

Библиографический список


1. СНиП 2.03.01-84*. Бетонные и железобетонные конструкции / Госстрой России. – М.: ГУП ЦПП, 2000. – 76 с.
2. Синозерский, А. Н. Определение базовых усилий и напряжённо-деформированного состояния призм и мелкозернистого бетона при внецентренном сжатии / А. Н. Синозерский, Р. А. Мухтаров // Строительная механика и конструкции. – 2012. – Вып. №1(4). – С.72-83.
3. Лапчик, М. П. Численные методы : учеб. пособие для студ. вузов / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчика. – М. : Изд. Центр «Академия», 2004. – 384 с.
4. Фильчаков, П. Ф. Справочник по высшей математике / П. Ф. Фильчаков. – Киев : Изд-во «Наукова думка», 1973. – 744 с.


Reference


1. Building norms and regulations 2.03.01-84*. Concrete and reinforced concrete structures / Gosstroi f Russia. M.: GUP TzPP, 2000. – 76 p.
2. Sinozyorsky, A.N. Definition of base forces and deflected mode of prisms from fine concrete under eccentric compression / A.N. Sinozersky, R.A. Muhtarov // Structural Mechanics and structures. – 2012. – Issue. №1 (4). – P. 72-83.
3. Lapchic, M. P. Numeric methods : teaching aid for students / M.P. Lapchic, M.I. Ragulin, E.K. Henner; under red. M.P. Lapchic. – M.: Pub. House. Centr-Academiya, 2004. – 384 p.
4. Filchikov, P.F. Reference book on High Maths / P. F. Filchikov. – Kiev: Public House «Naukova Dumka », 1973. – 744 p.



**Ключевые слова**: внецентренное сжатие, мелкозернистый бетон.

**Keywords:** eccentric compression, fine concrete.